UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

HELENA RA REGINA SAMPAIO

UMA ABORDAGEM HISTÓRICO-FILOSÓFICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA:

CONTRIBUIÇÕES AO PROCESSO DE APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

Londrina
2008

HELENARA REGINA SAMPAIO

UMA ABORDAGEM HISTÓRICO-FILOSÓFICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA:

CONTRIBUIÇÕES AO PROCESSO DE APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Irinéa de L. Batista

Londrina
2008

Catalogação na publicação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S192a Sampaio, Helenara Regina.
Uma abordagem histórico-filosófica na Educação Matemática: Contribuições ao processo de aprendizagem de trigonometria no Ensino Médio / Helenara Regina Sampaio. – Londrina, 2008.
188f. : il.

Orientador (a): Irinéa de Lourdes Batista.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2008.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Trigonometria (Ensino médio) – Teses. 3. Educação matemática – Teses. I. Batista, Irinéa de Lourdes. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

HELENARA REGINA SAMPAIO

UMA ABORDAGEM HISTÓRICO-FILOSÓFICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA:

CONTRIBUIÇÕES AO PROCESSO DE APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Irinéa de Lourdes Batista
Universidade Estadual de Londrina

Profa. Dra. Ângela Marta P. das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina

Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 27 de maio de 2008.

A Deus, aos meus pais e aos meus amigos...

companheiros de todas as horas...

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me deu tantos motivos para lhe agradecer por Sua infinita bondade e misericórdia ao consentir em minha existência e pela conseqüente conclusão desta dissertação.

À minha orientadora e amiga Profª Drª Irinéa de Lourdes Batista, pela forma generosa com que me acolheu em sua vida, pelo esmero e afinco na orientação de meus passos nesta pesquisa, fazendo-me sentir amparada por sua sabedoria.

Aos meus pais, que, por meio de muita dedicação e amor, me criaram e permitiram a realização dos meus passos futuros.

Ao meu marido Fabrízio, que, com paciência e amor acompanhou-me em todos os momentos.

Ao Grupo de Pesquisa que contribuiu para a validação das questões, à Profa Dra Rosana Figueiredo Salvi, aos colegas da matemática, Thiago, Simone, Eliane por suas considerações e correções para a elaboração das atividades.

À secretaria de pós-graduação do curso de Ensino de Ciências e Educação Matemática, pelos serviços prestados com esmero e dedicação.

A todos que, com boa intenção, colaboraram para a realização e finalização deste trabalho.

Aos amigos e colegas, Eliana, Wanda, Aparecida, pois me apoiaram com suas opiniões, trilhando esta etapa de minha vida.

Aos professores e colegas de Curso, aos profissionais entrevistados, aos alunos que participaram da investigação, pela concessão de informações valiosas para a realização deste estudo.

"O céu deve ser necessariamente esférico, pois a esfera, sendo gerada pela rotação do círculo, é, de todos os corpos, o mais perfeito".

Aristóteles

"O livro da natureza foi escrito exclusivamente com figuras e símbolos matemáticos".

Galileu

SAMPAIO, Helenara Regina. **Uma abordagem histórico-filosófica na educação matemática: contribuições ao processo de aprendizagem em trigonometria no ensino médio.** 2008. 173f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

RESUMO

Esta pesquisa buscou investigar o processo de construção de uma abordagem histórico-filosófica por meio de uma reconstrução histórica da trigonometria, na qual realizamos a pesquisa documental tomando por base livros de História da Matemática, especificamente os que tratam da História da trigonometria. Adotamos uma abordagem metodológica qualitativa, tendo como um dos objetivos a investigação da construção de uma seqüência didática, fundamentada a partir da reconstrução histórico-filosófica do conteúdo de trigonometria, abrangendo principalmente o estudo das funções trigonométricas, com o intuito de auxiliar o aluno do Ensino Médio no seu aprendizado. Introduzimos uma abordagem filosófica ao incorporarmos uma discussão axiológica, constituída por um conjunto de valores cognitivos da Ciência, aplicados na Educação Matemática. Para contemplar os objetivos desta pesquisa, realizamos a aplicação de uma seqüência didática, fundamentada também pela Metodologia de Pesquisa denominada Engenharia Didática, junto a alunos do Ensino Médio de uma escola pública de Londrina – PR. Concluímos que a abordagem construída mostrou-se eficaz para aprendizagem de trigonometria, possibilitando a manifestação dos valores cognitivos da matemática em nossa seqüência didática e sua incorporação ao conhecimento do aluno.

Palavras-chave: História e filosofia da matemática. Trigonometria. Valores cognitivos. Engenharia didática. Ensino médio.

SAMPAIO, Helenara Regina. **A historical-philosophical approach in mathematics education: assessments for the learning of trigonometry in high school.** 2008. 190p. Dissertation (Master's Degree in Sciences Education and Mathematical Education) – State University of Londrina, Londrina, 2008.

ABSTRACT

The aim of this research was the construction process of a historical-philosophical approach through a historical reconstruction of Trigonometry, in which we carried through a documental research on the basis of History of Mathematics textbooks, particularly those that deal with the History of Trigonometry. We used a qualitative methodological approach, in which we aimed to investigate the construction of a didactical sequence, grounded by a historical-philosophical reconstruction of the Trigonometry topic which embraces specifically the study of trigonometric functions, that may assisst the high-school student in his learning. We have introduced a philosophical approach by combining it with an axiological discussion, composed by a set of cognitive values of Science, applied in Mathematics Education. To regard the aims of this research, we applied the activity by means of a didactical sequence, also based on the Research Methodology named Didactic Engineering, to high-school students of a public school in the city of Londrina, PR. We conclude that the constructed approach proved to be effective for the learning of Trigonometry, making possible the expression of the cognitive values of Mathematics in our didactical sequence and its embodiments to the student's knowledge.

Keywords: History and philosophy of mathematics. Trigonometry. Cognitive values. Didactic engineering. High school.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Iniciamos esta dissertação de Mestrado na linha de pesquisa: História e Filosofia da Ciência e da Matemática, que visa à compreensão das relações entre saberes científicos e escolares e a constituição histórico-cultural das Ciências e da Matemática.

Fizemos um levantamento bibliográfico de pesquisas em Educação Matemática em que foram realizadas abordagens históricas dos conteúdos da Matemática com a aplicação direcionada a alunos do Ensino Fundamental e Médio, utilizando-se da história da Matemática como recurso pedagógico e não como um simples instrumento metodológico.

Desse modo, vimos os seguintes conteúdos matemáticos com abordagem histórica: álgebra, números complexos, estatística, probabilidade, logaritmos, geometria, números inteiros, entre outros. Nosso objetivo principal nessa revisão era a trigonometria, pois sentíamos a necessidade de compreender suas origens e sua evolução para lecionarmos este conteúdo de forma diferenciada e mais dinâmica. Como professora de Matemática, lecionávamos a trigonometria de forma superficial, sem conhecer sua história e sua evolução, considerando-o um conteúdo complicado para ser ensinado e para ser aprendido, principalmente pelos alunos. Em nossa formação escolar, os professores apenas explicaram a trigonometria no triângulo-retângulo, não tiveram tempo para explicar as funções trigonométricas. Nas conversas informais com colegas da Matemática, percebíamos que alguns deles também tiveram dificuldades com a trigonometria em sua formação. Todos esses fatores nos inquietavam, a ponto de buscarmos na revisão bibliográfica, tanto os trabalhos que abordassem historicamente esse conteúdo, como os que tratassem de trigonometria na formação de professores, enfim, em todos os aspectos pertinentes em que essa pudesse ser pesquisada.

Ao realizarmos o levantamento das pesquisas produzidas com esse objeto de estudo, pudemos perceber que o ensino de trigonometria encontra-se pouco investigado. Não encontramos nas pesquisas o enfoque histórico nem uma reconstrução do conteúdo aplicado em sala de aula com alunos do Ensino Médio da Rede Estadual. Também observamos que algumas pesquisas fazem referência à trigonometria especificamente no triângulo-retângulo, não envolvendo o ciclo trigonométrico e suas funções.

Diante disso, a pergunta norteadora delineada para orientar-nos nesse processo investigativo foi a seguinte:

- Quais as adequações e transformações necessárias ao ensino de Trigonometria, a partir de uma abordagem histórico-filosófica?

Para tanto, julgamos pertinente elaborar uma questão específica para auxiliar a responder a questão principal:

A nossa seqüência didática, construída com tal abordagem, possibilitará que os alunos participem ativamente da aquisição do conceito de Ciclo Trigonométrico?

Consideramos que articular profundamente os conhecimentos, tendo como ponto de referência uma metodologia de ensino que leve em conta aspectos histórico-filosóficos fundamentais para o entendimento do estado atual do desenvolvimento do conhecimento científico, contribui para a superação de dificuldades que, identificadas e compreendidas, auxiliam no ensino e aprendizagem tanto para o professor como para o aluno.

O objetivo de nossa pesquisa foi investigar a construção de uma abordagem histórico-filosófica para o ensino do ciclo trigonométrico no Ensino Médio.

Como objetivos específicos, procuramos:

- Elaborar uma reconstrução histórico-epistemológica e teórico-conceitual do assunto ciclo trigonométrico;

- Investigar as relações, adaptações e transposições pertinentes à Engenharia Didática aplicáveis às abordagens histórico-filosóficas;

- Elaborar e investigar seqüências didáticas que contemplem as características teórico-metodológicas identificadas e as adaptações pedagógicas características à aprendizagem no Ensino Médio.

Este trabalho compõe-se de 5 capítulos. No Capítulo 1, realizamos a fundamentação teórica da pesquisa. No primeiro item, discutimos, a partir de referenciais, a importância da História da Matemática e da Filosofia da Ciência na Educação Matemática. No segundo item, defendemos sua contribuição para a nossa pesquisa. Em seguida, discutimos o referencial teórico da transposição didática de Yves Chevallard, um recurso didático que auxiliou na construção da proposta em questão, o qual compreende um conjunto de adaptações e transformações que o saber matemático sofre quando é ensinado e aplicado em sala de aula.

Para complementar nossa fundamentação, apresentamos a Metodologia da Engenharia Didática, que se caracteriza por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula (ARTIGUE, 1996, p. 196) e que se mostrou adequada e necessária para a construção da abordagem histórico-filosófica. Para avaliar os resultados da aplicação da seqüência didática, apresentamos a Análise Proposicional de Conceitos (APC), que foi aplicada antes e após a aplicação da seqüência didática proposta em sala de aula.

No Capítulo 2, apresentamos uma reconstrução histórica da trigonometria, fundamentada por uma bibliografia diferenciada, que nos trouxe grande satisfação em conhecer a riqueza de informações históricas de diversos povos. O estudo histórico-filosófico proporcionou-nos transformações e adequações do conteúdo selecionado, assim como articulações com outros conteúdos matemáticos.

No segundo item do Capítulo 2, trazemos a discussão dos valores cognitivos da ciência aplicados na Educação Matemática, destacando como tais valores cognitivos estão implícitos na reconstrução histórica da trigonometria.

No Capítulo 3, a respeito da metodologia utilizada, descrevemos todas as etapas desenvolvidas durante a investigação. Apresentamos, no item 2, os valores cognitivos que foram abordados nas atividades da seqüência didática.

No Capítulo 4, discutimos os resultados da aplicação da seqüência didática, aplicada no Ensino Médio, durante o 4º bimestre do ano letivo (2007), numa escola pública e analisamos os resultados da aplicação da mesma, discutindo as respostas dos alunos, confrontando a análise *a priori* e *a posteriori* que realizamos nos APCs.

Após as análises, concluímos nossa investigação, apresentando no Capítulo 5 nossas considerações finais a respeito da investigação de uma abordagem histórico-filosófica na Educação Matemática.

Encontram-se anexos, os modelos do APC 1 e APC 2, a seqüência didática investigada, os trabalhos de trigonometria, a transcrição de uma entrevista com o professor que também aplicou a seqüência didática numa outra sala e algumas atividades respondidas pelos alunos.

CAPÍTULO 1:

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 A HISTÓRIA E A FILOSOFIA DA CIÊNCIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A fundamentação teórica neste capítulo tem por objetivo sustentar a elaboração de uma abordagem histórico-filosófica para o ensino de trigonometria no Ensino Médio. Nesse sentido, discutiremos as contribuições da História da Matemática e da Filosofia da Ciência para o ensino e aprendizagem desse conteúdo matemático.

Apresentamos a História da Matemática não como um simples instrumento metodológico, mas como uma abordagem para ser adotada em sala de aula.

Segundo Sad (2004, p.4), o uso da história no ensino de Matemática é importante porque

> “a história aumenta a motivação para a aprendizagem; tem ação problematizadora, utilizando em especial o diálogo; articula a Matemática com outras ciências; mostra a importância da notação simbólica (linguagem) na constituição das formas e estruturas Matemáticas, no processo histórico de construção dos objetos matemáticos por diversas culturas e situa a Matemática cronologicamente: em relação aos produtores e à sua própria constituição, para poder compreender as condições de sua produção.”

Para Vianna (1995, p.129), o uso da História da Matemática deve aumentar nos livros didáticos, mas é necessário dar preferência aos usos em que o conhecimento histórico ocorra de modo imbricado com o conteúdo matemático; deve-se dar preferência ao uso da história da Matemática como estratégia didática em contraposição às formas predominantes de simples motivação e/ou informação.

De fato, Mendes (1997, p.15) afirma que:

> “é necessária a interferência no sentido de conduzir o uso da história no ensino da Matemática como agente facilitador do processo investigatório do conhecimento matemático em sala de aula.”

De acordo com Batista e Luccas (2004, p.108),

> “as considerações feitas com a abordagem histórico-filosófica podem refletir positivamente também na área de Educação Matemática e que o desenvolvimento de uma proposta que trabalhe a análise e a reflexão de conceitos e idéias que permeiam os conteúdos matemáticos, estudados a partir do conhecimento de fatos colhidos na reconstrução histórica, estabeleça-se como um frutífero campo para a realização de investigações e como uma alternativa metodológica eficiente.”

Recorremos à história com finalidades diretamente relacionadas com as práticas em sala de aula. Uma delas é criar problemas que possam ser debatidos entre professor e aluno. Tais problemas não são os encontrados na História da Matemática, mas nos possibilitam debater alguns aspectos epistemológicos presentes na construção histórica do conhecimento trigonométrico e criar oportunidades de investigação para a Educação Matemática.

Para D’Ambrósio (1996, p. 30),

> “A História da Matemática é um elemento fundamental para se perceber como teorias e práticas Matemáticas foram criadas desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época”.

Segundo Nobre e Baroni (1999, p.130), a História da Matemática não é só mais um elemento motivador, pois sua amplitude extrapola o campo da motivação e engloba elementos cujas naturezas estão voltadas a uma interligação entre o conteúdo e sua atividade educacional, se fortalecendo a partir do momento que o professor de Matemática tem domínio da história do conteúdo que ele trabalha em sala de aula.

A História da Matemática nos permite conhecer os problemas que originaram a construção do conhecimento matemático e como esses se articularam com conteúdos de outras disciplinas, amenizando as dificuldades dos alunos na compreensão dos cálculos, contribuindo também para mudanças de percepções dos alunos em relação à Matemática.

Para Matthews (1995, p.165), a abordagem histórico-filosófica auxilia na humanização das ciências, para a compreensão dos episódios fundamentais, a evolução do pensamento científico e as relações existentes nas diversas áreas de conhecimento.

Do ponto de vista da História da Ciência, Kragh (1987, p.89-107) defende que é possível perceber os erros dos cientistas e dos historiadores antigos. Assim, o investigador procura se colocar na posição dos agentes históricos, tentando compreender o contexto da época e a produção do conhecimento científico nas diversas civilizações.

Para Batista (2005, p.736),

> “a abordagem histórico-filosófica funciona como um fio condutor dos raciocínios, como um elemento na estrutura didática que favorece a cognoscibilidade dos conteúdos, que justifica racionalmente sua coordenação didática, estabelecendo-se no próprio corpo integrado das estruturas de ensino e, como pretendemos, de aprendizagem.”

Segundo Miguel (2004, p.103), quando falamos em história da Matemática e história da Matemática com fins filosóficos situamo-nos dentro de um mesmo campo do conhecimento (no caso, o da história) e, neste caso, não é a natureza da intenção que viria a descaracterizar a natureza do empreendimento.

Para justificar a participação da história no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, Miguel (1993, p.6) apresenta uma lista de argumentos reforçadores das potencialidades pedagógicas da história. Nessa lista, ele destaca uma função que ele denomina “História-Axiologia”, considerando a História da Matemática como um instrumento promotor de atitudes e valores, na concepção dos fins da educação Matemática e dos valores por ela promovidos (MIGUEL, 1993, p.22). Também salienta que, “para serem pedagogicamente úteis, é necessário que histórias da Matemática sejam escritas sob o ponto de vista do educador matemático” (MIGUEL, 1993, p.109).

De acordo com o mesmo autor, a participação da história no ensino-aprendizagem tem uma natureza ética, na tentativa de promover atitudes e valores entre os estudantes (MIGUEL; MIORIM, 2005, p.61). Enfatiza um sistema de valores que se transmite às novas gerações, visando à função social e à formação do cidadão. (MIGUEL, 1993, p.196).

Reconhecemos a relevância dessa discussão dos valores, mas também necessitamos recorrer à Filosofia da Ciência, a respeito das discussões dos valores cognitivos constitutivos da ciência que, ao nosso ver, puderam ser atribuídos à Matemática. Consideramos que esses valores precisam ser expressos para justificarem a importância dos conteúdos da Matemática na Educação Básica.

Analisamos, por meio de uma reconstrução histórica, a manifestação de tais valores em diferentes épocas e contextos. Vimos neles um potencial pedagógico, problematizador de conteúdos escolares, justificando adotá-los no contexto escolar.

1.2 O PAPEL DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM NOSSA PESQUISA

Em nosso levantamento bibliográfico, encontramos artigos e dissertações que abordavam o tema trigonometria, como, por exemplo, um artigo de Brito e Morey (2001, p. 65-70), que tratava de uma pesquisa realizada, com professores do Ensino Fundamental, acerca das dificuldades que eles encontravam no ensino dos conceitos de geometria e trigonometria e de como o ensino desses conceitos foi sendo proposto nos livros didáticos nas últimas quatro décadas do século XX. Essa pesquisa afirma que no ensino de trigonometria no Ensino Médio tem ocorrido uma transposição didática de baixa qualidade, causada algumas vezes por conteúdo tão simplificado que prejudica o aprendizado do aluno. Na conclusão do artigo, as autoras afirmam que as dificuldades dos professores investigados estavam intimamente relacionadas à formação escolar das décadas de 70 e 80, uma época caracterizada pelo descaso para com a trigonometria.

Os resultados citados no artigo nos levam a refletir sobre a aprendizagem de trigonometria como um todo e a considerá-la numa visão histórica e filosófica inserida em nosso contexto escolar. Esse enfoque permite visualizar o conteúdo não somente como algo pronto, sistematizado, mas estudá-lo como algo construído desde a Antigüidade, perpassando séculos até chegar à sistematização presente nos livros didáticos atuais.

Em outra pesquisa encontrada, Costa (PUC-SP, 1997) investiga a influência de dois contextos - computador e “mundo experimental” - na aprendizagem de trigonometria com o programa *Cabri-Géomètre* e o *Graphmatica* e alguns experimentos. O contexto foi fora da sala de aula, com um grupo pequeno de alunos do Ensino Médio de uma escola particular.

Já Briguenti (UNESP-SP, 1994) propôs um curso completo de trigonometria na linha da aprendizagem significativa, introduzindo as funções trigonométricas no computador e Data Show para o ensino de gráficos nas funções. A pesquisa envolveu alunos da Educação Básica e Superior e apontou a falta de significado do conteúdo para os alunos.

Na dissertação de Silva (PUC-SP, 2005), foi realizada uma pesquisa sobre a trigonometria no triângulo retângulo, com o objetivo de promover a aprendizagem significativa para alunos do 1º ano do Ensino Médio, por meio de situações-problemas que articulavam as construções geométricas e o tratamento figural.

A dissertação de Mendes (UFRN, 1997) defende a utilização da História da Matemática para o ensino-aprendizagem de noções básicas de trigonometria no Ensino Médio. O objetivo é analisar o seu grau de validade na trigonometria juntamente com professores de Matemática que atuam nas séries do 1º e 2º grau (atual Ensino Fundamental e Médio) e que abordam a trigonometria plana. O trabalho foi realizado com professores de Matemática como sujeitos da pesquisa.

No site do IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), encontramos as análises, do ano de 2001, de 12 coleções de livros didáticos de Matemática utilizados no Ensino Médio nas escolas brasileiras. Essas análises referiam-se às imprecisões encontradas no conteúdo de trigonometria, tais como definições vagas de radianos, seno, cosseno, comprimento de um arco e conceitos de número real, que devem ser apresentados como o resultado de uma medida, mas sempre são deixados indefinidos.

As conclusões sobre a análise do IMPA, referente à trigonometria na Educação Básica, são: tratamento demasiadamente longo, com ênfase em trivialidades, omissões importantes, conceitos mal definidos e ausência de problemas contextuais atraentes. O radiano é mal definido, as calculadoras não são enfatizadas e nunca é claramente exposta a diferença entre o seno (por exemplo) de um ângulo e o seno de um número.

Sobre a pesquisa em História da Matemática, Nobre e Baroni (1999, p.134) abordam o tema “A utilização da História da Matemática como Recurso Pedagógico”, caracterizada por ter sido objeto de interesse de poucos pesquisadores nas décadas anteriores aos anos 90. Um tema delicado que, embora esteja crescendo, ainda não possui fundamentações sólidas que possam se constituir em parâmetros claros de atuação (NOBRE; BARONI, 1999, p.134).

A trigonometria é uma extensão da geometria, mas em nossa vida escolar observamos que o conteúdo de trigonometria foi lecionado de uma forma geral, sem maiores aprofundamentos, ou de contexto histórico ou de situações do cotidiano.

Em nossa linha de pesquisa, tomamos vários referenciais da História da Matemática para fundamentar a importância de conhecê-la e utilizá-la em nossas aulas assim como para a construção das atividades aplicadas no 2º ano do Ensino Médio, visando à aprendizagem de trigonometria.

Na revisão bibliográfica não encontramos tal abordagem no Ensino Médio, o que nos direcionou para essa investigação. Pesquisamos em livros como os dos autores Boyer, Eves, Struik, Katz, Smith, entre outros, por serem referenciais com reconhecimentos na História da Matemática e acessíveis nas bibliotecas. Trabalhamos também com fontes como a de Zeller, que dedicou sua dissertação à trigonometria.

A história da trigonometria, a cada leitura, tornou-se mais interessante, envolvente, direcionando-nos na busca de novas informações, amenizando as lacunas na história da Matemática, na compreensão dos debates e impasses da época estudada e destacando nas diversas civilizações como se deu a construção desse conhecimento.

Observamos que várias culturas contribuíram para o desenvolvimento do conteúdo e que as descobertas muitas vezes foram difundidas nas viagens dos matemáticos, por meio de cartas. Foi importante aprender que em algumas civilizações o conhecimento de trigonometria era mais avançado e que só após muitos séculos tais conhecimentos foram divulgados nos livros de História de Matemática.

Os episódios narrados nos auxiliaram na construção de uma seqüência de atividades, embora tenha sido necessária uma transposição didática dos textos históricos para os textos apresentados aos alunos. As adaptações dos conteúdos exigiram uma simulação dos episódios para que o aluno aprendesse o contexto que originou o conhecimento de trigonometria. A atividade da seqüência didática contém o contexto histórico, ora na introdução de cada item do conteúdo de trigonometria, ora após a realização das atividades.

A História da Matemática nos possibilitou fazer um estudo axiológico, ou seja, identificar os possíveis valores cognitivos presentes na trigonometria e como poderíamos apresentá-los na seqüência didática. Os exemplares históricos proporcionaram a identificação dos valores cognitivos em vários momentos da evolução do conhecimento da ciência, buscando evidenciar as dificuldades das funções trigonométricas, do ciclo trigonométrico, do estudo geométrico, correlacionando a álgebra e o cálculo na trigonometria.

1.3 OS VALORES COGNITIVOS QUE QUEREMOS INCORPORAR AO CONHECIMENTO DO ALUNO

A Matemática é uma área de conhecimento consolidada, com consistência interna. No passado, a trigonometria, como uma área de conhecimento matemático, resolveu problemas da Física e de outras Ciências, possibilitando a matematização da natureza, como podemos observar nos fenômenos periódicos, nos estudos da astronomia, e ainda manifesta seus valores cognitivos até hoje.

O objetivo desse item é propor uma discussão na Educação Matemática em uma perspectiva que envolva valores cognitivos dotados de critérios para que uma teorização científica se torne racionalmente aceitável. Buscamos situar tal discussão na Filosofia da Ciência, partindo de Hugh Lacey (1998) como referencial teórico, pois ele aborda a racionalidade científica em termos de valores cognitivos e sociais. Ao expor sua obra *Valores e Atividade Científica,* reporta-se ao processo epistemológico de seleção de teorias em termos de compromisso com um conjunto de valores cognitivos.

Segundo Lacey (1998, p.61), vários autores afirmam que os valores cognitivos são constitutivos da ciência, são critérios a serem satisfeitos por uma boa teoria científica, enfatizando que tais valores são diferentes de valores morais, sociais, entre outros.

Lacey (1998, p.62-63) apresenta uma lista de valores cognitivos que desempenharam algum papel na escolha de teorias, pelo menos em alguns momentos da ciência, elaborada a partir de vários referenciais, podendo ser completada ainda com outros valores cognitivos. Apresentamos a seguir os valores cognitivos citados por Lacey:

– Adequação empírica: ser empiricamente testável, ter correspondência com o real, ter primazia dos dados experimentais e quantitativos, exatidão, precisão dos dados;

– Consistência: tem consistência no interior da própria teoria e com outras aceitas;

– Simplicidade: tem harmonia, elegância, clareza conceitual, eficiência no seu uso, coerência;

– Fecundidade: origina novas questões, desencadeia novos programas de pesquisa, tem capacidade de predição, ocasiona a descoberta de novos fenômenos, soluciona quebra-cabeças;

– Poder explicativo: fornece explicações para os fenômenos numa ampla extensão de domínios, tem profundidade, possibilita a construção de uma narrativa que ofereça explicações;

– Verdade, certeza: verdade acerca dos princípios fundamentais, necessidade;

– Generalização: capacidade de ser generalizada, formalizada.

Para a elaboração da lista de valores cognitivos, Lacey (1998) aponta então a primeira tarefa:

> “que é interpretativa e consiste na reconstrução racional de episódios-chave de escolha de teorias e de controvérsias teóricas, a fim de discernir os critérios que podem ser razoavelmente apontados e confrontados com as reflexões críticas dos cientistas ativos” (LACEY, 1998, p.66).

Usamos em nossa pesquisa a lista dos valores cognitivos, proposta por vários autores e citada no livro de Lacey (1998, p.61-66), que, segundo o autor, não está fechada, pois os critérios para uma boa teoria e suas interpretações podem variar. A discussão dos valores cognitivos está voltada para nossa reconstrução histórica da trigonometria, identificando, por meio dela, que valores cognitivos desempenharam seu papel nessa história.

Assim, em nossa reconstrução histórica, consideramos o valor cognitivo adequação empírica, quando os matemáticos utilizaram a trigonometria para resolver problemas reais, buscando cada vez mais exatidão nos dados, nas observações e experimentos, nos cálculos de distâncias.

O valor cognitivo consistência é analisado quando a trigonometria mostrou sua consistência com outras teorias, como os estudos dos pêndulos na Física, e se desenvolve dentro da própria Matemática com o estudo dos logaritmos.

A trigonometria deixou de ter o caráter geométrico e passou a ter maior desenvolvimento algébrico, tornando-se generalizável. Novas descobertas de fenômenos e capacidade de previsões mostraram o valor cognitivo fecundidade. A trigonometria tornou possível a explicação do Sistema Solar, com cálculos cada vez mais precisos não só para a Matemática, como também para outras ciências.

Embora reconheçamos a existência de outros valores envolvidos no processo de construção desse conhecimento matemático, como os valores sociais, institucionais, entre outros, tomamos como enfoque neste trabalho a apresentação de um levantamento de hipóteses iniciais de valores cognitivos, questionando-nos sobre quais são os possíveis valores cognitivos presentes na História da Matemática que favoreceram a escolha do conteúdo de Trigonometria Plana na Educação Básica.

1.4 A Transposição Didática como Referencial Teórico

A necessidade de buscar metodologias diferenciadas para trabalhar o conteúdo de trigonometria em sala de aula, levou-nos a compreender a história desse conteúdo. Percebemos que o conhecimento científico produzido e o conhecimento ensinado aos nossos alunos estão muito distantes. A História da Matemática nos forneceu exemplares de episódios históricos inexistentes nos livros didáticos atuais, proporcionando-nos a reflexão de como poderíamos transpor didaticamente tais saberes e promover a aprendizagem de trigonometria.

Para que as transformações didáticas ocorressem, usamos o referencial da transposição didática, que é um instrumento por meio do qual analisamos o movimento do saber sábio (aquele que os cientistas descobrem) para o saber a ensinar (aquele que está nos livros didáticos) e, por meio deste, ao saber ensinado (aquele que realmente acontece em sala de aula). Esse termo foi introduzido em 1975 pelo sociólogo Michel Verret e rediscutido por Yves Chevallard em 1985 em seu livro *"La Transposition Didactique"*, no qual mostra as transposições sofridas por um saber quando passa do campo científico para a escola e alerta para a importância da compreensão desse processo por aqueles que lidam com o ensino das disciplinas científicas.

De acordo com o referencial teórico da transposição didática, (Chevallard, 1991) é possível afirmar a diferença entre o saber produzido pelos cientistas e o saber que está escrito nos textos escolares.

> “Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de transposição didática” (CHEVALLARD, 1991, p.39)

O saber pesquisado pelo matemático sofre inúmeras transformações até chegar ao aluno. Ao conjunto dessas transformações Chevallard dá o nome de Transposição Didática, que é dividida em diversas etapas, descritas abaixo:

- Saber sábio é o conhecimento que a comunidade científica produz ou descobre.

- Saber a ensinar é o saber depois de produzido ou descoberto, em que ocorre a criação de um modelo teórico que envolve, além do saber científico, materiais didáticos a serem utilizados.

- Saber escolar é o conjunto de conhecimentos que os alunos adquirem após terem concluído seus estudos.

- Saber ensinado é aquele em que o professor gerencia a aquisição do saber, adaptando os objetos a ensinar, a forma de apresentação do conceito e o tempo de estudo; encontra-se registrado no plano de aula do professor e trabalhado em sala com os alunos.

Em nossa pesquisa, uma transposição didática envolveu textos e atividades, inseridos no “contexto histórico”, que utilizam fontes históricas, no intuito não só de informar sobre fatos históricos. Também fizemos uma transposição didática de alguns exemplares históricos, adequando-os ao conteúdo a ser ensinado e visando à elaboração das atividades, para promover a aprendizagem.

Segundo Dynnikov e Sad (2007, p.7), as fontes históricas servem tanto para buscar produção de significações novas em suas próprias experiências, quanto para uma aplicação que amplie sua maneira de entender e lidar com a Matemática, promovendo dessa forma uma integração da História da Matemática com a situação educacional.

Para que as transformações e adequações necessárias na transposição didática do conteúdo de trigonometria em sala de aula fossem possíveis, usamos a Engenharia Didática como metodologia, pois consideramos sua estrutura adequada para cada etapa de nossa pesquisa.

1.5 A Metodologia da Engenharia Didática

Em nossa pesquisa tivemos a necessidade de contemplar a dimensão teórica da História da Matemática a partir dos referenciais e conduzir sua experimentação para investigação na nossa prática educativa. Tal justificativa vem ao encontro dos mesmos propósitos da Engenharia Didática (PAIS, 2002, p.99).

A Engenharia Didática, "vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e a análise de seqüências de ensino" (ARTIGUE, 1996, p.196).

A noção de Engenharia Didática é um termo utilizado nas pesquisas da Didática da Matemática desde o início da década de 80, que envolvem uma parte experimental. Uma Engenharia Didática se caracteriza por ser "uma forma de trabalho didático equiparável com o trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apóia nos conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico" (ARTIGUE, 1996, p.193). Podemos adequar o termo tanto para o pesquisador como para o professor, sendo seu trabalho o de escolher ou organizar seqüências de atividades que explorem um domínio do conhecimento. Estas seqüências de ensino aparecem, também, como um dos seus principais objetos da Engenharia Didática.

O trabalho do professor, ao elaborar ou escolher uma seqüência didática[1], deve-se levar em conta de forma integrada: o domínio do conhecimento, o conhecimento prévio do aluno, o papel do professor e dos seus alunos. Para tanto, em cada seqüência é necessária uma definição do significado da aprendizagem. A criação de uma seqüência didática constitui um processo interativo no qual o objetivo é a elaboração de um grupo de decisões para que os processos tenham significados e as estratégias sejam mais efetivas. Levam-se em consideração as respostas dos alunos e as condições as quais estão submetidas.

Para Pais (2002, p.108) a justificativa de escolha para o uso de uma Engenharia Didática se deve ao fato de que instrumentos tradicionais, tais como questionários, entrevistas, análise documental, são insuficientes para abranger a complexidade do fenômeno didático, reforçando a necessidade de vincular teoria e a realidade da sala de aula. Outro ponto importante destacado é que a realização da pesquisa amplia seu sentido quando norteado por uma concepção filosófica embasando as atividades, garantindo maior significado da pesquisa didática e a viabilização das relações entre professor, aluno e o saber.

Dessa forma o processo envolve: uma análise da situação proposta, das condições da organização, da escolha de estratégias baseadas nas análises da instrução dada, da determinação de critérios de avaliação, da elaboração de questões que estejam de acordo com os critérios determinados e uma revisão de todo processo em função desta avaliação.

De acordo com a importância da realização didática, a Engenharia Didática distingue-se em dois níveis: o da micro-engenharia e o da macro-engenharia. As pesquisas de micro-engenharia são aquelas que têm por objeto o estudo de um determinado assunto; elas são localizadas e levam em conta principalmente a complexidade do fenômeno sala de aula. Enquanto que as pesquisas de macro-engenharia são aquelas que permitem compor a complexidade das pesquisas de micro-engenharia como fenômenos ligados à duração nas relações ensino-aprendizagem.

A Engenharia Didática caracteriza-se pelo registro dos estudos feitos sobre o caso em questão e pela sua forma de validação dos resultados. Essa

[1] Para Pais (2002, p. 202) “uma seqüência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática”.

validação da pesquisa é feita, sobretudo internamente, pois ela se baseia na confrontação entre a análise *a priori,* que por sua vez se apóia no quadro teórico, e a análise *a posteriori*. Na Engenharia Didática, a validação é interna, enquanto que a que se baseia nos métodos estatísticos é externa, ou seja, utilizam métodos comparativos para validar seus resultados.

A construção de um projeto que siga os princípios desta engenharia passa por etapas bem definidas, e o recorte temporal do seu processo experimental.

Segundo Artigue (1996, p.196), podemos distinguir quatro fases no processo da Metodologia da Engenharia Didática:

1ª fase: Análises preliminares (prévias);

As análises preliminares para a concepção da engenharia são feitas por meio de considerações do quadro teórico didático geral e sobre o assunto em questão, bem como:

– a análise epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino;

– a análise do ensino atual e de seus efeitos;

– a análise da concepção dos alunos, das dificuldades que determinam sua evolução;

– a análise do campo dos entraves no qual vai se situar a efetiva realização didática.

– levar em consideração os objetivos específicos da pesquisa.

Nesta fase foi realizada uma entrevista com três professores de Matemática que lecionavam trigonometria no Ensino Médio, para fazer um levantamento das dificuldades e concepções dos alunos em relação a esse conteúdo. Livros didáticos do Ensino Médio também foram necessários para observarmos como estavam sendo abordados e estruturados os tópicos de trigonometria.

Artigue (1996, p.198), comenta que embora as análises preliminares sirvam de base à concepção da engenharia, podem necessitar de retomadas diante das possíveis dificuldades durante o trabalho realizado pelo investigador na pesquisa.

2ª fase: Análise *a priori* das situações propostas na seqüência didática;

Na fase da concepção e da análise *a priori*, o pesquisador, orientado pelas análises preliminares, delimita certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre as quais o ensino pode atuar, e estas são chamadas de variáveis de comando. Supõe-se serem variáveis pertinentes para o problema estudado.

Artigue (1996, p. 202) distingue dois tipos de variáveis de comando tais como:

– variáveis macro-didáticas ou globais à organização global da engenharia,

– variáveis micro-didáticas ou locais, que se referem à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase. Estas dependem do conteúdo didático contemplado para o ensino.

A análise *a priori* comporta uma parte descritiva e outra de previsão, é uma análise focada nas características de uma situação a-didática que se pretendeu criar e desenvolver durante a experimentação. Segundo Brousseau (1996), “quando o aluno for capaz de aplicar um conhecimento por si próprio às situações fora do contexto do ensino e na ausência de qualquer indicação intencional, tal situação é chamada de “a-didática”. Na análise *a priori* é preciso:

– descrever cada escolha efetuada e as características da situação a-didática decorrentes de cada escolha;

– analisar o peso das situações para o aluno decorrente das possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que ele disporá durante a experimentação, uma vez operada a devolução;

– prever os campos de comportamentos possíveis e mostrar no que a análise efetuada permite controlar o sentido desses comportamentos; além disso, deve-se assumir que, se tais comportamentos ocorrerem, resultarão de forma clara da aplicação do conhecimento almejados pela aprendizagem.

Usamos um questionário para fazer um levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos sobre o conteúdo de trigonometria no triângulo-retângulo, pois é um conteúdo lecionado na oitava série. Observamos as dificuldades dos alunos quanto ao conteúdo, contribuindo para a elaboração de nossa seqüência didática.

De acordo com Pais (2002, p. 106), a metodologia da Engenharia Didática usada deve explicitar a forma como o pesquisador visualiza o fenômeno educacional, incluindo concepções quanto aos saberes, valores e procedimentos para a condução da busca do conhecimento.

3ª fase: A experimentação;

A fase da experimentação se apóia no conjunto de dados recolhidos na realização da engenharia, iniciando no momento em que o pesquisador e alunos sujeitos da investigação entram em contato.

Os dados recolhidos decorrem dos seguintes meios:

– o registro das observações realizadas durante a experimentação, em diversos momentos do ensino;

– a produção dos alunos em classe ou externas;

– a aplicação dos instrumentos de pesquisa, por meio de questionários, testes individuais ou em pequenos grupos.

4ª fase: Análise *a posteriori* e da avaliação:

Nesta fase, realiza-se o tratamento dos dados que constam da seleção dos dados pertinentes à análise *a posteriori.* É no confronto das duas análises, *a priori* e *a posteriori,* que se baseia a validação das hipóteses levantadas na pesquisa.

Para Pais (2002, p.98) é possível com a utilização de uma Engenharia Didática reforçar a confiabilidade da pesquisa, em especial por estar vinculada com a realidade da sala de aula. Em nossa investigação para análise dos resultados da aplicação da seqüência foi utilizado um questionário como instrumento de avaliação que segue o Modelo Proposicional de Conceitos (APC), fundamentado pelos referenciais da Aprendizagem Significativa, os quais utilizamos para comparar as respostas dos alunos antes da aplicação da seqüência didática e no final das atividades em sala de aula, quando feito os mesmos questionamentos.

1.6 INSTRUMENTOS DE AVALIAÇÃO: MODELO DE ANÁLISE PROPOSICIONAL DE CONCEITOS (APC)

A autora Artigue (1996, p.209) aponta que na maior parte das pesquisas relativas à Engenharia Didática, os autores não se envolvem num processo de validação verdadeiro, pois o confronto das duas análises *a priori* e *a posteriori* exibe distorções. Assim, as hipóteses levantadas no trabalho não garantem que em longo prazo permite-se de fato, tornar validada a aprendizagem.

Pais (2002, p.103), ressalta que a validação é um dos problemas clássicos da Engenharia Didática. Buscamos na Teoria da Aprendizagem Significativa o método de avaliação “Análise Proposicional de Conceitos” (APC), para a validação dos resultados de nossa pesquisa.

Um desses métodos citados por Novak e Gowin (1999, p.156), que pode ser utilizado na avaliação de um instrumento de coleta de dados (como, por exemplo, o questionário) visando o enriquecimento da investigação, é o que eles chamam de Análise Proposicional de Conceitos[2] (APC). Essa técnica “se baseia na noção psicológica de que o significado que um dado conceito tem para um estudante é manifestado através do conjunto de pré-proposições incorporando o conceito que o estudante elabora” (NOVAK; GOWIN, 1999, p.156).

Esse método é aplicado antes e depois da instrução e se caracteriza por determinar o conjunto de proposições formuladas pelo professor no âmbito, por

[2] Tomamos da Teoria da Aprendizagem Significativa o método de avaliação (APC)

exemplo, de um questionário, de acordo com as questões elaboradas pelo próprio professor acerca do resultado que se almeja na pesquisa. Em seguida, identificam-se os enunciados pré-proposicionais formulados pelo aluno durante a transcrição do questionário. A partir daí, elabora-se uma tabela que mostre, de um lado (esquerdo), as proposições dadas pelos alunos antes da instrução e, do outro (direito), as proposições respondidas pelos alunos às mesmas perguntas depois da instrução. No centro da tabela, localizam-se as principais proposições que são apresentadas na instrução, ou seja, as perguntas ou proposições elaboradas pelo professor ou pesquisador para a realização da entrevista.

Para Novak e Gowin (1999, p.156), esse método é vantajoso, pois aos alunos não se impõe nenhum tipo de estrutura pré-determinada que interfira na construção de suas proposições. Esse método permite também aos professores valerem-se dos conhecimentos prévios apresentados pelos alunos como ponto de partida para o ensino de conteúdos que queiram trabalhar.

Ao aplicarmos a análise proposicional de conceitos antes e após a instrução foi possível elaborarmos uma tabela na qual mostramos:

- as proposições dadas por um estudante antes da instrução;
- as principais proposições que exemplificam a instrução;
- as proposições com que responde um estudante às mesmas perguntas, depois da instrução.

A utilização, para análise e discussão dos resultados, da “Análise Proposicional de Conceitos” (APC), estabelecidos por Novak e Gowin (1999, p.156), permite-nos estudar as mudanças que se produzem na estrutura cognitiva do aluno.

Assim, a coleta dos dados colhidos por meio dos instrumentos APCs que foram aplicados aos alunos, auxiliou-nos na elaboração das atividades da seqüência didática e para as análises dos resultados da aplicação.

CAPÍTULO 2:

RECONSTRUÇÃO HISTÓRICA

2.1 UMA RECONSTRUÇÃO HISTÓRICA DA TRIGONOMETRIA

Fazer uma reconstrução histórico-epistemológica completa da trigonometria é uma tarefa impossível para um pesquisador, até porque ainda há muitos mistérios na construção desse conceito, que envolvem diversos estudos das civilizações, do mundo antigo até os últimos séculos. Não temos a pretensão de detalhar este conhecimento matemático enfocando uma civilização mais do que a outra. Cabe à nossa pesquisa um enfoque histórico da trigonometria em que tomamos vários historiadores da Matemática, como no artigo de Crombie (1961, p.371), ressaltando que “cada historiador projeta na história os interesses e a escala de valores do seu tempo, e é de acordo com as idéias do seu tempo e com suas próprias idéias que compreende a sua reconstrução”. Isto é, na reconstrução realizada, o historiador, influenciado pelos valores pessoais e sociais de seu tempo, renova e dinamiza a história, fazendo escolhas, especializando-se num foco de interesse. Não é possível escrever sobre toda a história da humanidade, mas é possível delimitar um campo de estudos.

Assim, o recorte histórico selecionado segue de certa forma uma linha do tempo, apresentando a história da trigonometria ao longo do processo de construção dos conceitos e da repercussão deste desenvolvimento para a humanidade.

Para Lintz (1988, p.415), o fato de “classificar” os seres humanos em raças e países tem sido um dos elementos mais influentes para a interpretação dos fatos históricos. Tal reflexão nos impede de afirmar que a trigonometria foi constituída por uma civilização específica. Ao contrário, fontes históricas fornecem informações nas quais percebemos as relações existentes de diversos povos na construção do conhecimento matemático. Na opinião de Kennedy (1997, p.3) “o conhecimento do assunto não floresceu instantaneamente, mas a partir de uma série de saltos descontínuos, no qual importantes avanços feitos numa época e num determinado local se difundiram de forma diferenciada".

Esta pesquisa bibliográfica contempla diversos autores como podemos citar Cajori, Smith, Zeller, Vasconcellos, Boyer, Kennedy, Collette entre outros que fundamentaram esta reconstrução histórica. As referências estrangeiras sem tradução para a língua portuguesa foram traduzidas em nossa pesquisa.

A pesquisa apresenta uma reconstrução histórico-epistemológica da trigonometria, por meio do estudo das diversas civilizações que contribuíram para o desenvolvimento desse conteúdo.

O historiador Kennedy (1997, p.4) apresenta evidências, encontradas em tabelas rudimentares, de que já se empregava a noção de função há mais de 3 mil anos a.C, quando se relacionava comprimentos de sombras, correspondendo a um dado tempo. As civilizações da China e da Índia são muito mais antigas do que as da Grécia e Roma, embora as datas dos documentos matemáticos da China sejam difíceis de determinar. Estimativas consideram *o Chou Pei Suang Ching,* como o mais antigo dos clássicos matemáticos escritos em 1105 a.C, que se refere ao uso de triângulos usados nas medidas de distância. As palavras *chou pei* parecem referir-se ao uso do gnômon no estudo das trajetórias no céu, tratando de cálculos astronômicos que dependiam da função tangente e possibilitando o estudo da primitiva trigonometria plana.

A palavra trigonometria vem do grego *trigonon* - triângulo e *metron* - medida e significa medida do triângulo, sendo o seu conceito apresentado inicialmente de forma sistematizada pelo astrônomo grego Hiparco por volta de 150 a.C. (HEATH, 1981, p.257).

Boyer (1974, p.143-145) relata que foram encontrados, nas obras chinesas, problemas de mensuração de terras, soluções de equações, propriedades dos triângulos retângulos, estudo do π, entre outros problemas matemáticos, o que lhe permite afirmar que a trigonometria plana primitiva era conhecida na China.

Em 1855, um antiquário escocês, Henry Rhind (1833 - 1863), viajou, ao Egito, e lá começou a estudar objetos da Antigüidade. Em 1858, adquiriu um papiro contendo textos matemáticos egípcios que é conhecido com o Papiro de Rhind, apesar de outros historiadores denominarem-no de Papiro de Ahmes, o escriba egípcio que o copiou por volta de 1650 a.C. Encontra-se atualmente no Museu Britânico. As informações do papiro, segundo o escriba Ahmes, parecem datar de 5000 a.C.

O papiro contém uma série de tabelas e 84 problemas e as suas soluções. Estes problemas dizem respeito a questões sobre o *seqt* (medida de inclinação) de uma pirâmide.

No Papiro de Rhind, os problemas 56 a 60 revelam que os egípcios possuíam conhecimento de raios trigonométricos (ZELLER, 1944, p.3), contendo rudimentos de trigonometria e uma teoria de triângulos semelhantes, pois na construção de pirâmides era essencial manter uma inclinação das faces, o que poderia ter levado os egípcios a introduzir um conceito equivalente ao de cotangente de um ângulo (BOYER, 1974, p.13).

Entre os gregos, a trigonometria nasceu de forma sistematizada para resolver problemas relativos à Astronomia. Baseando-se em observações, eles relacionavam os ângulos e os lados do triângulo, definindo-os de maneira sintética.

Os astrônomos gregos, anteriores ao século II a.C., usavam as razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da Terra e as distâncias relativas do Sol e faziam previsões para os movimentos do Sol, da Lua e dos planetas (BOYER, 1974, p.116). As tabelas trigonométricas surgiram para facilitar esses cálculos astronômicos.

Entre os estudiosos gregos, encontra-se Tales de Mileto (640-550 a. C), considerado pelos historiadores da Matemática uma personalidade entre os matemáticos da Antigüidade. Era um negociante e em suas viagens pelo Egito teve contato com conceitos de aritmética e geometria. Foi Tales que sistematizou os cálculos sobre a altura das pirâmides e a distância do navio ao porto de Mileto, usando o conhecimento sobre sombras e semelhança de triângulos (ZELLER, 1944, p.3). Seu discípulo Pitágoras (570-495 a. C), demonstrou o teorema que originou a fórmula $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$, considerada como a relação fundamental da trigonometria.

Segundo Smith (1977, p.602), foram encontrados textos matemáticos gregos, escritos por Autólico de Pitane (c. 330 a. C), contemporâneo de Aristóteles, que continham algum conhecimento de trigonometria esférica. No conteúdo de seu tratado, chamado de “Sobre a esfera móvel”, há cerca de vinte proposições elementares nos círculos principais tratando do movimento da esfera. Embora fossem poucos, os teoremas elementares de geometria da esfera, tiveram sua importância nos estudos astronômicos.

O método de Arquimedes de Siracusa (287-212 a. C), apresentado no seu trabalho “Sobre tamanhos e distâncias do Sol e da Lua”, mostra que antes de Hiparco (140 a. C), já se calculavam tabelas trigonométricas. Ao dedicar-se à pesquisa em Matemática pura e aplicada, Arquimedes calculou o comprimento de grande número de cordas, como no “Teorema sobre a corda quebrada”, (BOYER, 1974, p.99), em que aparecem fórmulas equivalentes à forma atual, entre outras relações:

Fórmula encontrada em Neugebauer (1975, p.772):

$$\frac{sen\ \alpha}{sen\ \alpha'} < \frac{\alpha}{\alpha'} < \frac{tan\ \alpha}{tan\ \alpha'} \qquad >$$

De acordo com Losee (1998, p.42), Arquimedes provou que a área de um círculo é igual à área de um triângulo retângulo cuja base é o raio do círculo e cuja altura é o seu perímetro.

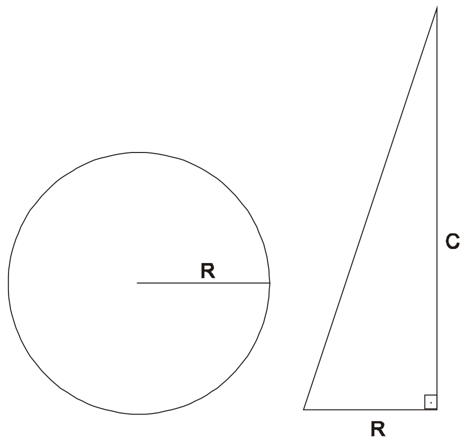


Figura 1 – Relação círculo-triângulo de Arquimedes

A área do triângulo = ½ base x altura

$½\, c\ \ x\ \ R$

mas $c = 2\ \pi\ R$, portanto a área do triângulo = $½\ x\ 2\ \pi R\ \ x\ rR = \ \pi\ R^2$

A área do círculo = $\pi\ R^2$, portanto área do triângulo = área do círculo (SMOOTHEY, 1998, p.55)

A trigonometria grega baseava-se na relação funcional entre as cordas de um círculo e os arcos centrais que subentendem, estabelecendo posteriormente as relações entre os ângulos e os lados do triângulo.

A palavra corda do latim *chorda,* “corda de arco”, quando usada em Matemática, significa a representação do segmento de reta que une os dois pontos extremos de um arco de círculo, podendo ser associada ao ângulo central que intercepta a corda (KENNEDY, 1997, p.38).

Observemos a figura representando a corda no círculo:

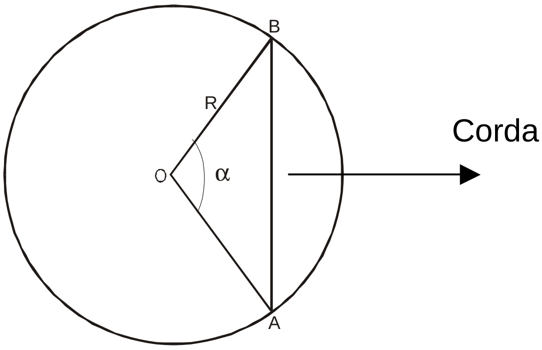


Figura 2 – Corda no círculo

Segundo Struik (1987, p. 98), a investigação histórica nos permite afirmar que uma história da trigonometria não pode ser separada da astronomia. Por meio da história da Matemática percebemos o quanto as necessidades dos povos, relacionadas com a agricultura e a navegação, concederam à astronomia o primeiro lugar nas ciências helenísticas e orientais, construindo bases para o progresso e o desenvolvimento da Matemática nas diversas civilizações.

Os avanços na trigonometria iniciaram-se com a trigonometria esférica, devido a sua aplicação para a astronomia. Dos matemáticos gregos que mais contribuíram para o desenvolvimento da trigonometria de forma mais sistemática do que as existentes na época, podemos citar Hiparco de Nicéia (140 a. C). Este grande astrônomo criou uma Matemática aplicada para prever os eclipses e os movimentos dos astros, calculava distâncias dos planetas e das estrelas, sabendo os ângulos com o quais eles eram vistos da Terra. Para esses cálculos ele utilizava a trigonometria.

No século IV d. C, o comentador Têon de Alexandria atribuiu a Hiparco um tratado em doze livros que se ocupou da construção de uma tabela de cordas, tomando o valor do raio com uma medida de 60 unidades. Hiparco apresentou proposições por meio de números e, nos cálculos de arcos por meio de tabelas, usou proposições de trigonometria esférica (HEATH, 1981, p.257-258). Em seus trabalhos foi desenvolvida a trigonometria esférica, enquanto que a trigonometria plana apresentou-se de forma rudimentar. A necessidade da aplicação da trigonometria esférica para o cálculo da posição dos astros possibilitou que Hiparco fosse provavelmente o primeiro a fazer medidas quantitativas dos componentes dos círculos. Grattan-Guinness (1994, p.61) cita que estes problemas astronômicos motivaram os tratados de geometria esférica de Euclides (300 a. C), como a obra *Phaenomena* (Fenômeno) (KLINE, 1972, p.119).

Hiparco usou na solução de problemas o equivalente da fórmula $\tan b = \cos a \tan c$, considerando C= 90º e a relação $sen^2\, \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ que, segundo Smith (1958, p. 605), o matemático Ptolomeu (150 d.C) também conhecia.

Segundo Zeller (1944, p.5), Hiparco foi provavelmente o primeiro grego a usar graus. Hiparco determinou a corda correspondente ao ângulo de 90º, que ele indicava cd 90º.

$$(cd90°)^2 = r^2 + r^2$$
$$(cd90°)^2 = 2r^2$$
$$cd90° = r\sqrt{2}$$
$$cd90^{\circ} = 60\sqrt{2}$$

Para calcular a medida da corda de 60º, isto é, cd 60º, Hiparco observou que o triângulo formado é eqüilátero. Portanto:

$$cd\ 60º = r = 60$$

Estima-se que as razões entre os lados do triângulo já haviam sido calculadas antes de Hiparco, aproximadamente 1500 anos antes do surgimento da trigonometria plana de cordas. Nesse período, a noção de esfera celeste já havia sido estabelecida (KENNEDY, 1997, p.8).

Segundo Smith (1977, p. 606), o matemático grego Menelau de Alexandria (100 d. C) escreveu em três livros o tratado *Sphaerica* (Esférica) sobre cordas de um círculo, que foi preservado pelos árabes e é considerado o trabalho mais antigo sobre trigonometria esférica.

De acordo com Kline (1972, p.120) no primeiro livro, podemos encontrar o conceito de triângulo esférico, representado pela figura formada por três arcos de grandes círculos na esfera, aparecendo pela primeira vez a noção de triângulo esférico. O tratado Esférica de Menelau ficou conhecido pelas traduções latinas de Maurolico (1494-1575) e de Halley (1656-1724), embora fossem traduções árabes do original grego (VASCONCELLOS, 1925, p.456).

Nos triângulos planos e esféricos, foram apresentadas as seguintes relações (SMITH, 1977, p.607):

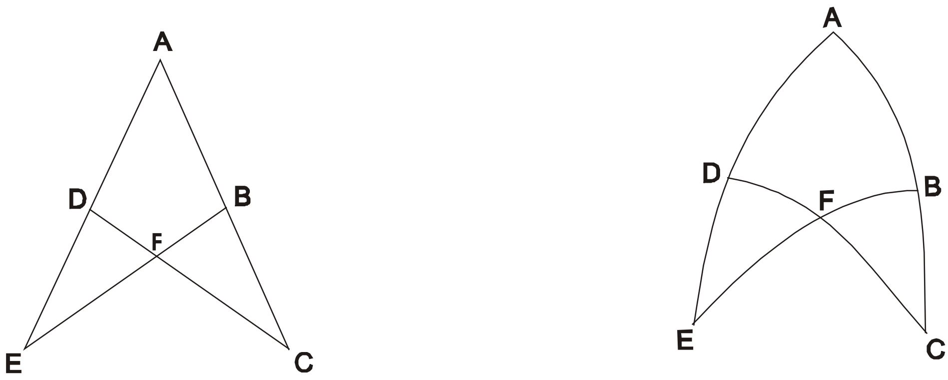


Figura 3 – Triângulos Planos e Esféricos

Triângulos Planos

$$\frac{CE}{AE} = \frac{CF}{DF} \cdot \frac{DB}{AB}$$

$$\frac{CA}{AE} = \frac{CD}{DF} \cdot \frac{FB}{BE}$$

Triângulos Esféricos

$$\frac{cd\,2CA}{cd\,2AE} = \frac{cd\,2CD}{cd\,2DF} \cdot \frac{cd\,2FB}{cd\,2BE}$$

$$\frac{CE}{AE} = \frac{CF}{DF} \cdot \frac{DB}{AB}$$

De acordo com Bell (1992, p. 58) Heron de Alexandria (100 d. C) deu a seguinte fórmula para a área do triângulo de lados a, b, c *e* $2s = a + b + c$.

$$\sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$$

Cláudio Ptolomeu (150 d. C) influenciou o desenvolvimento da trigonometria na sua obra *Syntaxis mathematica* (Coleção Matemática), contendo 13 livros. Foi associado a ele o superlativo *magister* ou *"o maior"*. Mais tarde, na Arábia, sua obra foi chamada de *Almagesto,* tornando-se conhecida por esse nome. O *Almagesto* de Ptolomeu fornece uma tabela de cordas de ½ grau a 180 graus, de meio em meio grau. Nesta obra é desenvolvida a teoria geocêntrica para explicar o sistema solar. Encontramos na obra a fórmula para o seno e cosseno da soma e da diferença de dois ângulos, sempre relembrando que, no início da trigonometria, os teoremas eram expressos na forma geométrica.

Ptolomeu notou que Menelau dividiu o círculo em 360 graus e o diâmetro em 120 partes e adotou o valor 3 para o π (pi), ou seja, 3 x 120= 360 (MAOR, 1998, p. 26). Estendeu a tabela de cordas de Hiparco usando a notação sexagesimal babilônica e ainda dividiu cada parte em 60 subpartes e cada uma destas últimas em sexagésimos. Com estas tabelas e o teorema de Pitágoras era possível resolver problemas relativos à trigonometria plana. O historiador Kline (1972, p.125) nos relata que no *Almagesto*, a distinção entre trigonometria plana e esférica era de pouca relevância para Ptolomeu e que para solucionar problemas astronômicos ele calculava arcos de círculos grandes sobre uma esfera. Tais arcos eram os lados dos triângulos esféricos.

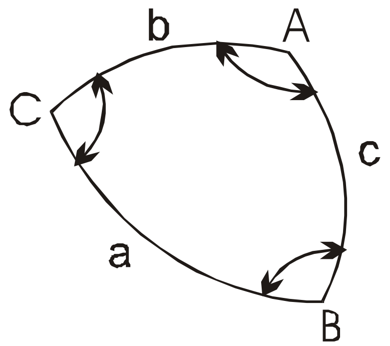


Figura 4 – Lados do triângulo esférico

Os babilônicos acreditavam que a melhor base para realizar contagens era a base 60, pelo fato do número 60 ter muitos divisores (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60), e poderia ser facilmente decomposto num produto de fatores, facilitando os cálculos, em especial as divisões.

Segundo Kline (1972, p. 119), foi Hypsicles de Alexandria (c. 180 a. C) o primeiro astrônomo grego a dividir a circunferência do círculo em 360 partes no seu livro *On the Rising of the Stars* (Sobre o Tamanho das Estrelas).

A contribuição da civilização grega para o desenvolvimento da trigonometria é inestimável, mas documentos relatam que a mais antiga tabela de senos foi descoberta na Índia. O comércio romano com o sul da Índia via Mar Vermelho e Oceano Índico estavam em expansão, facilitando a transmissão de conhecimento matemático dos gregos e babilônios e tornando possíveis novas descobertas.

O *Surya Siddhanta* (Sistema Astronômico) é um compêndio indiano de astronomia composto no século IV d.C, operando com epiciclos e frações sexagesimais. Embora os indianos tenham adquirido seu conhecimento de trigonometria do helenismo cosmopolita de Alexandria, o material estudado por eles tomou uma nova forma. Os árabes e indianos proporcionaram cada vez mais o fortalecimento da trigonometria quando, nas aplicações da função cordas apresentada por Ptolomeu, que se baseava na relação funcional entre as cordas de um círculo e os arcos centrais que subentendem, acharam necessário dobrar antes de usá-los como argumento numa tabela de cordas, na qual o próprio arco original seja uma variável independente e a transformou em meia corda ou corda do arco metade (KENNEDY, 1997, p.13), criando uma nova versão da tabela de seno. Outra característica da trigonometria indiana é que era de natureza aritmética enquanto a dos gregos era geométrica.

Por meio desse processo surgiu na Índia a precursora da função trigonométrica moderna que chamamos de seno de um arco, ou seja, é a metade da corda do arco duplo, encontrando assim um instrumento útil e preciso para a astronomia, que foi considerada como a contribuição mais importante dos *Siddhantas* à História da Matemática. Para os indianos, as funções trigonométricas ainda eram definidas como comprimento de um segmento e não como uma relação entre dois comprimentos como é o caso das funções trigonométricas modernas (MOREY, 2003, p. 20).

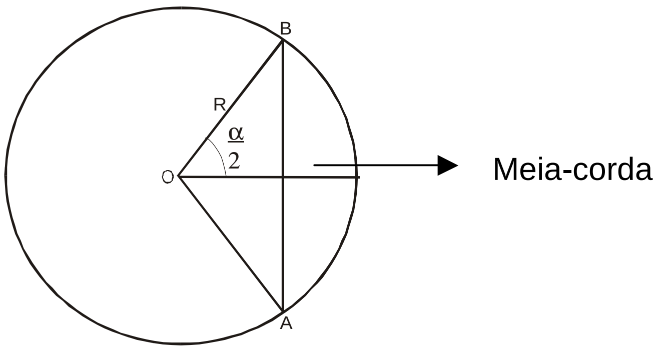


Figura 5 – Meia-corda no círculo

Outra contribuição notável é dada por Aryabhata (500 d. C), matemático indiano que já calculava semicordas. Algum tempo depois, matemáticos árabes calcularam tabelas de seno e seno reverso (isto é, 1 – cos A). O seno era chamado *jya,* uma das várias grafias para a palavra "corda" em indiano. Depois os árabes a transliteraram para *jyb,* mais tarde incorretamente lida como *jayb,* que em árabe significa "bolso", "golfo" ou "baía" em latim *sinus.* A palavra árabe adequada que deveria ter sido traduzida seria *jiba*, que significa a corda de um arco, em vez de *jayb*, pois foi o estudo das cordas de arcos numa circunferência que originou o seno.

Ao traduzir do árabe para o latim, o tradutor Gerardo de Cremona (c. 1150) usou o equivalente latino *sinus,* atualmente denominado como seno. Segundo Vasconcellos (1925, p.573), a palavra seno é de origem indiana e significa inclinação, declive. A obra *Aryabhatiya,* desse matemático indiano, redescoberta pela escola indiana Bhau Daji em 1864, divide-se em quatro partes: Harmonias Celestes, O tempo e sua Medida, As Esferas e Elemento do cálculo. No trabalho de Aryabhata, a área do círculo é expressa corretamente como a metade do produto do comprimento de sua circunferência pelo raio, embora o volume da esfera seja dado por uma aproximação incompatível com a precisão obtida em seus inúmeros cálculos astronômicos que realizou. Também seguiu Ptolomeu, dividindo o círculo em 360 graus, destacando-se de forma relevante no estudo do comprimento das cordas correspondentes a vários arcos de círculo, que tratamos na linguagem atual de estudo das linhas ou funções trigonométricas.

Encontramos nessa obra valores de senos de 0º a 90º em intervalos de 3 inteiros e três quartos do grau. Na trigonometria de Aryabhata é dado o valor aproximado de π. Em relação à tabela de senos, na obra *Aryabhathiya está escrito:* "Se dividirmos a quarta parte da circunferência por meio de um triângulo e de um quadrilátero, é obtido sobre o raio todas as meias cordas de arcos quaisquer" (VASCONCELLOS, 1925, p.577).

Os indianos tinham conhecimento da Matemática grega, pois introduziram a semicorda ou conceito de seno. Com isso, os conhecimentos sobre as identidades pitagóricas se tornaram mais óbvios. Varahamihira (c. 505 d. C.) produziu *Pancasiddhantika* (Os Cinco Cânones Astronômicos). Apresentou a fórmula equivalente de $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$ (SMITH, 1958, p. 43), tabulou o cosseno tão bem quanto o seno para o raio de 120 e descreveu as relações entre estas funções (KATZ, 1998, p. 214).

O indiano Brahmagupta (628 d. C), que viveu na Índia Central, destacou-se pelas contribuições à álgebra, mas também contribuiu para a trigonometria com sua obra *Brahmasphuta Siddhanta* (Tratado de Astronomia de Brahma), criando um método detalhado para construir uma tabela de senos para qualquer ângulo dado. Brahmagupta reformou um resultado de Ptolomeu para o raio do círculo inscrito a um triângulo, dando o equivalente do resultado trigonométrico:

$$2R = \frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

(fórmula encontrada em BOYER, 1974, p.160)

Segundo Morey (2003, p.19-20), nos estudos das funções trigonométricas, os matemáticos indianos usavam a meia-corda com mais freqüência, posteriormente conhecido como seno indiano. Na trigonometria indiana, três funções são envolvidas:

1ª função: Jyaa = AM = $r.\ sen\ a$

2ª função: Kojyaa = OM = $r.\ cos\ a$

3ª função: Ukramajyaa = MC, sendo

$r = raio$

MC = OC – OM

$= r - r.\ cos\ a$

$= r\ (1 - cos\ a)$

$= r.\ vers\ a$

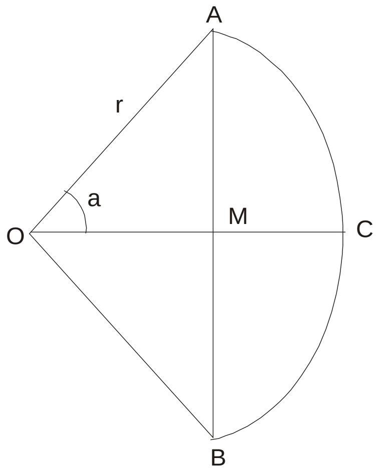


Figura 6 – Seno, cosseno e seno reverso

Segundo Struik (1987, p.116), nesse mesmo período, no ano de 622, ocorreu um fato que exerceu forte influência sobre o desenvolvimento da Matemática: a “fuga” de Maomé para Medina, conhecida como Hégira. Os árabes conquistaram várias regiões da Ásia ocidental e antes do final do século VIII tinham ocupado regiões do Império Romano. O árabe tornou-se a língua oficial em vez do grego e do latim.

Por volta de 766, uma obra astronômico-Matemática da Índia, conhecida pelos árabes como *Sindhind* (Teoria Planetária), foi trazida à Bagdá (BOYER, 1974, p. 166). A tradição grega foi cultivada por uma escola de sábios árabes, por volta do ano 780, que traduziu fielmente o livro *Tetrabiblo*s (Quarta parte do livro) de Ptolomeu, e clássicos dos gregos Apolonio, Arquimedes, Euclides e outros.

Segundo Boyer (1974, p.172), na Arábia houve no início uma competição nos cálculos astronômicos, de dois tipos de trigonometria - a geometria grega das cordas de Ptolomeu e as tabelas indianas de senos. Esta última foi adotada e a trigonometria árabe construiu-se sobre a função seno.

Al-Battani (850-929 d. C), cujo o nome completo era Mohammed ibn Jabir ibn Sinan Abu Abdallah al-Battani, natural de Battani, na Síria, distinguiu-se por seus trabalhos em astronomia e pelas inúmeras tabelas das linhas trigonométricas que construiu. Baseou-se na trigonometria indiana e escreveu uma obra intitulada *Sobre o movimento das estrelas*, na qual aparecem fórmulas de funções seno e seno reverso, uma tabela de cotangentes, assim como a regra dos cossenos aplicada aos triângulos esféricos.

Segundo Bell (1992, p.103), Al-Battani pode ter sido o primeiro matemático árabe a aplicar álgebra em vez de exclusivamente geometria, para a trigonometria, nos cálculos de tabelas. Essas tabelas, juntamente com seus tratados astronômicos foram transmitidas e disseminadas na Europa, compartilhando o conhecimento de trigonometria (BELL, 1992, p.103).

Al-Battani aplicou em suas obras astronômicas o seno e suas propriedades e, em particular, em seu “Tratado sobre as Estrelas”, traduzido para o latim e divulgado na Europa no século XII por um tradutor conhecido como Platão de Tivoli, sob o título *De Scientia Stellarum* (Ciência das Estrelas). Segundo Boyer (1974, p.183) vários manuscritos árabes foram traduzidos na Espanha. Nesse trabalho, Al-Battani corrigiu alguns dos resultados de Hiparco e Ptolomeu, construiu também uma tabela de cotangente, grau por grau de cada quadrante e fez uso constante da trigonometria esférica cujas fórmulas lhe eram bem conhecidas como, por exemplo, a lei dos cossenos para um triângulo esférico, ou seja:

$$cos\,\alpha = cos\,b\,.\,cos\,c + senb\;senc\;cos\,\alpha$$

Outra contribuição bastante significativa dada por Al-Battani foi a possibilidade de resolver problemas na trigonometria esférica aplicando os princípios da projeção, que foi desenvolvida por Regiomontanus mais tarde. Os matemáticos árabes consideravam-se astrônomos e se dedicavam cada vez mais à trigonometria, algo característico também dos indianos. É creditada aos árabes a utilização das seis funções trigonométricas, assim como os aprimoramentos na dedução de fórmulas da trigonometria esférica.

De acordo com Cajori (1919, p.105), outra equação encontrada no trabalho de Al-Battani é:

$$\frac{sen\,\theta}{cos\,\theta} = D$$

O valor de θ podia ser encontrado usando um processo desconhecido para os antigos.

$$sen\ \theta = \frac{D}{\sqrt{1+D^2}}$$

Abu'l-Wefa (940-998), é um matemático muçulmano que se tornou especialmente conhecido por sua tradução da obra de Diofanto, por ter introduzido a função tangente em trigonometria e por uma tabela de senos com incrementos de 10' em 10' com uma interpolação fundada em que as diferenças de senos, que correspondem a arcos eqüidistantes, decrescem ao mesmo tempo que os arcos crescem (VASCONCELLOS, 1925, p.600). Este matemático contribuiu para o progresso da trigonometria e para a construção de tabelas, introduzindo a tangente trigonométrica como quociente do seno e do cosseno, equivalentes da secante e da cossecante estudando as propriedades e completando as tabelas de Ptolomeu com uma tabela de tangentes. Ele também ofereceu um exemplo de técnicas, apresentando as relações sobre a superfície da esfera e construindo objetos retilíneos planos no interior da esfera, cujos valores eram calculados com oito decimais exatos.

Abu'l-Wefa operou sobre a superfície da esfera, levando às relações (KENNEDY, 1997, p.21):

$$\frac{sen\,ca}{sen\,b} = \frac{sen\,ba}{sen\,c}$$

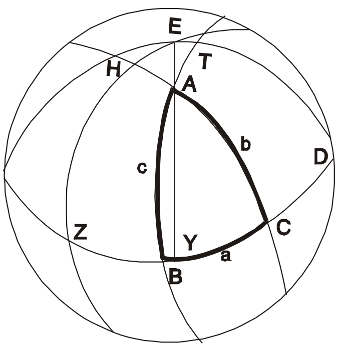


Figura 7 – Triângulo Esférico

Na astronomia, a construção de tabelas trigonométricas sempre teve grande importância. Com Abu'l-Wefa, encontramos definições precisas do seno da corda e do seno reverso, ou *sinus versus* (seno reverso), como se indicava na Idade

Média o valor do raio menos o cosseno, isto é, *sinus versus* de φ"= 1 – cos φ, e suas tabelas para cada 15', com uma aproximação equivalente a oito decimais. Segundo Zeller (1944, p.8) para definir a tangente e a cotangente ele considerou o raio igual a unidade.

A tangente, na Idade Média, era conhecida como *umbra versa* (sombra reversa). O nome originou-se do seguinte: se considerarmos um bastão vertical e sua sombra, temos um triângulo onde a sombra se denomina *umbra recta* (sombra reta) e o bastão, *umbra versa* (sombra reversa), que corresponde à tangente trigonométrica se considerarmos a *umbra recta* (sombra reta) como raio de um círculo unitário.

Na trigonometria esférica, Abu'l-Wefa substitui o uso do teorema de Menelau pelo "teorema dos senos", isto é:

$$senA : senB : senC = sena : senb : senc$$

Outro matemático árabe foi Al-Biruni (973-1048). Ele provou que os lados de um triângulo têm razões iguais àquelas entre os senos dos ângulos opostos. Nas suas viagens para a Índia, teve contato com os trabalhos da cultura indiana. Escreveu um capítulo sobre comprimentos de gnômon, uma exposição de cálculos de sombras discutindo as funções trigonométricas no seu tratado *Exhaustive Treatise on Shadows* (Exaustivo Tratado sobre Sombras).

Um exemplo das várias relações entre funções trigonométricas apresentado por Al-Biruni diz que "o raio do gnômon para a hipotenusa da sombra está para o raio do seno de altitude para o seno total" (KATZ, 1998, p.275-276). Traduzindo para a fórmula:

$$\frac{g}{g \ cossec\,\alpha} = \frac{R\,sen\,\alpha}{R}$$

Em que g é o comprimento do gnômon ou então a fórmula:

$$cossec \quad \alpha = \frac{1}{sen \quad \alpha}$$

Fórmula citada por Katz (1998, p.276)

Outro trabalho importante, preservado por Al-Biruni, é a obra *Lema de Arquimedes,* que tratava do estudo das tabelas de cordas em que se encontram fórmulas equivalentes à atual: (fórmula encontrada em NEUGEBAUER, 1975, p.776)

$$sen\ (\alpha \pm \beta) = sen\,\alpha\ \ cos\,\beta \pm cos\,\alpha\ \ sen\,\beta$$

Abu'l-Wefa e Al-Biruni deixaram de atribuir valores diferentes para o raio e representaram o círculo com raio igual a 1, mas esta medida despertou tão pouco interesse por parte de seus contemporâneos e sucessores que foi ignorada durante toda a Idade Média, até tornar-se conhecida e mais explorada.

A partir do século IX, muitos astrônomos (árabes, persas, turcos) que compartilhavam a língua árabe e o islamismo, passaram a viver numa região que se estendia da Índia à Espanha. Existia um centro de estudos na Espanha, no qual trabalhava Al-Zarqali (c. 1029-87), considerado um dos mais importantes astrônomos de Córdova e editor das chamadas tabelas planetárias de Toledo.

O matemático Abu Abdullah al-Jayyany (987-1079) escreveu um tratado sobre trigonometria plana e esférica, intitulado O livro sobre Arcos da Esfera desconhecidos (COOKE, 2005, p.338). As tabelas trigonométricas deste trabalho, que foi traduzido para o latim, influenciaram o desenvolvimento da trigonometria no Renascimento.

A ascensão e o declínio do Império Árabe constituem um dos episódios mais notáveis da história. Com o declínio de Bagdá, o estudo da trigonometria tornou-se importante, na Espanha, principalmente os trabalhos com triângulos esféricos para a astronomia (SMITH, 1977, p.609).

A Matemática árabe teve a característica de adotar uma trigonometria cuja essência vinha da Grécia, mas os árabes acrescentaram novas funções e fórmulas, aplicando a fórmula indiana, o que tornou estas funções um instrumento útil para a topografia, arquitetura, astronomia. Os conhecimentos e técnicas de navegação também foram essenciais para as Descobertas durante a Idade Média.

O astrônomo egípcio Ibn-Yunus, que morreu em 1008, introduziu pela primeira vez um exemplo de transformação do seno ou do cosseno em soma ou diferença, dando o equivalente à fórmula $2\ cos\ x\ .\ cos\ x\ y = cos(x + y) + cos\ (x - y)$

Esta é uma fórmula muito utilizada na Europa do século XVI, chamada de “produto para a soma”, que servia, antes da invenção do logaritmo, para converter produtos em somas. Outra contribuição desse matemático são as soluções de um grande número de problemas de trigonometria plana e esférica e uma tabela de tangentes (VASCONCELLOS, 1925, p.600).

No ano de 1085, estudiosos ocidentais foram para Toledo para aprender a trigonometria tal como era transmitida em árabe. Diante da tomada de Toledo, a Europa familiarizou-se com os clássicos gregos por meio da língua árabe, mostrando muito mais inclinação para a Matemática árabe do que para a grega. Embora os romanos nunca tenham mostrado grande interesse pela trigonometria grega, os estudiosos latinos do século XII passaram a estudar com afinco a trigonometria árabe como aparecia nas obras de astronomia. No período que vai do século IX ao século XV foram usadas as tabulações sexagesimais e os objetos de estudo tornaram-se o triângulo plano ou esférico.

No século XI, o astrônomo Jabir ibn Aflah escreveu um trabalho de astronomia em nove livros, dedicando o primeiro à trigonometria esférica. Na trigonometria plana, ele seguiu os mesmos passos dos gregos. Para Cajori (1919, p.109), ele é considerado o criador da álgebra. A palavra álgebra vem de *“Jabir”, “Geber”.* Publicado em latim por Gerardo de Cremona, tornou conhecido o chamado Teorema de Geber: Se a, b, c são os lados, e A, B, C, os ângulos do triângulo esférico, triângulo retângulo em A, então o $\cos B = \cos b \operatorname{sen} C$ (fórmula encontrada em CAJORI, 1919, p.110).

Rapidamente as tabelas foram ficando cada vez mais precisas. O manual de astronomia de Al-Khazini (c.1120) tem uma tabela de seno com três casas sexagesimais significativas. Os cálculos envolvendo sexagésimos puros eram feitos entre os melhores matemáticos.

Bhaskara (1150) escreveu *Siddhanta Siromani* (Sistema de Astronomia), um método de construção da tabela do seno para todos os graus. Outro escritor foi Nasir Al-din (1201-1274), que continuou a obra de Abu’l-Wefa. É dele o trabalho de trigonometria plana e esférica, tratando o assunto independente da astronomia diferente de como e fazia na Grécia e na Índia (BOYER, 1974, p.177). Foi somente no século XIII que astronomia e trigonometria foram tratadas como assuntos separados, com a trigonometria baseando-se na geometria do círculo e da esfera.

Nos trabalhos de Nasir Al-din são usadas as seis funções trigonométricas usuais seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, e são dadas regras para resolver os vários casos de triângulos planos e esféricos.

Em 1258, os mongóis tomaram Bagdá e surgiu rapidamente um novo centro de estudo, no mesmo lugar, no observatório de Maragha, construído pelo chefe mongol Hulagu Khan, neto de Genghis Khan (STRUIK, 1987, p.126). O observatório foi construído para Nasir Al-din, em Tusi. Este fato histórico possibilitou que surgisse novamente uma instituição em que toda a ciência oriental podia ser reunida, estudada e comparada à ciência grega.

Nasir, juntamente com uma equipe de astrônomos, tinha ao seu dispor uma biblioteca de mais de 400.000 volumes. Ao considerar a trigonometria uma ciência especial, separada da astronomia, e suas tentativas para "provar" o axioma das paralelas de Euclides revelam que ele apreciava a perspectiva teórica dos Gregos.

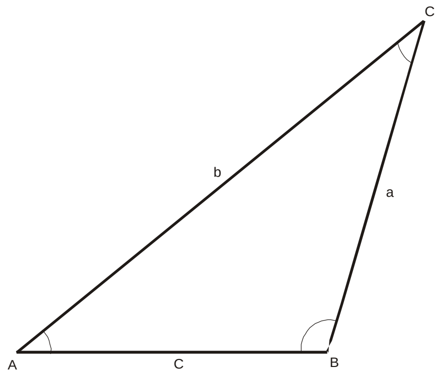
A questão de saber se o postulado das paralelas de Euclides é um axioma independente ou pode ser derivado de outros axiomas, inquietava Nasir (Stuik, 1987, p. 127). Ele também continuou a tradição do matemático Omar Khayyam (1050-1130) na sua teoria das razões e no novo ponto de vista numérico com que se encaravam os números irracionais.

No tratado *Kitab al shakl al quta* (Tratado na Figura de Transversal), ele usou o teorema dos triângulos para resolver triângulos planos sistematicamente, mas não mencionou a possibilidade de duas soluções no "caso ambíguo" em que dois lados e seja conhecido, o ângulo oposto deles, nem fez menção da lei do cosseno. Nasir (1201-1274), também trabalhou nas regras para resolver triângulos esféricos. Ao incluir todos os quatro dos casos especiais de teorema de Menelau para triângulos certos esféricos, ele incluiu dois adicionais:

$$cossec - cotA\,cotB \qquad\qquad cosA \;=\; cosa \quad senB$$

Nasir Al-din fez uma demonstração original do teorema de Pitágoras, escreveu também um trabalho sobre o postulado das paralelas e publicou-o com comentários e correções. Esse trabalho foi nomeado *Discussão das Dificuldades de Euclides.* Outro trabalho dedicado ao teorema de Menelau e suas aplicações é o tratado *Schakl al Katta* (Figura de secantes). Nos seus trabalhos, usando as seis funções de forma sistemática, ele mostrou como resolver qualquer tipo de triângulo esférico. Um exemplo que Morey (2003, p. 33) apresentou como atribuído a Nasir Al-Din para calcular as dimensões de um triângulo conhecidos os valores de diferentes ângulos e lados:

Dado um triângulo qualquer ABC, em que r = 60 unidades



$$\frac{b}{c} = \frac{r.sen\ B}{r.sen\ C}$$

Figura 8 – Regra do seno

Em especial, Nasir apresentou como resolver o caso em que os três lados não são conhecidos, promovendo a primeira discussão da solução deste caso dos triângulos. Faleceu no ano de 1274.

Na Índia, a importância da função seno é devida a sua aplicação nos sistemas astronômicos ou *Siddhantas.* Nasir Al-din, considerou a trigonometria independente da astronomia no “Tratado sobre os quadriláteros”, obra que devia mais aos gregos do que aos indianos. Na Idade Média, a astronomia se destacava nos currículos universitários, que era essencialmente constituído por quatro ciências que tomavam o nome de *Quadrivium* (As quatro vias)*:* a Astronomia, a Geometria, a Aritmética e a Música, consideradas indispensáveis para a educação humana. Na astronomia, Nasir deu uma contribuição que pode bem ter chegado ao conhecimento de Copérnico.

Segundo Boyer (1974, 183-184), a época das traduções na Europa, no século XII, incluiu alguma trigonometria árabe, mas, por vários séculos, as contribuições latinas foram imitações superficiais dos árabes. A trigonometria árabe tornou-se conhecida na Europa pela influência de Leonardo Fibonacci (c.1175-1250). Seu pai, natural de Pisa, tinha negócios no norte da África e estudou o filho com um professor muçulmano. Fibonacci viajou pelo Egito, Síria e Grécia e acabou se familiarizando com os métodos árabes. Foi o primeiro mercador ocidental cujos trabalhos apresentaram maturidade. Em 1220 escreveu a *Practica geometriae* (A prática da geometria), uma importante coleção de material sobre geometria e trigonometria, em que definiu os termos *sinus rectus arcus* (seno do arco reto) e *sinus versus arcus* (seno do arco reverso), conhecidos na Idade Média.

A *Practica geometriae* (A prática da geometria) de Fibonacci e as obras de Thomas Bradwardine (1290-1349) na Inglaterra continham alguns elementos de trigonometria recolhidos de fontes árabes, embora usasse a palavra *umbra versa* (sombra reversa) para tangente e *umbra recta* (sombra reta) para a cotangente (CAJORI, 1919, p.132).

Kline (1972, p. 197) nos relata que, por volta de 1300, a Geometria Euclidiana não avançara, mas a trigonometria com a introdução do seno ou a meia-corda, provou ser uma vantagem técnica. Os cálculos na trigonometria e a separação desta da astronomia revelaram uma ampla aplicação da Matemática.

A trigonometria desenvolveu-se também na obra de Levi Ben Gerson (c. 1330), *De sinibus, chordis, et arcubus* (Sobre senos, cordas, e arcos), aparecendo pela primeira vez na literatura da Europa, a Lei dos senos (ZELLER, 1944, p.15). Mas o primeiro escritor da Renascença a expressá-la com maior precisão foi Johann Müller (1436-1476), conhecido como Regiomontanus (SMITH, 1977, p. 630).

Segundo Kennedy (1997, p.40), Ulugh Beg (1393-1449) foi um astrônomo persa de sangue real do século XV, que trabalhava em um observatório astronômico fundado no ano de 1420, tinha uma tabela de senos calculada para cada minuto de arco, e tangentes com incrementos de 1 grau, corretas pelo menos até a oitava casa decimal.

Com o colapso do Império Bizantino, culminando com a queda de Constantinopla ante os turcos em 1453, ocorreu o fluxo de refugiados para a Itália, o que facilitou a entrada de muitos documentos da civilização grega e das traduções árabes no Ocidente, expandindo o conhecimento matemático.

A atividade Matemática no século XV concentrou-se nas cidades italianas e nas cidades de Nuremberg, Viena e Praga na Europa Central e girou em torno da aritmética, da álgebra e da trigonometria. Também houve interação entre análise numérica e geometria; a trigonometria mostrou em seu interior o crescimento embrionário de três partes clássicas: álgebra, análise e geometria (KENNEDY, 1997, p.1). Nesse mesmo século, a trigonometria também se tornou indispensável para a realização das grandes descobertas dos navegantes de Portugal e Espanha, para os cálculos de latitudes e longitudes de cidades e de diversos pontos geográficos nos mapas.

O astrônomo e matemático Georg Von Peurbach (1423-1461), depois de ensinar Matemática na Itália, se estabeleceu em Viena, fazendo da universidade local o centro matemático de sua geração. Desentendeu-se com o cardeal Nicholas de Cusa (1401-1464), pois rejeitava a idéia de que a Terra se movia ao redor do sol. Ele admirava Ptolomeu e planejava publicar uma versão com correções do *Almagesto,* baseando-se em traduções latinas existentes. Coligiu também uma tabela de senos, usando os números hindu-arábicos, que tiveram seu uso difundido na Europa pelo matemático italiano Leonardo Fibonacci.

A Matemática perdeu precocemente Peurbach, falecido subitamente aos 38 anos de idade, fato que entristeceu seu aluno Regiomontanus, principalmente pelo relacionamento de amizade que eles mantinham. Assim, no leito de morte, Peurbach pediu ao seu aluno e amigo que continuasse seus planos de tradução e correção do *Almagesto*.

Regiomontanus estudou nas universidades de Leipzig e Viena, desenvolvendo seu interesse e dedicação à Matemática e à astronomia. Ao acompanhar o Cardeal Bessarion a Roma, adquiriu bom conhecimento do grego, entrou em contato com as diversas correntes do pensamento científico e filosófico e traduziu o *Almagest*o original de Ptolomeu. Depois de viajar e estudar na Itália voltou à Alemanha e lá estabeleceu a novidade da época: a imprensa que havia sido inventada pelo alemão Johannes Gutemberg (c.1398 - c.1468), por volta de 1438 e um observatório em Nuremberg, para estimular a ciência e a literatura.

No tratado que escreveu, sistematizou a Trigonometria Plana e Esférica. Produziu, juntamente com Peurbach, a denominada *Epítome* (Epítome) integral da obra de Ptolomeu, escrita entre 1460 e 1463, muito estudada por diversos astrônomos a partir do século XVI.

Segundo Boyer (1974, p.200) a primeira exposição européia sistemática de trigonometria plana e esférica é encontrada no seu tratado *De triangulis omnimodis* (Triângulos de todos os tipos), escrito por volta de 1464, mas publicado postumamente em 1533. Considerado o tratado mais importante de suas obras por tratar a trigonometria independentemente da astronomia, empregou as funções trigonométricas seno e cosseno e posteriormente calculou uma tabela de tangente.

A função tangente foi incluída em outro tratado sobre trigonometria, o *Tabula directionum* (Tabela direta), publicado em Nuremberg antes de 1485. Segundo Kline (1972, p.238), a novidade da obra é a utilização de fórmulas de áreas escritas em palavras. No *Tabula directionum* (Tabela direta), escrito em 1964-67, calculou tabelas de tangentes e subdivisões decimais dos ângulos, um procedimento que não era usual para aquele tempo.

O *De triangulis omnimodis* (Triângulos de todos os tipos) foi uma exposição sistemática dos métodos para resolver triângulos que marcou o renascimento da trigonometria, vitalizando-a na Europa. Obras novas de astronomia invariavelmente eram acompanhadas de tabelas de funções trigonométricas. Regiomontanus apontou um erro de raciocínio matemático de Nicholas de Cusa (1401-1464), criticando-o porque Cusa acreditava que máximos e mínimos são relacionados, portanto que o círculo deve ser reconciliável com o triângulo e que tomando pontos médios de polígonos inscritos e circunscritos tinha chegado à quadratura do círculo.

Dando continuidade aos trabalhos matemáticos, como seu professor Peurbach, ele adotou o seno indiano, isto é, a meia-corda do arco metade; construiu uma tabela de senos com os raios de 600.000 unidades e mais outra base de raio de 10.000.000 de unidades. Parece que Regiomontanus conhecia a obra de Nasir Al-din, e pode ser essa a origem de seu desejo de organizar a trigonometria como disciplina independente da astronomia.

Em sua obra a função seno é introduzida de acordo com a definição indiana: “Quando o arco e sua corda se dividem em duas partes iguais, denominamos de meia-corda o seno de arco-metade”. Noutro trabalho aplicou a álgebra e a trigonometria ao problema da construção de um quadrilátero cíclico, dado os quatro lados.

Mais fundamental foi seu trabalho na solução dos triângulos planos e esféricos. Até por volta de 1450, a trigonometria esférica consistia de regras baseadas nos gregos, indianos e versões árabes e, por último, da Espanha. Regiomontanus organizou um corpo sistemático de conhecimento sobre trigonometria, baseando-se na obra de Ptolomeu. Seu maior objetivo era o progresso da teoria planetária, preocupando-se com as predições e determinações das posições dos corpos celestes (ZINNER, 1990, p.181). Estudou também textos matemáticos árabes, pois não participava do desprezo dos humanistas para com a cultura árabe.

Os trabalhos de Abu'l-Wefa e Nasir não eram conhecidos na Europa nesse tempo. A obra de Regiomontanus foi considerada superior em relação ao trabalho de Nasir. Na sua obra *De triangulis* (Sobre triângulos*),* escrita por volta de 1462-1463, depositando todo o seu conhecimento da trigonometria plana, geometria esférica e trigonometria esférica, ele estabeleceu a lei dos senos para os triângulos esféricos:

$$\frac{sen\ a}{sen\ A} = \frac{sen\ b}{sen\ B} = \frac{sen\ c}{sen\ C}$$

E a lei dos cossenos envolvendo os lados:

$$\cos a = \cos b\ \cos c + sen\ b\ sen\ c\ \cos A$$

A obra De triangulis (Sobre triângulos) não foi publicada até 1533. Nesse meio tempo, Johann Werner melhorou e publicou as idéias de Regiomontanus no *De triangulis Sphaericis* (Sobre triângulos esféricos) (1514). O trabalho de trigonometria esférica de Regiomontanus contava com uma enorme quantidade de fórmulas, o que dificultava os cálculos. Os valores negativos das funções cossenos e tangente para ângulos obtusos não eram reconhecidos como números.

Na Europa, os decimais passaram a substituir os sexagesimais nas tabelas trigonométricas sob a influência do estudo da trigonometria com Regiomontanus. Desde o século VIII, o sistema posicional já era aplicado no Oriente Médio. A transição do sistema de numeração romano para os números hindu-arábicos foi completada na Europa por volta de 1480 (GRATTAN-GUINNESS, 1994, p.211). A utilização de instrumentos como o quadrante e o astrolábio baseados em conhecimentos trigonométricos eram muito freqüentes nas observações astronômicas (ZINNER, 1990, p.15).

Regiomontanus obteve uma tabela de senos inicialmente de raio igual a 60 x 10^5, com intervalos de um minuto, que foi impressa após sua morte. Traduziu as *Seções Cônicas* de Apolônio (262-190 a. C), o trabalho sobre mecânica de Heron (100 d.C) e, talvez o mais difícil de todos, o de Arquimedes (287-212 a.C). Ao escrever seu trabalho *De triangulis* (Sobre triângulos), Regiomontanus ampliou o estudo da trigonometria na Europa.

Esse tratado, diferente dos textos atuais apenas na notação que ainda não existia, contém a lei dos senos num triângulo esférico. Nasir Al-din (c. 1250), fez algo de semelhante, mas o seu trabalho não originou muitos progressos, enquanto o livro de Regiomontanus influenciou profundamente o desenvolvimento posterior da trigonometria e das suas aplicações à álgebra e à astronomia.

Um fato interessante relatado por Zinner (1990, p.181), é que Regiomontanus falava sobre o Sol como o rei dos planetas e conectava-o com 3 planetas por meio do movimentos de epiciclos. Esta posição especial do Sol era clara para ele, portanto, a necessidade de refazer os cálculos astronômicos, a construção de instrumentos para as observações, criava uma nova trigonometria, visando uma certeza maior sobre os estudos astronômicos.

De triangulis omnimodis (Triângulos de todos os tipos) de Regiomontanus se divide em 5 livros, os dois primeiros dedicados à trigonometria plana e outros três à trigonometria esférica. Nesse trabalho, o autor revela particular interesse na determinação de um triângulo, satisfeitas as três condições dadas.

Collette (1985, p.258), cita três dos problemas encontrados no livro de Regiomontanus:

Problema 1: “Dada a base de um triângulo e o ângulo oposto e também a altura sobre a base da área, então é possível determinar os lados”.

Problema 2: “Determinar um triângulo, dada a diferença entre dois lados, a altura relativa ao terceiro e a diferença entre os segmentos em que a altura divide o terceiro lado”.

Problema 3: “Determinar um triângulo sem conhecer a diferença dos lados, a altura sobre o terceiro e a diferença dos segmentos na altura que divide ao terceiro lado”.

No livro 1 de Regiomontanus, segundo Zeller (1944, p.20) há as seguintes definições:

“O complemento de qualquer arco é considerado ser a diferença entre ele mesmo e o seu quadrante”.

“O arco é uma parte da circunferência de um círculo”.

“O complemento é definido como a medida da diferença entre o ângulo e o ângulo reto”.

$$sen\ (90^o - \alpha) = cos\ \alpha$$

Regiomontanus foi o primeiro a publicar livros de astronomia para o uso comercial. Esperava também imprimir as traduções de Arquimedes, Apolônio, trabalhos sobre mecânica de Heron e outros cientistas, mas, supostamente envenenado por inimigos, faleceu tragicamente aos quarenta anos. De acordo com Zinner (1990, p.185), ele tinha ferramentas Matemáticas e astronômicas para fazer uma nova cosmologia, mas seu falecimento interrompeu seu objetivo.

O historiador Cajori (1919, p.132) relata que algumas inovações na trigonometria foram atribuídas a Regiomontanus. Outro fato interessante por Collette (1985, p. 258) é que Regiomontanus parecia conhecer o trabalho de Nasir Al-din.

Nicolau Copérnico (1473-1543), o criador do sistema heliocêntrico, que, como um astrônomo, era quase inevitavelmente um trigonômetra, completou o célebre tratado, *De revolutionibus orbium coelestium (*Das revoluções dos corpos celestes), publicado em 1543, ano de sua morte. Nesse tratado há seções substanciais sobre trigonometria que o historiador Cajori (1919, p. 279) comenta estar de acordo com o método de Regiomontanus. Ambos estavam preocupados com as tabelas de seno necessárias aos cálculos mais precisos, que para eles eram insuficientes para suas necessidades (ZINNER, 1990, p.183).

O conteúdo do tratado *De revolutionibus orbium coelestium (*Das revoluções dos corpos celestes) é muito semelhante ao do *De triangulis* (Sobre triângulos) de Regiomontanus, publicado em Nuremberg apenas uma década antes, mas as idéias de Copérnico sobre trigonometria parecem datar de antes de 1533. Nessa época, segundo o historiador Boyer (1974, p. 213-214), ele provavelmente ainda não conhecia a obra de Regiomontanus. Copérnico conhecia as obras do árabe Nasir Al-din e eliminou uma proposição generalizada pelo teorema de Nasir Al-din no livro 3, capítulo 4, de seu *De revolutionibus orbium coelestium (*Das revoluções dos corpos celestes*)* (COOKE, 2005, p.338).

O contato com o estudante Rheticus, vindo de Wittenberg em 1539, provavelmente possibilitou que Copérnico tomasse conhecimento da Matemática de Regiomontanus, necessária aos cálculos da astronomia posicional.

Segundo Smith (1977, p.610), Copérnico completou alguns trabalhos deixados por Regiomontanus, chamado *De Lateribus et Angulis Triangulorum* (Tratado sobre as laterais e os ângulos dos Triângulos), publicado em 1542 por seu aluno Rheticus.

Por meio dos teoremas trigonométricos desse tratado, Copérnico ampliou a influência de Regiomontanus, mas seu estudante Rheticus (1514-1576) tornou a trigonometria mais aprimorada. Ele combinou as idéias dos dois, juntamente com as suas próprias, num outro tratado e calculou uma tabela de senos baseada no raio de 10^{10} unidades e mais outra baseada em 10^{15} unidades.

Rheticus deixou a tradicional consideração de funções relativas ao arco de círculo e dedicou-se ao estudo dos triângulos retângulos, possibilitando que a trigonometria atingisse um grau de desenvolvimento elevado. Foi na sua obra *Canon doctrinae triangulorum* (Cânon da doutrina dos triângulos), que as seis funções trigonométricas foram definidas como funções de um ângulo em vez de arcos e substancialmente como raios. Concebeu também a idéia de uma tabela de secantes. (ZELLER, 1944, p.110). Ele usou termos como *perpendiculum* (perpendicular*), basis* (base) *e hypotenusa* (hipotenusa) (SMITH, 1977, p.610) e também o termo *sinus totus* (seno total) *e sinus perfectus* (seno perfeito) foram usados para o seno de 90º.

Rheticus define: (ZELLER, 1944, p.56)

"Em todo o triângulo com ângulo reto, o lado que subtende ao ângulo reto é chamado de hipotenusa".

"Se AB é o raio ou *sinus totus* (seno total), então a perpendicular é o seno e a base é o cosseno".

O uso das frações decimais não era freqüente, portanto, para as funções trigonométricas, Rheticus usou intervalos de ângulo de 10''. Tornou-se o primeiro europeu a definir explicitamente as funções trigonométricas tangente e cotangente como razões entre lados de um triângulo retângulo e escreveu o primeiro tratado publicando as idéias copernicanas em 1540 (COLLETTE, 1985, p277). Começou tabelas de tangentes e secantes com uma base de 10^{15} partes, mas, devido a sua morte, coube ao seu discípulo Valentin Otho (1550-1605) terminar o tratado *Opus palatinum de triangulis* (Obra palatina sobre triângulos), escrito em dois volumes, com tabelas de todas as seis funções trigonométricas, foi completado e editado com adições em 1596. Nesses dois volumes, traz uma novidade ao definir pela primeira vez as funções trigonométricas em relação à razão entre os lados de um triângulo retângulo.

Em 1595, Bartholomeus Pitiscus (1561-1613) apresentou um problema envolvendo a solução dos triângulos planos e corrigiu na sua obra *Thesaurus* (1613) as tabelas de Rheticus, modernizando o tratamento destas. O termo trigonometria foi publicado pela primeira vez em 1595 na sua obra *Trigonometriae sive, de dimensione triangulis, Líber* (Livro de Trigonometria, ou As medidas dos Triângulos) como suplemento a um livro sobre esféricas e novamente separado, em 1600, 1606 e 1612. Suas tabelas continham valores para as seis funções trigonométricas que chegaram a 15 casas decimais para intervalos de 10''.

O tratamento analítico para a trigonometria deve-se ao notável matemático francês François Viète (1540-1603). Considerado como o fundador de uma álgebra literal, criou uma abordagem analítica generalizada para a trigonometria que às vezes é chamada de goniometria. Ele iniciou, no Ocidente, a primeira elaboração sistemática dos métodos de cálculo dos triângulos planos e esféricos com o apoio das seis funções trigonométricas (CAJORI, 1919, p.137).

Partindo de seus predecessores, ele considerava a trigonometria como um ramo independente da Matemática, como Regiomontanus e também trabalhava sem referência direta a meia-corda num círculo, como Rheticus. Segundo Zeller (1944, p.73), Viète conhecia muito o trabalho de Rheticus. No seu primeiro trabalho sobre trigonometria, Viète, no *Canon Mathematicus seu ad triangula cum appendicibus* (Tratado Matemático ou para entender os triângulos com apêndices), preparou extensas tabelas de cordas de todas as seis funções de ângulos aproximados até minutos. Nessa obra se observa uma utilização sistemática dos números decimais.

Viète escolheu um *sinus totus* (seno total) ou hipotenusa de 100.000 partes para as tabelas de senos e cossenos e uma base ou *perpendiculum* de 100.000 partes para as tabelas de tangentes, cotangentes, secantes e cossecantes. Não usava, porém, esses nomes, exceto quanto à função seno.

Viète, em *Canon Mathematicus seu ad triangula cum appendicibus* (Tratado Matemático ou para entender os triângulos com apêndices) reuniu fórmulas para a solução dos triângulos planos oblíquos, incluindo a lei das tangentes (fórmula encontrada em BOYER, 1974, p.226):

$$\frac{\frac{(a+b)}{2}}{\frac{(a-b)}{2}} = \frac{tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

sendo A e B ângulos, a e b lados de um triângulo.

Em 1583, a fórmula foi publicada pela primeira vez pelo físico e matemático Thomas Finck na sua obra *Geometria rotundi* (Geometria redonda), que contribuiu com o nome “tangente”, talvez porque a sombra vertical v esteja situada ao longo da tangente ao círculo de raio g. Além disso, nomeou as três co-funções “seno, cosseno e tangente complementar”. Segundo Zeller (1944, p.11) esse matemático não definiu as funções trigonométricas como parte de um triângulo retângulo como Rheticus e Viète, mas considerou as linhas trigonométricas como linhas do círculo.

Foi Viète também que escreveu o teorema das Cotangentes, modificado por Adrien Van Roomen (1609), que se dirigiu a França para conhecê-lo e foi provado por Snell em 1627 (SMITH, 1958, p.632).

$$\frac{1}{senb\,cossecA} = \frac{cot\,c + cosA\,cot\,b}{cot\,C}$$

Viète observou uma conexão importante entre suas fórmulas trigonométricas e a resolução de equações cúbicas, verificando que se poderia usar uma relação trigonométrica para solucionar uma equação algébrica, tornando-se um dos primeiros a relacioná-las. Partindo da equação $x^3 + 3\,px + q = 0$ e considerando $y=mx$ obtém-se uma nova equação: $y^3 + 3pm^2y + m^3q = 0$. Esta fórmula apresenta analogia com a fórmula encontrada em Collette (1985, p.287):

$$cos^3\theta - \frac{3}{4}cos\theta - \frac{1}{4}cos3\theta = 0$$

Albert Girard (1595-1632) publicou em 1626 um tratado de trigonometria que contém o mais antigo uso das abreviações *sen, tan* e *sec.* Ele deu a expressão da área de um triângulo esférico em termos de seu excesso esférico.

Desta forma, a trigonometria podia servir de auxiliar para a álgebra, no caso irredutível da cúbica. Considerando os ângulos que satisfazem as condições, é possível encontrar as três raízes. A resolução trigonométrica foi feita em detalhe por Girard (1595-1632), publicando-a em 1629 em *Invention Nouvelle en l'algèbre* (Invenção Nova em Álgebra).

Outra contribuição de Viète foi o desenvolvimento dos trabalhos de Arquimedes e encontro de π com nove casas decimais. Pouco depois, o π foi calculado com trinta e cinco decimais por Ludolf Van Coolen.

O fato de aplicar a trigonometria aos problemas algébricos e aritméticos possibilitava que a trigonometria obtivesse um alcance mais amplo. Além disso, suas fórmulas para ângulos múltiplos deveriam ter revelado a periodicidade das funções trigonométricas. No *Canon Matematicus seu ad triangula cum appendicibus* (Tratado Matemático ou para entender os triângulos com apêndices), encontramos fórmulas gerais equivalentes às expressões de *sen nx e cos nx,* em função de *sen x y cos x.* Nesse foram encontradas as seguintes identidades citadas em Collette (1985, p. 292):

$$sen\theta = sen(60^o+\theta) - sen(60^o-\theta)$$

$$3sen\theta - 4sen^3\,\theta = sen3\theta$$

$$cossec\,\theta + cotg\theta = cotg\,\frac{\theta}{2}$$

$$cossec\theta + cotg\theta = tan\frac{\theta}{2}$$

Encontramos nos seus escritos, fórmulas que transformavam o produto de funções em uma soma ou diferença, cálculos de funções envolvendo ângulos de 30º, 45º, 90º. Com Viète, a trigonometria foi praticamente completada, mas todos os cálculos foram simplificados no século XVII com a invenção dos logaritmos (BELL, 1992, p. 121).

Segundo Cajori (1919, p.151), Edmund Gunter (1581-1626) publicou em 1620 uma tabela de logaritmos comuns de senos e tangentes de ângulos, inventando o termo cosseno para a abreviação de seno complementar *(complemental sine* em inglês), surgindo dessa forma o *co-sinus,* em português "cosseno" e a palavra cotangente de um ângulo. Na Europa, apareceram identidades trigonométricas de vários tipos em todas as partes. Entre essas havia um grupo de fórmulas conhecidas como regras de prostaférese (palavra originada do grego que significa adição e subtração), isto é, fórmulas que transformavam um produto de funções numa soma ou diferença. A trigonometria despertava interesse no fim do século XVI e começo do XVII, mas tomou a forma primariamente de sínteses em livros de texto, principalmente para cálculos durante as navegações.

Segundo Smith e Beman (1910, p.290), as tabelas de valores das funções trigonométricas tinham chegado a um alto grau de acurácia. As regras às vezes são chamadas "fórmulas de Werner", pois parecem ter sido usadas por Johannes Werner entre 1505 e 1513 para simplificar cálculos astronômicos. Este artifício era usado nos principais observatórios astronômicos, inclusive pelos matemáticos Tycho Brahe (1546-1601), Wittich (1584) e Clavius (1537-1612) que sugeriram o uso das tabelas trigonométricas para abreviar os cálculos; assim este processo chegou a John Napier (1550-1617) na Escócia. Ptolomeu, Copérnico, Tycho Brahe e Kepler não se desviaram do programa Hiparconiano de geometria para descrever os movimentos dos planetas (BELL, 1992, p.58).

As tabelas logarítmicas surgiram da necessidade dos matemáticos e astrônomos reduzirem os procedimentos dos cálculos. A expansão comercial e o aprimoramento das técnicas de navegação, como por exemplo, a determinação de alguns dados importantes para a navegação, como longitudes ou a rota mais curta, bem como os problemas de astronomia também deram um impulso aos logaritmos (HOGBEN, 1946, p.485), principalmente os que envolviam funções de ângulos. Os logaritmos das funções trigonométricas foram calculados também por Henry Briggs (1556-1631), professor de geometria em Londres e amigo de Napier (CAJORI, 1919, p.151). Foram vários os matemáticos do século XVI que tentaram coordenar progressões aritméticas e geométricas, a fim de facilitar o trabalho com as complicadas tabelas trigonométricas. O valor das tabelas trigonométricas foi utilizado com logaritmos nas colunas suplementares, então foi tratado um capítulo na trigonometria como parte fundamental do cálculo.

Napier iniciou os estudos logarítmicos a partir de observações no círculo, quando dois raios perpendiculares OA_0 e OA_1 na qual raio é igual a um, o seno S_0 S_1, são paralelos, OA_1 move de O para A_0 em intervalos formando uma progressão aritmética, o valor decresce em progressão geométrica. O segmento OS_0, Napier denominou de *numerus artificialis* (números artificiais) e depois de *logarithmus* (logaritmos). Ao observar em 1614, que os logaritmos crescem enquanto os senos decrescem, proporcionou novas descobertas (SMITH; BEMAN, 1910, p.291).

Napier calculou os valores dos logaritmos da função seno e apresentou a tabela logarítmico - trigonométrica em que cada ângulo é dado nos intervalos dos minutos dos arcos (GRATTAN-GUINNESS, 1994, p.219). Segundo Zeller (1944, p.116) Napier foi o responsável por representar no círculo as funções trigonométricas. No trabalho com trigonometria plana, ele escreveu as seguintes fórmulas:

$$log\ a = log\ sen\ A + log\ c \quad e \quad log\ a = log\ tan\ A + log\ b.$$

No caso dos triângulos oblíquos, ele usou a leis dos senos, mas quando ele tinha dois lados e incluía ângulos, ou três lados dados, ele não usava a lei dos cossenos, procedendo de outra forma, o que, segundo Coolidge (1990, p.80), é denominado de “lei das tangentes”:

$$log(a-b)-log(a+b)-log tan\ \frac{A\ -\ B}{2} - log tan\ \frac{A+B}{2}$$

Napier substituiu as regras para os triângulos esféricos por meio de uma forma mais clara. Como o produto de dois números na segunda sucessão tem uma relação simples com a soma dos números correspondentes na primeira, a multiplicação podia ser reduzida à adição. Com este sistema, Napier pôde facilitar consideravelmente o cálculo dos senos.

Hogben (1946, p. 485) fornece-nos um exemplo:

$$sen\ (A + B) = sen\ A\ cos\ B + sen\ B\ cos\ A$$

O mesmo é feito com a expressão do seno da diferença:

$$sen\ (A - B) = sen\ A\ cos\ B - sen\ B\ cos\ A.$$

Somando-se membro a membro as expressões, obtém-se:

$$sen\,(A + B) + sen(A - B) = 2sen\,A\,cos\,B$$

$$senA\,cosB = ½\,sen\,(A + B) + ½\,sen\,(A – B) =$$

$$= \frac{1}{2}\,[sen(A + B) + sen(A - B)]$$

Esta equação pode ser usada para substituir o trabalho de multiplicar dois fatores. Assim, para multiplicar 0,17365 x 0,99027, consulta-se a tabela e acha-se: sen 10º = 0,17365 e cos 8º = 0,99027

A fórmula afirma que $sen\,10^o\,.\,cos\,8^o = ½\,(sen\,18^o + sen\,2^o)$.

As tabelas informam que $sen\,18^o = 0,30902$

$$sen\;\;2^o = 0,03490$$

$$sen\,18^o + 2^o = 0,34392$$

$$½\,(sen\,18^o + sen\,2^o) = 0,17196$$

Os cálculos apresentados fornecem um método simples de multiplicar os senos dos ângulos por meio da adição direta. Napier, conhecido como o “inventor dos logaritmos” não tinha a noção de base. Assim, a explicação dos logaritmos em termos de exponenciais é historicamente enganosa segundo Struik (1987, p.154), pois o conceito de exponencial data apenas do final do século XVII. O matemático suíço Jobst Bürgi (1552-1632) fez também uma descoberta no estudo dos logaritmos no seu trabalho escrito por volta de 1603 e 1611. Embora não usasse o termo logaritmo, há uma tabela de antilogaritmos nesse trabalho.

William Oughtred (1574-1660), um ministro episcopal, esforçou-se para encontrar uma trigonometria simbólica. Embora tenha usado algumas abreviações, foi somente com Euler que isso foi possível. Escreveu sua obra Trigonometria, ou, “A maneira de calcular os lados e ângulos dos triângulos” (Londres, 1657), escrita em 38 páginas.

Segundo Boyer (1974, p.245), René Descartes (1596-1650), foi o matemático mais conhecido do século XVII, e a invenção da geometria analítica é atribuída a ele. No ano de 1637, Descartes escreveu o primeiro tratado sobre geometria analítica (SMITH, 1977, p.322).

O primeiro esboço de uma curva do seno foi feito por Gilles Personne de Roberval (1602-1675), em 1635, importante indicação de que a trigonometria se afastava da ênfase computacional, que tinha dominado o trabalho nesse ramo, dirigindo-se para o tratamento funcional (BOYER, 1974, p.260). Em 1638, Roberval tinha descoberto como traçar a tangente à curva em qualquer ponto (problema resolvido simultaneamente por Fermat e Descartes), realizando grandes descobertas relativas à ciclóide (originado do grego *"trochoide",* que significa roda) (BOYER, 1974, p.260).

Em 1658, Blaise Pascal (1623-1662) escreveu o *Traité des sinus du quart de cercle* (Tratado sobre senos num quadrante de um círculo*)*, cujo conteúdo trazia estudos da integração da função seno (BOYER, 1974, p.267).

As funções trigonométricas são periódicas, fato que possibilita o seu uso para descrever fenômenos de natureza periódica, oscilatória e vibratória, e, assim, exerceram grande importância para os cientistas, nos estudos das oscilações dos pêndulos dos relógios, descrevendo os fenômenos periódicos, também para o aperfeiçoamento das técnicas de navegação. Entre eles destacam-se Christiaan Huygens (1629-1695) e Robert Hooke (1635-1703). Os estudos para a construção de instrumentos musicais motivaram os cientistas a estudar as vibrações do som, enfatizando a necessidade das relações entre funções trigonométricas.

Foi na primeira metade do século XVII que houve grande progresso na trigonometria analítica, para descrever o mundo físico, fenômenos mecânicos da vida diária, enquanto os inventores de trigonometria clássica estavam interessados na trigonometria esférica, na sua utilidade para os cálculos astronômicos ptolomaicos e predominantes em relação à trigonometria plana (MAOR, 1998, p.51).

O estudo dos movimentos por Galileu Galilei (1584-1642) mostrou a importância da trigonometria plana, como também os estudos cartesianos e newtonianos na óptica, nas aplicações envolvendo a medida de ângulos por radianos com quantidades exatas em vez de aproximações e nos projetos de engrenagens na mecânica e o estudo dos pêndulos, com suas fórmulas aplicadas nos movimentos periódicos, especialmente cicloidais (KENNEDY, 1997, p.36).

A influência de Nasir foi amplamente sentida mais tarde na Europa do Renascimento, no período de 1651 a 1663. John Wallis (1616-1703), predecessor de Newton, utilizou alguns trabalhos de Nasir sobre o postulado euclidiano, também deu uma forma analítica para a trigonometria que possibilitou posteriormente os cálculos de funções com métodos melhores. Outro passo importante foi dado por Wallis ao expressar fórmulas usando equações em vez de proporções e por trabalhar com séries infinitas (SMITH, 1977, p.612).

Considerado o inventor do cálculo, Isaac Newton (1642-1727) contribuiu muito para a trigonometria. Ele expandiu o sen^{-1} x, ou arc sen x, nas séries por reversão quando deduziu as séries para o sen x.

O matemático Roger Cotes (1682-1716), discípulo de Newton, deixou uma obra significativa à trigonometria, embora fosse rompida por sua morte repentina. Foi um dos primeiros matemáticos a reconhecer a periodicidade das funções trigonométricas e o período das funções tangente e secante. Foi Abraham De Moivre (1667-1754) que deu continuidade ao seu trabalho, reunindo e publicando postumamente a obra em 1722 sob o título *"Harmonia mensurarum"* (Harmonia das medidas). Esta obra está entre os primeiros trabalhos a mencionar a periodicidade das funções trigonométricas. Ela apresenta os ciclos da tangente e da secante impresso talvez pela primeira vez. Contém um tratamento completo do cálculo aplicado à função logarítmica e funções circulares (BOYER, 1974, p.314). Nesse trabalho, apresentou as "propriedades de Cotes do círculo", muito presente nos livros de trigonometria. Foi Leonhard Euler (1707-1783), porém, o primeiro a apresentá-lo em forma exponencial moderna.

De Moivre (1667-1754) produziu uma considerável quantidade de trabalhos que contribuiu para o estudo das probabilidades, um deles é *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis* (Miscelânea analítica sobre séries e quadraturas), em 1730, considerada importante também para o desenvolvimento da trigonometria analítica e que relacionava as funções trigonométricas com os números complexos.

Ao lidar com os números imaginários ele afirmava que se podia obter uma relação entre *x, y, t,* que representasse o *sinus versus* (seno reverso) dos arcos e as funções circulares. Estabeleceu as relações da trigonometria com os números imaginários que foram apresentadas na sua forma atual por Euler, na sua obra *Introductio in analysim infinitorum* (Introdução à análise dos infinitos) de 1748. Seu nome liga-se a um teorema da trigonometria que, na sua forma presente:

$$(cos\varphi + i\ sen\varphi)^n = cos\ n\varphi + i\ sen\ \varphi,$$

que aparece na *Introductio* (Introdução), de Euler.

Segundo Kennedy (1997, p.2), a trigonometria independente e em desenvolvimento permaneceu até certo tempo, mas com a invenção do cálculo infinitesimal, este caráter foi finalizado. Com a descoberta e a exploração do domínio complexo toda a teoria foi incluída na Análise da Matemática (KENNEDY, 1997, p.26).

É creditado a Leonhard Euler (1707-1783) o uso definitivo da letra π, relacionando a razão da circunferência para o diâmetro num círculo, embora uma ocorrência anterior tenha sido encontrada um ano antes do nascimento de Euler, na *Synopsis Palmariorum matheseos* (Sinopse Instrutiva das Palmeiras), no ano de 1706, por William Jones. Em geometria, álgebra, trigonometria e análise encontra-se em toda a parte a simbologia criada por Euler, bem como terminologia e idéias. O uso de letras minúsculas a, b, c para os lados de um triângulo e das maiúsculas A, B, C para os ângulos opostos vem de Euler, assim como para funções, usou f(x), ou seja, função de x, introduzindo as expressões *sen α, tan α.*

Embora parte dos autores de livros de História da Matemática indiquem Euler como o criador do uso de letras para os triângulos, segundo Cajori (1930, p.162), há num museu uma cópia de um documento escrito por Richard Rawlinson, de Oxford, entre 1654 e 1668, introduzindo as mesmas notações para os lados dos triângulos de Euler, porém, escritos um século antes. Outra característica do trabalho do matemático Richard Rawlinson é que ele distinguiu triângulo esférico e triângulo plano usando letras diferenciadas, algo novo para os matemáticos.

Os senos eram considerados segmentos de linha, definidos como semicordas subtendendo ângulos num círculo. Um raio grande permitia grande exatidão no valor dos senos, sem a necessidade de introduzir as frações sexagesimais (ou decimais). Os estudos astronômicos do século XVIII, principalmente para determinar a posição dos planetas, foram laboriosamente beneficiados com as séries trigonométricas. O uso das séries na astronomia é evidência do fato de que elas são funções periódicas e os fenômenos astronômicos são largamente periódicos.

Euler tinha primariamente as funções algébricas e as funções transcendentes elementares; o tratamento estritamente analítico das funções trigonométricas. Por volta de 1729, Euler começou a se interessar pelo problema da interpolação. Usando este método, ele pôde desenvolver uma representação de séries trigonométricas das funções. Para ele, o seno já não era tratado como um segmento de reta e sim considerado um número ou razão (BOYER, 1974, p.327), aparecendo arcos de círculos dos quais as funções trigonométricas procediam de acordo com leis definitivas. De acordo com Cajori (1919, p. 234), Euler considerou o *sinus totus,* (seno total) igual a 1.

As abreviações *sen, cos, tang, cot, sec, cosec* foram usadas por Euler na *Introductio* (Introdução) em latim e são mais próximas das formas atuais em inglês do que as abreviações correspondentes das línguas latinas. No final do século XVIII, Euler já havia apresentado todos os teoremas da trigonometria como corolários da teoria das funções complexas, embora para a agrimensura e navegação a trigonometria mantivesse sua utilidade. Assim, a trigonometria tornou-se um conjunto de relações entre números reais e complexos.

Pela primeira vez, o estudo do gráfico das funções trigonométricas tornava-se parte da geometria analítica (BOYER, 1974, p. 339).

A família Bernoulli, muito conhecida pelo interesse e dedicação pela Matemática, contribuiu para com o tratamento analítico da trigonometria. John Bernoulli (1667-1748) estudava curvas e trajetórias (CAJORI, 1919, p. 222).

Em 1747, apareceu a teoria das cordas vibrantes de D' Alembert e Daniel Bernoulli, considerados os criadores da teoria das equações diferenciais às derivadas parciais. Enquanto D' Alembert e Euler resolveram uma equação por meio da expressão $z = f(x + kt) + ø\,(x - kt)$, Bernoulli resolveu-a por meio de séries trigonométricas, por isso é considerado o primeiro a usar as funções trigonométricas inversas.

O matemático suíço-alemão Johann Heinrich Lambert (1728-1777) chamou a atenção para o fato bem conhecido de que, sobre a superfície de uma esfera a soma dos ângulos de um triângulo ser maior do que dois retos, e sugeriu que se poderia achar uma superfície tal que a soma dos ângulos de um triângulo sobre ela fosse menor do que dois retos (BOYER, 1974, p. 340).

Segundo Maor (1998, p.53), o matemático alemão Abraham Gotthalf Kästner (1719-1800) foi o primeiro a escrever as funções expressamente como números puros em 1759: “Se x representa que o ângulo está expresso em graus, então a expressão *sen x, cos x, tan x*, etc., são números, que correspondem a todo ângulo”. É em 1770 que encontramos o termo “funções trigonométricas” num dicionário matemático introduzido por George Simon Klügel (1739-1812).

Na segunda parte do século XVIII, a trigonometria foi aplicada a inúmeros problemas da mecânica como o movimento de uma partícula e a construção de escalas musicais.

A ligação entre Trigonometria e Análise iniciou-se com Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), como resultado do estudo dos movimentos periódicos por ele efetuado. Em 1807, a periodicidade e as propriedades das funções circulares são apresentadas no seu tratado sobre o calor e a possibilidade da representação das funções periódicas pelas séries. Ele mostrou que as funções seno e cosseno são essenciais para o estudo de todos os fenômenos periódicos (MAOR, 1998, p.54).

Fourier escreveu o tratado “Teoria analítica do Calor” (1822). Esta é a teoria Matemática da condução do calor e é essencialmente o estudo da equação $\Delta U = K\partial U/ \partial t$. Em virtude da generalidade do método, e que consistia no uso de séries trigonométricas, que tinha sido causa de discussão entre Euler, D’ Alembert e Daniel Bernoulli, ocorreu que em 1824, Fourier mostrou que as séries trigonométricas poderiam representar qualquer função, algo de que alguns matemáticos da época duvidavam. Os estudos das séries são conhecidos como “Séries de Fourier”. Bernoulli foi o primeiro a introduzir as séries de Fourier para aplicações da Física (CAJORI, 1919, p. 242).

Segundo Cajori (1930, p. 147), foi o matemático James T. Thomson que aplicou o termo “radiano” num teste impresso em 1873. Também os professores Oliver, Wait e Jones da Cornell University fizeram o uso do π para simplificação de algumas fórmulas Matemáticas e físicas, usando medidas circulares.

No final do século XIX, a teoria das funções reais tinha passado por progressos fundamentais, especialmente no que diz respeito à dependência funcional, integração e diferenciação, ligando-se muitas vezes com a investigação em séries trigonométricas (STRUIK, 1987, p.308). Nesse período, a trigonometria contribuiu para os estudos de outras ciências, tais como a óptica, a mecânica, entre outras.

Na Física, podemos ver, por exemplo, a aplicação da função trigonométrica, quando estudamos a freqüência dos sons e a representação gráfica das vibrações que são representadas por uma função trigonométrica.

Atualmente concebemos a trigonometria como um conjunto de números complexos, não necessitando recorrer a arcos ou ângulos (KENNEDY, 1997, p.26).

2.2 A MANIFESTAÇÃO DOS VALORES COGNITIVOS DE UMA RECONSTRUÇÃO HISTÓRICA DA TRIGONOMETRIA

A reconstrução histórica nos possibilitou identificar os valores cognitivos que elencamos a seguir. Inicialmente, a história da trigonometria emerge dos conceitos geométricos, relacionados ao estudo dos triângulos semelhantes, para a medição da altura das pirâmides e distâncias inacessíveis. Nessas medidas, as razões trigonométricas no triângulo retângulo são conhecidas.

Os astrônomos gregos, anteriores ao século II a.C., usavam as razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da Terra e as distâncias relativas do Sol e faziam previsões para os movimentos do Sol, da Lua e dos planetas (BOYER, 1974, p.116). As tabelas trigonométricas surgiram para facilitar esses cálculos astronômicos.

Na astronomia, a grande propulsora da trigonometria, a cada momento os valores deste conhecimento matemático vieram à tona. Fazer medidas quantitativas dos círculos, observar a abóbada celeste, a posição dos corpos celestes, objetivando maior exatidão nos cálculos e o domínio da natureza, para conhecer a complexidade dos fenômenos naturais, das estações do ano, a medição do tempo, a necessidade de localização geográfica, tudo isso possibilitou uma consistência nos conceitos trigonométricos e certeza de que é possível criar um "sistema" que se ramifica e evolui temporalmente, ampliando perspectivas diferenciadas para soluções de problemas. É no contexto da criação e da descoberta que o homem se realiza a cada novo desafio vencido, e é nesse contexto que analisamos a racionalidade científica segundo um conjunto de valores cognitivos.

Na História da Trigonometria, vimos quanto o conhecimento sobre as varas verticais (gnômon) e os estudos de sombras foram importantes para que os matemáticos chegassem à sistematização da representação gráfica das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Matemáticos egípcios registravam seus cálculos e figuras em papiros, como, por exemplo, o Papiro de Rhind.

Em nossa reconstrução histórica, percebemos a evolução da trigonometria essencialmente geométrica dos gregos, do estudo das cordas de um arco da circunferência, para uma evolução dos indianos quando estudaram a metade dessa corda, até chegar ao seno. O valor cognitivo **poder explicativo,** com explicações para fenômenos numa ampla extensão de domínios, fundamentado pelos cálculos de distâncias inacessíveis, gerou predições envolvendo outras áreas do conhecimento matemático. Esse valor cognitivo esteve presente em vários momentos da história da trigonometria devido à necessidade de explicar fenômenos por meio dos cálculos trigonométricos.

Foi no século VIII que as obras Matemáticas dos indianos proporcionaram uma evolução na história da Trigonometria. Enquanto as explicações antigas usavam os métodos de Ptolomeu, que relacionava as cordas de um círculo com os ângulos centrais correspondentes, os indianos apresentavam a Matemática baseada na relação entre a metade da corda e a metade do ângulo central, buscando no interior do círculo um triângulo-retângulo.

Outra evolução é a adoção do raio unitário para a circunferência, o que facilitou os cálculos astronômicos e a resolução das fórmulas trigonométricas. Esse passo reflete a importância do valor cognitivo **simplicidade,** devido a sua elegância, economia, clareza conceitual, capacidade de ser formalizada e eficiência no seu uso.

Quando a álgebra foi incorporada à Trigonometria, os matemáticos tinham em suas mãos um instrumento que explicava de forma mais simples os cálculos antes complexos, alcançando maior profundidade na resolução de problemas. Esse passo também refletiu na importância do valor cognitivo **simplicidade.** A interação entre análise numérica e geometria: a trigonometria mostra em seu interior o crescimento embrionário de três partes clássicas - álgebra, análise e geometria, facilitando os cálculos das tabelas trigonométricas (KENNEDY, 1997, p.1-3).

Durante a evolução do conhecimento trigonométrico, **a adequação empírica** manifestou-se como um valor, quando os matemáticos, a partir de suas observações astronômicas, olhavam para o céu e faziam medidas quantitativas dos componentes do círculo. A observação do movimento dos corpos celestes tornou possíveis os cálculos de distâncias, localização, latitudes, longitudes e a criação de instrumentos como o astrolábio, o quadrante, entre outros. Regiomontanus aplicava seus conhecimentos de trigonometria para elaborar calendários, prever eclipses. Houve, assim, a valorização da observação e sua correspondência com elementos da realidade.

Na história da Trigonometria, vimos que os estudos dos pêndulos foram importantes e evidenciaram o valor **consistência,** nexos lógicos e epistêmicos com um ou mais sistemas teóricos.

O estudo histórico nos fundamentou para a discussão do valor cognitivo **certeza,** ou seja, a necessidade de buscar a exatidão nos cálculos. A **generalização** constitui um importante valor cognitivo da trigonometria devido a sua importância no Ensino de Ciências. A trigonometria revelou sua **fecundidade,** pois novas questões desencadearam novas descobertas de fenômenos; predição e, principalmente, antecipação de novas possibilidades como a dos estudos dos logaritmos.

Na primeira metade do século XVII, houve grande progresso na trigonometria analítica para descrever o mundo físico (o mundo mecânico da vida diária). O valor cognitivo **adequação empírica** foi manifestado quando os inventores da trigonometria clássica interessaram pela trigonometria esférica, devida a sua utilidade para os cálculos astronômicos (MAOR, 1998, p.51).

Já os estudos dos movimentos, por Galileu Galilei (1584-1642), mostrou a importância da trigonometria plana, como também os estudos na óptica. Temos aplicações envolvendo a medida de ângulos por radianos com quantidades exatas, em vez de aproximações, e em projetos de engrenagens na mecânica, especialmente cicloidais (KENNEDY, 1997, p.36).

As aplicações de funções trigonométricas exerceram grande importância para os cientistas nos estudos das oscilações dos pêndulos dos relógios, descrevendo os fenômenos periódicos. Entre eles destacam-se Christiaan Huygens (1629-1695) e Robert Hooke (1635-1703).

A trigonometria auxiliou na generalização da Matemática, na compreensão da natureza, como os cálculos de distâncias na astronomia e no mapeamento terrestre, manifestando o valor cognitivo **fecundidade** também nas Geociências.

A invenção do cálculo infinitesimal prenunciou o fim de uma trigonometria independente e em desenvolvimento. Com a descoberta e a exploração do domínio complexo, toda essa teoria foi incluída na Análise da Matemática, tornando a trigonometria mais generalizável e consistente no corpo teórico da Matemática e em outras disciplinas. Os valores cognitivos **consistência** e **generalização** manifestaram nesse contexto histórico. O matemático Leonhard Euler (1707-1783), no final do século XVIII, apresentou os teoremas da trigonometria como corolários da teoria das funções complexas (KENNEDY, 1997, p.1-3).

Entendemos, diante do comentário de Kennedy, que a trigonometria plana foi muito mais explorada no final do século XVIII devido a uma maior aplicação, manifestando valor cognitivo **poder explicativo**, enquanto a trigonometria esférica já não eram tão enfatizada pelos matemáticos daquela época.

CAPÍTULO 3:

UMA ABORDAGEM METODOLÓGICA

3.1 APRESENTAÇÃO DE UMA ABORDAGEM METODOLÓGICA

Iniciamos uma pesquisa, de cunho qualitativo, na tentativa de produzir uma proposta pedagógica que compreendesse o conteúdo de Trigonometria. Bogdan e Biklen (1994, p. 47-49) afirmam que esse tipo de pesquisa tem o ambiente natural como fonte de dados e o pesquisador é o seu principal instrumento, ressaltando a importância do processo.

Segundo Garnica (2001, p.42):

> "Em abordagens qualitativas de pesquisa, não há modelos fixos, não há normatização absoluta, não há a segurança estática dos tratamentos numéricos, do suporte rigidamente exato. É investigação que interage e, interagindo, altera-se. É alteração que se aprofunda nas malhas do fazer e forma-se em ação".

Assim, fundamentados teórica e metodologicamente, desenvolvemos nossa investigação de acordo com as etapas que descreveremos a seguir.

Primeiramente delimitamos nosso campo de atuação e definimos o tema central da investigação: como elaborar uma abordagem histórico-filosófica que promovesse a aprendizagem de trigonometria no Ensino Médio. Para isso, recorremos ao levantamento bibliográfico das pesquisas na Educação Matemática com o tema trigonometria. Definido que investigaríamos a trigonometria do Ensino Médio, continuamos nossa investigação documental, pesquisando em diversas fontes para fundamentar a nossa reconstrução histórico-filosófica do conteúdo de trigonometria.

Nessa etapa, destacamos os episódios históricos do desenvolvimento desse conceito, de forma que atendessem a uma adequação necessária para a transposição didática desse conteúdo ao contexto escolar atual.

Utilizamos a metodologia da Engenharia Didática, para cada passo metodológico. Na primeira fase de análises preliminares (prévias), realizamos a análise documental e a revisão bibliográfica das pesquisas em trigonometria, examinamos diversos livros didáticos de Matemática para observarmos como estava apresentado o conteúdo de trigonometria, a estrutura e a organização dos tópicos.

Em tal etapa, também buscamos a fundamentação teórica que sustenta essa investigação, como as pesquisas em História e a Filosofia da Ciência na Educação Matemática, o papel da História da Matemática em nossa pesquisa, a Transposição Didática, a Engenharia Didática, a discussão dos valores cognitivos que queremos incorporar ao conhecimento do aluno e a Análise Proposicional de Conceitos (APC). Essa fundamentação teórica nos deu alicerces sólidos para a escolha dos exemplares mais adequados para o desenvolvimento da abordagem histórico-filosófica.

A integração desses referenciais constitui uma inovação teórico-metodológica, uma vez que cada um sustenta e contribui para a construção da abordagem histórico-filosófica para o Ensino de Matemática no Ensino Médio.

Após o levantamento do suporte teórico necessário, da articulação entre eles e dos episódios históricos adequados, elaboramos uma seqüência de atividades relacionadas à trigonometria visando à aprendizagem do aluno.

Na etapa da experimentação, a coleta de dados foi no Ensino Médio, pelo fato de existir um pequeno número de trabalhos e pesquisa que tratam de Trigonometria. Contatamos um professor do Ensino Médio da Rede Pública Estadual de ensino da cidade de Londrina, Paraná e apresentamos nosso projeto de pesquisa. Ele se interessou e se dispôs a ceder algumas de suas aulas, com a autorização da direção da escola, que nos concedeu a sala de aula para a aplicação.

Essa aplicação realizou-se com alunos do 2º ano, com faixa etária de 15 a 17 anos, tendo sido planejada para 20 aulas, encaminhadas e orientadas, previstas para o 4º bimestre do ano letivo de 2007. A Trigonometria Plana foi o conteúdo selecionado da disciplina de Matemática. A seqüência didática foi aplicada numa sala de aula, aproximando-nos do cotidiano de escola e dos sujeitos no seu próprio contexto escolar. A disciplina de Matemática foi lecionada com carga horária de 3 aulas semanais e duração de 50 minutos cada aula. Durante as aulas, anotamos, num diário de bordo, questionamentos e considerações importantes dos alunos quanto às atividades. Após cada aula, fizemos um relatório da aplicação das atividades do dia.

Em todos os encontros os alunos receberam os seguintes materiais: apostila com a seqüência didática impressa, réguas, transferidores e todos os materiais usados nas atividades como o cd e as bolas de isopor, entre outros.

Para a análise *a priori* das situações propostas na seqüência didática, aplicamos uma entrevista com três professores que lecionam Matemática há mais de 10 anos no Ensino Médio, para que eles levantassem as principais dificuldades dos alunos em relação à aprendizagem de trigonometria.

Realizamos um levantamento das concepções prévias dos alunos a respeito do conteúdo de trigonometria por meio da Análise Proposicional de Conceitos (APC). Assim, nessa etapa, obtivemos um levantamento dos valores cognitivos e do conhecimento do conteúdo de trigonometria da 8ª série. Na etapa da análise *a posteriori* e da avaliação, foi reaplicado o questionário APC 2, visando destacar as principais mudanças nas respostas dos alunos decorrentes da aplicação da seqüência didática.

Em seguida apresentamos a descrição da seqüência didática, a axiologia proposta, a análise e discussão dos dados coletados, contemplando quadros e tabelas referentes aos resultados da aplicação e nossas considerações finais sobre a investigação.

CAPÍTULO 4:

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

4.1 APRESENTAÇÃO DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA CONSTRUÍDA

A construção de nossa seqüência teve como ponto de partida a superação das dificuldades que identificamos na aprendizagem da trigonometria. Para isso, construímos uma abordagem com uma seqüência de atividades que enfrentassem tais dificuldades, de forma que fosse possível ao aluno superá-las.

Nesse sentido, a história está cheia de ensinamentos e podemos aí encontrar uma base sólida que fundamente os valores cognitivos que queremos desenvolver, partindo da metodologia da Engenharia Didática, pois esta nos forneceu uma estrutura adequada aos nossos objetivos.

No decurso deste trabalho, apresentamos, como inovação teórica, a reconstrução Histórico-epistemológica da trigonometria aliada à Engenharia Didática e elaboramos um processo que propicia uma estrutura para a aprendizagem de trigonometria, bem como meios de incorporação de valores cognitivos pelos alunos.

Abordamos os valores cognitivos fundamentados por filósofos da ciência, adequando tais valores à ótica da Filosofia da Educação Matemática. De acordo com Bicudo (1999, p.25-27), ao enfocar "o cotidiano da Educação, tematizando aspectos do fazer educacional como a relação professor-aluno, o ensino, a aprendizagem, a avaliação, o currículo, a escola, descrevendo os modos pelos quais esse fazer se dá, analisando-os e refletindo sobre os significados construídos", caracterizamos na nossa pesquisa o enfoque filosófico, tratando do valor da Matemática, mais especificamente, o conteúdo de trigonometria.

Para atingir os valores cognitivos nas nossas atividades, utilizamos a metodologia da Engenharia Didática para a elaboração dessas atividades. Tal referencial nos propiciou sua organização e se apresenta integrado com a fundamentação histórica e o enfoque filosófico, pois sua estrutura evocou elementos considerados necessários em nossa investigação. A seqüência didática foi composta por atividades utilizadas em sala de aula por estudantes do Ensino Médio. Destacamos que elas poderiam ser ressignificadas, reproduzidas, sob novas perspectivas e contextualizações, e que estavam entrelaçadas com os objetivos da pesquisa, podendo passar por revisões, avaliações, bem como serem exploradas, para que pudessem ser aplicadas na prática docente.

Em nossa pesquisa, as análises preliminares se apoiaram em um quadro teórico didático geral e nos conhecimentos adquiridos a partir da reconstrução histórico-filosófica e também em certas análises preliminares sobre:

– uma reconstrução histórico-filosófica do conteúdo de trigonometria com enfoque nas funções trigonométricas;
– algumas concepções dos alunos acerca das funções trigonométricas;
– o ensino habitual e de seus efeitos.

Para o planejamento da seqüência didática, foi realizado um levantamento bibliográfico das pesquisas cujo conteúdo escolhido fosse trigonometria. Outro procedimento utilizado foi a entrevista com três professores de Matemática que lecionavam, há mais de 10 anos, o conteúdo de trigonometria do Ensino Médio da Rede Estadual paranaense de ensino.

As questões eram referentes às principais dificuldades que os professores observavam quanto ao aprendizado do aluno.

Os entrevistados relataram que:

– os alunos não conseguem visualizar os gráficos das funções;
– os alunos não têm bom desenvolvimento geométrico e algébrico;
– o fato de os alunos pensarem que a trigonometria no triângulo retângulo é a mesma do círculo trigonométrico dificulta o aprendizado das funções trigonométricas;
– o aluno não compreende o estudo do período e do domínio das funções;
– outra dificuldade é quanto às transformações de graus para radianos;

A falta de contextualização do conteúdo de trigonometria é outro fator destacado como um problema para o aluno. Salientamos que a estrutura dos conceitos trigonométricos atualmente ensinados nos livros didáticos carece de informações históricas, o que torna mais árdua a contextualização para a aprendizagem do aluno.

A entrevista com os professores foi necessária como instrumento para as análises preliminares da pesquisa e a elaboração da seqüência didática, pois, segundo Pais (2002, p.101), “é preciso compreender as condições da realidade sobre a qual a experiência será realizada”, para que o planejamento das atividades atenda às dimensões que definem o fenômeno a ser estudado.

As hipóteses elaboradas das análises prévias em nossa pesquisa sobre as dificuldades dos alunos do Ensino Médio em relação à aprendizagem das funções trigonométricas foram as seguintes:

- não compreendem que os arcos têm medidas lineares e angulares;
- não compreendem o significado do estudo de trigonometria e a sua representação gráfica do ciclo trigonométrico;
- não percebem a relação entre o conteúdo de trigonometria estudado na 8ª série com o do 2º ano do Ensino Médio;
- não conseguem aplicar as fórmulas das funções trigonométricas quando se deparam com resolução de problemas;

Uma das vantagens da Engenharia Didática, segundo Pais (2002, p. 99), “decorre dessa dupla ancoragem, interligando o plano teórico da racionalidade ao território experimental da prática educativa”. Por isso, o estudo histórico-filosófico tornou-se necessário para a elaboração da seqüência didática, ampliando o significado de nossa pesquisa.

Para a avaliação, aplicamos a Análise Proposicional de Conceitos (APC), com o intuito de identificar os conhecimentos prévios dos alunos. Esse instrumento da Aprendizagem Significativa, sobretudo, se adequou à discussão de valores cognitivos da Matemática, fundamentando a sua importante existência no Ensino Fundamental e Médio. Compreendemos o APC como um instrumento necessário para avaliarmos nossa aplicação.

A apresentação do modelo do APC num Grupo de Pesquisa, no qual estudamos e discutimos o livro de Lacey (1998) “Os Valores e Atividade Científica”, tornou possível a validação das questões do APC pelos participantes do grupo, que são professores de diversas disciplinas tais como: Física, Química, Geografia, Biologia, e principalmente professores de Matemática. Os questionamentos, correções, enfim, as considerações dos colegas do grupo de pesquisa contribuíram para a elaboração dos APCs aplicados. Os colegas da Matemática validaram principalmente as questões a respeito do conteúdo de trigonometria do Ensino Fundamental.

Foi realizada uma análise *a priori,* na qual fizemos previsões quanto às possíveis dificuldades de aprendizagem dos alunos e ao desempenho destes nas atividades. Observamos que a maioria deles não sabia resolver problemas de trigonometria no triângulo-retângulo, o que nos indicou a necessidade de retomar esse conteúdo de 8ª série por meio de atividades.

Para dar subsídios à validação e à conclusão da pesquisa, fizemos uma análise *a posteriori,* a partir do desempenho dos sujeitos, das observações sobre os acontecimentos durante a aplicação da seqüência. Avaliamos se as hipóteses da pesquisa foram confirmadas e se os alunos agregaram novos conceitos.

A partir do estudo histórico-filosófico dos conceitos trigonométricos, buscamos fontes que nos fornecessem subsídios para a construção da seqüência de atividades aplicadas no Ensino Médio, proporcionando aos alunos a humanização e a valoração dos conceitos matemáticos por meio da história.

Nos anexos encontram-se o modelo do APC 1, a seqüência de atividades aplicadas, os trabalhos realizados pelos alunos, o modelo do APC 2. Escolhemos alguns exemplares dos alunos que participaram da pesquisa. Os trabalhos que estão disponíveis nos anexos podem conter erros nos cálculos. As questões foram corrigidas em sala de aula, buscando sanar dúvidas dos alunos, mas foram escaneados e colocados nos anexos os trabalhos originais. Para apresentar o quadro síntese das mudanças observadas após a aplicação, selecionamos para a pesquisa apenas os alunos que estavam presentes durante a aplicação do APC 1 e do APC 2, e que participaram de todas as aulas durante o bimestre em que se realizou a pesquisa.

Outro anexo importante é a transcrição de uma entrevista com um professor, gravada em áudio. Logo que soube da proposta, esse professor se interessou e se colocou à disposição para aplicar a seqüência didática em uma turma, justificando que gostaria de conhecer o material de nossa pesquisa, pois, segundo ele, a trigonometria é considerada difícil e chata para os alunos e que a aplicação iria inovar sua aula, aplicando numa turma. Primeiramente, demos ao professor um artigo sobre valores cognitivos e um resumo de nossa reconstrução histórico-filosófica da trigonometria, para que lesse antecipadamente os materiais. Na semana anterior ao início da aplicação, conversamos sobre a pesquisa. Ele questionou sobre os valores cognitivos e pediu-nos maiores detalhes. Depois de nossas explicações, ele disse que havia ficado mais claro. Entregamos-lhe as atividades 1 e 2 e também cópias do material do aluno, provendo-o de todos os materiais necessários à realização das atividades.

Assim aconteceram todas as semanas de aplicação. Na hora-atividade na escola houve a troca de experiências entre nós. Como prevíamos, o professor demorou algumas aulas a mais para aplicar todo o material, pois, segundo ele, a forma como vinha lecionando o conteúdo de trigonometria era diferente, mais formal, por isso, foi um pouco mais devagar nas leituras de contexto histórico. O professor optou por aplicar a seqüência didática somente numa turma de 2º ano, nas demais lecionou trigonometria da forma que já estava habituado. Enfatizamos que o professor estava ansioso para saber como seriam os resultados nas avaliações bimestrais.

4.2 UMA AXIOLOGIA PARA A TRIGONOMETRIA

As atividades construídas estão fundamentadas nos valores cognitivos que queremos desenvolver em cada aluno. No entanto é necessário sempre buscar alternativas que possam superar as possíveis dificuldades que venham a surgir durante a aplicação das atividades, visando relacionar teoria, metodologia e valores. Cada atividade proposta teve como finalidade enfatizar que a Matemática evolui ao longo de sua construção e que vários povos contribuíram para sua evolução.

Decidimos iniciar nosso trabalho sobre a Trigonometria no Ciclo Trigonométrico com um problema que envolvesse uma situação dos matemáticos da Antiguidade, com o intuito de instigar a curiosidade do educando para compreender as necessidades desses povos. Nas atividades usamos o termo “contexto histórico” para que o aluno pudesse acompanhar melhor a aula. Muita informação sem um texto de apoio dificultaria ainda mais a assimilação do contexto histórico.

Tal contextualização pode ser estimulada pelo educador por meio de questionamentos referentes ao problema, que auxiliem os alunos na interpretação e transcrição para a linguagem Matemática, porém o educador deve deixar o aprendiz livre para expressar seu pensamento. A interação é extremamente importante nesse processo. Educador e educando dialogam sobre as possibilidades e dificuldades que surgiram durante as atividades.

Não é possível datarmos exatamente quando começaram os estudos de trigonometria realizados pelos babilônicos e egípcios, considerados os povos mais antigos. As pirâmides egípcias foram construídas há milhares de anos. A trigonometria foi aplicada para resolver problemas de astronomia, como, por exemplo, medir a distância do Sol, da Lua e das estrelas. Os matemáticos da antiguidade olhavam para o céu, a abóbada celeste que eles sabiam que era esférica, e faziam a projeção do triângulo esférico para o plano.

Na **atividade 1,** buscamos retomar a trigonometria do triângulo-retângulo, revisando as razões trigonométricas, para evidenciar a importância da representação gráfica das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Os alunos construíram com lápis e régua os triângulos e segmentos e em seguida efetuaram os cálculos. Observaram a semelhança dos triângulos e compreenderam o que eram as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Nesta atividade aparece o valor cognitivo **generalização,** devido à capacidade de ser formalizada, sistematizada. Consideramos a representação gráfica como um valor cognitivo da Matemática, passível de generalização.

Contextualizamos o conteúdo de trigonometria com situações-problema envolvendo dados atuais para que o aluno observasse o valor cognitivo **poder explicativo**. Este é um valor que esteve presente em todas as atividades, pois a trigonometria explica fenômenos, explica a necessidade de generalizar, a contextualização, dentre outros fatos. Com a trigonometria foi possível resolver um problema atual, chegando a um resultado final.

Para construir e fixar o valor cognitivo **adequação empírica,** foi realizada a **atividade 2**, com bolas de isopor. A metade da bola de isopor representou a abóbada celeste. Instigamos os alunos a imaginarem-se observando as estrelas. Com uma tachinha, marcaram três pontos distantes que formaram um triângulo. Um barbante passou pelos três pontos formando um triângulo. Algumas questões foram pertinentes, tais como: Como representaríamos no plano este triângulo? É possível fazer os cálculos de distâncias? O triângulo é retângulo? Você sabe como é chamado esse triângulo? Para cada questão, os alunos responderam conforme havíamos previsto. Desenharam um triângulo plano e outro esférico. Um aluno disse que achou importante a atividade, pois não imaginava que a trigonometria fosse tão útil para os cálculos astronômicos.

Na **atividade 3**, foi explicado o contexto histórico da importância das cordas para os matemáticos da antiguidade. Os alunos identificaram na circunferência o raio, as cordas e o arco. Após a explicação dos arcos, os alunos resolveram dois exercícios que envolviam ângulos e quadrantes. A evolução dos estudos dos arcos, sua nomenclatura, mostrou que o valor cognitivo **generalização** foi necessário para os cálculos trigonométricos, criando uma linguagem Matemática mais clara e compreensível.

Na **atividade 4**, explicamos a conversão de unidades de graus para radianos, com contextualização histórica sobre o grau e suas partes e alguns exercícios, procurando reforçar o valor cognitivo **simplicidade.**

Na **atividade 5,** foi explicado para os alunos o contexto histórico da trigonometria grega e indiana. Em seguida observaram a figura que representavam a corda e a figura que representavam um triângulo-retângulo, observando as semelhanças e diferenças entre as figuras. Nas **atividades 6 e 7,** foram explicados o seno e o complemento do seno (cosseno) no contexto histórico e respondidos alguns exercícios. Outra evolução é a adoção do raio unitário para a circunferência, o que facilitou os cálculos astronômicos e a resolução das fórmulas trigonométricas. Esse passo reflete a importância do valor cognitivo **simplicidade.** A partir do contexto histórico**,** o aluno pôde concluir a **atividade 8** e realizar a **atividade 9**, com a introdução das funções trigonométricas. Cada aluno recebeu um cd, transferidor, régua, canetinha para representar as funções seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico, manipulando em sala esse material.

Na **atividade 10,** os alunos preencheram tabelas com o resumo da variação das funções seno, cosseno e tangente e tabelas com o resumo dos sinais das funções. Em seguida, observando as variações, representaram graficamente as funções nos períodos.

Na **atividade 11,** introduzimos o contexto histórico, alguns exercícios de pêndulos, para aplicarem cálculos de funções trigonométricas. Para fixar o valor **consistência,** nexos lógicos e epistêmicos com um ou mais sistemas teóricos, a atividade foi realizada com os estudos do pêndulo. A aplicação teve como objetivo mostrar a importância da Matemática, especificamente da trigonometria para outros campos da ciência como a Física.

A **atividade 12** ficou como um exercício extra, para que o aluno resolvesse, como tarefa, os cálculos de trigonometria aplicados à geografia. O valor **fecundidade** mais uma vez é apresentado. Por fim, na **atividade 13**, os alunos enumeraram uma linha do tempo com os aspectos mais importantes da história da trigonometria. Nesta atividade os alunos debateram aspectos como: qual era mais antiga? A geometria ou a trigonometria?

Durante a aplicação das atividades, os alunos foram participativos, utilizaram os materiais adequadamente e consultaram os textos históricos.

4.3 DESCRIÇÃO DOS RESULTADOS DA APLICAÇÃO

Nesta análise fundamentada nos APCs, compreendendo questões realizadas antes da aplicação e no final da aplicação da seqüência didática, pudemos estudar as respostas dos alunos para fazer a validação da aprendizagem.

Vários questionamentos foram feitos diante da necessidade de clarificar dúvidas que pudessem surgir e que nos auxiliassem nas análises sobre os valores cognitivos da Matemática.

A questão 1, “Você considera a Matemática importante?” foi analisada em ambos os APCs. Já a questão 2, “Dos conteúdos matemáticos já estudados até hoje, qual você achou mais interessante aprender?”, só foi feita no APC 1, com o objetivo de perceber se algum aluno citaria que a trigonometria da 8ª série foi um conteúdo que ele achou importante aprender, mas nenhum aluno a citou.

A questão 3 foi composta de várias alternativas em que estavam implícitos os valores cognitivos da Matemática:

3) Marque x nas afirmativas que você considera verdadeiras em relação à Matemática:

1(   ) Contribui para resolver problemas tanto na Matemática como em outras disciplinas.

2(   ) Busca cada vez mais resultados exatos.

3(   ) Aplica-se a Matemática para resolver problemas reais do dia-a-dia.
4(   ) A Matemática quase não faz sentido para produzir novas descobertas.
5(   ) As fórmulas Matemáticas tornam os cálculos mais simples.
6(   ) Os conteúdos que hoje estudamos podem ser úteis no futuro.
7(   ) Tudo seria mais fácil se não existisse a Matemática.
8(   ) Mesmo usando cálculos matemáticos, a inexatidão é constante.
9(   ) A representação gráfica ajuda o aluno a compreender melhor os conceitos matemáticos.

No quadro a seguir, elencamos que valores cognitivos estão implícitos em cada uma das alternativas anteriores.

Quando assinaladas as seguintes alternativas:	**Valores cognitivos implícitos:**
Contribui para resolver problemas tanto na Matemática como em outras disciplinas.	Consistência, fecundidade.
Aplica-se a Matemática para resolver problemas reais do dia-a-dia.	Adequação empírica, poder explicativo.
Busca cada vez mais resultados exatos.	Certeza, exatidão.
A Matemática quase não faz sentido para produzir novas descobertas.	A Matemática não tem o valor fecundidade.
As fórmulas Matemáticas tornam os cálculos mais simples.	Generalização, simplicidade.
Os conteúdos que hoje estudamos podem ser úteis no futuro.	Fecundidade.
Tudo seria mais fácil se não existisse a Matemática.	Sem valor cognitivo.
Mesmo usando cálculos matemáticos, a inexatidão é constante.	Sem o valor cognitivo exatidão.
A representação gráfica ajuda o aluno a compreender melhor os conceitos matemáticos.	Generalização a partir da representação gráfica.

Quadro 1 – Descrição dos valores cognitivos

Na questão 4 e 5, queríamos fazer um levantamento dos conhecimentos prévios, questionando o que o aluno sabia de trigonometria, que itens ele relacionava com o mesmo conteúdo. No APC 2, tais questões não foram, portanto, analisadas:

4) O assunto trigonometria faz parte dos conteúdos da 8ª série. Você estudou trigonometria nessa série? Quais foram os principais tópicos estudados?

5) Quando você pensa na trigonometria que termos têm a ver com esse conteúdo:

( ) seno	( ) cubo	( ) ângulos
( ) catetos	( ) adjacente	( ) números complexos
( ) perímetro	( ) razão	( ) Teorema de Pitágoras
( ) graus	( ) potência	( ) divisor

A questão 6: “Os cálculos da trigonometria servem para resolver que tipo de problemas?”, aparece nos dois APCs, para observarmos se houve mudanças nas respostas dos alunos de acordo com a aplicação da seqüência didática.

Na questão 7, “Que motivos você pensa que levaram os matemáticos da Antiguidade a estudar a trigonometria?”, nossa intenção foi ver o que o aluno pensava a respeito da história da Matemática. Ela foi aplicada nos dois APCs.

Na questão 8, “Você acha que é importante estudar a história da Matemática para aprender melhor? Justifique.”, queríamos saber se para o aluno é importante estudar história da Matemática para aprender melhor os conteúdos. Fizemos a mesma pergunta no APC 2 para ver se havia mudança de opinião a esse respeito.

4.4 QUADROS DE RESPOSTAS DOS APCS

Quando colocamos que o aluno justificou-se de forma que consideramos adequada aos questionamentos, compreendemos que sua resposta é correta diante das informações da aplicação da seqüência didática e que esta trouxe conhecimento para o aluno. Assim, quando o aluno não respondeu à questão, deixando-a em branco, este aluno foi indiferente ao questionamento, não quis se posicionar, pois não tinha uma opinião sobre o assunto.

A primeira coluna dos quadros refere-se aos alunos participantes e às questões dos APCs. Na segunda coluna encontram-se respostas dos alunos na primeira aplicação do questionário denominado de Análise Proposicional de Conceitos 1 (APC 1). Não houve nenhuma instrução sobre conteúdos durante a aplicação dos questionários. Em nossa investigação, visamos à aprendizagem de trigonometria por meio da seqüência didática.

Ressaltamos que, para a análise dos valores cognitivos, por meio das respostas do APC 1 e APC 2, não há uma única atividade que explicitasse cada um dos valores. Consideramos que a seqüência didática, num todo, colaborou para a nossa análise. Assim, destacamos a tabela do meio, na qual citamos os valores cognitivos que identificamos por meio das respostas do APC 2, aplicado no encerramento de nossas atividades no colégio. Encontram-se na última coluna as respostas dos alunos após a aplicação da seqüência didática. Destacamos que, as respostas dos alunos que são muito semelhantes, são analisadas de uma forma mais resumida.

Seguem-se abaixo, os quadros de respostas e as análises dos alunos, que foram enumerados para preservar seus nomes.

Aluno 1	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	É usada diariamente em meu cotidiano e é necessário este conhecimento.	Adequação empírica.	É essencial no dia-a-dia.
Q. 3:	Alternativas 1, 3, 6, 8.	Generalização.	Alternativas 1, 3, 5, 6, 9.
Q. 6:	Em branco.	Poder explicativo.	Para descobrir ângulos, alturas.
Q. 7:	Em branco.	Sem análise.	Não sei.
Q. 8:	É necessário a gente saber de onde surgiu o pensamento e o raciocínio.	Poder explicativo.	Através da história temos conhecimentos dos cálculos.

Quadro 2 – Resposta do aluno 1

Na q. 1, o aluno manteve que a Matemática é necessária no cotidiano. Analisamos que a adequação empírica manifestou-se nas duas respostas.

Na q. 3, percebemos que o aluno acrescentou, no APC 2, o valor generalização, considerando que as fórmulas matemáticas tornam os cálculos mais simples e acrescentou o valor da representação gráfica para a compreensão dos conceitos matemáticos. O aluno retirou a alternativa assinalada no APC 1, que dizia respeito à inexatidão, mostrando-nos que havia mudado de opinião. Na q. 6 o aluno deixou em branco no APC 1. No APC 2, ao responder que a trigonometria é usada para descobrir ângulos e alturas, analisamos que o aluno compreendeu as atividades que calculavam altura de prédio. O valor poder explicativo que queríamos atingir foi alcançado. Na q. 7, o aluno deixou em branco. No APC 2, respondeu não saber. Consideramos, portanto, que o aluno não sabia ao certo o que responder da história da trigonometria apresentada, até porque ele deu um exemplo da trigonometria correto. Esta análise se deve às respostas da q. 8, pois, para o aluno, a história da Matemática é necessária para ele ter mais conhecimento, ter raciocínio. Consideramos que a história da Matemática atingiu o valor cognitivo poder explicativo.

Aluno 2	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	Usamos a Matemática diariamente.	Adequação empírica.	A Matemática é essencial no nosso cotidiano.
Q. 3:	Alternativas 1, 3, 5, 6, 9.	Fecundidade, generalização, poder explicativo.	Alternativas 1, 3, 5, 6, 9.
Q. 6:	Em branco.	Poder explicativo.	Servem para descobrir alturas de prédios, distâncias de algo.
Q. 7:	Em branco.	Sem análise.	Não sei.
Q. 8:	Para compreendê-la desde o início.	Poder explicativo.	A partir da história é que descobrem os cálculos.

Quadro 3 – Resposta do aluno 2

Na q. 1, o aluno manteve que a Matemática é necessária no cotidiano. Analisamos que a adequação empírica é um valor cognitivo nas duas respostas. Na q. 3, percebemos que o aluno manteve as mesmas afirmativas em ambos os APCs. Na q. 6, o aluno deixou em branco. No APC 1 e no APC 2, ao responder que a trigonometria é usada para descobrir alturas de prédios, analisamos que o aluno compreendeu as atividades que calculavam altura de prédio. O valor poder explicativo que queríamos atingir foi alcançado. Na q. 7, o aluno deixou em branco no APC 1 e no APC 2 respondeu não saber. Isso nos leva a considerar que o aluno não sabia ao certo o que responder da história da trigonometria apresentada. Esta análise se deve às respostas da q. 8, pois, para o aluno, é importante conhecer a história da Matemática desde seu início. Consideramos que a história da Matemática atingiu o valor cognitivo poder explicativo.

Aluno 3	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	Os números são importantes no cotidiano.	Adequação empírica.	O tempo todo usamos números.
Q. 3:	Alternativas 1, 3, 6.	Exatidão, generalização.	Alternativas 1, 2 , 3 , 6, 9.
Q. 6:	Não sei.	Poder explicativo.	Problemas geométricos.
Q. 7:	Não sei.	Simplicidade, clareza, poder explicativo.	Alguns cálculos que não tinham solução, tornar a Matemática mais fácil.
Q. 8:	Saber como foi inventado, saber o motivo, o porquê.	Poder explicativo.	Saber o motivo de ter sido criado algumas coisas.

Quadro 4 – Resposta do aluno 3

Na q. 1, o aluno manteve sua opinião de que a Matemática é necessária no cotidiano. Analisamos que a adequação empírica é um valor cognitivo nas duas respostas. Na q. 3, percebemos que o aluno acrescentou alternativas, pois, para ele, a Matemática busca resultados mais exatos e a representação gráfica contribui para a compreensão desta. Na q. 6, o aluno respondeu que não sabia a resposta, já no APC 2, respondeu que era importante para resolver problemas geométricos. Nas atividades foi explicada a semelhança de triângulos. O aluno percebeu que a trigonometria é usada para resolver problemas e que tem poder explicativo. Na q. 7, o aluno respondeu não saber, mas no APC 2, analisamos que estão presentes os valores cognitivos simplicidade, clareza, poder explicativo, quando o aluno respondeu à questão. Consideramos que a história da Matemática manteve o valor cognitivo poder explicativo na q. 8, quando o aluno respondeu que ela explica os porquês (os conteúdos).

Aluno 4	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	Dependendo o que o indivíduo quer ser, não é importante.	Poder explicativo.	Sim você pode calcular distâncias, tamanhos.
Q. 3:	Alternativas 1, 5, 9.	Adequação empírica.	Alternativas 1, 3, 5, 9.
Q. 6:	Em branco.	Poder explicativo.	Problemas geométricos, distância, altura.
Q. 7:	Em branco.	Poder explicativo.	Calcular as distâncias dos planetas e das estrelas.
Q. 8:	Com a história ajuda a lembrar melhor.	Poder explicativo.	Porque quando aprendemos de onde surgiu e para que foi inventada, nós assimilamos melhor o conteúdo.

Quadro 5 – Resposta do aluno 4

Na q. 1, o aluno respondeu que a Matemática não é importante para todos, mas no APC 2, o aluno afirmou que é importante e que pode ser usada para cálculos. Analisamos que o aluno percebeu que todos podem utilizar a Matemática para resolver problemas. Na q. 3, o aluno acrescentou no APC 2 o valor cognitivo adequação empírica, reafirmando que a Matemática pode ser aplicada a problemas reais do dia-a-dia. Na q. 6, o aluno deixou em branco no APC 1 e, no APC 2, ao responder que a trigonometria é usada para descobrir ângulos, alturas, analisamos que o aluno compreendeu as atividades que calculavam altura de prédio. O valor poder explicativo foi alcançado. Na q. 7, o aluno deixou em branco, e no APC 2 deu-nos um exemplo correto com o conteúdo apresentado. Consideramos alcançado o valor cognitivo poder explicativo. Esta análise deve-se às respostas da q. 8, pois, o aluno respondeu que a história da Matemática é necessária para se obter mais conhecimento, aprender melhor o conteúdo. Consideramos que na história da Matemática o valor cognitivo poder explicativo foi evidenciado.

Aluno 5	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	Geralmente o básico é usado, algumas coisas são inutilizáveis, a Matemática é essencial.	Adequação empírica.	A Matemática é usada no dia-a-dia, constantemente precisamos de cálculos matemáticos.
Q. 3:	Alternativas 2, 3, 5, 6.	Adequação empírica.	Alternativas 1, 2, 3, 5, 6, 9.
Q. 6:	Para resolver geometria.	Poder explicativo.	Para resolver cálculos astronômicos.
Q. 7:	Queriam medir as pirâmides.	Poder explicativo, simplicidade, adequação empírica, generalização.	Para facilitar os cálculos, faziam previsões para os movimentos do Sol, da Lua e dos planetas.
Q. 8:	A Matemática não se baseia nos cálculos, mas tem toda uma história.	Poder explicativo.	Adquirir mais conhecimento é sempre bom.

Quadro 6 – Resposta do aluno 5

Na q. 1 o aluno considera importante a Matemática, mas salienta que há conteúdos que não são úteis, já no APC 2, ele afirma que sempre usamos os cálculos matemáticos no cotidiano. Consideramos que o valor cognitivo da adequação empírica está presente após a aplicação. Acrescentou que contribuiu para resolver problemas tanto da Matemática como em outras disciplinas e a importância da representação gráfica. A q. 6 e a q. 7 foram respondidas no APC 2 de forma muito correta com o conteúdo explicado. Analisamos que o aluno viu na trigonometria os valores cognitivos, pois afirmou no APC 2 que a história da Matemática traz conhecimento.

Aluno 6	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	Tudo na vida está relacionado à Matemática.	Adequação empírica.	Para os problemas do dia-a-dia.
Q. 3:	Alternativas 1, 3, 4, 5, 7.	Exatidão.	Alternativas 1, 2, 3, 8, 9.
Q. 6:	Em branco.	Poder explicativo, adequação empírica.	Para resolver problemas astronômicos.
Q. 7:	Em branco.	Simplicidade, clareza.	Facilitar cálculos.
Q. 8:	Em branco.	Poder explicativo.	Para entendermos melhor.

Quadro 7 – Resposta do aluno 6

Na q. 1, o aluno considerou que a Matemática resolve os problemas, o que consideramos que tem correspondência com a realidade. Na q. 3, acrescentou o valor da exatidão, retirou a alternativa em que há inexatidão e acrescentou a importância da representação gráfica. Nas q. 6 e 7, o aluno foi indiferente às questões deixando-as em branco. Já no APC 2, o valor cognitivo poder explicativo é citado devido à resposta do aluno de que a trigonometria resolveu problemas astronômicos, ou seja, problemas reais. Na q. 7, respondeu que facilita os cálculos, logo consideramos que os valores simplicidade e clareza foram incorporados. Na q. 8, o aluno foi indiferente no APC 1, mas no APC 2 o aluno considerou importante a história da Matemática para o entendimento da Matemática.

Aluno 7	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	Usamos a Matemática no dia-a-dia.	Adequação empírica.	Para o uso do nosso cotidiano.
Q. 3:	Alternativas 1, 3, 6, 7.	Generalização.	Alternativas 1, 3, 6, 7, 9.
Q. 6:	Calcular ângulos.	Poder explicativo, adequação empírica.	Para resolver cálculos astronômicos.
Q. 7:	Para terem mais conhecimento.	Generalização, simplicidade.	Facilitar os cálculos.
Q. 8:	Para podermos entender melhor	Poder explicativo.	Para sabermos o que estamos estudando.

Quadro 8 – Resposta do aluno 7

Na q. 1, o aluno mantém a mesma opinião, quanto à importância da Matemática para o cotidiano, logo consideramos que tem correspondência com a realidade, representando o valor cognitivo adequação empírica. Na q. 3, acrescentou a importância da representação gráfica. Na q. 6, o aluno respondeu que a trigonometria é usada para calcular ângulos, o que consideramos uma resposta vaga, porém no APC 2 o aluno exemplifica que a trigonometria resolve cálculos astronômicos. Analisamos que ele reconheceu os valores cognitivos poder explicativo e adequação empírica, pois, resolve problemas reais. Na q. 7, o aluno acrescentou que, além de ter mais conhecimento, a trigonometria facilitou os cálculos. Analisamos que o valor cognitivo generalização e simplicidade foram incorporados, pois as fórmulas apresentaram mais clareza para o entendimento do conteúdo. Na q. 8, o aluno considerou a história da Matemática importante para a compreensão do que estava sendo ensinado.

Aluno 8	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	É importante para todo o lugar, loja, supermercado.	Adequação empírica.	Está em todo lugar.
Q. 3:	Alternativas 1, 3, 5, 6, 9.	Exatidão.	Alternativas 1, 3, 5, 6, 8, 9.
Q. 6:	Calcula ângulos.	Adequação empírica, poder explicativo.	Cálculos astronômicos.
Q. 7:	Para terem mais conhecimento, para evoluir.	Adequação empírica.	Queriam saber as medidas das coisas para construí-las melhor.
Q. 8:	É importante sim.	(tem valor, mas não justificou)	Sim, é interessante.

Quadro 9 – Resposta do aluno 8

Na q. 1, o aluno, ao responder que a Matemática está em todos os lugares, reconheceu o valor cognitivo adequação empírica da Matemática. Na q. 3, acrescentou o valor da exatidão e da representação gráfica para a compreensão do conteúdo. Na q. 6 e na q. 7, o valor cognitivo adequação empírica apareceu quando o aluno respondeu no APC 2, revelando a necessidade de usar a Matemática em construções. Embora tenha considerado importante a história da Matemática em ambos os APCs, não justificou sua opinião, o que nos impossibilitou analisar suas respostas.

Aluno 9	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	Sim, sem justificativa.	Adequação empírica, simplicidade, poder explicativo.	É importante para resolver problemas do cotidiano, tornar os cálculos mais simples.
Q. 3:	Alternativas 1, 6, 8.	Poder explicativo, adequação empírica.	Alternativas 1, 3, 5, 7, 9.
Q. 6:	Algo relacionado a matrizes e determinante?	Poder explicativo.	Resolver cálculos astronômicos.
Q. 7:	Não sei!	Generalização, consistência.	Para facilitar os cálculos de outras coisas.
Q. 8:	Para entender porque ele pensou tal fórmula.	Poder explicativo.	Para entendermos melhor o que estamos aprendendo.

Quadro 10 – Resposta do aluno 9

Na q. 1, o aluno respondeu que a Matemática tem valor, mas não justificou no APC 1. Observamos que os valores cognitivos poder explicativo, adequação empírica e simplicidade estão presentes no APC 2. Na q. 3 acrescentou os valores cognitivos poder explicativo e adequação empírica. Na q. 6, não há nenhuma noção de trigonometria no APC 1. Já no APC 2, o poder explicativo da trigonometria apareceu como um valor cognitivo, quando o aluno coloca que a trigonometria resolveu cálculos astronômicos. Na q. 7, o aluno enfatizou que não sabia, mas no APC 2, respondeu que a trigonometria facilita cálculos de outras coisas. Analisamos que o valor cognitivo consistência apareceu, pois, a trigonometria também é importante para outras áreas. Na q. 8, o aluno respondeu que a história da Matemática é importante para aprender melhor os conteúdos e para a sua compreensão.

Aluno 10	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	Nos ajuda a atingir um raciocínio mais rápido, está presente no cotidiano.	Adequação empírica, simplicidade.	Está presente no cotidiano, em tudo, facilita nossa vida.
Q. 3:	Alternativas 1, 2, 3, 6, 9.	Os mesmos valores cognitivos.	Alternativas 1, 2, 3, 6, 9.
Q. 6:	Acho que nem estudei esse conteúdo.	Poder explicativo.	Para resolver cálculos astronômicos.
Q. 7:	A precisão de resolver as coisas e torná-las mais fáceis.	Poder explicativo, adequação empírica.	Os estudiosos queriam evoluir com as contas e deixá-las como uma herança para estudarmos.
Q. 8:	É interessante saber a história da fórmula estudada.	Poder explicativo.	É bom saber de onde veio o que você está estudando.

Quadro 11 – Resposta do aluno 10

Na q. 1, os valores cognitivos adequação empírica e simplicidade estão presentes. Na q. 3, não houve mudanças nos APCs. Na q. 6, o aluno respondeu não se lembrar de ter estudado trigonometria, já no APC 2 reconheceu o poder explicativo da trigonometria para resolver cálculos astronômicos e reais. Na q. 7 e q. 8, considerou importante a história da Matemática para a compreensão dos conteúdos e para os estudos. Analisamos que a história da Matemática tem o valor cognitivo poder explicativo.

Aluno 11	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	Usamos no dia-a-dia para muitas coisas.	Adequação empírica.	Usamos diariamente, para pagar contas, etc.
Q. 3:	Alternativas 1, 3, 5, 6, 9.	Exatidão.	Alternativas 1, 2, 3, 5, 6, 9.
Q. 6:	Cálculos de ângulos.	Generalização, poder explicativo.	Cálculos astronômicos, medir tg, sen, cos.
Q. 7:	Para chegar a um cálculo.	Exatidão.	Para determinar tamanhos que não eram corretos.
Q. 8:	Para saber de onde ela veio.	Poder explicativo	Para saber de sua história e do porque a Matemática.

Quadro 12 – Resposta do aluno 11

Na q. 1 o aluno mantém a mesma opinião, deixando implícito o valor cognitivo da adequação empírica da Matemática, sua correspondência com o real. Na q. 3 acrescentou o valor cognitivo exatidão. Na q. 6, o aluno respondeu que a trigonometria é usada para calcular ângulos, mas no APC 2 exemplificou sua importância para cálculos astronômicos e, ao usar a simbologia, mostrou o valor cognitivo generalização. Continuou a considerar importante a história da Matemática para aprender os conteúdos.

Aluno 12	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	Usamos no nosso dia-a-dia e em quase todas as profissões.	Poder explicativo, adequação empírica.	Sem ela seria impossível resolver problemas do dia-a-dia.
Q. 3:	Alternativas 1, 2, 3, 5, 6.	Generalização.	Alternativas 1, 2, 3, 5, 6, 9.
Q. 6:	Em branco.	Poder explicativo.	Problemas que envolvem circunferências.
Q. 7:	Em branco.	Poder explicativo.	Problemas que não eram possíveis resolver com outras matérias.
Q. 8:	Fórmulas antigas nos ajudam a entender fórmulas mais velhas.	Poder explicativo.	Podemos ver seu desenvolvimento até os dias de hoje.

Quadro 13 – Resposta do aluno 12

Na q. 1, o aluno mantém a mesma opinião, quanto à necessidade de resolver problemas do dia-a-dia com a Matemática. Na q. 3, acrescentou o valor cognitivo generalização por meio da representação gráfica. Na q. 6 e q. 7, deixou em branco, mostrando-se indiferente, mas após a aplicação justificou de uma forma que consideramos adequada, reafirmando o valor cognitivo do poder explicativo da trigonometria. Na q. 8 continuou a considerar importante a história da Matemática no APC 2.

Aluno 13	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	Sim.	Adequação empírica.	Sim, ajuda no cotidiano.
Q. 3:	Alternativas 2, 3, 5, 6, 8, 9.	Adequação empírica.	Alternativas 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9.
Q. 6:	Não lembro se estudei.	Poder explicativo.	Astronômicos.
Q. 7:	Vingança	Poder explicativo.	Aprender mais sobre astronomia.
Q. 8:	Não, porque na Matemática eu só uso cálculos e não a história dela.	Sem valor cognitivo.	Não, o que importa é saber os cálculos.

Quadro 14 – Resposta do aluno 13

Na q. 1, o aluno disse que a Matemática tem valor e não justificou, mas no APC 2 disse que a Matemática ajuda no cotidiano. Na q. 3, acrescentou o valor cognitivo adequação empírica. Na q. 6, disse que não lembrava de trigonometria. Já no APC 2 a trigonometria mostrou seu valor cognitivo poder explicativo. Na q. 7, mudou sua resposta no APC 2, ele respondeu que os matemáticos queriam aprender mais sobre astronomia. Em ambos APCs, o aluno não considera a história da Matemática importante para aprender o conteúdo.

Aluno 14	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	Para resolver.	Fecundidade, adequação empírica.	Pode ajudar muito no futuro e está presente em tudo no dia-a-dia.
Q. 3:	Alternativas 1, 3, 5, 6, 9.	Os mesmos valores cognitivos.	Alternativas 1, 3, 5, 6, 9.
Q. 6:	Em branco.	Poder explicativo.	Para descobrir a altura de prédio, etc.
Q. 7:	Em branco.	Sem análise.	Não sei.
Q. 8:	Para saber onde surgiram os teoremas.	Poder explicativo.	Através da história, entendermos melhor os cálculos.

Quadro 15 – Resposta do aluno 14

Na q. 1, o aluno respondeu de uma forma muito vaga, já no APC 2 justificou que a Matemática sempre estará presente no dia-a-dia. Na q. 6 deixou em branco, mas após a aplicação justificou de uma forma que consideramos adequada, exemplificando um problema de altura de prédio, conforme um exercício ensinado. Na q. 7, deixou em branco e continuou não sabendo responder no APC 2, o que nos impossibilita de fazer análise. Na q. 8 continuou a considerar importante a história da Matemática para entendermos os cálculos.

Aluno 15	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	É importante porque usamos no nosso dia-a-dia.	Adequação empírica.	Para usarmos no nosso cotidiano.
Q. 3:	Alternativas 1, 3, 5, 6, 9.	Os mesmos valores cognitivos.	Alternativas 1, 3, 5, 6, 9
Q. 6:	Em branco.	Poder explicativo.	Para resolver cálculos astronômicos.
Q. 7:	Para ter mais conhecimento, facilitar seu dia-a-dia.	Simplicidade.	Para facilitar os cálculos.
Q. 8:	Porque temos que saber de onde ela vem...	Poder explicativo.	Temos que saber o que estamos estudando.

Quadro 16 – Resposta do aluno 15

Na q. 1, o aluno manteve a mesma opinião sobre a importância da Matemática no dia-a-dia. Na q. 3, acrescentou o valor da representação gráfica. Na q. 6 deixou em branco, mas no APC 2 respondeu que a trigonometria resolve problemas astronômicos. Na q. 7, continuou a afirmar que a trigonometria facilitava os cálculos. Na q. 8 continuou a considerar importante a história da Matemática para aprender o que está estudando.

Aluno 16	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	É usada no nosso dia-a-dia.	Adequação empírica, poder explicativo.	Para o nosso dia-a-dia, resolver problemas.
Q. 3:	Alternativas 1, 2, 3, 6.	Generalização.	Alternativas 1, 2, 3, 6, 9.
Q. 6:	Metro, altura, largura.	Poder explicativo.	Problemas.
Q. 7:	Em branco.	Fecundidade.	Para evoluir melhor a Matemática e para o futuro.
Q. 8:	Para entender melhor a matéria.	Poder explicativo.	Para termos uma noção do que estamos estudando.

Quadro 17 – Resposta do aluno 16

Na q. 1, o aluno mantém a mesma opinião da importância da Matemática para o dia-a-dia e para resolver problemas. Na q. 3, acrescentou o valor da representação gráfica. Na q. 6, respondeu de forma muito vaga em ambos os APCs. Na q. 7 deixou em branco, mas após a aplicação justificou a importância da evolução da Matemática para entender melhor conteúdo.

Aluno 17	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	Sim.	Adequação empírica.	Há muitas profissões que utiliza a Matemática.
Q. 3:	Alternativas 1, 3, 6, 9.	Simplicidade.	Alternativas 1, 3, 5, 6, 9.
Q. 6:	Em branco	Poder explicativo.	Problemas que envolvem circunferência.
Q. 7:	Em branco	Poder explicativo.	Para melhor compreensão dos cálculos.
Q. 8:	Sim.	Sem análise.	Sim.

Quadro 18 – Resposta do aluno 17

Na q. 1, o aluno respondeu que a Matemática tem valor, mas não se justificou. Já no APC 2 justificou a importância da Matemática para as profissões, para o dia-a-dia. Na q. 3 acrescentou o valor cognitivo simplicidade. Na q. 6, o aluno deixou em branco, mas no APC 2 lembrou-se das circunferências, que representas as funções trigonométricas na circunferência. Na q. 7, o aluno também deixou em branco, mas no APC 2 disse que a trigonometria ajudou na compreensão dos cálculos. Na q. 8 considerou a história da Matemática importante, mas não se justificou.

Aluno 18	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	É necessária no dia-a-dia.	Adequação empírica.	É importante no dia-a-dia.
Q. 3:	Alternativas 1, 2, 3, 5, 6, 8.	Generalização.	Alternativas 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9.
Q. 6:	Não sei.	Poder explicativo.	Problemas relacionados às medidas.
Q. 7:	Não sei.	Simplicidade.	Para facilitar os cálculos na hora de fazer construções.
Q. 8:	Para saber mais as origens da Matemática	Poder explicativo.	Para nos aprofundarmos nas origens das fórmulas.

Quadro 19 – Resposta do aluno 18

Na q. 1, o aluno manteve a mesma opinião quanto a importância da Matemática no cotidiano. Na q. 3, acrescentou o valor da representação gráfica. Nas q. 6 e 7, respondeu não saber, mas após a aplicação justificou de uma forma que consideramos adequada com as explicações, como resolver problemas relacionados a medidas, facilitar cálculos nas construções. E continuou na q. 8 a considerar importante a história da Matemática para a compreensão das origens.

Aluno 19	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	Nós podemos usar no dia-a-dia	Adequação empírica, simplicidade.	Sem ela não podemos fazer quase nada, como construções, contas da casa, para facilitar.
Q. 3:	Alternativas 1, 2, 5, 9.	Simplicidade, adequação empírica.	Alternativas 1, 2, 3, 5, 6, 9.
Q. 6:	De ângulos.	Sem análise.	Catetos.
Q. 7:	Calcular ângulos e fórmulas	Sem análise.	Triângulos- retângulos.
Q. 8:	Não, porque você não aprende nada com história, você tem que aprender o que é usado na Matemática hoje.	Sem valor cognitivo.	Não, porque a história não nos ajuda.

Quadro 20 – Resposta do aluno 19

Na q. 1, o aluno manteve a mesma opinião quanto a importância da Matemática no dia-a-dia. Na q. 3, acrescentou os valores cognitivos simplicidade e adequação empírica. Nas q. 6 e 7, respondeu de uma forma muita vaga e continuou da mesma forma após aplicação, porém respondeu com elementos da trigonometria. Na q. 8 continuou a considerar que a história da Matemática não era importante para a compreensão dos conteúdos, o que analisamos não ter valor para o aluno.

Aluno 20	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	A Matemática é usada no dia-a-dia, para nós calcularmos e aprender mais.	Poder explicativo.	A Matemática ajuda a calcular melhor e será útil no vestibular.
Q. 3:	Alternativas 1, 2, 3, 5, 6, 8.	Os mesmos valores cognitivos.	Alternativas 1, 2, 3, 5, 6, 8.
Q. 6:	Não sei.	Poder explicativo.	Ângulos, graus, catetos.
Q. 7:	Não sei.	Poder explicativo.	Os triângulos, ângulos.
Q. 8:	Sem a Matemática você não é nada.	Consistência.	Sim, por que sem a Matemática as outras disciplinas não serão nada.

Quadro 21 – Resposta do aluno 20

Na q. 1, o aluno manteve a mesma opinião, que a Matemática é importante. Na q. 3, permaneceram os mesmos valores. Na q. 6 e q. 7, respondeu não saber, mas após a aplicação justificou de forma muito vaga, dando exemplos e usando palavras que foram explicadas, como calcular ângulos, graus, triângulo. Na q. 8 continuou a considerar importante a história da Matemática para a compreensão de outras disciplinas.

Aluno 21	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	Ajuda no nosso cotidiano.	Poder explicativo.	Ajuda a raciocinar melhor.
Q. 3:	Alternativas 1, 6.	Poder explicativo, adequação empírica, generalização.	Alternativas 1, 2, 3, 6, 9.
Q. 6:	Em branco.	Poder explicativo.	Problemas que envolvem circunferências.
Q. 7:	Em branco.	Sem análise.	Em branco.
Q. 8:	Ajuda a compreender melhor a Matemática.	Poder explicativo.	Para ajudar a compreender melhor o porquê de tantas coisas e tantos assuntos da Matemática.

Quadro 22 – Resposta do aluno 21

Na q. 1, o aluno manteve a mesma opinião. Na q. 3, acrescentou os valores cognitivos poder explicativo, generalização, adequação empírica. Na q. 6, deixou em branco e respondeu posteriormente de forma vaga mas correta. Na q. 7, continuou em branco em ambos APCs. Na q. 8 continuou a considerar importante a história da Matemática para a compreensão dos conteúdos.

Aluno 22	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	Ajuda a melhorar o raciocínio, nos ensina a fazer cálculos com mais facilidade.	Poder explicativo, adequação empírica.	Porque com ela nós entendemos melhor o mundo a nossa volta. Com ela iremos usá-la muito no nosso cotidiano.
Q. 3:	Alternativas 1, 3, 5, 6.	Exatidão, generalização.	Alternativas 1, 2, 3, 5, 6, 9.
Q. 6:	Em branco.	Poder explicativo.	Problemas de distâncias.
Q. 7:	Em branco.	Poder explicativo.	Para melhor compreensão dos cálculos.
Q. 8:	Porque com a Matemática tudo simplifica, desde um simples cálculo a um grande problema!	Poder explicativo. Simplicidade.	Porque evoluiu muito, então é sempre bom saber cada passo que a Matemática vem dando ao longo dos séculos.

Quadro 23 – Resposta do aluno 22

Na q. 1 o aluno manteve a mesma opinião, quanto a importância da Matemática para o mundo real. Na q. 3, acrescentou os valores cognitivos exatidão e generalização. Na q. 6, deixou em branco e respondeu que a trigonometria foi útil para os cálculos de distâncias. Na q. 7, deixou em branco no APC 1, mas no APC 2, respondeu que tornam os cálculos mais compreensíveis, o que nós consideramos que o poder explicativo foi incorporado. Na q. 8 continuou a considerar importante a história da Matemática para compreender como a Matemática evolui.

Aluno 23	APC 1	Valores cognitivos	APC 2
Q. 1:	É uma matéria que se usa no dia-a-dia e é uma matéria exata.	Adequação empírica. Exatidão.	Porque a Matemática é exata e influencia no nosso dia-a-dia.
Q. 3:	Alternativas 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9.	Consistência.	Alternativas 1, 2, 3, 5, 6, 9.
Q. 6:	Quanto vale a área de um quadrado.	Poder explicativo.	Para resolver os ângulos dados.
Q. 7:	Eles usavam para fazer construções.	Sem análise.	Sei lá.
Q. 8:	Se não se sabe a teoria, é difícil tirar a prática.	Poder explicativo.	Sem a teoria não se pode fazer a prática.

Quadro 24 – Resposta do aluno 23

Na q. 1, o aluno manteve a mesma opinião, quanto a importância da Matemática para a realidade. Na q. 3, retirou a alternativa de que tudo seria mais fácil se não existisse a Matemática. Consideramos importante, pois, analisamos que os valores cognitivos da Matemática foram confirmados no APC 2. Na q. 6, respondeu se referindo à área de um quadrado, assunto que não tratamos nas aulas. Posteriormente respondeu usando a palavra ângulos, algo que abordamos muito nas aulas. Na q. 7, o aluno respondeu que eles usavam a trigonometria para fazer construções. No APC 2 não quis responder. Na q. 8 continuou a considerar importante a história da Matemática para entender o conteúdo de Matemática.

4.5 ANÁLISE DOS RESULTADOS DA APLICAÇÃO

Representamos, no quadro abaixo, a quantidade de respostas dos 23 alunos que participaram do APC 1, da aplicação da seqüência didática e do APC 2.

As mudanças na estrutura do conhecimento do aluno, do APC 1 para o APC 2.
Q. 1 Você considera que a Matemática é importante? Justifique. Percebemos mudanças significativas em 6 alunos, justificando com clareza a importância da Matemática.
Q. 3 Algumas alternativas representavam valores cognitivos implícitos. Dos 23 alunos, 16 alunos acrescentaram mais alternativas que correspondem a um aumento dos valores cognitivos. Dos 2 alunos que haviam assinalado a alternativa de que tudo seria melhor se não existisse a Matemática, 1 abandonou essa alternativa juntando-se aos demais que consideram a Matemática importante. Dos 23 alunos, 4 acrescentaram que a Matemática busca cada vez mais resultados exatos. Dos 23 alunos, 11 acrescentaram a alternativa de que a representação gráfica é importante.
Q. 6 Os cálculos da trigonometria servem para resolver que tipo de problemas? Dos 23 alunos, 19 alunos justificaram que tipos de problemas a trigonometria resolve, de forma coerente com as explicações.
Q. 7 Que motivos você pensa que levaram os matemáticos da Antiguidade a estudar a trigonometria? Dos 23 alunos, 14 alunos, que antes haviam respondido sem conhecimento histórico sobre a trigonometria, apresentaram motivos coerentes com a história da Matemática que foi apresentada na seqüência didática.
Q. 8 Você acha que é importante estudar a história da Matemática para aprender melhor? Justifique. 17 alunos continuaram a considerar importante a história da Matemática em ambos os APCs. 2 continuaram a achar a desnecessária a história da Matemática. 4 justificaram ainda mais a importância da história da Matemática para seu aprendizado.

Quadro 25 – Análise dos resultados da aplicação

Em nossa fundamentação teórica, a história da Matemática como um potencial pedagógico é defendida por vários autores. Ao questionarmos os alunos a respeito da importância da história da Matemática, vimos que muitas respostas vão ao encontro das justificativas de diversos autores, fato que nos faz refletir sobre a nossa proposta de levarmos para a sala de aula um exemplar histórico-filosófico, transformado e adaptado ao contexto escolar e como as atividades contribuíram para consolidar ainda mais nossos objetivos.

Quando perguntamos aos alunos: "Você acha que é importante estudar a história da Matemática para aprender melhor? Justifique". A resposta de um dos alunos é que a história da Matemática facilita a compreensão das suas origens, de como ela evolui ao longo da humanidade e contribui para a compreensão dos cálculos. Também defendem que a Matemática foi necessária para o desenvolvimento de outras disciplinas, proporcionando descobertas.

No APC 2 foi feita a seguinte pergunta aos alunos: Para você a Matemática possui um valor que a torna importante nos estudos? Justifique.

Muitas respostas foram interessantes, como:

- Pode ser aplicada no cotidiano, resolvendo problemas;
- Facilita os cálculos da Matemática e na compreensão de outras disciplinas;
- É exata;
- Pode ser útil no futuro;
- Torna os cálculos mais simples;
- Estimula o raciocínio, o pensamento e a compreensão do mundo.

Analisamos, por meio desta pergunta, se houve a manifestação dos valores cognitivos: adequação empírica, fecundidade, poder explicativo, consistência, generalização, exatidão. Consideramos, a partir das respostas dos alunos, que houve a presença dos valores cognitivos citados.

No APC 2, a questão 8 foi a seguinte: "A trigonometria é um conteúdo que:

( ) tem a ver com os problemas reais.

( ) pode ser aplicada.

( ) explica vários fenômenos.

( ) evolui ao longo da humanidade.

( ) foi estudada por vários povos e nações.
( ) pode ser representada graficamente, aumentando a facilidade de compreensão.
( ) suas fórmulas evoluíram tornado o conteúdo mais simples do que no início.
( ) tornou-se cada vez mais usada em outros estudos devido a sua importância."

Para esta análise, consideramos os dados dos 30 alunos da sala, pois embora não estivessem presentes na aplicação do APC 1, participaram das aulas e de toda a aplicação da seqüência didática. Essa questão só foi colocada no APC 2, referindo-se especificamente à trigonometria.

Alternativas	**Número de alunos que assinalaram:**
Tem a ver com os problemas reais.	16
Pode ser aplicada.	9
Explica vários fenômenos.	9
Evolui ao longo da humanidade.	13
Foi estudada por vários povos e nações.	16
Pode ser representada graficamente, aumentando a facilidade de compreensão.	23
Suas fórmulas evoluíram tornando o conteúdo mais simples do que no início.	14
Tornou-se cada vez mais usada em outros estudos devido a sua importância.	11

Quadro 26 – Quadro de alternativas referentes à trigonometria

Os professores entrevistados sobre as dificuldades dos alunos ao estudarem trigonometria apontaram que eles apresentavam problemas quanto à visualização da representação gráfica das funções trigonométricas. A representação gráfica tornou-se mais importante para os alunos após a aplicação da seqüência didática. Foi a alternativa em que houve mais mudanças nos APC, com 76,67% dos alunos.

Para 53,33% dos alunos, a trigonometria tem a ver com os problemas reais, o que, ao nosso ver, mostra que as atividades foram contextualizadas usando exemplos reais.

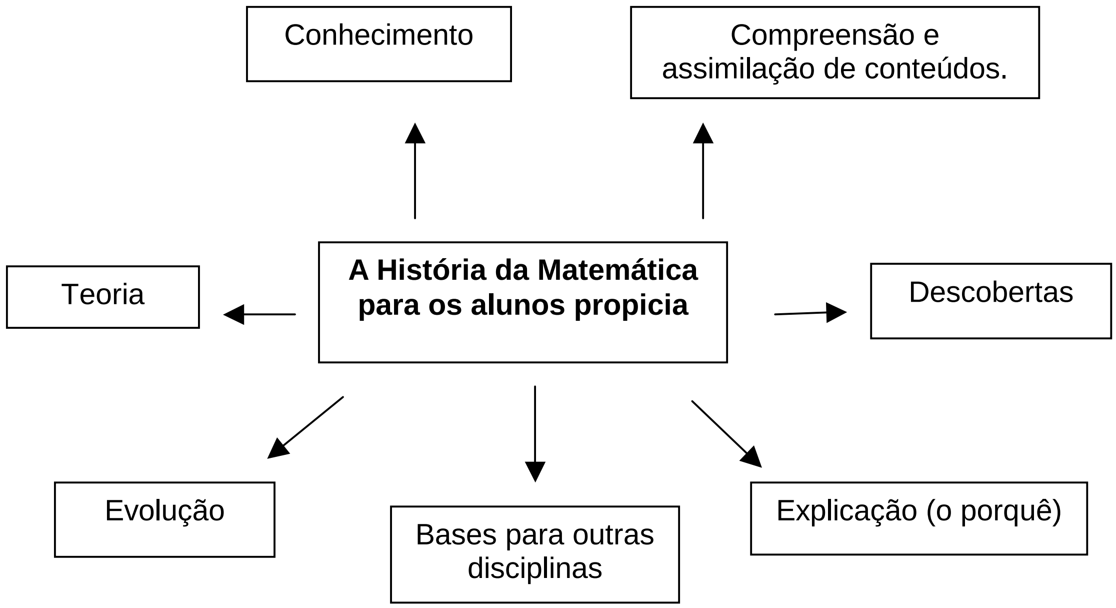
O fato de 53,33% dos alunos ter compreendido que o conhecimento de trigonometria foi construído por vários povos e nações trouxe-nos satisfação, pois, humaniza a Matemática e também porque 46,67% dos alunos destacaram que as fórmulas da trigonometria evoluíram, apresentando mais clareza e simplicidade. Observamos que os alunos perceberam que a Matemática não é imutável, mas que sempre poderá evoluir.

A importância da trigonometria para o desenvolvimento de outras áreas de conhecimento representou 36,67% das respostas dos alunos, evidenciando o valor cognitivo consistência na trigonometria. Destacamos que necessitaríamos de mais aulas para aplicar as funções trigonométricas para resolver problemas de outras áreas de conhecimento. Mesmo assim, dos 30 alunos que responderam o questionário, 30% deles responderam que a trigonometria explica vários fenômenos e pode ser aplicada para resolver problemas.

Nas atividades realizadas, as respostas dos alunos evidenciam que a nossa seqüência didática obteve os resultados almejados na pesquisa, pois os alunos reconheceram os valores cognitivos da Matemática e realizaram as atividades cuja elaboração a história da trigonometria subsidiou.

Consideramos, para nossa análise dos valores cognitivos, as respostas dos APCs, mas destacamos que todos os alunos entregaram o material com todas as atividades resolvidas no final da aplicação, mesmo os alunos que não necessitavam de notas para a aprovação na disciplina, fato que nos surpreendeu, e também corroborou o valor da pesquisa, devido ao interesse demonstrado pelos mesmos.

Elaboramos um esquema, sintetizando respostas de alguns alunos no APC 2 quanto à importância da história da Matemática e dos valores da Matemática para eles:



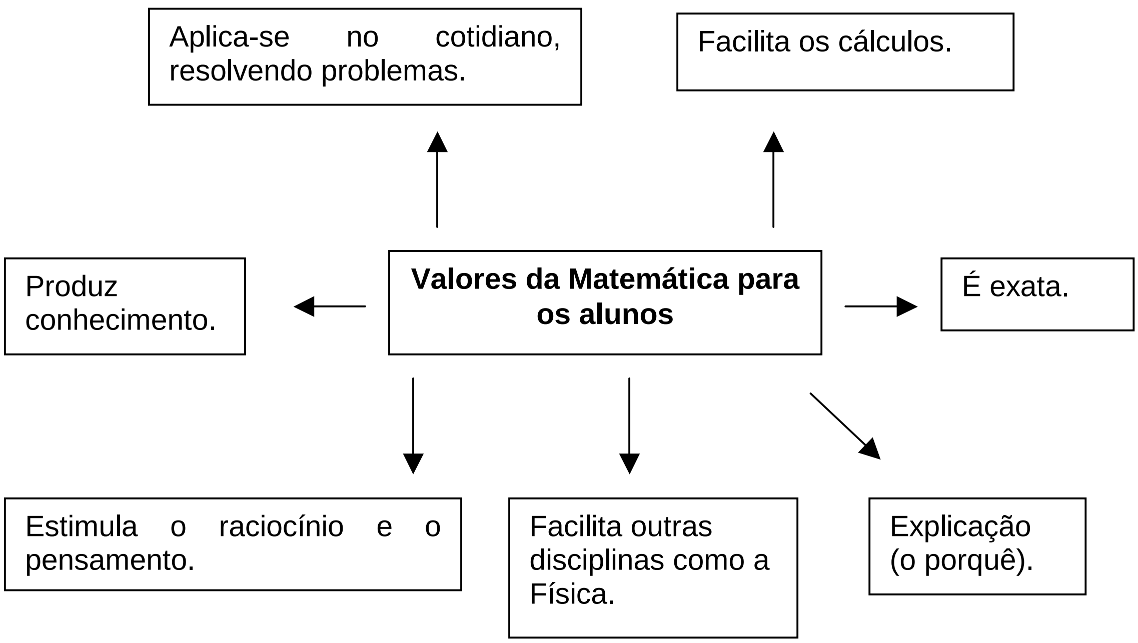
Este esquema representa a opinião dos alunos após a aplicação da seqüência didática. Em nossa fundamentação teórica, citamos vários referenciais que defendem o uso da História da Matemática em sala de aula por propiciar elementos que auxiliam na aprendizagem, como podemos citar:

> “a história aumenta a motivação para a aprendizagem; articula a Matemática com outras ciências” (SAD, 2004, p. 4)
>
> “facilita o processo investigatório do conhecimento matemático em sala de aula” (MENDES, 1997, p.15)
>
> “como um fio condutor de raciocínios” (BATISTA, 2005, p.736)
>
> “perceber como teorias e práticas Matemáticas foram criadas, desenvolvidas” (D’AMBROSIO, 1996, p. 30)

Assim, o esquema anterior apresenta argumentos dos alunos que são semelhantes aos de alguns autores. Afirmamos que só foi possível elaborar a nossa seqüência didática por meio da História da Matemática. Quando analisamos as respostas dos alunos, observamos que foi por meio da seqüência didática aplicada na aula que eles compreenderam a importância da História da Matemática para a trigonometria.

Este processo de interação é algo interessante na reflexão sobre o papel da História da Matemática para a promoção de valores e atitudes nos alunos (Miguel, 2005, p. 61).

No APC 2 foi feita a seguinte pergunta aos alunos: “Para você a Matemática possui um valor que a torna importante nos estudos? Justifique.” Destacamos algumas respostas dos alunos que explicitam os valores cognitivos da Matemática, como poder explicativo, exatidão, simplicidade, consistência e adequação empírica. O esquema ilustra a manifestação dos valores cognitivos da Matemática na escrita dos alunos e uma mudança quanto às suas concepções do APC 1 para o APC 2. Analisamos que no APC 2, muitos alunos justificaram suas respostas, com conhecimento, com exemplos da história da trigonometria, conforme ilustramos no esquema abaixo.



Em nossa análise, consideramos que o fato de o aluno explicitar os valores da Matemática significa que houve uma incorporação destes no seu conhecimento. Os valores cognitivos foram manifestados e evidenciados em nossa seqüência didática, numa abordagem histórico-filosófica da trigonometria.

CAPÍTULO 5:

CONSIDERAÇÕES FINAIS

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As adequações e transformações necessárias para a construção da abordagem histórico-filosófica se deram por meio de diversos referenciais, que articulados contribuíram para a construção, aplicação e análises dos resultados dessa abordagem.

Elaboramos uma reconstrução histórica da trigonometria, na qual investigamos diversas civilizações, tentando compreender o contexto da época, seus impasses, avanços, conflitos, pontos mais relevantes de acordo com as fontes históricas que tomamos para o estudo. Realizada essa reconstrução histórica, buscamos identificar os valores cognitivos que constituem esse conhecimento científico e que se manifestaram na sua história.

Para que nossa reconstrução histórica e a discussão dos valores cognitivos da trigonometria fossem viáveis para o ensino e a aprendizagem desse conteúdo e visando uma linguagem adequada aos alunos do Ensino Médio, usamos o recurso da Transposição Didática.

Abordamos os valores cognitivos da Ciência que, aplicados à História da Matemática, proporcionou-nos uma discussão de como poderíamos incorporá-lo ao conhecimento dos alunos por meio de uma seqüência didática. Esse campo de investigação apresentou-se frutífero, pois evidenciamos em nossas análises a possibilidade de utilizá-los em qualquer conteúdo que nos representa um conhecimento científico.

Constatamos, por meio da história, quais os valores cognitivos que se manifestaram nas diversas épocas e contextos. A abordagem histórico-filosófica enfatizou, nas atividades aplicadas, os valores cognitivos que queríamos incorporar ao conhecimento do aluno.

Com relação à Metodologia da Engenharia Didática, investigada para a organização e a estruturação das etapas da pesquisa, podemos inferir que, analisando o desenvolvimento dos alunos durante a experimentação e os resultados apresentados, a mesma contribui para o ensino e aprendizagem de trigonometria, auxiliando na concepção, na realização e nas análises da seqüência didática. As entrevistas realizadas, os livros didáticos que consultamos, as hipóteses sobre os resultados e as relações, adequações e transposições pertinentes à Engenharia Didática foram aplicadas por meio da abordagem histórico-filosófica.

Para a elaboração e a validação da seqüência didática, utilizamos um instrumento denominado Análise Proposicional de Conceitos (APC) fundamentado pela Teoria da Aprendizagem Significativa, para a elaboração e a validação da seqüência didática.

Por meio desse instrumento, percebermos a necessidade de contemplar atividades que retomassem o conteúdo de trigonometria no triângulo-retângulo. Numa outra atividade com bolas de isopor que remeteu-se a contextualização histórica da trigonometria pelos astrônomos, foi algo novo, pois não conhecíamos qualquer material didático que se reportasse aos triângulos esféricos para introduzir este conteúdo. O contexto histórico fez com que o aluno compreendesse raio e diâmetro num círculo, percebendo as diferenças e semelhanças na trigonometria grega e indiana e de como elas influenciaram nos conceitos trigonométricos.

Por meio das atividades, os alunos entenderam que o cosseno significa o complemento do seno, algo importante para posteriormente compreender a representação gráfica das funções trigonométricas. Consideramos que a seqüência histórica mostrou-se relevante para a compreensão dos conceitos.

Como o APC 1 mostrou que os alunos não percebiam a importância da representação gráfica, criamos um material com um cd para que os alunos o utilizassem na aula, manuseassem, representassem ângulos e principalmente, visualizassem as funções seno e cosseno em um dado ângulo. Depois disso puderam representar graficamente as variações do seno e do cosseno.

A atividade que contextualizou historicamente a importância da trigonometria para os estudos dos pêndulos, com explicações e resoluções de problemas, possibilitou que os valores cognitivos fecundidade e consistência com outras disciplinas como a Física fossem incorporados pelos alunos.

Na última atividade, os alunos elencaram uma seqüência cronológica dos acontecimentos que consideramos mais relevantes na história da trigonometria.

Os resultados das análises dos APCs evidenciaram mudanças significativas em relação aos valores atribuídos à Matemática pelos alunos, em relação à História da Matemática. Percebemos, por meio dos APCs, que novas informações foram ancoradas nos conceitos ou proposições preexistentes na estrutura cognitiva do indivíduo, ocorrendo a aprendizagem da trigonometria. A comparação entre os questionários aplicados antes e depois da seqüência didática tornou possível validarmos os resultados desta investigação.

As atividades contemplaram os valores cognitivos, manifestando-se de forma relevante e solidificando cada vez mais a natureza do conhecimento matemático. Portanto o conhecimento desses valores cognitivos fundamentou e justificou, de modo contemporâneo, a presença de tal assunto na estrutura Matemática ensinada na Educação Básica.

Assim, acreditamos que as hipóteses iniciais de nossa pesquisa foram validadas e os resultados da investigação foram corroborados com os referenciais teóricos que defendem o uso da História da Matemática para promover aos alunos a aprendizagem de conteúdos e valores. Na análise dos resultados de nossa investigação, bem como de todo o processo envolvido na construção da abordagem histórico-filosófica, evidenciamos que a História da Matemática, mais do que um recurso didático, tem um potencial pedagógico que nos instrumentaliza para nossa prática.

Consideramos significativos os resultados desta investigação nas explorações epistemológicas de pesquisa em Educação Matemática, pois elaboramos um material didático que pode ser aplicado em sala de aula, contribuindo para os estudos da Matemática. Esta dissertação mostrou que é possível introduzir nas aulas a contextualização histórica, articulando teoria e prática, salientando a necessidade de adaptarmos as informações históricas às nossas necessidades, desenvolvendo saberes e produzindo conhecimento. Além disso, fez com que os alunos refletissem sobre a Matemática e seus valores, se posicionassem na escrita com liberdade, possibilitando mudanças na sua estrutura cognitiva, tornando-se estudantes mais autônomos e independentes na construção de sua própria aprendizagem.

Assim, nossos objetivos foram alcançados, as adequações, transposições foram realizadas, inovando aspectos metodológicos do conteúdo de trigonometria aos alunos do Ensino Médio, o que possibilitou que a aplicação da seqüência didática construída gerasse conhecimento matemático escolar, portanto, ocorreu a aprendizagem do conteúdo trigonometria. Vimos nos valores cognitivos um potencial pedagógico, problematizador de conteúdos escolares, para promover atitudes e valores que venham modificar qualitativamente as práticas escolares na Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. **In: Didática das Matemáticas,** BRUN, J. (org). Lisboa: Instituto Piaget, p. 193-217, 1996.

BATISTA, Irinéa de L. **Einstein e as interfaces entre história, filosofia e ensino de física.** Scientiae Studia, São Paulo, v. 3, n. 4, p. 733-9, 2005.

BATISTA, Irinéa de L.; LUCCAS, Simone. **Abordagem histórico-filosófica e Educação Matemática.** Educação Matemática e Pesquisa. São Paulo, n.1. p. 101-133, 2004.

BELL, Eric T. **The development of Mathematics.** New York and London Mcgraw Hill Book Company, Inc, 1992.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Filosofia da Educação Matemática: um enfoque fenomenológico.** In: BICUDO, M. A. V. (Org.) Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. São Paulo: UNESP, p. 21-43, 1999.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari K. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, p. 47-49, 1994.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. Edgar Blucher, São Paulo: EDUSP, 1974. 488 p. Tradução de A History of Mathematics.

BRIGUENTI, Maria José L. **Ensino e Aprendizagem de Trigonometria: Novas Perspectivas da Educação Matemática.** São Paulo, 1994. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNESP, Rio Claro.

BRITO, Arlete de J., MOREY, Bernadete B. **Trigonometria: dificuldades dos professores de Matemática do ensino fundamental.** Revista Horizontes, Bragança Paulista, v. 22, n.1, p. 65-70, jan/jun. 2004.

BROUSSEAU, Guy. **Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática.** In: BRUN, Jean. (org). Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, p. 38-39, 1996.

CAJORI, Florian. **A History of Mathematics. 1893**. 2ed.New York: The Macmillan Company, 1919.

CAJORI, Florian. **A History of Mathematical Notations.** Vol. 2: Higher Mathematics. 1930. Rpt. Chicago: Open Court, 1952.

CHEVALLARD, Yves. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.** Buenos Aires, Aique, p. 39, 1991.

COLLETTE, Jean-Paul. **Historia de las Matemáticas I.** Tradução por Pilar González Gayoso. Madrid: Siglo XXI de España Editores, S. A., 1985. Tradução de Histoire des Mathématiques 1. 347p.

COLLETTE, Jean-Paul. **Historia de las Matemáticas II.** Tradução por Alfonso Casal Piga. Madrid: Siglo XXI de España Editores, S. A., 1985. 3 ed. Tradução de Histoire des Mathématiques 2. 607p.

COOLIDGE, Julian L. **The mathematics of great amateurs.** New York: Oxford University Press. 2 ed, 1990.

COOKE, Roger. **The history of Mathematics: A brief course.** 2nd ed. University of Vermont, 2005.

COSTA, Nielce Meneguelo Lobo. **Função Seno e Cosseno: uma seqüência de ensino a partir dos contextos do mundo experimental e do computador.** São Paulo, 1997. 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

CROMBIE, Alistair Cameron. **Perspectivas da História das Ciências.** Editora Londres, 1961.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: Da teoria à Prática.** Campinas: Papirus. 1996.

DYNNIKOV, Circe M. Silva da Silva; SAD, Lígia Arantes. **Uma abordagem Pedagógica do uso de fontes originais em História da Matemática.** Guarapuava: SBHMat, 2007 58 p. – (Coleção História da Matemática para Professores).

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Tradução por Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da UNICAMP, 1995. 844p. Tradução de: An Introduction to the History of Mathematics.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. **Pesquisa qualitativa e Educação (Matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos.** *Mimesis*, Bauru, v. 22, n. 1, p. 35-48, 2001.

GIOVANNI, José R.; BONJORNO. José R. **Matemática, 2º grau.** Volume único. São Paulo: FTD.

GUELLI, Oscar. **Dando corda na trigonometria.** Edição. São Paulo: Ática, 1993. 64p. (Série Contando a história da Matemática)

GUELLI, Cid A.; IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo. **Trigonometria. 2º grau.** São Paulo: FTD.

GRATTAN-GUINNESS. **Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences.** Routledge. New York: London, volume 1, 1994.

HEATH, Sir Thomas. **A History of Greek Mathematics – From Aristarchus to Diophantus,Volume II**, Dover Publications, Inc., New York, 1981.

HOGBEN, Lancelot. **Maravilhas da Matemática.** Tradução por Paulo Moreira da Silva. Edição da Livraria Globo, 1946. Tradução de Mathematics for the Million

IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Disponível em: <http://www.impa.br>. Acesso em: 27 abr. 2007.

JR GIOVANNI, José R. **Matemática - 2 º grau.** São Paulo: Editora FTD, 1994.

KATZ, Victor J. *A* **History of Mathematics: An Introduction.** New York: Harper Collins College Publishers, 1998.

KENNEDY, Edward. S. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Trigonometria.** Tradução por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997. 48p. Tradução de Historical Topics for the Mathematics Classroom.

KLINE, Morris. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.** New York: Oxford University Press. 1972.

KRAGH, Helge. **An Introdution to the Historiography of Science.** Cambridge University Press, Cambridge, p. 87-107, 1987.

LACEY, Hugh. **Valores e atividade científica.** São Paulo, Discurso Editorial, 1998.

LINDEGGER. Luiz Roberto de Moura. **Construindo conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos.** São Paulo, 2000. 204 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

LINTZ, Rubens G. **História da Matemática.** Relatório técnico nº 04/88, parte I. Universidade Estadual de Londrina, 1988.

LOSEE, John. **Introdução Histórica à Filosofia da Ciência.** Tradução por Carlos Lains. Lisboa: Terramar, 1998. Tradução de A historical Introduction to the Philosophy of Science. 6 ed. 251p.

MAOR, Eli. **Trigonometric Delights.** New Jersey: Princeton University Press, 1998.

MATHEWS, Michael R. **História, Filosofia e Ensino de Ciências: A Tendência atual de reaproximação.** Trad. Andrade, C.M - Science & Education, v. 1, n.1, p. 11-49, 1995.

MENDES, Iran Abreu. **Ensino de Trigonometria através de atividades históricas.** Rio Grande do Norte, 1997. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

MENDES, Iran Abreu. **Ensino da Matemática por atividades: uma aliança entre o construtivismo e a história da Matemática.** Rio Grande do Norte, 2001.207 f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

MIGUEL, Antonio. **Três estudos sobre história e educação Matemática**. Tese de Doutoramento, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1993.

MIGUEL, Antonio. **Contribuição crítica à discussão acerca da participação da história e da epistemologia da Matemática na investigação em educação Matemática.** Horizontes, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 71-107, jan./jun. 2004.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MOREY, Bernardete. **Geometria e Trigonometria na índia e nos Países Árabes.** Coleção História da Matemática, 2003.

NEUGEBAUER, Otto. **A History of Ancient Mathematical Astronomy Part Two.** Springer-Verlag, New York, 1975.

NOBRE, Sérgio; BARONI, Rosa L. S. **A pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática.** In: BICUDO, M. A. V. (Org.) Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

NOVAK, Joseph D.; GOWIN, Bob D. **Aprender a aprender.** 2.ed. Lisboa: Plátano Edições técnicas, 1999.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.** Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PONTE, J. P., BOAVIDA, A., GRAÇA, M., & ABRANTES, P. **Didáctica da Matemática.** DES. Do ME. Lisboa , 1997.

SAD, Lígia A. **Educação Matemática: unidade na história e nos objetivos educacionais.** In: ANAIS do VII EPEM, São Paulo – SP: junho de 2004, p. 1-5.

SILVA, Silvio Alves. **Trigonometria no Triângulo Retângulo: construindo uma aprendizagem significativa.** São Paulo, 2005. 178 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SMITH, D. E. **History of mathematic: general survey of the history of elementary mathematics.** Ed. Ginn and Company Copyright, v.1, 1958.

SMITH, David E.; BEMAN, Wooster W. **A brief History of Mathematics.** Chicago, 1910.

SMITH, David E. **History of mathematic: general survey of the history of elementary mathematics.** Ed. Ginn and Company Copyright, v.1, 1958.

SMITH, David E. **History of Mathematics.** Vol. II - Special Topics of Elementary Mathematics. New York: Dover Publications, 1977.

SMITH, David E. **A Source Book in Mathematics.** 1th ed. 4 impression. New York and London Mcgraw Hill Book Company, Inc, 1929.

SMOOTHEY, Marion. **Atividades e Jogos com Triângulos.** São Paulo: Ed. Scipione, 1ª edição, 1998.

STRUIK, Dirk J. **História Concisa das Matemáticas**, ed. em port., trad.: João C.S. Guerreiro, Lisboa, Gradiva, 1987.

VASCONCELLOS, Fernando de A. **História das Matemáticas na Antigüidade.** Livrarias Aillaud e Bertrand, Paris-Lisboa, 1925.

VIANNA, Carlos Roberto. **Matemática e História: Algumas Relações e implicações Pedagógicas.** Dissertação (Mestrado) Faculdade de Educação, USP, 1995.

ZELLER, Mary Claudia. **The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus.** Ann Arbor, MI, 1944.

ZINNER, Ernst. **Regiomontanus: His Life and Work.** Traduzido por Ezra Brown. Elsevier Science Publishers B.V., 1990.

ANEXOS

ANEXO A

Modelo do primeiro APC

Anexo A – Modelo do primeiro APC

Aluno(a) ____nº_____série_______Data___/___/___

Questionário

1) Você considera que a Matemática é importante? Justifique.

____

____

____

2) Dos conteúdos matemáticos já estudados até hoje, qual você achou mais interessante aprender? Justifique sua resposta.

____

____

____

3) Marque x nas afirmativas que você considera verdadeiras em relação à Matemática:

( ) Contribui para resolver problemas tanto na Matemática como em outras disciplinas.
( ) Busca cada vez mais resultados exatos.
( ) Aplica-se a Matemática para resolver problemas reais do dia-a-dia.
( ) A Matemática quase não faz sentido para produzir novas descobertas.
( ) As fórmulas Matemáticas tornam os cálculos mais simples.
( ) Os conteúdos que hoje estudamos podem ser úteis no futuro.
( ) Tudo seria mais fácil se não existisse a Matemática.
( ) Mesmo usando cálculos matemáticos, a inexatidão é constante.
( ) A representação gráfica ajuda o aluno a compreender melhor os conceitos matemáticos.

4) O assunto de trigonometria faz parte dos conteúdos da 8ª série. Você estudou trigonometria nessa série? Quais foram os principais tópicos estudados?

____

____

____

6) Quando você pensa na trigonometria que termos tem a ver com esse conteúdo:

( ) seno	( ) cubo	( ) ângulos
( ) catetos	( ) adjacente	( ) números complexos
( ) perímetro	( ) Teorema de Pitágoras	( ) razão
( ) graus	( ) potência	( ) divisor

7) Os cálculos da trigonometria servem para resolver que tipo de problemas?

____

____

____

7) Que motivos você pensa que levaram os matemáticos da Antiguidade a estudar a trigonometria?

____

____

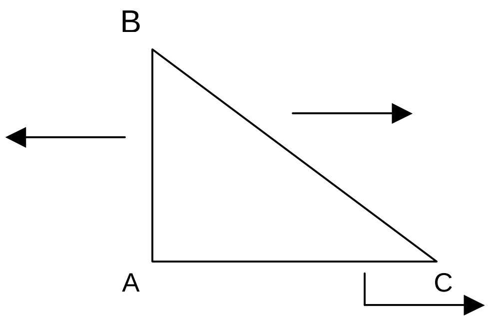
____

8) Você acha que é importante estudar a história da Matemática para aprender melhor? Justifique.

____

____

9) Nomeie os lados do triângulo retângulo e coloque o símbolo do ângulo reto:



10) Um triângulo retângulo é triângulo que tem um ângulo de ______________graus.

11) No triângulo retângulo, $\overline{BC}$ é a _______________________, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são os _______________.

12) O lado oposto ao ângulo agudo é chamado de _____________________, e o cateto que está sobre um dos lados desse ângulo chama-se _________________________.

13) Resolva os problemas dados os seguintes valores:

sen 30º = 0,50000	cos 30º = 0,86603	tan 30º = 0,57735
sen 80º = 0,98481	cos 80º = 0,17365	tan 80º = 5,67128

a) Empinando uma pipa, Renato já soltou 200 m de linha. Sabendo que a linha forma um ângulo de 80º com a horizontal, calcule a altura que a pipa se encontra.

b) O piloto de um avião começou a acionar o sistema de aterrissagem à altura de 600 m a direção da linha de rumo do avião, na descida para a pista, faz um ângulo de 30º com o solo.

- Represente esta atividade com uma figura.
- Calcule a distância percorrida pelo avião desde o início da aterrissagem até chegar ao solo.

ANEXO B

Seqüência Didática: trigonometria

Anexo B – Seqüência Didática: trigonometria

Atividade 1: As razões trigonométricas do triângulo retângulo

Esta atividade tem como objetivo retomar o conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo da 8ª série para revisar as razões trigonométricas.

O valor cognitivo que queremos enfatizar é o poder explicativo da trigonometria, pois cálculos de distâncias podem ser realizados, mostrando a explicação para contextos diferenciados. Este valor se apresenta não só nó contexto histórico, mas na contextualização presente nas atividades que aplicam as razões trigonométricas, ao explicar como resolve tais situações reais.

Contexto Histórico:

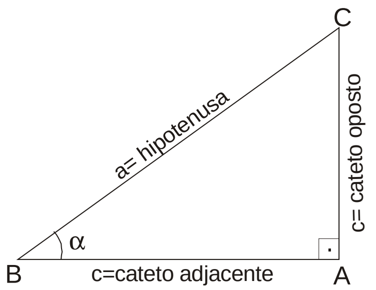
A Geometria dos triângulos surgiu a milhares de anos a.C. As construções das pirâmides, de templos religiosos, a necessidade de calcular distâncias inacessíveis, são exemplos de aplicações que se usavam do estudo dos triângulos e suas relações.

Os astrônomos gregos, anteriores ao século II a.C., usavam as razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da Terra e as distâncias relativas do Sol e faziam previsões para os movimentos do Sol, da Lua e dos planetas. As tabelas trigonométricas surgiram para facilitar esses cálculos astronômicos.

Triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo interno reto.

O lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa e os outros dois lados são chamados de catetos.

Esta atividade permite ao professor ensinar o que é uma razão trigonométrica, explorando os instrumentos, tais como régua, transferidor. Exploramos o conceito de semelhança de triângulos.



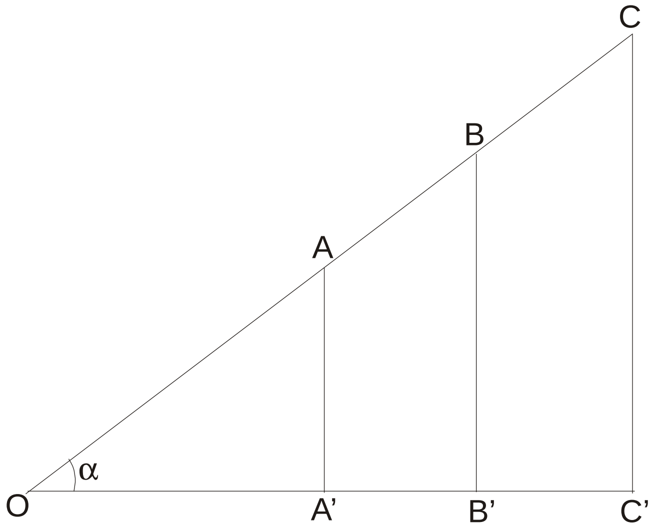
$\overline{BC}$ é a hipotenusa.

$\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são os catetos.

a é a medida da hipotenusa.

b e c são as medidas dos catetos.

Pelo fato de os triângulos retângulos OA'A, OB'B, OC'C,...serem semelhantes, podemos escrever:



$$\frac{A'A}{OA} = \frac{B'B}{OB} = \frac{C'C}{OC} = ...K_1(\text{constante})$$

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = ...K_2(\text{constante})$$

$$\frac{A'A}{OA'} = \frac{B'B}{OB'} = \frac{C'C}{OC'} = ...K_3(\text{constante})$$

Meça os lados de acordo com as letras acima e calcule as constantes:

$k_1 = \frac{3}{5} = \frac{4,5}{7,5} = \frac{6}{10} = 0,6$ $k_2 = \frac{4}{5} = \frac{6}{7,5} = \frac{8}{10} = 0,8$ $k_3 = \frac{3}{4} = \frac{4,5}{6} = \frac{6}{8} = 0,75$

O número K_1, que representa a razão entre as medidas do cateto oposto ao ângulo α e a hipotenusa, é chamado seno do ângulo agudo α, que indicamos por sen α. Assim:

Seno do ângulo α= $\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo }\alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$

Definição:

Seno de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

O número K_2, que representa a razão entre as medidas do cateto adjacente ao ângulo α e a hipotenusa, é denominado cosseno do ângulo agudo α, que indicamos por cos α. Assim:

cosseno do ângulo α=

$$\cos\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Definição:

Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

O número K_3, que representa a razão entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente ao ângulo α, é denominado tangente do ângulo agudo α, que indicamos por tg α. Assim:

Tangente do ângulo α=

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}$$

Definição:

Tangente de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente ao ângulo agudo.

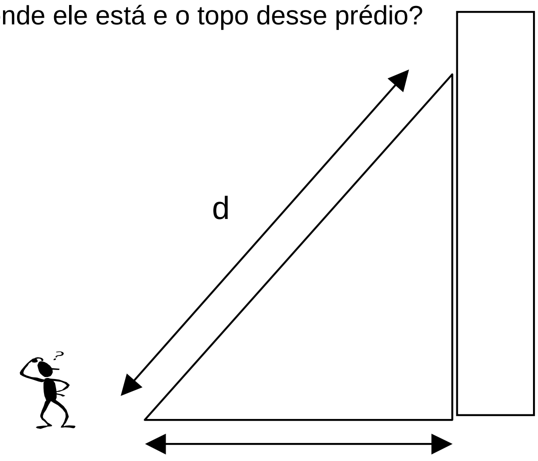
Situações – problemas envolvendo razões trigonométricas:

1) Uma pessoa está distante 50 m da base de um prédio e vê o ponto mais alto do prédio sob um ângulo de 20º em relação à horizontal. Represente a situação e em seguida calcule a altura do prédio.

2) Um avião levanta vôo e sobe fazendo um ângulo constante de 12º com a horizontal. A que distância estará quando alcançar a altura de 540 metros?

3) Um prédio projeta uma sombra de 36 m e um observador está localizado no extremo dessa sombra.

Qual é a distância entre o ponto onde ele está e o topo desse prédio?



Atividade 2: Os triângulos esféricos e planos na Astronomia

O planeta Terra é aproximadamente esférico, imagine a parte superior do isopor é a abóbada celeste vista por uma pessoa na superfície terrestre. Os astrônomos imaginavam que todos os planetas moviam-se ao redor da terra, enfatizando o Sistema Geocêntrico, diferente do Sistema Heliocêntrico, que os planetas giram em torno do Sol.

1) Como representar este triângulo fazendo sua projeção no plano?

____

____

____

2) Ilustre a projeção que você realizou.

Contexto Histórico:

Ptolomeu (150 d.C), na sua obra *Almagesto* desenvolveu a teoria geocêntrica para explicar o sistema solar. Observou que o matemático grego Menelau de Alexandria (100 d.C) dividiu a circunferência em 360 partes. Os historiadores da Matemática supõem que essa divisão da circunferência tem a ver com o fato do da antiguidade estimar que o período de um ano era aproximadamente 360 dias.

Calculavam a distância de um corpo celeste até outro calculando as cordas. Usavam o teorema de Pitágoras para estes cálculos. Hiparco (150 a.C) que sistematizou os cálculos.

A trigonometria plana é a que estudamos no ensino médio. A trigonometria esférica mantém sua importância em disciplinas mais recentes, tais como a Geodésia, a Navegação Oceânica, a Navegação Aérea, a Mecânica de Satélites Artificiais, a Transmissão de Rádio de Grande Alcance, o Cálculo de Trajetórias de Mísseis Intercontinentais, o Cálculo do Aquecimento

Solar em Arquitetura, entre outras áreas mais específicas. Nesta atividade exploramos o valor cognitivo adequação empírica, mostrando a importância da trigonométrica correspondendo ao real. Os matemáticos observavam o céu, e criavam formas de calcular distâncias para eles inacessíveis. Apresenta o valor poder explicativo, pois a trigonometria evolui a medida que começa a explicar fenômenos naturais, fazer medidas quantitativas do círculo. Mostra sua fecundidade dando origens a novos questionamentos, explicações.

3) No Ensino Médio não estudamos os triângulos esféricos. Você achou que é importante para a compreensão da trigonometria, estudar o contexto dos matemáticos da Antigüidade?

____

____

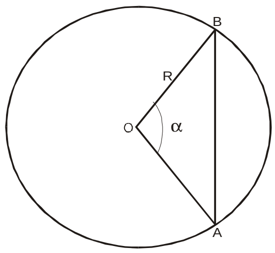
____

Atividade 3: Elementos da trigonometria na circunferência

Os Arcos

Contexto histórico

A palavra corda do latim *chorda*, “corda de arco”, quando usada em Matemática, significa a representação do segmento de reta que une os dois pontos extremos de um arco de círculo, podendo ser associada ao ângulo central que intercepta a corda.

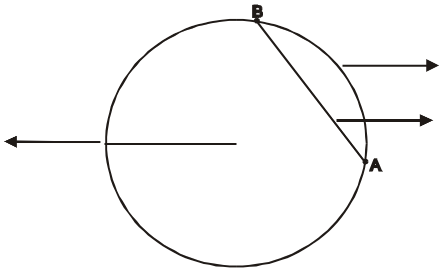


$\overline{AB}$ = corda

As atividades a seguir apresentam aos alunos, a consistência da trigonometria dentro do corpo teórico da Matemática e nos cálculos trigonométricos. A História da Matemática contribui para mostrar a simplicidade, a clareza como valores cognitivos mostram a eficácia da trigonometria.

Sabendo que “O arco é uma parte da circunferência de um círculo”.

1) Identifique os nomes de cada item:



Arco da circunferência

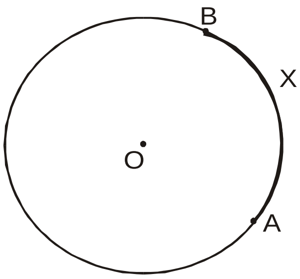
Consideremos uma circunferência qualquer de centro O e o raio R e dois pontos distintos, A e B, que a dividem em duas partes. Consideremos um móvel descrevendo a trajetória circular indicada na figura ao lado.

Suponhamos que o móvel parta do ponto A e chegue até o ponto B percorrendo a circunferência no sentido anti-horário.

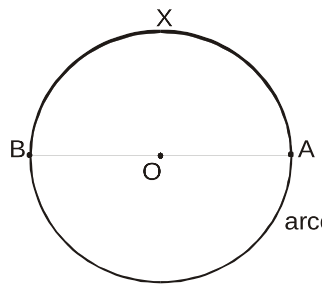
Cada uma dessas partes chama-se arco de circunferência. Quando as extremidades A e B coincidem, temos um arco de uma volta ou um arco nulo.

Quando as extremidades A e B do arco são também as extremidades de um diâmetro o arco AXB é chamado arco de meia-volta.

Arco nulo é aquele cujo comprimento é zero; observemos que o arco nulo tem a origem e a extremidade coincidentes.



arco $\overset{\frown}{AxB}$



arco de meia-volta

> **Arco de circunferência** é cada uma das partes em que uma circunferência fica dividida por dois de seus pontos.

Todo arco de uma circunferência orientada chama-se **arco orientado.**

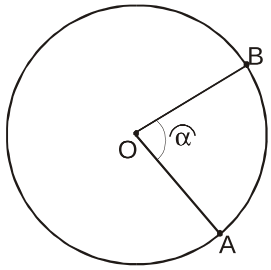
Ângulo central

Consideremos duas semi-retas, AO e OB, de mesma origem, não-coincidentes e não-opostas.

Elas dividem o plano que as contém em duas regiões, I e II, chamados ângulo.

O ponto O é o vértice dos ângulos e as semi-retas AO e OB são os lados dos ângulos.

Caso as semi-retas AO e OB coincidam, dizemos, por extensão, que elas determinam um ângulo nulo (que é a própria semi-reta) ou um ângulo de uma volta (que o próprio plano)



Arcos côngruos (ou congruentes)

Dois arcos são côngruos (ou congruentes) quando tem a mesma extremidade e diferem entre si apenas pelo número de voltas inteiras.

a) Se um arco mede α graus, a expressão geral dos arcos côngruos a ele é dada por $\alpha^{o} + k \cdot 360^{o}$, com $K \in Z$.

b) Se um arco mede α radianos, a expressão geral dos arcos côngruos a ele é dada por $\alpha + 2k\pi$, com $K \in Z$.

1) Um móvel partindo do ponto A, origem dos arcos, percorreu um arco de 1690º. Quantas voltas completas deu e em qual quadrante parou?

2) Um móvel partindo do ponto A, percorreu 900º. Quantas voltas completas ele deu e em qual quadrante parou?

Medidas em graus

Se dividirmos a circunferência em 360 arcos congruentes, cada um desses arcos será chamado arco de um grau (1º). O ângulo central correspondente será de 1º também.

Logo, a circunferência é um arco de 360º e o ângulo central correspondente de uma volta mede 360º.

Dividindo-se um arco de 1º em 60 arcos congruentes, cada um desses novos arcos é um arco de um minuto (1’).

Da mesma forma, quando dividirmos um arco de 1’ em 60 arcos congruentes, cada um desses novos arcos é um arco de um segundo (1’’).

Logo,

1º = 60’, e

1 ’= 60” .

Se um arco tiver x graus, y minutos e z segundos escrevemos xº y’ z’’.

Contexto histórico:

Ptolomeu notou que Menelau dividiu o círculo em 360 graus e o diâmetro em 120 partes e adotou o valor 3 para o π (pi), ou seja, 3 x 120= 360 . Estendeu a tabela de cordas de Hiparco usando a notação sexagesimal babilônica e ainda dividiu cada parte em 60 subpartes e cada uma destas últimas em sexagésimos.

Atividade 4: Conversão de medidas

a) Quantos graus possui um ângulo de 180 minutos?
b) Quantos minutos tem 3600 segundos?
c) Transforme 22º 30’ em segundos.

Radiano

O radiano (símbolo: rad) é definido como a medida de um ângulo central subtendido por um arco igual ao raio da circunferência que contém o arco.

Radiano (rad) é a unidade de medidas de ângulos do Sistema Internacional de Unidade.

a) Expresse em radianos:

60º = 300º = 210º =

b) Expresse em graus:

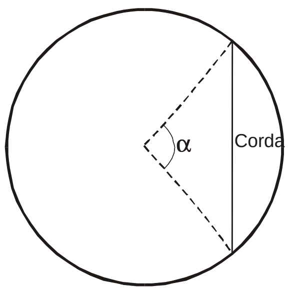
$\frac{10\pi}{6}$ rad $\frac{\pi}{6}$ *rad*

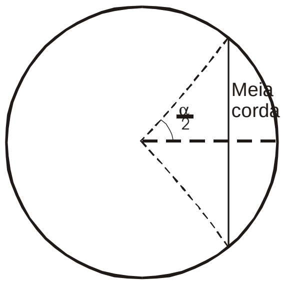
Atividade 5: A trigonometria grega e indiana século IV d.C

Contexto histórico:

Durante muitos séculos a trigonometria grega e indiana, foram disputadas pelos matemáticos árabes. Os indianos proporcionaram cada vez mais o fortalecimento da trigonometria quando, nas aplicações da função cordas apresentada por Ptolomeu, que se baseava na relação funcional entre as cordas de um círculo e os arcos centrais que subentendem, acharam necessário dobrar antes de usá-los como argumento numa tabela de cordas, na qual o próprio arco original seja uma variável independente e a transformou em meia corda ou corda do arco metade, criando uma nova versão da tabela de seno. Outra característica da trigonometria indiana é que era de natureza aritmética enquanto a dos gregos era geométrica.

Observe a figura 1 que é uma representação da trigonometria grega, em seguida observe a figura 2 que se trata de uma representação da trigonometria indiana.





O que você consegue observar nas figuras? Aponte as semelhanças e as diferenças.

Atividade 6: Tabela trigonométrica

Dada a tabela trigonométrica para os ângulos de 0 a 90 graus. O que pode ser observado em relação aos valores de seno e cosseno?

Questões:

1) Quanto é o seno de 60º? Quanto é o cosseno de 30º?

2) O seno de 30º é 0,50000. Por que o seno de 60º graus não é o dobro, mas tem valor de 0,86603?

____
____
____

Atividade 7: Definindo complemento.

Contexto Histórico:

No livro 1 do matemático Regiomontanus (1436-1476), há as seguintes definições:

"O complemento de qualquer arco é considerado ser a diferença entre ele mesmo e o seu quadrante".

"O arco é uma parte da circunferência de um círculo".

"O complemento é definido como a medida da diferença entre o ângulo e o ângulo reto".

$\text{sen}\,(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$

Nicolau Copérnico (1473-1543), astrônomo importante pela sistematização do Heliocentrismo (sistema solar), ao refazer os cálculos astronômicos, aperfeiçoou os estudos trigonométricos.

Dada a relação indique os cossenos:

a) sen de 30º = cos de_________
b) sen de 45º = cos de_________
c) sen de 60º = cos de_________
d) sen de 10º = cos de_________
e) sen de 15º = cos de_________
f) sen de 5º = cos de_________

O que você pode concluir em relação aos valores do seno e cosseno?

____
____
____

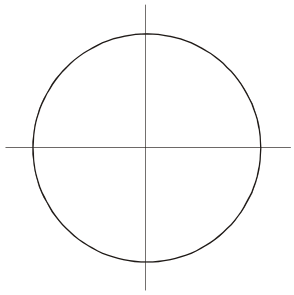
Contexto Histórico:

Edmund Gunter (1581-1626) inventou o termo cosseno para a abreviação de seno complementar *(complemental sine em inglês*), surgindo dessa forma o *co-sinus,* em português "cosseno".

Atividade 8: Identificando os elementos da trigonometria na circunferência.

Contexto Histórico:

De acordo com a definição do matemático Rheticus (1514-1576): “Se AB é o raio ou *sinus totus*, então a perpendicular é o seno e a base é o cosseno”. Identifique o raio, o seno e o cosseno na figura abaixo:



AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Contexto histórico

François Viète – 1540-1603 foi um dos grandes responsáveis pela algebrização da Matemática. Operamos com sen x, cos x e tg x no triângulo retângulo, em que x representa a medida do ângulo agudo.

Ao estudarmos as funções trigonométricas, ampliamos as noções de sen x, cos x e tg x, para os casos em que x representa a medida de um ângulo maior que 90º, isto é, um ângulo obtuso.

Circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico

É uma circunferência orientada de raio unitário (R = 1 unidade de comprimento) para a qual se adota como sentido positivo o anti-horário e se escolhe um ponto A qualquer como origem dos arcos.

O ciclo trigonométrico está centrado num sistema de eixos coordenados cartesianos ortogonais de maneira que o eixo das abscissas passe pelo ponto A.

O ponto A terá, então, abscissa 1 e ordenada 0.

Contexto Histórico

Os árabes Abu’l-Wefa e Al-Biruni deixaram de atribuir valores diferentes para o raio e representaram o círculo com raio igual a 1. Faziam cálculo de sombras usando funções trigonométricas. Os valores negativos das funções cossenos e tangente para ângulos obtusos não eram reconhecidos como números.

Foi na obra de Rheticus que as seis funções trigonométricas foram definidas como funções de um ângulo em vez de arcos e substancialmente como raios. Tornou-se o primeiro europeu a definir explicitamente as funções trigonométricas tangente e cotangente como razões entre lados de um triângulo retângulo.

René Descartes (1596-1650), foi o matemático mais conhecido do século XVII, e a invenção da geometria analítica é atribuída a ele. O matemático Leonard Euler (1707-1783) contribuiu para a linguagem atual que utilizamos na Matemática, os símbolos, letras e também definiu o que se tratava uma função.

Quadrantes

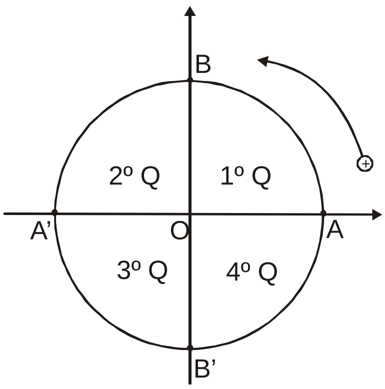
Os eixos do sistema cartesiano dividem o ciclo trigonométrico em quatro partes (quadrantes), numeradas de 1 a 4 a partir de OA, no sentido positivo.

Todo arco de uma circunferência orientada chama-se arco orientado.

Dizemos que um ponto do ciclo pertence ao 1º quadrante se estiver entre A e B; ao 2º quadrante se estiver entre B e A'; ao 3º se estiver entre A' e B'; e ao 4º se estiver entre B' e A.

Como no ciclo trigonométrico o raio é unitário, então $\alpha = s$, ou seja, a medida α do arco ou do ângulo central correspondente, em radianos, é igual ao comprimento **s** do arco.

Podemos associar a cada número real α um único arco AC, de origem **A** e extremidade **C**, e vice-versa.

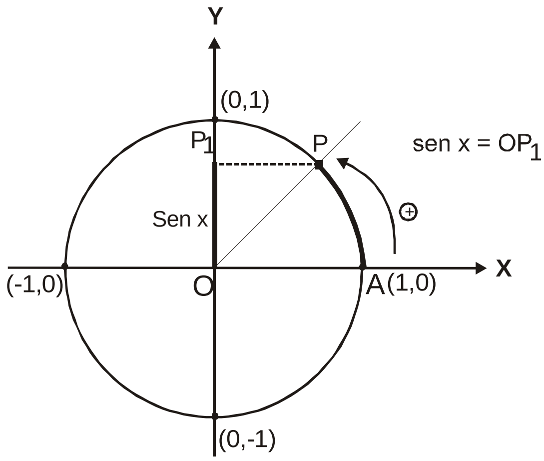


Os quadrantes do ciclo trigonométrico apresentam as seguintes variações em graus e radianos:

Função Seno

Seno de um arco

Todo número real x pode ser considerado como a medida, em radianos, de um determinado arco AC. Para cada arco existe um único número real y que é o seu seno, ficando, portanto, definida a função seno.



Domínio e imagem

O domínio e o contradomínio dessa função são o conjunto $\Re$. Ela é indicada por y = sen x ou f(x) = sen x. A imagem é Im (senx) = [-1, 1]

O sinal da função

f(x)= sen x é positiva no 1º e 2º quadrantes

(ordenada positiva)

f(x) = sen x é negativa no 3º e 4º quadrantes

(ordenada negativa)

Função Cosseno – Arcos côngruos, Periodicidade, domínio e imagem

Cosseno de um arco

Consideremos, no ciclo trigonométrico, o arco AC, cuja medida, em radianos, é x, e o segmento OC'', projeção ortogonal do raio OC sobre o eixo horizontal.

Definimos de cosseno do arco AC ou cosseno de x como a medida algébrica de OC'' e indicamos cos x = OC.

O eixo horizontal, suporte de OC", é chamado eixo dos cossenos.

Função cosseno

Para cada arco existe um único número real y que é o seu cosseno, ficando, portanto, definida a função cosseno $f : x \rightarrow y$.

O domínio e o contradomínio dessa função são o conjunto $\Re$. Ela é indicada por y = cos x ou f(x) = cos x.

Função Tangente

Definição de tangente de um arco

Dado um arco AM, no círculo trigonométrico, consideremos a reta suporte do raio na posição OM. Chamamos de tangente trigonométrica, ou tangente do arco AM, ao segmento AT determinado sobre os eixos das tangentes pela reta suporte de OM.

tg x = $\overline{\mathbf{AT}}$ $$\text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$$

Função co-tangente

Definição

Dado o arco AM, a reta suporte do raio na posição OM intercepta o eixo das co-tangentes no ponto S. Chamamos co-tangente do arco AM a medida algébrica do segmento BS.

Cotg AM = BS $$\text{cotg}\,x = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x}$$

Função secante

Definição:

O valor inverso do cosseno de um arco x denomina-se secante do arco.

No círculo trigonométrico, representamos, no mesmo eixo dos cossenos, a secante, pelo segmento: OL.

Pela semelhança dos triângulos OML e OPM demonstramos que:

$$OL = \frac{1}{OP} \qquad \sec\, x = \frac{1}{\cos x}$$

Função co-secante

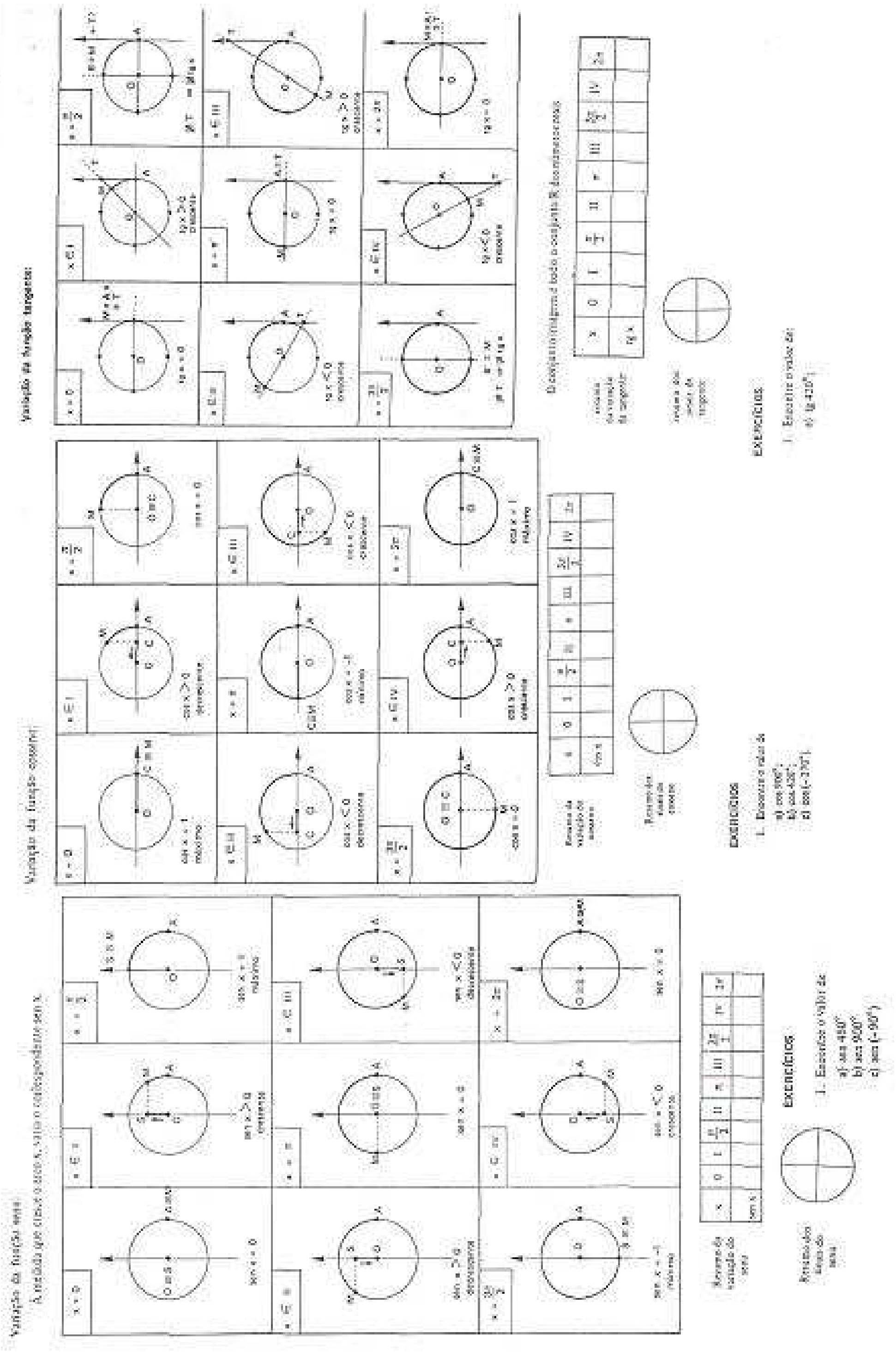
Definição

O valor inverso do seno de um arco “x” é denominado co-secante de “x”. No círculo trigonométrico, conforme a figura abaixo, no mesmo eixo dos senos: segmento OK

Pela semelhança dos triângulos ONM e OKM demonstramos que:

$$OK = \frac{1}{ON} \qquad \text{cosec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\,x}$$

Atividade 9: Preencha a tabelas com o resumo da variação das funções seno, cosseno e tangente:



Atividade 10: Representação Gráfica das Funções Trigonométricas: SENO, COSSENO E TANGENTE

1) Represente graficamente a função sen x

2) Represente graficamente a função cos x

3) Represente graficamente a função tg x

4) Represente graficamente o ciclo trigonométrico, colocando valores em graus e radianos, seus quadrantes, desenhe também os eixos seno, cosseno, tangente, cotangente, cossecante e secante.

Para você a trigonometria evolui ao longo do tempo? Justifique.

____

____

____

A História da Matemática auxiliou para entender a necessidade de estudar trigonometria?

____

____

____

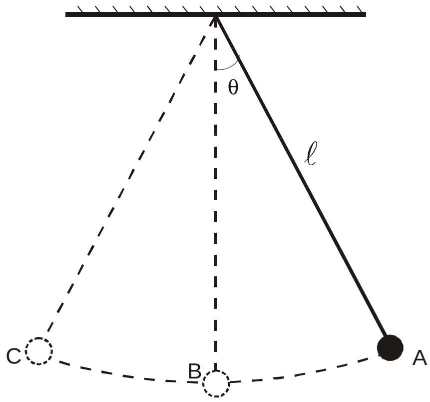
Atividade 11: Pêndulos

Contexto Histórico:

No século XVII e XVIII a medição precisa do tempo era essencial para a navegação. Um dos movimentos estudados em Dinâmica é do pêndulo simples.

Ele consiste num fio de comprimento ℓ tendo uma das extremidades presa a um ponto fixo (ponto O) e um peso (massa) preso na outra extremidade. O tempo gasto para que o corpúsculo pendurado vá de A até C e retorne de C até A é chamado de período do pêndulo (indica-se com a letra T) e expresso, normalmente, em segundos.

O cientista Galileu Galilei (1584-1642) foi quem fez o primeiro estudo experimental do movimento de um pêndulo. Christiaan Huygens (1629–1695) foi quem projetou o primeiro relógio de pêndulos, com a finalidade de solucionar um problema fundamental de navegação marítima, para isso estudando as oscilações de um pêndulo. Nos séculos XVII e XVIII as medições de latitudes eram muito precisas, enquanto as longitudes requeriam métodos confiáveis para se medir intervalos de tempo. O período do pêndulo depende da gravidade, uma das principais propriedades do pêndulo é a regularidade das suas oscilações. Por este motivo, os pêndulos eram usados em relógios. A massa do pêndulo não influencia no resultado do período, mas o comprimento sim, por isso é que os relógios de maior precisão possuem o pêndulo de maior comprimento.



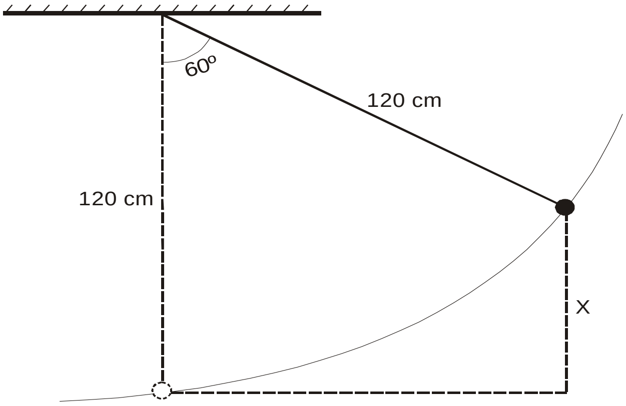
Muitas situações cotidianas envolvem periodicidade. Por exemplo, os dias da semana tem período de 7 dias, as estações do ano, em linguagem Matemática falamos em função periódica.

Muitos fenômenos naturais são periódicos: o nível de água das marés, a oscilação de um pêndulo, uma corrente alternada, o batimento cardíaco, a posição de moléculas de ar transmitindo notas musicais, dentre tantas outras.

A Lua atrai a Terra provocando os fenômenos das marés. O fenômeno é periódico, pois a maré sobe e abaixa em 12 hs. O período é de 12 hs. Dizemos que um ponto material descreve um movimento circular quando a trajetória é uma circunferência. O intervalo de tempo necessário para que um móvel dê uma volta completa é denominado período (T). O período dos pontos da Terra em seu movimento de rotação em torno de seu eixo é T= 24 hs, enquanto que o período da Terra ao redor do Sol é T = 1 ano, aproximadamente 365 dias.

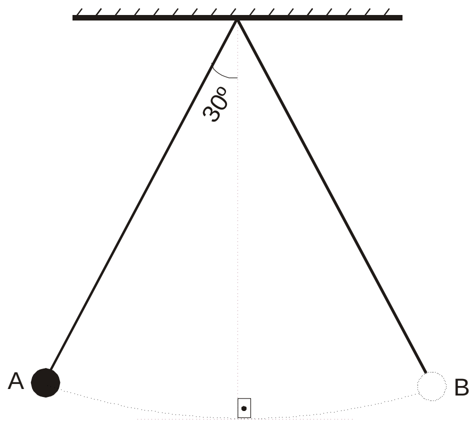
Exercícios:

1) Um pêndulo de 120 cm de comprimento em sua amplitude forma um ângulo de 60º com a vertical. Você seria capaz de descobrir qual a altura que o pêndulo estará na sua base horizontal?



2) O pêndulo de um relógio tem comprimento de 0,5 m e executa o movimento de A para B indicado na figura.

Determine o comprimento do arco AB que a extremidade do pêndulo descreve:



Exercícios extras:

Atividade 12: A trigonometria na geografia.

Contexto Histórico:

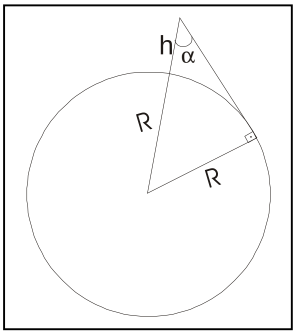
Os gregos conseguiram determinar o raio da Terra utilizando a trigonometria. O grego Eratóstenes, no século III a.C, mediu a circunferência da Terra e seu resultado apresentou um erro de 1 a 2 por cento.

A trigonometria fornece-nos cálculos para medir o raio da Terra. Como isso é possível?

Primeiro, procura-se uma montanha próxima ao mar, com altura h conhecida. Depois, sobe-se no topo dessa montanha e, olhando por dentro de um canudo de refresco, mira-se à linha do horizonte, onde o céu e mar parecem se encontrar.

A altura da montanha é de 600 m. Do seu topo, o horizonte faz um ângulo de 89º. Calcule o raio da Terra.

Solução: Se R é o raio da Terra em quilômetros e os dados sen 89º = 0,9999.



Atividade 13: Enumere de 1 a 10 a linha do tempo com os principais períodos da História da Trigonometria:

Viète –algebrização da trigonometria

Rheticus - razões trigonométricas no círculo

Regiomontanus – As navegações e astronomia

Trigonometria
Al-biruni e Abu´l- Wefa
R=1

As funções trigonométricas para resolver fenômenos periódicos

Trigonometria independente da astronomia
Nasir Al-din 1201-1274

Nicolau Copérnico
Sistema heliocêntrico

Euler - Tratamento analítico das funções

Geometria dos triângulos

Trigonometria dos gregos - Hiparco

ANEXO C

Trabalho de trigonometria

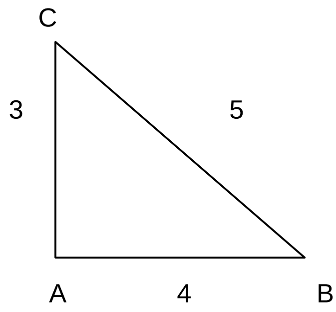
Anexo C – Trabalho de trigonometria

1) Uma criança está distante 80 m da base de uma torre e vê o ponto mais alto sob um ângulo de 16º em relação à horizontal. Qual é a altura da torre?

2) Dado o triângulo-retângulo:

a) Nomeie os lados

b) Calcule sen, cos, tg



3) Transforme:

a) 300º em minutos

b) 480’ em segundos

c) 2400’’ em minutos

4) Expresse em radianos:

a) 60º

b) 150º

5) Expresse em graus:

a) $\frac{10\pi}{9}$ rad

b) $\frac{\pi}{9}$ rad

6) Desenhe os quadrantes da circunferência, colocando os valores em graus e radianos.

ANEXO D

Modelo do segundo APC e Avaliação de trigonometria

Anexo D – Modelo do segundo APC e Avaliação de trigonometria

1) Você considera que a Matemática é importante? Justifique.

____

____

____

2) Dos conteúdos matemáticos já estudados até hoje, qual você achou mais interessante aprender? Justifique sua resposta.

____

____

____

3) Marque x nas afirmativas que você considera verdadeiras em relação à Matemática:

( ) Contribui para resolver problemas tanto na Matemática como em outras disciplinas.
( ) Busca cada vez mais resultados exatos.
( ) Aplica-se a Matemática para resolver problemas reais do dia-a-dia.
( ) A Matemática quase não faz sentido para produzir novas descobertas.
( ) As fórmulas Matemáticas tornam os cálculos mais simples.
( ) Os conteúdos que hoje estudamos podem ser úteis no futuro.
( ) Tudo seria mais fácil se não existisse a Matemática.
( ) Mesmo usando cálculos matemáticos, a inexatidão é constante.
( ) A representação gráfica ajuda o aluno a compreender melhor os conceitos matemáticos.

4) Quando você pensa na trigonometria que termos tem a ver com esse conteúdo:

( ) seno	( ) cubo	( ) ângulos	( ) ciclo
( ) catetos	( ) adjacente	( ) funções	( ) quadrante
( ) perímetro	( ) graus	( ) razão	( ) cateto oposto
( ) graus	( ) potência	( ) divisor	( ) Teorema de Pitágoras

5) Os cálculos da trigonometria servem para resolver que tipo de problemas?

____

____

____

6) Que motivos você pensa que levaram os matemáticos da Antigüidade a estudar a trigonometria?

7) Você acha que é importante estudar a história da Matemática para aprender melhor? Justifique.

8) A trigonometria é um conteúdo que:

( ) tem a ver com os problemas reais.

( ) pode ser aplicada.

( ) explica vários fenômenos.

( ) evolui ao longo da humanidade.

( ) foi estudada por vários povos e nações.

( ) pode ser representada graficamente, aumentando a facilidade de compreensão.

( ) suas fórmulas evoluíram tornado o conteúdo mais simples do que no início.

( ) tornou-se cada vez mais usada em outros estudos devido a sua importância.

9) Das atividades realizadas, qual você achou mais interessante? Justifique.

10) Para você a Matemática possui um valor que a torna importante nos estudos? Justifique.

11) O que é uma tabela trigonométrica? Para que serve?

12) A trigonometria do triângulo-retângulo para a trigonometria no ciclo trigonométrico evoluiu? Justifique sua resposta.

13) Represente no ciclo trigonométrico, com os eixos do seno, cosseno, tangente, cotangente, co-secante e secante. Coloque os períodos.

14) Um pêndulo tem 15 cm de comprimento, e no seu movimento, suas posições extremas formam um ângulo de 60º. Qual o comprimento do arco que a extremidade do pêndulo descreve?

15) Um cachorro está distante 100 m da base de um prédio e vê o ponto mais alto sob um ângulo de 20º em relação à horizontal. Qual é a altura do prédio?

16) Transforme:

a) 200º em minutos
b) 480 minutos em segundos
c) 2400'' em minutos

17) Expresse em radianos:
a) 60º
b) 220º

18) Expresse em graus:

a) $\frac{10\pi}{9}$ rad   b) $\frac{\pi}{6}$ rad

19) Encontre o valor de:
a) cos 900º
b) sen 450º

20) Qual é o período da função:
Seno?   Cosseno?   Tangente?

ANEXO E

Transcrição de entrevista com o professor, aplicador da seqüência num outro 2º ano do Ensino Médio

Anexo E – Transcrição de entrevista com o professor, aplicador da seqüência num outro 2º ano do Ensino Médio

Hoje é dia 10/12/07, e eu estou aqui com o professor Fabiano que aplicou no segundo ano do Ensino Médio, a mesma seqüência didática que eu apliquei também numa outra sala de aula, então nós vamos conversar sobre os resultados, como que foram as aulas, o que ele achou da seqüência oferecida a ele.

Quantos anos faz que você leciona Fabiano?

10 anos

E o que você achou da abordagem histórica, da forma como foram colocadas as atividades?

Principalmente a parte introdutória da trigonometria, a parte histórica com os triângulos, eu achei aquilo lá muito interessante, porque já há muito tempo que eu não trabalhava dessa maneira, também nunca, dificilmente eu entrava com a parte introdutória histórica assim...porque do triângulo esférico toda esta explicação fazendo com que eles trabalhassem até este material mais manuseável e achei que foi muito... bom, foi válido! Porque os alunos conseguiram assimilar melhor, né? Uma parte do conteúdo que a gente passa no quadro, aquela teoria do desenhinho no quadro que o aluno fica só no abstrato ele conseguiu ver na prática realmente.

Você achou que aquela atividade então do isopor, com a bola do isopor, eles entenderam a diferença dos triângulos planos, dos triângulos esféricos?

E entenderam como que foi assim para os matemáticos olhar para o céu e tentar fazer os cálculos e para isso precisa de registrar, então você achou que isso foi importante?

Eu acho que isso foi muito importante, esta parte, no todo, no todo eu achei o trabalho bom, muito bom. Eu senti que numa turma de muita dificuldade, é uma turma de muita dificuldade que eles tem de aprendizado, eles conseguiram assimilar o conteúdo e desenvolver ele, e chegamos até num resultado final na avaliação, eles conseguiram por conta própria, chegar aos resultados, a ... como vou falar para você aqui, conseguiram... desenvolveram né, naturalmente.

Você achou que é um material bom para o ano que vem, se você quiser aplicar em sala de aula?

Ah eu gostaria sim, a única coisa que eu senti falta, assim foram alguns exercícios, mais exercícios, da parte do triângulo-retângulo, aquelas aplicações do seno e cosseno, faltaram alguns exercícios que eu complementei com alguns exercícios na lousa, mas fora isso, o material, a parte aplicável, manuseável ficou muita boa.

E aquela atividade do seno, cosseno, complemento, eles entenderam que o cosseno era o complemento?

Entenderam, eles entenderam. Na hora que eu passei a tabela para eles, que eu pedi para eles verificarem na tabela o seno de 30º e o cosseno de 60º eles disseram, ah professor, mas é o mesmo valor, dentro do triângulo, nós usamos aquele...é... foi através do transferidor, fazendo medidas com ângulos, aí eu expliquei para eles o seno, onde que era visto seguindo a apostila, onde era medindo o raio de 1 cm, depois com o outro, o cosseno, onde que era visto, que eles tinham o mesmo valor.

E os alunos perceberam que Matemática, a trigonometria em específica ela tem correspondência com o real?

Perceberam. Muito mais nessa turma, tanto que eu trabalhei a trigonometria nessa sala, que é uma sala que tem muita dificuldade, e a trigonometria tradicional apliquei, utilizei numa outra turma, que era uma turma de médio porte, nível médio, e eu senti assim, que a trigonometria no método tradicional eles viram muita dificuldade, já diferente dessa turma que tiveram trabalhos mais práticos, visualizaram mais o conteúdo trigonométrico eles gostaram da matéria, diferente da outra sala, isso é o que eu senti de diferença.

Você achou que demorou mais para aplicar o conteúdo com a minha abordagem ou no caso foi a mesma coisa? O que você achou?

Foi um pouquinho mais demorado. As atividades bem mais longas, algumas assim, por a gente acompanhar por aula 1, aula 2, só que assim eu achei que o resultado final eu achei que foi mais válido do que no método tradicional.

E usar o cd também, o que você para fazer os quadrantes?

Foi legal, fazer os quadrantes! Apesar que poderia utilizar pensar numa outra metodologia além do cd, não sei se isso daí é mais viável, porque só o fato de pegar o cd para desenhar os quadrantes, com o transferidor ficou melhor, mais legalzinho, no caderno, entendeu, a passagem feita no caderno.

Você achou que para eles a história da Matemática ajuda a entender melhor o conteúdo de trigonometria?

Na parte introdutória foi, na parte dos triângulos lá, na parte do seno e cosseno também, achei que foi bem importante.

No inicio das atividades, lembra que eu entreguei o material para você dos valores cognitivos, né, então as atividades, nelas estavam implícitos os valores cognitivos, por exemplo, a adequação empírica, de uma forma que o aluno, lógico, que não ficasse um texto cansativo, que eles fizessem as atividade; você achou então que aqueles valores que você viu colocados como fecundidade, simplicidade na Matemática, adequação empírica, poder explicativo; você achou que eles apareceram, que essa é uma preocupação que a gente?

Eu achei que em todas atividades apareceram sim. Em cada introdução de uma aula para outra, eu achei que foi bem adequado.

Por exemplo, aquela atividade dos pêndulos que ficou pro final, eu consegui aplicar na minha turma, você conseguiu aplicar?

Não eu não consegui aplicar, do pêndulo acho que foi a única atividade devido ao tempo corrido que foi, e finalização de notas, acho que foi a única que eu não consegui aplicar.

Você chegou a falar sobre pêndulos?

Não, não consegui nem dar introdução nele, nesse conteúdo, mas que era um conteúdo interessante para ser aplicado, por isso tentado. Nosso tempo era curto, se fosse um pouquinho mais, se tivesse umas 2 semanas a mais, acho que conseguiríamos aplicar sim.

Então como eu já, para mim o conteúdo estava de uma forma, o conteúdo histórico de uma forma bem mais acurada, para mim foi... eu consegui chegar. Mas porque as atividades eu já tinha em mente como eu ia aplicar, da forma que eu tinha planejado, então a gente já previa que talvez você iria demorar mais tempo que eu para aplicar, para mim estava mais fixado tudo que eu tinha em mente planejado para as aulas. Mas então você achou que ajudou o aluno a aprender melhor?

Muito. Eu gostaria de até se eu...

Contribuiu?

Contribuiu bastante, eu gostaria de até utilizar novamente essa apostila, com sua permissão, né, utilizando essa metodologia o ano que vem, nas turmas também, eu se eu for pegar os 2º colegiais, gostaria de aplicar aqui, nessa parte da trigonometria, aí eu já sei mais ou menos qual a extensão dela, aí eu já consigo me adequar dentro do cronograma anual.

Legal! Eu agradeço a você pela participação na pesquisa, uma forma também de ver se pelo menos de dizer que pelo menos não tem interferência minha, da pesquisadora na sua...nos seus resultados, se você conseguiu ver que o resultado foi bom, para nós ajuda para própria pesquisa mesmo.

Foi o que eu havia dito para você, né Helenara. Eu sou aberto a novas experiências, a novas metodologias, eu gosto disso, eu já tinha falado para Simone, porque para mim, aquele negócio tradicional para mim é maçante. Às vezes, eu tento fugir um pouquinho, que nem ela, aplicava na parte da música, eu tento conciliar um pouquinho com isso, mas aí vendo este outro lado, da outra metodologia sua, também foi muita boa, principalmente, nossa! Eu achei que aquele resultado, a parte introdutória, até a parte dos cd, a parte dos quadrantes, nossa, foi espetacular, porque assim, os alunos conseguem visualizar, eles conseguem, depois, eles conseguiram manusear, ah...então é por isso que dá tanto, é por isso enquanto um é positivo, o outro fica negativo.

Eu agradeço pela participação!

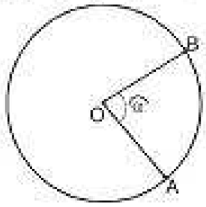
Eu que agradeço, Helenara.

ANEXO F

Exemplares das atividades de alguns alunos

Anexo F – Exemplares das atividades de alguns alunos

Caso as semi-retas AO e OB coincidam, dizemos, por extensão, que elas determinam um ângulo nulo (que é a própria semi-reta) ou um ângulo de uma volta (que o próprio plano)



Arcos côngruos (ou congruentes)

Dois arcos são côngruos (ou congruentes) quando tem a mesma extremidade e diferem entre si apenas pelo número de voltas inteiras.

a) Se um arco mede α graus, a expressão geral dos arcos côngruos a ele é dada por $\alpha^\circ + k \cdot 360^\circ$, com $K \in Z$.
b) Se um arco mede α radianos, a expressão geral dos arcos côngruos a ele é dada por $\alpha + 2k\pi$, com $K \in Z$.

1) Um móvel partindo do ponto A, origem dos arcos, percorreu um arco de 1690º. Quantas voltas completas deu e em qual quadrante parou?

2) Um móvel partindo do ponto A, percorreu 900º. Quantas voltas completas ele deu e em qual quadrante parou?

Medidas em graus

Se dividirmos a circunferência em 360 arcos congruentes, cada um desses arcos será chamado arco de um grau (1º). O ângulo central correspondente será de 1º também.
Logo, a circunferência é um arco de 360º e o ângulo central correspondente de uma volta mede 360º.
Dividindo-se um arco de 1º em 60 arcos congruentes, cada um desses novos arcos é um arco de um minuto (1').
Da mesma forma, quando dividirmos um arco de 1' em 60 arcos congruentes, cada um desses novos arcos é um arco de um segundo (1'').
Logo,
1º = 60', e
1 '= 60'' .

Se um arco tiver x graus, y minutos e z segundos escrevemos xº y' z''.

Contexto histórico:

Ptolomeu notou que Menelau dividiu o círculo em 360 graus e o diâmetro em 120 partes e adotou o valor 3 para π (pi), ou seja, 3 x 120= 360 . Estendeu a tabela de cordas de Hiparco usando a notação sexagesimal babilônica e ainda dividiu cada parte em 60 subpartes e cada uma destas últimas em sexagésimos.

Atividade 4: Conversão de medidas

a) Quantos graus possui um ângulo de 180 minutos? 3 graus
b) Quantos minutos tem 3600 segundos? 60 minutos
c) Transforme 22º 30' em segundos. 81000 segundos

Radiano

O radiano (símbolo: rad) é definido como a medida de um ângulo central subtendido por um arco igual ao raio da circunferência que contém o arco.
Radiano (rad) é a unidade de medidas de ângulos do Sistema Internacional de Unidade.

Sistema	Unidade Fundamental	Amplitudes				
Sexagesimal	Grau	0	90º	180º	270º	360º
Circular	Radiano	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

a) Expresse em radianos:

60º = $\frac{180}{60}\frac{\pi}{x}$ $x = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ $180x = 60\pi$

300º = $\frac{180}{300}\frac{\pi}{x}$ $180x = 300\pi$ $x = \frac{300\pi}{180} = \frac{5\pi}{3}$

210º = $\frac{180}{210}\frac{\pi}{x}$ $180x = 210\pi$ $x = \frac{210\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$

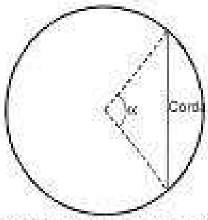
b) Expresse em graus:

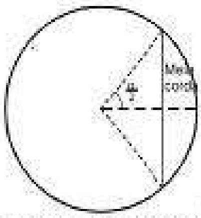
$\frac{10\pi}{6}$ rad 300º

$\frac{\pi}{6}$ *rad* 30º

Atividade 5: A trigonometria grega e indiana século IV d.C
Contexto histórico:

Durante muitos séculos a trigonometria grega e indiana, foram disputadas pelos matemáticos árabes. Os indianos proporcionaram cada vez mais o fortalecimento da trigonometria quando, nas aplicações da função cordas apresentada por Ptolomeu, que se baseava na relação funcional entre as cordas de um círculo e os arcos centrais que subentendem, acharam necessário dobrar antes de usá-los como argumento numa tabela de cordas, na qual o próprio arco original seja uma variável independente e a transformou em meia corda ou corda do arco metade, criando uma nova versão da tabela de seno. Outra característica da trigonometria indiana é que era de natureza aritmética enquanto a dos gregos era geométrica.





Observe a figura 1 que é uma representação da trigonometria grega, em seguida observe a figura 2 que se trata de uma representação da trigonometria indiana.
O que você consegue observar nas figuras? Aponte as semelhanças e as diferenças.

____

____

____

Atividade 6: Tabela trigonométrica
Dada a tabela trigonométrica para os ângulos de 0 a 90 graus. O que pode ser observado em relação aos valores de seno e cosseno? Que o valor do seno tem mesmo valor do cosseno que foram para chegar a 90º
Questões:

1) Quanto é o seno de 60º? Quanto é o cosseno de 30º?

Seno = 0,86
Cosseno = 0,86

2) O seno de 30º é 0,50000. Por que o seno de 60º graus não é o dobro, mas tem valor de 0,86603 ?

Porque o valor não aumenta na mesma proporção.

Atividade 7: Definindo complemento.

Atividade 9: Preencha a tabelas com o resumo da variação das funções seno, cosseno e tangente e os sinais das funções:

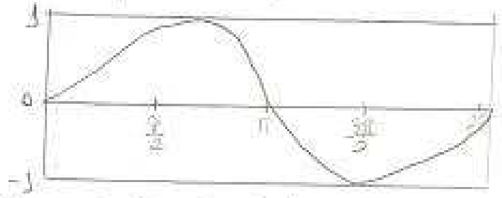
Seno = Seno de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa. Sen = $\frac{co}{h}$

Cosseno = Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa. Cos = $\frac{ca}{h}$

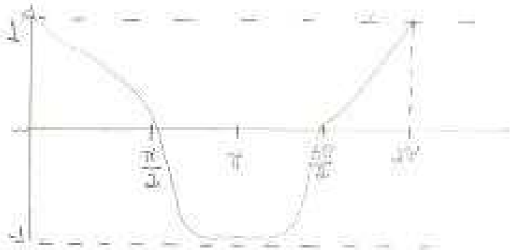
Tangente = Tangente de um ângulo agudo é a razão entre as medidas do cateto adjacente ao ângulo agudo.

Atividade 10: Representação Gráfica das Funções Trigonométricas: SENO, COSSENO E TANGENTE

1) Represente graficamente a função sen x



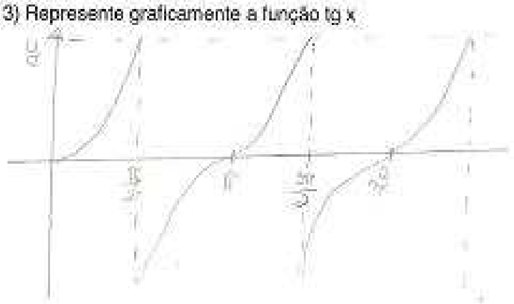
2) Represente graficamente a função cos x



Período 2π

Cosseno

3) Represente graficamente a função tg x



Tangente π

4) Represente graficamente o ciclo trigonométrico, colocando valores em graus e radianos, seus quadrantes, desenhe também os eixos seno, cosseno, tangente, cotangente, cossecante e secante.

Para você a trigonometria evolui ao longo do tempo? Justifique.

Sim

A História da Matemática auxiliou para entender a necessidade de estudar trigonometria?

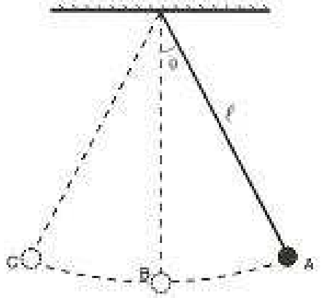
Sim, ficou mais fácil de entender.

Atividade 11: Pêndulos

Contexto Histórico:

No século XVII e XVIII a medição precisa do tempo era essencial para a navegação. Um dos movimentos estudados em Dinâmica é do pêndulo simples.

Ele consiste num fio de comprimento ℓ tendo uma das extremidades presa a um ponto fixo (ponto O) e um peso (massa) preso na outra extremidade. O tempo gasto para que o corpúsculo pendurado vá de A até C e retorne de C até A é chamado de período do pêndulo (indica-se com a letra T) e expresso, normalmente, em segundos.



O cientista Galileu Galilei (1584-1642) foi quem fez o primeiro estudo experimental do movimento de um pêndulo. Christiaan Huygens (1629–1695) foi quem projetou o primeiro relógio de pêndulos, com a finalidade de solucionar um problema fundamental de navegação marítima, para isso estudando as oscilações de um pêndulo. Nos séculos XVII e XVIII as medições de latitudes eram muito precisas, enquanto as longitudes requeriam métodos confiáveis para se medir intervalos de tempo. O período do pêndulo depende da gravidade, uma das principais propriedades do pêndulo é a regularidade das suas oscilações. Por este motivo, os pêndulos eram usados em relógios. A massa do pêndulo não influencia no resultado do período, mas o comprimento sim, por isso é que os relógios de maior precisão possuem o pêndulo de maior comprimento.

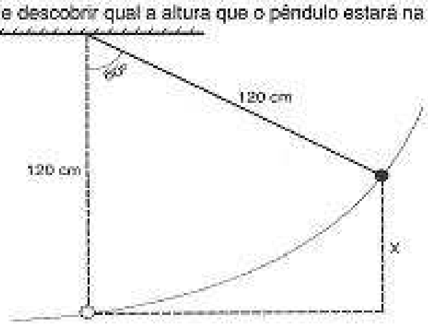
Muitas situações cotidianas envolvem periodicidade. Por exemplo, os dias da semana tem período de 7 dias, as estações do ano, em linguagem matemática falamos em função periódica.

Muitos fenômenos naturais são periódicos: o nível de água das marés, a oscilação de um pêndulo, uma corrente alternada, o batimento cardíaco, a posição de moléculas de ar transmitindo notas musicais, dentre tantas outras.

A Lua atrai a Terra provocando os fenômenos das marés. O fenômeno é periódico, pois a maré sobe e abaixa em 12 hs. O período é de 12 hs. Dizemos que um ponto material descreve um movimento circular quando a trajetória é uma circunferência. O intervalo de tempo necessário para que um móvel dê uma volta completa é denominado período (T). O período dos pontos da Terra em seu movimento de rotação em torno de seu eixo é T= 24 hs, enquanto que o período da Terra ao redor do Sol é T=1 ano, aproximadamente 365 dias.

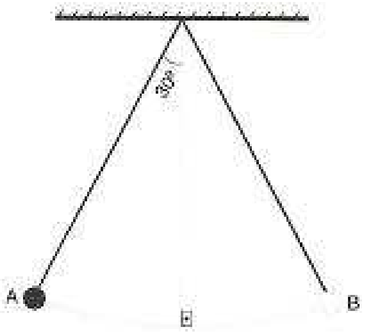
Exercícios:

Um pêndulo de 120 cm de comprimento em sua amplitude forma um ângulo de 60º com a vertical. Você seria capaz de descobrir qual a altura que o pêndulo estará na sua base horizontal?



2) O pêndulo de um relógio tem comprimento de 0,5 m e executa o movimento de A para B indicado na figura.

Determine o comprimento do arco AB que a extremidade do pêndulo descreve:



$\cos 60 = \frac{cat.\,adj}{hip}$

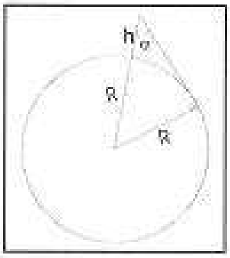
$\frac{0,5}{1} = \frac{180 - x}{180}$

$60 = 180x$
$x = 180 - 60$
$x = 60$ cm

Exercícios extras:

A trigonometria na geografia.

Contexto Histórico:
Os gregos conseguiram determinar o raio da Terra utilizando a trigonometria. O grego Eratóstenes, no século III a.C, mediu a circunferência da Terra e seu resultado apresentou um erro de 1 a 2 por cento.
A trigonometria fornece-nos cálculos para medir o raio da Terra. Como isso é possível?
Primeiro, procura-se uma montanha próxima ao mar, com altura h conhecida. Depois, sobe-se no topo dessa montanha e, olhando por dentro de um canudo de refresco, mira-se à linha do horizonte, onde o céu e mar parecem se encontrar.
A altura da montanha é de 600 m. Do seu topo, o horizonte faz um ângulo de 89°. Calcule o raio da Terra.
Solução: Se R é o raio da Terra em quilômetros e os dados Sen 89° = 0,9999



Enumere de 1 a 10 a linha do tempo com os principais períodos da História da Trigonometria:

Viète –algebrização da trigonometria 8	Rheticus - razões trigonométricas no círculo 7	Regiomontanus – As navegações e astronomia 4
Trigonometria Al-biruni e Abu´l- Wefa R=1 3	Geometria dos triângulos 1	As funções trigonométricas para resolver fenômenos periódicos 10
Nicolau Copérnico 6 Sistema heliocêntrico	Trigonometria dos gregos - Hiparco 2	Euler - Tratamento analítico das funções 9
	Trigonometria independente da astronomia 5	

Sen = CO / HIP   Tg 20° = x / 50

COS = CA / HIP   0,36 = x / 50

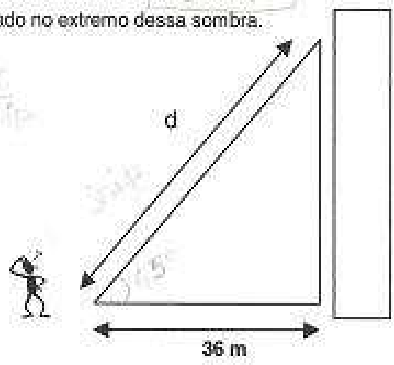
Tg = CO / CA   x = 50 × 0,36 $\boxed{x = 18 m}$

2) Um avião levanta vôo e sobe fazendo um ângulo constante de 12º com a horizontal. A que distância estará quando alcançar a altura de 540 metros?

540 m   Tg 12° = CO / CA   x = 540 / 12

$\boxed{x = 45}$

3) Um prédio projeta uma sombra de 36 m e um observador está localizado no extremo dessa sombra. Qual é a distância entre o ponto onde ele está e o topo desse prédio?



Atividade 2: Os triângulos esféricos e planos na Astronomia

O planeta Terra é aproximadamente esférico, imagine a parte superior do isopor é a abóbada celeste vista por uma pessoa na superfície terrestre. Os astrônomos imaginavam que todos os planetas moviam-se ao redor da terra, enfatizando o sistema Geocêntrico, diferente do sistema Heliocêntrico, que os planetas giram em torno do Sol.

1) Como representar este triângulo fazendo sua projeção no plano?

Triângulo esférica em triângulo plano.

2) Ilustre a projeção que você realizou.

Contexto Histórico:

Ptolomeu (150 d.C), na sua obra *Almagesto* desenvolveu a teoria geocêntrica para explicar o sistema solar. Observou que o matemático grego Menelau de Alexandria (100 d.C) dividiu a circunferência em 360 partes. Os historiadores da matemática supõem que essa divisão da circunferência tem a ver com o fato do da antiguidade estimar que o período de um ano era aproximadamente 360 dias.

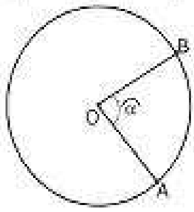
Calculavam a distância de um corpo celeste até outro calculando as cordas. Usavam o teorema de Pitágoras para estes cálculos. Hiparco (150 a.C) é considerado o pai da trigonometria, pois foi ele que sistematizou os cálculos.

A trigonometria plana é a que estudamos no ensino médio. A trigonometria esférica mantém sua importância em disciplinas mais recentes, tais como a Geodésia, a Navegação Oceânica, a Navegação Aérea, a Mecânica de Satélites Artificiais, a Transmissão de Radio de Grande Alcance, o Cálculo de Trajetórias de Misseis Intercontinentais, o Cálculo do Aquecimento Solar em Arquitetura, entre outras áreas mais específicas.

3) No Ensino Médio não estudamos os triângulos esféricos. Você achou que é importante para a compreensão da trigonometria, estudar o contexto dos matemáticos da antigüidade?

[illegible] para [illegible]

Caso as semi-retas AO e OB coincidam, dizemos, por extensão, que elas determinam um ângulo nulo (que é a própria semi-reta) ou um ângulo de uma volta (que o próprio plano)



Arcos côngruos (ou congruentes)

Dois arcos são côngruos (ou congruentes) quando tem a mesma extremidade e diferem entre si apenas pelo número de voltas inteiras.

a) Se um arco mede α graus, a expressão geral dos arcos côngruos a ele é dada por $\alpha° + k \cdot 360°$, com $K \in Z$.
b) Se um arco mede α radianos, a expressão geral dos arcos côngruos a ele é dada por $\alpha + 2k\pi$, com $K \in Z$.

1) Um móvel partindo do ponto A, origem dos arcos, percorreu um arco de 1690°. Quantas voltas completas deu e em qual quadrante parou?

2) Um móvel partindo do ponto A, percorreu 900°. Quantas voltas completas ele deu e em qual quadrante parou?

Medidas em graus

Se dividirmos a circunferência em 360 arcos congruentes, cada um desses arcos será chamado arco de um grau (1°). O ângulo central correspondente será de 1° também.
Logo, a circunferência é um arco de 360° e o ângulo central correspondente de uma volta mede 360°.
Dividindo-se um arco de 1° em 60 arcos congruentes, cada um desses novos arcos é um arco de um minuto (1').
Da mesma forma, quando dividirmos um arco de 1' em 60 arcos congruentes, cada um desses novos arcos é um arco de um segundo (1").
Logo,
1° = 60', e
1 '= 60" .

Se um arco tiver x graus, y minutos e z segundos escrevemos x° y' z'.

Contexto histórico:

Ptolomeu notou que Menelau dividiu o círculo em 360 graus e o diâmetro em 120 partes e adotou o valor 3 para o π (pi), ou seja, 3 x 120= 360 . Estendeu a tabela de cordas de Hiparco usando a notação sexagesimal babilônica e ainda dividiu cada parte em 60 subpartes e cada uma destas últimas em sexagésimos.

Atividade 4: Conversão de medidas

a) Quantos graus possui um ângulo de 180 minutos? 3°
b) Quantos minutos tem 3600 segundos? 60
c) Transforme 22° 30' em segundos.

Radiano

O radiano (símbolo: rad) é definido como a medida de um ângulo central subtendido por um arco igual ao raio da circunferência que contém o arco.
Radiano (rad) é a unidade de medidas de ângulos do Sistema Internacional de Unidade.

Sistema	Unidade Fundamental	Amplitudes				
Sexagesimal	Grau	0	90º	180º	270º	360º
Circular	Radiano	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

a) Expresse em radianos:

60º = $180^\circ = \pi$; $60^\circ = \frac{\pi}{3}$

300º = $180 \; \pi$; $300 \; x$; $180x = 300\pi$; $x = \frac{300}{180}$; $x = \frac{5\pi}{3}$

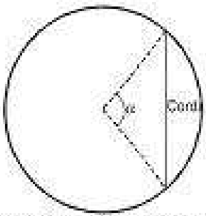
210º = $180 \; \pi$; $210 \; x$; $180x = 210\pi$; $x = \frac{210}{180} = \frac{7\pi}{6}$

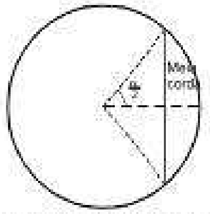
b) Expresse em graus:

$\frac{10\pi}{6}$ rad $10 \times 180 = \frac{1800}{6} = 300$ $\frac{\pi}{6}$ *rad* $\frac{180}{6} = 30$

Atividade 5: A trigonometria grega e indiana século IV d.C
Contexto histórico:

Durante muitos séculos a trigonometria grega e indiana, foram disputadas pelos matemáticos árabes. Os indianos proporcionaram cada vez mais o fortalecimento da trigonometria quando, nas aplicações da função cordas apresentada por Ptolomeu, que se baseava na relação funcional entre as cordas de um círculo e os arcos centrais que subentendem, acharam necessário dobrar antes de usá-los como argumento numa tabela de cordas, na qual o próprio arco original seja uma variável independente e a transformou em meia corda ou corda do arco metade, criando uma nova versão da tabela de seno. Outra característica da trigonometria indiana é que era de natureza aritmética enquanto a dos gregos era geométrica.





Observe a figura 1 que é uma representação da trigonometria grega, em seguida observe a figura 2 que se trata de uma representação da trigonometria indiana.
O que você consegue observar nas figuras? Aponte as semelhanças e as diferenças.

Atividade 6: Tabela trigonométrica
Dada a tabela trigonométrica para os ângulos de 0 a 90 graus. O que pode ser observado em relação aos valores de seno e cosseno?

Questões:

1) Quanto é o seno de 60º? Quanto é o cosseno de 30º?

O seno 60º é 0,86603 e o cosseno 0,86603

2) O seno de 30º é 0,50000. Por que o seno de 60º graus não é o dobro, mas tem valor de 0,86603 ?

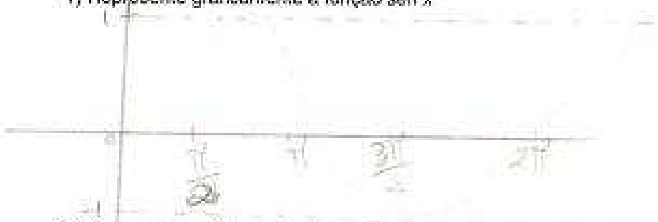
[illegible]

Atividade 7: Definindo complemento.

Atividade 9: Preencha a tabelas com o resumo da variação das funções seno, cosseno e tangente e os sinais das funções:

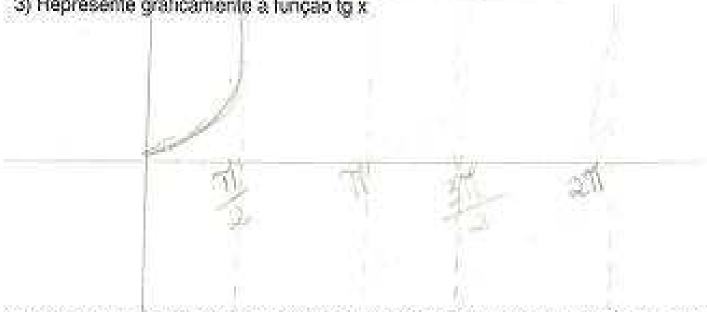
Atividade 10: Representação Gráfica das Funções Trigonométricas: SENO, COSSENO E TANGENTE

1) Represente graficamente a função sen x

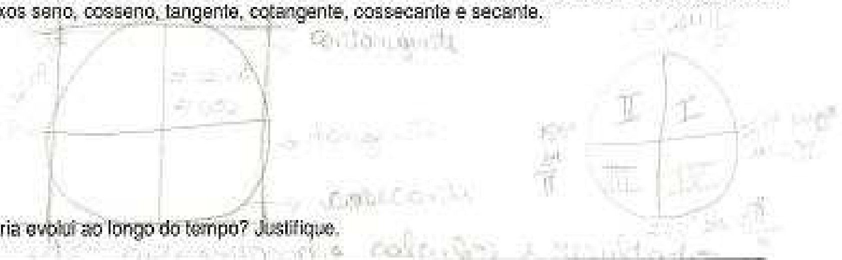


2) Represente graficamente a função cos x

3) Represente graficamente a função tg x



4) Represente graficamente o ciclo trigonométrico, colocando valores em graus e radianos, seus quadrantes, desenhe também os eixos seno, cosseno, tangente, cotangente, cossecante e secante.



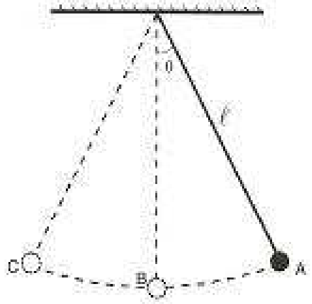
Para você a trigonometria evolui ao longo do tempo? Justifique.

A História da Matemática auxiliou para entender a necessidade de estudar trigonometria?

[illegible]

Atividade 11: Pêndulos

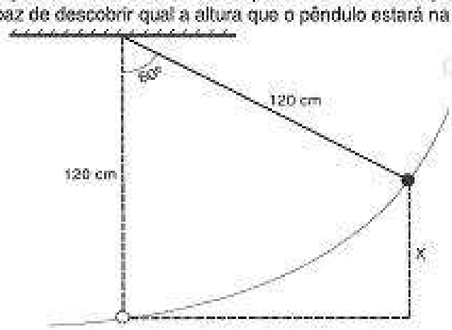
Contexto Histórico:
No século XVII e XVIII a medição precisa do tempo era essencial para a navegação. Um dos movimentos estudados em Dinâmica é do pêndulo simples.
Ele consiste num fio de comprimento ℓ tendo uma das extremidades presa a um ponto fixo (ponto O) e um peso (massa) preso na outra extremidade. O tempo gasto para que o corpúsculo pendurado vá de A até C e retorne de C até A é chamado de período do pêndulo (indica-se com a letra T) e expresso, normalmente, em segundos.



O cientista Galileu Galilei (1584-1642) foi quem fez o primeiro estudo experimental do movimento de um pêndulo. Christiaan Huygens (1629–1695) foi quem projetou o primeiro relógio de pêndulos, com a finalidade de solucionar um problema fundamental de navegação marítima, para isso estudando as oscilações de um pêndulo. Nos séculos XVII e XVIII as medições de latitudes eram muito precisas, enquanto as longitudes requeriam métodos confiáveis para se medir intervalos de tempo. O período do pêndulo depende da gravidade, uma das principais propriedades do pêndulo é a regularidade das suas oscilações. Por este motivo, os pêndulos eram usados em relógios. A massa do pêndulo não influencia no resultado do período, mas o comprimento sim, por isso é que os relógios de maior precisão possuem o pêndulo de maior comprimento.
Muitas situações cotidianas envolvem periodicidade. Por exemplo, os dias da semana tem período de 7 dias, as estações do ano, em linguagem matemática falamos em função periódica.
Muitos fenômenos naturais são periódicos: o nível de água das marés, a oscilação de um pêndulo, uma corrente alternada, o batimento cardíaco, a posição de moléculas de ar transmitindo notas musicais, dentre tantas outras.
A Lua atrai a Terra provocando os fenômenos das marés. O fenômeno é periódico, pois a maré sobe e abaixa em 12 hs. O período é de 12 hs. Dizemos que um ponto material descreve um movimento circular quando a trajetória é uma circunferência. O intervalo de tempo necessário para que um móvel dê uma volta completa é denominado período (T). O período dos pontos da Terra em seu movimento de rotação em torno de seu eixo é T= 24 hs, enquanto que o período da Terra ao redor do Sol é T=1 ano, aproximadamente 365 dias.

Exercícios:

Um pêndulo de 120 cm de comprimento em sua amplitude forma um ângulo de 60º com a vertical. Você seria capaz de descobrir qual a altura que o pêndulo estará na sua base horizontal?



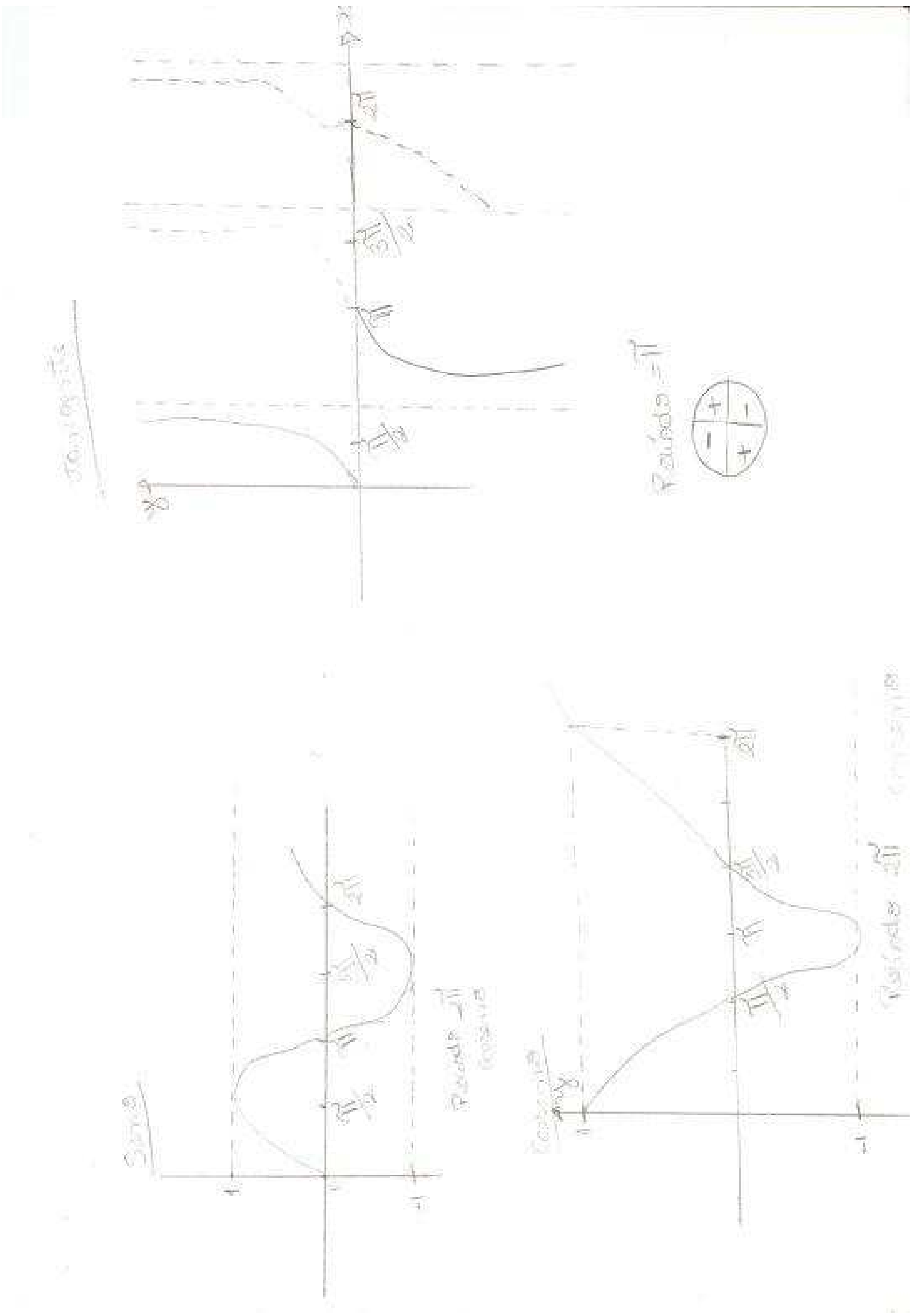
$\cos 60° = \frac{\text{cat. adj.}}{\text{hip}}$

$0{,}5 = \frac{120 - x}{120}$

$60 = 120 - x$

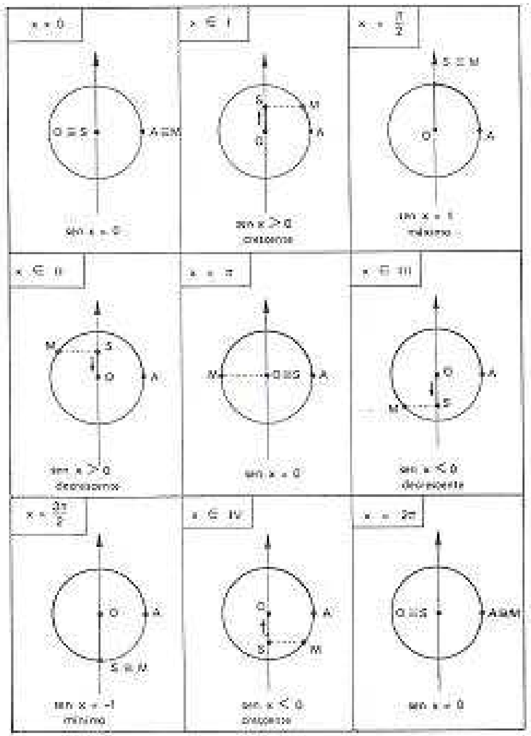
$x = 120 - 60$

$\boxed{x = 60\,cm}$



Variação da função seno:

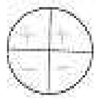
À medida que cresce o arco x, varia o correspondente sen x.



Resumo da variação do seno

x	0	I	$\frac{\pi}{2}$	II	π	III	$\frac{3\pi}{2}$	IV	2π
sen x	0	↗	1	↘	0	↘	−1	↗	0

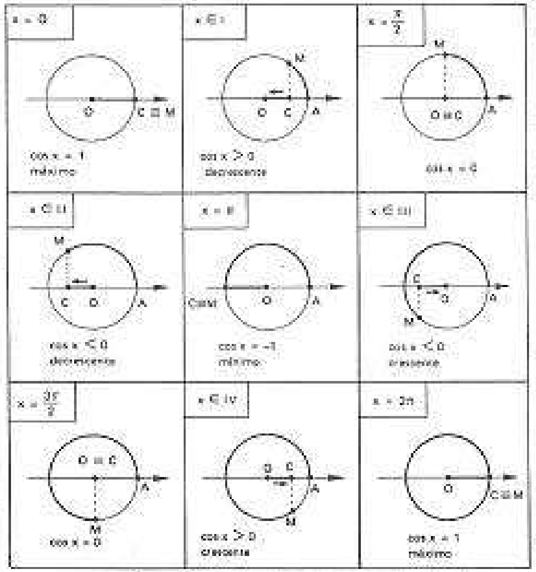
Resumo dos sinais do seno



EXERCÍCIOS

1. Encontre o valor de
   a) sen 450°
   b) sen 900°
   c) sen (−90°)

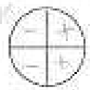
Variação da função cosseno:



Resumo da variação do cosseno

x	0	I	$\frac{\pi}{2}$	II	π	III	$\frac{3\pi}{2}$	IV	2π
cos x	1	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	1

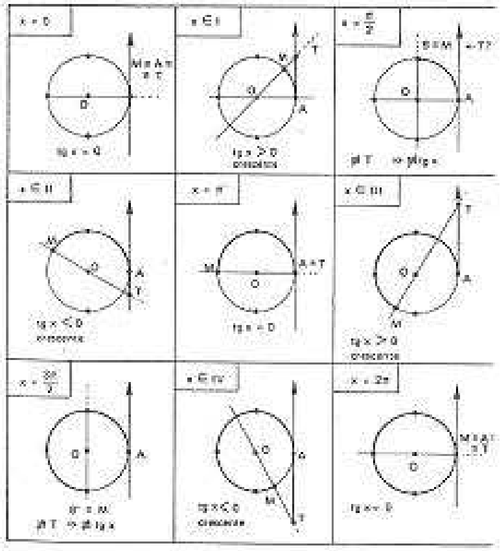
Resumo dos sinais do cosseno



EXERCÍCIOS

1. Encontre o valor de
   a) cos 900°;
   b) cos 420°;
   c) cos (−270°).

Variação da função tangente:

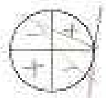


O conjunto imagem é todo o conjunto ℝ dos números reais.

Resumo da variação da tangente

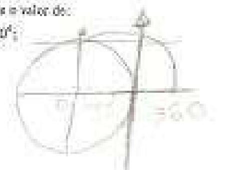
x	0	I	$\frac{\pi}{2}$	II	π	III	$\frac{3\pi}{2}$	IV	2π
tg x	0	↗	∄	↗	0	↗	∄	↗	0

Resumo dos sinais da tangente



EXERCÍCIOS

1. Encontre o valor de:
   a) tg 420°;



tg = 1,73

COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT- ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

ALUNO:_ ____________ Nº__ __ Turma 2ª mF

11) O que é uma tabela trigonométrica? Para que serve?

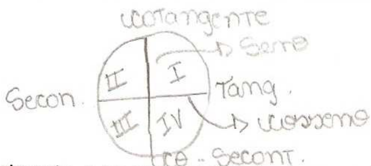
Os indios eles usavam a aritimética do trigonometria enquanto os gregos a geometria

na tabela tem Seno, cosseno e tangente e o seu valor.

12) A trigonometria do triângulo-retângulo para a trigonometria no ciclo trigonométrico evoluiu? Justifique sua resposta.

Sim. Pois a intenção é evoluir sempre.

13) Represente no ciclo trigonométrico, com os eixos do seno, cosseno, tangente, cotangente, co-secante e secante. Coloque os períodos.



14) Um pêndulo tem 15 cm de comprimento, e no seu movimento, suas posições extremas formam um ângulo de 60º. Qual o comprimento do arco que a extremidade do pêndulo descreve?

$l = \alpha \cdot r$

$l = 60° \cdot 15$

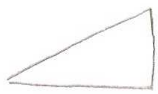
$l = \frac{\pi}{3} \cdot 15$

$l = \pi \cdot 5$

$l = 3{,}14 \cdot 5$

$l = 15{,}7$

15) Um cachorro está distante 100 m da base de um prédio e vê o ponto mais alto sob um ângulo de 20º em relação à horizontal. Qual é a altura do prédio?



$Tg\ 20° = \quad x = \frac{100}{100} \quad 10{,}36 = \frac{100}{100} \quad 100 = 36\ m$

16) Transforme:

a) 200º em minutos
b) 480 minutos em segundos
c) 2400'' em minutos

a → 200° = 60 × 200 = 12.000

b → 480' = 480 × 60 = 28.800

c → 2400'' = 2.400 ÷ 60 = 40

17) Expresse em radianos:
a) 60º
b) 220º

180° → π, 60° → x; 180 x = 60 π; $\frac{60}{180} = \frac{4\pi}{12}$

180 → π, 220 → x; 180 x = 220 π; $\frac{220}{180} = \frac{9\pi}{11}$

18) Expresse em graus:

a) $\frac{10\pi}{9}$ rad $\quad \frac{10 \cdot 180}{9} = \frac{1800}{9} = 200$

b) $\frac{\pi}{6}$ rad $\quad \frac{180}{6} = 30.$

19) Encontre o valor de:
a) cos 900º
b) sen 450º

a → cos 900° 0,00000

b → Seno 450° 0,70711

20) Qual é o período da função:

Seno?	Cosseno?	Tangente
0	1	0
1	0	∄
0	-1	0
-1	0	∄

COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT- ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO
ALUNO:_ __ Nº_ __ Turma 2º E

Avaliação de Matemática

1) Você considera que a matemática é importante? Justifique.
Sim, você pode calcular tamanho, distâncias e quantidades

2) Dos conteúdos matemáticos já estudados até hoje, qual você achou mais interessante aprender? Justifique sua resposta.
Radiciação, porque não senti dificuldade

3) Marque x nas afirmativas que você considera verdadeiras em relação à Matemática:

(x) Contribui para resolver problemas tanto na matemática como em outras disciplinas.
(x) Busca cada vez mais resultados exatos.
(x) Aplica-se a matemática para resolver problemas reais do dia-a-dia.
( ) A matemática quase não faz sentido para produzir novas descobertas.
(x) As fórmulas matemáticas tornam os cálculos mais simples.
(x) Os conteúdos que hoje estudamos podem ser úteis no futuro.
( ) Tudo seria mais fácil se não existisse a matemática.
(x) Mesmo usando cálculos matemáticos, a inexatidão é constante.
(x) A representação gráfica ajuda o aluno a compreender melhor os conceitos matemáticos.

4) Quando você pensa na trigonometria que termos tem a ver com esse conteúdo:

(x) seno	(x) cubo	(x) ângulos	(x) ciclo
(x) catetos	(x) adjacente	( ) funções	(x) quadrante
(x) perímetro	( ) Teorema de Pitágoras	( ) razão	(x) cateto oposto
(x) graus	( ) potência	( ) divisor	

5) Os cálculos da trigonometria servem para resolver que tipo de problemas?
Problemas relacionados à medidas

6) Que motivos você pensa que levaram os matemáticos da Antigüidade a estudar a trigonometria?
Para facilitar os cálculos no dia de fazer alguma construção

7) Você acha que é importante estudar a história da matemática para aprender melhor? Justifique.
Sim, para nos aprofundarmos sobre a origem das fórmulas

8) A trigonometria é um conteúdo que:
(x) tem a ver com os problemas reais
(x) pode ser aplicada
( ) explica vários fenômenos
(x) evolui ao longo da humanidade.
( ) foi estudada por vários povos e nações
(x) pode ser representada graficamente, aumentando a facilidade de compreensão.
( ) suas fórmulas evoluíram tornado o conteúdo mais simples do que no início.
( ) tornou-se cada vez mais usada em outros estudos devido a sua importância.

9) Das atividades realizadas, qual você achou mais interessante? Justifique
Radiciação porque achei fácil

10) Para você a matemática possui um valor que a torna importante nos estudos? Justifique
Sim, porque é uma coisa que está presente no nosso dia-a-dia.

COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT- ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

ALUNO: ______________ Nº ___ Turma 2º E

Avaliação de Matemática

1) Você considera que a matemática é importante? Justifique.

Sim. Porque com ela nós entendemos melhor o mundo e nossa volta. Sem ela não [illegible] o mundo de nosso cotidiano.

2) Dos conteúdos matemáticos já estudados até hoje, qual você achou mais interessante aprender? Justifique sua resposta.

Trigonometria porque é um conteúdo muito importante na matemática, apesar de ser difícil.

3) Marque x nas afirmativas que você considera verdadeiras em relação à Matemática:

(X) Contribui para resolver problemas tanto na matemática como em outras disciplinas.
(X) Busca cada vez mais resultados exatos.
(X) Aplica-se a matemática para resolver problemas reais do dia-a-dia.
( ) A matemática quase não faz sentido para produzir novas descobertas.
(X) As fórmulas matemáticas tornam os cálculos mais simples.
(X) Os conteúdos que hoje estudamos podem ser úteis no futuro.
( ) Tudo seria mais fácil se não existisse a matemática.
( ) Mesmo usando cálculos matemáticos, a inexatidão é constante.
(X) A representação gráfica ajuda o aluno a compreender melhor os conceitos matemáticos.

4) Quando você pensa na trigonometria que termos tem a ver com esse conteúdo:

(X) seno	( ) cubo	(X) ângulos	( ) ciclo
(X) catetos	(X) adjacente	( ) funções	( ) quadrante
( ) perímetro	( ) Teorema de Pitágoras	( ) razão	(X) cateto oposto
(X) graus	( ) potência	( ) divisor	

5) Os cálculos da trigonometria servem para resolver que tipo de problemas?

problemas de distância, por exemplo medir uma pessoa até daquele prédio

6) Que motivos você pensa que levaram os matemáticos da Antigüidade a estudar a trigonometria?

Para melhor compreensão dos cálculos

7) Você acha que é importante estudar a história da matemática para aprender melhor? Justifique.

Sim. Porque ela mostra muitas coisas e sempre vem sido vista "nova" que a matemática em decorrer ao longo dos séculos

8) A trigonometria é um conteúdo que:

(X) tem a ver com os problemas reais
(X) pode ser aplicada
(X) explica vários fenômenos
(X) evolui ao longo da humanidade.
(X) foi estudada por vários povos e nações
(X) pode ser representada graficamente, aumentando a facilidade de compreensão.
(X) suas fórmulas evoluíram tornado o conteúdo mais simples do que no início.
(X) tornou-se cada vez mais usada em outros estudos devido a sua importância.

9) Das atividades realizadas, qual você achou mais interessante? Justifique

As razões trigonométricas de distâncias inacessíveis. Porque [illegible] para muito [illegible] a humanidade de [illegible] a história.

10) Para você a matemática possui um valor que a torna importante nos estudos? Justifique

Sim. Porque sem ela ninguém poderia fazer cálculos, e que é muito importante em nossas vidas.

COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT- ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

ALUNO:____________________ Nº_____ Turma 2ºMF

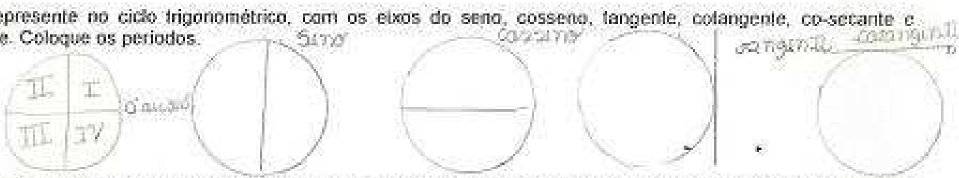
11) O que é uma tabela trigonométrica? Para que serve?

A tabela trigonométrica serve para descobrirmos os valores dos graus do cosseno, tangente e seno. É uma escala de valores.

12) A trigonometria do triângulo-retângulo para a trigonometria no ciclo trigonométrico evoluiu? Justifique sua resposta.

Sim

13) Represente no ciclo trigonométrico, com os eixos do seno, cosseno, tangente, cotangente, co-secante e secante. Coloque os períodos.



14) Um pêndulo tem 15 cm de comprimento, e no seu movimento, suas posições extremas formam um ângulo de 60°. Qual o comprimento do arco que a extremidade do pêndulo descreve?

$\alpha = 60° = \pi/3$ $\quad l = \frac{\pi}{3} \cdot 15 \quad l = 15{,}7\ cm$

$r = 15$ $\quad l = 5 \cdot 3{,}14$

15) Um cachorro está distante 100 m da base de um prédio e vê o ponto mais alto sob um ângulo de 20° em relação à horizontal. Qual é a altura do prédio?

$tg\ 20° = \frac{x}{100}$ $\quad 0{,}36 = \frac{x}{100}$ $\quad x = 0{,}36 \cdot 100$ $\quad x = 36\ m$

16) Transforme:

a) 200º em minutos
b) 480 minutos em segundos
c) 2400'' em minutos

a) $200 \times 60 = 12000'$ $\quad$ b) $480 \times 60 = 28800''$ $\quad$ c) $2400 \div 60 = 40'$

17) Expresse em radianos:
a) 60°
b) 220°

$180° = \pi$ / $60° = x$ / $180°x = 60\pi$ / $x = \frac{60\pi}{180}$ $= \frac{1\pi}{3}$

$180° = \pi$ / $220° = x$ / $180°x = 220\pi$ / $x = \frac{220\pi}{180}$ $= \frac{11\pi}{9}$

18) Expresse em graus:

a) $\frac{10\pi}{9}$ rad $\quad \frac{10 \cdot 180}{9} = \frac{1800}{9} = 200$ $\quad$ b) $\frac{\pi}{6}$ rad $\quad \frac{180}{6} = 30°$

19) Encontre o valor de:
a) cos 900º $\quad -1$
b) sen 450º $\quad 1$

20) Qual é o período da função:

Seno?	Cosseno?	Tangente
0	1	0
1	0	~~1~~
0	-1	0
-1	0	~~1~~

COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT- ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO
ALUNO: ______________ Nº__ __ Turma 2ª DF

Avaliação de Matemática

1) Você considera que a matemática é importante? Justifique.
Sim, porque está em todo lugar.

2) Dos conteúdos matemáticos já estudados até hoje, qual você achou mais interessante aprender? Justifique sua resposta.
Regra de três.

3) Marque x nas afirmativas que você considera verdadeiras em relação à Matemática:

(x) Contribui para resolver problemas tanto na matemática como em outras disciplinas.
( ) Busca cada vez mais resultados exatos.
(x) Aplica-se a matemática para resolver problemas reais do dia-a-dia.
( ) A matemática quase não faz sentido para produzir novas descobertas.
(x) As fórmulas matemáticas tornam os cálculos mais simples.
(x) Os conteúdos que hoje estudamos podem ser úteis no futuro.
( ) Tudo seria mais fácil se não existisse a matemática.
(x) Mesmo usando cálculos matemáticos, a inexatidão é constante.
(x) A representação gráfica ajuda o aluno a compreender melhor os conceitos matemáticos.

4) Quando você pensa na trigonometria que termos tem a ver com esse conteúdo:

(x) seno	( ) cubo	(x) ângulos	( ) ciclo
(x) catetos	(x) adjacente	( ) funções	(x) quadrante
(x) perímetro	( ) Teorema de Pitágoras	( ) razão	(x) cateto oposto
(x) graus	( ) potência	( ) divisor	

5) Os cálculos da trigonometria servem para resolver que tipo de problemas?
Cálculos trigonométricos.

6) Que motivos você pensa que levaram os matemáticos da Antigüidade a estudar a trigonometria?
Queriam saber a medida dos [illegible] para poder construírem [illegible].

7) Você acha que é importante estudar a história da matemática para aprender melhor? Justifique.
Sim, é interessante.

8) A trigonometria é um conteúdo que:
(x) tem a ver com os problemas reais
(x) pode ser aplicada
(x) explica vários fenômenos
(x) evolui ao longo da humanidade.
(x) foi estudada por vários povos e nações
(x) pode ser representada graficamente, aumentando a facilidade de compreensão.
(x) suas fórmulas evoluíram tornado o conteúdo mais simples do que no início.
(x) tornou-se cada vez mais usada em outros estudos devido a sua importância.

9) Das atividades realizadas, qual você achou mais interessante? Justifique
Seno, cosseno e tangente, [illegible].

10) Para você a matemática possui um valor que a torna importante nos estudos? Justifique
Claro, é importante para muitas coisas.

COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT- ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO
ALUNO:_ __________ Nº_ _ Turma 2E

Avaliação de Matemática

1) Você considera que a matemática é importante? Justifique.
Sim. Porque usamos diariamente para pagar contas e muitas outras coisas.

2) Dos conteúdos matemáticos já estudados até hoje, qual você achou mais interessante aprender? Justifique sua resposta.
Regras de Cramer

3) Marque x nas afirmativas que você considera verdadeiras em relação à Matemática:

(x) Contribui para resolver problemas tanto na matemática como em outras disciplinas.
(   ) Busca cada vez mais resultados exatos.
(x) Aplica-se a matemática para resolver problemas reais do dia-a-dia.
(   ) A matemática quase não faz sentido para produzir novas descobertas.
(x) As fórmulas matemáticas tornam os cálculos mais simples.
(x) Os conteúdos que hoje estudamos podem ser úteis no futuro.
(   ) Tudo seria mais fácil se não existisse a matemática.
(   ) Mesmo usando cálculos matemáticos, a inexatidão é constante.
(x) A representação gráfica ajuda o aluno a compreender melhor os conceitos matemáticos.

4) Quando você pensa na trigonometria que termos tem a ver com esse conteúdo:

(x) seno	( ) cubo	(x) ângulos	( ) ciclo
(x) catetos	(x) adjacente	( ) funções	(x) quadrante
(x) perímetro	( ) Teorema de Pitágoras	( ) razão	(x) cateto oposto
(x) graus	( ) potência	( ) divisor	

5) Os cálculos da trigonometria servem para resolver que tipo de problemas?
Calculos astronomicos, medir e achar tg cos, sen.

6) Que motivos você pensa que levaram os matemáticos da Antigüidade a estudar a trigonometria?
Para determinar tamanhos que não era correto.

7) Você acha que é importante estudar a história da matemática para aprender melhor? Justifique.
Sim. Para saber sua ~~[illegible]~~ historia e o ato porque a matemática.

8) A trigonometria é um conteúdo que:
(x) tem a ver com os problemas reais
(x) pode ser aplicada
(x) explica vários fenômenos
(x) evolui ao longo da humanidade.
(x) foi estudada por vários povos e nações
(x) pode ser representada graficamente, aumentando a facilidade de compreensão.
(x) suas fórmulas evoluíram tornado o conteúdo mais simples do que no início.
(x) tornou-se cada vez mais usada em outros estudos devido a sua importância.

9) Das atividades realizadas, qual você achou mais interessante? Justifique
Achar a Variação da função seno, porque achei interessante.

10) Para você a matemática possui um valor que a torna importante nos estudos? Justifique
Sim, a matemática é importante para todos.

COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT
ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

ALUNO: ______________________ N°: ___ Turma 2ª F

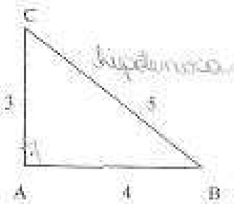
TRABALHO DE MATEMÁTICA (valor: 20)

1) Uma criança está distante 80 m da base de uma torre e vê o ponto mais alto sob um ângulo de 16° em relação à horizontal. Qual é a altura da torre?

tang 16° = co/ca 0,28 = co/80 co = 80 . 0,28 = 22,4

2) Dado o triângulo-retângulo:

a) Nomeie os lados
b) Calcule sen, cos, tg



cateto oposto

cateto adjacente

sen = co/hip ⇒ 3/5 ⇒ 0,6
cos = ca/hip ⇒ 4/5 ⇒ 0,8
tang = co/ca ⇒ 3/4 ⇒ 0,75

3) Transforme:

a) 300° em minutos 30 . 60 = 1800'

b) 480' em segundos 480 . 60 = 28.800''

c) 2400'' em minutos 2400 ÷ 60 = 40'

4) Expresse em radianos:
a) 60° 180 – π 60 π = 180 x 60 = π/3
b) 150° 180 – π b) 150° = 180 – π 150 – x 180x = 150π x = 150π/180 = 5π/6

5) Expresse em graus:

a) $\frac{10\pi}{9}$ rad b) $\frac{\pi}{9}$ rad

10 . 180/9 ⇒ 1800/9 ⇒ 200° 180/9 ⇒ 20°

6) Desenhe os quadrantes da circunferência, colocando os valores em graus e radianos.

Sistema	Unidade Fundamental	Amplitudes				
Sexagesimal	Grau	0	90º	180º	270º	360º
Circular	Radiano	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

a) Expresse em radianos:

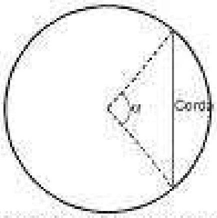
60º = $180 = \pi$, $60 = x$; $180x = 60\pi$; $x = \frac{60\pi}{180}$; $x = \frac{\pi}{3}$ 300º = $180 = \pi$, $300 = x$; $x = \frac{300\pi}{180} = \frac{5\pi}{3}$ 210º = $180 = \pi$, $210 = x$; $x = \frac{210\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$

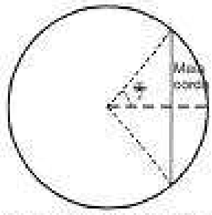
b) Expresse em graus:

$\frac{10\pi}{6}$ rad $10 \cdot 180 = \frac{1800}{6}$ 300 graus $\frac{\pi}{6}$ rad $\frac{180}{6}$ 30º graus

Atividade 5: A trigonometria grega e indiana século IV d.C
Contexto histórico:

Durante muitos séculos a trigonometria grega e indiana, foram disputadas pelos matemáticos árabes. Os indianos proporcionaram cada vez mais o fortalecimento da trigonometria quando, nas aplicações da função cordas apresentada por Ptolomeu, que se baseava na relação funcional entre as cordas de um círculo e os arcos centrais que subentendem, acharam necessário dobrar antes de usá-los como argumento numa tabela de cordas, na qual o próprio arco original seja uma variável independente e a transformou em meia corda ou corda do arco metade, criando uma nova versão da tabela de seno. Outra característica da trigonometria indiana é que era de natureza aritmética enquanto a dos gregos era geométrica.





Observe a figura 1 que é uma representação da trigonometria grega, em seguida observe a figura 2 que se trata de uma representação da trigonometria indiana.
O que você consegue observar nas figuras? Aponte as semelhanças e as diferenças.

Na segunda figura tem o triângulo retângulo assim é possível calcular o seno, cosseno e tangente.

Atividade 6: Tabela trigonométrica
Dada a tabela trigonométrica para os ângulos de 0 a 90 graus. O que pode ser observado em relação aos valores de seno e cosseno?
Que o valor do seno é o mesmo valor que do cosseno que falta para chegar a 90º

Questões:

1) Quanto é o seno de 60º? Quanto é o cosseno de 30º?
O seno de 60 é 0,86603 e o cosseno de 30º é 0,86603

2) O seno de 30º é 0,50000. Por que o seno de 60º graus não é o dobro, mas tem valor de 0,86603 ?
Porque o valor não aumenta na mesma proporção que os graus.

Atividade 7: Definindo complemento.

COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT- ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO
ALUNO:_ ____________________ Nº_____ Turma 2ª [illegible]

Avaliação de Matemática

1) Você considera que a matemática é importante? Justifique.
Sim, Porque sem a matemática ajuda a [illegible] melhor.

2) Dos conteúdos matemáticos já estudados até hoje, qual você achou mais interessante aprender? Justifique sua resposta.
Trigonometria radiano, é na minha opinião é fácil.

3) Marque x nas afirmativas que você considera verdadeiras em relação à Matemática:

(X) Contribui para resolver problemas tanto na matemática como em outras disciplinas.
(X) Busca cada vez mais resultados exatos.
(X) Aplica-se a matemática para resolver problemas reais do dia-a-dia.
( ) A matemática quase não faz sentido para produzir novas descobertas.
( ) As fórmulas matemáticas tornam os cálculos mais simples.
(X) Os conteúdos que hoje estudamos podem ser úteis no futuro.
( ) Tudo seria mais fácil se não existisse a matemática.
( ) Mesmo usando cálculos matemáticos, a inexatidão é constante.
(X) A representação gráfica ajuda o aluno a compreender melhor os conceitos matemáticos.

4) Quando você pensa na trigonometria que termos tem a ver com esse conteúdo:

(X) seno	( ) cubo	(X) ângulos	( ) ciclo
(X) catetos	(X) adjacente	( ) funções	(X) quadrante
( ) perímetro	( ) Teorema de Pitágoras	( ) razão	(X) cateto oposto
(X) graus	( ) potência	( ) divisor	

5) Os cálculos da trigonometria servem para resolver que tipo de problemas?
problemas que envolvem [illegible]

6) Que motivos você pensa que levaram os matemáticos da Antigüidade a estudar a trigonometria?

7) Você acha que é importante estudar a história da matemática para aprender melhor? Justifique.
Sim. Para ajudar compreender melhor e porque de tantas causas e tantos [illegible] na matemática.

8) A trigonometria é um conteúdo que:
(X) tem a ver com os problemas reais
(X) pode ser aplicada
( ) explica vários fenômenos
(X) evolui ao longo da humanidade.
( ) foi estudada por vários povos e nações
(X) pode ser representada graficamente, aumentando a facilidade de compreensão.
( ) suas fórmulas evoluíram tornado o conteúdo mais simples do que no início.
( ) tornou-se cada vez mais usada em outros estudos devido a sua importância.

9) Das atividades realizadas, qual você achou mais interessante? Justifique
Radiano. Porque é a parte fácil da trigonometria

10) Para você a matemática possui um valor que a torna importante nos estudos? Justifique
Não gosto muito de matemática mas na verdade a matemática é importante porque ajuda [illegible] melhor, [illegible] é meu ponto de vista sobre a matemática.

COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT- ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

ALUNO: ____________________ Nº 02 Turma 2º M 7

Avaliação de Matemática

1) Você considera que a matemática é importante? Justifique.

Sim. Pois ela nos possibilita fazer muitos cálculos

2) Dos conteúdos matemáticos já estudados até hoje, qual você achou mais interessante aprender? Justifique sua resposta.

trigonometria (parte dos radianos).

3) Marque x nas afirmativas que você considera verdadeiras em relação à Matemática:

(x) Contribui para resolver problemas tanto na matemática como em outras disciplinas.
( ) Busca cada vez mais resultados exatos.
(x) Aplica-se a matemática para resolver problemas reais do dia-a-dia.
( ) A matemática quase não faz sentido para produzir novas descobertas.
( ) As fórmulas matemáticas tornam os cálculos mais simples.
( ) Os conteúdos que hoje estudamos podem ser úteis no futuro.
( ) Tudo seria mais fácil se não existisse a matemática.
( ) Mesmo usando cálculos matemáticos, a inexatidão é constante.
(x) A representação gráfica ajuda o aluno a compreender melhor os conceitos matemáticos.

4) Quando você pensa na trigonometria que termos tem a ver com esse conteúdo:

(x) seno	( ) cubo	(x) ângulos	( ) ciclo
(x) catetos	(x) adjacente	( ) funções	(x) quadrante
( ) perímetro	( ) Teorema de Pitágoras	( ) razão	(x) cateto oposto
(x) graus	( ) potência	( ) divisor	

5) Os cálculos da trigonometria servem para resolver que tipo de problemas?

problemas que envolvem trigonometria

6) Que motivos você pensa que levaram os matemáticos da Antigüidade a estudar a trigonometria?

A [illegible] medir "algo"

7) Você acha que é importante estudar a história da matemática para aprender melhor? Justifique.

Sim, pois podemos aprender os motivos que levaram ao [illegible]

8) A trigonometria é um conteúdo que:
( ) tem a ver com os problemas reais
( ) pode ser aplicada
( ) explica vários fenômenos
( ) evolui ao longo da humanidade.
(x) foi estudada por vários povos e nações
(x) pode ser representada graficamente, aumentando a facilidade de compreensão.
(x) suas fórmulas evoluíram tornado o conteúdo mais simples do que no início.
( ) tornou-se cada vez mais usada em outros estudos devido a sua importância.

9) Das atividades realizadas, qual você achou mais interessante? Justifique

[illegible] não sei explicar

10) Para você a matemática possui um valor que a torna importante nos estudos? Justifique

Sim. não só ela mas tudo que se refere à matemática

COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT- ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO
ALUNO:_________________________ Nº_____ Turma_____

Avaliação de Matemática

1) Você considera que a matemática é importante? Justifique.

2) Dos conteúdos matemáticos já estudados até hoje, qual você achou mais interessante aprender? Justifique sua resposta.

3) Marque x nas afirmativas que você considera verdadeiras em relação à Matemática:

(x) Contribui para resolver problemas tanto na matemática como em outras disciplinas.
(x) Busca cada vez mais resultados exatos.
(x) Aplica-se a matemática para resolver problemas reais do dia-a-dia.
( ) A matemática quase não faz sentido para produzir novas descobertas.
(x) As fórmulas matemáticas tornam os cálculos mais simples.
(x) Os conteúdos que hoje estudamos podem ser úteis no futuro.
( ) Tudo seria mais fácil se não existisse a matemática.
( ) Mesmo usando cálculos matemáticos, a inexatidão é constante.
(x) A representação gráfica ajuda o aluno a compreender melhor os conceitos matemáticos.

4) Quando você pensa na trigonometria que termos tem a ver com esse conteúdo:

(x) seno	( ) cubo	(x) ângulos	( ) ciclo
(x) catetos	(x) adjacente	(x) funções	(x) quadrante
( ) perímetro	( ) Teorema de Pitágoras	( ) razão	(x) cateto oposto
(x) graus	( ) potência	( ) divisor	

5) Os cálculos da trigonometria servem para resolver que tipo de problemas?

6) Que motivos você pensa que levaram os matemáticos da Antigüidade a estudar a trigonometria?

7) Você acha que é importante estudar a história da matemática para aprender melhor? Justifique.

8) A trigonometria é um conteúdo que:
(x) tem a ver com os problemas reais
( ) pode ser aplicada
(x) explica vários fenômenos
( ) evolui ao longo da humanidade.
(x) foi estudada por vários povos e nações
(x) pode ser representada graficamente, aumentando a facilidade de compreensão.
(x) suas fórmulas evoluíram tornado o conteúdo mais simples do que no início.
(x) tornou-se cada vez mais usada em outros estudos devido a sua importância.

9) Das atividades realizadas, qual você achou mais interessante? Justifique

10) Para você a matemática possui um valor que a torna importante nos estudos? Justifique

COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT
ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

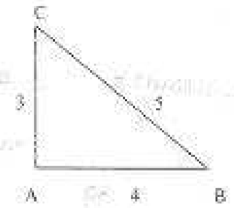
ALUNO:____________________ Nº______ Turma 2ºMF

TRABALHO DE MATEMÁTICA (valor: 20)

1) Uma criança está distante 80 m da base de uma torre e vê o ponto mais alto sob um ângulo de 16º em relação à horizontal. Qual é a altura da torre?

2) Dado o triângulo-retângulo:

a) Nomeie os lados
b) Calcule sen, cos, tg



3) Transforme:

a) 300º em minutos

b) 480' em segundos

c) 2400'' em minutos

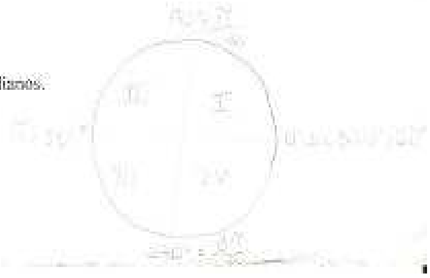
4) Expresse em radianos:
a) 60º
b) 150º

5) Expresse em graus:

a) $\frac{13\pi}{9}$ rad

b) $\frac{\pi}{9}$ rad

6) Desenhe os quadrantes da circunferência, colocando os valores em graus e radianos.



COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT- ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO
ALUNO:_ ____________________ Nº_ _ Turma 2ºF

Avaliação de Matemática

1) Você considera que a matemática é importante? Justifique.
Sim, pois é importante para resolver problemas do cotidiano tornar calculo mais simples

2) Dos conteúdos matemáticos já estudados até hoje, qual você achou mais interessante aprender? Justifique sua resposta.
método de Gauss

3) Marque x nas afirmativas que você considera verdadeiras em relação à Matemática:

(x) Contribui para resolver problemas tanto na matemática como em outras disciplinas.
( ) Busca cada vez mais resultados exatos.
(x) Aplica-se a matemática para resolver problemas reais do dia-a-dia.
( ) A matemática quase não faz sentido para produzir novas descobertas.
(x) As fórmulas matemáticas tornam os cálculos mais simples.
( ) Os conteúdos que hoje estudamos podem ser úteis no futuro.
( ) Tudo seria mais fácil se não existisse a matemática.
( ) Mesmo usando cálculos matemáticos, a inexatidão é constante.
(x) A representação gráfica ajuda o aluno a compreender melhor os conceitos matemáticos.

4) Quando você pensa na trigonometria que termos tem a ver com esse conteúdo:

(x) seno	( ) cubo	(x) ângulos	( ) ciclo
(x) catetos	(x) adjacente	( ) funções	( ) quadrante
( ) perímetro	( ) Teorema de Pitágoras	( ) razão	(x) cateto oposto
(x) graus	( ) potência	( ) divisor	

5) Os cálculos da trigonometria servem para resolver que tipo de problemas?
Para resolver calculos astronomicos

6) Que motivos você pensa que levaram os matemáticos da Antigüidade a estudar a trigonometria?
Para facilitar os calculos de outras coisas

7) Você acha que é importante estudar a história da matemática para aprender melhor? Justifique.
Sim para entender melhor o que estamos aprendendo

8) A trigonometria é um conteúdo que:
(x) tem a ver com os problemas reais
(x) pode ser aplicada
( ) explica vários fenômenos
( ) evolui ao longo da humanidade.
( ) foi estudada por vários povos e nações
(x) pode ser representada graficamente, aumentando a facilidade de compreensão.
( ) suas fórmulas evoluíram tornado o conteúdo mais simples do que no início.
( ) tornou-se cada vez mais usada em outros estudos devido a sua importância.

9) Das atividades realizadas, qual você achou mais interessante? Justifique
a do CD pois podemos pratica

10) Para você a matemática possui um valor que a torna importante nos estudos? Justifique
Sim mas como eu não gosto de exatas, não gosto de matemática

Colégio Estadual MARCELINO CHAMPAGNAT Ens. Fund. E Médio

Aluno(a) ______ nº. série 2ºmF Data 19/10/07

Questionário

1) Você considera que a matemática é importante? Justifique.

DEPENDE, SE VOCÊ FOR QUERER SER UM ARQUITETOR OU UM ENGENHEIRO, MAS SE O INDIVIDUO FOR QUERER SER OUTRAS COISAS NÃO É MUITO IMPORTANTE.

2) Dos conteúdos matemáticos já estudados até hoje, qual você achou mais interessante aprender? Justifique sua resposta.

Matriz, E REGRA de CRAMER.

3) Marque x nas afirmativas que você considera verdadeiras em relação à Matemática.

(x) Contribui para resolver problemas tanto na matemática como em outras disciplinas.
(   ) Busca cada vez mais resultados exatos.
(   ) Aplica-se a matemática para resolver problemas reais do dia-a-dia.
(   ) A matemática quase não faz sentido para produzir novas descobertas.
(x) As fórmulas matemáticas tornam os cálculos mais simples.
(   ) Os conteúdos que hoje estudamos podem ser úteis no futuro.
(   ) Tudo seria mais fácil se não existisse a matemática.
(   ) Mesmo usando cálculos matemáticos, a inexatidão é constante.
(x) A representação gráfica ajuda o aluno a compreender melhor os conceitos matemáticos.

4) O assunto de trigonometria faz parte dos conteúdos da 8ª série. Você estudou trigonometria nessa série? Quais foram os principais tópicos estudados?

NÃO!

5) Quando você pensa na trigonometria que termos tem a ver com esse conteúdo:

?

( ) seno	( ) cubo	( ) ângulos
( ) catetos	( ) adjacente	( ) números complexos
( ) perímetro	( ) Teorema de Pitágoras	( ) razão
( ) graus	( ) potência	( ) divisor

6) Os cálculos da trigonometria servem para resolver que tipo de problemas?

?

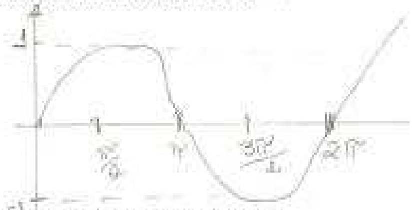
7) Que motivos você pensa que levaram os matemáticos da Antiguidade a estudar a trigonometria?

?

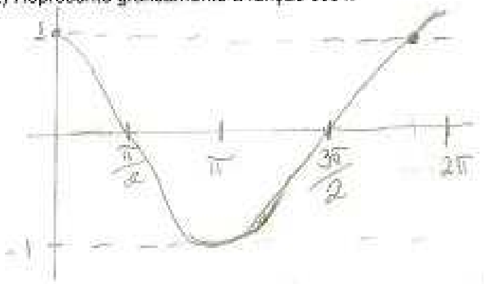
Atividade 9: Preencha a tabelas com o resumo da variação das funções seno, cosseno e tangente e os sinais das funções:

Atividade 10: Representação Gráfica das Funções Trigonométricas: SENO, COSSENO E TANGENTE

1) Represente graficamente a função sen x

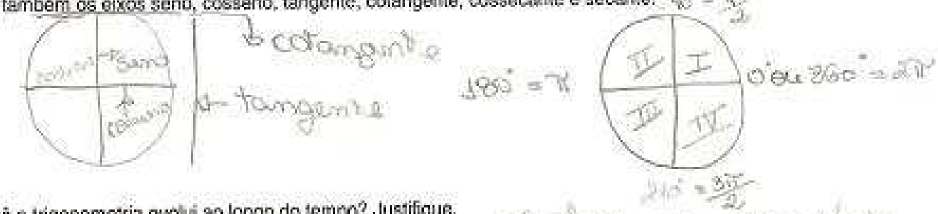


2) Represente graficamente a função cos x



3) Represente graficamente a função tg x

4) Represente graficamente o ciclo trigonométrico, colocando valores em graus e radianos, seus quadrantes, desenhe também os eixos seno, cosseno, tangente, cotangente, cossecante e secante.



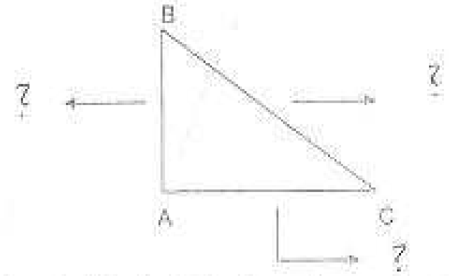
Para você a trigonometria evolui ao longo do tempo? Justifique.

Sim, pois vem aprimorando cálculos e resultado cada vez mais preciso

8) Você acha que é importante estudar a história da matemática para aprender melhor? Justifique.

Sim, porque com a história ajuda a lembrar melhor.

9) Nomeie os lados do triângulo retângulo e coloque o símbolo do ângulo reto:



10) Um triângulo retângulo é triângulo que tem um ângulo de 90° graus.

11) No triângulo retângulo, $\overline{BC}$ é a ____________, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são os ____________.

12) O lado oposto ao ângulo agudo é chamado de ____________, e o cateto que está sobre um dos lados desse ângulo chama-se ____________

13) Resolva os problemas dados os seguintes valores:

sen 30° = 0,50000	cos 30° = 0,86603	tan 30° = 0,57735
sen 80° = 0,98481	cos 80° = 0,17365	tan 80° = 5,67128

a) Empinando uma pipa, Renato já soltou 200 m de linha. Sabendo que a linha forma um ângulo de 80° com a horizontal, calcule a altura que a pipa se encontra.

?

b) O piloto de um avião começou a acionar o sistema de aterrissagem à altura de 600 m a direção da linha de rumo do avião, na descida para a pista, faz um ângulo de 30° com o solo.
- Represente esta atividade com uma figura.

?

- Calcule a distância percorrida pelo avião desde o início da aterrissagem até chegar ao solo.

?

Obs: Faz muito tempo que eu não estudo isso, não lembro mais.

COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT- ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO
ALUNO:_ Nº______ Turma 2º ano

Avaliação de Matemática

1) Você considera que a matemática é importante? Justifique.
Sim, você pode calcular, distância, tamanho.

2) Dos conteúdos matemáticos já estudados até hoje, qual você achou mais interessante aprender? Justifique sua resposta.
Báscara

3) Marque x nas afirmativas que você considera verdadeiras em relação à Matemática:

(x) Contribui para resolver problemas tanto na matemática como em outras disciplinas.
(   ) Busca cada vez mais resultados exatos.
(x) Aplica-se a matemática para resolver problemas reais do dia-a-dia.
(   ) A matemática quase não faz sentido para produzir novas descobertas.
(x) As fórmulas matemáticas tornam os cálculos mais simples.
(   ) Os conteúdos que hoje estudamos podem ser úteis no futuro.
(   ) Tudo seria mais fácil se não existisse a matemática.
(   ) Mesmo usando cálculos matemáticos, a inexatidão é constante.
(x) A representação gráfica ajuda o aluno a compreender melhor os conceitos matemáticos.

4) Quando você pensa na trigonometria que termos tem a ver com esse conteúdo:

(x) seno	( ) cubo	(x) ângulos	( ) ciclo
(x) catetos	(x) adjacente	( ) funções	(x) quadrante
( ) perímetro	( ) Teorema de Pitágoras	( ) razão	(x) cateto oposto
(x) graus	( ) potência	( ) divisor	

5) Os cálculos da trigonometria servem para resolver que tipo de problemas?
Problemas geométricos, distância, altura.

6) Que motivos você pensa que levaram os matemáticos da Antigüidade a estudar a trigonometria?
calcular as distância dos planetas e das estrelas.

7) Você acha que é importante estudar a história da matemática para aprender melhor? Justifique.
Sim, porque quando aprendemos da onde surgiu e para que foi inventado, nós entendemos melhor o conteúdo.

8) A trigonometria é um conteúdo que:
( ) tem a ver com os problemas reais
( ) pode ser aplicada
( ) explica vários fenômenos
( ) evolui ao longo da humanidade.
( ) foi estudada por vários povos e nações
(x) pode ser representada graficamente, aumentando a facilidade de compreensão.
( ) suas fórmulas evoluiram tornado o conteúdo mais simples do que no início.
( ) tornou-se cada vez mais usada em outros estudos devido a sua importância.

9) Das atividades realizadas, qual você achou mais interessante? Justifique
Seno, cosseno e tangente

10) Para você a matemática possui um valor que a torna importante nos estudos? Justifique
Sim, ajuda você a pensar mais rápido e diferente.

COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT- ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO
ALUNO:_ ____________________ Nº_ _Turma [illegible]

Avaliação de Matemática

1) Você considera que a matemática é importante? Justifique.
Sim, para o nosso dia-a-dia, resolver problemas.

2) Dos conteúdos matemáticos já estudados até hoje, qual você achou mais interessante aprender? Justifique sua resposta.
[illegible]

3) Marque x nas afirmativas que você considera verdadeiras em relação à Matemática:

(X) Contribui para resolver problemas tanto na matemática como em outras disciplinas.
(X) Busca cada vez mais resultados exatos.
(X) Aplica-se a matemática para resolver problemas reais do dia-a-dia.
( ) A matemática quase não faz sentido para produzir novas descobertas.
( ) As fórmulas matemáticas tornam os cálculos mais simples.
(X) Os conteúdos que hoje estudamos podem ser úteis no futuro.
( ) Tudo seria mais fácil se não existisse a matemática.
( ) Mesmo usando cálculos matemáticos, a inexatidão é constante.
(X) A representação gráfica ajuda o aluno a compreender melhor os conceitos matemáticos.

4) Quando você pensa na trigonometria que termos tem a ver com esse conteúdo:

(X) seno	(X) cubo	(X) ângulos	(X) ciclo
(X) catetos	(X) adjacente	( ) funções	(X) quadrante
( ) perímetro	(X) Teorema de Pitágoras	( ) razão	(X) cateto oposto
(X) graus	( ) potência	( ) divisor	

5) Os cálculos da trigonometria servem para resolver que tipo de problemas?
[illegible]

6) Que motivos você pensa que levaram os matemáticos da Antigüidade a estudar a trigonometria?
Para saber melhor a matemática, e para o futuro

7) Você acha que é importante estudar a história da matemática para aprender melhor? Justifique.
Sim, para termos uma noção de como o que estamos [illegible]

8) A trigonometria é um conteúdo que:
(X) tem a ver com os problemas reais
( ) pode ser aplicada
( ) explica vários fenômenos
(X) evolui ao longo da humanidade
( ) foi estudada por vários povos e nações
( ) pode ser representada graficamente, aumentando a facilidade de compreensão.
(X) suas fórmulas evoluíram tornado o conteúdo mais simples do que no início.
(X) tornou-se cada vez mais usada em outros estudos devido a sua importância.

9) Das atividades realizadas, qual você achou mais interessante? Justifique
[illegible]

10) Para você a matemática possui um valor que a torna importante nos estudos? Justifique
Sim, para o raciocínio melhor.

Colégio Estadual Marcelino Champagnat Ens. Fund. E Médio

Aluno(a) ____________ nº___ série 1ºC Data 19/10/07

Questionário

1) Você considera que a matemática é importante? Justifique.

Sim. Sem just.

2) Dos conteúdos matemáticos já estudados até hoje, qual você achou mais interessante aprender? Justifique sua resposta.

Determinante

3) Marque x nas afirmativas que você considera verdadeiras em relação à Matemática:

(x) Contribui para resolver problemas tanto na matemática como em outras disciplinas.
(   ) Busca cada vez mais resultados exatos.
(   ) Aplica-se a matemática para resolver problemas reais do dia-a-dia.
(   ) A matemática quase não faz sentido para produzir novas descobertas.
(   ) As fórmulas matemáticas tornam os cálculos mais simples.
(x) Os conteúdos que hoje estudamos podem ser úteis no futuro.
(   ) Tudo seria mais fácil se não existisse a matemática.
(x) Mesmo usando cálculos matemáticos, a inexatidão é constante.
(   ) A representação gráfica ajuda o aluno a compreender melhor os conceitos matemáticos.

4) O assunto de trigonometria faz parte dos conteúdos da 8ª série. Você estudou trigonometria nessa série? Quais foram os principais tópicos estudados?

Não lembro.

5) Quando você pensa na trigonometria que termos tem a ver com esse conteúdo:

( ) seno	( ) cubo	(x) ângulos
(x) catetos	(x) adjacente	( ) números complexos
( ) perímetro	(x) Teorema de Pitágoras	( ) razão
(x) graus	( ) potência	( ) divisor

6) Os cálculos da trigonometria servem para resolver que tipo de problemas?

Algo relacionado com matriz e determinante ?

7) Que motivos você pensa que levaram os matemáticos da Antiguidade a estudar a trigonometria?

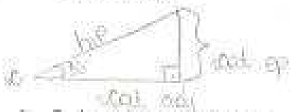
Não sei !

COLÉGIO ESTADUAL MARCELINO CHAMPAGNAT
ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

ALUNO:________________________ Nº__ Turma 2º MF

TRABALHO DE MATEMÁTICA (valor: 20)

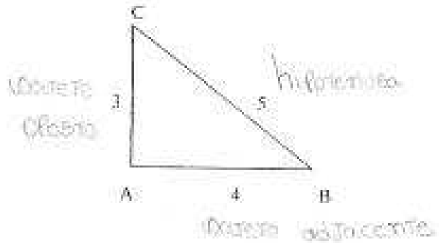
1) Uma criança está distante 80 m da base de uma torre e vê o ponto mais alto sob um ângulo de 16º em relação à horizontal. Qual é a altura da torre?



$Tang = \frac{co}{ca}$ $0,28 = \frac{x}{80}$ $x = 80 \cdot 0,28$ $x = 22,4$

2) Dado o triângulo-retângulo:

a) Nomeie os lados
b) Calcule sen, cos, tg



$Sen = \frac{co}{hip}$ $Sen = \frac{3}{5} = 0,6$

$cos = \frac{ca}{hip}$ $cos = \frac{4}{5} = 0,8$

$Tang = \frac{co}{ca}$ $Tang = \frac{3}{4} = 0,75$

3) Transforme:

a) 300º em minutos

300 · 60 = 1800'

b) 480' em segundos

480 · 60 = 28800''

c) 2400'' em minutos

2400 : 60 = 40'

4) Expresse em radianos:
a) 60º
b) 150º

a) $180 - \pi$
$60 - x$

$180x = 60\pi$
$x = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

b) $180 - \pi$
$150 - x$

$180x = 150\pi$
$x = \frac{150}{180} = \frac{5\pi}{6}$

5) Expresse em graus:

a) $\frac{10\pi}{9}$ rad

a) $\frac{10 \cdot 180}{9} = \frac{1800}{9} = 200$

b) $\frac{\pi}{9}$ rad

b) $\frac{180}{9} = 20$

6) Desenhe os quadrantes da circunferência, colocando os valores em graus e radianos.

Colégio Estadual Marcelino Champagnat Ens. Fund. E Médio

Aluno(a) ____________________ nº_ série 2º mf Data 11/10/07

Questionário

1) Você considera que a matemática é importante? Justifique.

Sim Porque ajudo muito no nosso raciocínio

2) Dos conteúdos matemáticos já estudados até hoje, qual você achou mais interessante aprender? Justifique sua resposta.

O teorema de LaPlace Porque é um conteúdo fácil

3) Marque x nas afirmativas que você considera verdadeiras em relação à Matemática:

(X) Contribui para resolver problemas tanto na matemática como em outras disciplinas.
( ) Busca cada vez mais resultados exatos.
( ) Aplica-se a matemática para resolver problemas reais do dia-a-dia.
( ) A matemática quase não faz sentido para produzir novas descobertas.
( ) As fórmulas matemáticas tornam os cálculos mais simples.
(X) Os conteúdos que hoje estudamos podem ser úteis no futuro.
( ) Tudo seria mais fácil se não existisse a matemática.
( ) Mesmo usando cálculos matemáticos, a inexatidão é constante.
( ) A representação gráfica ajuda o aluno a compreender melhor os conceitos matemáticos.

4) O assunto de trigonometria faz parte dos conteúdos da 8ª série. Você estudou trigonometria nessa série? Quais foram os principais tópicos estudados?

Sim, Seno, ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ cosseno
Tangente

5) Quando você pensa na trigonometria que termos tem a ver com esse conteúdo:

(X) seno	( ) cubo	(X) ângulos
( ) catetos	(X) adjacente	( ) números complexos
( ) perímetro	( ) Teorema de Pitágoras	( ) razão
(X) graus	( ) potência	( ) divisor

6) Os cálculos da trigonometria servem para resolver que tipo de problemas?

7) Que motivos você pensa que levaram os matemáticos da Antiguidade a estudar a trigonometria?