



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

NILTON CESAR GARCIA SALGUEIRO

**COMO ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO LIDAM COM
REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE
FUNÇÕES**

Londrina
2011

NILTON CESAR GARCIA SALGUEIRO

**COMO ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO LIDAM COM
REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE
FUNÇÕES**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de mestre.

Orientadora: Prof. Dra. Angela Marta Pereira das
Dores Savioli

Londrina
2011

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da
Universidade Estadual de Londrina**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S164c Salgueiro, Nilton Cesar Garcia.
Como estudantes do ensino médio lidam com registros de representação semiótica de funções / Nilton Cesar Garcia Salgueiro. – Londrina, 2011.
132 f. : il. + apêndices no final da obra.

Orientador: Ângela Marta Pereira das Dores Savioli.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2011.
Inclui bibliografia.

1. Educação matemática – Teses. 2. Produção escrita em matemática – Teses. 3. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 4. Matemática – Semiótica – Teses. 5. Álgebra (Ensino médio) – Teses. 6. Matemática – Livros didáticos – Teses. I. Savioli, Ângela Marta Pereira das Dores. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

NILTON CESAR GARCIA SALGUEIRO

**COMO ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO LIDAM COM REGISTROS
DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE FUNÇÕES**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de mestre.

BANCA EXAMINADORA

Prof^ª. Dr^ª. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
UEL – Londrina – PR

Prof^ª. Dr^ª. Bárbara Lutaif Bianchini
PUC – São Paulo – SP

Prof^ª. Dr^ª. Marinez Meneghello Passos
UEL – Londrina – PR

Londrina, 25 de fevereiro de 2011.

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ Londrina, ___/___/___

À minha esposa Flávia Capanema Dias Garcia que a cada dia me confirma a presença de Deus em minha vida.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelos dons da inteligência e da vida que possibilitaram a realização deste trabalho.

À minha orientadora, professora Angela Marta Pereira das Dores Savioli, pela amizade e paciência nos momentos difíceis deste percurso.

Às professoras Marinez Meneghello Passos e Bárbara Lutaif Bianchini que apresentaram importantes contribuições para a conclusão deste trabalho.

À minha mãe, Carmen Salgueiro Garcia, que durante toda minha vida me educou, inclusive na atual conjuntura onde tenho sido educado no exercício da paciência.

Aos meus filhos, Matheus e Natalia, que me agraciaram com a satisfação plena de ser pai.

À minha irmã, Luci Mara Garcia Salgueiro Gripp, que foi colocada em minha vida para servir de companheira nos momentos de desabafo e suprir boa parte das necessidades da minha infância.

Ao amigo Antonio Rafael Pepece Junior que fez com que se comprovasse o trecho bíblico que diz que “há amigo mais chegado que irmão”.

Aos companheiros de mestrado: Henrique, Débora e Kátia pelos momentos que propiciaram a evolução do meu aprendizado.

À amiga Maria Ignez Zepeda Wills que, em termos profissionais, representa para mim uma segunda mãe.

À direção, equipe pedagógica e alunos do colégio onde foi realizada a pesquisa.

SALGUEIRO, Nilton Cesar Garcia. **Como estudantes do ensino médio lidam com registros de representação semiótica de funções**. 2010. 132 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

RESUMO

Esta pesquisa consistiu em uma investigação de como estudantes do Ensino Médio de uma escola de Rolândia, PR, lidam com o conceito de função ao se depararem com uma sequência didática, nos moldes da Engenharia Didática apresentados por Artigue (1996), trabalhando diferentes registros de representação semiótica desse objeto matemático. Como referencial teórico utilizou-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2005), as abordagens do pensamento algébrico de Lins e Gimenez (1997), Kieran (1992) e Usiskin (1995) e, para os estudos do erro, Cury (2007). A sequência didática possibilitou aos estudantes a realização de conversões entre os registros de representação semiótica abordados, quais sejam registros na relação entre dois conjuntos, registro gráfico e registro algébrico do objeto função. Observaram-se indícios de pensamento algébrico nos registros escritos quando da generalização de situações e da utilização de linguagem algébrica e, alguns tipos de erros, como falta de conhecimento do uso de decimais, falta de entendimento do conceito de função como relação entre conjuntos, na conversão entre os registros de representação semiótica, no uso da linguagem algébrica, na determinação do domínio e na representação de funções com domínios discretos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Registros de Representação Semiótica. Pensamento Algébrico e Erros. Funções. Engenharia Didática.

SALGUEIRO, Nilton Cesar Garcia. **Como estudantes do ensino médio lidam com registros de representação semiótica de funções.** 2010. 132 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

ABSTRACT

This research consisted of an investigation of how high school students in a school in Rolândia, PR, dealt with the concept of function when faced with a didactic sequence, along the lines presented by Artigue (1996), *the Engineering Curriculum*, by working different semiotic representation records of this mathematical object. Duval's Representation Theory of Semiotics Records (2005) was used as a theoretical framework. The approaches of the algebraic thinking of Lins and Gimenez (1997), Kieran (1992) and Usiskin (1995) were also used as well as Cury's (2007) error studies. The didactic sequence allowed students to carry out conversions between the registers of semiotic representation addressed, which are records in relation to two sets, graphic recording and registration of algebraic function object. Evidence of algebraic thinking was observed in the written record when generalizing situations and using algebraic language. The following were also observed: some types of errors such as lack of knowledge of the use of decimals, lack of understanding of the function concept as a relation between sets in conversion between the registers of semiotic representation, usage of the algebraic language in determining the field and in the representation of functions with discrete domains.

Keywords: Mathematics Education. The semiotic representation registers. Algebraic Thinking and errors. Functions. Engineering Curriculum.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	–	Resolução da tarefa 5 do primeiro pré-teste pelo aluno A17	54
Figura 2	–	Resolução da tarefa 5 do segundo pré-teste pelo aluno A17.....	54
Figura 3	–	Resolução da tarefa 3 da sequência didática pelo aluno A17.....	70
Figura 4	–	Resolução da tarefa 3 da sequência didática pelo aluno A1.....	70
Figura 5	–	Resolução da tarefa 8 da sequência didática pelo aluno A4.....	74
Figura 6	–	Resolução da tarefa 8 da sequência didática pelo aluno A2.....	74
Figura 7	–	Resolução da tarefa 8 da sequência didática pelo aluno A1.....	75
Figura 8	–	Resolução da tarefa 9 b da sequência didática pelo aluno A16.....	77
Figura 9	–	Resolução da tarefa 10 da sequência didática pelo aluno A5.....	77
Figura 10	–	Resolução da tarefa 11a da sequência didática pelo aluno A3	78
Figura 11	–	Resolução da tarefa 12a da sequência didática pelo aluno A17	79
Figura 12	–	Resolução da tarefa 12a da sequência didática pelo aluno A11	80
Figura 13	–	Resolução da tarefa 12a da sequência didática pelo aluno A6.....	80
Figura 14	–	Resolução da tarefa 12b da sequência didática pelo aluno A17.....	81
Figura 15	–	Resolução da tarefa 4 da sequência didática pelo aluno A3.....	87
Figura 16	–	Resolução da tarefa 8 da sequência didática pelo aluno A3.....	88
Figura 17	–	Resolução da tarefa 11 da sequência didática pelo aluno A3.....	89
Figura 18	–	Resolução da tarefa 3c da sequência didática pelo aluno A4.....	90
Figura 19	–	Resolução da tarefa 13 da sequência didática pelo aluno A6.....	93
Figura 20	–	Resolução da tarefa 13 da sequência didática pelo aluno A6.....	93
Figura 21	–	Resolução da tarefa 13 da sequência didática pelo aluno A8.....	96
Figura 22	–	Resolução da tarefa 13 da sequência didática pelo aluno A9.....	98
Figura 23	–	Resolução da tarefa 11a da sequência didática pelo aluno A10.....	100
Figura 24	–	Resolução da tarefa 13 da sequência didática pelo aluno A11.....	101
Figura 25	–	Resolução da tarefa 13 da sequência didática pelo aluno A14.....	105
Figura 26	–	Resolução da tarefa 13 da sequência didática pelo aluno A14.....	105
Figura 27	–	Resolução da tarefa 13 da sequência didática pelo aluno A15.....	107
Figura 28	–	Resolução da tarefa 13 da sequência didática pelo aluno A17.....	110
Figura 29	–	Resolução da tarefa 13 da sequência didática pelo aluno A18.....	111

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 –	Transformação de um registro de representação semiótica em outro registro de representação semiótica.....	25
Quadro 2 –	Tipos de registros de representação semiótica propostos por Duval.....	28
Quadro 3 –	Características da pesquisa qualitativa e correlações com a dissertação	38
Quadro 4 –	Resumo da análise do livro didático.....	49
Quadro 5 –	Continuação do resumo da análise dos livros didáticos	50
Quadro 6 –	Continuação do resumo da análise dos livros didáticos	50
Quadro 7 –	Continuação do resumo da análise dos livros didáticos	50
Quadro 8 –	Continuação do resumo da análise dos livros didáticos	51
Quadro 9 –	Continuação do resumo da análise dos livros didáticos	51
Quadro 10 –	Resumo da análise horizontal	82
Quadro 11 –	Resumo da análise vertical	112

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
1 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS	14
1.1 PENSAMENTO ALGÉBRICO	14
1.2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	17
1.3 ESTUDO DO ERRO.....	29
2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE FUNÇÕES	31
2.1 REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA	32
2.2 REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO NA RELAÇÃO ENTRE DOIS CONJUNTOS	33
2.3 REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO NA LÍNGUA NATURAL	34
2.4 REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO TABULAR	35
2.5 REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO GRÁFICA	35
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	37
3.1 A NATUREZA DA PESQUISA	37
3.2 A ENGENHARIA DIDÁTICA	38
3.2.1 Sobre as Análises Prévias.....	41
3.2.2 Sobre a Análise a Priori.....	41
3.2.3 Sobre a Implementação da Experiência	42
3.2.4 Sobre a Análise a Posteriori e a Validação.....	42
4 ANÁLISES PRÉVIAS	43
4.1 DOCUMENTOS OFICIAIS	43
4.2 O COLÉGIO E OS SUJEITOS DA PESQUISA.....	45
4.3 LIVRO DIDÁTICOS	47
4.4 PRÉ-TESTE.....	52
5 AS TAREFAS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	56
5.1 AS TAREFAS APRESENTADAS NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	57

6 EXPERIMENTAÇÃO, ANÁLISES A POSTERIORI E VALIDAÇÃO	67
6.1 ANÁLISE HORIZONTAL	68
6.2 ANÁLISE VERTICAL	83
6.2.1 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A1	84
6.2.2 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A2	85
6.2.3 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A3	86
6.2.4 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A4	90
6.2.5 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A5	91
6.2.6 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A6	93
6.2.7 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A7	95
6.2.8 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A8	96
6.2.9 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A9	98
6.2.10 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A10	99
6.2.11 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A11	101
6.2.12 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A12	103
6.2.13 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A13	104
6.2.14 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A14	105
6.2.15 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A15	107
6.2.16 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A16	108
6.2.17 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A17	109
6.2.18 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A18	110
6.3 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES E VALIDAÇÃO	115
CONSIDERAÇÕES FINAIS	119
REFERÊNCIAS	122
APÊNDICES	125
APÊNDICE A – PRÉ-TESTE	126
APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	132

INTRODUÇÃO

Trabalhando há mais de uma década com o objeto matemático função e, constantemente dialogando com professores de outras disciplinas, como Física, Química e Economia, sobre a “não-visualização” deste conteúdo, por parte dos educandos, quando surge como gráfico ou como resolução de situações-problema, considera-se o estudo deste tema algo relevante no sentido de buscar minimizar essa dificuldade.

Na procura de referencial teórico sobre o assunto, encontrou-se em anais de eventos, como o XIII EBRAPEM, em Ramos e Flores (2009), e em alguns artigos, como em Colombo, Flores e Moretti (2008) e Bassoi (2006), pesquisas que auxiliaram a definição do trabalho. Além disso, entrando em contato com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2005), encontrou-se uma possibilidade de trabalho envolvendo funções e seus registros de representação semiótica. Por fim, o trabalho de Ardenghi (2008) que busca compreender, partindo de análises de quarenta e seis teses e dissertações de 1970 a 2005, as dificuldades de alunos sobre a ideia de função também auxiliou nas decisões.

Assim, o objetivo desta pesquisa é investigar como estudantes do Ensino Médio lidam com funções ao se depararem com uma sequência didática que trabalha diferentes registros de representação semiótica desse objeto matemático.

A investigação proposta se justifica pela necessidade de propiciar um trabalho associando diferentes registros de representação semiótica e uma ampliação no entendimento do objeto matemático, pois esta dissociação pode ser uma das causas da “não-visualização” das funções em outras disciplinas.

No capítulo um, apresenta-se o embasamento teórico baseado em estudos do pensamento algébrico, segundo Lins e Gimenez (1997), Usiskin (1995) e Kieran (1992), em estudos do erro, segundo Cury (2007), e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Duval (2005).

No capítulo dois, estuda-se o objeto matemático função e seus registros de representação semiótica.

No capítulo três, apresentam-se os pressupostos metodológicos baseados na Engenharia Didática e suas fases, indicados por Artigue (1996).

No capítulo quatro, encontram-se as análises prévias, observando o objeto matemático função dentro das propostas governamentais (PCN, DCE e PPP)¹, bem como os sujeitos de pesquisa, quais sejam estudantes do Ensino Médio de uma escola de Rolândia, Paraná. Ainda dentro dessas análises, mostram-se as abordagens do conteúdo funções em livro didático do Ensino Médio, enviado pelo governo federal, buscando verificar se o mesmo estabelece articulação entre os diferentes registros de representação semiótica de funções, como aborda este conteúdo e se trabalha somente com algoritmos e exercícios.

Essa pesquisa se justifica pela idade/série dos educandos pesquisados, apesar de alguns autores, tais como Salgueiro (2008), sugerirem a inicialização do estudo de funções em atividades investigativas ainda nas séries iniciais do II ciclo do Ensino Fundamental,

A partir dessa investigação, elaborou-se um pré-teste para averiguação do entendimento dos discentes sobre o objeto matemático focado.

Em seguida, apresentam-se, no capítulo cinco, as tarefas da sequência didática, relacionando diferentes registros de representação semiótica de uma função. Neste mesmo capítulo observam-se as análises *a priori* da mesma.

No capítulo seis, são enfocadas a experimentação, as análises *a posteriori* e a validação.

Por fim são apresentadas as considerações finais referentes ao trabalho.

¹ PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais. DCE – Diretrizes Curriculares Estaduais. PPP – Projeto Político Pedagógico do colégio onde foi realizada a pesquisa.

1 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Neste capítulo será apresentado o referencial teórico, baseando-se para o estudo do pensamento algébrico, em Usiskin (1995), Kieran (1992) e Lins e Gimenez (1997). Ver-se-á a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Duval (2005) e também o estudo do erro, segundo Cury (2007), bem como as opções destes referenciais que serão posteriormente adotadas quando das análises das produções dos educandos.

1.1 PENSAMENTO ALGÉBRICO

Esta seção apresenta alguns aspectos a respeito do pensamento algébrico, uma vez que função é um conteúdo algébrico, o que possibilitará a análise da produção escrita dos alunos sob essa ótica. Durante a seção será apresentado, após cada autor, o que se considerará como indício de pensamento algébrico quando da análise das produções escritas dos estudantes.

Inicia-se com o desenvolvimento da notação algébrica que pode, segundo Kieran (1992), ser dividido em três etapas: retórica, lacônica e simbólica.

A etapa retórica se caracteriza pela ausência total de símbolos e pela resolução de problemas particulares.

A etapa lacônica inicia-se com Diofanto, situado por historiadores no século III d.C., com a introdução de letras para representar quantidades desconhecidas. Diofanto não tinha um método geral para resolver os problemas apresentados.

A etapa simbólica aparece a partir do século XVI, com as leituras dos escritos de Diofanto por Viète (1540-1603), que utilizou letras para representar quantidades conhecidas e incógnitas. Com o uso deste simbolismo, o homem conseguiu generalizar e chegar a conceitos, como o de função.

Usiskin (1995) apresenta, de maneira mais explícita, quatro concepções para a álgebra:

- a) como aritmética generalizada: “as variáveis como generalizadoras de modelos” (p.13). O autor relata que “dentro dessa concepção de álgebra, as instruções-chave para o aluno são traduzir e generalizar” (p.13);

- b) como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas: propostos utilizando problemas. Neste caso o autor relata que as instruções-chave são “simplificar e resolver” (p.15). Os princípios de equivalência na resolução de equações podem ser enquadrados neste contexto;
- c) como estudo de relações entre grandezas: Esta concepção pode começar com a análise de fórmulas, sendo assim, neste caso, as variáveis, variam, e x , por exemplo, não é uma incógnita. Neste ponto observa-se o surgimento das funções, como relata o autor: “uma variável é um argumento (isto é, representa valores do domínio de uma função) ou um parâmetro (isto é, representa um número do qual dependem outros números). Só no contexto dessa concepção existem as noções de variável independente e variável dependente” (p.16);
- d) como estudo das estruturas: Envolve o estudo de estruturas como grupos, anéis, corpos e espaços vetoriais. Neste aspecto “a variável tornou-se um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades” (p.18).

Como o objeto de estudo desta pesquisa é função e, considerando o que coloca Usiskin (1995), pressupõe-se que haverá indícios de pensamento algébrico nos trabalhos dos alunos, quando houver relações de grandezas ou onde trabalhe a variável como generalizadora.

De acordo com Lins e Gimenez (1997), “não há consenso do que seja pensar algebricamente. Há, é verdade, um certo consenso a respeito de quais são as coisas da álgebra: equações, cálculo literal, funções, por exemplo” (p.89). Estes conteúdos, segundo os mesmos autores, baseando-se as pesquisas de Piaget, eram estudados apenas quando se considerava que os alunos estavam “maduros” para este entendimento.

Ainda para Lins e Gimenez (1997), o maior problema sobre essa forma “conteudista” de ver a Álgebra está no fato de não ser possível saber se há outros tópicos que deveriam ser abordados pela Álgebra e também na dificuldade em organizar um currículo para a educação algébrica. Assim, caracterizar a atividade algébrica envolve a descrição de quando ela acontece e quais os processos cognitivos peculiares a essa atividade; porém, se alguém resolve uma situação do tipo $4 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5$, e, resolvendo várias situações, chega à conclusão que $4 \times a = a + a + a + a$, como dizer onde se iniciou o pensamento algébrico deste “resolvedor”? Quando ele utiliza números? Ou quando ele utiliza letras? A

partir dessas reflexões, Lins e Gimenez (1997) apresentam três características fundamentais desse pensamento:

- 1) produzir significados apenas em relação a números e operações aritméticas (chamamos a isso aritmetismo);
- 2) considerar números e operações apenas segundo suas propriedades, e não “modelando” números em outros objetos, por exemplo, objetos “físicos” ou geométricos (chamamos a isso de internalismo); e
- 3) operar sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos (chamamos a isso analiticidade) (LINS; GIMENEZ, 1997, p.150).

Dessa forma, pensar algebricamente, para os autores, trata da produção de significado para situações com números e operações aritméticas e com base nessas produções, transformar as expressões obtidas operando de acordo com as três características fundamentais apresentadas.

Quando da análise dos materiais dos estudantes considerar-se-á que há indícios de pensamento algébrico quando, a partir da operação com números conhecidos, sejam capazes de operar de forma analítica (analisando com coerência) transpondo as ideias para valores desconhecidos.

Finalmente, tem-se em Kieran (1992 apud PESQUITA, 2007) seis níveis de interpretação da letra:

- a) *Letra avaliada*: é atribuído um valor à letra desde o princípio. Exemplo: Se $a = 3$, qual é o valor da expressão $a + 5$?
- b) *Letra não considerada*: a letra é ignorada ou a sua existência é reconhecida sem que lhe seja dado um significado. Exemplo: Se $x + y = 10$, $x + y + 5 = \dots$?
- c) *Letra considerada como objeto*: a letra é entendida como o nome de um objeto concreto. Exemplo: O cálculo do perímetro de um quadrado é $4l$, onde l é o comprimento do lado do quadrado.
- d) *Letra considerada como incógnita*: a letra é entendida como um número específico, mas desconhecido. Exemplo: Dada a equação $2x + 1 = 7$, qual o valor de x ?
- e) *Letra considerada como número generalizado*: a letra é entendida como uma representação de vários números e não de apenas um. Exemplo: A expressão de números ímpares, $2n - 1$.
- f) *Letra considerada como variável*: a letra é entendida como a representação de uma série de valores desconhecidos e é vista a existência de uma relação sistemática entre esses dois conjuntos de valores. Exemplo: Qual é maior, $2n$ ou n^2 ? (KIERAN, 1992 apud PESQUITA, 2007, p.20).

Assim, haverá indícios de pensamento algébrico quando o educando utilizar alguma letra dentro das interpretações d), e) ou f).

1.2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Inicialmente, buscou-se em dicionários da língua portuguesa, etimológicos e filosóficos um primeiro contato com as palavras representação e semiótica, tentando entender seus significados.

Segundo Cunha (1986), dicionário etimológico da língua portuguesa, representar significa “ser a imagem ou a reprodução de, patentear, significar, derivado do latim *repraesentāre*” (p.677).

Já de acordo Borba (2004), dicionário da língua portuguesa, representação significa “1. reprodução do pensamento, de objetos e seres, por meio da palavra ou de imagens: A palavra é representação de ideias [...] 5. imagem; símbolo: Adora as palmas, representação de seu sucesso” (p.1207).

Em Abbagnano (2000), dicionário de filosofia, encontra-se como significado para representação:

(lat Repraesentatio, in representation; fr représentation; al vorstellung; it rappresentazione). Vocábulo de origem medieval que indica imagem ou ideia (no 2º sentido), ou ambas as coisas. O uso desse termo foi sugerido aos escolásticos pelo conceito de conhecimento como “semelhança” do objeto. “Representar algo” – dizia S. Tomás de Aquino – “significa conter a semelhança da coisa”. Mas foi principalmente no fim da escolástica que esse termo passou a ser mais usado, às vezes para indicar o significado de palavras. (cf., p. ex., Graziano Di Ascoli, *Perihermenias*, 2.) Ockham distinguia três significados fundamentais: “Representar tem vários sentidos. Em primeiro lugar, designa-se com este termo aquilo por meio do qual se conhece algo; nesse sentido, o conhecimento é representativo, e representa significa ser aquilo com se conhece alguma coisa. Em segundo lugar, por representar entende-se conhecer alguma coisa, após cujo conhecimento conhece-se outra coisa; nesse sentido a imagem representa aquilo de que é imagem, no ato de lembrar. Em terceiro lugar, por representar entende-se causar o conhecimento do mesmo modo como o objeto causa o conhecimento”. No primeiro caso, a representação é a ideia no sentido mais geral; no segundo, é a imagem; no terceiro, é o próprio objeto. Esses são, na realidade, todos os possíveis significados do termo, que voltou a ter importância com a noção cartesiana de ideia como “quadro” ou “imagem” da coisa e foi difundido sobretudo por Leibniz, para quem a mônada era uma representação do universo (ABBAGNANO, 2000, p.853-854).

Já o termo semiótica, segundo Santaella (1983, p. 7), “vem da raiz grega *semeion*, que quer dizer *signo*. Semiótica, portanto, é a ciência dos signos, é a ciência de toda e qualquer linguagem”.

Assim, de acordo com o mesmo autor, “semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno de produção de significação e de sentido” (p.13).

Partindo, então, da ideia que representar pode significar aquilo pelo qual se tem conhecimento de algo e que semiótica é a ciência que utiliza signos, entende-se por representação semiótica uma possibilidade de conhecer algo se utilizando de símbolos e linguagens que permitam a constituição de significado e sentido.

Como já fora observado no início deste trabalho, buscavam-se possibilidades para a visualização do objeto matemático função, e encontrou-se, nos registros de representação semiótica, uma alternativa para o embasamento desse estudo. Duval (2009) apresenta o surgimento de estudos referentes ao assunto:

Peirce é o primeiro a ter reconhecido a importância desse fenômeno, distinguindo três tipos de signos: os ícones, os símbolos e os índices [...]. Essa primeira classificação, elaborada no quadro de uma reflexão sobre a lógica, contribuiu para fundar a semiótica. Mas ela deixou na sombra o que produz a fecundidade e a complexidade dessa variedade: as relações possíveis entre sistemas semióticos e a possibilidade de converter uma representação formada dentro de um sistema em uma representação de outro sistema. Essas questões concernentes às relações entre os sistemas semióticos e os problemas de conversão das representações de um sistema em outro foram explicitamente consideradas apenas muito mais tarde, através da modelização da linguagem proposta por Chomsky (1971) e, sobretudo, através da reflexão pós-saussureana de Benveniste (DUVAL, 2009, p.35-36).

Partindo para o estudo do papel desenvolvido pelos registros de representação semiótica, encontrou-se em Duval (1995 apud DAMM, 2002) que:

[...] elas são relativas a um sistema particular de signos, linguagem natural, língua formal, escrita algébrica ou gráficos cartesianos, figuras, de um objeto matemático [...]. De onde a diversidade de representações para um mesmo objeto representado ou ainda a dualidade das representações semióticas: forma (o representante) e conteúdo (o representado) (DUVAL, 1995 apud DAMM, 2002, p.140).

Damm (2002) relata ainda que:

As representações semióticas realizam de maneira indissociável, uma função de objetivação e uma função de expressão. Elas realizam de alguma forma

uma função de tratamento, porém este tratamento é intencional, função fundamental para a aprendizagem humana (DAMM, 2002, p.141).

Assim, as representações semióticas são registros para representar o objeto matemático e há alguns motivos, conforme se verá em seguida, para se estudar os diferentes registros de representação semiótica de objetos matemáticos, mais especificamente o objeto função.

De acordo com Kieran (1992), como se verá a seguir, os estudantes não adquirem um sentido real das estruturas da álgebra e acreditamos que há a necessidade de se trabalhar os diferentes registros de representação semiótica de funções, visando minimizar estas dificuldades, pois a consequência do desenvolvimento estanque destes registros pode resultar em situações catastróficas:

[...] a maioria dos estudantes não adquire um sentido real dos aspectos estruturais da álgebra. Os resultados da investigação sugerem que alguns estudantes nunca alcançam o desenvolvimento da parte estrutural do ciclo procedimento-estrutura. E, no pior dos casos, memorizam um conteúdo pseudo-estrutural (KIERAN, 1992, p.17).

Uma vez que os registros de representação semiótica buscam o entendimento, inclusive com as conversões entre os registros de representação semiótica, em detrimento à memorização, considera-se adequado para aplicação do objeto matemático função em outras disciplinas. Nessa mesma linha, segundo Damm (2010):

Para estudar a aquisição de conhecimentos, e mais particularmente a aquisição de conhecimentos matemáticos, é preciso recorrer à noção de representação. Não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxílio de uma representação (DAMM, 2010, p.169).

Assim, encontrou-se em Duval (2005), com o estudo dos registros de representação semiótica, uma possibilidade para responder aos anseios considerados inicialmente, quais sejam, como os estudantes lidam com o objeto matemático função.

Em Matemática, muitas vezes, não é possível observar de maneira “palpável” os objetos matemáticos estudados. Não há microscópios ou mecanismos que permitam visualizá-los diretamente. Desta forma, essa visão ou percepção pode ser propiciada por intermédio dos registros de representação semiótica dos objetos matemáticos. Sobre isso, Duval (2006) mostra a diferença epistemológica entre Matemática e outras ciências:

De um ponto de vista epistemológico, há uma diferença básica entre a matemática e os outros domínios do conhecimento científico. Objetos matemáticos, em contraste com os fenômenos da astronomia, física, química, biologia, etc... não são acessíveis pela percepção ou por instrumentos (microscópios, telescópios, aparelhos de medição). A única maneira de ter acesso a eles e lidar com eles é usar sinais e representações semióticas. Isso significa que nós temos aqui apenas um único acesso aos objetos de conhecimento e não um duplo acesso, principalmente não-semiótico e, secundariamente, semiótico, como é o caso em outras áreas (DUVAL, 2006, p.107, tradução nossa)².

Como se pode observar, o entendimento dos diferentes registros de representação semiótica se mostrará importante para auxiliar em outras ciências, pois apesar da chamada “visualização”, estas necessitam dos instrumentos matemáticos para a sua plena representação. Segundo Damm (2010), os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção e precisam de outros registros para auxiliar no entendimento dos mesmos. Também,

[...] as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos é bastante significativa, pois permite a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representações diferentes de um mesmo objeto matemático. Por exemplo, a função pode ser representada através da expressão algébrica, tabelas e/ou gráficos, que são diferentes registros de representação (DAMM, 2010, p.170).

Duval (2006) salienta sobre o surgimento dos registros de representação semiótica:

Basta olhar para a história do desenvolvimento da matemática para perceber que o desenvolvimento de representações semióticas era uma condição essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático (DUVAL, 2006, p.106, tradução nossa)³.

Apesar dos estudos ainda não apontarem claramente para as respostas das indagações que originaram esta pesquisa, posteriormente observou-se que realmente tornar-

² From an epistemological point of view there is a basic difference between mathematics and the other domains of scientific knowledge . Mathematical objects, in contrast to phenomena of astronomy, physics, chemistry, biology, etc., are never accessible by perception or by instruments (microscopes, telescopes, measurement apparatus). The only way to have access to them and deal with them is using signs and semiotic representations. That means that we have here only a single access to the knowledge objects and not a double access, mainly non-semiotic and secondarily semiotic, as is the case in the other areas.

³ One has only to look at the history of the development of mathematics to see that the development of semiotic representations was an essential condition for the development of mathematical thought.

se-ia importante para desenvolver o pensamento matemático e compreender em plenitude o objeto matemático estudado.

Assim, entender os registros de representação semiótica se tornará então importante para a apreensão⁴ de um objeto matemático, ou segundo Damm (2010),

Para que ocorra a apreensão de um objeto matemático, é necessário que a *noésis* (conceitualização) ocorra através de significativas *semiósises* (representações) [...] Ou seja, quanto maior for a mobilidade com registros de representações diferentes do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão desse objeto (DAMM, 2010, p.177).

Tem-se em Duval (2009) uma explicação para *noésis* e *semiósises*:

Se chamamos de *semiósises* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e *noésis* os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência (DUVAL, 2009, p.15).

Por isso, pelo que se pode observar, a compreensão e o entendimento de um objeto matemático dependem do reconhecimento deste em diferentes registros de representação semiótica pelo estudante. Portanto, quando não há a compreensão do objeto matemático em outros contextos, se pode supor que a causa seja a falta de associação entre estes registros de representação semiótica.

Sobre isso, Duval (2006) apresenta que:

Alterar o registro de representação é o limiar da compreensão matemática para os alunos em cada etapa do currículo. Depende da coordenação de vários registros de representação e é só em matemática que essa coordenação de um registro é extremamente necessária (DUVAL, 2006, p.128, tradução nossa).⁵

E o mesmo autor complementa: “Em outras palavras, a compreensão conceitual em matemática envolve uma sinergia entre dois registros, e às vezes uma sinergia entre três registros” (DUVAL, 2006, p.126, tradução nossa).⁶

⁴ Assimilação ou compreensão do que pode ser conhecido;

⁵ Changing representation register is the threshold of mathematical comprehension for learners at each stage of the curriculum. It depends on coordination of several representation registers and it is only in mathematics that such a register coordination is strongly needed.

⁶ In other words, conceptual comprehension in mathematics involves a two-register synergy, and sometimes a three-register synergy.

Neste ponto entende-se que o termo limiar apresenta-se no sentido de representar o início da compreensão do objeto, porém torna-se importante ressaltar que o educando pode conseguir passar de um registro de representação semiótica a outro e não o fazer em todos os momentos e, então, nessa perspectiva considera-se que podem existir diversos momentos até que ocorra essa real passagem.

Associada a esta situação, Godino, Font e D'Amore (2007) relatam a complexidade da realização da passagem entre os diferentes registros de representação semiótica:

Desta perspectiva, um objetivo central do ensino da Matemática consiste em conseguir que os estudantes sejam capazes de passar de uma representação para outra, porém se reconhece que este objetivo é difícil de conseguir. A conversão de representações é um problema crucial na aprendizagem da Matemática (GODINO; FONT; D'AMORE, 2007, p.14, tradução nossa)⁷.

Damm (2010) descreve a importância dos registros de representação semiótica na aprendizagem e nas funções cognitivas do pensamento:

[...] sem as representações semióticas, torna-se impossível a construção do conhecimento pelo sujeito que apreende. É através das representações semióticas, que se torna possível efetuar certas funções cognitivas essenciais do pensamento humano (DAMM, 2010, p.177).

Há de se concordar com a afirmação e corroborando com esta função cognitiva observa-se que Godino, Font e D'Amore (2007) falam sobre a complexa trama utilizada quando o educando trabalha com os registros de representação semióticas para a realização de uma prática matemática:

[...] o aluno, para a realização da maioria das práticas matemáticas, há de ativar uma trama complexa de funções semióticas e os mecanismos utilizados são determinantes, tanto para reduzir ou aumentar a complexidade desta trama, como para a realização efetiva da prática (GODINO; FONT; D'AMORE, 2007, p.11, tradução nossa).⁸

⁷ Desde esta perspectiva, un objetivo central en la enseñanza de las matemáticas consiste en conseguir que los estudiantes sean capaces de pasar desde una representación a otra, pero se reconoce que este objetivo es difícil de lograr. “*La conversión de representaciones es un problema crucial en el aprendizaje de las matemáticas.*”

⁸ el alumno, para la realización de la mayoría de prácticas matemáticas, ha de activar una trama compleja de funciones semióticas y los ostensivos utilizados son determinantes, tanto para reducir o aumentar la complejidad de esta trama, como para la realización efectiva de la práctica.

Os mesmos autores apresentam três implicações importantes do uso dos registros de representação semiótica:

A primeira é que as representações não podem ser entendidas de maneira isolada. Uma equação ou uma fórmula específica, [...] um gráfico particular no sistema cartesiano adquire sentido somente como parte de um sistema mais amplo [...] A segunda é que o estudo de um mesmo objeto pode se enquadrar em dois programas de investigação diferentes, cada um com seu sistema de representação, leva que “cada representação” se pode converter no “objeto representado” da representação de outro programa de investigação [...] A terceira é que uma representação ostensiva, por uma parte, tem um valor representacional: é algo que se pode colocar em lugar de algo distinto dele mesmo e, por outra parte, tem um valor instrumental: permite realizar determinadas práticas que com outro tipo de representação não seria possível (GODINO; FONT; D’AMORE, 2007, p.13, tradução nossa).⁹

Esta condição colabora para justificar a necessidade de utilização dos diferentes registros de representação semiótica no processo de aprendizagem, pois se pode propiciar ao educando a possibilidade de optar pela melhor forma de representar a situação estudada e privá-lo de tal condição é, no mínimo, não colaborar para o seu pleno desenvolvimento intelectual.

Finalmente, Duval (2009) apresenta a especificidade das representações semióticas:

A especificidade das representações semióticas consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações “equivalentes” em um outro sistema semiótico, mas podendo tomar **significações** diferentes para o sujeito que as utiliza. A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para um outro (DUVAL, 2009, p.32, grifo e assinalamento do autor).

⁹ La primera es que las representaciones no se pueden entender de manera aislada. Una ecuación o una fórmula específica, ... una gráfica particular en un sistema cartesiano adquieren sentido sólo como parte de un sistema más amplio... La segunda es que el hecho de que el mismo objeto se pueda encuadrar en dos programas de investigación diferentes, cada uno con sus sistemas de representación, conlleva que “cada representación” se pueda convertir en “objeto representado” de la representación del otro programa de investigación... La tercera es que una representación ostensiva, por una parte, tiene un valor representacional: es algo que se puede poner en lugar de algo distinto de él mismo y, por otra parte, tiene un valor instrumental: permite realizar determinadas prácticas que con otro tipo de representación no serían posibles.

Assim, pode-se compreender que as representações semióticas de um objeto matemático são os possíveis registros para se representar que podem levar à visualização e identificação, produzindo significado ao objeto estudado.

Quanto ao objeto matemático função há a possibilidade de representá-lo por meio de diagramas, gráficos, língua natural entre outras possibilidades, como será observado no capítulo dois.

Existem dois tipos de transformações de registros de representação semiótica: os tratamentos e as conversões, que foram anteriormente citadas.

Os tratamentos permanecem dentro do mesmo sistema semiótico, como por exemplo, quando um educando resolve uma expressão numérica envolvendo frações utilizando-se apenas da forma fracionária. De maneira análoga, para resolver uma adição envolvendo números racionais apresentada na forma decimal utiliza-se apenas números decimais.

Pode-se ainda transformar os números decimais em fracionários e vice-versa, porém neste caso teríamos a utilização de dois sistemas e passaríamos às conversões.

Damm (2010) diferencia da seguinte forma estas duas transformações:

O tratamento de uma representação é a transformação dessa representação no próprio registro onde ela foi formada [...] A conversão de uma representação é a transformação dessa em uma representação em um outro registro, conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático em questão [...] O tratamento se estabelece “dentro” do registro, já a conversão se dá entre registros diferentes (DAMM, 2010, p.179-180, assinalamento do autor).

As conversões enfrentam o fato dos alunos não reconhecerem o mesmo objeto a partir de dois registros representação semióticas diferentes. As conversões são pouco exploradas nos processos de ensino e aprendizagem e estudá-las pode auxiliar a vencer as dificuldades dos educandos, pois:

Numerosas observações nos permitiram colocar em evidência que os fracassos ou os bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida (DUVAL, 2005, p.21).

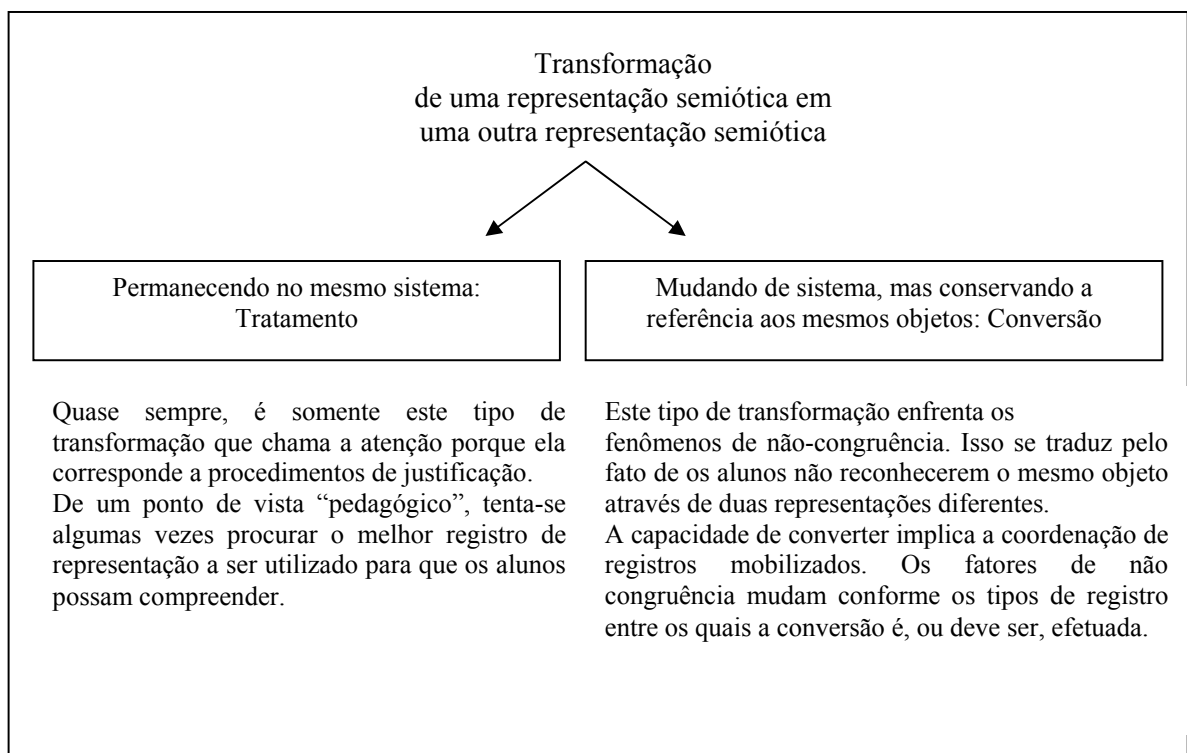
Como se pretende analisar representações semióticas do mesmo objeto matemático (função) haverá, dentro da sequência didática, tarefas envolvendo conversões,

uma vez que, como será visto, isso não é realizado de maneira clara no livro didático utilizado na escola analisada.

Como relatado anteriormente as conversões são pouco exploradas no processo ensino aprendizagem, porém o mesmo autor apresenta importante argumento para a sua utilização como instrumento no desenvolvimento cognitivo:

[...] a conversão não chama a atenção, como se se tratasse de uma atividade lateral, evidente e prévia à “verdadeira” atividade matemática. Mas, do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão (DUVAL, 2005, p.16).

Também em Duval (2005) encontra-se o seguinte quadro que pode elucidar as principais diferenças entre estes dois tipos de transformações:



Fonte: Duval (2005, p.15)

Quadro 1 – Transformação de um registro de representação semiótica em outro registro de representação semiótica

Há, na passagem de um registro de representação semiótica a outro, uma articulação entre os aspectos cognitivos específicos de cada um dos registros envolvidos.

Passar de um registro para outro, não é apenas modificar o modo de tratamento do objeto matemático, mas também explicar propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo objeto.

Dessa forma, entende-se que a verdadeira compreensão matemática está diretamente ligada à disposição de ao menos dois registros de representação semiótica diferentes, e trazer aos educandos a possibilidade de visualizar de maneiras diferentes um mesmo objeto matemático é, nas palavras de Duval (2005), libertar os discentes do “*enclausuramento*’ de registro que impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes” (p.21, assinalamento do autor).

Ainda assim, alguns autores consideram as conversões como uma “codificação” e segundo Duval (2005), de acordo com estas ideias,

[...] o ato da conversão seria uma das formas mais simples de tratamento, pois seria suficiente aplicar regras de correspondência para “traduzir”. Assim, passar de uma equação à sua representação gráfica constituiria uma codificação em que seria suficiente aplicar a regra segundo a qual um ponto está associado a um par de números sobre um plano quadriculado por dois eixos graduados. (DUVAL, 2005, p.17, assinalamento do autor).

Porém, devido à complexidade envolvida na conversão de um registro de representação semiótica a outro, considera-se que esta situação não condiz com a realidade e o mesmo autor relata sobre a impossibilidade deste pensamento.

Há, por trás da aplicação de uma regra de codificação para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, a necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros. Pois são essas variáveis que permitem determinar quais as unidades de significado pertinentes, que devem ser levadas em consideração, em cada um dos dois registros. **A conversão das representações, quaisquer que sejam os registros considerados, é irreduzível a um tratamento** (DUVAL, 2005, p.17, grifo nosso).

Duval (2005, p. 29) relata que “os sistemas semióticos deviam estar integrados nos modelos de arquitetura cognitiva das pessoas, como estruturas essenciais do funcionamento do pensamento”. Dessa maneira procura-se, nas ligações entre os diferentes registros de representação semiótica, a associação de múltiplos dados sensoriais. A partir disso, quatro ideias são cruciais:

1. O desenvolvimento da capacidade mental de representação depende do desenvolvimento cultural de sistemas semióticos.

2. Nos indivíduos em período de desenvolvimento e de formação inicial o progresso de aquisição de conhecimentos matemáticos depende da coordenação de registros de representação semiótica. **Essa coordenação não é espontânea, mas deve ser levada em conta na apropriação de cada um dos sistemas semióticos.**

3. Certas variáveis cognitivas podem ser retomadas como variáveis didáticas.

4. Na medida em que a matemática tende a diversificar os registros de representação, sua aprendizagem específica pode contribuir fortemente para o desenvolvimento das capacidades cognitivas globais dos indivíduos. **Visar a esse desenvolvimento sem se fixar de forma míope sobre a aquisição de tal ou tal noção particular é provavelmente o aporte maior que se pode esperar da aprendizagem matemática para a sua educação** (DUVAL, 2005, p.29 - 30, grifo nosso).

Nesse sentido há, como se pode observar a seguir, outros relatos sobre a disponibilidade e uso dos diferentes registros de representação semiótica: “A disponibilidade e uso de diversos sistemas de representação semiótica, suas transformações e conversões, considera-se imprescindível na geração e desenvolvimento dos objetos matemáticos” (GODINO, 2003, p.242, tradução nossa).¹⁰

Duval (2006) alerta, no entanto, sobre um aspecto importante entre o objeto matemático e seus registros de representação semiótica: “Os objetos matemáticos não devem ser confundidos com as representações semióticas utilizadas, embora não haja acesso a eles sem as representações semióticas” (DUVAL, 2006, p.126, tradução nossa).¹¹

Assim, Duval (2005) aponta que:

Não podemos nos ater nem aos modelos clássicos de psicologia cognitiva – centrados nos tratamentos de informação, - nem aos modelos epistemológicos – seja porque eles são muito locais, seja porque não levam em conta os problemas específicos da matemática [...]

Um modelo pertinente para explicar as condições de aquisição dos conhecimentos matemáticos por alunos deve estar prioritariamente centrado nas condições cognitivas, isto é, nas condições específicas de acesso aos objetos matemáticos. **Desse ponto de vista, as representações semióticas – ou mais exatamente, a diversidade dos registros de representações – têm um papel central na compreensão.** A maioria dos alunos, ao longo de seu currículo, permanece aquém dessa compreensão [...] Os únicos acertos que lhes são possíveis se dão em monorregistros (registros monofuncionais), muitas vezes privados de “significado” e inutilizáveis fora do contexto de suas aprendizagens (DUVAL, 2005, p.28 - 29. grifo nosso, assinalamento do autor).

¹⁰ La disponibilidad y uso de diversos sistemas de representación semiótica, sus transformaciones y conversiones, se considera imprescindible en la generación y desarrollo de los objetos matemáticos.

¹¹ Mathematical objects must never be confused with the semiotic representations used, although there is no access to them other than using semiotic representation.

Duval (2005) classifica em quatro os tipos muito diferentes de registros e representações semióticas, como se pode observar na tabela apresentada a seguir:

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
<p>REGISTROS MULTIFUNCIONAIS Os tratamentos não são algoritmizáveis.</p>	<p>Língua natural. Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar:</p> <ul style="list-style-type: none"> • argumentação a partir de observações, de crenças... • dedução válida a partir de definição ou teoremas. 	<p>Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3).</p> <ul style="list-style-type: none"> • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
<p>REGISTROS MONOFUNCIONAIS Os tratamentos são principalmente algoritmos.</p>	<p>Sistemas de escritas:</p> <ul style="list-style-type: none"> • numéricas (binária, decimal, fracionária...); <ul style="list-style-type: none"> • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo. 	<p>Gráficos cartesianos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • mudança de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2005, p. 14)

Quadro 2 – Tipos de registros de representação semiótica propostos por Duval.

Neste ponto o que fora colocado como uma possibilidade para o encaminhamento da pesquisa já se pode notar como algo real, pois, como se pode observar, há nessa teoria a possibilidade de trabalho com diferentes registros de representação do objeto matemático, e se um dos anseios apresentados inicialmente era minimizar a dificuldade da não-visualização das funções em outras disciplinas, um trabalho, envolvendo esses diferentes registros de representação semiótica e suas conversões, tornara-se necessário.

Além disso, observava-se clara associação entre as representações semióticas e a Engenharia Didática, que se apresentava como possível metodologia e o pensamento algébrico que fora inicialmente estudado.

Dessa forma, buscando melhoria da “*práxis*”, desenvolvimento de senso crítico em educandos e associação com o objeto matemático função em outras disciplinas, além da possibilidade de associação com diversas metodologias, entre elas a Engenharia Didática, observou-se fortes indícios de atendimento ao objetivo da pesquisa na Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Finalmente, buscou-se, na construção e escolha das tarefas da sequência didática, como se verá nos capítulos seguintes, apresentar situações que trabalhassem não apenas com a coordenação de registros na forma de tratamento, mas também com as conversões, buscando levar o educando ao aprendizado das diferentes concepções e registros de representação semiótica do objeto matemático função, visando compreendê-lo em sua plenitude.

1.3 ESTUDO DO ERRO

Segundo Duval (2005, p. 27), diferenciando respostas corretas de sucesso cognitivo:

Existe evidentemente uma divisão que é feita, para cada item, entre as respostas corretas ou aceitáveis de um ponto de vista matemático – que se tenha levado em conta ou não uma consideração às exigências de justificação matemática – e aquelas que não o são. Mas aquilo que de um ponto de vista matemático pode ser considerado um acerto (ou um erro) elementar não tem nenhum valor do ponto de vista cognitivo[...] Um sucesso matemático não corresponde a um sucesso cognitivo. Muitos tratamentos estatísticos se baseiam em sucesso nos itens considerados separadamente e não em sucesso em toda uma sequência de itens; no entanto, este último é o único que possui um significado do ponto de vista de uma análise cognitiva.

Assim, acredita-se em que estudar situações que não representem funções seria importante no sentido de não apenas localizar ou mostrar o caminho adequado para o estudante, mas também correlacionar conceitos e situações que não atendam a esta conceitualização.

Ir além dessa localização do educando, considera-se eficaz, e, nas palavras de Cury (2007), uma possibilidade de compreender o desenvolvimento da apropriação do saber:

Analisar as produções é uma atividade que traz, para o professor e para os alunos, a possibilidade de entender, mais de perto, como se dá a apropriação do saber pelos estudantes.
A análise das respostas, [...], pode ser, também enfocada como metodologia de ensino,[...] levando os alunos a questionar suas respostas, para construir o próprio conhecimento (CURY, 2007, p.13).

Igualmente em Brousseau (apud CURY, 2007), encontra-se forte indício para trabalhos utilizando o erro:

O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se acredita nas teorias empiristas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seu sucesso, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptado. Os erros desse tipo são instáveis e imprevisíveis, eles são constituídos em obstáculos (BROUSSEAU apud CURY, 2007, p.33).

Desse modo, gerar a incerteza no pensamento prévio é jogar o aluno na chamada “zona de desconforto”, chamando-o à busca do conhecimento. Estaria implícito no compreender função, compreender o que não é função. Como exemplo, pode-se colocar que em uma relação entre dois conjuntos, o primeiro com dois elementos e o segundo com 3 elementos, há 64 possibilidades, das quais apenas nove são funções. Assim, estudar o conceito de função, buscando trabalhar apenas com “aquilo que dá certo” deixando de lado o erro, é, no mínimo, uma acomodação.

Segundo Cury (2007), essa atitude serve para “mascarar” as resoluções que historicamente apresentam os matemáticos como seres puros e imunes aos “acidentes no percurso” na busca pelo saber. Hadamard (1945 apud CURY, 2007, p.24, assinalamento do autor) apresenta esta situação: “Eu faço muito mais [erros] do que meus estudantes; só que eu sempre os corrijo, de forma que nenhum traço deles permaneça no resultado final” .

Desta forma pode-se analisar que, com este pensamento, o que em algumas situações o professor tem a mais que o estudante é o fato de ter resolvido anteriormente a atividade e conseqüentemente conhecer a sua resolução.

Assim, utilizando-se o erro dentro de outra perspectiva deixa-se de observá-lo apenas como algo frustrante, para analisá-lo como parte do processo de aprendizagem e, nas palavras de Cury (2007, p. 36), “venham a ser discutidos e possam ser fonte de novas aprendizagens”.

Desse modo, pretende-se investigar os erros produzidos pelos alunos pesquisados para que seja possível, dentro da própria seqüência didática, minimizá-los.

2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE FUNÇÃO

A necessidade de clareza do objeto matemático, como nos apresenta Damm (2002), impulsionou o desenvolvimento deste capítulo:

[...] a utilização de diferentes registros de representação semiótica é uma maneira didática/metodológica que o professor pode usar quando busca a conceitualização, a aquisição de conhecimento [...] Para isto é necessário que o professor tenha claro o objeto matemático a ser ensinado, isto lhe possibilitará definir quais os registros de representação semiótica que possibilitarão a construção do mesmo (DAMM, 2002, p.142).

Caraça (2003), após analisar situação de queda de um corpo em intervalos de tempos iguais, elabora uma tabela relacionando o tempo e a distância percorrida por este corpo, conforme se pode observar:

Tempo (em segundos)	0	1	2	3	4	5 ...
Espaços (em metros)	0	4,9	19,6	44,1	78,4	122,5...

(CARAÇA, 2003, p.118).

Esta forma pode ser associada à representação semiótica discursiva a partir de observações apresentadas por Duval (2005), na tabela 2, ou a Caraça (2003) que relaciona a ideia que liga as duas sequências como sendo uma lei e chega à essência de função:

Então em que consiste, afinal a lei? – Na forma de correspondência dos dois conjuntos. Se, por consequência, queremos estudar leis quantitativas, temos que criar um instrumento matemático cuja essência seja a correspondência entre dois conjuntos (CARAÇA, 2003, p.119).

E complementa, posteriormente: “Assim, o conceito de função aparece-nos, no campo matemático, como o instrumento próprio para o estudo das leis” (CARAÇA, 2003, p. 121).

Com base nessas análises, Caraça parte então para a definição de função:

Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números, diz-se que y é função de x e escreve-se

$$y = f(x),$$

se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$. A x chama-se variável independente, a y dependente.

Para indicar que y é função de x , usaremos também escrever simplesmente $y(x)$; para representar aquele valor b de y que corresponde a um valor particular a de x , escreve-se $b = f(a)$ ou $b = y(a)$, conforme se usou a representação $y = f(x)$ ou $y(x)$ (CARAÇA, 2003, p.121, assinalamento nosso).

Pode-se representar o objeto matemático função por meio de expressões analíticas, gráficos, tabelas, diagramas, entre outros registros de representação semiótica. Como nos relata Caraça (2003):

Está adquirido que de toda a função $y(x)$ se pode construir uma imagem geométrica. Suponhamos que a função fora definida por uma expressão analítica – a imagem geométrica da função é a tradução, no campo geométrico, daquela lei analítica que a expressão analítica implica (CARAÇA, 2003, p.130, assinalamento nosso).

Apresenta-se a seguir diferentes registros de representação semiótica do objeto função. Ao final de cada registro de representação semiótica realiza-se a relação com os registros propostos por Duval (2005), no quadro 2.

2.1 REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA

Nesta forma, pode-se entender uma função como a representação generalizadora de um problema ou ainda a forma geral de representar uma relação que interligue dois conjuntos numéricos.

Um exemplo seria a conexão de cada elemento do domínio com o seu dobro somado com três no contradomínio, ficando:

$$y = 2x + 3$$

Para generalizar problemas em situações cotidianas a representação semiótica na forma algébrica é algo interessante, como se observa na situação a seguir:

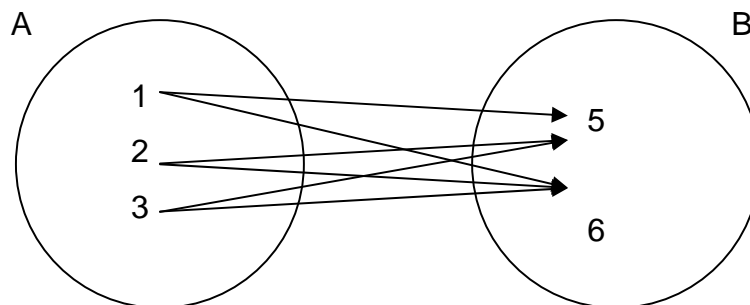
Uma empresa que conserta máquinas de lavar cobra R\$ 15,00 pela visita e mais R\$ 25,00 por hora trabalhada para efetuar o conserto. Sendo assim, tem-se que o registro de representação algébrica para a cobrança desta empresa pode ser dada por:

$$y = 15 + 25x$$

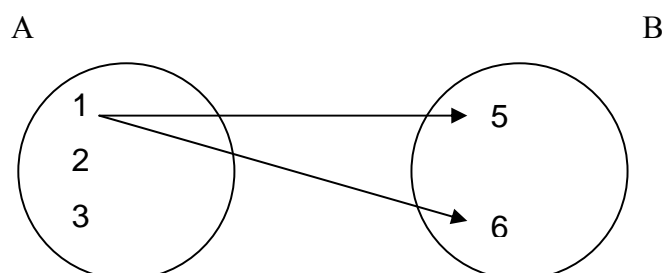
Esta forma pode ser associada à ideia da utilização de sistemas de escritas algébricas num registro monofuncional de argumentação discursiva, como se observa nos estudos de Duval (2005) apresentados na tabela 2.

2.2 REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO NA RELAÇÃO ENTRE DOIS CONJUNTOS

Entende-se por relação binária qualquer subconjunto do produto cartesiano de dois conjuntos. O produto cartesiano ($A \times B$) é o conjunto de todos os pares ordenados que são formados associando cada elemento do conjunto A com cada um dos elementos em B. Assim temos, por exemplo, que se $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{5,6\}$, então, o produto cartesiano $A \times B = \{(1,5), (1,6), (2,5), (2,6), (3,5), (3,6)\}$, ou na forma de diagrama, tem-se:



Um exemplo de relação binária, neste caso, seria $R_1 = \{(1,5), (1,6)\}$.



Nesta forma, pode-se entender que uma função é representada pela relação entre dois conjuntos onde os componentes do primeiro conjunto (domínio) devem cada um, possuir um e apenas um correspondente no segundo conjunto (contradomínio).

Há, porém, neste registro de representação uma desvantagem, pois como se pode observar a relação é feita com pontos e desta forma a relação dificulta o trabalho com conjuntos infinitos, como por exemplo, os números reais.

Observa-se que quando se relaciona os elementos dos conjuntos, tem-se, dentro dos registros de representação semiótica propostos por Duval, uma apreensão operatória e não somente perceptiva na forma de uma representação semiótica não-discursiva utilizando-se de registros multifuncionais.

2.3 REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO NA LÍNGUA NATURAL

Nesta forma, pode-se novamente entender a função como uma estratégia para resolver problemas, mas também é possível entender funções como a relação entre dois conjuntos onde cada elemento do primeiro conjunto associa-se a um único elemento do segundo.

Neste registro de representação há uma descrição na relação entre dois conjuntos como, por exemplo, em uma situação hipotética, um vidraceiro cobra R\$ 15,00 pela visita e R\$ 10,00 por cada vidro trocado. Podemos dizer que o preço depende (está em função) do número de vidros trocados. Então o preço será o produto entre o número de vidros a serem trocados e R\$ 10,00, adicionando-se R\$ 15,00 da visita.

Pode-se observar que para elemento do domínio (número de vidros) há um e somente um resultado correspondente no contradomínio. Para verificarmos a validade desta função faz-se necessária a descrição destes dois conjuntos.

Esta forma de representação semiótica pode ser entendida, segundo os registros de representação semiótica de Duval, como uma representação semiótica discursiva multifuncional, o registro de representação semiótica na língua natural.

2.4 REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO TABULAR

Nesta situação a análise também se inicia como uma forma aritmética, tendendo a encerrar-se como uma generalização da situação na forma algébrica. Veja a situação de uma mulher que deseja fazer café:

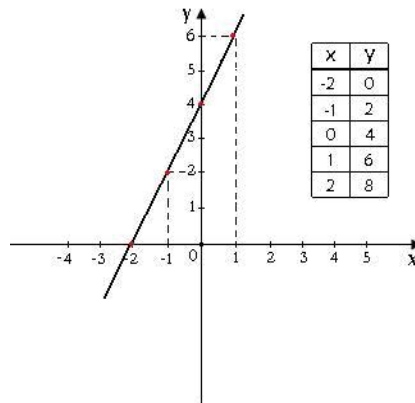
Água (litro)	Café (colheres)	Açúcar (colheres)
1	3	4
2	6	8
3	9	12
n	3.n	4.n

A quantidade de café e açúcar apresenta uma dependência em relação à quantidade de água.

Pode-se pensar, segundo os estudos de Duval no quadro 2, a representação semiótica na forma de sistema de escrita utilizando símbolos. Enquanto há a análise para a construção desta escrita observa-se a existência de raciocínio argumentativo a partir de observações.

2.5 REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Nesta situação utiliza-se o plano cartesiano para representar graficamente uma função.



Este registro de representação semiótica caracteriza-se pela adequação da situação estudada anteriormente na relação entre dois conjuntos à representação semiótica utilizando o plano bidimensional.

Assim, os pares ordenados levantados, seja por meio de uma relação, seja pela forma tabular, forma algébrica ou língua natural podem ser expressas utilizando-se da forma gráfica conforme se pode observar.

A vantagem deste registro de representação semiótica está na possibilidade da continuidade uma vez que a relação entre elementos de um conjunto fica prejudicada em outros registros de representação semiótica, quando se trata de conjuntos infinitos como, por exemplo, o conjunto dos números reais.

Nos estudos de Duval, no quadro 2, podem-se analisar os gráficos cartesianos como uma representação semiótica não-discursiva do objeto matemático função.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Apresentam-se a seguir os procedimentos metodológicos correspondentes à pesquisa.

3.1 A NATUREZA DA PESQUISA

Esta pesquisa apresenta características de um trabalho com abordagem qualitativa, segundo Bogdan e Biklen (1982), como se pode observar no quadro 3:

Características da pesquisa qualitativa – Bogdan & Biklen (1982)	Correlações com a dissertação
“[...] a fonte direta dos dados é o ambiente natural, contituindo o investigador o instrumento principal (p.47)”.	Realizar-se-á a pesquisa aplicando uma sequência didática em uma escola pública onde o professor-pesquisador atua como educador.
“[...] é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números (p.48)”.	Os dados coletados constituem-se de produção escrita dos alunos, sujeitos da pesquisa e dos livros didáticos por eles utilizados.
“Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos (p.49)”.	Há interesse na produção escrita dos alunos e não na quantidade de erros e acertos destes.
“Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. Não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando (p.50)”.	A partir das respostas dos estudantes irá se proceder às análises e à classificação.
“O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Os investigadores que fazem uso deste tipo de abordagem estão interessados no como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas (p.51).”	Efetuar conversões entre as representações semióticas auxilia no reconhecimento do objeto matemático estudado. Assim, uma pesquisa que trabalhe com a possibilidade da apresentação das diferentes representações semióticas aos educandos pode gerar uma maior abrangência de entendimento e conseqüentemente um maior entendimento dos objetos matemáticos estudados no cotidiano escolar.

Quadro 3– Características da pesquisa qualitativa e correlações com a dissertação

3.2 A ENGENHARIA DIDÁTICA

Para a construção da sequência didática será utilizada a Engenharia Didática que teve o surgimento na década de 80, no século passado. Muito difundida na França, que apresenta entre os principais autores Chevallard, Brousseau e Michele Artigue.

A principal teoria relacionada com a Engenharia Didática é a Teoria das Situações Didáticas, proposta por Guy Brousseau.

Segundo Almouloud e Coutinho (2008), a teoria das situações didáticas busca criar um modelo de interação entre o aprendiz, o saber e o *milieu* (o meio).

Nesta teoria, o objeto central de estudo não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber. Brousseau (apud ALMOULOU; COUTINHO, 2008) procura teorizar os fenômenos ligados a essas interações, buscando a especificidade do conhecimento ensinado. Para isso considera fundamental a estrutura “minimal”, relacionada com a interação mostrada anteriormente, apresentada a seguir:

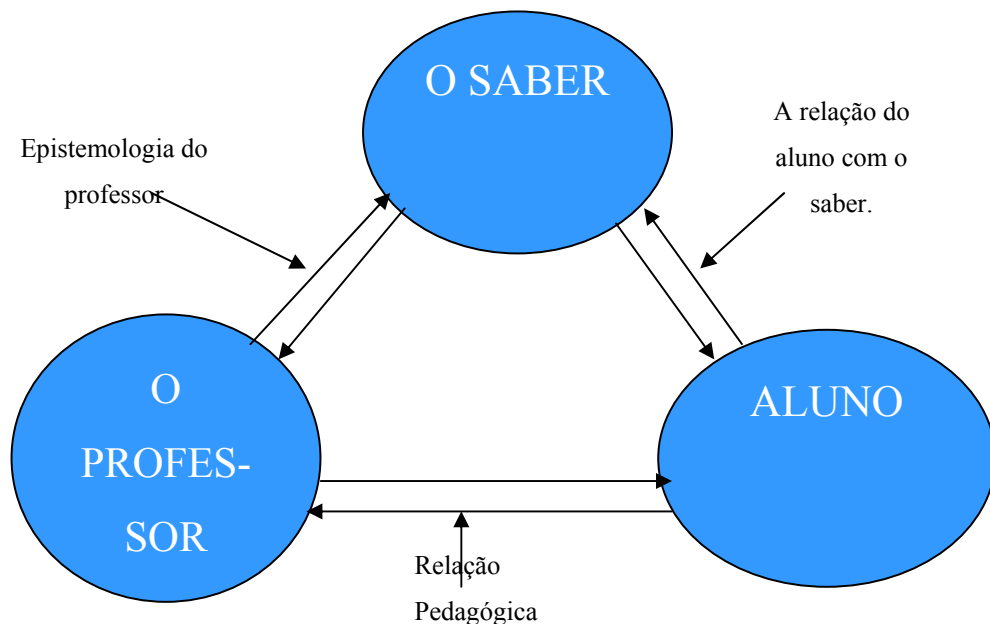


Diagrama 1 – Estrutura minimal da Teoria das Situações Didáticas (ALMOULOU, 2007, p.32).

Diante destas situações a Engenharia Didática foi criada para atender a duas questões:

- a) relacionar pesquisa e ação no sistema de ensino (aproximando o pesquisador do professor);
- b) reservar lugar para a produção didática nas metodologias de pesquisa (aproximando o professor do pesquisador).

Uma característica importante apresentada à época pela Engenharia Didática deve-se ao fato que é interna à sala de aula.

Considera-se, analisando discurso de Damm (2002), que há ligação com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica: “Podemos pensar na utilização da teoria de Duval como uma maneira didática/metodológica que o professor e/ou o pesquisador devem utilizar se o objetivo é a aquisição de conhecimento” (DAMM, 2002, p.136).

Como foi visto, a Engenharia Didática caracteriza-se por uma metodologia de investigação com um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula, isto é, na observação e na análise de sequências de ensino. Ela é classificada em dois níveis:

- a) Macro-engenharia – Para análises que se tornam incontornáveis (apesar das dificuldades metodológicas e institucionais);
- b) Micro-engenharia – Permitem ter em conta, de forma local, a complexidade do fenômeno sala de aula;

Pesquisa realizada recentemente por Almouloud e Coutinho (2008), verificou que trabalhos apresentados no GT-19 da ANPEd¹² com características ligadas à Engenharia Didática geram o objetivo de estudar o processo de ensino e aprendizagem e a construção de sequência didática que proporcione ao educando condições favoráveis à construção e compreensão de determinado conceito. Esse trabalho apresenta a possibilidade da utilização da Engenharia Didática como uma técnica de pesquisa, Pais (2002), ou como uma metodologia de pesquisa, Almolloud (2008), com características fundamentadas na prática e aplicação em sala de aula. Pais (2002) explicita claramente esta situação: “[...] a utilização de uma engenharia didática reforça a confiabilidade da pesquisa e sua potencialidade se deve à defesa do vínculo com a realidade da sala de aula” (PAIS, 2002, p.108).

Segundo Artigue (1996), pode-se dividir a Engenharia Didática em fases. A autora apresenta esta divisão em quatro fases, como se pode observar:

- a) Análises prévias;
- b) Concepção e análise *a priori* das experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de Matemática;
- c) Implementação da experiência;
- d) Análise *a posteriori* e validação da experiência.

¹² O GT-19 é o Grupo de Trabalho de Educação Matemática na ANPEd (Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação).

Vale ressaltar que estas fases são prévias apenas no sentido de iniciação dos trabalhos, podendo ser retomadas cada uma das etapas a qualquer momento de execução do trabalho. A validação é interna, fundada essencialmente no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

A seguir há um detalhamento de cada uma dessas fases.

3.2.1 Sobre as Análises Prévias

Uma das dimensões estudadas nas análises prévias diz respeito à didática e está associada às características do funcionamento do sistema de ensino, à análise dos documentos oficiais (nacionais e internacionais) e livros didáticos sobre o assunto estudado, bem como diferentes formas de abordagem do objeto a ser estudado e seu papel no desenvolvimento da história da matemática.

Há nestas análises também uma dimensão cognitiva associada às características do público ao qual se dirige o ensino.

3.2.2 Sobre a Análise *A Priori*

Nesta fase o principal objetivo é determinar as escolhas e as variáveis que podemos considerar importantes permitindo controlar as atitudes dos alunos e não fugir do foco da pesquisa. Assim, na análise *a priori* deve-se:

- a) descrever e justificar as escolhas e as características da situação que se pretende desenvolver;
- b) analisar a importância dessa pesquisa para a aprendizagem. As ações do aluno devem ser mediadas pelo professor, que deve organizar a situação, tornando o aluno responsável pela sua aprendizagem;
- c) prever comportamentos, assegurando que os mesmos são resultados do conhecimento visado pela aprendizagem proposta.

Na prática, pode-se diferenciar as análises prévias e *a priori* da seguinte maneira: nas análises prévias temos uma ideia e inicia-se a pesquisa documental, por

exemplo. A partir desta pesquisa há o início da análise do material para tomarmos as decisões sobre o trabalho que pretendemos desenvolver.

São as análises e tomadas de decisões que caracterizam as análises prévias.

Após a elaboração das atividades da sequência didática passa-se às análises *a priori*, para a verificação da possível eficácia do material elaborado.

3.2.3 Sobre a Implementação da Experiência

Trata de colocar em prática a sequência didática construída. Isto é, nesta fase aplica-se a sequência nos sujeitos escolhidos dentro de um meio escolhido e todas as observações desse meio devem ser registradas.

3.2.4 Sobre a Análise *a Posteriori* e a Validação

Na análise *a posteriori* realiza-se a exploração dos dados recolhidos e que podem contribuir para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem. Esta análise é feita à luz da análise *a priori*. Por tratar-se de uma análise interna na Engenharia Didática a análise *a posteriori* deve aprovar ou refutar as ideias apresentadas na análise *a priori*.

4 ANÁLISES PRÉVIAS

Neste capítulo serão vistas as análises prévias do trabalho, quais sejam, análise de documentos oficiais, apresentação dos sujeitos da pesquisa, análise de livro didático e análise do pré-teste sobre o assunto estudado.

Apesar de se tratar de uma das fases da Engenharia Didática encontra-se também em Duval (2009) argumento para a realização desta etapa:

A determinação das variáveis independentes a serem consideradas nas pesquisas constitui o lugar de interação interpretativa entre as análises teóricas, de um lado, e a organização das experimentações ou a conduta das observações, de outro lado. Retomando uma distinção utilizada no estudo dos sistemas para classificar suas propriedades, podemos organizar as variáveis independentes em duas grandes classes: as variáveis intrínsecas, quer dizer, os fatores que comandam o funcionamento de um sistema, qualquer que seja o contexto onde ele se encontre, e as variáveis extrínsecas, ou seja, os fatores dos arredores que influenciam o funcionamento desse sistema (DUVAL, 2009, p.27).

4.1 DOCUMENTOS OFICIAIS

Como se pretende levar os alunos a trabalhar com o ideia de função, buscou-se em documentos oficiais abordagens desse assunto.

Iniciou-se com a análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais, Orientações Curriculares Nacionais e Diretrizes Curriculares Estaduais, finalizando com o Projeto Político Pedagógico da escola na qual se realizou a pesquisa.

Segundo os PCN (1997) algumas expectativas do terceiro ciclo do ensino fundamental envolvem a interpretação e utilização de diferentes registros de representação semiótica (tabelas, gráficos, expressões, ícones...).

* traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificando os significados das letras;

* coletar, organizar e analisar informações, construir e interpretar tabelas e gráficos, formular argumentos convincentes, tendo por base a análise de dados organizados em representações matemáticas diversas (BRASIL, 1997, p.64-65).

Também os PCN do Ensino Médio mostram a necessidade de encadeamentos conceituais e a consequente ligação entre os estudos de relação e função:

É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas (BRASIL, 2000, p.40-41).

Nos PCN de 1ª à 4ª série encontra-se outro importante argumento para justificar a tentativa de conversão entre diferentes registros de representação semiótica dos objetos matemáticos.

[...] comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas (BRASIL, 1997, p.51-52).

Observa-se ainda nos PCN do Ensino Médio que a visualização dos diferentes registros de representação semiótica, quando o mesmo trata que a Matemática deve levar o aluno a: “[...] reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações” (BRASIL, 2000, p.254).

Além disso, os educandos do ensino médio estão, neste momento, segundo Parra (1983), em melhores condições de ampliar e desenvolver capacidades quanto à abstração, interpretação e interligação de diferentes registros de representar os objetos matemáticos. Também os PCN do Ensino Médio relatam esta característica:

A essas concepções da Matemática no Ensino Médio se junta a ideia de que, no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade (BRASIL, 2000, p.252).

Documentos oficiais do governo federal, mais atualizados como, por exemplo, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio de 2008, mostram a mesma ideia:

Algumas vezes, de forma intencional, são retomados assuntos já tratados no ensino fundamental – é o momento de consolidar certos conceitos e ideias da matemática escolar que dependem de explicações cuja compreensão exige uma maior maturidade (BRASIL, 2008, p.70).

Segundo as Diretrizes Curriculares Estaduais, os DCE (2009), do estado do Paraná, o estudo de funções no Ensino Médio devem também favorecer o uso de diferentes linguagens e estabelecer generalizações. Desta forma, ligar com clareza os conteúdos de relações e funções pode ampliar o conceito de relações para o educando.

As abordagens do Conteúdo Funções no Ensino Médio devem ser ampliadas e aprofundadas de modo que o aluno consiga identificar regularidades, estabelecer generalizações e apropriar-se da linguagem matemática para descrever e interpretar fenômenos ligados à Matemática e a outras áreas do conhecimento. O estudo das Funções ganha relevância na leitura e interpretação da linguagem gráfica que favorece a compreensão do significado das variações das grandezas envolvidas (PARANÁ, 2009, p.59).

No Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola em que foi desenvolvida esta pesquisa, observa-se um dos seguintes objetivos gerais da disciplina de Matemática: “Representar, comunicar, ler, interpretar e produzir textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento” (PARANÁ, 2010, p.148).

Pensando que diferentes registros de representação semiótica de um objeto matemático visam propiciar ao estudante pleno desenvolvimento, encontra-se mais um motivo para o estudo utilizando os diferentes registros de representação semiótica, na citação do próprio PPP apresentado a seguir que foi chamado de “compromisso dos profissionais que atuam” nesta instituição:

Essa educação deve buscar a qualidade, isto é, desenvolver o processo crítico de aprendizagem de seus educandos, é buscar a permanência dos mesmos no sistema e evitar a sua reprovação e a sua evasão. Priorizando e empenhando pela melhoria contínua dos processos pedagógicos, técnicos e administrativos da escola (PARANÁ, 2010, p.33).

4.2 O COLÉGIO E OS SUJEITOS DA PESQUISA

O colégio onde se realizou a pesquisa localiza-se no município de Rolândia, estado do Paraná. Trata-se de uma escola pública que atende comunidade de classe baixa com

alunos, em sua grande maioria, respeitosos, disciplinados e educados, porém com dificuldades de aprendizado.

A escola está incluída em um projeto para superação das dificuldades apresentadas nas últimas avaliações nacionais. Dentre outras atitudes contempladas no projeto, o Ensino Médio é feito na forma blocada. Neste sistema, os alunos estudam durante um semestre as disciplinas de ciências exatas e no outro semestre estudam as demais disciplinas. Em virtude deste projeto de superação e do ensino em blocos, os alunos têm seis aulas semanais de Matemática durante um semestre e no restante do ano letivo não têm aulas desta disciplina. Esta forma tem mostrado, segundo observações do pesquisador, que há melhora no sentido de possibilitar encontros constantes com os alunos num semestre, porém por outro lado, há um distanciamento natural nos períodos em que o educando não está assistindo ao bloco das ciências exatas.

O IDEB¹³ deste colégio para a 5ª a 8ª séries foi 3,3, enquanto a média municipal foi 4,3, a estadual foi 4,1 e a nacional foi 4,0. Vale ressaltar que neste nível a escola apresentou o pior desempenho entre todas as do município.

No nível médio, a média por escola, assim como a média no município, não é divulgada, pois a avaliação realizada é por amostra, porém a média estadual foi 4,2 e a média nacional 3,6.

O presente trabalho foi realizado com alunos do 2º ano do Ensino Médio neste ano de 2010. Um pré-teste foi realizado em 2009 com parte desses alunos, quando cursavam o 1º ano do Ensino Médio.

Ressalta-se que há no final do presente material (apêndice 2), termo de consentimento livre e esclarecido, semelhante ao original, exceto pela falta da assinatura da direção do estabelecimento escolar, autorizando a realização da pesquisa.

Estes alunos frequentam a escola no período matutino. Não há cálculos do IDEB para este turno, mas é consenso entre os discentes, que este período apresenta nível de conhecimento mais elevado do que o período noturno.

¹³ IDEB – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica.

4.3 LIVRO DIDÁTICO

Um ponto que impulsionou a análise do livro didático foi o fato de muitos discentes utilizarem este material como manual. Segundo Kieran (1992):

Já que muitos professores dizem ensinar basicamente o que está escrito nos livros, estes podem ser um meio para assegurar que as concepções procedimentais são bem desenvolvidas e encaminhadas para concepções estruturais (KIERAN, 1992, p.18, tradução nossa)¹⁴.

Outro aspecto que se considerou para adotar-se a pesquisa do livro didático é a evolução destes registros de representação semiótica nos livros didáticos no transcorrer das décadas como é apresentado também por Duval (2009):

A matematização das outras disciplinas caracteriza-se possivelmente menos pela introdução de métodos de medida e de tratamentos puramente quantitativos, do que pelo recurso a sistemas semióticos outros além da língua natural (gráficos, linguagens formais, tabelas, figuras...). Isso é particularmente nítido no domínio das ciências ditas “humanas”. Enfim, de modo mais geral os indivíduos estão agora mergulhados em um meio cultural que diversifica os modos de representação e que multiplica o recurso a essa diversidade de modos. Limitando-se apenas ao domínio do ensino, é suficiente abrir e comparar manuais dos anos 1930 com outros dos anos 1950, 1970, 1990, para constatar a amplidão e a extensão irreversível do recurso a essa diversidade de sistemas semióticos, tanto para os manuais de história, de geografia e de francês, quanto para os de matemáticas (DUVAL, 2009, p.16, assinalamento do autor).

Iniciou-se o trabalho analisando o livro didático do governo do estado do Paraná¹⁵. A análise do presente material se fez necessária, pois se trata de produto encaminhado à escola pelo governo estadual. Este livro apresenta situações-problema envolvendo os conteúdos estudados, sem buscar conceituar estes assuntos.

Como a intenção deste material é servir de material de apoio, quase como um paradidático, ficou afastado da intenção de pesquisa. Por isso, optou-se por não se aprofundar os estudos no mesmo.

¹⁴ Ya que muchos profesores dicen enseñar básicamente lo que está en los libros, éstos pueden ser un medio para asegurar que las concepciones procedimentales son bien desarrolladas y encaminadas hacia concepciones estructurales.

¹⁵ O livro didático do estado do Paraná trata-se de projeto executado pelo governo estadual em que diversos professores da Secretaria Estadual de Educação escreveram tópicos sobre diferentes conteúdos do Ensino Médio.

Passou-se a analisar o material encaminhado pelo governo federal. O livro didático em volume único de Manoel Paiva (2005) é distribuído e utilizado pelos alunos do colégio onde se realiza a pesquisa e aparece no referencial utilizado pelos professores no Projeto Político Pedagógico desta mesma escola. Assim, justifica-se a sua análise para o entendimento do ambiente onde a pesquisa está inserida.

Nesse material, a ideia de relação é chamada de correspondência e apresentado como uma maneira de representar funções. Nas páginas 86 e 87 são apresentadas as diferentes maneiras de representar uma função, porém não há uma posterior relação entre estes diferentes registros de representação semiótica. O material aparenta em diversas situações tratar-se de um exemplo das ideias observadas por Lins e Gimenez (1997) há mais de uma década:

Talvez adote, seguindo algumas péssimas ideias encontradas em propostas para a educação aritmética, a prática de utilizar a “sequência” técnica (algoritmo)/prática (exercícios). Com toda a franqueza, isso é praticamente tudo que encontramos na quase total maioria dos livros didáticos disponíveis no mercado brasileiro, e essa é uma situação bastante ruim. O que é, talvez, até pior é que essa prática não se baseia em investigação ou reflexão de qualquer natureza ou profundidade, apenas em uma tradição, tradição essa que estudos e projetos de todos os tipos, e por todo o mundo – inclusive no Brasil – já mostraram ser ineficaz e mesmo perniciosos à aprendizagem (LINS; GIMENEZES, 1997, p.105-106, assinalamento dos autores).

Ainda sobre esse material é possível notar que se no início há uma tentativa em relacionar, mesmo que não claramente, os diferentes registros de representação semiótica do objeto matemático função, esta característica simplesmente desaparece conforme se caminha neste assunto. Considera-se que se devem relacionar de maneira mais clara os diferentes registros de representação semiótica, pois como já observamos anteriormente no estudo de Duval (2005):

Alterar o registro de representação é o limiar da compreensão matemática para os alunos em cada etapa do currículo. Depende da coordenação de vários registros de representação e é só em matemática que essa coordenação de um registro é extremamente necessário (tradução nossa)¹⁶ (DUVAL, 2006, p. 128).

¹⁶ Changing representation register is the threshold of mathematical comprehension for learners at each stage of the curriculum. It depends on coordination of several representation registers and it is only in mathematics that such a register coordination is strongly needed.

Outra percepção é a de que o livro analisado não contempla situações que não representam funções. Acredita-se que abordagens de situações que coloquem em xeque definições e conceitos sejam importantes para promover um entendimento do conteúdo e uma reflexão sobre o mesmo. Isso também ocorre na justificativa para determinação de domínios de funções que, visto rapidamente, não estabelece ligação com a relações entre conjuntos, fortemente apresentado no início do material. Isso propicia duas possíveis análises: Se não deve ser relacionado, então não se observa a necessidade de uma ligação tão próxima apresentada inicialmente; e se deve ser relacionado, o livro não o faz.

Nos quadros a seguir são apresentadas características que se consideram importantes, segundo os estudos utilizando a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, no livro didático estudado e os resultados observados.

A partir do quarto quadro é observado se o livro didático apresenta o objeto matemático função nos diferentes registros de representação semiótica.

REGISTRO ALGÉBRICO	REGISTRO NA RELAÇÃO ENTRE DOIS CONJUNTOS	REGISTRO NA LÍNGUA NATURAL	REGISTRO TABULAR	REGISTRO GRÁFICO
Sim	Sim	Sim, porém sem definição dentro deste registro.	Sim	Sim

Quadro 4 – Resumo da análise do livro didático

Nos quadros seguintes são analisadas se há conversões entre as diferentes representações semióticas e se estas ocorrem de maneira clara.

REGISTRO ALGÉBRICO → REGISTRO NA RELAÇÃO ENTRE DOIS CONJUNTOS	REGISTRO ALGÉBRICO → REGISTRO NA LÍNGUA NATURAL	REGISTRO ALGÉBRICO → REGISTRO TABULAR	REGISTRO ALGÉBRICO → REGISTRO GRÁFICO
Há exemplos resolvidos (há apenas uma atividade para os alunos)	Não	Apenas em exemplos resolvidos (sem atividades para os alunos)	Sim. Com diversas atividades para os alunos

Quadro 5 – Continuação do resumo da análise dos livros didáticos

REGISTRO NA RELAÇÃO ENTRE DOIS CONJUNTOS → REGISTRO ALGÉBRICO	REGISTRO NA RELAÇÃO ENTRE DOIS CONJUNTOS → REGISTRO NA LÍNGUA NATURAL	REGISTRO NA RELAÇÃO ENTRE DOIS CONJUNTOS → REGISTRO TABULAR	REGISTRO NA RELAÇÃO ENTRE DOIS CONJUNTOS → REGISTRO GRÁFICO
Não	Não	Não	Não

Quadro 6 – Continuação do resumo da análise dos livros didáticos

REGISTRO NA LÍNGUA NATURAL → REGISTRO ALGÉBRICO	REGISTRO NA LÍNGUA NATURAL → REGISTRO NA RELAÇÃO ENTRE DOIS CONJUNTOS	REGISTRO NA LÍNGUA NATURAL → REGISTRO TABULAR	REGISTRO NA LÍNGUA NATURAL → REGISTRO GRÁFICO
Não	Não	Não	Não

Quadro 7 – Continuação do resumo da análise dos livros didáticos

REGISTRO TABULAR → REGISTRO ALGÉBRICO	REGISTRO TABULAR → REGISTRO NA RELAÇÃO ENTRE DOIS CONJUNTOS	REGISTRO TABULAR → REGISTRO NA LÍNGUA NATURAL	REGISTRO TABULAR → REGISTRO GRÁFICO
Sim (com atividades para os alunos)	Não.	Não	Apenas em exemplos resolvidos (sem atividades para os alunos)

Quadro 8 – Continuação do resumo da análise dos livros didáticos

REGISTRO GRÁFICO → REGISTRO ALGÉBRICO	REGISTRO GRÁFICO → REGISTRO NA RELAÇÃO ENTRE DOIS CONJUNTOS	REGISTRO GRÁFICO → REGISTRO NA LÍNGUA NATURAL	REGISTRO GRÁFICO → REGISTRO TABULAR
Sim (com atividades para os alunos)	Apenas em exemplos resolvidos (sem atividades para os alunos)	Não	Não

Quadro 9 – Continuação do resumo da análise dos livros didáticos

Analisando os resultados, pode-se apresentar algumas considerações importantes como veremos a seguir.

O registro na relação entre dois conjuntos é praticamente esquecido nas argumentações posteriores e conseqüentemente não é utilizada nas conversões.

A possibilidade do educando responder utilizando-se da língua natural com argumentos baseados em ideias envolvendo o objeto matemático estudado é praticamente ignorada em todo o material.

Em muitos momentos observa-se que a representação gráfica é apresentada como resultado final da ligação com outros registros de representação semiótica do objeto matemático função, não se observa uma ligação efetuada de maneira consistente, haja vista que é feita praticamente durante todo o tempo em uma via de mão única e Duval (2005) nos alerta sobre esta situação:

Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido. Os exemplos propostos aos alunos são instintivamente escolhidos, evidentemente, nos casos de congruência. Infelizmente esses não são os casos mais frequentes (DUVAL, 2005, p.20).

Verificou-se se o livro se utiliza de situações que não representam funções para explicitar melhor o conceito de funções utilizando-se de conversões para justificar erros nestas situações, usando assim o entendimento dos erros para consolidar o conceito do objeto matemático estudado. Nesta análise pode-se constatar que o uso do registro na relação entre dois conjuntos é pouco utilizado nestas argumentações, limitando-se a um exemplo resolvido e quatro tarefas a serem resolvidas pelos educandos.

Assim, como é possível constatar ainda nos quadros de análise do livro didático, as representações com registro na língua natural e na relação entre conjuntos não são utilizadas em atividades envolvendo conversões ou argumentações. Torna-se, porém importante ressaltar que o livro didático precisa ser utilizado como material de apoio e cabe ao educador a complementação de pontos considerados por ele importante para o processo de ensino e aprendizagem.

4.4 PRÉ-TESTE

Após as análises prévias dos documentos oficiais e dos livros didáticos iniciou-se a elaboração de um pré-teste para verificar se alunos da 1ª série do Ensino Médio conseguiam relacionar o conceito de função ao registro na relação entre dois conjuntos e alguns registros de representação semiótica por meio do registro gráfico de função. Isto se mostra necessário, pois Duval (2005) alerta sobre as dificuldades em mudanças nos registros de representação semiótica de um objeto matemático.

Numerosas observações nos permitiram colocar em evidência que os fracassos ou os bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é requerida (DUVAL, 2005, p.21).

Realizou-se no final de 2009 esse pré-teste (Apêndice A) com alunos da 1ª série do Ensino Médio que já haviam estudado o conteúdo de relações e de funções para

verificar se os mesmos relacionavam esses assuntos em seus diversos registros de representação semiótica.

Pretendia-se trabalhar no ano seguinte com os mesmos alunos pesquisados, porém ocorreram mudanças nas turmas do colégio e precisou-se então reaplicar os mesmos pré-testes na turma onde o pesquisador estava atuando.

Foram avaliados ao todo 53 alunos, divididos em duas turmas. A primeira sendo o 1º Ensino Médio no ano de 2009 e a segunda em 2010, já no 2º Ensino Médio. Cinco alunos eram comuns às duas turmas.

Aplicou-se o pré-teste contendo cinco questões, uma em cada folha, apresentada na parte final desta dissertação.

Justifica-se a divisão em cinco folhas em virtude da necessidade em impossibilitar a observação de “dicas” que, aparecendo em uma questão, pudessem ajudar a responder outra questão.

Iniciou-se a aplicação entregando a questão um e o gabarito para as respostas (em branco) para cada um dos alunos. Recolheu-se a questão 1 e entregou-se a folha com a segunda questão. Apanhou-se a questão 2 e entregou-se a folha com a terceira questão. Em seguida foi apresentada a folha com a quarta questão. Depois, antes da entrega da folha com a quinta e última questão, o gabarito, devidamente preenchido com as respostas dadas pelos alunos, foi recolhido. Desta forma, os alunos ficaram com as questões 3 e 4 em mãos, para que pudessem responder à questão 5 e como foram recolhidos os gabaritos, estes não mais poderiam ser alterados. As questões 3 e 4 referem-se a situações que não representam funções utilizando-se dos registros gráficos e algébricos respectivamente.

Na primeira turma, apenas um dos alunos apresentou resposta associando este problema à ideia de relação e domínio de uma função, na última questão. Fato interessante é que esse aluno que associou a resposta deste problema à ideia de relação e domínio (figura 2) participou da segunda avaliação e não fez a mesma associação (figura 1) e apenas por esse motivo considerou-se relevante relatar as duas aplicações neste trabalho.

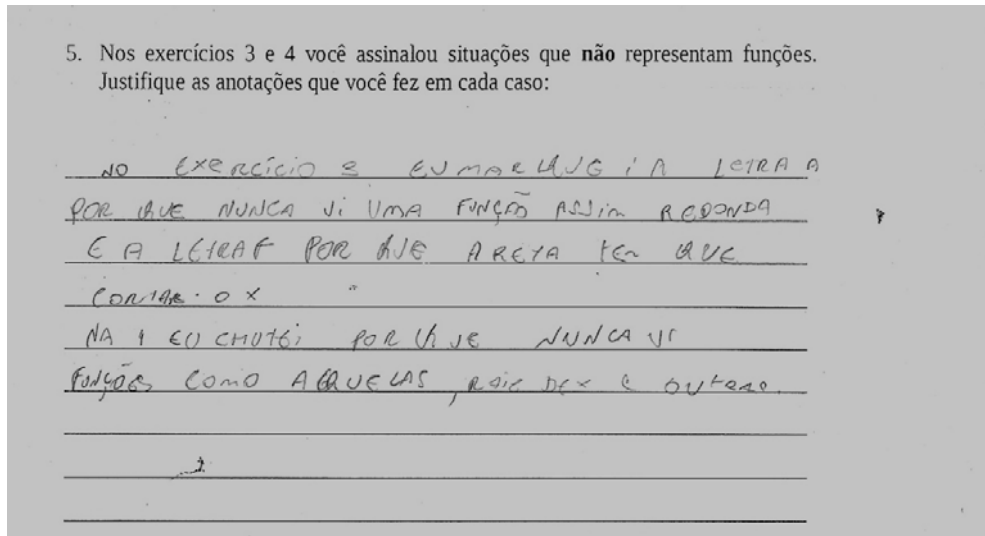


Figura 1 – Resolução da tarefa 5 do primeiro pré-teste pelo aluno A17

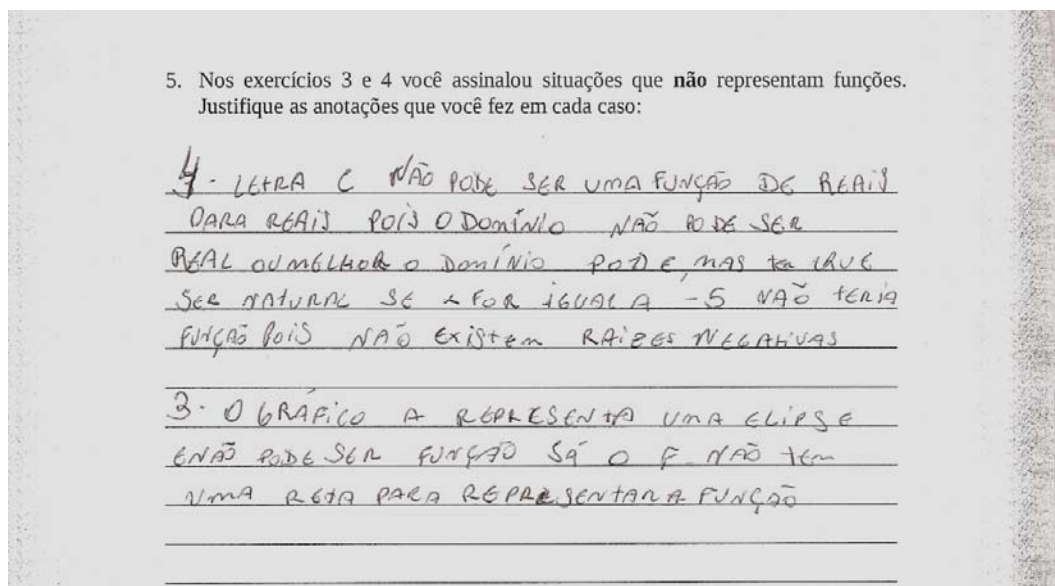


Figura 2 – Resolução da tarefa 5 do segundo pré-teste pelo aluno A17

Sendo assim, a partir deste momento há o relato apenas dos resultados da segunda aplicação do teste, com 27 alunos. Nela observa-se que na primeira questão apenas um aluno não considerou que o estudo de funções estivesse relacionado com gráficos e 18 relacionaram o estudo de funções com a ideia de relação ou correspondência.

Na segunda questão observa-se que 7 alunos não marcaram, mesmo que conjuntamente, a resposta correta.

Nas questões 3 e 4, observou-se dificuldades na identificação do gráfico envolvendo a função constante e 21 alunos anotaram-na como não sendo função.

Finalmente na última questão nenhum aluno fez menção a essa ideia e uma grande parte assumiu que ou “chutou”, ou anotou aquelas por que nunca haviam visto ou ambas as possibilidades.

Desta forma, constatou-se que os alunos, após o estudo de relações e funções, compreendiam a noção de função no registro na relação entre dois conjuntos (questão 2), visualizavam a relação entre funções e registros gráficos (questão 1), mas não conseguiam converter estas duas diferentes maneiras de representar este conteúdo.

Realizou-se o pré-teste também com a professora dos alunos avaliados no primeiro pré-teste. Analisando suas respostas pode-se observar que a mesma relacionou funções com as definições de gráficos e relação. Observou-se também que identificou a relação que correspondia à alternativa que representava uma função. A professora, também na justificativa, utilizou a ideia de relação com os gráficos e registros algébricos que não correspondiam ao conceito de função.

Então, os resultados observados neste teste aplicado inicialmente possibilitaram a elaboração de algumas conjecturas:

- a) se a professora apresenta a noção de relação entre os conceitos e os alunos não conseguiram adquirir esta visão, pensou-se na possibilidade deste fato estar ligado às atividades apresentadas ao grupo;
- b) se o livro didático estudado é uma das ferramentas para as atividades e não propicia esta conversão entre os diferentes registros de representação semiótica, as tarefas da sequência didática deveriam propiciar esta oportunidade aos educandos. Esta preocupação se justifica uma vez que, como foi citado em capítulo anterior deste material, para Duval (2005, p.15) a “compreensão matemática está intimamente ligada ao fato de dispor de ao menos dois registros de representações diferentes”.

Assim, após a aplicação e análise dos resultados deste material passou-se à construção das tarefas da sequência didática que pudessem suprir as dificuldades apresentadas pelos estudantes, constando de conversões entre os diferentes registros de representação semiótica para, em posterior análise, verificar-se o comportamento dos estudantes do ensino médio ao se depararem com esta sequência envolvendo diferentes registros de representação semiótica de funções.

5 AS TAREFAS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo serão apresentadas as tarefas presentes na sequência didática. Torna-se importante ressaltar que a sequência didática é composta por todas as fases desde as análises prévias à validação, passando pelas justificativas das escolhas e formas de tarefas e a forma de apresentação das mesmas.

Uma pergunta norteava o início da elaboração das tarefas pertinentes à sequência didática. Pergunta esta feita por Duval (2005, p.23): “Como um aluno pode aprender a reconhecer um objeto matemático por meio de múltiplas representações que podem ser feitas em diferentes registros de representação?”.

Baseando-se no mesmo autor, viu-se a necessidade de observar estas mudanças de registros de representação semiótica nos educandos:

Os métodos a serem utilizados numa pesquisa são sempre relativos à natureza dos fenômenos a estudar. Ora, acabamos de ver que os fenômenos cognitivos reveladores da atividade matemática concernem à mobilização de vários registros de representação semiótica e à conversão dessas representações. É preciso, então, desenvolver um método que permita observar verdadeiramente estes fenômenos nas produções dos alunos (DUVAL, 2005, p.24).

Ainda segundo Duval (2005) a utilização da conversão como instrumento de análise precisa obedecer duas condições:

- * dar-se a representação a mais elementar possível, R^1 , de um objeto em um registro de saída A e sua representação convertida R'^1 em um registro de chegada B;
- * proceder a todas as variações possíveis de $R^1, R^2 \dots R^n$ que conservem nas diferentes representações um valor de representação de alguma coisa no registro de saída A, e observar as variações concomitantes de R'^1 no registro de chegada B (DUVAL, 2005, p. 25).

Buscou-se nas tarefas desta sequência didática apresentar uma atividade do reconhecimento, ou seja, a identificação dos objetos matemáticos em diferentes registros de representação semiótica.

Outro aspecto importante para a elaboração das tarefas da sequência didática é a busca de instruir os educandos na tentativa da associação entre os diferentes registros de representação semiótica do objeto matemático função. Esta instrução foi demonstrada como

necessária nos estudos de Duval (2005). Além disso, Duval (2009) explica que a coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica não é espontânea e conseqüentemente as tarefas elaboradas devem suprir esta dificuldade.

A coordenação entre representações ressaltando sistemas semióticos diferentes não tem nada de espontâneo. Sua colocação não resulta automaticamente de aprendizagens clássicas muito diretamente centradas sobre conteúdos de ensino. Um trabalho de aprendizagem específico centrado sobre a diversidade de sistemas de representação, sobre a utilização de suas possibilidades próprias, sobre sua comparação por colocar em correspondência e sobre suas “traduções” mútuas uma dentro da outra parece necessário para favorecê-la (DUVAL, 2009, p.19).

Buscou-se apresentar também na proposta, situações que não representam funções com o intuito de propiciar ao educando a oportunidade de relacionar o que não é função com o conceito de função associado ao estudo de relação.

Com base nestas argumentações, sob a luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica propostas por Duval (2005), a Engenharia Didática, sugerida por Michele Artigue (1988), o pensamento algébrico proposto por Lins e Gimenez (1997), Usiskin (1995), Kieran (1992) e finalmente o estudo do erro sugerido por Cury (2007), as tarefas da sequência didática aplicada aos alunos foram então elaboradas.

5.1 AS TAREFAS APRESENTADAS NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

As tarefas da sequência didática foram aplicadas individualmente a 29 alunos do 2º Ensino Médio da escola observada. Destes apenas 18 realizaram todas as atividades propostas. A descrição de cada aplicação com intervenções e observações será apresentada posteriormente. O trabalho foi realizado em seis aulas entre os dias 22 e 26 do mês de março de 2010. A seguir têm-se cada uma das tarefas aplicadas aos estudantes e as justificativas de cada uma delas, caracterizando as análises *a priori*.

Tarefa 1

Como visto em séries anteriores, é possível representar as funções de algumas maneiras diferentes. As funções podem ser entendidas, por exemplo, como a generalização de uma situação na resolução de situações-problemas.

Desta forma, resolva as situações apresentadas abaixo, encontrando a forma geral para a resolução de cada situação:

a) Um veículo sai do quilômetro 30 de uma rodovia. Sua velocidade é constante e tem o valor de 80 km/h. Assim, o veículo encontra-se no quilômetro 110, após uma hora de viagem. Com base nestas informações, responda:

a1) A localização do veículo após duas horas de viagem;

a2) A localização do veículo após três horas de viagem;

a3) A localização do veículo após t horas de viagem.

b) Um vidraceiro cobra R\$ 5,00 pela visita e mais R\$ 15,00 por vidro colocado. Com base nestas informações, responda:

b1) Quanto o vidraceiro cobrará se colocar 1 vidro em uma casa?

b2) Quanto o vidraceiro cobrará se colocar 2 vidros em uma casa?

b3) Quanto o vidraceiro cobrará se colocar v vidros em uma casa?

c) Para as festas de final de ano muitas pessoas levam carne de porco para assar em uma padaria. O padeiro cobra R\$ 5,00 pelo serviço e mais R\$ 0,45 por quilo de carne. Desta forma, para assar um pedaço de carne de um quilograma paga-se R\$ 5,45. Com base nestas informações, responda:

c1) Quanto o padeiro cobrará se assar um pedaço de carne com 2,33 kg?

c2) Quanto o padeiro cobrará se assar um pedaço de carne com 5,48 kg?

c3) Quanto o padeiro cobrará se assar x quilogramas de carne?

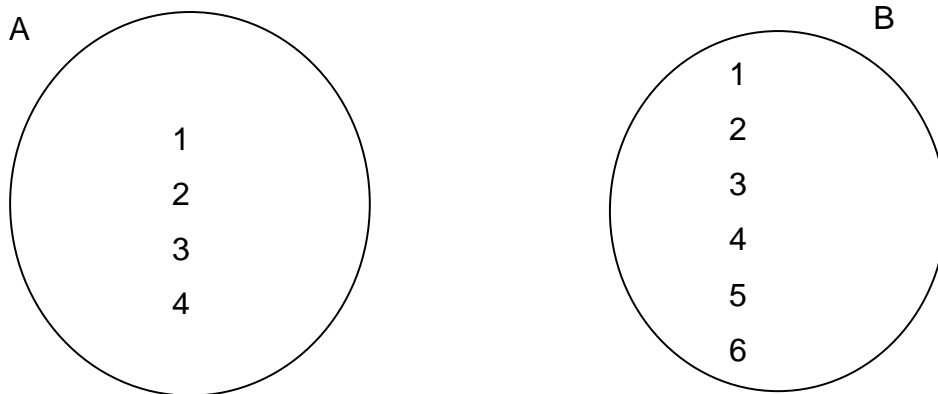
Análise a priori: Buscava-se com a atividade proposta que os alunos retomassem o registro algébrico de função, um dos registros de representação semiótica com a qual tiveram contato em anos anteriores. Pretendia-se também rever o conceito de função partindo da generalização de uma situação-problema, gerando a possibilidade de observar indícios de pensamento algébrico, partindo da generalização da aritmética. Posteriormente, buscar-se-ia associar todos os registros de representação semiótica.

Havia a expectativa de que os educandos apresentassem dificuldades na resolução do terceiro item em virtude dos valores decimais.

Tarefa 2

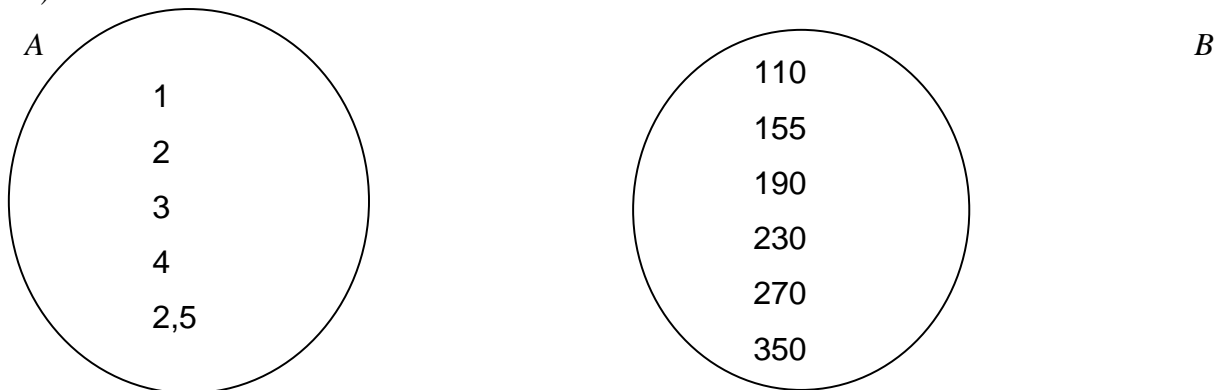
Outra forma de estudar as funções é a partir de casos particulares de relações entre conjuntos numéricos, utilizando-se de setas para “ligar” os elementos. Para tanto, deve haver uma “condição de dependência” para ligação entre os elementos de um conjunto e os elementos do outro conjunto. Desta forma, faça a ligação entre os elementos do conjunto A e os elementos do conjunto B, utilizando a “condição de dependência” apresentada em cada situação:

a1)



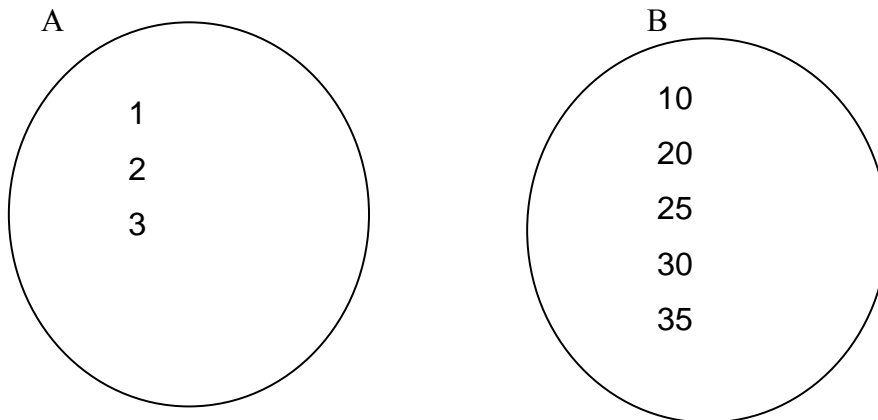
Condição de dependência: Cada elemento de A deve associar-se em B, com elementos que representem o seu dobro diminuído de 1.

a2)



Condição de dependência: Cada elemento de A deve ser multiplicado por 80 e depois somado com 30 para então ter seu resultado associado em B.

a3)



Condição de dependência: Cada elemento de A deve ser multiplicado por 15 e depois devem ser somados 5 ao resultado.

Análise a priori: Como se observou no pré-teste que os alunos conseguiam associar a relação entre dois conjuntos como registro de representação semiótica do objeto matemático função, resolveu-se utilizar essa atividade para retomar esta forma de registro de representação semiótica. Pelas constatações anteriores considerava-se que provavelmente os educandos não teriam grandes dificuldades na realização desta tarefa.

Tarefa 3

Das três situações problema resolvidas na atividade 1 utilizando da função como generalização destas situações, duas estão representadas na atividade 2 através do diagrama de setas. Sendo assim, informe:

- a) *A que letra da atividade 2 relaciona-se o item a da atividade 1?*
- b) *A que letra da atividade 2 relaciona-se o item b da atividade 1?*
- c) *Elabore um diagrama de setas para representar o item c da atividade 1.*

Análise a priori: Como observado em Duval (2006), “Alterar o registro de representação é o limiar da compreensão matemática para os alunos em cada etapa do currículo (p.128)”. Assim, nesta atividade, tentou-se propiciar ao educando trabalhar com a conversão de diferentes registros de representação semiótica. Nela relacionou-se a forma algébrica observada na generalização de situações problema e o registro de representação semiótica na relação entre dois conjuntos.

Como se tratava de conversão entre diferentes registros de representação semiótica, considerava-se que esta condição poderia representar dificuldade para a resolução por parte de alguns educandos.

Tarefa 4

Escreva na linguagem algébrica a condição de dependência apresentada em cada situação da atividade 2.

Análise a priori: Interligou-se o registro da representação semiótica por meio da relação entre conjuntos e a forma algébrica de representar funções.

Novamente, como ocorre a conversão entre dois diferentes registros de representação semiótica, havia a expectativa de que os educandos apresentassem dificuldades na resolução. Outra característica desta atividade está na utilização do pensamento algébrico e isto poderia representar novas dificuldades aos educandos quando da sua resolução.

Tarefa 5

Como estudado anteriormente existem relações que podem representar funções. Para que uma relação seja função cada elemento do conjunto de domínio (A) deve possuir um, e somente um correspondente no contradomínio (B). Com base nesta informação, identifique as relações que representam funções na atividade 2. Justifique as alternativas que você assinalou como não sendo funções.

Análise a priori: Buscava-se com esta atividade estudar aquilo que não representa função, utilizando sua ideia dentro do registro de relações entre conjuntos. Estudar esta situação poderia facilitar a compreensão do que realmente representa o objeto matemático função.

Como já fora observado que os educandos reconheciam este registro de representação semiótica do objeto matemático, então havia a expectativa que os mesmos não apresentassem dificuldades na realização desta atividade.

Tarefa 6

Ao se elaborar a sequência didática acabou-se por repetir a tarefa 3, então passou-se para a tarefa 7.

Tarefa 7

Outra maneira de estudar as funções é por intermédio do gráfico bidimensional. Considerando os conjuntos numéricos pode-se ter relações entre os conjuntos dos inteiros e o conjunto dos inteiros, ou dos racionais com os racionais. Desta forma, quando o domínio e o contradomínio passam a ser o conjunto dos números reais temos representações contínuas (sem “quebras”) no plano cartesiano. O eixo das abscissas (“x”)

passa a representar o domínio e o eixo das ordenadas (“y”) passa a representar o contradomínio. Viu-se também que uma função de 1º grau terá como representação uma reta.

Com base nestas informações responda:

a) Por que o item b da atividade 1 não poderá ser representado por uma reta?

b) Por que para considerarmos o item a desta mesma atividade como uma função precisamos colocar restrições ao domínio?

Análise a priori: Nesta atividade apresentou-se outro registro representação semiótica do objeto matemático função. A forma gráfica foi, nesta tarefa, relacionada com a idéia de domínio e contradomínio no registro de representação semiótica na relação entre dois conjuntos.

Considerava-se que nesta atividade diversos alunos comesçassem a desenvolver, partindo da conversão entre o registro na relação entre conjuntos para o registro gráfico.

Tarefa 8

Construa o gráfico do item a e b da atividade 1.

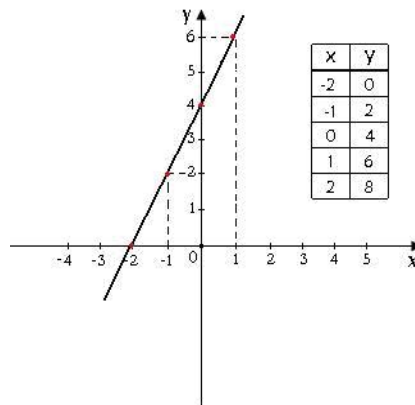
Análise a priori: Buscava-se trabalhar a conversão entre os diferentes registros de representação semiótica do objeto matemático estudado, relacionando o registro de representação algébrica com o registro de representação gráfica.

Como a conversão entre o registro algébrico e o registro gráfico fora privilegiada no livro didático havia uma expectativa que os educandos realizassem sem maiores dificuldades a tarefa proposta.

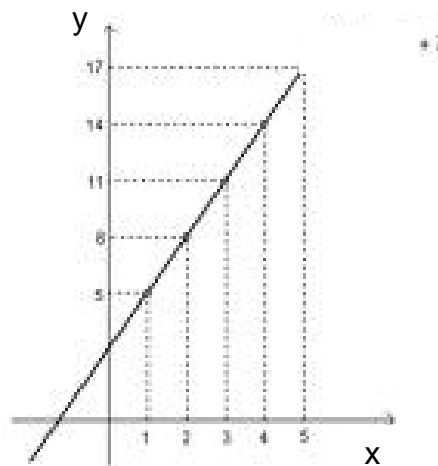
Tarefa 9

Se uma função pode ser estudada como a generalização de uma situação problema ou um caso específico de relação entre conjuntos ou a partir da representação gráfica desta situação, então podemos transitar entre estas diferentes representações e, desta forma, podemos nos gráficos abaixo escrever a condição de dependência de cada um:

a)



b)



Análise a priori: Relaciona-se nesta tarefa o registro gráfico e o registro tabular com o registro na relação entre conjuntos. Porém, optou-se por trabalhar com o caminho inverso, algo não contemplado pelo livro didático.

Como fora citado nos estudos de Duval (2005) o entendimento da conversão em um lado não representa o entendimento no sentido inverso. Assim, havia a expectativa que os educandos apresentassem dificuldades por não terem trabalhado a conversão no sentido inverso.

Tarefa 10

Explique a relação que há entre as ideias de domínio, contradomínio apresentada nos conjuntos numéricos e estas mesmas ideias no plano bidimensional com os eixos x e y .

Análise *a priori*: Propiciou-se aos educandos a possibilidade de relacionar o registro na relação entre conjuntos com o registro gráfico. Nesta atividade, relacionaram-se as ideias de domínio e contradomínio aos eixos do plano bidimensional.

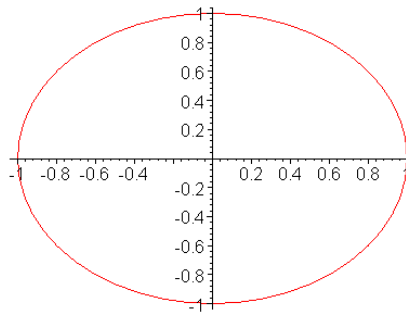
Como já foram trabalhados os diferentes registros de representação semiótica envolvidas na tarefa havia a expectativa de que os educandos conseguissem resolvê-la, relacionando o eixo das ordenadas ao contradomínio e o eixo das abscissas ao domínio no registro na relação entre conjuntos.

Tarefa 11

Há, porém, gráficos que não representam funções, pois não satisfazem à condição inicial para ser uma função a partir da relação entre dois conjuntos.

Como vimos na atividade 2, a condição para que uma relação represente uma função é a de que cada elemento do domínio possua um e somente um correspondente no contradomínio. Desta forma, justifique as representações gráficas que não representam funções:

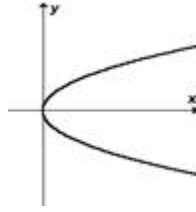
a)



Justificativa: _____

Elabore um diagrama de setas para representar esta situação e comprovar sua justificativa.

b)



Justificativa: _____

Elabore um diagrama de setas para representar esta situação e comprovar sua justificativa.

Análise a priori: Buscou-se a conversão de registros de representação associando dois registros de representações de funções, porém agora associando ao estudo do erro. Propiciou-se aos estudantes a oportunidade de analisar situações que apresentem erros ou, a possibilidade da inversão de domínio, para, em conseguindo identificar estes erros, associarem os conceitos básicos de funções com as justificativas para os erros nas atividades que não representam funções.

Neste momento esperava-se que os alunos conseguissem associar estas condições ao conceito de função visto anteriormente.

Tarefa 12

*Vimos também que podemos encontrar as funções definidas por fórmulas matemáticas e pelos motivos estudados nas atividades anteriores há algumas definições que não representam funções. Assim, justifique por que as definições por fórmulas apresentadas a seguir **não** podem ser consideradas funções?*

$$a) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } f(x) = \frac{1}{x}$$

Justificativa: _____

Represente por intermédio do diagrama de setas esta situação para comprovar que a mesma não representa uma função.

$$b) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \sqrt{x+8}$$

Justificativa: _____

Represente por intermédio do diagrama de setas esta situação para comprovar que a mesma não representa uma função.

Análise a priori: De forma análoga ao que foi visto na tarefa anterior utilizou-se o estudo do erro e a conversão de registro de representação. Porém nesta tarefa utilizou-se o registro algébrico e o registro na relação entre conjuntos.

Assim como na tarefa 10, havia a expectativa que os educandos realizassem a proposta, pois estavam, neste momento, mais familiarizados com as conversões destes registros de representação semiótica.

Tarefa 13

Como vimos em todas as atividades o problema para situações que não representam funções está no domínio precisar sempre possuir um e somente um correspondente no contradomínio. Elabore um relatório descrevendo a relação que há entre as quatro formas de observarmos as funções (como generalização de situações-problemas, como diagramas de setas, como gráficos e definidas por fórmulas matemáticas).

Análise a priori: A análise de uma situação aberta, com possibilidade de descrição do objeto matemático estudado, poderiam resultar em situações que propiciassem uma apreciação mais detalhada das noções compreendidas pelos educandos. Visou-se assim, observar a capacidade de conversão, por parte dos alunos, entre os diferentes registros de representação semiótica do objeto matemático função.

Esperava-se que nesta tarefa os educandos conseguissem efetuar as conversões envolvendo os diferentes registros de representação semiótica estudados, quais sejam, o registro gráfico, o registro tabular e o registro pela relação entre conjuntos.

Havia ainda a expectativa de que esta tarefa pudesse tornar-se posteriormente a principal fonte de dados desta pesquisa.

6 EXPERIMENTAÇÃO, ANÁLISES *A POSTERIORI* E VALIDAÇÃO

Neste capítulo passa-se à descrição, às análises *a posteriori* e à validação do experimento realizado. Realizou-se uma análise horizontal observando cada atividade separadamente e, posteriormente, uma análise vertical individual das tarefas de cada um dos educandos, verificando se os mesmos associam os diferentes registros de representação semiótica efetuando as conversões necessárias, bem como se apresentam indícios de pensamento algébrico.

Como relatado anteriormente, dos 29 alunos que participaram da aplicação da sequência didática, que se deu em seis aulas de 50 minutos, apenas 18 realizaram todas as tarefas. Estes serão os sujeitos da pesquisa e os indicaremos por A1, A2, A3,...]A18.

Torna-se importante relatar, mais uma vez, que a sequência didática não é composta apenas pelas tarefas nela apresentadas, mas também por todo o contexto envolvido na situação, ou seja, as análises, a elaboração do pré-teste, a execução com cada atitude em cada tarefa. Dividimos a sequência em 13 sessões, nas quais foram apresentadas e realizadas as tarefas e as discussões com os alunos sobre algumas partes destas tarefas.

Em diversas tarefas optou-se pela leitura em voz alta por um dos educandos como forma de evitar que alunos com maior habilidade resolvessem rapidamente e acabassem por dispersar o grupo com conversas. Desta forma, a leitura pretendia trabalhar apenas como regulador do tempo de resolução e, mesmo correndo o risco de influenciar na interpretação, considerou-se menos preocupante que o risco da troca de informações causadas pelo não controle do tempo.

Após a análise horizontal observando-se cada uma das tarefas e, no final das 12 primeiras sessões, há um quadro resumo, que possibilitará uma visualização global, de maneira sintética, dos dados obtidos nestas tarefas. Posteriormente há uma análise vertical e, no final do capítulo, há outro quadro elucidativo para a compreensão da última tarefa.

6.1 ANÁLISE HORIZONTAL

Sessão um: Como relatado anteriormente visava-se que os alunos conseguissem retomar inicialmente o registro de representação semiótica de função como generalização de uma situação-problema. Iniciamos com a apresentação da tarefa 1.

Descrição: O primeiro item foi feito por meio de debate com o grupo, isto é, um dos educandos leu o enunciado e o item a da tarefa. Foram realizadas discussões a respeito da questão e deste item, visando entendimento da tarefa. Desta forma este item acabou sendo resolvido em conjunto. Já os itens b e c da atividade foram solucionados pelos estudantes sem qualquer interferência.

No item b, os alunos não apresentaram grandes dificuldades e todos conseguiram êxito, diferenciando-se apenas pela forma de representar a função. Observou-se que os educandos conseguem associar ao objeto matemático função a forma algébrica de representá-lo, proporcionando assim indícios de pensamento algébrico em suas resoluções.

No item c, porém, provavelmente em virtude dos números decimais, constatou-se maior dificuldade durante os trabalhos (como se previu nas análises *a priori*). Apesar disso, apenas um dos pesquisados não conseguiu interpretar a situação e não resolveu o problema apresentado. Os alunos A1 e A16 apresentaram erro em c1. Já os alunos A5 e A8 apresentaram erros em c2. Em ambos os casos o erro foi o mesmo. Ocorreu por não somarem o valor fixo, ou seja, não utilizaram a representação algébrica que descobriram corretamente em c3 da maneira adequada. O aluno A15 não realizou o item c.

Assim observou-se que os educandos apresentam indícios de pensamento algébrico, pois conseguiram apresentar a forma algébrica de função, porém esta descrição individual será mais bem explicitada posteriormente. Como foram notadas dificuldades no uso de decimais, acredita-se que estas podem ser sanadas com mais algumas atividades, sem o uso de decimais, propiciando mais confiança para posterior avanço neste sentido.

Sessão dois: Nesta sessão aborda-se a tarefa 2, a qual visava iniciar a associação entre o registro na relação entre dois conjuntos e a representação gráfica, possibilitando assim o início de conversão entre os diferentes registros de representação semiótica do objeto estudado.

Descrição: Como fora observado, a relação entre dois conjuntos é algo bem entendido pelos educandos, então após a realização do primeiro dos três itens em grupo, os outros dois ficaram por conta dos alunos, que não demonstraram problemas em resolvê-los.

Como os estudantes haviam visualizado bem este registro de representação semiótica do objeto matemático função, no pré-teste, alguns começaram a dizer que os dois últimos representavam funções e o primeiro não. Estas colocações anteciparam a atividade 5 que propunha exatamente esta classificação. Apesar disso, a aluna A1 no item a2, colocou que a mesma tratava-se de uma função, mas fez a correspondência de maneira errada, associando 2 e 2,5 ao número 190, provavelmente por apresentar erros nos cálculos.

Assim, como fora previsto inicialmente, os educandos não apresentaram dificuldades na resolução desta tarefa.

Sessão três: Buscava-se com esta tarefa verificar se os educandos associavam os registros de representação semiótica de funções na forma algébrica e a relação entre dois conjuntos, trabalhando novamente com a conversão entre os registros de representação, como vimos em Duval (2005), no capítulo 1.

Descrição: Como os estudantes já estavam acostumados com as tarefas da sequência didática, a partir desta passou-se a apenas fazer a leitura. Analogamente às tarefas anteriores, realizou-se um debate ao final da sessão onde os educandos apresentaram e argumentaram sobre as suas resoluções sem, no entanto, ser apresentada pelo educador a resposta. Assim, apesar de não haver novas explicações, estas situações propiciaram maiores condições para a resolução de situações posteriores.

No item **a**, 11 alunos conseguiram relacionar a situação-problema com a relação entre conjuntos. Destes, 10 relacionaram também no item **b** desta mesma atividade. Os alunos A3 e A10 responderam utilizando letras (b e c) o que permitiu perceber a necessidade da mudança no enunciado da atividade, uma vez que esta pede a letra e o correto seria: “A que item da atividade 2...”.

Os alunos A5 e A8 não realizaram a atividade. O aluno A9, inverteu as relações e o aluno A11 associou ambas com o item **a2** da tarefa 2.

O aluno A13 ou não associou a relação entre conjuntos com o resultado encontrado na tarefa 1 ou não entendeu o enunciado do exercício.

O aluno A14 associou com os itens errados.

No item **c** desta atividade apenas dois alunos conseguiram desenvolver corretamente a elaboração de um diagrama (A17 e A18) para representar uma situação

algébrica (figura 3). Outros sete alunos (A2, A7, A8, A9, A10, A12 e A16), resolveram parcialmente utilizando-se de apenas uma ligação, levando 1 em R\$ 5,45. Três alunos não fizeram (A5, A13 e A15). Outros três (A1, A3 e A14) não utilizaram valores decimais, montando a representação utilizando diagrama com valores que não correspondiam ao que o exercício pedia, considerando os valores fixos no aumento do peso para assar a carne no exercício, sem utilizar a regra elaborada na atividade 1 (figura 4). Um dos educandos (A6), inverteu domínio e contradomínio. Outro aluno (A4) utilizou a linguagem corretamente, porém criou uma regra diferente da dada pelo exercício para associar os elementos dos dois conjuntos. O aluno (A11) usou valores inteiros e ligou com os resultados encontrados no item c da atividade 1.

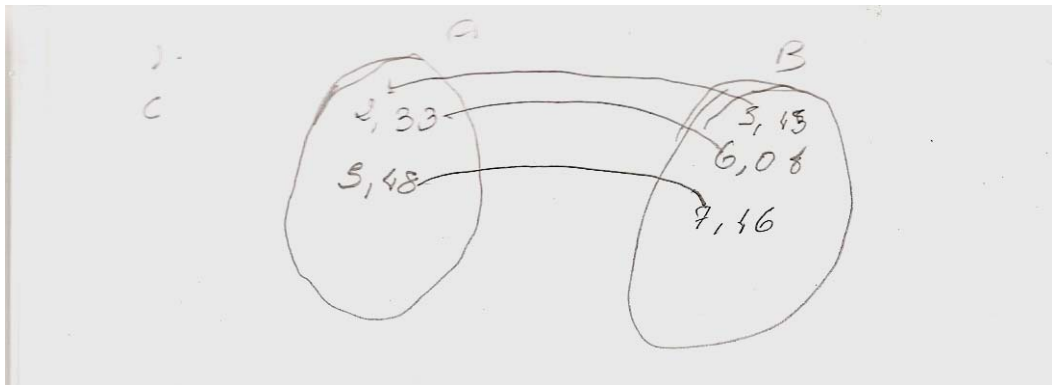


Figura 3 – Resolução da tarefa 3 da sequência didática pelo aluno A17

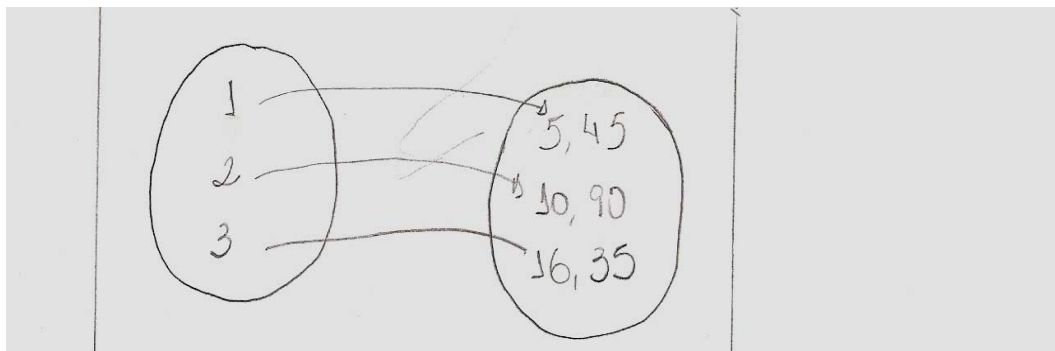


Figura 4 – Resolução da tarefa 3 da sequência didática pelo aluno A1

Pode-se observar que com exceção dos três alunos que não realizaram a atividade, todos os demais entenderam que é possível efetuar a conversão entre os dois registros de representação semiótica do objeto matemático função.

A respeito dos erros observados nos educandos A1, A3, A14, destaca-se que eles apresentavam noção de correspondência, porém, ao aplicarem a regra, não a utilizavam corretamente. O estudante A4 apresentou um erro parecido, contudo não atentou para o fato de que a atividade solicitava que a regra fosse a da atividade 1, item c e não uma outra qualquer. Nas quatro situações os estudantes não utilizaram números decimais.

Analogamente, ao observado na tarefa 1, é possível constatar que os educandos estavam iniciando a compreensão na relação entre conjuntos e com isso se conclui, mais uma vez, que apenas três situações iniciais e posteriormente duas situações resolvidas relacionando conjuntos foram insuficientes para que os educandos chegassem a uma compreender a condição para a conversão entre estes registros de representação semiótica.

Sessão quatro: Buscava-se que os educandos relacionassem o registro de representação semiótica utilizando conjuntos e a forma algébrica de representar funções. Esta característica é importante face à colocação feita nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

É conveniente solicitar aos alunos que expressem em palavras uma função, por exemplo, $f(x) = 2x + 3$, como a função que associa a um dado valor real o seu dobro, acrescido de 3 unidades; isso pode facilitar a identificação, por parte do aluno, da ideia de função em outras situações, como, por exemplo, no estudo de cinemática, em Física (BRASIL, 2008, p.72).

Descrição: Novamente foi apenas solicitado que um dos educandos efetua-se a leitura da proposta e em seguida os educandos passaram à resolução da tarefa.

Dos pesquisados, apenas onze alunos acertaram os três itens completamente, os demais erraram também completamente.

O aluno A3 associou a ideia apenas com números sem, no entanto, generalizar a situação. Os alunos A5, A8, A15 e A16 não realizaram a atividade. Os alunos A2 e A13 não demonstraram habilidade na utilização do pensamento algébrico, pois não conseguiram expressar nesta linguagem o que haviam entendido da situação, respondendo, por exemplo: x.2.3.

Desta forma observa-se que, apesar de apresentarem anteriormente indícios de pensamento algébrico (na atividade 1), alguns dos educandos não utilizaram esta linguagem quando precisavam expressar a condição de dependência na relação entre conjuntos.

Torna-se importante ressaltar que, como fora previsto nas análises *a priori*, isto pode ter ocorrido em virtude da mudança de registro de representação semiótica, pois anteriormente tratou-se da linguagem algébrica como generalização de situações problemas e em seguida utilizou-se a linguagem algébrica para descrever a condição de dependência na relação entre conjuntos.

Sessão cinco: Pretendia-se nesta sessão reforçar os as ideias estudadas sobre o registro de representação semiótica de funções por meio da relação entre conjuntos. Foi aplicada a tarefa 5, a qual abordava relações que não necessariamente eram funções. Como os estudantes, na sessão dois, já tiveram essa noção clara, nesta sessão apenas revisaram-se as reflexões realizadas na sessão dois.

Descrição: Todos os pesquisados conseguiram classificar as relações em funções ou não funções. Como foi dito anteriormente, muitos educandos, já no momento da resolução da atividade 2, associaram as relações entre conjuntos com o fato de serem ou não funções. Desta forma, com este número de acertos reforça-se a necessidade de se colocar esta atividade como a terceira nesta sequência didática, como ocorreu durante a aplicação desta sequência que conseqüentemente, não precisou sequer ser lida ao grupo.

Apenas o aluno A7 não realizou o item **c**. Também os alunos A8, A16 e A18 não apresentaram resposta para os itens **b** e **c**. Isto provavelmente ocorreu porque os educandos centraram-se na justificativa para a situação que não representava função, ignorando o primeiro item desta atividade que pedia para identificar as relações que representavam funções.

Na elaboração das tarefas da sequência didática, como informado anteriormente, acabou-se por repetir a tarefa 3 novamente, então passa-se a seguir para a sessão sete.

Sessão sete: Buscava-se com esta atividade relacionar o uso do gráfico bidimensional associado à descontinuidade formada por pontos observada no conjunto dos números inteiros, relacionando assim mais uma vez, o registro gráfico com a relação entre dois conjuntos.

Descrição: Diferentemente do que se havia previsto nas análises *a priori* os educandos ainda não demonstraram clareza no desenvolvimento desta tarefa utilizando a conversão entre o registro de representação semiótica na relação entre conjuntos e o registro gráfico.

Assim, ao se iniciar a tarefa foram observadas algumas queixas dos estudantes quanto à sua resolução. Estas reclamações podem ser justificadas, pois não houve situações similares resolvidas anteriormente nem apareceram no livro didático utilizado pelo grupo. Desta forma, o primeiro item foi feito em grupo para ampliar a discussão e minimizar as dificuldades auxiliando no entendimento. Uma possível solução para esta situação seria a utilização desta tarefa como prévia para a apresentação de outras posteriormente.

No segundo item, dentre os alunos pesquisados, 15 relacionaram o domínio à ideia da restrição ao tempo negativo e à conseqüente impossibilidade da continuidade do gráfico nestes valores. O aluno A10, apesar de apresentar conhecimento sobre o assunto não foi claro em sua resposta e relacionou parte da resposta do item **a** com a resolução do item **b**: “porque o tempo não pode ser negativo, por isso é contínuo”, ou seja, associou a restrição à continuidade. Os alunos A9, A11, A13, A14 citaram a ideia da impossibilidade do uso de “números negativos” no domínio sem, no entanto, relacionar esta informação ao tempo. Os alunos A5 e A15 não responderam à questão. Isto representa que apenas os últimos não conseguiram realizar a atividade e, com isso, observa-se que uma grande parte dos educandos conseguiu iniciar uma “ponte” entre os dois registros de representação semiótica. Como já fora alertado anteriormente a elaboração de mais atividades provavelmente facilitaria a verificação do aprendizado, pois fazendo um dos itens restou apenas outro para verificação do entendimento da relação entre os dois registros de representação semiótica.

Sessão oito: Após terem visualizado a relação entre conjuntos e a representação gráfica, a partir da ideia de domínio, visava-se nesta atividade associar a representação algébrica com a gráfica de funções, numa nova tentativa de relacionar dois registros de representação semiótica do objeto matemático estudado.

Descrição: Apesar do grande número de alunos que havia acertado a atividade anterior, observaram-se vários erros relacionados inclusive com a ideia de domínio e descontinuidade do objeto matemático estudado o que não confirmou as expectativas apresentadas nas análises *a priori*.

Dentre os pesquisados apenas sete estudantes acertaram os dois itens.

O aluno A4 acertou o item **b**, apresentando inclusive a descontinuidade, porém fez o mesmo no item **a** (figura 5).

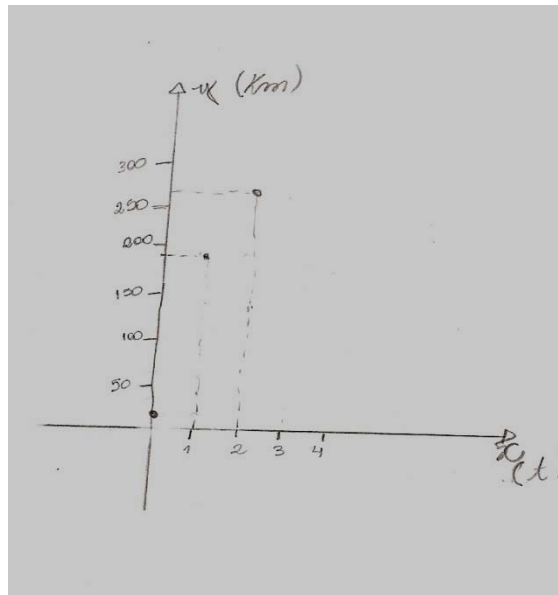


Figura 5 – Resolução da tarefa 8 da sequência didática pelo aluno A4

Os alunos A16, A9, A7, A3 e A2 não associaram os valores encontrados na atividade b com o gráfico proposto nesta atividade (figura 6).

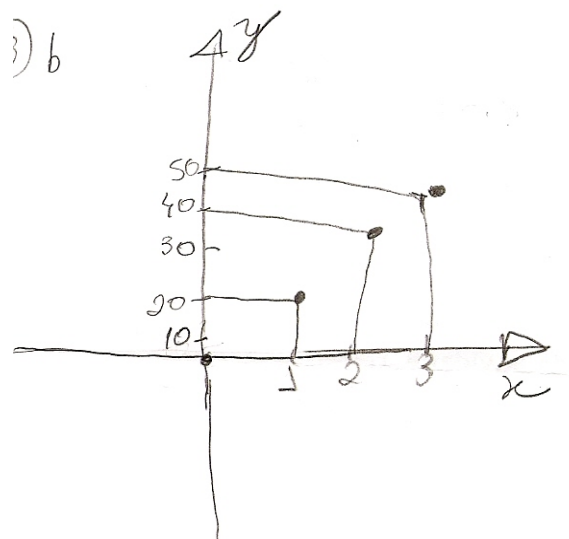


Figura 6 – Resolução da tarefa 8 da sequência didática pelo aluno A2

O aluno A1 acertou o gráfico que se referia ao item **b** do exercício 1, porém o item **a**, assim como A3, apesar de observar a impossibilidade do trabalho com números negativos não observou esta restrição no registro gráfico (figura 7). Isto gera a crença de que,

apesar do entendimento da possibilidade de diferentes registros de representação semiótica do objeto matemático, os educandos ainda não observam que restrições destes objetos na análise para a resolução de problemas devem ser convertidas para o registro gráfico. É possível que isso ocorra pela falta de visualização do objeto matemático estudado nos diferentes registros de representação semiótica e a consequente conversão entre os mesmos, pois esta situação seria facilmente compreendida se fosse aplicado o registro na relação entre dois conjuntos.

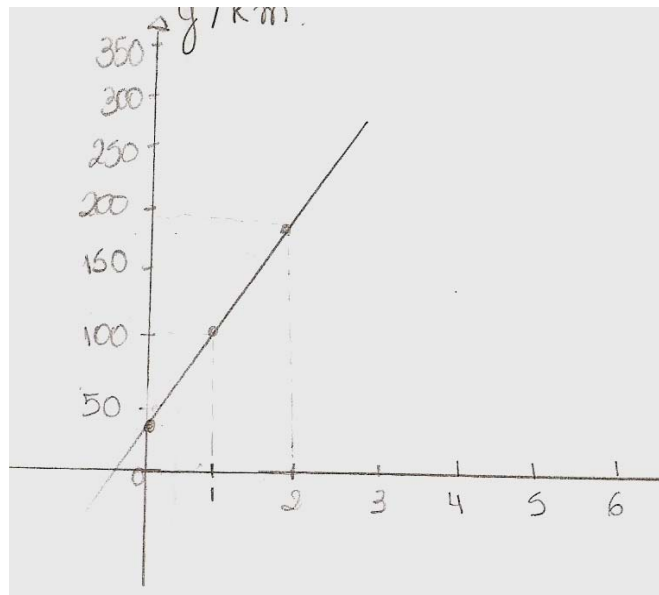


Figura 7– Resolução da tarefa 8 da sequência didática pelo aluno A1

Os alunos A8 e A12 apresentaram erros similares aos observados nas figuras 6 e 7.

O aluno A13, apesar de acertar o item **a**, não observou a necessidade da descontinuidade no item **b** e fez a ligação dos pontos nesta atividade.

O aluno A14 acertou o **a**, porém em **b** não associou os valores encontrados na atividade da 1 com a construção do gráfico proposto nesta unidade.

O aluno A15 não realizou a atividade proposta.

Há uma base inicial observada na tarefa anterior, quanto ao aspecto teórico, e que já foi observada totalmente (seis alunos) ou parcialmente (por mais quatro alunos). Há ainda um grupo de oito alunos que não conseguiu converter para o registro na forma gráfica, no aspecto prático, desta forma observa-se que o estudo de outros gráficos fazendo o caminho

inverso (observando o gráfico e convertendo para outro registro de representação semiótica) contribuiria substancialmente para suprir esta lacuna.

Sessão nove: Como observado anteriormente a conversão em um sentido não representa o mesmo que a volta entre estes mesmos dois registros de representação semiótica. Buscou-se, também nesta atividade, propiciar aos educandos uma possibilidade de relacionar o registro gráfico, ou a relação entre conjuntos e o registro algébrico.

Descrição: Para que fosse possível observar a condição de reversão dos registros apresentados, além da conversão entre os registros de representação semiótica resolveu-se, novamente, nesta tarefa, não efetuar qualquer tipo de explicação. Apesar disso vários educandos conseguiram efetuar a conversão no sentido inverso contrariando as previsões apresentadas na análise *a priori*.

Dez dos pesquisados acertaram a atividade completamente. Chamou a atenção o educando A17 que, além da conversão do registro gráfico, para o registro algébrico, e, por relação entre dois conjuntos, usou também o registro da língua natural para descrever a situação apresentada no registro gráfico.

Os alunos A1 e A3 fizeram corretamente o item **b**, porém no item **a** apenas representaram na forma algébrica. Já o estudante A2 acertou o item **a**, contudo no item **b** ele apenas representou por meio da relação entre conjuntos.

Os alunos A6, A11 e A18, representaram apenas na forma algébrica, mas o estudante A11 também descreveu no registro na língua natural e A18 tentou associar o primeiro item a um problema: “A cada hora que passa eu ando dois quilômetros”.

O aluno A16 resolveu corretamente o item **a**, porém em **b** o mesmo associou o elemento do domínio com pares ordenados no contradomínio (figura 8) .

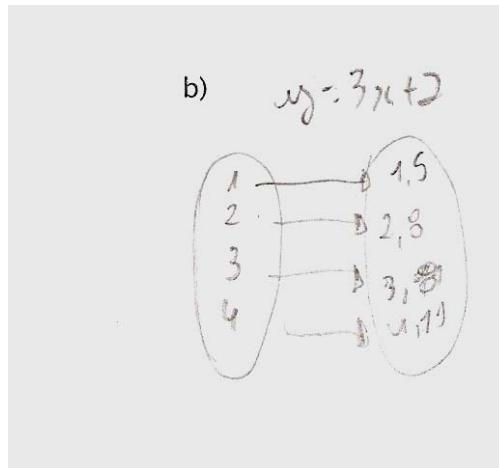


Figura 8– Resolução da tarefa 9 b da sequência didática pelo aluno A16

Pelo êxito alcançado observa-se que, realmente, a atividade apresentada serve para complementar as atividades anteriores e os alunos evoluíram na execução desta proposta.

Sessão dez: As ideias de domínio e contradomínio são importantes no entendimento de situações que não representam funções e os argumentos a respeito destas situações. Para isso elaborou-se tarefa buscando propiciar aos educandos condições para resolver situações que serão cobradas posteriormente.

Descrição: Dentre os pesquisados 13 relacionaram o domínio ao eixo das abscissas e o contradomínio ao eixo das ordenadas. Considera-se que a atividade atingiu as expectativas e boa parte dos alunos conseguiu compreender a ideia a ser desenvolvida, relacionando estas ideias, como fora previsto nas análises *a priori*.

Os alunos A1 e A14 não fizeram a atividade e os alunos A5, A8 e A16 relacionaram esta atividade com o item b da atividade anterior, como se pode observar na figura 9 a seguir.

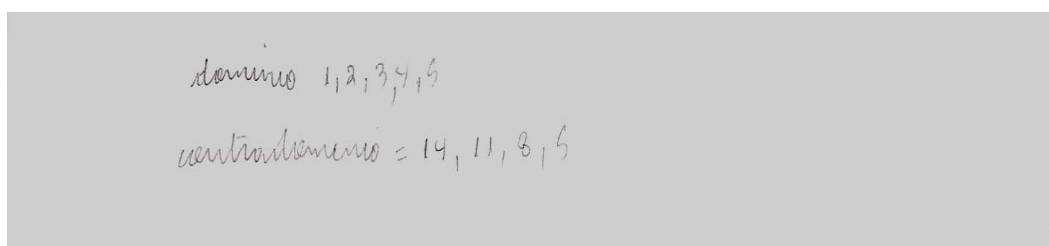


Figura 9– Resolução da tarefa 10 da sequência didática pelo aluno A5

Sessão onze: Buscou-se a relação entre dois registros de representação de funções. Foram apresentadas situações com erros para que, em conseguindo identificar estes erros, os educandos associassem a noção de função com os argumentos discutidos em atividades anteriores.

Descrição: Dezesete alunos identificaram que as duas situações apresentam erros ligados ao fato de que os elementos do domínio se relacionarem com dois ou mais elementos do contradomínio, isto confirma as expectativas apresentadas na análise *a priori*.

Apenas A13 não realizou a atividade. Dos dezesete restantes três acertaram os dois itens na passagem para a relação entre conjuntos, porém oito alunos acertaram um dos diagramas. Destes oito, um dos alunos (A17) chamou a atenção, quando justificou que o eixo x possuía dois correspondentes no conjunto B. Nota-se assim, mais uma tentativa em associar o registro gráfico, ao registro na relação entre dois conjuntos e também ao registro na língua natural.

Os alunos A3, A4, A10, A12 e A15 erraram ambos os registros na relação entre dois conjuntos, associando valores que não eram condizentes com a atividade apresentada, como se pode observar na figura 10.

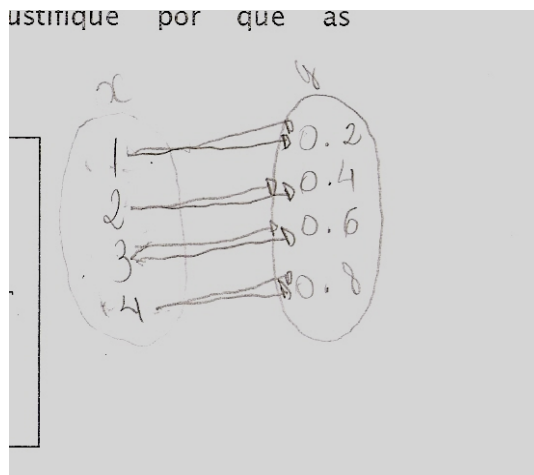


Figura 10 – Resolução da tarefa 11a da sequência didática pelo aluno A3

Considera-se que a tarefa também atingiu boa parte das expectativas e que, o complemento em atividades anteriores reforçaria alguns registros de representação semiótica e faria com que nesta atividade fossem desnecessárias quaisquer alterações.

Sessão doze: Buscava-se nesta tarefa constatar se os educandos já conseguiam relacionar diferentes registros de representação semiótica de funções, utilizando, neste momento, o registro algébrico e a relação entre conjuntos.

Descrição: Nesta tarefa debateu-se o item **a**, pois a restrição ao domínio novamente mostrou-se algo complexo quando se iniciou a mesma. Assim todos conseguiram justificar o item **a** com o fato de não haver correspondente para o zero no primeiro item (figura 16), pois um dos educandos apresentou esta possibilidade durante estas discussões. Nota-se que nem todos entenderam plenamente esta argumentação ou não conseguiram efetuar a conversão para o registro na relação entre dois conjuntos, pois nem todos utilizaram este registro de maneira correta. Esta possibilidade não fora levantada quando da elaboração da análise *a priori*.

Dentre os estudantes, nove conseguiram identificar que no item **b**, as raízes quadradas negativas não pertencem ao conjunto dos números reais. Os alunos A2, A12, A13 e A16 utilizaram como argumento para o item **b** a impossibilidade da utilização do zero.

Atividade 12: Vimos também que podemos encontrar as funções definidas por fórmulas matemáticas e pelos motivos estudados nas atividades anteriores há algumas definições que não representam funções. Assim, justifiquem por que as definições por fórmulas apresentadas a seguir **não** podem ser consideradas funções:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{1}{x}$

Justificativa: ~~esta relação não pode ser função~~ } PARA SER FUNÇÃO
~~pois x não pode ser zero e o zero pertence~~ f: $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$
 aos reais

Figura 11 – Resolução da tarefa 12a da sequência didática pelo aluno A17

Três alunos representaram utilizando-se do registro por meio relação entre conjuntos o item a e cinco representaram o item b. Os alunos A5, A13, A15 e A16 não construíram as relações entre conjuntos. Os alunos A9, A11 e A18 utilizaram valores que não eram condizentes com o resultado a ser apresentado no contradomínio da função dada, conforme se pode observar na figura 12.

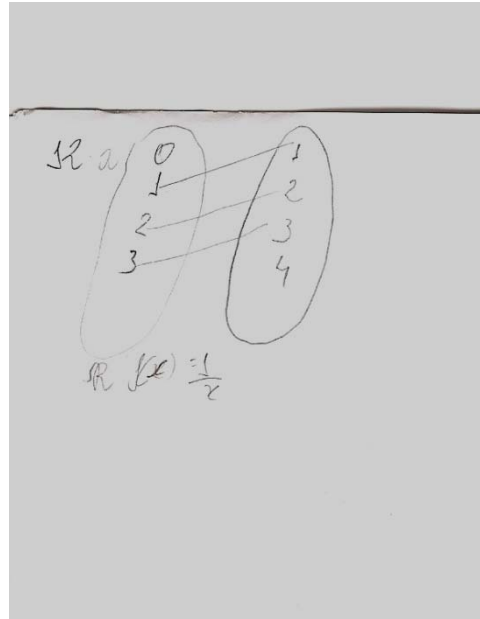


Figura 12 – Resolução da tarefa 12a da sequência didática pelo aluno A11

Os alunos A4, A6, A7, A8, A10, A12 e A14 conseguiram entender a possibilidade do registro de representação semiótica relacionando conjuntos numéricos, no registro na relação entre dois conjuntos, porém apresentaram apenas o valor de restrição e não outras possibilidades com outras ligações. Para elucidar melhor a situação, pode-se observar a seguir contraste entre a atividade desenvolvida pelo aluno A6 (figura 13) e o aluno A17 (figura 14).

Em parte as expectativas apresentadas na análise *a priori* não se concretizaram e acredita-se que para um melhor entendimento das ideias envolvidas faz-se necessária a inclusão de outros itens nesta tarefa.

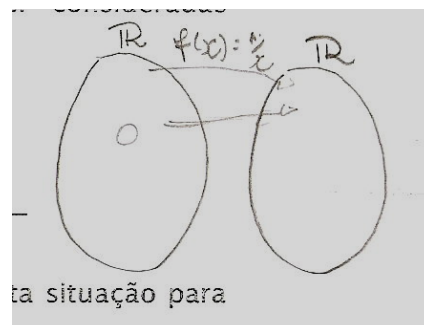


Figura 13 – Resolução da tarefa 12a da sequência didática pelo aluno A6

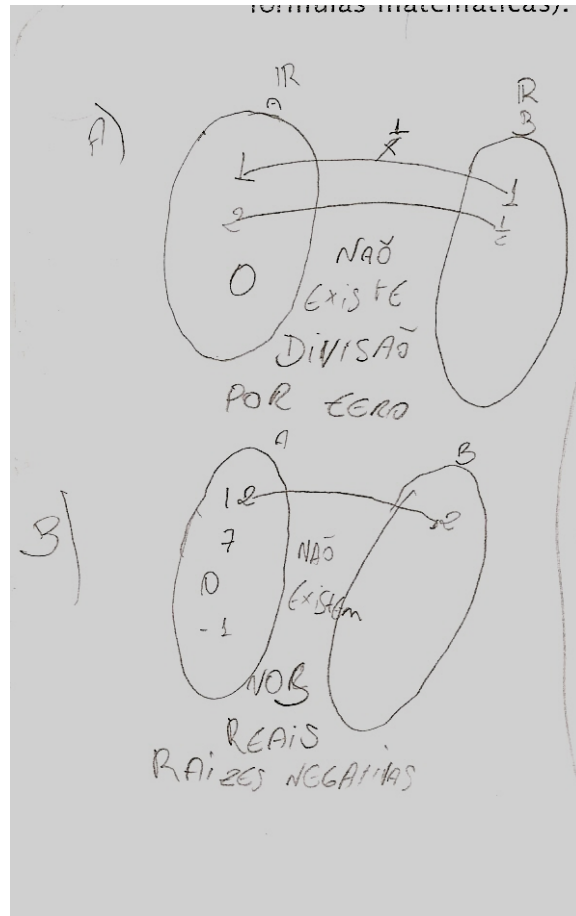


Figura 14– Resolução da tarefa 12b da sequência didática pelo aluno A17

Muitos dos educandos estão em uma fase de transição na compreensão entre os diferentes registros de representação semiótica do objeto matemático função, pois acertam algumas conversões, erram outras e, às vezes, não conseguem apresentar clareza em suas produções escritas. Esta situação poderá ser melhor entendida com a observação do quadro elucidativo destas doze primeiras sessões apresentado nas páginas seguintes como fora relatado no início deste capítulo.

Tarefa	Componente analisado	Alunos que resolveram corretamente	Alunos que acertaram parcialmente	Alunos que resolveram erroneamente	Alunos que não resolveram
1 b	Pensamento algébrico	Todos	-	-	-
1 c	Pensamento algébrico	A2, A3, A4, A6, A7, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A17 e A18	A1, A5, A8 e A16	-	A15
2	Conceito de função	A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A17 e A18	A1	-	-
3 a	Representações de funções	A1, A2, A4, A6, A7, A11, A12, A15, A16, A17 e A18		A3, A9, A10, A13 e A14	A5 e A8
3 b	Representações de funções	A1, A2, A4, A6, A7, A12, A15, A16, A17 e A18.		A3, A9, A10, A11, A13 e A14	A5 e A8
3c	Representações de funções	A17 e A18	A2, A7, A8, A9, A10, A12 e A16	A1, A3, A4, A6, A11 e A14	A5, A13 e A15
4	Pensamento algébrico	A1, A4, A6, A7, A9, A10, A11, A12, A14, A17 e A18	A3	A2 e A13	A5, A8, A15 e A16
5	Representações de funções	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15 e A17	A7, A8, A16 e A18.	-	-
7b	Conversão do registro na relação entre dois conjuntos → registro gráfico	A1, A2, A3, A4, A6, A7, A8, A12, A15, A16, A17 e A18	A9, A10, A11, A13 e A14		A5 e A15
8 a	Conversão do registro algébrico → registro gráfico	A2, A5, A6, A7, A9, A10, A11, A13, A14, A15, A16, A17 e A18	A1, A3, A8 e A12	A4	-
8 b	Conversão do registro algébrico → registro gráfico	A1, A4, A5, A6, A8, A10, A11, A12, A15, A17 e A18	-	A2, A3, A7, A9, A13, A14 e A16	-
9 a	Conversão entre os registros gráfico, na relação entre dois conjuntos e algébrico	A2, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A17 e A18.	A1 e A3	-	-

Tarefa	Componente analisado	Alunos que resolveram corretamente	Alunos que acertaram parcialmente	Alunos que resolveram erroneamente	Alunos que não resolveram
9 b	Conversão entre os registros gráfico, na relação entre dois conjuntos e algébrico	A1, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A17 e A18	A2	A16	-
10	Conversão do registro gráfico → registro na relação entre dois conjuntos	A2, A3, A4, A6, A7, A9, A10, A11, A12, A13, A15, A17 e A18.	A5, A8 e A16	-	A1 e A14
11 a	Conversão do registro gráfico → registro na relação entre dois conjuntos	A1, A2, A7, A11, A14, A16 e A17	A5, A6, A8 e A9	A3, A4, A10, A12, A15 e A18	A13
11 b	Conversão do registro gráfico → registro na relação entre dois conjuntos	A1, A5, A8, A11, A14 e A18	A1 e A6	A2, A3, A4, A7, A9, A10, A12, A15, A16 e A17	A12 e A13
12 b	Conversão do registro gráfico → registro na relação entre dois conjuntos	A6, A7, A8 e A10	A4, A9, A11, A15, A17 e A18	A1, A2, A3, A5, A12, A13 e A16	A14

Quadro 10 – Resumo da análise horizontal

A seguir, ver-se-á a última tarefa, onde serão observados aqueles que realmente já associam os diferentes registros de representação semiótica do objeto matemático, aqueles que se encontram na transição e os que ainda não conseguem relacionar estes registros efetuando as conversões de maneira clara.

6.2 ANÁLISE VERTICAL

Sessão treze: Pretendia-se nesta tarefa, feita exclusivamente sem o auxílio de materiais ou orientação do professor, que os educandos apresentassem o que haviam

desenvolvido no que tange à relação entre os diversos registros de representação semiótica do objeto matemático estudado. Nesta tarefa não foi sequer efetuada a leitura em conjunto.

Descrição: Neste ponto optou-se por apresentar as análises verticais das tarefas de cada aluno, partindo da primeira tarefa da sequência. A intenção é analisar cada caso e observar o aluno de maneira global, assim buscou-se analisar a produção escrita do educando à luz das Teoria dos Registros de Representação Semiótica e do pensamento algébrico. Desta forma, a análise será individual. Em cada caso iniciou-se apresentando a resposta do aluno à tarefa 13 e posteriormente a análise de cada tarefa do estudante.

O confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori* nesta tarefa será realizado no quadro resumo apresentado no final deste capítulo.

6.2.1 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A1

O aluno A1 escreveu: “As quatro formas de observarmos se é função estão ligados, por ex: em um gráfico, diagrama e outras formas”.

Pode-se observar que o aluno visualiza a relação entre os diferentes registros de representação semiótica, porém responde à questão de maneira sintética.

Este aluno conseguiu ter êxito praticamente em todos os itens das tarefas 1 e 2, apresentando erros apenas em cálculos. Assim, consegue identificar o registro por meio da relação entre conjuntos, além de associá-la com êxito com ao registro algébrico apresentada na tarefa 3, nos itens **a** e **b**.

No item **c** da tarefa 3, usou valores fixos, deixando assim de utilizar a forma algébrica desenvolvida na tarefa 1, item **c3**. Apesar de observar anteriormente a impossibilidade de tempo negativo na tarefa 7, não observou isto na tarefa 8.

Deixou de fazer o item **a** da tarefa 9 e a tarefa 10.

Com estas observações se constatou que o aluno apresentava dificuldade em associar alguns registros de representação semiótica às ideias de domínio e contradomínio e por isso, não identificava problemas gerados por estes quando aplicado em outros registros de representação semiótica do objeto matemático função.

É também nítido que há uma evolução quando na tarefa 12 o aluno conseguiu por meio da relação entre conjuntos representar a impossibilidade do objeto matemático apresentado na forma algébrica representar uma função.

Observa-se assim que o aluno A1 apresenta indícios de pensamento algébrico, pois, como se viu, utiliza a linguagem algébrica em diversas das situações apresentadas. Opera com números não conhecidos como se fossem conhecidos, segundo Lins e Gimenez (1997), entendendo a letra “como uma representação de vários números e não de apenas um”, conforme Kieran (1992), ou ainda utilizando a álgebra como a aritmética generalizada, como é proposta por Usiskin (1995).

O educando consegue associar este registro com outros registros representação semiótica e, com a sequência didática apresentada, está iniciando conversões com o objeto matemático função.

6.2.2 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A2

O aluno A2 não respondeu à última atividade.

Inicialmente (tarefas 1 e 2) o aluno A2 apresentou indícios de pensamento algébrico, pois conseguiu passar para a representação algébrica, generalizando a situação apresentada. O aluno utiliza a letra “como uma representação de vários números e não de apenas um”, conforme Kieran (1992). Na tarefa 3, o mesmo não converteu para a relação entre conjuntos utilizando apenas uma ligação entre os elementos.

Na tarefa 4, respondeu com uma expressão algébrica que de forma alguma condizia com o que fora solicitado na atividade, demonstrando não compreender o que lhe havia sido proposto e pouca habilidade para a utilização da linguagem algébrica, quando a mesma trata de generalizar uma condição de dependência no registro de representação semiótica por meio da relação entre conjuntos.

Na tarefa 5, mostrou clareza na visualização do objeto matemático função na forma de relação entre conjuntos.

Na tarefa 7, entendeu a descontinuidade da situação analisada e da impossibilidade do uso do domínio negativo em outra situação.

Observou-se, porém, que este aluno apresentava dificuldade também para a conversão do registro na relação entre dois conjuntos para o registro gráfico uma vez que, ao efetuar esta passagem, não utilizava os valores encontrados no primeiro registro para a construção do gráfico na tarefa 8, como se pode observar na figura 6 (página 75).

Já nas tarefas 9 e 10, o estudante passou a associar os diferentes registros de representação semiótica e conseguiu converter do registro gráfico para a relação entre conjuntos, bem como associar as ideias de domínio e contradomínio com x e y , respectivamente.

Apenas em um dos itens da tarefa 9 o educando não conseguiu transcrever para a forma algébrica a condição de dependência que relacionava os elementos do domínio com o contradomínio.

Também na tarefa 11, o aluno identificou o problema de incompatibilidade entre o objeto matemático, no registro gráfico e na relação entre dois conjuntos.

Finalmente, na tarefa 12, o aluno utilizou o mesmo argumento nos itens **a** e **b**, porém no registro de representação semiótica por meio da relação entre conjuntos apresentou indício da impossibilidade para negativos para a segunda parte da atividade.

Notaram-se dificuldades nas primeiras atividades envolvendo as conversões entre os diferentes registros de representação semiótica (até a tarefa 8). Observa-se, porém, que com a aplicação das tarefas da sequência didática o educando passou a desenvolver mecanismos para realizar conversões de um registro a outro.

Desta forma, apesar do aluno não apresentar resposta na atividade 13, considera-se que a sequência tornou mais acessível a conversão entre os diferentes registros de representação semiótica a este educando. Nota-se indícios de uso do pensamento algébrico nas tarefas 1 e 2, pois nestas atividades o mesmo utiliza a álgebra “como generalizadora de modelos”, conforme é apresentado por Usinskin (1995) e, com a ampliação da sequência didática.

6.2.3 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A3

O aluno A3 respondeu da seguinte forma a questão número 13: “As quatro formas de observarmos as funções estão ligadas, por exemplo, de um gráfico não é difícil passar para um diagrama ou ‘vice e versa’”.

Podemos observar que o aluno entende a ligação entre diferentes registros de representação semiótica do objeto matemático estudado, tanto em um sentido de conversão quanto à volta, porém pela forma sucinta que faz esta descrição não é possível visualizar

firmeza nesta afirmação. A avaliação integral das tarefas, porém, possibilitará maior convicção.

Como na tarefa 1 o educando trabalhou com números não conhecidos como se fossem conhecidos, o aluno, segundo Lins e Gimenez (1997), apresentou indícios de pensamento algébrico. O estudante também entendeu que é possível utilizar a letra representando vários números e não um único, ratificando os indícios inicialmente destacados.

Também na tarefa 2, o aluno conseguiu associar a condição de dependência apresentada à relação entre conjuntos e posteriormente, na atividade 3, associou este registro de representação semiótica com os problemas apresentados na tarefa 1. Desta forma o aluno mostrou ainda nestas atividades indícios de pensamento algébrico e consegue realizar a conversão entre o registro pela relação entre conjuntos e o registro algébrico.

Na tarefa 4, o aluno apresentou situações numéricas, sem, no entanto, apresentar a forma generalizada para as situações apresentadas, como podemos observar na figura 15 apresentada a seguir:

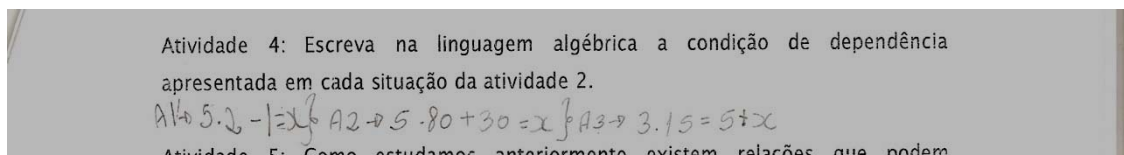


Figura 15 – Resolução da tarefa 4 da sequência didática pelo aluno A3

Esta situação nos revelou que apesar dos indícios de pensamento algébrico apresentados nas atividades anteriores, o educando ainda não conseguiu generalizar em situações com outros registros de representação semiótica e continuava apresentando respostas particulares para situações que exigiam a generalização.

Na tarefa 5, o aluno mostrou compreensão da noção de função envolvendo representação semiótica deste objeto no registro na relação entre conjuntos.

Posteriormente, na tarefa 7, entendeu a descontinuidade envolvida no item **a** e também reconheceu a necessidade da restrição do domínio em virtude da inexistência de tempo negativo. Assim, é possível observar que o educando realizou as conversões entre os registros de representação semiótica por meio gráfico e outros registros de representação semiótica.

Na tarefa 8, apesar de haver restringido o tempo, não o considerando negativo, o aluno passou em sua representação com a reta para esta região do gráfico. Também no item b, apesar de apresentar a descontinuidade, não associou aos valores corretos. Pode-se observar estas duas situações na figura 16, apresentada a seguir:

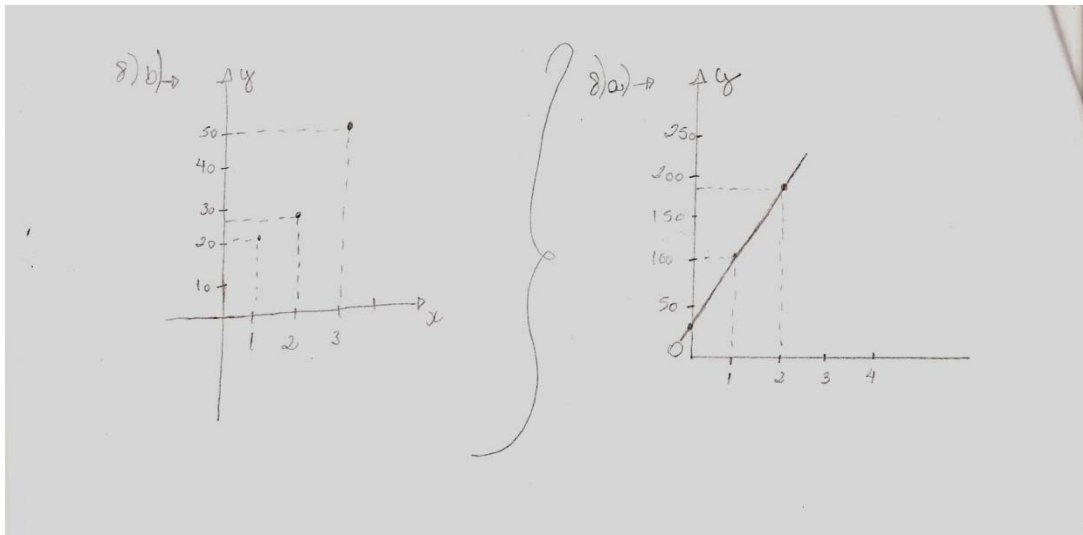


Figura 16 – Resolução da tarefa 8 da sequência didática pelo aluno A3

Este aluno mostrou em vários momentos caminhar para a sistematização de um conhecimento que consegue expor seguindo as “regras” estudadas, porém quando converte de uma representação à outra ainda apresenta falhas como vimos no registro gráfico.

Na tarefa 9, acredita-se que o educando estivesse entendendo a proposta, pois apresentou o registro algébrico no primeiro item e os dois registros (algébrico e pela relação entre conjuntos) no segundo item.

Na tarefa 10, apesar do educando responder: “no gráfico o domínio é x e o contradomínio é y ”, isto ainda não nos permite afirmar com precisão que o mesmo relaciona os dois registros de representação semiótica.

Na tarefa 11, apesar de associar com valores que não eram condizentes com a proposta, o educando mostrou a impossibilidade ao argumentar que “porque pra ser função tem que ter um correspondente e o 0,2 tem dois correspondentes”. Isto demonstra mais uma vez que o aluno está associando as condições para a caracterização do objeto matemático e, visualizando nas atividades propostas, sem, no entanto, conseguir utilizar os diferentes

registros de representação semiótica para argumentar a respeito como podemos observar na figura 17, apresentada a seguir:

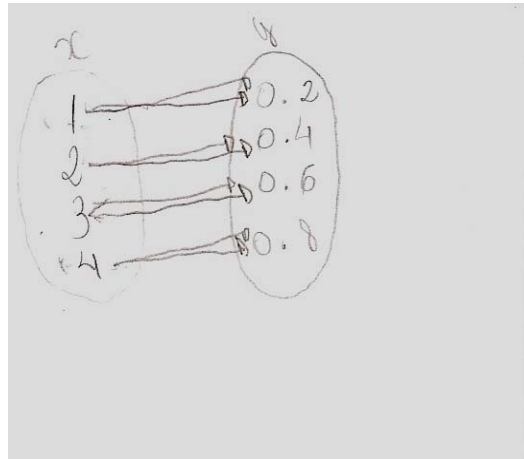


Figura 17 – Resolução da tarefa 11 da sequência didática pelo aluno A3

Finalmente na tarefa 12, o aluno apresenta, por meio da relação entre conjuntos, a incompatibilidade do objeto matemático função com a divisão por zero, apresentando sua resposta por escrito e, posteriormente, utilizando-se do registro de representação semiótica na relação entre dois conjuntos.

Como é possível observar o educando apresenta indícios de pensamento algébrico, pois consegue em diversos momentos representar na forma algébrica as situações apresentadas, operando de forma analítica (analisando com coerência) e operando com “números não conhecidos como se fossem conhecidos”, como mostra Lins e Gimenez (1997).

No que tange aos registros de representação semiótica, o educando está caminhando para desenvolver maior clareza neste aspecto, pois aparenta conhecer as condições e os diferentes registros de representação semiótica do objeto estudado, e isto fica mais nítido na resposta apresentada na última questão, mas, às vezes, ainda não consegue coordenar claramente estes diferentes registros de representação semiótica.

6.2.4 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A4

O aluno A4 respondeu: “O que eu entendi é que todas na verdade tem a mesma função, porque resolvendo cada uma delas com números e somas iguais todas vão chegar a mesma conclusão, mas com formas diferentes, uma com gráfico, outra com o diagrama de flechas ou com generalização de uma situação na resolução de situações-problemas ou até mesmo as fórmulas matemáticas”.

Como se pode observar nesta resposta o educando apresenta noção da possibilidade de se efetuar as conversões entre os diferentes registros de representação semiótica.

Nas tarefas 1, 2 e 3 (a e b), o aluno A4 não apresentou qualquer erro trabalhando com números não conhecidos como se fossem conhecidos, utilizou a letra como uma generalização e não apenas como um único número, e ainda trabalhou com a álgebra como a aritmética generalizada, confirmando assim indícios de pensamento algébrico.

Na atividade 3c, o educando não seguiu à atividade proposta e criou um diagrama, para representar a relação entre conjuntos, com outra condição de dependência (que não a apresentada no item c da atividade 1), conforme pode-se observar na figura 18, apresentada a seguir:

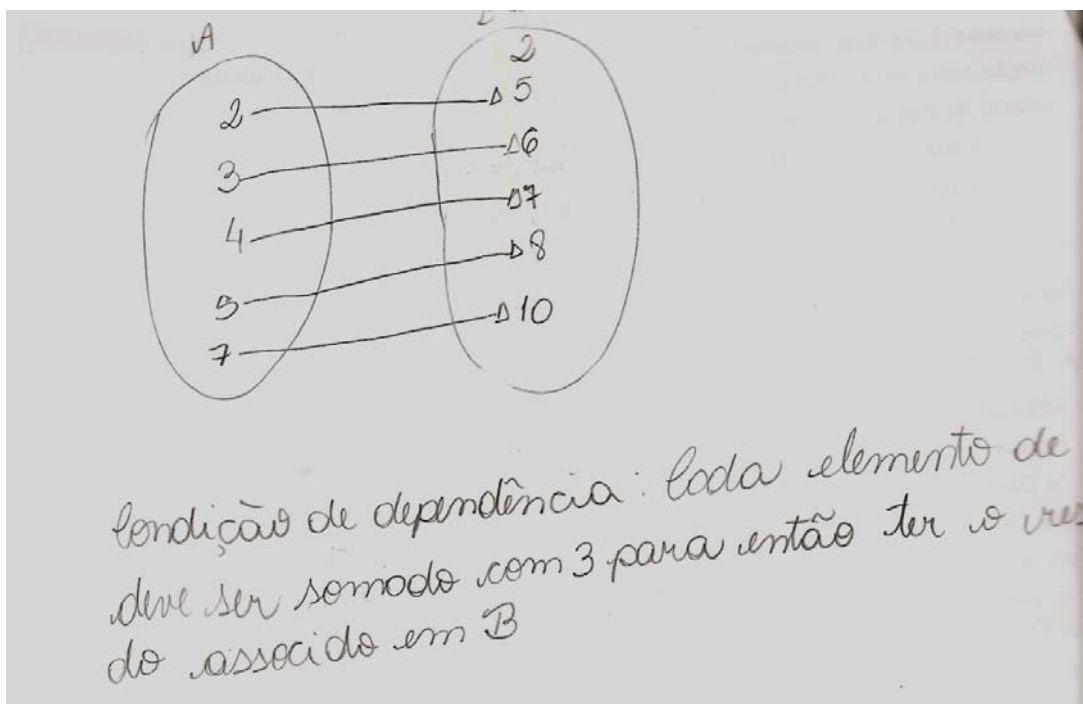


Figura 18 – Resolução da tarefa 3c da sequência didática pelo aluno A4

Considerando-se que há indícios de entendimento dos registros de representação semiótica pode-se deduzir que o “erro” do educando trata-se na verdade de etapa para o entendimento da atividade completa, pois apresenta coerência sem, no entanto, atentar-se a todos os detalhes da tarefa.

Na tarefa 4, o aluno converteu para a forma algébrica as condições de dependência apresentadas na atividade 2. Observa-se que o educando apresentou novamente indícios de pensamento algébrico e, também, transitava entre o registro na relação entre dois conjuntos e o registro algébrico.

Na tarefa 5, pode-se observar que, o aluno consegue visualizar a condição, utilizando-se de conjuntos, para caracterizar o objeto matemático função.

Na tarefa 7 o educando entendeu, quanto à descontinuidade e também quanto à restrição para valores negativos na grandeza tempo, no domínio desta função, porém na apresentação na forma gráfica na atividade 8, utilizou a descontinuidade também no item que se refere ao veículo em movimento.

Na tarefa 9 o aluno conseguiu converter do registro gráfico para o registro na relação entre dois conjuntos e para o registro algébrico demonstrando, além de indícios de pensamento algébrico, entendimento na conversão entre registros de representação semiótica.

Isto foi possível ser observado também na tarefa 10, quando o aluno escreve que “no gráfico x e y representa o domínio (x) e o contradomínio (y)”.

Na tarefa 11, apesar de utilizar boa argumentação na justificativa escrita quanto à restrição para considerarem-se os gráficos como funções, quando diz: “porque cada elemento de x só pode ter um correspondente em y ”, não mostra esta mesma argumentação no momento de representar utilizando o registro por meio da relação entre dois conjuntos da situação apresentada e utiliza-se de valores que não condizem com a atividade estudada.

O mesmo se verificou na tarefa 12 quando conseguiu argumentar em ambas as situações, porém não converteu para o registro na relação entre dois conjuntos as restrições observadas.

6.2.5 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A5

O aluno A5 não respondeu a última tarefa.

Nos três itens da tarefa 1 o aluno A5 conseguiu expressar na forma algébrica as situações apresentadas, porém no item c o aluno não utilizou o registro algébrico e não somou valor fixo da situação-problema. Como relatado anteriormente este lapso pode ser justificado pela utilização de valores decimais.

Há no item 2 desta atividade indícios de pensamento algébrico, pois o educando conseguiu utilizar a letra “como número generalizado” e traduziu a situação apresentada, generalizando-a.

Na segunda tarefa o educando relacionou corretamente utilizando as condições de dependência apresentada em cada item. Como foi dito anteriormente esta atividade relaciona-se com a tarefa 5 e o educando, também, reconheceu claramente situações que não representam funções quando utilizando o registro por meio da relação entre conjuntos.

O aluno A5 não realizou as tarefas 3, 4 e 7, apesar disso o educando resolveu acertadamente a tarefa 8. Assim, apesar de não resolver três atividades, o aluno mostrou que além dos indícios de pensamento algébrico apresentado na tarefa 1, consegue representar na forma gráfica situações que aparecem inicialmente como algébricas e posteriormente como relações entre conjuntos fazendo desta forma conversões entre os diferentes registros de representação semiótica.

Na tarefa 9 o aluno conseguiu expressar relacionando conjuntos e também na forma algébrica a situação que fora apresentada por meio do registro gráfico. Assim, mais uma vez, o educando passou de um registro de representação semiótica a outro, porém neste caso realizando o caminho inverso.

Na tarefa 10, no entanto, como analisado anteriormente, o educando relacionou com o item b da atividade anterior, como se pode observar na figura 9, apresentada anteriormente.

Na tarefa 11, o aluno mostrou entender que há relação entre os registros de representação semiótica na relação entre dois conjuntos e no registro gráfico, pois respondeu que não é possível haver função quando há dois correspondentes para um mesmo termo do domínio, conseguindo expressar a situação na relação entre dois conjuntos, utilizando, porém, valores não condizentes com a situação estudada.

Por fim, na tarefa 12 o aluno conseguiu na primeira atividade expressar a impossibilidade de haver a divisão por zero. Já no segundo item o educando não compreendeu a incompatibilidade da raiz quadrada com radicando negativo.

6.2.6 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A6

Diferentemente do que fora observado nas análises anteriores, optou-se por apresentar o protocolo da tarefa desenvolvida pelo educando, pois há uma resolução com diversos registros que algum relato poderia não fazer justiça à situação apresentada pelo educando. Assim, apresenta-se nas figuras 19 e 20 a resposta do aluno A6.

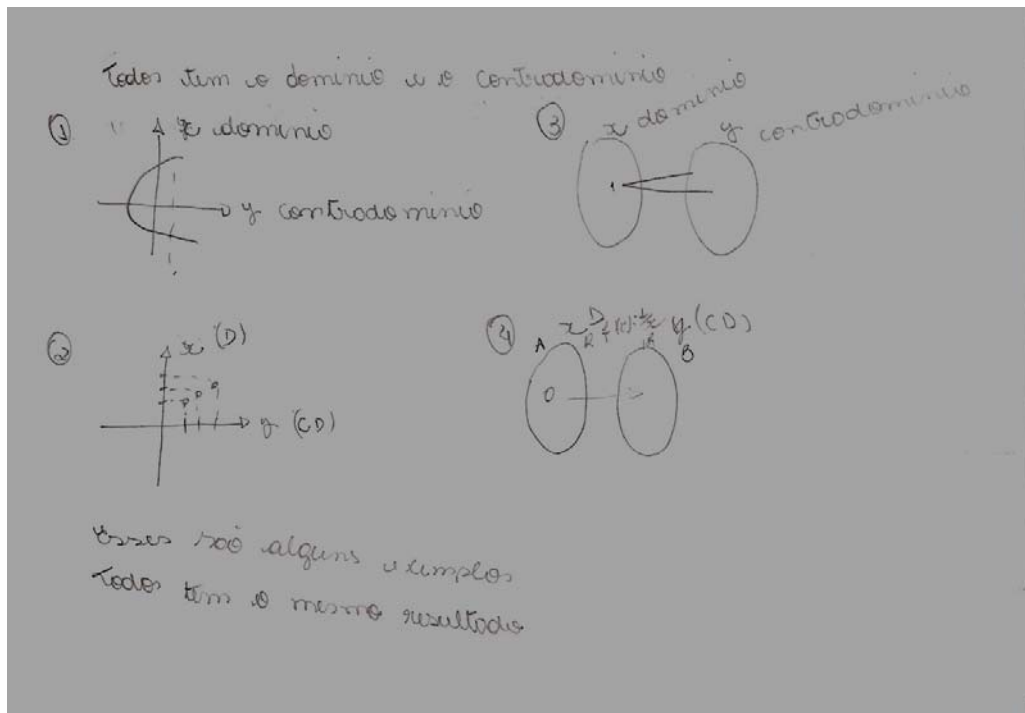


Figura 19 – Resolução da tarefa 13 da sequência didática pelo aluno A6

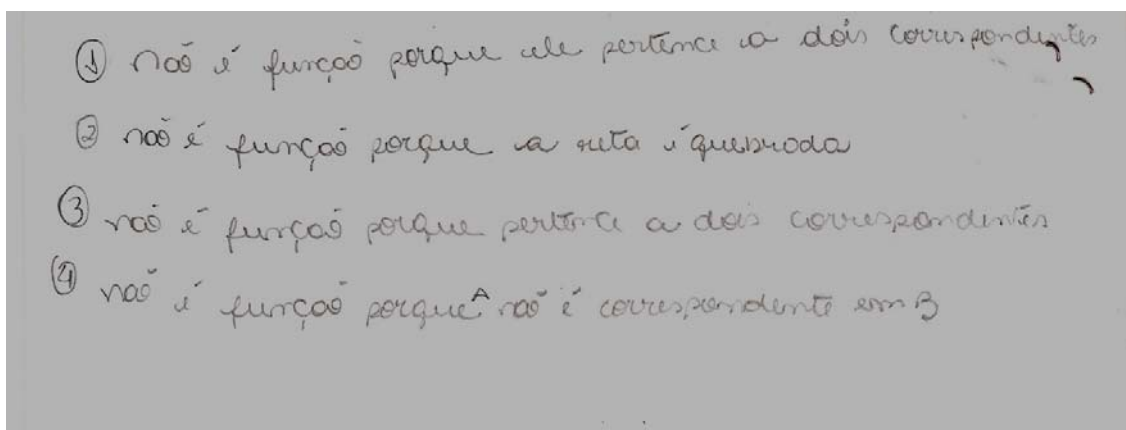


Figura 20 – Resolução da tarefa 13 da sequência didática pelo aluno A6

O educando A6 associou a ideia de domínio e contradomínio à conversão entre os diferentes registros de representação semiótica, conforme podemos observar nas figuras 19 e 20.

O aluno A6 apresentou indícios de pensamento algébrico ao empregar esta linguagem de maneira adequada para generalizar as situações-problemas apresentadas, utilizando “a letra” como uma série de valores desconhecidos.

Na tarefa 2 o educando relacionou a descrição no registro da língua natural e a forma algébrica apresentados na tarefa 1 para a forma da relação entre conjuntos apresentada na segunda tarefa. O aluno também reconheceu as situações que representam funções utilizando a relação entre conjuntos, como foi solicitado na tarefa 5.

Nas tarefas 3 e 13 o educando utilizou o domínio como se fora o contradomínio (inclusive dos eixos no registro gráfico) e vice-versa. Como esta característica foi observada apenas com este aluno, considera-se que não representa uma falha da sequência, mas como algo que poderia ter sido sanado com uma breve instrução individual ao aluno. Essa necessidade é reforçada, pois na tarefa 10 o estudante conseguiu relacionar, no registro gráfico, o domínio ao eixo das abscissas e o contradomínio ao eixo das ordenadas, demonstrando que o mesmo estava caminhando para a aprendizagem correta.

Na tarefa 4 o educando escreveu na linguagem algébrica as condições de dependência apresentadas nos conjuntos da atividade 2. Por isso, novamente pode-se observar que o aluno apresenta indícios de pensamento algébrico, operando de forma analítica e transpondo as ideias para valores desconhecidos como foi visto em Lins e Gimenes (1997).

Na tarefa 7, A6 observou a descontinuidade, no conjunto dos números reais, da função apresentada e também a incompatibilidade da função apresentada no segundo item entre a grandeza “tempo” e os valores negativos.

Na tarefa 9, o aluno converteu do registro gráfico para o algébrico, porém não conseguiu apresentar o registro na relação entre dois conjuntos.

Na tarefa 11 o aluno identificou o antagonismo do registro gráfico apresentado com a noção de correspondência de um elemento do domínio com dois ou mais no contradomínio, porém não representou de maneira correta na relação entre dois conjuntos.

Como foram observados em dois momentos, há a dificuldade na conversão para o registro na relação entre dois conjuntos, mas o aluno, em atividade anterior, entendeu este registro de representação semiótica. Considera-se mais uma vez que um trabalho de orientação individual a este educando poderia minimizar esta dificuldade.

Finalmente na tarefa 12, o aluno apresentou as restrições tanto no primeiro quanto no segundo caso, porém no momento da passagem para a relação entre dois conjuntos utilizou apenas uma possibilidade em ambas as situações. Esta utilização se justifica na primeira parte, pois a restrição se aplica apenas ao zero, porém na segunda há inúmeras possibilidades e o educando utilizou-se apenas do valor -8.

6.2.7 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A7

O aluno A7 utilizou-se do exemplo apresentado na tarefa 9 e respondeu: “Um problema está ligado com o outro e pode ser representado de várias maneiras.”

Isto mostra que o educando consegue visualizar que uma função pode ser representada por diversos registros, apresentando noção de relação entre os diferentes registros de representação semiótica.

Na primeira tarefa o educando trabalhou a função como generalizadora de modelos, utilizando a linguagem algébrica. Isto demonstra que o mesmo apresenta indícios de pensamento algébrico.

Na tarefa 2 o aluno conseguiu relacionar de maneira correta os elementos do domínio com o contradomínio e posteriormente na atividade 5 identificou aquelas situações que não representam funções.

Na tarefa 3 o educando relacionou a forma algébrica apresentada na tarefa 1 com as correspondentes condições de dependência apresentadas na tarefa 2, demonstrando novamente indícios de pensamento algébrico, porém quando precisou elaborar o registro de representação semiótica utilizando conjuntos valeu-se de apenas uma ligação, apresentando assim, dificuldade em relacionar os diferentes registros de representação semiótica.

Na tarefa 4 o aluno escreveu com o registro algébrico as situações apresentadas com o registro na relação entre dois conjuntos na tarefa 2. Isto evidencia novamente indícios de pensamento algébrico.

Na tarefa 7 o aluno reconheceu a descontinuidade associada ao conjunto dos números Naturais e também a incompatibilidade entre os números negativos e o tempo.

Na atividade 8, apesar de não associar os valores corretos na atividade b, o educando respeitou tanto a descontinuidade quanto a incompatibilidade citadas, associando assim o registro algébrico ao gráfico.

Na tarefa 9 o educando conseguiu converter para o registro algébrico e também para o registro na relação entre dois conjuntos a situação apresentada. Esta atividade parece ter elucidado a situação dos diferentes registros de representação semiótica a este aluno, pois a utilizou na última questão e também não apresentou mais qualquer erro a partir da mesma, deixando apenas de apresentar no registro na relação entre dois conjuntos o item b da tarefa 11 e apresentando uma única ligação também no item b da tarefa 12.

6.2.8 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A8

Analogamente ao que fora justificado no aluno A6, optou-se por apresentar o protocolo da resolução do educando A8 na figura 21 apresentada a seguir:

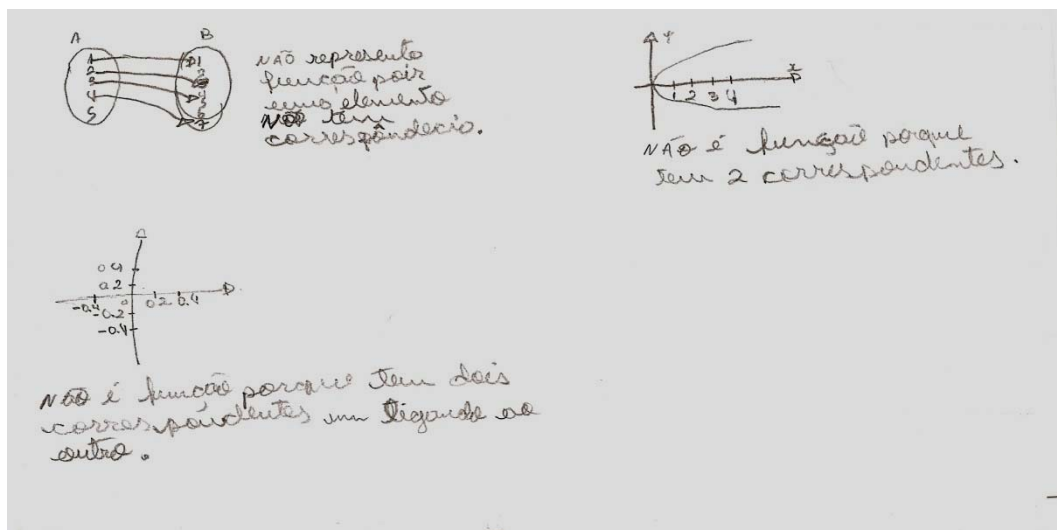


Figura 21 – Resolução da tarefa 13 da sequência didática pelo aluno A8

O aluno A8 respondeu à tarefa 13 por meio de desenhos sem, no entanto, relacionar os diferentes registros de representação semiótica.

O aluno resolveu corretamente os itens **a** e **b** da tarefa 1. No item **c** o educando conseguiu expressar na linguagem algébrica a situação estudada, porém não utilizou a “regra” ainda no item **c** e calculou o custo sem, no entanto, somar o valor fixo proposto na função. Com esta observação é possível afirmar que o estudante apresenta indícios de

pensamento algébrico, pois operou com números não conhecidos como se fossem conhecidos e, como já fora constatado anteriormente, o uso de números decimais pode ter levado a resolução equivocada por parte desse estudante.

Na tarefa 2, o aluno associou os valores do domínio com o valor correto no contradomínio, seguindo corretamente a condição de dependência apresentada em cada situação. Posteriormente, na tarefa 5, conseguiu identificar e justificar a situação que não representava função.

O aluno não realizou os itens a e b da tarefa 3. No item c, o aluno associou apenas uma ligação do domínio ao contradomínio. O aluno também não realizou a atividade 4.

Na tarefa 7, o educando conseguiu associar a descontinuidade aos números inteiros e também à incompatibilidade dos números negativos ao tempo, porém não observou esta situação na construção do gráfico envolvendo esta grandeza na atividade 8 e também não associou os pares ordenados corretamente na tarefa sobre os custos com o vidraceiro.

Na tarefa 9, o aluno conseguiu expressar na forma algébrica a situação gráfica apresentada e também conseguiu representar por meio da relação entre conjuntos a mesma situação. Assim, o aluno neste instante finalmente conseguiu relacionar diferentes registros de representação semiótica do objeto matemático estudado.

Na tarefa 10, o educando associou a ideia de domínio e contradomínio aos valores utilizados em x e y no item b da tarefa anterior.

Na tarefa 11, o aluno justificou a incompatibilidade do conceito de função em ambos os gráficos com a característica de associação do elemento do domínio com dois correspondentes no contradomínio e também representou, com valores condizentes com a situação, uma das situações na forma da relação entre conjuntos. Assim observa-se que o aluno conseguiu nesta tarefa associar os diferentes registros de representação semiótica.

Por fim na tarefa 12, o educando justificou corretamente um dos itens e utilizou o mesmo argumento (de maneira equivocada) no outro item. Nesta mesma tarefa para representar a situação por meio da relação entre conjuntos o educando utilizou apenas um valor no domínio em cada caso.

Assim, observa-se que a partir da tarefa 9 o educando passou a relacionar diferente registros de representação semiótica e a sua resposta à tarefa 13, apesar de mostrar situações desconexas, representa a tentativa de trabalhar com as conversões dos registros de representação semiótica.

6.2.9 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A9

Novamente optou-se por apresentar, agora na figura 22, o protocolo da resolução do educando A9, como fora justificado em A6.

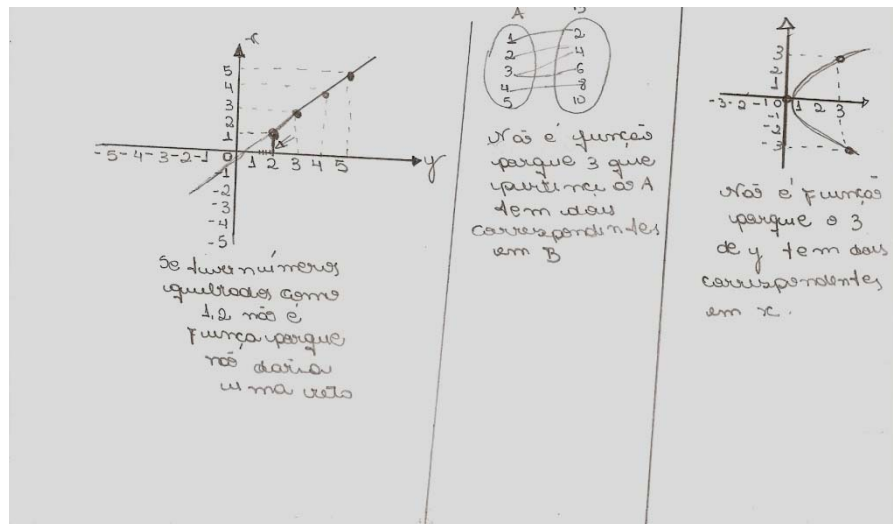


Figura 22 – Resolução da tarefa 13 da sequência didática pelo aluno A9

O aluno argumentou sobre diferentes registros de representação semiótica do objeto matemático, porém não correlacionou estes diferentes registros, conforme se pode observar na figura anterior. Apesar de compreender que há diferentes registros de representação semiótica para o objeto matemático função.

O aluno A9 resolveu a tarefa 1 corretamente, inclusive os itens onde necessitava do registro algébrico para demonstrar capacidade de operar de forma analítica (analisando com coerência) transpondo as ideias para valores desconhecidos como se fossem conhecidos, utilizando a “letra como número generalizado”, e a álgebra para traduzir e generalizar as situações apresentadas.

O aluno também resolveu de maneira correta as tarefas 2 e 5, reconhecendo o objeto matemático função representado na forma de relação entre conjuntos e relacionando corretamente os elementos do domínio com o contradomínio atendendo às condições de dependências. Também na tarefa 4, o educando relacionou estas condições com o registro algébrico, demonstrando novamente características de pensamento algébrico e também capacidade em relacionar os diferentes registros de representação semiótica.

Na tarefa 3, relacionou cada uma das relações entre dois conjuntos com os respectivos problemas e um item do domínio ao contradomínio corretamente, colocando porém, valores de forma errônea.

Na tarefa 7, utilizou a ideia de descontinuidade e justificou a impossibilidade do uso de números negativos sem especificar o motivo. Quando precisou representar graficamente esta situação na tarefa 8, o educando não utilizou os valores encontrados na atividade inicial e colocou no plano cartesiano pontos que não correspondiam à tarefa proposta inicialmente. Com isso observou-se que diferentemente ao observado na tarefa 4, o educando apresenta dificuldade na conversão de um registro de representação semiótica a outro.

Já nas tarefas 9 e 10, o educando relacionou o registro gráfico com o registro na relação entre dois conjuntos e reconheceu os eixos das abscissas e ordenadas como domínio e contradomínio respectivamente.

Novamente na tarefa 11, o aluno conseguiu responder que a impossibilidade dos gráficos representarem funções estaria relacionada a elementos do domínio que possuíam dois correspondentes, porém não representou esta situação na forma da relação entre conjuntos corretamente. Isso demonstra mais uma vez dificuldade na conversão de diferentes registros de representação semiótica, mas por outro lado demonstra uma busca no entendimento do objeto matemático para a justificativa de suas resoluções.

Finalmente na tarefa 12, o aluno conseguiu associar as justificativas para a impossibilidade associada à divisão por zero e às raízes quadradas negativas sem, no entanto, conseguir representar esta situação de maneira correta na forma da relação entre conjuntos.

6.2.10 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A10

Na tarefa 13 o aluno A10 respondeu o seguinte: “Porque se analisarmos todas estão interligadas uma a outra porque o gráfico da para passar para diagrama e o diagrama da para montar um gráfico por isso todas são fórmulas matemáticas e podem ser vistas de varias maneiras e para ser função tem que possuir só um correspondente no contradomínio.”

Como se pode observar o educando aparenta ter entendido a situação, mesmo que com dificuldade na forma de expressar seu pensamento. Assim, relaciona os diferentes registros de representação semiótica.

O aluno resolveu a tarefa 1, operando com números não conhecidos como se fossem conhecidos e utilizando a “letra” para a tradução e generalização de situações.

Também se observa esta situação na tarefa 4 quando o educando conseguiu transcrever para o registro algébrico as condições de dependência apresentadas na tarefa 2, que havia resolvido também de maneira correta e identificado as relações que não representavam funções já na tarefa 5.

Na tarefa 3, o aluno reconheceu um dos itens apresentado na forma de problema com a respectiva relação entre dois conjuntos e ao montar este registro de representação semiótica utilizou apenas um valor no domínio.

Na tarefa 7, o educando relacionou a ideia de descontinuidade nos números inteiros. Na construção dos gráficos na tarefa 8 apresentou habilidade e os fez corretamente, o que conseguiu passar de um registro de representação semiótica a outro.

Esta mesma habilidade foi observada novamente nas tarefas 9 e 10 quando passou da forma gráfica para o registro por conjuntos e também utilizando a linguagem algébrica, além de relacionar os eixos das abscissas e das ordenadas aos conceitos de domínio e contradomínio.

Na tarefa 11, relacionou a impossibilidade de no objeto matemático função o elemento do domínio possuir dois correspondentes no contradomínio, porém no momento de representar a situação não utilizou valores condizentes com a atividade e, além disso, utilizou uma situação que condiz com o conceito de função para justificar a impossibilidade de o gráfico representar uma função, como podemos observar na figura 23, a seguir:

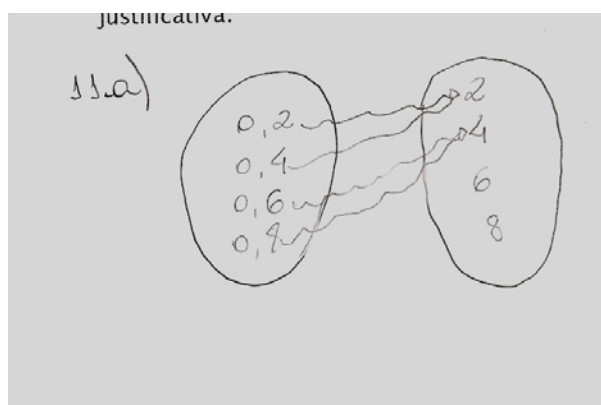


Figura 23 – Resolução da tarefa 11a da sequência didática pelo aluno A10

Finalmente, na tarefa 12, o aluno justificou com correção às situações associando à divisão por zero e à inexistência de resultados com números reais para raízes negativas, porém seu registro representação semiótica utilizando a relação entre dois conjuntos apresentou apenas os valores dos elementos que não possuíam correspondentes do domínio para o contradomínio o que, apesar de não estar errado, não compreende claramente a situação.

6.2.11 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A11

Na tarefa 13, o aluno A11 respondeu o seguinte: “As quatro maneiras estão interligadas, pois para saber que é uma função cada elemento do conjunto de domínio deve possuir um, e somente um correspondente no contradomínio.”

“E todos podem ser representados pelo diagrama de flechas se a seta for ligada a dois no contradomínio não é função e se sobrar um no domínio também não é função.”

Apesar disso, para representar a situação utilizou-se apenas do diagrama para expressar, como se pode observar a seguir:

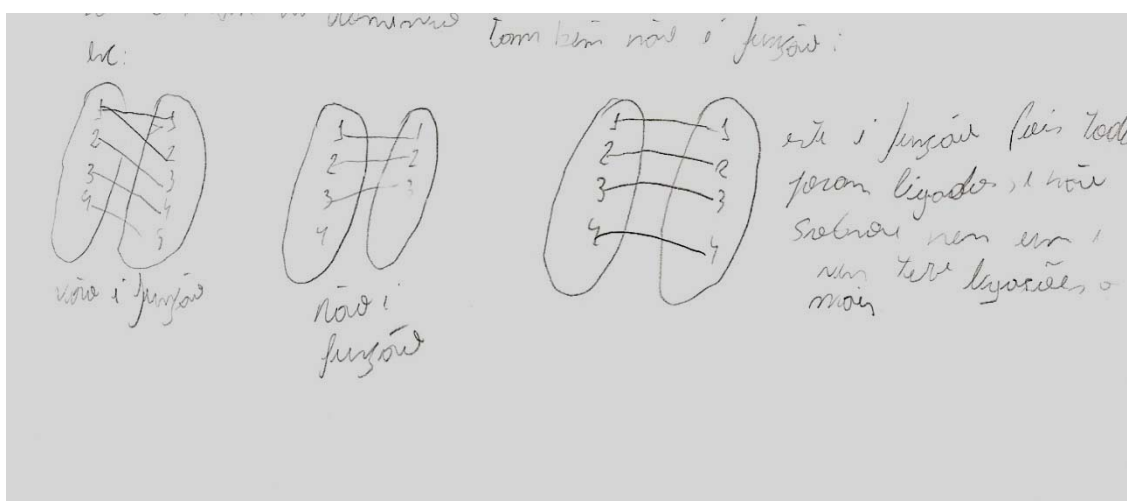


Figura 24 – Resolução da tarefa 13 da sequência didática pelo aluno A11

Assim, pode-se considerar que o aluno consegue descrever, porém ainda não efetuou, nesta atividade, as conversões entre os diferentes registros de representação semiótica.

Nas tarefas 1 e 4, o educando resolveu corretamente as situações inclusive as que utilizavam o registro algébrico para traduzi-las e generalizá-las, demonstrando indícios de pensamento algébrico.

Na tarefa dois, o aluno relacionou corretamente os elementos do domínio com o contradomínio utilizando a condição de dependência apresentada em cada caso, além disso, na tarefa 5, o educando justificou a situação que não representava função.

Na terceira tarefa, o educando relacionou corretamente o item **a**, porém errou o item **b** e no item **c** usou valores inteiros e ligando com resultados encontrados no respectivo item da atividade 1.

Na tarefa 7, o aluno conseguiu justificar a descontinuidade dos números inteiros e também associar os valores negativos ao domínio, sem associar, no entanto, esta condição à grandeza tempo.

Na tarefa 8, apesar de utilizar os valores corretos encontrados nas atividades anteriores, deixou de utilizar a proporcionalidade na elaboração do registro gráfico.

Na tarefa 9, o educando converteu para o registro algébrico a situação observada no registro gráfico apresentado, porém não o fez utilizando o registro na relação entre dois conjuntos. Apesar de não ter sido solicitado na atividade, o educando apresentou o registro na língua natural nos dois itens como se pode observar: “Para ele tem que ser o dobro dele mesmo mais 4”. “Para ser ligado tem que ser o triplo do número somado mais 2”.

Na tarefa 10, o aluno conseguiu associar o a ideia de domínio ao eixo das abscissas e o contradomínio ao eixo das ordenadas.

Na tarefa 11, o educando justificou a incompatibilidade dos registros gráficos ao conceito de função associando à ideia de relação entre dois conjuntos e correspondência com dois elementos. Também o aluno conseguiu utilizar o registro na relação entre dois conjuntos na situação. Desta forma, utilizou de um registro de representação semiótica para justificar a situação apresentada em outra forma, fazendo assim uma conversão.

Na tarefa 12, apesar de não representar uma das situações utilizando o registro na relação entre dois conjuntos, conseguiu representar a outra e justificar ambas.

6.2.12 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A12

Na tarefa 13, o aluno A12 respondeu o seguinte: “As quatro formas que observamos podem levar ao mesmo pensamento, cada uma das funções está relacionada à outra.

Por exemplo:

Em uma situação problema que tem a seguinte questão: qual das funções não pode ser considerada uma função?

Você pode justificar a questão acima e pode utilizar o diagrama de flechas e o gráfico”.

Como se pode observar o educando compreende a relação entre os diferentes registros de representação semiótica, porém no exemplo centrou-se nos registros gráficos e utilizando a relação entre dois conjuntos.

Na tarefa 1, o aluno resolveu as questões propostas e também apresentou indícios de pensamento algébrico ao expressar, utilizando o registro algébrico, a generalização de cada situação apresentada. Esta mesma situação foi possível observar na tarefa 4.

Nas tarefas 2 e 5, o educando compreendeu o registro na relação entre dois conjuntos, além de justificar com correção às situações que não representam funções por este registro.

Na tarefa 3, relacionou a condição de dependência da atividade 2 com as situações-problema e registros algébricos apresentados na tarefa 1. No item **c**, o educando representou utilizando o registro na relação entre dois conjuntos utilizando-se, porém, de apenas um valor.

Na tarefa 7, justificou a descontinuidade dos números inteiros e também associou a incompatibilidade dos valores negativos à grandeza tempo, sem, no entanto, associar os valores corretamente e tampouco observar a situação com os negativos na representação por registro gráfico na tarefa 8.

Na tarefa 9, representou por meio dos registros algébricos e na relação entre dois conjuntos as situações apresentadas. Assim, considera-se nesta tarefa que o educando apresenta, além de indícios de pensamento algébrico, clara conversão entre diferentes registros de representação semiótica do objeto matemático estudado. Esta mesma característica foi possível observar na tarefa 10, quando o educando conseguiu associar a noção de domínio ao eixo das abscissas e o contradomínio ao eixo das ordenadas.

Na tarefa 11, o aluno justificou de maneira adequada as duas situações, porém não conseguiu representá-las utilizando-se do registro na relação entre dois conjuntos.

Finalmente na tarefa 12, o educando respondeu corretamente o primeiro item, porém no item **b** utilizou-se do mesmo argumento. O aluno entendeu a possibilidade de representação por meio do registro na relação entre dois conjuntos, mas utilizou apenas o valor da restrição e não outras possibilidades.

6.2.13 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A13

O aluno A13 não respondeu à tarefa 13.

O aluno apresentou indícios de pensamento algébrico na primeira atividade, pois conseguiu responder a todos os itens, inclusive àqueles onde o registro algébrico fazia-se necessário para a generalização das situações apresentadas, porém na atividade 3 o aluno, ou não entendeu o enunciado, ou não associou os diferentes registros de representação semiótica apresentadas nas atividades anteriores. Também na atividade 4, não apresentou grande habilidade na utilização do registro algébrico.

Associando as tarefas 2 e 5 apresentou indícios de entendimento do objeto matemático função utilizando o registro na relação entre dois conjuntos.

Na tarefa 7, associou corretamente a descontinuidade apresentada em determinada situação problema ao registro gráfico, porém não observou esta situação na tarefa seguinte e quando da construção do gráfico ligou os pontos. No outro item, informou que o domínio deveria ser positivo sem, no entanto, associar esta necessidade à grandeza tempo, utilizada na situação apresentada.

Representou, na tarefa 9, por meio do registro da relação entre dois conjuntos e por intermédio do registro algébrico a situação apresentada no registro gráfico. Esta conversão pode ser também observada na tarefa 10 quando o educando associa o eixo “x” à ideia de domínio e o eixo “y” ao contradomínio.

O aluno não realizou a tarefa 11.

Na tarefa 12, o educando utilizou em ambos os casos a divisão por zero como justificativa e posteriormente apresentou esta situação por meio do registro na relação entre dois conjuntos, reafirmando esta impossibilidade no segundo caso e escreveu a seguinte

informação: “Não posso usar o 0. Não encontra os “asteriscos” acima da fórmula, se tivesse aí poderia usar o 0.”

Isso mostra que, pelo menos nesta situação, a linguagem matemática não é bem entendida pelo educando.

6.2.14 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A14

Na tarefa 13, o aluno A14 respondeu o seguinte: “A relação entre fórmula, diagrama, gráfico ou generalização de situação-problema, é a mesma ideia, porque qdo $(f(x) = x + 30)$ podemos representar das quatro maneiras a qual uma delas já foi representado que foi a fórmula matemática depois temos o diagrama de flechas:

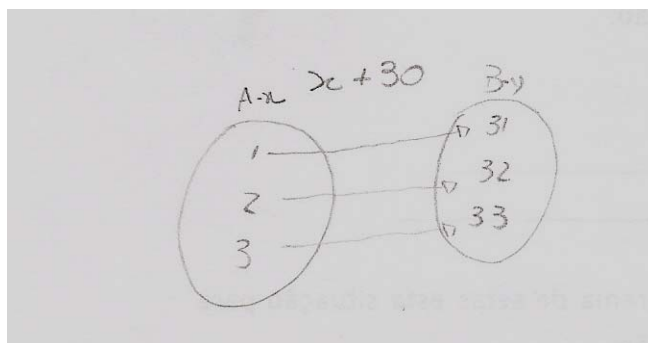


Figura 25 – Resolução da tarefa 13 da sequência didática pelo aluno A14

O gráfico:

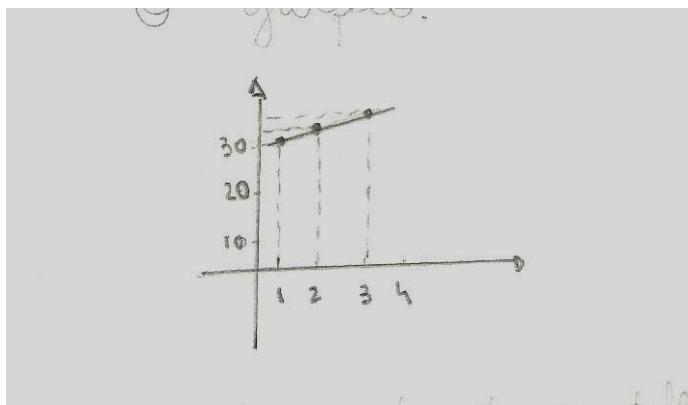


Figura 26 – Resolução da tarefa 13 da sequência didática pelo aluno A14

Generalização de situação-problema:

Um carro sai do quilômetro 30 e anda 100 km em 1 h. Qual a posição do carro após 3 h. andando?

R: $30 + 100.3$ ou $30 + 100.t$ ”

O educando não apenas resolve situações apresentadas, mas também associa com clareza e escreve sobre os diferentes registros de representação semiótica do objeto matemático estudado.

O educando apresentou nas tarefas 1 e 4 indícios de pensamento algébrico utilizando-se da linguagem algébrica para generalizar situações-problema e também converteu para esta linguagem condições de dependências apresentadas na tarefa 2.

Nas tarefas 2 e 5, o aluno entendeu, com clareza, o registro de representação na relação entre dois conjuntos.

Apesar destas observações, o educando associou erroneamente os registros na relação entre dois conjuntos aos problemas apresentados mostrando, nesta situação, dificuldade em converter diferentes registros de representação semiótica do mesmo objeto matemático.

Já na tarefa 7, o educando associou a impossibilidade da continuidade no item **a** e também no item **b** ao fato do domínio não aceitar a utilização de valores negativos. Isto se refletiu na tarefa 8, onde o educando utilizou apenas pontos no item **a** e não utilizou valores negativos em **b**. Houve apenas um erro que foi o fato de não utilizar valores condizentes com a atividade.

Na tarefa 9, o educando, apesar de não representar por meio do registro na relação entre dois conjuntos, descreveu utilizando o registro da língua natural em cada situação apresentada.

Apesar destes diversos momentos de demonstração indicarem possíveis conversões entre os diferentes registros de representação semiótica, o educando não realizou a tarefa 10.

A tarefa 11 parece ser “um divisor de águas” na análise deste educando, pois a partir dela o aluno passou a apresentar indícios do real entendimento das conversões entre diferentes registros de representação semiótica chegando à resposta apresentada no final com fortes sinais de compreensão destas representações. Nesta tarefa o educando associa o registro gráfico com o registro na relação entre dois conjuntos e justifica utilizando-se de valores corretos e com argumentação bem estruturada sobre o assunto.

Isto se repete na atividade 12 quando o aluno utiliza de argumentos e mostra por meio do registro na relação entre dois conjuntos, apesar de utilizar apenas o valor de restrição, o que, em conjunto com a tarefa 13 nos leva a concluir que, para este educando, a sequência didática conseguiu gerar a compreensão das conversões.

6.2.15 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A15

Na tarefa 13, o aluno A15 respondeu o seguinte: “O diagrama tem uma ligação ou nenhuma”.

E apresentou o seguinte protocolo:

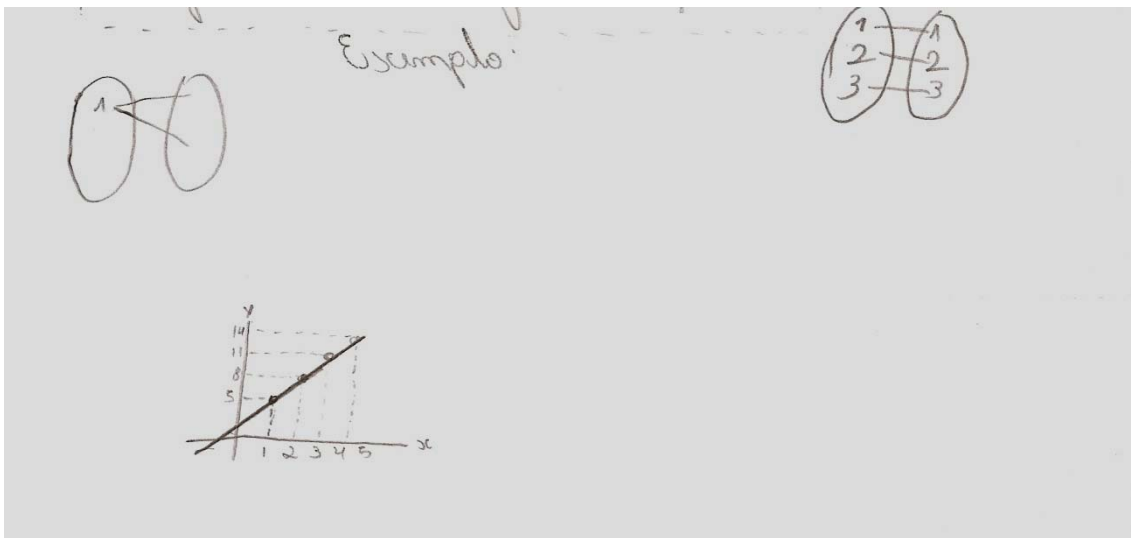


Figura 27 – Resolução da tarefa 13 da sequência didática pelo aluno A15

Pode-se observar que o educando consegue compreender que há diferentes registros de representação semiótica para o objeto matemático estudado, porém, no registro escrito da resposta apresentada, não realiza conversões entre estes registros de representação semiótica. Pode-se sugerir que o educando está caminhando para o entendimento dos diferentes registros de representação semiótica, porém ainda apresenta dificuldade em externar este entendimento, o que comparado com as diversas tarefas deixadas em branco no início do material representa um avanço.

O educando apresentou indício de pensamento algébrico no item **b** da atividade 1, porém não resolveu o item **c** nem tampouco a tarefa 4. Isto sinaliza a possibilidade de que o educando apresenta dificuldade na execução de atividades que exijam este raciocínio.

Nas atividades 2 e 5 o educando compreendeu o registro de representação do objeto matemático função na relação entre dois conjuntos. O aluno também conseguiu identificar e associar este registro às situações-problema apresentadas na atividade 1. Isto porém, não foi o suficiente para que o educando conseguisse representar estas situações utilizando o mesmo registro.

O aluno também não realizou as tarefas 7 e 8, o que demonstra que possivelmente o educando não conseguiu associar as impossibilidades dos valores expressos no domínio de uma função.

Nas tarefas 9 e 10 converteu do registro gráfico para a relação entre dois conjuntos e também para o registro algébrico, associando a ideia de domínio e contradomínio aos eixos do plano cartesiano.

Na tarefa 11, o educando associou os valores do domínio com resultados que não eram condizentes aos apresentados nas situações.

Finalmente na tarefa 12, argumentou corretamente a impossibilidade dos valores para o domínio, porém, mais uma vez, não conseguiu representar por meio do registro na relação ente dois conjuntos.

6.2.16 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A16

Na tarefa 13, o aluno A16 respondeu o seguinte: “é que não tem só um tipo de função tem um monte de jeito vimos que função não é só números exatos. Vimos que se pego um gráfico “fazemos” o diagrama e também se pegar o diagrama fazemos o gráfico”.

Como se pode observar na resposta deste aluno, o mesmo não consegue externar com a nomenclatura adequada o seu pensamento, porém há indícios do entendimento das conversões de ao menos dois dos registros de representação semiótica do objeto matemático função.

Na tarefa 1, apesar de apresentar erro em um dos itens que trabalhava ainda com números, mostrou indícios de pensamento algébrico, pois conseguiu generalizar todas as

situações apresentadas, porém isso não se repetiu na tarefa 4 quando o educando não realizou a atividade proposta.

Nas tarefas 2 e 5, compreendeu o registro na relação entre dois conjuntos, porém não concluiu totalmente a última das duas atividades e apenas identificou aquela que não representava função sem, no entanto, assinalar como função as demais.

A resolução parcial foi também observada na tarefa 3 onde o educando apresentou apenas um valor no domínio na relação entre dois conjuntos.

Na tarefa 7, o educando conseguiu associar as incompatibilidades de muitos valores dos números reais à situação-problema apresentada e também representou corretamente ambas as situações por meio do registro gráfico, na tarefa 8, porém em um dos gráficos não utilizou pares cartesianos coerentes com a atividade proposta.

Na tarefa 9, o aluno converteu para o registro algébrico e também para o registro na relação entre dois conjuntos a situação apresentada no registro gráfico, porém em um dos itens associou os elementos do domínio com pares ordenados no contradomínio, como podemos observar anteriormente na figura 8.

Na tarefa 10, apresentou sinais de relação entre o domínio e contradomínio no registro na relação entre dois conjuntos e os eixos das abscissas e das ordenadas no registro gráfico sem, no entanto, generalizar a situação.

Na tarefa 11, o aluno justificou e representou pelo registro na relação entre dois conjuntos uma das situações apresentadas no registro gráfico. Apesar de justificar corretamente, o educando não conseguiu representar a segunda situação utilizando o registro na relação entre dois conjuntos.

Na tarefa 12, o educando justificou em ambos os casos a impossibilidade de utilização do zero. Desta forma, um estava correto e o outro não. Nesta tarefa, o aluno não conseguiu converter as situações para a relação entre dois conjuntos.

6.2.17 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A17

Na tarefa 13, o aluno A17 respondeu o seguinte: “Há uma grande relação entre os quatro, pois todos representam funções. A diferença é que quando no diagrama ligamos no outro lado colocamos um ponto no gráfico, um número na fórmula e outro na generalização de problemas. O que acontece é que se fazemos uma reta no gráfico existem

infinitos números de 1 a 2 ou 2 a 3, etc. E se a função é de reais para reais isso é possível ou real.”

Em seguida, o educando apresentou um desenho (figura 28) para representar a situação:

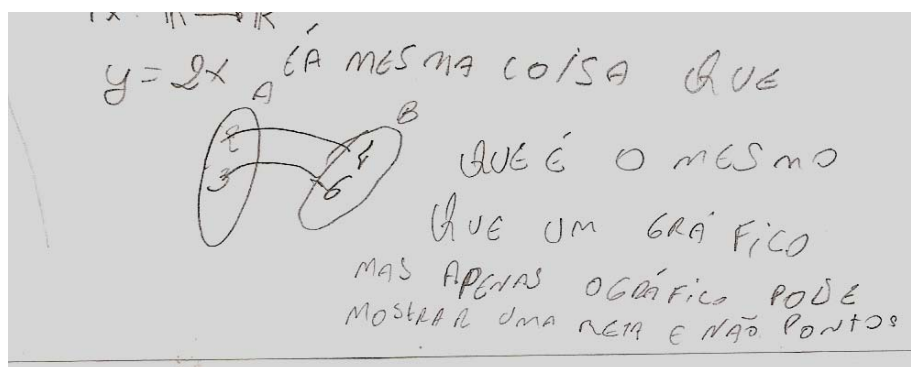


Figura 28 – Resolução da tarefa 13 da sequência didática pelo aluno A17

Este educando havia observado a relação entre os diferentes registros de representação semiótica ainda no pré-teste realizado no ano anterior e não havia feito a mesma relação quando realizou a mesma atividade pela segunda vez.

Sua resposta mostra clara associação entre os diferentes registros de representação semiótica.

Em todas as tarefas propostas, apresentou fortes indícios de pensamento algébrico e conseguiu converter de um registro de representação a outro com facilidade fazendo, por vezes, relações além das esperadas para o momento, como por exemplo, na tarefa 9, quando além de converter para o registro algébrico e para o registro na relação entre dois conjuntos, usou também o registro na língua natural para expressar a situação apresentada.

6.2.18 Análise Vertical das Tarefas do Aluno A18

Na tarefa 13, o aluno A18 apresentou na forma de desenho (figura 29) a situação. Como podemos observar, o educando relaciona de maneira errônea o eixo x com o contradomínio e o eixo $f(x)$ ao domínio:

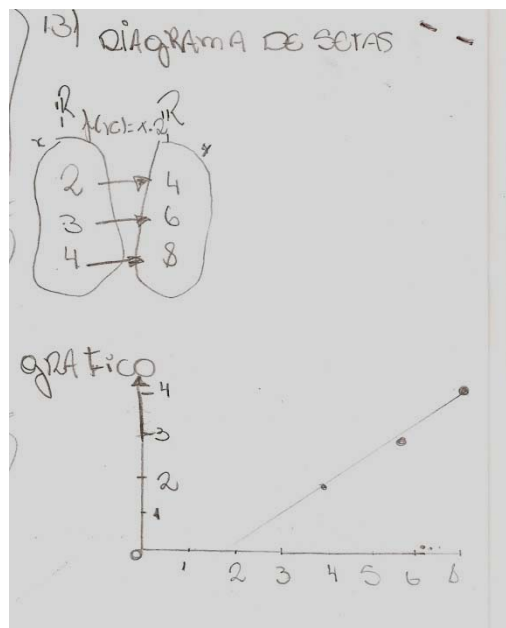


Figura 29 – Resolução da tarefa 13 da sequência didática pelo aluno A18

No primeiro desenho pode-se observar que o educando associou com valores discretos os conjuntos dos números reais, porém conseguiu converter para o registro na relação entre dois conjuntos o registro algébrico que apresentara inicialmente $f(x) = x \cdot 2$. Pode-se observar que o educando consegue relacionar os diferentes registros de representação semiótica do objeto matemático estudado, porém esta relação, às vezes, apresenta ainda falhas, como se pode observar no gráfico, pois associa o domínio ao eixo $f(x)$ e o contradomínio ao eixo x do registro na relação entre dois conjuntos apresentado na mesma atividade.

Nas tarefas 1 e 4, o educando apresentou indícios de pensamento algébrico ao associar situações numéricas e posteriormente generalizar as situações apresentadas.

Nas tarefas 2 e 5, o aluno associou os valores do domínio aos correspondentes de maneira correta no contradomínio e também justificou situação que não representa função no registro na relação entre dois conjuntos. Assim, entende a representação do objeto matemático função nos registros estudados nestas tarefas.

Na tarefa 3, associou os diferentes registros de representação semiótica apresentados em tarefas anteriores. Além disso, converteu do registro algébrico para a relação entre dois conjuntos no item c da atividade e também escreveu em língua natural a mesma situação.

Na tarefa 7, o educando associou a situação-problema apresentada anteriormente à incompatibilidade com valores decimais e a posteriormente com valores negativos. Com êxito, o educando conseguiu converter estas situações para o registro gráfico, conforme era solicitado na tarefa 8.

Na tarefa 10, o educando conseguiu associar à ideia de domínio e contradomínio os eixos das abscissas e das ordenadas respectivamente, ligando desta forma o registro gráfico com o registro na relação entre dois conjuntos. De maneira análoga, o educando conseguiu associar o registro gráfico ao registro algébrico, descrevendo a situação na língua natural uma das situações e associando à resolução de problemas.

Na tarefa 11 o aluno buscou argumentação na noção de relação para justificar a incompatibilidade da situação com o conceito de função. Das duas situações apresentadas o educando conseguiu ainda, representar uma delas por meio do registro na relação entre dois conjuntos.

Finalmente na tarefa 12 o educando justificou corretamente ambas as situações, porém utilizou valores que não condiziam com o que fora apresentado.

A seguir apresenta-se um quadro resumo da análise vertical das tarefas:

Aluno	Tarefas corretas	Tarefas erradas	Tarefas parcialmente corretas	Tarefas não resolvidas	Considerações
A1	1b, 3a, 3b, 4, 5, 7b, 8b, 9b, 11a, 11b,	3c e 12	1c, 2, 8a, 9a,	10	Apresenta indícios de pensamento algébrico e iniciando as conversões de registros de representação semiótica com o objeto matemático estudado
A2	1b, 1c, 2, 3a, 3b, 5, 7b, 8a, 9a, 10 e 11a	4, 8b, 11b e 12b	3c e 9b	-	Apresenta indícios de pensamento algébrico e, a partir da sequência, iniciou entendimento das conversões
A3	1b, 1c, 2, 5, 7b, 9b e 10	3a, 3b, 3c, 8b, 11a, 11b e 12b	4, 8a e 9a	-	Apresenta indícios de pensamento algébrico e caminhando para compreender as conversões dos diferentes registros de representação semiótica.
A4	1b, 1c, 2, 3a, 4, 5, 7b, 8b, 9a, 9b e 10	3c, 8a, 11a e 11b	12b	-	Poucos erros, os quais poderão ser sanados com mais tarefas. Apresenta indícios de pensamento algébrico e conseguiu, em várias situações, efetuar as conversões.

A5	1b, 2, 5, 8a, 8b, 9a, 9b e 11b	12b	1c, 10 e 11a	3a, 3b, 3c, 4 e 7b	Apresentou indícios de pensamento algébrico. Diferentemente dos anteriores o educando deixou algumas tarefas sem resolver e apresentou menos erros. Assim, como já foi dito, poder-se-ia fazer uma entrevista com o aluno para entender esta situação.
A6	1b, 1c, 2, 3a, 3b, 4, 5, 7b, 8a, 8b, 9a, 9b, 10 e 12	3c	11a e 11b	-	Apresenta indícios de pensamento algébrico e efetua, em diversas situações, as conversões entre diferentes registros de representação semiótica.
A7	1b, 1c, 2, 3a, 3b, 4, 7b, 8a, 9a, 9b, 10, 11a e 11b	8b e 11b	3c e 5	-	Apresenta indícios de pensamento algébrico e a partir da tarefa 9 passou de uma característica de incerteza para situações que demonstra entender as conversões.
A8	1b, 2, 7b, 8b, 9a, 9b, 11b e 12b	-	1c, 3c, 5, 8a, 10 e 11a	3a, 3b e 4	O educando apresenta algumas dificuldades no pensamento algébrico e caminha para realizar as conversões, o que ainda não ocorre de maneira satisfatória.
Aluno	Tarefas corretas	Tarefas erradas	Tarefas parcialmente corretas	Tarefas não resolvidas	Considerações
A9	1b, 1c, 2, 4, 5, 8a, 9a, 9b e 10	3a, 3b, 8b e 11b	3c, 7b, 11a e 12b	-	Apresenta indícios de pensamento algébrico e realiza, em algumas situações, as conversões dos diferentes registros de representação semiótica.
A10	1b, 1c, 2, 4, 5, 8a, 8b, 9b, 10 e 12b	3a, 3b, 11a e 11b	3c e 7b	-	Mostra indícios de pensamento algébrico e também compreende as conversões entre diferentes registros de representação semiótica.
A11	1b, 1c, 2, 3a, 4, 5, 8a, 8b, 9a, 9b, 10, 11a e 11b	3b e 3c	7b e 12b	-	O educando apresentou indícios de pensamento algébrico e, em vários momentos, converteu diferentes registros de representação semiótica.
A12	1b, 1c, 2, 3a, 4, 5, 7b, 8b, 9a, 9b e 10	11a e 12b	3c e 8a	11b	Mostra indícios de pensamento algébrico e também condição de converter de uma representação semiótica à outra.
A13	1b, 1c, 5, 8a, 9a, 9b e 10	3a, 3b, 4, 8b e 12b	7b	3c, 11a e 11b	Apresentou inicialmente indícios de pensamento algébrico (ainda na tarefa 1), porém na conversão dos registros de representação

					semiótica do objeto matemático estes indícios diminuíram.
A14	1b, 1c, 2, 4, 5, 8a, 9a, 9b, 11a e 11b	3a, 3b, 3c e 8b	7b	10 e 12b	No final da sequência o educando estava resolvendo as situações apresentadas e convertendo os diferentes registros de representação semiótica do objeto matemático estudado.
A15	1b, 2, 3a, 3b, 5, 8a, 8b, 9a, 9b e 10	11a 3 11b	12b	1c, 3c, 4 e 7b	Utiliza a linguagem para descrever situações apresentadas, porém não faz com a mesma destreza para converter de uma representação à outra. O educando está caminhando para o entendimento das diferentes representações, porém ainda apresenta dificuldade em externar este entendimento.
Aluno	Tarefas corretas	Tarefas erradas	Tarefas parcialmente corretas	Tarefas não resolvidas	Considerações
A16	1b, 2, 3a, 3b, 7b, 8a, 9a e 11a	8b, 9b, 11b e 12b	1c, 3c, 5 e 10	4	Não associa os diferentes registros de representação semiótica do objeto matemático estudado, porém há momentos em que o mesmo faz tentativas (ainda que incorretas) de conversões.
A17	1b, 1c, 2, 3a, 3b, 3c, 4, 5, 7b, 8a, 8b, 9a, 9b, 10 e 11a	11b	12b	-	Apresenta fortes indícios de pensamento algébrico e consegue converter de uma representação à outra com facilidade fazendo, por vezes, relações além das esperadas para o momento.
A18	1b, 1c, 2, 3a, 3b, 3c, 4, 7b, 8a, 8b, 9a, 9b, 10 e 11b	11a	5 e 12b	-	O aluno consegue relacionar os diferentes registros de representação semiótica do objeto matemático estudado. Também apresenta indícios de pensamento algébrico em diversos momentos.

Quadro 11– Resumo da análise vertical

Assim, ao se analisar as respostas para a última tarefa e também individualmente os educandos, observa-se que muitos apresentaram indícios de pensamento algébrico e isto mostra que a sequência didática propiciou momentos onde os mesmos conseguissem exercitar e desenvolver esta forma de pensamento.

Também se pode notar que os educandos ou estão caminhando para a conversão entre os diferentes registros de representação semiótica ou estabelecem estas relações.

Assim, num grupo onde vários educandos não associavam os diferentes registros de representação semiótica, a sequência didática atendeu, com pequenas ressalvas apresentadas anteriormente, à condição de propiciar aos educandos esta possibilidade e também apresentar situações onde há a mobilização e desenvolvimento do pensamento algébrico.

6.3 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES E VALIDAÇÃO

Considerando que se buscava nas tarefas da sequência didática indícios de pensamento algébrico, pode-se constatar pelas análises que a mesma surtiu o efeito desejado pela produção escrita dos educandos.

No que tange ao objetivo de pesquisa, qual seja, **“investigar como estudantes do Ensino Médio lidam com o conceito de função ao se depararem com uma sequência didática que trabalha diferentes registros de representação semiótica desse objeto matemático”**, observa-se que os educandos, em quase sua totalidade, caminham para o “limiar da compreensão matemática” (p.128), como nos relata Duval (2006) chegando (e alguns já chegaram) às conversões entre os diferentes registros de representação semiótica.

Analisando as respostas dos educandos pode-se observar, porém, que a inclusão de mais atividades pode propiciar a evolução daqueles que ainda não conseguiam atingir pleno êxito.

Nas análises realizadas é possível também notar que com um maior número de atividades pode-se trabalhar inclusive os registros de representação semiótica do objeto matemático função que não foram contemplados na sequência. Observa-se também que praticamente todos os alunos analisados demonstraram em algum momento condição de trabalhar com as conversões.

Torna-se importante ressaltar, ainda, que no caso do educando A5, como informado anteriormente, seria interessante a execução de entrevista para melhor entendimento da situação. Esta atitude ficou impossibilitada pela falta de tempo hábil para tanto.

Desta forma é possível observar que com atividades diferentes às dos livros didáticos tradicionais, analisadas e adaptadas à realidade do grupo estudado, há a possibilidade do chamado anteriormente “entendimento com significado” e também a condição de aplicação em outras disciplinas, que como fora apresentado inicialmente, tornara-se um dos anseios da pesquisa.

Ressalta-se ainda a necessidade de retomada dos conceitos, haja vista o educando A17 que, pelas análises realizadas mostrou grande capacidade de resolução e conversão nas tarefas propostas, porém apresentou esquecimento da situação estudada no pré-teste que havia conseguido resolver no ano anterior. Isso reforça a necessidade da constante aplicação deste objeto matemático em outras disciplinas.

Muitos dos educandos estão em uma fase de transição na compreensão entre os diferentes registros de representações semióticas do objeto matemático função, pois acertam algumas conversões, erram outras e, às vezes, não conseguem apresentar clareza em suas produções escritas.

Desta forma, há satisfação com as escolhas efetuadas, pois se considera que a metodologia de pesquisa utilizada propiciou condições para execução do trabalho e adaptação para a análise dos indícios de pensamento algébrico, além de adequar-se inteiramente à Teoria dos Registros de Representação Semiótica, quando da elaboração da sequência didática.

Outro aspecto a ser observado é a convicção da importância do trabalho, pois os levantamentos bibliográficos iniciais apontavam para uma tendência das pesquisas ora para álgebra ora para a geometria conforme a “onda” da Educação Matemática. Neste caso considera-se que a Teoria dos Registros de Representação Semiótica pode propiciar, tanto ao educador quanto ao pesquisador, a oportunidade de maximizar a potencialidade de cada uma destas vertentes matemáticas atendendo aos diferentes educandos, pois segundo Tall (1991, p.4) “[...] alguns preferem tratar seus problemas pela análise, outros pela geometria. Os primeiros são incapazes de ver no espaço, os outros são rapidamente cansados dos cálculos e tornam-se perplexos”.

A análise dos resultados apresentados anteriormente possibilitou a classificação de alguns erros dos estudantes:

- a) **Erro por falta de conhecimento do uso com decimais:** Esta situação foi observada na tarefa 1 e, como relatado anteriormente, poderia ser minimizada com mais atividades dentro da sequência didática;
- b) **Erro por falta de entendimento do conceito de função como relação entre conjuntos:** Esta situação pode ser observada na tarefa 2, pois alguns educandos representaram as funções empregando apenas uma relação entre os elementos dos conjuntos quando utilizaram diagramas;
- c) **Erro na formulação da tarefa:** O conflito gerado no entendimento de parte da tarefa 3 pode ser o responsável pelo não entendimento por parte dos alunos;
- d) **Erro na conversão entre os registros de representação semiótica:** Por se tratar de parte do embasamento teórico estas conversões aparecem nas tarefas 3, 4, 8, 9, 10 e 11 e, como observa-se nos relatos, há alunos que não conseguiram realizar todas as situações propostas;
- e) **Erro no uso da linguagem algébrica:** Como fora relatado anteriormente alguns estudantes não conseguiram, especialmente nas tarefas 1, 3 e 4, utilizarem-se da linguagem algébrica de maneira adequada;
- f) **Erro na determinação do domínio:** A restrição no domínio apresentou alunos com respostas erradas nas tarefas 7 e 12
- g) **Erro na representação de funções em Z :** Alguns alunos, na tarefa 8, representaram, utilizando-se de uma reta, uma situação envolvendo os números inteiros, pode-se inclusive associar este tipo de erro ao anterior, pois trata-se de condição imposta ao domínio da função. A análise de livros didáticos propostos em Silva (2007) pode auxiliar no entendimento deste tipo de erro, como se pode observar:

Observarmos que a passagem do discreto ao contínuo, no tratamento de gráficos de funções, é feita de maneira bastante automática e insuficiente na maioria dos livros didáticos que analisamos. A ideia de que é suficiente obter alguns pares (x,y) de números inteiros, em uma tabela, em que $y = f(x)$, sua localização no plano cartesiano e o desenho de um traçado contínuo ligando esses pontos, sem se discutir a representatividade do gráfico nos intervalos em que os pontos não foram calculados, aparece com bastante frequência (SILVA, 2007, p.90).

Desta forma, utilizar o estudo do erro possibilitou uma melhor análise da sequência didática, além de condições para, em futuros estudos, apresentar premissas de possíveis erros em trabalhos similares.

Assim, apesar de não chegar ao manual do bem ensinar, pois ele não existe, pode-se dizer que, seja pela satisfação pessoal de encontrar a possibilidade para a aprendizagem com significado, seja pela oportunidade de iniciar discussão sobre a importância do entendimento do objeto matemático função em seus diferentes registros de representação semiótica, seja pela elaboração de uma sequência didática que possibilitou a diversos educandos a oportunidade de compreender as conversões entre estes diversos registros de representação semiótica, este trabalho é interessante ser lido para futuras pesquisas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando iniciei os estudos para o mestrado buscava resposta para algumas perguntas. Como educador pragmático ficava muitas vezes querendo a receita para o “bem ensinar”. Neste trabalho não há nada quanto a isso, por um simples motivo que levei parte do tempo dos estudos para descobrir e já disse anteriormente: não há um manual para o bem ensinar.

Impulsionado pelos trabalhos iniciados no Programa de Desenvolvimento Educacional do governo do estado do Paraná, buscava também, encontrar pessoas interessadas na melhoria da educação e isso foi algo que tornou o trabalho gratificante, pois os resultados superaram minhas expectativas.

Uma das atividades que auxiliou nesta evolução foi a apresentação de um seminário sobre o projeto de pesquisa. Nesta apresentação fui questionado por ter utilizado o termo “aprendizagem significativa”. Não busquei resposta para este termo à luz deste ou daquele teórico, mas creio que encontrei para mim mesmo uma possibilidade para desenvolver no educando a aprendizagem com significado.

Foi necessário saber de Engenharia Didática, de Artigue, para entender como educador que criar uma sequência sem uma motivação do onde quer chegar é o primeiro passo para não chegar a lugar algum.

Foi preciso saber de Estudo do Erro, de Cury, para entender que por trás dos erros de nossos alunos há, por vezes, mais conhecimento que por trás de muitos acertos.

Foi preciso conhecer a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval, para entender que o educando só reconhece o objeto matemático em plenitude se converte estes registros de representação semiótica e mais, que esta “exteriorização” é facilitada se este aluno consegue compreender com clareza estes diferentes registros de representação semiótica do mesmo objeto matemático.

Então, com tudo isso pude responder, para mim mesmo, que a aprendizagem com significado para o educando somente se faz quando este entende do que estamos falando e neste aspecto os estudos para a elaboração de uma sequência com os diferentes registros de representação semiótica do objeto matemático e a análise dos erros foram importantes.

Observar um grupo de alunos onde poucos educandos compreendiam o objeto matemático função em suas diferentes representações e onde após a aplicação das

tarefas de uma sequência didática há, claramente, uma mudança de comportamento, me fez repensar a prática pedagógica e este talvez seja o primeiro passo na busca da melhoria do ensino.

Deixar de lado a automatização, comum ao nosso cotidiano, que muitas vezes se reflete no processo ensino aprendizagem, para discutir sobre os conteúdos e assuntos estudados, mudando os diferentes registros de representação semiótica, visando gerar significado maior aos educandos é nas palavras de Duval “o limiar da compreensão matemática para os alunos em cada etapa do currículo”.

Após análise de livro e aplicação de teste inicial, pude observar que esta conexão entre os diferentes registros de representação semiótica não ocorre com os métodos tradicionais apresentados na maior parte destes livros didáticos e se estes são grande fonte de pesquisa dos professores, chega-se à conclusão da necessidade de mudança urgente no rumo destas análises dos livros didáticos por parte dos educadores por meio do PNLD¹⁷. Faz-se necessária a criação e/ou ampliação de projetos que trabalhem com professores responsáveis pela escolha dos livros dentro deste programa e assim a partir da lei da oferta fazer uma revolução no mercado dos materiais didáticos apresentados no Brasil. Não basta apresentar o conteúdo é preciso saber como apresentá-lo e também, porque fazê-lo de uma forma e não de outra.

Neste trabalho pude observar que a introdução do estudo de funções como a generalização de situações pode propiciar maior significado aos educandos, pois a generalização a partir do registro algébrico parece ser algo natural e consequência de tomadas de consciência na realização das atividades, mas isto é uma possibilidade para futuras pesquisas.

Outro aspecto observado é que a correlação entre o entendimento do objeto matemático estudado e novas situações apresentadas em outras disciplinas pode ser importante para aumentar o nível de argumentação dos estudantes, mas uma análise mais aprofundada pode também gerar possibilidades para outras pesquisas.

Desta forma, voltando ao objetivo inicial: investigar como estudantes do Ensino Médio lidam com o conceito de função ao se depararem com uma sequência didática que trabalha diferentes registros de representação semiótica desse objeto matemático, concluiu-se, com base no que foi pesquisado e relatado, que é possível propiciar aos alunos

¹⁷ Programa Nacional do Livro Didático.

condições para compreender conversões e conseqüentemente as ligações entre os diferentes registros de representação semiótica do objeto matemático.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.
- ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. **Engenharia didática**: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19. ANPED, UFSC, 2008.
- ARDENGHI, M. J. **Ensino Aprendizagem do conceito de função**: pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. 2008. 182 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.
- ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.
- BASSOI, T. S. **Uma professora, seus alunos e as representações do objeto matemático funções em aulas do ensino fundamental**. 2006. 176 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora, 1994.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília; 1997. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 01 jun. 2010.
- _____. **PCN Ensino médio**. Brasília: Ministério da Educação, 2000.
- _____. **PCN Introdução para o terceiro e quarto ciclos**. Brasília: Ministério da Educação, 1998.
- _____. **PCN Matemática**. Brasília: Ministério da Educação, 1997.
- _____. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2008.
- CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Gradiva, 2003.
- COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. Registros de Representação Semiótica nas Pesquisas Brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. **Zetetiké**, n. 29, p. 41-72, jan./jun., 2008.
- CUNHA, A.G. **Dicionário Etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986.
- CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
- DAMM, R. F. Registros de representação In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002, p.135-153.

_____. Registros de Representação In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação matemática: uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2010, p.167-188.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: ALCÂNTARA, S. D. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2005. p.11-34.

_____. **A Cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics**. Educational Studies in Mathematics, 2006.

_____. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. São Paulo: Livraria da Física Editora, 2009.

FONT, V.; GODINO, J. D.; D'AMORE, B. **Enfoque ontosemiótico de las representaciones em educación matemática**. Barcelona: 2007.

GODINO, J. D. **Teoría de las funciones semióticas: un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática**. Granada: Serviço de Reprografia de Faculdade de Ciências, 2003.

KIERAN, C. The learning and teaching of school algebra. In: GROWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992. p. 390-419.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

MACHADO, S. D. A. **Educação matemática: uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2010.

PAIS, L. C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PAIVA, M. **Matemática: volume único**. São Paulo: Moderna, 2005.

PARANÁ, **DCE do PARANÁ**. Curitiba: SEED. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/diretrizes_2009/out_2009/matematica.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2010.

_____. **Projeto Político Pedagógico: Colégio Estadual Professor Francisco Villanueva – Ensino Fundamental e Médio**. Rolândia: SEED, 2010.

PARRA, N. **O adolescente segundo Piaget**. São Paulo: Pioneira, 1983.

PESQUITA, I. M. P. **Álgebra e pensamento algébrico de alunos do 8º ano**. 2007. 262 f. Dissertação (Mestrado em Educação – Especialidade em Didática da Matemática) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2007.

REPRESENTAÇÃO In: ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

_____. In: BORBA, F. S. **Dicionário Unesp do Português Contemporâneo**. São Paulo: Unesp, 2004.

ROSSINI, R. **Saberes docentes sobre o tema função**: uma investigação das praxeologias. 2006. 382 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2006.

SALGUEIRO, N.C.G. **O uso da lógica na resolução de equações do 1º Grau**. 50 p. Caderno Pedagógico (PDE - Programa de Desenvolvimento Educacional SEED-PR) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

SANTAELLA, L. **O que é Semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 1983.

SILVA, U. A. **Análise da abordagem de função adotada em livros didáticos de matemática da educação básica**. 2007. 110 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Org.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. p.3-24.

USISKIN, Z. Concepções sobre álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Pré-teste

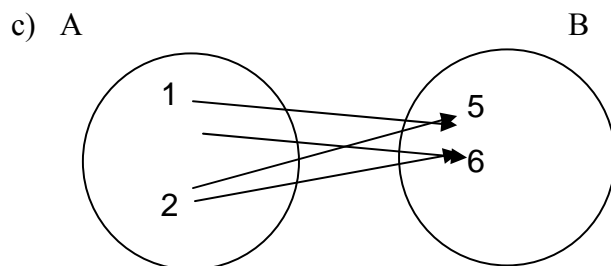
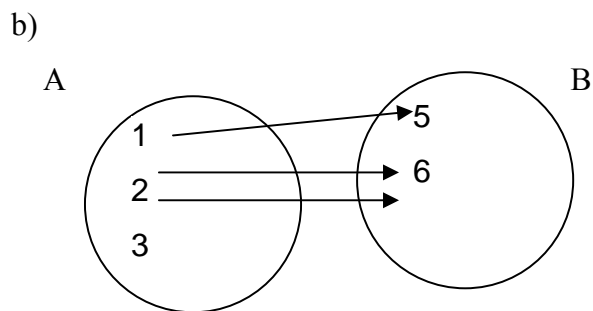
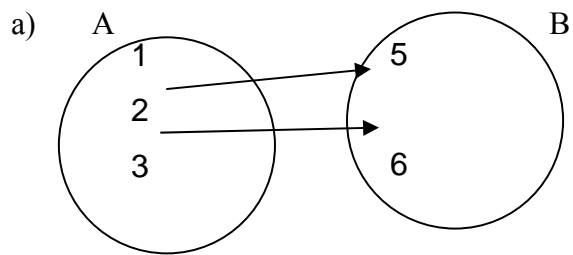
NOME: _____ / /

1. Dentre as palavras ou termos apresentados abaixo assinale aqueles que podemos relacionar com funções:

- | | | |
|-------------------------|------------------------|-------------------------|
| a) Gráficos | b) Correspondência | c) Circunferência |
| d) Produto notável | e) Relação | f) Probabilidade |
| g) Análise Combinatória | h) Plano bidimensional | i) Arranjo |
| j) Prismas | k) Polinômios | l) Cilindro |
| m) Domínio | n) Imagem | o) Injetora |
| p) Bissetriz | q) Sobrejetora | r) Teorema de Pitágoras |

NOME: _____ / /

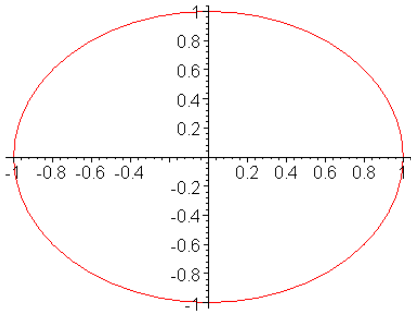
2. Inicialmente foi estudado que podemos interligar o conceito de funções com a ideia de correspondência entre dois conjuntos. Desta maneira assinale as situações onde podemos considerar estas correspondências como sendo funções:



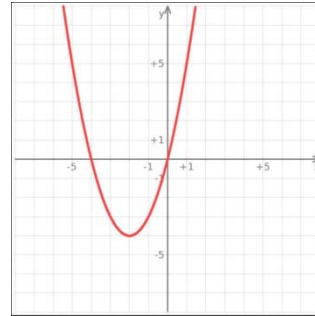
NOME: _____ / /

3. Dentre os gráficos apresentados a seguir assinale aqueles que **não** podem ser considerados funções:

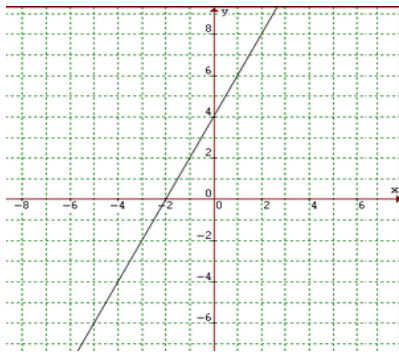
a)



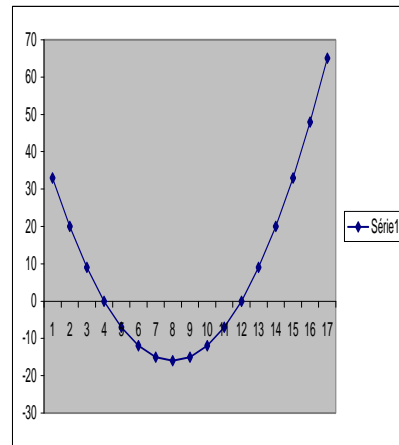
b)



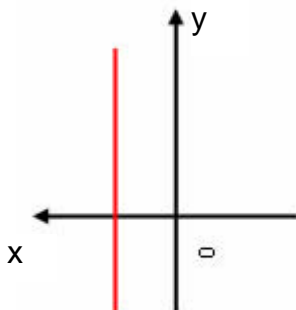
c)



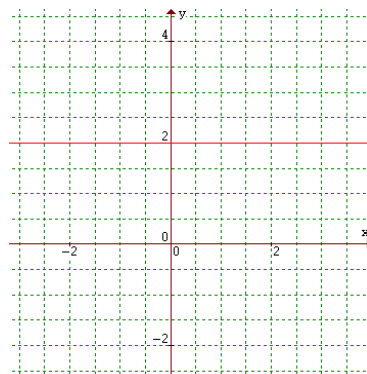
d)



e)



f)



NOME: _____ / /

4. Dentre as correspondências apresentadas a seguir assinale aquelas que **não** podem ser consideradas funções:

a) $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, tal que $f(x) = 2x - 3$

c) $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, tal que $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{3}}$

d) $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, tal que $f(x) = x^2 + 3x - 4$

NOME: _____ / /

Gabarito

Questão	Itens Assinalados
1	
2	
3	
4	

APÊNDICE B – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Tendo em vista a necessidade de coleta de dados para o desenvolvimento de projetos de investigação e pesquisa, sob responsabilidade de Angela Marta Pereira das Dores Savioli, professor(a) lotada no Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, declaro que consinto que a mesma utilize, parcial ou integralmente, registros dessas atividades, anotações dos alunos, para fins de pesquisa, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que o nome de cada educando seja citado apenas como participante da pesquisa, garantido o anonimato no relato da pesquisa.

Declaro ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida neste estabelecimento de ensino e que poderá ser utilizado o nome do colégio em possíveis publicações.

Rolândia, / / .

NOME:

RG:

ASS.: _____