Universidade Estadual de Londrina

MÁRCIO ROBERTO DA ROCHA

EMPREENDIMENTOS DE UMA COMUNIDADE DE PRÁTICA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NA BUSCA DE APRENDER E ENSINAR FRAÇÕES

Londrina
2013

MÁRCIO ROBERTO DA ROCHA

EMPREENDIMENTOS DE UMA COMUNIDADE DE PRÁTICA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NA BUSCA DE APRENDER E ENSINAR FRAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientador: Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino

Londrina
2013

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

R672e Rocha, Márcio Roberto da.
Empreendimentos de uma comunidade de prática de professores de matemática na busca de aprender e ensinar frações / Márcio Roberto da Rocha. – Londrina, 2013.
131 f. : il.

Orientador: Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Professores de matemática – Teses. 2. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 3. Matemática – Formação de professores – Teses. 4. Professores de matemática – Comportamento informacional – Teses. 5. Frações – Formação de conceitos – Teses. 6. Educação matemática – Teses. I. Cyrino, Márcia Cristina de Costa Trindade. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

MÁRCIO ROBERTO DA ROCHA

EMPREENDIMENTOS DE UMA COMUNIDADE DE PRÁTICA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NA BUSCA DE APRENDER E ENSINAR FRAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
UEL – Londrina - PR

Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
UEL – Londrina - PR

Profa. Dra. Lilian Akemi Kato
UEM – Maringá - PR

Londrina, 25 de junho de 2013.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que sempre esteve e está ao meu lado em todos os momentos de minha vida, fortalecendo-me, sendo o amigo certo da hora incerta.

À professora Márcia Cyrino, pelo modo atento e desafiador com o qual me orientou nesse trabalho, pelo tempo dedicado, pelas contribuições durante as reuniões de orientação e de produção do texto.

Às professoras Angela Marta e Lilian, por participarem da Comissão Examinadora e terem contribuído com sugestões na ocasião do exame de qualificação.

A meus pais, por terem, diante de todas as dificuldades, me educado para vencer obstáculos. Ainda que vocês não estejam mais aqui, Pai e Mãe, eu, de maneira alguma os tenho longe de mim. Onde quer que vocês estejam: eu sempre os amarei!

Aos colegas do programa Mestrado, que compartilharam alegrias e angústias semelhantes. À Ivnna, pelas diversas conversas que me auxiliaram durante todo o processo.

Aos membros do GEPEFOPEM, pelas discussões e contribuições. Em especial, à doutoranda e minha amiga professora Tânia Rocha por ter me incentivado a entrar para o Mestrado.

A todas as professoras que constituíram a Cop-PAEM, mais do que fazer parte do grupo investigado, vocês são colaboradoras nesse estudo.

À CAPES, pela bolsa de estudos concedida.

ROCHA, Márcio Roberto da. **Empreendimentos de uma comunidade de prática de professores de matemática na busca de aprender e ensinar frações**. 2013. 131 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2013.

RESUMO

No presente estudo, investigamos como um contexto de formação, caracterizado como Comunidade de Prática (WENGER, 1998), colabora para aprendizagens de professores que ensinam Matemática. A formação foi constituída por reuniões semanais no Colégio Estadual de Paranavaí, com a participação de seis professoras dos anos finais de Ensino Fundamental, uma professora recém-formada, professora formadora e o pesquisador. Ao longo do período da pesquisa foram constatados elementos que evidenciaram como o grupo investigado foi se constituindo uma Comunidade de Prática. Optamos pela abordagem qualitativa na intenção de responder à questão de investigação *Que elementos do contexto de uma Comunidade de Prática de professores de Matemática permitem aprendizagens de seus membros ao lidarem com empreendimentos na busca de aprender e ensinar frações?*Para isso, buscamos descrever a trajetória da comunidade investigada para identificar os empreendimentos mobilizados na busca de aprender e ensinar frações. A análise das informações foi feita a partir de episódios que revelaram processos de negociação de significados, destacando a interação entre os processos de participação e reificação ocorridos na articulação e desenvolvimento dos empreendimentos, no sentido de evidenciar o que os membros dessa comunidade, aprenderam no que se refere aos conhecimentos profissionais de professores de Matemática. Desse modo, foi possível identificar elementos da prática da comunidade investigada que permitiram essas aprendizagens, nomeadamente a oportunidade de: refletir/discutir a respeito da prática pedagógica; compartilhar experiências; produzir material manipulativo (oficina) explorando suas potencialidades; elaborar e resolver tarefas associadas ao material manipulativo construído; refletir sobre aplicação dessas tarefas em sala de aula; enfrentar desafios; questionar e ser questionado (compromisso com a justificação); reflexão a respeito do processo de formação continuada.

Palavras-chave: Educação matemática. Formação continuada de professores de matemática. Comunidades de prática. Frações.

ROCHA, Márcio Roberto da. **Enterprises of a community of practice of mathematic's teachers in the pursuit of learning and teaching fractions**. 2013. 131 f. Dissertation (Masters in Teaching of Science and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2013.

ABSTRACT

In the present study we investigated like a training context, characterized as a Community of Practice (Wenger, 1998) contributes to the learning of teachers' that teach mathematic. The training consisted of weekly meetings at the Paraná State High School in Paranavaí, with the participation of six teachers of the elementary school's final grades, one teacher who had just graduated, a trainer teacher and the student for a master's degree. Throughout the study, elements that showed how the investigated group was becoming a Community of Practice were found. We have chosen a qualitative approach in an attempt to answer the research question: What elements of the context of a Community of Practice of mathematics' teachers allow its members learning in dealing with enterprises in the pursuit of learning and teaching fractions? For this, we sought to describe the trajectory of community investigated to identify the projects mobilized in pursuit of learning and teaching fractions. The analysis of the information was taken from episodes which revealed processes of meaning's negotiation, emphasizing the interaction between processes of participation and reification occurred in the articulation and the undertaking development, in order to highlight what the members of this community have learned despite the professional knowledge of the mathematics' teachers. Thus, it was possible to identify elements of Community of Practice which allowed investigated this learning, including the opportunity to: reflect / discuss about the pedagogical practice, share experiences; produce manipulative material (workshop) exploring their potential, develop and solve tasks associated with manipulative material built; reflect on implementation of these tasks in the classroom; challenges; questioning and being questioned (commitment to justification); reflection on the process of continuing education.

Keywords: Mathematics education. Continuing education of mathematics' teachers. Communities of practice. Fractions.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Educação Matemática, como campo de investigação, tem por finalidade específica o estudo de fatores que condicionam os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática e o desenvolvimento de programas que fomentem esses processos. Um desses fatores trata da formação de professores e, com relação a isso, Cyrino (2009) afirma que diferentes abordagens presentes nas produções científicas visam investigar aspectos que possam atender as necessidades educacionais de nosso momento histórico e produzir reflexões em torno dos conhecimentos que são necessários para o professor exercer sua atividade profissional.

> No Brasil esses esforços se intensificaram nos últimos anos devido as recentes Políticas Públicas de Formação de Professores, respaldadas pelas “Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica”, indicadas pelo Conselho Nacional de Educação por meio de Resoluções CNE/CP01 e CP02/2002; pelo Parecer CNE/CP 5/2006 e pelo Projeto de Resolução anexo ao Parecer CNE/CP nº 9/2007 que dispõem sobre a reorganização da carga horária mínima dos cursos de Licenciatura para a formação dos professores dos anos finais do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e da Educação Profissional, no nível da Educação Básica; a Universidade Aberta do Brasil (UAB); e os Programas de Formação Continuada de Professores (CYRINO, 2009, p.95)

Com o objetivo de oferecer subsídios que possam ser agregados a esses esforços, nos últimos dez anos, o Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Formação de Professores que Ensinam Matemática – GEPEFOPEM busca, com suas pesquisas, elencar propostas que possam, dentre outras coisas, questionar: quais são os conhecimentos necessários ao professor de Matemática, como ele aprende para poder ensinar, quais e como diferentes contextos permitem essa aprendizagem? Dessa forma, temos a pretensão de fornecer aos organizadores de currículo, aos responsáveis por políticas públicas relativas à formação de professores e aos pesquisadores da área subsídios que possam orientar ações relativas à formação de professores que ensinam Matemática.

Ao tratar a aprendizagem em termos sociais na formação de professores de Matemática, alguns autores (CYRINO, 2009; FIORENTINI, 2009; GRAVEN, 2003; KRAINER, 2003; LLINARES, 2002; PEDRO GÓMEZ, 2005) defendem que a formação de grupos de trabalho pode contribuir para uma reflexão conjunta, conduzindo a discussões referentes à prática pedagógica, aos conhecimentos sobre a Matemática e sobre o seu ensino e a outros elementos que compõem os conhecimentos profissionais do professor de Matemática.

Graven e Lerman (2003) enfatizam que, embora pesquisas sobre educação matemática de professores tenham criado contextos que permitam aprendizagem desses professores e descrito o que eles aprendem em termos sociais, pouco tem sido feito para explicar como esses contextos permitem a aprendizagem.

Essa pesquisa faz parte do projeto “Educação Matemática de Professores que ensinam Matemática”, do Programa Observatório da Educação, proposto por docentes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática e do curso de Matemática da Universidade Estadual de Londrina. Um dos objetivos deste projeto é investigar como contextos de formação, caracterizados como uma Comunidade de Prática de Professores que ensinam Matemática, formada por pesquisadores, futuros professores de Matemática e professores de Matemática que atuam na Educação Básica permitem aprendizagens de professores.

Nesse sentido, assumindo como pressuposto a Teoria Social da Aprendizagem desenvolvida por Wenger (1998), para essa pesquisa, foi constituído um grupo formado por professores dos anos finais do Ensino Fundamental, uma professora recém-formada e dois pesquisadores, um de mestrado e um de doutorado, com a intenção de que esse grupo constituísse uma Comunidade de Prática (CoP). No decorrer do nosso trabalho, diante das necessidades que emergiram, pudemos constatar elementos que nos autorizaram a identificar o grupo com uma Comunidade de Prática a qual foi intitulada por “Comunidade de Prática de professores que aprendem e ensinam Matemática” designada por *CoP-PAEM.*

Sendo assim, temos a pretensão de investigar: “Que elementos do contexto de uma Comunidade de Prática de professores de Matemática permitem aprendizagens aos seus membros ao lidarem com empreendimentos na busca de aprender e ensinar frações”?

Para responder a essa questão de investigação, identificamos os empreendimentos mobilizados pela Comunidade de Prática de Professores que aprendem e ensinam Matemática – *Cop-PAEM*, na busca de aprender e ensinar frações. Analisamos processos de negociação de significados ocorridos na articulação e desenvolvimento desses empreendimentos no sentido de evidenciar o que os professores, membros dessa comunidade, aprenderam no que se refere aos conhecimentos profissionais de professores de Matemática.

Nosso trabalho está organizado em quatro capítulos. No primeiro, exploramos algumas características da aprendizagem como participação em Comunidades de Prática a partir da perspectiva de Lave e Wenger (1991) e Wenger (1998). Destacamos e caracterizamos alguns aspectos estruturais que descrevem a noção de Comunidades de Prática, apontando elementos que nos permitiram identificar o grupo investigado como uma

Comunidade de Prática, e descrevemos o processo de negociação de significado como mecanismo para a aprendizagem.

No segundo capítulo, apresentamos algumas considerações a respeito da formação de professores segundo (COSTA, 2006; MANRIQUE; ANDRÉ, 2006; PASSOS; GALVÃO, 2011; PONTE; CHAPMAN, 2008; PONTE; OLIVEIRA, 2002), e do ensino e aprendizagem de frações na Educação Básica.

O encaminhamento metodológico adotado para o desenvolvimento da pesquisa está descrito no terceiro capítulo. Neste capítulo, são apresentados os participantes, os instrumentos para recolha de informações e o processo de análise dos dados.

No quarto capítulo, à luz da Teoria Social da Aprendizagem (WENGER, 1998), descrevemos a trajetória da *Cop-PAEM*, que nos permitiu identificar seus empreendimentos articulados na busca de aprender e ensinar frações. Em seguida, analisamos o processo de negociação de significados ocorrido na articulação e desenvolvimento desses empreendimentos evidenciando o que os professores, membros dessa comunidade, aprenderam no que se refere aos conhecimentos profissionais de professores de Matemática.

No último capítulo, são apresentados os elementos constituintes da prática da comunidade investigada que identificamos ter permitido/revelado aprendizagens de seus membros. No capítulo, também discutimos algumas implicações do presente estudo na formação de professores que ensinam matemática.

Para finalizar, apresentamos as referências bibliográficas das obras utilizadas, bem como os apêndices e anexos utilizados na consecução do presente trabalho.

CAPÍTULO 1
APRENDIZAGEM COMO PARTICIPAÇÃO SOCIAL

No presente capítulo, apresentamos alguns pontos da Teoria Social da Aprendizagem desenvolvida por Wenger (1998, p. 4), em que o foco está na "aprendizagem como participação social". Dessa perspectiva, a aprendizagem ocorre por meio de um processo denominado negociação de significados em um contexto intitulado como Comunidade de Prática.

Na seção 1.2 destacamos e caracterizamos alguns aspectos estruturais que descrevem a noção de Comunidade de Prática, enfatizando elementos que evidenciaram como o grupo investigado foi se constituindo uma comunidade de prática ao longo do período da pesquisa.

Ao considerar que a aprendizagem está ligada à participação em Comunidades de Prática, citamos características da noção de *participação periférica legítima* presentes no trabalho de investigação realizado por Wenger junto com Jean Lave, publicada no livro "Aprendizagem Situada: participação periférica legítima"[1] (1991) que tem como conceitos centrais: participação, identidade e prática.

Encerramos o capítulo com uma descrição do processo de negociação de significados em Comunidades de Prática à luz do trabalho de Wenger (1998).

1.1 TEORIA SOCIAL DA APRENDIZAGEM: APRENDIZAGENS EM COMUNIDADES DE PRÁTICA

Nesta seção, trataremos de aspectos que consideramos essenciais para discutir a respeito da Teoria Social da Aprendizagem desenvolvida por Wenger (1998) que concebe a aprendizagem como participação social. Aprofundar nessa questão pressupõe um esforço em compreender que a aprendizagem envolve a pessoa e sua relação com comunidades sociais. Nesta visão, a aprendizagem significa tornar-se capaz de estar envolvido em novas atividades, de desempenhar novas tarefas e funções, de dominar novas noções, as quais não existem em isolamento, mas sim, são parte de sistemas de relações surgidos, reproduzidos e desenvolvidos dentro de comunidades sociais; que são, em parte, sistemas de relações entre pessoas. A pessoa é definida por essas relações tanto quanto ela as define. Em outras palavras, a aprendizagem envolve a construção de identidades.

---

[1] "Situated Learning: Legimate Peripheral Participation" (LAVE; WENGER, 1991).

Nesse sentido, Lave e Wenger (1991) e Wenger (1998) afirmam que a aprendizagem ocorre no contexto da nossa experiência cotidiana de participação no mundo. Dessa forma, faz-se necessário levar em conta os grupos sociais em que nos envolvemos, as relações que nele estabelecemos, as atividades que são desenvolvidas nesses grupos, os tipos de recursos que são utilizados, as histórias que são partilhadas e construídas. Esses autores referenciam esses grupos sociais como um espaço em que a aprendizagem ocorre e os denominam por Comunidades de Prática.

Embora o tema Comunidades de Prática seja tratado em Lave e Wenger (1991), a exploração mais detalhada desta noção é assumida por Wenger (1998) na publicação do livro Comunidades de Prática: Aprendizagem, Significado e Identidade[2]. Nesta obra, o conceito de Comunidade de Prática, além de funcionar como ponto de entrada de um esquema conceitual mais amplo, é assumido como um elemento constitutivo do quadro teórico que o autor se propõe a desenvolver.

Ao apresentar sua teoria social da aprendizagem, Wenger (1998) afirma que não tem a pretensão de substituir nenhuma das teorias "ditas" tradicionais, quais sejam:

- *Teorias de prática social*: enfatizam que aprender, pensar e saber são relações entre pessoas em atividade no mundo e surgidas no mundo socialmente e culturalmente estruturado.
- *Teorias de identidade*: tratam de questões de formação social da pessoa como resultado de sua relação social.
- *Teorias de estrutura social*: priorizam as instituições, normas e regras, bem como enfatizam sistemas culturais, discursos e história.
- *Teorias da experiência situada:* priorizam as dinâmicas da existência cotidiana, a improvisação, a coordenação e a coreografia da interação; abordam relações interativas das pessoas com o seu ambiente.

O autor menciona que a teoria social[3] (no campo das teorias da prática social) é a principal da qual o seu trabalho faz parte. Segundo ele, é "uma teoria social de

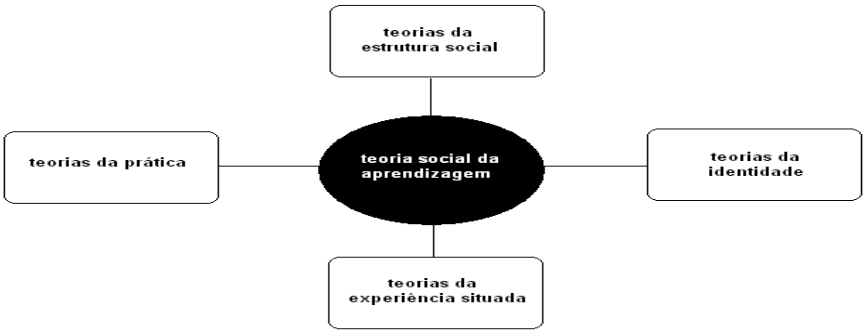
---

[2] "Commnuties of Practice: Learning, Meaning and Identity"

[3] Para Wenger (1998, p. 12), a teoria social é "um campo mal definido de investigação conceitual na intersecção da filosofia, das ciências sociais e das humanidades." "[...] a somewhat ill-defined field of conceptual inquiry at the intersection of philosophy, the social sciences, and the humanities" (WENGER, 1998, p. 12).

aprendizagem, que se localiza na intersecção de tradições intelectuais entre dois eixos principais”[4] (WENGER, 1998, p. 12, tradução nossa), como mostra a figura 1, a seguir.

Figura 1 - Dois eixos principais de tradições intelectuais



Fonte: Wenger (1998, p. 12, tradução nossa).

No eixo vertical, a aprendizagem ocorre no engajamento em ações e interações em uma comunidade num tempo histórico e a sua reprodução transforma a estrutura dessa comunidade. No eixo horizontal, a aprendizagem é concebida como desenvolvimento e transformação da identidade de participantes em uma prática.

Wenger (1998) esclarece que sua teoria social da aprendizagem possui seu próprio conjunto de hipóteses e seu próprio foco.

No que se refere ao conjunto de hipóteses, o autor destaca quatro componentes:

> 1.*Significado*: uma forma de falar de nossa capacidade (de mudar) – individual ou coletivamente – de experimentar nossa vida e o mundo como algo significativo.
> 2. *Prática*: uma forma de falar de recursos históricos e sociais compartilhados, sistemas, e perspectivas que sustentem o engajamento mútuo na ação.
> 3. *Comunidade*: uma forma de falar sobre as configurações sociais nas quais nossos empreendimentos são definidos como buscas valiosas e nossa participação é reconhecida como competência.
> 4. *Identidade*: uma forma de falar sobre como a aprendizagem muda quem nós somos e cria histórias pessoais de transformação no contexto de nossas comunidades[5] (WENGER, 1998, p. 5, tradução nossa).

---

[4] “[…] a social theory of learning as being located at the intersection of intellectual traditions along two main axes.” (WENGER, 1998, p. 12).

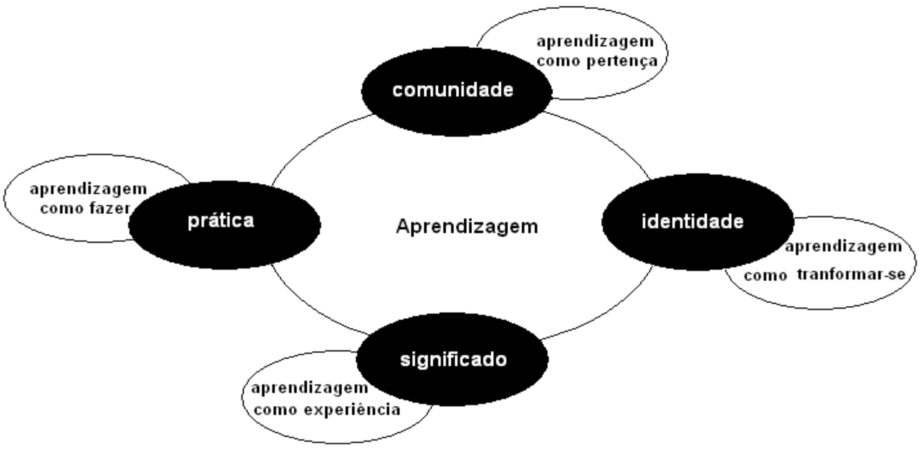
[5] “1. *Meaning*: a way of talking about our (changing) ability – individually and collectively – to experience our life and the world as meaningful. 2. *Practice*: a way of talking about the shared historical and social resources, frameworks, and perspectives that can sustain mutual engagement in action. 3. *Community*: a way of talking about the social configurations in wich our enterprises are defined as worth pursuing and our participation is recognizable as competece.” 4. “*Identity*: a way of

A partir desses componentes, Wenger (1998) destaca que o foco principal de sua teoria é a aprendizagem como participação social.

> Participação aqui não se refere somente a eventos locais de engajamento em certas atividades com certas pessoas, mas sim a um processo abrangente de sermos participantes ativos nas *práticas* de comunidades sociais e construirmos *identidades* em relação a essas comunidades. Participar em um grupo específico ou de um trabalho em equipe, por exemplo, é tanto uma forma de ação quanto uma forma de pertencimento. Tal participação dá forma não somente ao que fazemos, mas também a quem somos e como interpretamos o que fazemos.[6] (WENGER, 1998, p. 4, tradução nossa).

Na figura 2, temos um esquema que representa a articulação entre esses quatro componentes apresentados, tomando a aprendizagem como elemento central e como uma prática social desenvolvida em comunidades. O desenvolvimento dessa prática social ocorre com a negociação de significados, a partir de nossas experiências de vida e acarreta na constituição de identidades que vão se integrando e definindo a partir do nosso compromisso dentro das Comunidades de Prática às quais pertencemos.

Figura 2 - Componentes de uma teoria social de aprendizagem



Fonte: Wenger (1998, p. 5, tradução nossa).

talking about how learning changes who we are and creates personal histories of becoming in the context of our communities." (WENGER, 1998, p. 5).

[6] "Participation here refers not just to local events of engagement in certain activities with certain people, but to a more encompassing process of being active participants in the *practices* of social communities and constructing *identities* in relation to these communities. Participating in a playground clique or in a work team, for instance, is both a kind of action and a form of belonging. Such participation shapes not only what we do, but also who we are and how we interpret what we do." (WENGER, 1998, p. 4)

O autor afirma que é possível trocar a posição dos elementos desse esquema mantendo, assim mesmo, o seu sentido. O que mostra que esses elementos estão interligados e se definem mutuamente. Por exemplo, Beline (2012) assumiu a identidade como elemento central com o objetivo de discutir em que medida a dinâmica assumida nos encontros de uma Comunidade de Prática de Formação de Professores, permitiu o desenvolvimento de alguns traços de identidade na própria Comunidade, assim como na identidade "de professor de Matemática" de duas de suas participantes.

Wenger (1998) sublinha que uma teoria social de aprendizagem deve integrar os quatro componentes citados para caracterizar a participação social como um processo de aprendizagem que ocorre no contexto de Comunidades de Prática.

Sendo assim, na seção seguinte, destacamos e caracterizamos aspectos estruturais que descrevem a noção de Comunidades de Prática, enfatizando elementos que evidenciaram como o grupo investigado foi se constituindo uma Comunidade de Prática ao longo do período da pesquisa.

1.2 Comunidades de Prática e a CoP – Professores que Aprendem e Ensinam Matemática

Os grupos sociais, assumidos como um local social em que a aprendizagem ocorre, são designados por Lave e Wenger (1991) e Wenger (1998) como Comunidades de Prática, conforme mencionamos anteriormente. Wenger (1998) afirma que uma Comunidade de Prática (CoP) não é tão somente um agregado de pessoas definidas por algumas características. São pessoas que aprendem, constroem e "fazem" a gestão do conhecimento. Uma CoP também não deve ser considerada como sinônimo de equipe ou de rede. Com relação a isso Krainer (2003, p. 95) afirma que:

> Equipes (e grupos de projetos) são principalmente selecionados pelo coordenador, que pré-determinou objetivos e, portanto, até certo ponto rigorosos e conexões formais dentro do time. Comunidades são consideradas como auto-seletivas, seus membros negociam os objetivos e tarefas. Pessoas participam porque se identificam com o assunto. Redes são flexíveis e informais porque não há empreendimento compartilhado que as mantém juntas. Seu primeiro propósito é coletar e passar adiante informação. Os relacionamentos estão sempre mudando (se alterando) como as pessoas têm a necessidade de se conectar[7]. (tradução nossa).

[7] *Teams* (and project groups) are mostly selected by the management, have pre-determined goals and therefore rather tight and formal connections within the team. *Communities* are regarded as

Uma Comunidade de Prática pode ser caracterizada, segundo Wenger, McDermott e Snyder (2002), se pudermos apresentar os seguintes elementos: *comunidade, domínio* e *prática*, para os quais aprofundaremos nossa discussão, a seguir, relacionando-os com o grupo investigado no sentido de evidenciarmos o que nos permitiu designá-lo como uma comunidade de prática. Nós informamos que na formação do grupo investigado já tínhamos a intencionalidade de constituir uma comunidade de prática, no entanto, isso só pode ser constatado no decorrer do nosso trabalho.

A *comunidade* se refere ao grupo de pessoas que interagem e constroem relações entre si em torno do domínio. É o que "cria o tecido social da aprendizagem" [8] (WENGER; MCDERMOTT; SNYDER, 2002, p. 28). O grupo[9] investigado foi constituído por professoras dos anos finais do Ensino Fundamental, por uma professora recém-formada, por mim pesquisador, autor desse trabalho, e a professora formadora Tânia, responsável pela coordenação do grupo.

Com relação ao *domínio*, Cyrino (2008, p. 2) afirma que é o que mobiliza os membros a contribuírem e participarem da comunidade na busca da afirmação dos seus propósitos, ações, iniciativas e valorização de seus membros; é o elemento que legitima a existência da comunidade. Para Wenger, McDermott e Snyder (2002, p. 28), o domínio é o que "[...] inspira os membros a contribuírem e participarem, guia suas aprendizagens e dá significado a suas ações" [10]. No que se refere ao grupo investigado, diante das necessidades que emergiram em consequência do trabalho desenvolvido, o domínio é entendido como a formação continuada de professores que ensinam Matemática. O que nos leva a isso é a temática tratada nos momentos de encontro, reuniões ocorridas semanalmente, nas quais discutíamos a respeito de questões relacionadas ao conhecimento profissional de professores de Matemática, que, segundo Ponte e Oliveira (2002, p. 4), "envolve o conhecimento relativo à prática letiva na sala de aula e a outros papeis profissionais, tais como tutoria de alunos, a participação em atividades e projetos da escola, a interação como membros da comunidade e o trabalho em associações profissionais". Também na análise de registros feitos pelos

---

selfselecting, their members negotiating goals and tasks. People participate because they personally identify with the topic. *Networks* are loose and informal because there is no joint enterprise that holds them together. Their primary purpose is to collect and pass along information. Relationships are always shifting and changing as people have the need to connect (KRAINER, 2003, p. 95).

[8] "[...] creates the social fabric of learning" (WENGER; MCDERMOTT; SNYDER, 2002, p. 28).

[9] Caracterizações dos membros desse grupo serão dadas no capítulo 3.

[10] "[...] inspires members to contribute and participate, guides their learning, and gives meaning to their actions" (WENGER, 1998, p. 28).

membros desse grupo, encontramos depoimentos que corroboram com a nossa afirmação a respeito do domínio, o que mostramos nos depoimentos a seguir:

> *"Estes encontros que estamos fazendo tem nos dado a oportunidade de sairmos um pouco da rotina, de estudar e de enxergar as coisas com outros olhos. Será que este não seria o caminho? O Estado não deveria aos seus professores uma formação continuada da forma como temos feito em nossos encontros?" (Beatriz, 4º Encontro, 05/04/2011)*

> *"A participação nesse grupo tem me proporcionado uma reflexão de como trabalhar, uma reflexão de mudança, uma tentativa para que a gente mude nossas práticas." (Débora, 25º Encontro, 08/11/2011)*

> *"Eu descobri que os mesmos medos, as ansiedades, as dificuldades que eu tenho, os outros (professores) também têm. E uma coisa que acho mais importante é que a gente tem que sempre continuar aprendendo." (Cláudia, 25º Encontro, 08/11/2011)*

A *prática* é definida como "[...] um conjunto de estruturas, ideias, ferramentas, informação, estilos, linguagem, estórias, e documentos que os membros da comunidade compartilham"[11] (WENGER; MCDERMOTT; SNYDER, 2002, p. 29). É a ação dos membros da comunidade em aprender juntos como fazer coisas pelas quais se interessam. Segundo Wenger (1998), o emprego do conceito prática:

> [...] não pertence a nenhum dos lados das dicotomias tradicionais que dividem a ação do conhecimento, o manual do mental, o concreto do abstrato. O processo de engajar-se na prática implica que toda pessoa atue e conheça ao mesmo tempo. Na prática, a chamada atividade manual não é irreflexiva e a atividade mental não é incorpórea. E nenhuma delas é o concreto solidamente evidente, nem o abstrato transcendentalmente geral [...].[12] (WENGER, 1998, p. 47-48, tradução nossa).

No que compete ao grupo investigado, citamos como elementos da prática: a reflexão a respeito da prática pedagógica, ponto marcante em cada um dos encontros desse

---

[11] "[...] a set of frameworks, ideas, tolls, information, styles, language, stories, and documents that community members share" (WENGER; MCDERMOTT; SNYDER, 2002, p. 29).

[12] "[...] does not fall one side of traditional dichotomies that divide acting from knowing, manual from mental, concrete from abstract. The process of engaging in practice always involves the whole person, both acting and knowing at once. In practice, so-called manual activity is not thoughtless, and mental activity is not disembodied. And neither is the concrete solidly sel-evident, nor the abstract transcendentally general [...]." (WENGER, 1998, p. 47-48).

grupo; a produção de material manipulativo, a elaboração de tarefas associadas ao material manipulativo produzido, aplicação das tarefas em sala de aula; o relato da aplicação das tarefas em sala de aula e a reflexão a respeito da aplicação; estudo de artigos; registros feitos pelos membros do grupo a respeito das impressões deles sobre a participação nos encontros.

Pelo o que foi apresentado, ressaltamos que, ainda que se apresentem os elementos: *comunidade*, *domínio* e *prática* de forma separada, Wenger (1998) enfatiza que a expressão Comunidade de Prática deve ser considerada como uma unidade e, para tanto, estabelece três dimensões da prática, nomeadamente: engajamento/compromisso mútuo, empreendimento articulado/conjunto e repertório compartilhado.

O engajamento/compromisso mútuo é o que permite realizar iniciativas em conjunto, promover interações sociais, harmoniosas ou conflituosas que contribuem para que os participantes se percebam envolvidos com algo em comum, por meio de concordâncias ou discordâncias. Isso está relacionado com a capacidade de interagir com as competências dos outros e a parcialidade dos saberes de cada participante.

A maneira com que cada participante da comunidade se engaja na interação com os demais define a sua afiliação, que caracteriza uma posição única de cada membro na comunidade, a sua identidade. Essa, por sua vez, não é algo imutável. Ela sofre mudanças de acordo com as relações de engajamento na prática. Com relação a isso, citamos a atitude de alguns membros do grupo investigado em se queixar, recorrentemente, da falta de interesse dos alunos, enquanto outros questionavam o que poderia ser feito de "diferente" na sala de aula, além de olhar para o que tinha dado "certo" na aplicação das tarefas. As diferentes perspectivas dos membros do grupo em relação à participação na comunidade puderam ser evidenciadas em diversas situações[13] da prática e criaram semelhanças e diferenças entre os membros. Nos encontros, percebemos diferentes formas de participação que definiram o engajamento mútuo dos membros. Alguns falavam mais, expondo ideias, propostas e contestando aquilo com que não concordavam, enquanto outros se abstinham das discussões ou então concordavam com as falas dos demais.

A segunda dimensão da prática é o empreendimento articulado/conjunto que é construído por meio de um processo de negociação dos participantes e não a partir de um acordo estático: "[...] empreendimento não é conjunto no sentido de que todos acreditam na mesma coisa ou concordam com tudo, mas sim no sentido de que é negociado

---

[13] Isso será tratado com maior especificidade na análise dos dados em que serão mencionadas as formas de participação como um dos processos de aprendizagem.

coletivamente”[14] (WENGER, 1998, p. 78). É esse processo de negociação que dá um sentido de apropriação e responsabilidade por aquilo que é construído e revela a ligação com a dimensão anterior (engajamento/compromisso mútuo). No trabalho desenvolvido com esse grupo de professores, pudemos elencar, durante o período em que ocorreu a pesquisa, dois empreendimentos articulados na busca de aprender e ensinar o conceito de frações, nomeadamente: *Estudos dos temas SAEB e Prova Brasil* e *Estudo a respeito do conceito de fração*, sendo o segundo, o foco da nossa análise.

O repertório compartilhado, terceira dimensão da prática, trata-se da geração de recursos para a negociação de significados na busca conjunta de um empreendimento. Refere-se às estórias que os membros da comunidade vivem e relatam, aos instrumentos comuns elaborados e utilizados por eles, aos acontecimentos históricos compartilhados e interpretados conjuntamente, assim como os discursos e conceitos compartilhados e reconhecidos como pertencentes a uma comunidade específica. Os participantes de uma comunidade têm de sentir que contribuem para a construção do repertório compartilhado, pois, dessa maneira, eles podem reconhecer a sua participação, ou seja, eles percebem a valorização de seu engajamento e se envolvem na constituição e sustentação de um empreendimento articulado/conjunto.

O repertório compartilhado, que destacamos na prática do grupo investigado, inclui: impressões sobre processos de ensino e relatos, rotinas, conceitos matemáticos e pedagógicos, histórias experienciadas na aplicação de tarefas em sala de aula. As reuniões tinham o seguinte movimento: a professora Tânia iniciava o encontro perguntando às professoras sobre os fatos ocorridos nas escolas em que elas davam aula para assim podermos conhecer o dia-a-dia dessas professoras. Esses relatos consistiam em: comentários sobre as dificuldades enfrentadas na prática pedagógica, fatos ocorridos nas escolas em termos administrativos e “problemas” particulares da vida de cada professora. Isso é o que podemos apontar como impressões sobre processos de ensino e relatos.

A estrutura dos encontros, descrita anteriormente, perdurou durante toda a pesquisa e originou as rotinas, que constituíram parte do repertório compartilhado. No que diz respeito às histórias experienciadas, citamos a apresentação de registros feitos pelas professoras e comentários trazidos por elas, depois da aplicação de tarefas a respeito do conceito de fração, uma das ações decorrentes do empreendimento “Estudo a respeito do conceito de fração” e, até mesmo, a aula que fora gravada em vídeo e que era assistida pelo

---

[14] “[...] enterprise is not joint in that everybody believes the same thing or agrees with everything, but in that it is communally negotiated.” (WENGER, 1998, p. 78).

grupo e a partir daí seguia-se discussões a respeito dela. Os temas de tal discussão tinham foco em comentários sobre “o que deu certo e o que não deu certo”, sobre o que deveria ser acurado. A isso classificamos como outro aspecto do repertório compartilhado, relacionado aos conceitos matemáticos e pedagógicos.

Com essa apresentação dos elementos constituintes de uma Comunidade de Prática e a relação que pudemos traçar com o grupo investigado, estamos autorizados a tratar o grupo investigado como uma comunidade de prática.

No início do nosso trabalho, o grupo investigado foi chamado de “Comunidade de Prática de Professores que Ensinam Matemática”. Mais tarde, em um dos encontros da comunidade, no qual, durante uma discussão, os professores foram motivados a falar a respeito de suas impressões com relação à participação nos encontros, uma das professoras sugeriu que o nome deveria ser “Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática”, o que foi validado por todos os membros. Portanto, a partir de agora, faremos menção ao grupo investigado como *Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática*, que resumiremos por *Cop-PAEM*.

Tendo em conta a caracterização do grupo investigado como uma comunidade de prática e considerando que, nesse contexto, a aprendizagem é entendida como uma prática social que combina as três dimensões apresentadas, a seguir, descrevemos o processo de negociação de significado como mecanismo para aprendizagem.

1.3 O Processo de Negociação de Significado

Wenger (1998) refere-se ao conceito de negociação de significado como um meio de caracterizar o processo pelo qual nós experimentamos o mundo e nosso engajamento nele, o que envolve tanto interpretação como ação. A maneira como os seres humanos se engajam no mundo é um processo de negociação de significado que supõe a interação de dois outros processos: a *participação* e a *reificação*.

A *participação* trata da experiência de vida em grupos sociais, envolve o fazer, conversar, pensar, sentir e pertencer, incluindo também as emoções. No sentido de nos aprofundarmos na discussão a respeito da *participação* em Comunidades de Prática, nos remetemos ao trabalho realizado por Lave e Wenger (1991) cujo foco é a noção de *participação periférica legítima* que se refere ao processo característico da aprendizagem.

Lave e Wenger (1991) chamam a atenção para o fato de que os termos: participação, periferia e legitimidade devem ser consideradas de forma coesa. Os autores assinalam assim as inter-relações entre eles: a legitimidade da participação – descritor das formas de pertencimento às Comunidades de Prática; a periferia da participação – que supõe localização no mundo social; e a periferalidade legítima – "[...] é uma noção complexa implicada em estruturas que envolvem relações de poder" [15] (LAVE; WENGER, 1991, p. 36).

Ao falar da legitimidade da participação, estamos colocando foco em um elemento constitutivo da condição de aprendizagem e que nos autoriza avaliar como legítimos os diferentes tipos de participação, sejam elas mais ou menos inclusivas.

A periferia da participação, por outro lado, delineia as trajetórias de aprendizagem dos participantes, assim como o desenvolvimento das identidades e as formas de se constituir como membro de uma comunidade. Para Santos (2004, p. 62), a periferia da participação se refere à "[...] existência de múltiplas formas de participação e a possibilidade de diversos graus de envolvimento que são definidos pela comunidade."

Quando mencionamos o termo periferia, não queremos dizer lugar físico, ou ainda, não é no sentido de antônimo do termo centro ou núcleo. Isso não faria sentido porque como os próprios autores afirmam: em uma Comunidade de Prática não há um único centro ou núcleo. A periferia é o que possibilita, a partir do envolvimento do participante com a prática, ter acesso aos conhecimentos compartilhados por essa comunidade.

A periferalidade legítima é a ponte de acesso que se estabelece entre os novatos *(newcomers*) e os experientes *(old-timers)*. É um estágio em que os membros novatos, movimentam-se em direção a uma participação mais intensiva designada por participação plena. Ou seja, ao legitimar a periferalidade dos novatos, por conta de sua participação mais intensa, os experientes outorgam a eles condições de poder, condições de fazê-los experientes.

Com sua teorização a respeito de *participação periférica legítima*, Lave e Wenger (1991), apresentam uma maneira de entender o processo de aprendizagem. Essa perspectiva a respeito da aprendizagem leva em conta que o armazenamento de informação é apenas uma pequena parte do significado de conhecer e que conhecer envolve, antes de qualquer coisa, a participação no mundo social. A periferia é a condução à participação plena na medida em que esses participantes adquirem legitimidade. Aprender não é apenas uma condição de pertencimento, mas uma forma de evoluir nesse quesito.

É por meio da participação em comunidades sociais que temos a possibilidade de transformar quem somos, modificar nossas experiências, ampliar ou modificar os significados que damos para aquilo que cerca nossa vida. Por outro lado, é

---

[15] "[...] is a complex notion, implicated in structures involving relations of power." (LAVE; WENGER, 1991, p. 36)

também uma maneira de modificar essas comunidades nas quais estamos envolvidos. A isso Wenger (1998) destaca como desenvolvimento de uma “identidade de participação”. Segundo ele, nossas relações com as comunidades de prática envolvem tanto comprometimento como não comprometimento, participação como de não participação e, nesse sentido, distingue dois casos de interação entre as experiências de participação e de não participação:

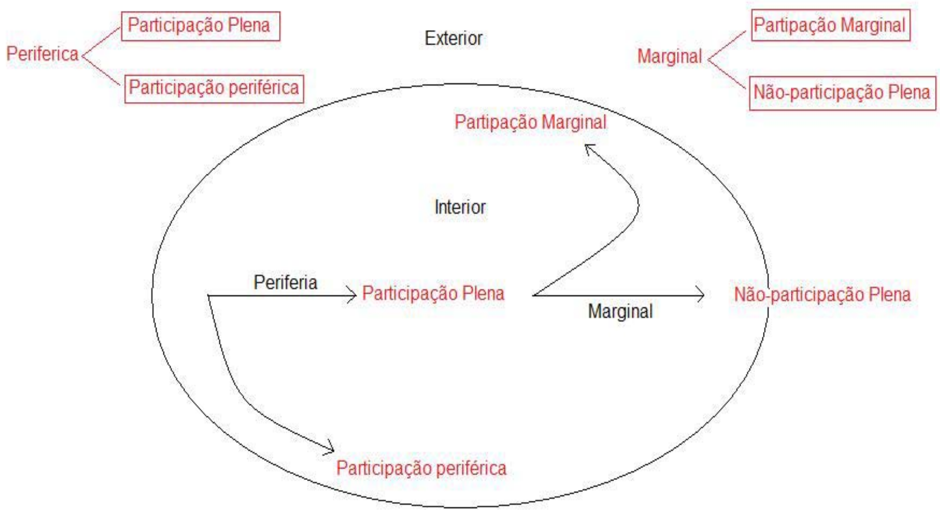
- *Periferalidade:* a participação predomina, mas certo grau de não-participação assegura que não ocorra a participação plena.
- *Marginalidade:* aqui o aspecto predominante é o da não-participação que define uma forma restrita de participação a qual não atinge a participação plena.

Para diferenciarmos *periferia* de *marginalidade* faz-se necessário focar no que Wenger (1998) trata por *identidade como trajetória de aprendizagem* – que define quem somos por meio da sucessão de formas de participação nas comunidades de prática o que ele chama de trajetórias, as quais são elencadas a seguir:

- *Trajetórias Periféricas* - são aquelas que podem fornecer um tipo de acesso a uma comunidade e a sua prática, sem conduzir, no entanto, à participação plena, mas que contribui para uma identidade própria.
- *Trajetórias de Entrada* - trata-se da identidade dos novatos em uma comunidade, caracterizada pela perspectiva de se tornarem participantes plenos na prática desenvolvida por essa comunidade.
- *Trajetórias de Membros* – a identidade é algo que é renegociado mediante a evolução da prática decorrente de novos eventos, novas demandas, novas invenções e novas gerações.
- *Trajetórias de Fronteira* - a identidade é concebida pela relação entre as trajetórias que ultrapassam os limites de fronteira de Comunidades de Prática. Isso envolve um trabalho de transposição, de coordenação e de alinhamento entre as diferentes perspectivas das comunidades.
- *Trajetórias de Saída* - a formação de identidade pode estar associada com aquilo que conduz ao exterior da comunidade como: o desenvolvimento de novas relações, uma forma diferente de se posicionar em relação a uma comunidade e vendo o mundo e a si mesmos de novas maneiras. Foca-se a forma de participação como meio de possibilitar o que vem a seguir.

A partir dos dois casos de interação: *periferalidade* e *marginalidade*, segundo o autor, emergem formas de participação, com quatro categorias principais, nomeadamente: a participação plena (pessoa de dentro); não-participação plena (pessoa de fora); periférica (participação ativada por não-participação, que leva à participação plena ou permanece em trajetória periférica) e marginalidade (participação restrita pela não-participação, que leva a não-membro ou a uma posição marginal).

Figura 3 - Relações de participação e de não participação



Fonte: Adaptado de Wenger (1998 apud CALDEIRA, 2010, p. 31)

Com relação ao esquema adaptado por Caldeira (2010, p. 32):

> A parte acrescentada em vermelho foi uma alteração que fizemos no esquema construído pelo autor. Os quatro tipos de participação estão inscritos nos quatro quadros em vermelho: a participação periférica possibilita a participação plena ou se mantém periférica, enquanto que a participação marginal pode conduzir a uma não participação plena ou se manter marginal.

A seguir, abordaremos o conceito de reificação para o processo de negociação de significado. O conceito de reificação é um descritor do nosso engajamento com o mundo no sentido de produzir significado. Trata-se do:

> [...] processo de dar forma a nossa experiência produzindo objetos que congelam esta experiência em uma "coisa". Com isso criamos pontos de enfoque em torno dos quais se organiza a negociação de significado. [...] Certa compreensão toma forma, e então se converte em um foco da negociação de significado [...].[16] (WENGER, 1998, p. 58-59, tradução nossa).

O processo de reificação se dá com a criação de pontos de enfoque em torno do qual a negociação de significado é organizada. Compreende processos como "[...] fazer, desenhar, representar, nomear, codificar e descrever, tanto como perceber, interpretar, utilizar, reutilizar, decodificar e reestruturar"[17] (WENGER, 1998, p. 59). Em nosso cotidiano, estamos cercados de elementos que são resultados de reificações. Por exemplo, o conjunto de leis que regem um país, estado ou município, um monumento histórico, uma tela de um artista, a letra de uma música. Embora o termo reificação, etimologicamente, signifique *"tornar algo em coisa"*, uma reificação não necessariamente é algo representado por algo manipulável, o que ilustramos, a seguir, relatando uma situação ocorrida na *Cop-PAEM*.

Em um dado encontro, estávamos resolvendo as questões do Caderno de Atividades – Matemática, da Prova Brasil e uma dessas questões abordava o conceito de fração. Ao conversarmos a respeito de sua resolução e dos obstáculos enfrentados pelos alunos com relação a esse conceito, foram gerados pontos de enfoque em torno do significado dos números racionais (representação fracionária) e também das operações relacionadas a eles, que via de regra são trabalhadas como memorização de algoritmos. Diante da reflexão feita a partir das muitas perguntas levantadas e da dificuldade de responder a essas perguntas, o grupo negociou o empreendimento de estudar o conceito de fração. A conclusão a qual o grupo chegou de que não tinha uma clara compreensão a respeito desse conceito se traduz em algo que foi reificado.

Segundo Wenger (1998), as comunidades de prática são responsáveis pela produção de: abstrações, ferramentas, símbolos, histórias, termos e conceitos que reificam alguma coisa da prática dessa comunidade. Contudo, devemos considerar a questão ambígua da reificação: por um lado ela apresenta concisão, efeito concentrador, e, por outro, pode ocultar significados mais amplos. Em outras palavras, o que é reificado não detém, na íntegra, a experiência dos significados negociados nas práticas.

---

[16] "[...] process of give form to our experience by producing objects that congeal this experience into thingness". In so doing we create points of focus around which the negotiation of meaning becomes organized. "[...] A certain understand is give form then becomes a focus for the negotiations of meaning [...]" (WENGER, 1998, p. 58-59).

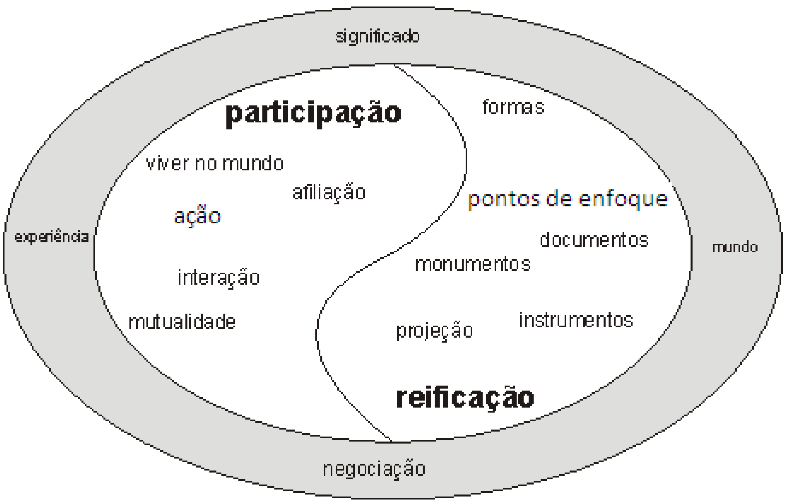
[17] "[...] making, designing, representing, naming, encoding, and describing, as well as perceiving, interpreting, using, reusing, decoding, and recasting." (WENGER, 1998, p. 59).

Corroborando a isso, Caldeira (2010, p. 22) afirma que “em atividades rotineiras, por exemplo, aquilo que fazemos e dizemos pode estar relacionado às coisas que já fizemos e dissemos no passado e ainda assim produzimos uma nova situação, uma nova experiência”. Nas atividades rotineiras:

> [...] produzimos significados que ampliam, redirecionam, rejeitam, reinterpretam, modificam ou confirmam –que voltam a negociar – as histórias de significado de que são parte. Nesse sentido, viver é um processo constante de negociação de significado.[18] (WENGER, 1998, p. 52-53, tradução nossa).

A figura 4 apresenta a dualidade dos processos de *participação* e *reificação* que formam uma unidade e que têm um papel fundamental na experiência de negociar significados na prática.

Figura 4 - A dualidade da participação e reificação



Fonte: Wenger (1998, p. 63, tradução nossa).

Em nosso trabalho de pesquisa, analisamos, no contexto de formação continuada de professores de Matemática, o processo de negociação de significados a partir da interação entre os processos de participação e de reificação dos membros da *Cop-PAEM* na articulação e desenvolvimento de empreendimentos, na busca de aprender e ensinar o conceito de frações. A partir disso, identificamos as aprendizagens a respeito do conhecimento profissional, especificamente, a respeito do conhecimento de Matemática

[18] “[...] we produce meanings that extend, redirect, dismiss, reinterpret, modify or confirm – in a word negotiate anew – the histories of meaning of which they are part. In this sense, living is a constant process of *negotiation of meaning.*” (WENGER, 1998, p. 52-53)

acerca de frações, que as professoras tiveram. Nesse sentido, buscamos argumentos, sustentados pelo quadro teórico apresentado, para responder a questão de investigação.

CAPÍTULO 2
FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA E O CONCEITO DE FRAÇÃO

No presente capítulo, apresentamos nossa perspectiva no que se refere ao processo de formação continuada de professores de Matemática, apontando alguns conhecimentos profissionais necessários, segundo alguns autores, a esse profissional. Dentre esses conhecimentos profissionais, está o de Matemática, que nesse trabalho aborda o conceito de frações, a respeito do qual, apresentamos, nos itens 2.2 e 2.3, uma discussão relativa aos processos de ensino e de aprendizagem tendo em conta as diferentes ideias relacionadas a ele.

2.1 Processo de Formação Continuada de Professores de Matemática – Aspectos Estruturantes

A formação de professores é um processo contínuo de aprendizagem que não necessariamente começa com o ingresso em um curso de graduação, mas pode ter origem em outros contextos. Pensar no tema formação continuada de professores de Matemática significa ter em conta a interação de vários elementos, nomeadamente: os tipos de conhecimento; competências; atitudes e valores que os professores desenvolvem ao longo de sua vida pessoal e profissional; o contexto no qual os objetos da aprendizagem se dão e os papeis, interesses e características dos participantes no processo. Dessa forma, defendemos um tipo de formação continuada de professores de Matemática que leve em conta esses elementos e que consista em construir conhecimentos e teorias a respeito da prática docente, a partir da reflexão crítica. Com relação a isso, Imbernón (2001, p. 48-49) afirma:

> A formação terá como base uma reflexão dos sujeitos sobre sua prática docente, de modo a permitir que examinem suas teorias implícitas, seus esquemas de funcionamento, suas atitudes etc., realizando um processo constante de auto-avaliação que oriente seu trabalho. A orientação para esse processo de reflexão exige uma proposta crítica da intervenção educativa, uma análise dos pressupostos ideológicos e comportamentais subjacentes.

Nesse sentido, estamos considerando que a formação continuada deve possibilitar ao professor refletir a respeito de sua prática e as decisões tomadas sobre ela e perceber se essas decisões podem favorecer ou não a aprendizagem do seu aluno. Com a intenção de aprofundar-nos nessa discussão a respeito desse tipo de formação continuada, apresentamos, a seguir, na figura 5, um esquema, adaptado do trabalho Ponte e Chapman (2008), que mostra um panorama das relações dos componentes fundamentais no processo de formação de professores de Matemática. Ressaltamos que, embora o esquema faça menção à formação de futuros professores, nós consideramos que a formação continuada, nosso foco para esse trabalho, contempla os mesmos componentes.

Figura 5 - Cenário de formação inicial de professores de Matemática

Fonte: Ponte e Chapman (2008 apud MORIEL JUNIOR, 2009).

Ao centro está o desenvolvimento do conhecimento de Matemática e do ensino de Matemática dos professores. O conhecimento de Matemática, para além de fazer referência à disciplina acadêmica, trata da interpretação que o professor faz da Matemática enquanto disciplina escolar, da visão que o professor tem dos aspectos específicos do que ele ensina. O conhecimento sobre o ensino de Matemática inclui, segundo Ponte e Oliveira (2002): o *conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem* – que consiste em conhecer os alunos como pessoas, os seus interesses, a sua forma habitual de reagir, os seus valores, as suas referências culturais, o modo como eles aprendem e os obstáculos enfrentados por eles; *o conhecimento do currículo* – que se trata da forma com a qual o professor organiza os conteúdos, no sentido de conhecer as grandes finalidades e objetivos, o conhecimento dos materiais e das formas de avaliação; *conhecimento do processo instrucional* – que compreende aspectos relativos à condução das aulas de Matemática, como formas de organização do trabalho dos alunos, avaliação de suas aprendizagens e do ensino do próprio professor.

Embora possam ser considerados independentes, o conhecimento de Matemática e o conhecimento sobre o ensino de Matemática apresentam uma interseção a qual faz referência ao que o professor aprende: antes da realização da ação[19] pedagógica, por meio da tomada de decisões no momento do planejamento da ação que será desenvolvida; durante a realização da ação pedagógica, pois é no contato com a situação prática que o professor adquire e constrói novas teorias, esquemas e conceitos, tornando-se um profissional flexível e aberto aos desafios impostos pela complexidade da interação com a prática e, após a realização da ação pedagógica, com a reflexão sobre essa ação e o conhecimento implícito nela. Além disso, o conhecimento de Matemática e o conhecimento sobre o ensino de Matemática têm conexões inerentes com o desenvolvimento da identidade do professor, ou seja, com o conhecimento que o professor tem de si mesmo; a sua autoconfiança, os seus recursos e capacidades, valores, hábitos, normas, disposições e, em geral, modos de ser um professor. Segundo Ponte e Oliveira (2002, p. 12), "o desenvolvimento da identidade profissional como professor envolve a capacidade de assumir os papeis, as normas e os valores fundamentais da profissão."

O componente final do esquema apresentado por Ponte e Chapman (2008) consiste em vários elementos que podem influenciar no processo de formação de professores de modos diferentes, nomeadamente: *a organização do sistema educacional*, que inclui modos de entrar na profissão, certificação, contratos e organização de currículo; *a pesquisa* com suas ênfases, valores, prioridades e modos de disseminar resultados; *os elementos do programa*, como aproximações pedagógicas, propósitos e objetivos, currículos e materiais, instrumentos e procedimentos de avaliação, a organização global e características pedagógicas do programa; *as características dos instrutores do programa e de outros participantes*, por exemplo, seus papeis, motivos, interesses, conhecimento, concepções e características pessoais. Outros participantes incluem os estudantes envolvidos no campo de experiências do professor; as características de cada professor, que diz respeito aos seus interesses, conhecimentos e concepções. Trata-se da identidade de cada professor e as características socioculturais da sociedade que inclui os papeis e valores promovidos por Ministérios de Educação, administradores escolares, mídia e o público geral.

O esquema apresentado na figura 5 trata de um modo de pensar a respeito da formação continuada de professores de Matemática e sobre as limitações de componentes principais que o compõem, o que discutiremos a seguir.

[19] Aqui estamos assumindo por ação qualquer atividade profissional do professor.

O que os professores ensinam e como eles ensinam tem como base o conhecimento que eles têm do conteúdo. Consideramos que conhecer Matemática profundamente não implica em o professor ser efetivo em sua vida profissional. Mas não ter esse conhecimento implica um trabalho limitado no que diz respeito a desenvolver nos estudantes compreensão relacional e conceitual.

Em se tratando de conhecimentos necessários para ensinar, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) menciona: “O conteúdo e discurso de matemática, incluindo conceitos de matemática e procedimentos; modos para argumentar matematicamente, resolver problemas, e comunicar matemática efetivamente a níveis diferentes de formalidade.” (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1991, p. 132).

Pesquisas (COSTA, 2006; MANRIQUE; ANDRÉ, 2006; PASSOS; GALVÃO, 2011) mostram vários aspectos do conhecimento de professores em serviço em relação ao que é considerado ser adequado para ensinar matemática, de tal forma a possibilitar a compreensão dos alunos a respeito dos conceitos ensinados.

Nesse sentido, abordamos nesse trabalho o conceito de frações que, na maioria das vezes, apresenta-se como um obstáculo tanto para o professor como para o aluno no que diz respeito a sua compreensão. Um dos aspectos que pode justificar tal situação é a própria complexidade com que esse assunto se manifesta. A compreensão plena do conceito de frações passa por um trabalho significativo em diferentes contextos em que tal conceito está presente. Isso porque, em cada contexto, a noção de número e as operações matemáticas devem ser reconceitualizadas. No contexto de um processo de formação continuada, no que se refere a essa temática, consideramos que possibilitar aos professores refletir a respeito de seu conhecimento matemático implica em corrigir deficiências realçadas e contribuir com a maneira com a qual o professor ensina.

Pelo que aqui apresentamos a respeito do conhecimento de matemática e do conhecimento do ensino de matemática e em referência ao esquema apresentado na figura 5, nós defendemos um processo de formação continuada que ocorra em um contexto que possibilite aos professores refletir sobre suas próprias ações, mas em interação com um grupo que as observe e as analise. Nossa pesquisa, como já mencionado no Capítulo 1, considera o contexto de investigação como sendo uma comunidade de prática, no sentido do grupo investigado ter apresentado durante o período da pesquisa características a partir das quais pudemos fazer tal afirmação. Nossa intenção, como posta anteriormente, é de analisar que elementos presentes no contexto de uma Comunidade de Prática permitem aprendizagens aos seus membros. Segundo Lave e Wenger (1991), a aprendizagem pode ser vista como um processo de construção de identidades. Identificando-se com o grupo, o indivíduo pode assumir sua cultura, valores e normas e também transformar esses fatores contribuindo para a transformação do grupo. Também são importantes os processos pelos quais os professores participam do grupo profissional, interagindo com outros professores, colaborando e refletindo na própria atividade deles e sobre eles como professores.

Um dos papéis do professor de matemática é o de auxiliar os estudantes a se desenvolverem como seres humanos socialmente integrados, ativos e críticos. Professores também são responsáveis pela construção e desenvolvimento do projeto educacional de suas instituições, pelo desenvolvimento de sua profissão e da educação, em geral, e pelo seu próprio desenvolvimento. Esses papéis emergem das expectativas gerais que a sociedade atribui para as escolas, mas eles também são o resultado das necessidades específicas da aprendizagem e ensino de matemática e do trabalho da escola como uma instituição. Embora a formação continuada de professores de Matemática, com as pesquisas, venha ganhando melhor entendimento dos processos pelos quais se aprende como ensinar matemática e levar a cabo o papel profissional como professor, muitas perguntas permanecem ainda nesse campo.

Levando em conta essa discussão, no contexto de formação continuada de professores de Matemática, apresentamos a seguir uma reflexão a respeito do ensino e da aprendizagem do conceito de frações.

2.2 O Ensino e a Aprendizagem de Frações na Educação Básica

No que diz respeito ao ensino e a aprendizagem do conceito de frações, diversas pesquisas, nos últimos anos, (BEHR et al, 1983; KIEREN, 1976; LAMON, 2005; LESH; POST; BEHR, 1988; ONUCHIC; ALLEVATO, 2008; ROMANATO, 1997, 1999) têm tratado de identificar e documentar os obstáculos enfrentados pelos alunos. Além disso, essas pesquisas também procuram apontar outros direcionamentos para o ensino do conceito de frações. Apesar das diferentes abordagens desses estudos, alguns apontamentos estão presentes em boa parte deles.

- Tradicionalmente, o ensino do conceito de frações tem sido pautado somente em uma interpretação, a comparação parte-todo e privilegiado os algoritmos para as operações simbólicas, quase sempre introduzidos precocemente nos anos iniciais. Alunos cujo ensino foi concentrado sobre o conceito de frações como comparação parte-todo têm uma compreensão empobrecida dos números racionais.

- O ensino do conceito de frações deve ter em conta uma ampla gama de fenômenos que podem se representados por meio de símbolos fracionários, mas que têm interpretações e significados diferentes.
- É importante criar situações que possibilitem às crianças oportunidades para construir diversos significados para as frações, de modo que possam transitar e estabelecer conexões entre eles e compreender como os significados influenciam as operações.
- As ideias envolvidas no estudo do conceito de frações são psicológica e matematicamente complexas e interconectadas. Isso dificulta estabelecer uma ordem linear dos tópicos no planejamento do ensino.

Para compreender a rede de ideias, conceitos, propriedades e representações que envolvem frações é preciso um processo de aprendizagem a longo prazo. Nesse sentido, o professor deve levar em conta questões que garantam às crianças o tempo para elas construírem e se sentirem capazes de lidar com ideias e formas de pensamento importantes.

No sentido de aprofundarmos essa discussão a respeito do ensino e a aprendizagem de frações, partimos da ideia de que compreender o significado das frações é dar o primeiro passo para a compreensão de número racional e de suas propriedades, bem como de outros conceitos, tal como o princípio multiplicativo associado a esse conjunto numérico, que tem como principal indicador o raciocínio proporcional.

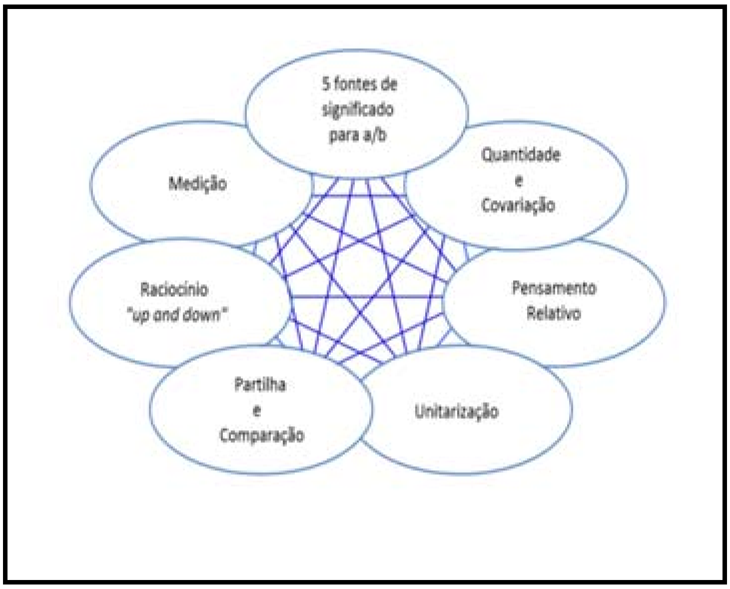
De acordo com Lamon (2012, p. 4, tradução nossa), "Raciocínio proporcional se refere a detectar, expressar, analisar, explicar e oferecer evidências em apoio às afirmações sobre relações proporcionais.[20]" Por relação proporcional, entendemos a maneira que duas quantidades relacionam-se uma a outra de tal modo que quando uma muda, a outra muda precisamente, havendo uma terceira quantidade que permanece invariante, a qual é chamada de constante de proporcionalidade.

O não desenvolvimento do raciocínio proporcional faz com que os alunos se limitem a memorização de regras que permitam o fazer ao invés do compreender, o que compromete a relação desses alunos para com a Matemática, caracterizada por "medo" da disciplina ou rejeição da mesma.

[20] "Proportional *reasoning* refers to detecting, expressing, analyzing, explaining, and providing evidence in suport of assertions about proportional relationships". (LAMON, 2012, p. 4)

Lamon (2012, p. 10) afirma que o raciocínio proporcional envolve conceitos, contextos, representações e formas de pensar amplamente relacionados como mostra o esquema dado pela figura 6.

Figura 6 – O raciocínio proporcional



Fonte: Adaptado de Lamon (2012, p. 10).

A mesma autora ressalta que o desenvolvimento do conhecimento, nesses tópicos apresentados no esquema anterior, não se dá de forma linear, mas de acordo com uma relação de interdependência entre eles. Quando há progresso em alguma dessas áreas isso repercute nas outras.

A partir da apresentação do esquema anterior, enfatizamos a ideia de complexidade associada ao raciocínio proporcional, no entanto, esclarecemos que, nesse trabalho, vamos nos aprofundar em um dos tópicos presentes nele, nomeadamente, cinco fontes de significado para $\frac{a}{b}$. Com o que foi dito, afirmamos que o ensino de frações não pode ser restrito a uma etapa específica da formação do aluno. É preciso pensar em maneiras de abordar e/ou retomar esse conceito em cada etapa do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

Lopes (2008, p. 7) afirma que “Os professores deveriam ter atenção para as complexidades que envolvem conceito tão delicado. [...] A começar pelo fato de que a palavra fração está relacionada a muitas ideias[21].” O que Lopes chama de ideias trata-se das várias formas de significado que as frações podem assumir que, em geral, são tratadas pelos

[21] A respeito dessas ideias relacionadas com o conceito de fração trataremos aqui como subconstrutos e abordaremos a seguir.

pesquisadores como subconstrutos, terminologia que iremos utilizar no decorrer deste trabalho. Diante disso, apresentamos, nesse capítulo, elementos que possam orientar o professor no que diz respeito ao ensino e a aprendizagem do conceito de fração no sentido de promover formas de pensamento que contribuam para compreensão dos números racionais e outras formas de raciocínio a ele associadas. Discutimos, a seguir, algumas razões para obstáculos enfrentados no que se refere ao ensino e a aprendizagem de frações e, ainda, os subconstrutos do conceito de fração.

2.3 OBSTÁCULOS ENFRENTADOS NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES

No ensino de frações, o professor deve considerar que o conteúdo matemático é caracterizado por saltos qualitativos no que se refere a significados, modelos e símbolos que antes eram utilizados para a adição, multiplicação e divisão de números naturais. Um desses saltos se refere à unitarização:

> Nos anos pré-escolares, uma criança aprende a contar combinando um número para cada objeto no conjunto que está sendo contado. A unidade “um” sempre se refere a um único objeto. Nas frações, no entanto, a unidade pode consistir de mais do que um objeto ou pode ser uma unidade composta, isto é, consisti de vários objetos em um pacote. Além disso, a nova unidade é particionada (dividida em partes iguais) e um novo tipo de número é usado para se referir às partes daquela unidade[22] (LAMON, 2012, p. 21 tradução nossa).

Com isso, vemos que existem diferentes unidades com as quais podemos estudar frações. Se a unidade é um bombom e você comprar mais do que um bombom, digamos três deles, então você tem três unidades ou três bombons. Agora, pensemos em uma embalagem que contém 3 bombons. Nesse caso, temos o que chamamos de unidade composta. Se você comprar uma embalagem então terá 3 bombons. Notemos que a quantidade de bombons que foi comprada é a mesma. Mas, desconsiderar essa diferença quanto à unidade assumida, pode causar confusão na aprendizagem de frações.

Ainda, com relação à unitarização, ressaltamos que é preciso levarmos em conta duas formas de quantificação: aquela que é resultado de contagem e que envolve

---

[22] “In the preschool years, a child learned to count by matching one number name to each object in the set being counted. The unit "one" always referred to a single object. In fractions, however, the unit may consist of more than one object or it might be a composite unit, that is consist of several objects packaged as one. Furthermore, the new unit is partioned (divided up into equal parts) and a new kind of number is used to refer to parts of that unit.” (LAMON, 2012, p. 21).

conjuntos que chamamos de todo discreto e aquela que é resultado de medição e que envolve conjuntos que chamamos de todo contínuo.

Além disso, o trabalho com números naturais pelas crianças está mais voltado para as operações de adição e subtração, enquanto que a multiplicação e a divisão tem significado apenas em contextos cuidadosamente escolhidos, pois a compreensão para essas operações surge quando o aluno é capaz de construir unidades compostas e a notação de fração é necessária para ajudá-lo a representar as quantidades que resultam dessas operações. Por exemplo: 24 doces divididos entre 4 sacolas de festa é $\frac{24\ doces}{6\ sacolas}$ ou $\frac{6\ doces}{1\ sacola}$. Observemos que nessa divisão temos uma nova quantidade que não é mensurável por nenhuma das quantidades originais, doces ou sacolas. É possível também que se tenha uma quantidade que é uma relação entre duas outras quantidades e que é designada por um único nome, como é o caso da velocidade, relação entre distância percorrida e o tempo gasto para percorrê-la. No estudo de frações, o aluno deve aprender a pensar sobre as quantidades e como elas estão relacionadas, a fim de determinar as operações apropriadas.

Segundo Lamon (2012, p. 25), é importante ter em conta outras fontes de dificuldades para a aprendizagem de frações, dentre as quais se podem citar:

> 1) Apesar de uma fração ser escrita usando “dois numerais”, ela representa um único número;
> 2) Apesar de 7 > 3 e 1/3 > 1/7,
> 3) Existem novas regras para somar e subtrair frações: $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\neq\frac{3}{8}$.
> 4) Razões escritas na forma de fração não seguem as mesmas regras que a adição de frações (LAMON, 2012, p. 25-26 tradução nossa)[23]

Com relação ao item 4, podemos exemplificar com a seguinte situação: pensemos em certo time de futebol que disputa dois torneios simultâneos: o campeonato da cidade e o capeonato nacional. No campeonato da cidade, esse time jogou três partidas e ganhou uma delas, enquanto que no campeonato nacional ele jogou cinco partidas e ganhou duas. Se quisermos representar o número de partidas ganhas em relação ao total das partidas jogadas, teremos os seguinte: no campeonato da cidade a representação será $\frac{1}{3}$ e no campeonato nacional a representação será $\frac{2}{5}$. Agora, perguntamos: como representar o total de

[23] “1) Even though a fraction is written using 2 numerals, it stands for one number.
2) Even though 7 > 3, 1/3 > 1/7.
3) There are new rules for adding and subtracting fractions: $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\neq\frac{3}{8}$.
4) […] ratios written in fraction form do not follow the same rules as addition of fractions (LAMON, 2012, p. 25-26)

partidas ganhas e jogadas? A resposta é: 3 partidas ganhas em 8 jogadas. Em outras palavras: $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{3}{8}$. Não é difícil entendermos porque essa soma faz sentido. Se uma das frações representasse uma parte tomada de um chocolate com três partes e a outra representasse duas partes tomadas de uma torta dividida em cinco partes, teríamos, no total, 3 partes tomadas em 8 partes. Só que, dessas oito partes reunidas na soma, três são de um tipo, enquanto cinco são de outro tipo. Os todos não são comparáveis.

Segundo Lamon (2012), no que diz respeito à terminologia, devemos atentar para o fato de que a palavra fração possui diversos significados, mas nem todos eles são matemáticos. No sentido matemático, a palavra fração pode ser usada de duas maneiras: como numeral e como número. Como numeral a palavra fração se refere a um sistema notacional, um símbolo. Enquanto que como número, trata-se de um subconjunto do conjunto dos números racionais, frações são números racionais não-negativos e dessa perspectiva, na escrita $\frac{a}{b}$ consideramos a, b números naturais e $b \neq 0$. No entanto, nós chamamos a atenção para o fato de que se pode ter uma fração que não representa um número racional, como são os exemplos dados a seguir: $\frac{-3}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{-12,2}{14,4}, \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}$.

Algumas diferenças entre frações e números racionais merecem ser notificadas para que não façamos o uso de um pelo outro erroneamente. Todo número racional pode ser escrito na forma fracionária, mas nem todos os números escritos na forma fracionária são números racionais, conforme vimos anteriormente. Não existe um número racional diferente para cada uma das três frações $\frac{2}{3}, \frac{6}{9}$ e $\frac{10}{15}$. Números racionais podem ser escritos como frações, mas também podem ser escritos, por exemplo, na forma decimal, como porcentagem. Decimais finitos são representações de números racionais. Decimais infinitos com dízimas periódicas são representações de números racionais. Porcentagens são representações de números racionais.

Compreender uma fração como número implica perceber, por exemplo, que $\frac{1}{4}$ representa a mesma quantidade relativa que $\frac{4}{16}, \frac{3}{12}$ ou $\frac{2}{8}$, e que existe um único número racional subjacente a todas essas quantidades relativas. A isso damos o nome de relação de equivalência que oportuniza ao aluno, principalmente, a compreensão da operação de adição de frações. Por exemplo, a adição $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$ pode ser feita fazendo-se uso da relação de equivalência que permite reescrevê-la como $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$, fazendo com que o aluno encontre significado no cálculo do mínimo múltiplo comum utilizado na soma de frações com denominadores diferentes.

Com base nos dados apresentados, quisemos fazer uma reflexão a respeito de alguns obstáculos presentes no ensino e na aprendizagem do conceito de frações, para que o professor possa pensar em possibilidades no ensino de forma a haver compreensão. No sentido de nos aprofundar nessas questões que envolvem a compreensão do conceito de fração abordamos, a seguir, a temática dos subconstrutos tratada em algumas pesquisas.

2.4 OS SUBCONSTRUTOS DO CONCEITO DE FRAÇÃO

Um dos pontos de convergência de pesquisas que abordam o ensino e a aprendizagem do conceito de frações é, conforme já mencionamos anteriormente, o de afirmar que o conceito de frações é constituído de subconstrutos.

Campos e Magina (2008, p. 27) descrevem que Kieren identifica quatro subconstrutos necessários para compreensão de números racionais, nomeadamente: parte-todo (medida), quociente, medida, razão e operador. Botta e Onuchic (1997, p. 6) tratam desses subconstrutos da seguinte maneira:

> No significado **parte-todo (medida)** a unidade é introduzida na forma de uma figura contínua (por ex. um pedaço de corda) ou um conjunto discreto (por ex. um determinado número de balas).Aqui o todo é repartido em partes de igual tamanho. Como medida envolve medir a área de uma região ao parti-la e cobri-la com unidades de um tamanho apropriado (formas congruentes ou não de mesma área).
> O significado **quociente** é percebido quando um número de objetos precisa ser repartido ou dividido num certo número de grupos. [...]
> Significado **razão.** Uma razão é uma relação de comparação multiplicativa entre duas quantidades de mesma medida (por ex. $\frac{1}{4}$ pode representar a razão de uma lata de suco concentrado para quatro latas de água e pode ser escrita 1:4). [...]
> Significado **operador**. Esse significado é semelhante ao processo de "encolher" ou de "esticar", de "reduzir" ou "ampliar". Define uma estrutura multiplicativa de números racionais e é a "mais algébrica dessas ideias básicas".

Essa variedade de interpretações mostra que o ensino de frações deve estar mais voltado para o significado do que para a representação (símbolo) e os alunos devem ser instigados a construírem seu próprio conhecimento.

No início do estudo de frações em que geralmente está presente o subconstruto parte-todo (medida), é primordial que o aluno entenda que devemos dividir o todo, contínuo ou discreto, em partes de igual tamanho e que, nesse caso, a fração é uma representação de uma ou mais dessas partes, tomando-se por referência uma delas. Quando o todo é discreto, nem sempre é possível fazer essa divisão, por exemplo, se tivermos 4 bolinhas de gude não conseguiremos dividir igualmente entre 5 garotos, mas é possível dividir um bolo igualmente para 5 pessoas. Nesse segundo exemplo, o todo referencial é contínuo.

Ainda com relação ao subconstruto parte-todo, o símbolo $\frac{a}{b}$ significa a partes de b partes iguais, conforme dissemos anteriormente. O subconstruto parte-todo nos dá condições para afirmar que a adição de frações, por exemplo, só faz sentido se levarmos em conta que elas são parte de um mesmo todo, não importando se envolvem frações próprias, aquelas cujo numerador é menor que o denominador; ou frações impróprias, aquelas cujo numerador é maior que o denominador. Por exemplo, na adição $\frac{1}{3}+\frac{5}{4}$, temos a fração $\frac{5}{4}$ que é uma fração imprópria, ou seja, uma fração que representa algo maior que o todo. Ainda, nesse caso, o todo a que se refere a fração $\frac{1}{3}$ deve ser o mesmo a que se refere a fração $\frac{5}{4}$, caso contrário a operação não tem sentido.

Com relação ao subconstruto quociente, as ideias presentes são de partição e quotização. Na partição, tem-se o seguinte: um todo tem que ser repartido igualmente entre um número de grupos definidos e o que temos que encontrar é o número de itens em cada um dos grupos. Por exemplo: repartir 10 barras de chocolate para 5 pessoas. A questão é quanto de chocolates cada um vai receber (uma questão de pensamento absoluto) ou que parte do todo, nesse caso das 10 barras de chocolate, cada pessoa irá receber duas (uma questão de pensamento relativo). No que se refere à quotização, o número total de elementos de cada grupo já está definido e o que temos que determinar é o número de grupos que podem ser constituídos com o todo. Por exemplo, se temos 30 biscoitos e desejamos distribuir 3 biscoitos para cada pessoa, quantas pessoas podemos servir? A divisão quotativa é também chamada de divisão de medida e divisão subtrativa porque é dada à medida que deve ser subtraída, repetidamente, para se obter a resposta.

O subconstruto razão é uma relação de comparação multiplicativa entre duas quantidades de mesma grandeza ou não. Por exemplo, em uma sala de aula que tem 20 meninas e 30 meninos podemos dizer que a razão do número de meninas para o número de meninos é 2/3, que também pode ser escrito 2:3. Isso significa que para cada 2 meninas temos 3 meninos. Quando diferentes grandezas forem comparadas multiplicativamente e a segunda é dependente da primeira, a razão é chamada taxa, por exemplo, a velocidade que é expressa em Km/h ou m/s.

Alguns autores como Lamon (2012) pontuam taxa como um dos subconstrutos do conceito de fração, entendendo-a como uma extensão do subconstruto razão. Mas essa diferenciação entre razão e taxa não é tão simples assim. Por exemplo, ao organizarmos um churrasco, pensamos em comprar uma quantidade de carne que seja o suficiente para todos os convidados. No açougue, os funcionários estimam 300g de carne por pessoa. Para esse caso, embora tenhamos uma razão, pois transmite uma ideia que não pode ser expressa por um único número, nós temos uma taxa porque podemos pensar na quantidade de carne a ser comprada, por exemplo, para dez pessoas, ou qualquer outro número.

O subconstruto operador nos dá a ideia de função, a saber, $f(x) = \frac{a}{b}x,$ com $a \neq 0$, que ao ser aplicado em um número, que nesse contexto referencia o "todo", o transforma. Por exemplo, ao calcular 3/4 do número 20, o operador faz duas operações: uma divisão do todo em "quartos" e, em seguida, uma multiplicação tomando-se 3 dessas partes, ou ainda, uma multiplicação do todo por 3 e, em seguida, a divisão em "quartos". Em termos de grandezas contínuas, o significado de um operador multiplicativo é semelhante ao processo de "encolher" ou de "esticar", de "reduzir" ou de "ampliar". Por exemplo, tomemos como "todo" um segmento de comprimento *d* e seja $\frac{3}{4}$ o operador utilizado para transformar o número *d*. O resultado dessa operação é o número $\frac{3}{4}$ *d* que podemos interpretar geometricamente como uma parte do todo (segmento) que tínhamos inicialmente. Nesse caso, o efeito do operador sobre o "todo" foi de redução, pois o número $\frac{3}{4} < 1$. Se tomarmos como operador um número maior que um, de maneira análoga, podemos interpretar geometricamente uma ampliação do segmento. Nos operadores, a relação significante é a comparação entre a quantidade resultante de uma operação e a quantidade que atuou nela.

Por tudo o que apresentamos, nós concluímos que a importância em reconhecer os subconstrutos a respeito do conceito de frações está em poder oferecer aos alunos diversas experiências que possibilitem a eles diferentes interpretações. Dessa maneira, esses alunos poderão compreender números racionais e desenvolverão o raciocínio proporcional que dá condições para a compreensão de outras áreas da Matemática, além de outras ciências.

CAPÍTULO 3
ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

Tendo em conta as lentes teóricas que orientam este trabalho, para as quais a aprendizagem é caracterizada como uma prática social que está intimamente ligada a um processo de negociação de significado em uma comunidade de prática (WENGER, 1998), no presente estudo, investigamos que elementos do contexto de uma Comunidade de Prática de professores de Matemática permitem aprendizagens de seus membros ao lidarem com empreendimentos na busca de aprender e ensinar frações.

Para responder a essa questão de investigação, identificamos os empreendimentos mobilizados pela Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática – *Cop-PAEM*, na busca de aprender e ensinar o conceito de fração. Analisamos processos de negociação de significados ocorridos na articulação e desenvolvimento desses empreendimentos no sentido de evidenciar o que os professores, membros dessa comunidade, aprenderam no que se refere aos conhecimentos profissionais de professores de Matemática.

Neste capítulo, apresentamos o encaminhamento metodológico adotado na pesquisa, nomeadamente, a abordagem escolhida, o contexto do grupo investigado, o processo para obtenção das informações e o enfoque de análise dos dados.

3.1 A Escolha Metodológica

Optamos por uma investigação de natureza qualitativa, tal como definida por Bogdan e Biklen (1994, p. 47-50) a partir de cinco características principais:

- *Na investigação qualitativa, a fonte direta dos dados é o ambiente natural, sendo o investigador o instrumento principal.* Durante o período em que ocorreu esta pesquisa, participamos de todos os encontros da *Cop-PAEM* e acompanhamos aulas de algumas professoras e participantes dessa Cop. Registramos tudo o que pudesse contribuir para responder a questão de investigação e recolhemos os registros feitos pelas professoras. No engajamento com a comunidade, participando das ações e discussões durante os encontros, fomos legitimados pelos membros da *Cop-PAEM* como um dos participantes dessa comunidade. Desse modo, constituímo-nos como instrumento principal para coleta de informações para essa pesquisa.

- *A investigação qualitativa é essencialmente descritiva.* A descrição de episódios dessa comunidade nos permitiu analisar os processos de negociação de significados que favoreceram as aprendizagens de seus membros.
- *Na investigação qualitativa, os investigadores interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.* Considerando a aprendizagem como uma prática social, durante os encontros da *Cop-PAEM*, ficamos atentos ao processo de negociação de significados de seus membros valorizando o processo em detrimento do produto da investigação.
- *A análise dos dados tende a ser feita de forma indutiva.* A partir dos dados, constituídos pelas informações recolhidas, investigamos as interações entre os processos de participação e de reificação, pois essa interação descreve o engajamento dos membros da *Cop-PAEM*, no mundo, como produtores de significado.
- *O significado e as perspectivas apresentados pelos participantes são de importância vital na abordagem qualitativa.* Em nossos encontros com a comunidade, valorizamos e utilizamos, na análise, momentos em que os membros se posicionaram a respeito do que estava sendo tratado. Ouvimos as professoras, seus pontos de vista, de forma a delinear as perspectivas individuais dos membros da *Cop-PAEM* e também da comunidade como um todo.

Nesta investigação, de acordo com a abordagem qualitativa, realizamos um estudo interpretativo, pois buscamos compreender que elementos presentes no processo de formação continuada, tendo como contexto uma comunidade de prática, permitem aprendizagens relacionadas ao conhecimento profissional dos membros dessa comunidade.

3.2 CONTEXTO DA INVESTIGAÇÃO E DELIMITAÇÃO DO GRUPO INVESTIGADO

Esta pesquisa faz parte do projeto “Educação Matemática de Professores que ensinam Matemática”, vinculado ao Programa “Observatório da Educação” (Edital nº

38/2010, da CAPES/INEP), proposto por docentes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PECEM da Universidade Estadual de Londrina - UEL.

Um dos objetivos desse projeto é investigar como contextos de formação, caracterizados como uma Comunidade de Prática de Professores que ensinam Matemática, formados por pesquisadores, futuros professores de Matemática e professores de Matemática que atuam na Educação Básica, colaboram para a aprendizagem de professores. Estão envolvidas, neste projeto, duas escolas públicas do Paraná, nomeadamente: Escola Municipal José Brazil Camargo e Colégio Estadual de Paranavaí.

A Comunidade de Prática investigada, nesse trabalho, envolve professoras do Colégio Estadual de Paranavaí - Ensino Fundamental, Médio, Normal e Profissional - Paranavaí/Paraná; três professoras de outras escolas; uma professora recém-formada e dois investigadores do PECEM.

No quadro abaixo, apresentamos algumas informações a respeito de cada um dos membros da *Cop-PAEM*. As professoras estão indicadas por nomes fictícios de modo a preservar sua identidade, de acordo com o termo de consentimento livre e esclarecido (Apêndice 1).

Quadro 1 - Informações dos membros da *Cop-PAEM*

Participante	**Idade**	**Tempo de Magistério**	**Série que Lecionou em 2011**	**Curso Superior**	**Especialização**	**Participação no PDE**[24]
Professora Ana	36 anos	14 anos	8º e 9º anos	Ciências do 1º Grau com Habilitação em Matemática	Educação Matemática	Não
Professora Beatriz	41 anos	21 anos	8º e 9º anos Sala de apoio 9º ano 1º ano Ensino Médio	Ciências do 1° Grau com Habilitação em Matemática	Orientação, supervisão e administração escolar	Não
Professora Cláudia	51 anos	27 anos	6º e 7º anos	Ciências do 1º Grau (Licenciatura Curta)	Métodos e Técnicas de Ensino	Não
Professora Débora	55 anos	25 anos	7º e 8º anos Ensino Médio	Matemática (Licenciatura)	Educação Matemática	Sim (2008)
Professora	61 anos	23 anos	1º, 2º, 3º	Ciências do	Didática e	Não

[24] O PDE - Programa de Desenvolvimento Educacional, do Estado do Paraná, foi implementado em 2007 e tem como objetivo o aperfeiçoamento permanente e a qualificação sistemática do professor da Rede Estadual de Educação Básica do Paraná. Mais informações em: <www.seti.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=64>.

Eliane			Ensino Médio 6º, 7º, 9º Ensino Fundamental	1º Grau com Habilitação em Matemática	Metodologia do Ensino	
Professora Fernanda	31 anos	7 anos	6º ano, 9º ano, 1º ano do Ensino Médio, 2º Técnico em Administração, 1º, 2º e 3º Magistério	Matemática (Licenciatura)	Ensino de Matemática	Não
Professora Laís	24 anos	Professora recém-formada	Não lecionou (recém-formada)	Matemática (Licenciatura)	Não	Não
Pesquisadora Tânia (coordenadora da CoP)	46 anos	25 anos	Não lecionou	Ciências do 1º Grau com Habilitação em Matemática	Ensino de Matemática	Não
Pesquisador Márcio	34 anos	10 anos	Não lecionei	Matemática (Licenciatura)	Não	Não

Fonte: o próprio autor

A partir de 1º de março de 2011, essa comunidade passou a se reunir semanalmente, às terças-feiras, no horário de 13h30min às 15h30min, nas dependências do Colégio Estadual de Paranavaí (CEP).

Inicialmente, o grupo assumiu a denominação “Comunidade de Prática de Professores que Ensinam Matemática”, em consonância com o projeto ao qual está vinculado. Mais tarde, em uma das discussões do grupo, em que as professoras foram motivadas a falar a respeito de suas impressões com relação à participação nos encontros, uma delas sugeriu que o nome deveria ser “Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática”, sugestão que foi acolhida e validada por todos os membros.

Para recolha de informações, participamos dos encontros de março de 2011 até junho de 2012, totalizando quarenta encontros. Alertamos para o fato de que para esse estudo elegemos episódios que nos permitissem responder à questão de investigação. Outras informações a respeito dessas escolhas estão descritas na primeira seção do próximo capítulo, quando apresentamos a trajetória dessa comunidade na articulação de empreendimentos em busca de aprender e ensinar frações.

3.3 PROCEDIMENTOS PARA OBTENÇÃO DAS INFORMAÇÕES

Para coleta de informações utilizamos o diário de campo do investigador, gravações em áudio das interações ocorridas durante os encontros e registros escritos produzidos pelos membros da comunidade.

Com relação ao diário de campo, Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 118-119) afirmam que se trata de um dos instrumentos mais ricos na coleta de informações, pois é “[...] nele que o pesquisador registra observações de fenômenos, faz descrições de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos.” Foi por meio das anotações no diário campo, que foi possível sistematizar a trajetória da comunidade na articulação dos empreendimentos em busca de aprender e ensinar o conceito de fração.

Para as gravações em áudio, foram utilizados dois aparelhos mp3, dispostos sobre a mesa, ao redor da qual se dispunham os membros da comunidade. A transcrição dessas gravações possibilitou identificar as interações entre os participantes e os elementos constituintes do contexto que permitiram a aprendizagem dos membros da Cop. Como o gravador não permite captar imagens, anotamos, no diário de campo, expressões juntamente com as falas e também atitudes dos membros da comunidade para que pudéssemos fazer uma análise apurada das informações.

Os registros relacionados com: o desenvolvimento das tarefas desenvolvidas nos encontros; o relato das impressões a respeito da participação na *Cop-PAEM,* feitas em um *caderno;* os relatos de práticas pedagógicas constituíram-se como fontes de informação importantes para validar ou não nossas impressões a respeito das interações ocorridas na Cop.

3.4 ENFOQUE DA ANÁLISE

No intuito de investigar que elementos do contexto de uma Comunidade de Prática de professores de Matemática permitem as aprendizagens de seus membros ao lidarem com empreendimentos na busca de aprender e ensinar frações, relemos atentamente o diário de campo do investigador, os registros escritos das professoras e as transcrições das gravações dos encontros. Para atingir o primeiro objetivo de nossa pesquisa, identificamos os empreendimentos articulados pela *Cop-PAEM* e as ações[25] decorrentes desses empreendimentos. Como explicitado no quadro abaixo:

---

[25] As ações listadas no quadro 2 são descritas em detalhes no próximo capítulo.

Quadro 2 - Empreendimentos mobilizados pela *Cop-PAEM* e suas respectivas ações

Empreendimento 1: "Estudos dos temas Saeb e Prova Brasil"	Ação 1 – E1 (ação 1 do empreendimento 1):	Discussão de alguns aspectos da legislação e pressupostos teóricos
	Ação 2 – E1 (ação 2 do empreendimento 1):	Resolução e análise de questões similares às da Prova Brasil
Empreendimento 2: "Estudo a respeito do conceito de fração"	Ação 1 – E2 (ação 1 do empreendimento 2):	Levantamento de ideias a respeito do conceito de fração desencadeadas pela utilização de materiais didáticos e pela discussão de tarefas propostas pelas professoras para sala de aula
	Ação 2 – E2 (ação 2 do empreendimento 2):	Construção de material manipulativo para o ensino de frações
	Ação 3 – E2 (ação 3 do empreendimento 2):	Elaboração de tarefas associadas ao material manipulativo construído
	Ação 4 – E2 (ação 4 do empreendimento 2):	Estudos de artigos relacionados com o conceito de fração
	Ação 5 – E2 (ação 5 do empreendimento 2):	Análise da aplicação das tarefas elaboradas em sala de aula

Fonte: o próprio autor

Em seguida, analisamos, à luz de princípios da Análise de Conteúdo (BARDIN, 1977), processos de negociação de significados ocorridos na articulação e no desenvolvimento do empreendimento 2: *Estudo a respeito do conceito de fração*.

Para a descrição que orientou a análise, elegemos episódios que revelaram indícios de aprendizagem dos membros da *Cop-PAEM* a respeito do conhecimento profissional, como proposto em nosso segundo objetivo, bem como as outras formas de registro já descritas. Esses episódios são compostos por trechos de transcrição de discussões ocorridas durante os encontros, a partir dos quais identificamos a interação entre os processos de participação e de reificação, no que se refere à negociação de significados relacionada com conhecimentos profissionais. Em decorrência dessa análise, no final do capítulo, apresentamos um quadro síntese com o que foi reificado, as frases que evidenciaram tais reificações e os indícios de aprendizagem a elas associados.

Após descrição e análise das aprendizagens, quanto ao conhecimento profissional dos membros da *Cop-PAEM* (Capítulo 4), buscamos identificar e analisar elementos que permitiram essas aprendizagens (Capítulo 5).

CAPÍTULO 4
DESCRIÇÃO E ANÁLISE

Com a pretensão de investigar *Que elementos do contexto de uma Comunidade de Prática de professores de Matemática permitem aprendizagens aos seus membros ao lidarem com empreendimentos na busca de aprender e ensinar frações?*, neste capítulo, apresentamos o relato da trajetória da *Cop-PAEM* que nos permitiu identificar seus empreendimentos articulados em busca de aprender e ensinar frações. Analisamos, ainda, alguns processos de negociação de significados ocorridos na articulação desses empreendimentos que evidenciam indícios de aprendizagem dos membros dessa comunidade a respeito de conhecimentos profissionais de professores de Matemática, de um modo geral e, especificamente, do conceito de fração.

4.1 Trajetória da Cop–PAEM na Articulação de Empreendimentos na Busca de Aprender e Ensinar Frações

Na descrição da trajetória da *Cop-PAEM*, esclarecemos o leitor que os fatos não são apresentados em ordem cronológica, e sim de modo a propiciar uma visão geral do trabalho desenvolvido nessa comunidade.

O grupo investigado, agora denominado de *Cop-PAEM*, foi coordenado pela formadora Tânia Marli Rocha Garcia com a intenção de constituir uma Comunidade de Prática, como parte de sua tese de doutorado, vinculada ao projeto “Educação Matemática de Professores que ensinam Matemática”, do Programa “Observatório da Educação” (Edital nº 38/2010, da CAPES/INEP), coordenado por professoras do PECEM.

Nesse projeto, estão envolvidos dois colégios públicos, um em Apucarana e outro em Paranavaí. As ações de formação de professores, nesses colégios, devem ser:

> Organizadas de modo que os participantes desenvolvam sua capacidade para analisar, explicar seu raciocínio, e comunicar suas ideias matemáticas enquanto propõem, formulam, resolvem e interpretam problemas em uma variedade de situações. Nessas ações serão investigados processos de aprendizagem dos professores e estratégias de enfrentamento às dificuldades de ensino e de aprendizagem da Matemática, nomeadamente aos pensamentos algébrico e geométrico, no Ensino Fundamental, considerando a Prova Brasil e o Saeb (CYRINO, 2010, p. 8).

A *Cop-PAEM* formada por professoras do Colégio Estadual de Paranavaí (CEP) e de outros colégios da cidade de Paranavaí, por uma professora recém-formada e por nós pesquisadores, Tânia e Márcio, nos reunimos, semanalmente, às terças-feiras, no horário de 13h30min às 15h30min, nas dependências do CEP.

No primeiro encontro, no dia 01 de março de 2011, estavam presentes as professoras Beatriz, Cláudia e Eliane do Colégio Estadual de Paranavaí; a professora Fernanda que foi convidada pela professora Beatriz; eu, autor desse trabalho, e a pesquisadora e coordenadora do grupo, professora Tânia. Como eu ainda não havia tido contato com as professoras, fui apresentado pela Tânia ao grupo como pesquisador de Mestrado e também como professor de ensino superior. Uma das professoras me perguntou onde eu lecionava. Respondi que havia sido professor na Universidade Estadual de Maringá – UEM por seis anos e que, naquela ocasião, era também professor da Faculdade Estadual de Paranavaí – FAFIPA. Na sequência, Tânia relatou as propostas do projeto "Educação Matemática de Professores que ensinam Matemática" e colocou em discussão a possibilidade de convidarmos professores de outras escolas de Paranavaí para participarem do grupo. Ela ressaltou que as professoras Beatriz, Cláudia e Eliane tinham bolsa e que os demais professores que viessem a participar contariam apenas com a certificação, pois o projeto só oferecia três bolsas. O grupo decidiu convidar professores de outras escolas por meio de um comunicado à chefe do Núcleo de Educação de Paranavaí, para que, dessa forma, fosse formalizado o convite para outros professores da rede.

Em seguida, a professora Tânia informou às professoras que cada uma delas teria um caderno, no qual deveriam registrar as suas expectativas e/ou impressões com relação aos encontros. Esse caderno, que para nós pesquisadores compõe uma das formas de recolha de informações, se constitui como um dos elementos do repertório compartilhado dessa comunidade, pois nele as professoras deixaram suas impressões a respeito do processo de ensino e de sua participação na comunidade.

Posto isso, Tânia indagou as professoras a respeito do que elas gostariam de discutir nos encontros, dizendo que isso estava a cargo do grupo, pois a intenção era a de que aquele grupo se constituísse como uma Comunidade de Prática, atendendo ao objetivo do projeto. Diante disso, estabeleceu-se uma conversa em que identificamos a articulação do primeiro empreendimento: *Estudos dos temas SAEB e Prova Brasil* (E1). Como se pode observar a partir da transcrição do diálogo abaixo:

Beatriz: Eu peguei oitava série e esse ano tem Prova Brasil. E eu estou preocupada com a Prova Brasil.
Tânia: Essa turma está agora com essa expectativa, nesse primeiro semestre?
Beatriz: Sim.
Tânia: Você também Eliane?
Eliane: Eu também tenho uma oitava.
Tânia: O que é que preocupa vocês na Prova Brasil? É o desempenho dos alunos? São os conteúdos? O que é que mais preocupa?
Beatriz: Primeiro, os conteúdos. Como que eu vou trabalhar esses conteúdos. Eu nunca estive com uma turma que fizesse a Prova Brasil. Esse é o primeiro ano. Então, como trabalhar esses conteúdos, essas questões? E lógico, consequentemente, o desempenho deles.
Cláudia: Quando começa a propaganda daí eles (alunos) já começam (a dizer): "eu não venho".
Beatriz: Sempre tem uma cobrança da escola!
Eliane: A gente trabalha os conteúdos da Prova Brasil, mas além dos conteúdos da Prova Brasil tem os nossos conteúdos. Não tem como dar só os conteúdos da Prova Brasil.
Beatriz: Porque na verdade o conteúdo que a gente trabalha em sala já é o conteúdo da Prova Brasil.
Tânia: O conteúdo da Prova Brasil é o conteúdo (trabalhado) desde as primeiras séries do Ensino Fundamental. É uma somatória de tudo (completando a ideia da Beatriz).
Vocês conhecem a matriz de referência [...] da Prova Brasil? Como que ela é feita? Como é que feita a pontuação? Que tipo de questão? Quais conteúdos? Quais são as coisas que são cobradas?
Beatriz: Eu dei uma olhada esse final de semana. Assim meio por cima.
Tânia: Mas essa seria uma coisa que vocês se interessariam em estudar? Saber como é que funciona, como que é a estrutura?
Eliane: Como é cobrado dos alunos. Porque eles chegam nessa época e não querem fazer prova.
Cláudia: Isso é verdade!

(1º Encontro, 01/03/2011)

Na transcrição anterior, podemos observar uma negociação em busca de definir um dos empreendimentos da comunidade, ação diferenciada em relação ao que ocorre na maioria dos cursos de formação de professor, em que as ações são pré-definidas pelo coordenador do grupo. Em uma Comunidade de Prática, admite-se a figura do "expert", no entanto, as decisões tomadas são resultado de discussões e negociações do grupo e não a partir de um acordo estático, "[...] empreendimento não é conjunto no sentido de que todos acreditam na mesma coisa ou concordam com tudo, mas sim no sentido de que é negociado coletivamente." (WENGER, 1998, p. 78).

Com base nas falas das professoras, podemos identificar que os pontos de enfoque na articulação desse empreendimento, *Estudos dos temas SAEB e Prova Brasil* (E1), foram: o não conhecimento da estrutura da Prova Brasil por parte de algumas professoras e dos conteúdos que são contemplados na prova, o que culminou no estabelecimento de duas ações para o seu desenvolvimento, nomeadamente:

- Ação 1 – E1: discussão de alguns aspectos da legislação e pressupostos teóricos;
- Ação 2 – E1: resolução e análise de questões[26] similares às da Prova Brasil, estruturadas, atendendo ao que foi discutido no grupo.

No desenvolvimento da Ação 1 – E1, realizada no segundo encontro (15/03/2011), por sugestão das professoras, fizemos a leitura de dois textos que tratavam das particularidades do SAEB e da Prova Brasil. Esses textos foram trazidos pela professora Tânia, estabelecendo-se a seguinte dinâmica: uma pessoa lia para o grupo e ao final de cada tópico do texto fazíamos uma pausa para esclarecimento do que havida sido lido. Estes tópicos tratavam das seguintes questões: 1) *O que é Prova Brasil e o que é SAEB?* 2) *Para que servem a Prova Brasil e o SAEB?* 3) *Qual a diferença entre as provas?* 4) *O que cai nas provas?* 5) *Como a prova é organizada?* 6) *Como o professor pode preparar seus alunos para fazerem a prova?* 7) *Como são calculadas as notas?* Notamos que essa dinâmica foi bastante produtiva porque proporcionou aos participantes da *Cop-PAEM* engajamento e liberdade para expor seus questionamentos.

A Ação 2 – E1 teve início no terceiro encontro (22/03/2011) e se prolongou até o nono (03/05/2011). Informamos que, a partir do quarto encontro (05/04/2011), passamos a contar com a participação da Laís, professora recém-formada, e da professora Débora do Colégio Polo de Paranavaí. No quinto encontro (12/04/2011), a professora Ana, Escola Estadual Curitiba de Paranavaí, também passou a participar da comunidade. No decorrer da Ação 2 – E1, as professoras formaram pequenos grupos (três pessoas) para resolver as questões do Caderno de Atividades que envolvem conteúdos de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, de modo a possibilitar diferentes resoluções. Essas questões buscavam mobilizar os conteúdos estruturantes de Matemática da Educação Básica: 1. Geometrias; 2. Grandezas e Medidas; 3. Números e Álgebra; 4. Tratamento da Informação.

[26] Essas questões compõem um Caderno de Atividades – Matemática, publicado pela Secretaria da Educação/Departamento de Educação Básica do Estado do Paraná e oferecido às escolas de Ensino Fundamental.

Após a resolução das questões, as professoras eram orientadas a identificar os descritores presentes em cada questão. Em seguida, Tânia e eu conduzíamos a discussão no grande grupo (todos os membros da comunidade), questionando: como elas tinham resolvido as questões, se existiam outras possibilidades de resolução e quais dificuldades os alunos poderiam ter diante de cada questão, criando assim um ambiente para exposição de ideias e questionamentos no processo de negociar significados. Foi possível observar que a discussão a respeito dessas questões proporcionou às professoras uma reflexão a respeito da estrutura (enunciado) das tarefas que elas propunham para os seus alunos. Consideramos o cuidado com as tarefas, no que se refere a sua estruturação, como uma das aprendizagens dessas professoras, deflagrada nessa ação, mas que se evidenciou na Ação 2 – E2 (E2 – Empreendimento *Estudo a respeito do conceito de fração*). Esse momento de partilha de informações foi valorizado pela professora Beatriz, por meio de um registro no *caderno* apresentado a seguir na figura 7.

Figura 7 - Registro feito pela professora Beatriz, no caderno, referente ao 4º Encontro (05/04/2011)

Estes encontros que estamos fazendo tem nos dado a oportunidade de sairmos um pouco da rotina, de estudar e de enxergar as coisas com outros olhos. Será que este não seria o caminho? O estado não deveria oferecer aos seus professores uma formação continuada da forma como temos feito em nossos encontros?

Fonte: o próprio autor

Esclarecemos que o registro que consta na figura 1 foi scaneado do caderno da professora Beatriz da forma com a qual se apresenta, essa professora optou por digitá-los. Nesse registro, constatamos um indício de aprendizagem dessa professora no que diz respeito ao conhecimento do processo instrucional, ou seja, daquilo que trata da organização da dinâmica da sala de aula. Isso é evidenciado pela reflexão que ela faz sobre a sua ação e também pela proposta que ela apresenta em termos de formação continuada.

A Ação 2 – E1 continuou com esse movimento até completarmos todo o Caderno de Atividades, citado anteriormente. Uma dessas questões (Figura 8) desse caderno estava relacionada com o conceito de fração e isso deflagrou uma discussão que culminou na articulação do segundo empreendimento: *Estudo a respeito do conceito de fração* (E2), que é o foco principal do nosso trabalho, objeto de análise na seção 4.2.

Figura 8 – Tarefa 1

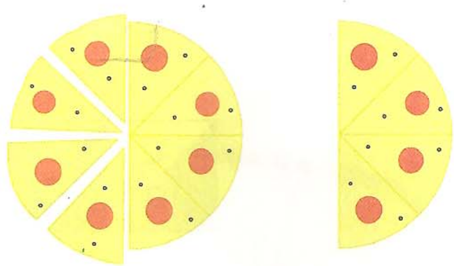
34. Bianca e suas amigas saíram para comer uma pizza. Depois de 20 minutos de conversa elas já haviam comido 50 % da pizza. Qual fração abaixo representa o total da pizza que elas já comeram?

a) $\frac{2}{4}$

b) $\frac{5}{4}$

c) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{4}{2}$



Fonte: Paraná (2009).

Tânia: Nessa questão aparece o cálculo de porcentagem. Vocês me disseram que os alunos apresentam dificuldades em várias etapas. Também é essa uma oficina para a gente pensar.

[...]

Cláudia: Eu dei uma tarefa para os meus alunos que era uma tabela. Por exemplo: dado um número, calcule o que se pede: o dobro, o triplo, a metade. A maior parte deixou o cálculo da metade sem resolver.

[...]

Tânia: Então um dos problemas está na divisão? Mas na multiplicação, quando você dá uma situação problema associada a um determinado contexto, eles dão conta de fazer? Na hora de fazer a multiplicação isolada, eles sentem dificuldade? Isso acontece com os alunos de vocês?

Ana: A dificuldade é com as frações mesmo.

Tânia: Com números decimais, os alunos se viram bem?

Débora: Eles até preferem número decimal, porque eles utilizam a calculadora.

Eliane: Por mais que você repita inúmeras vezes que fração e divisão é a mesma coisa, ainda assim eles têm dificuldade.

[...]

Tânia: O que vocês acham? É difícil frações?

Ana: Teríamos que pensar em uma oficina sobre frações.

(6º Encontro, 19/04/2011)

Diante disso, a *Cop-PAEM* definiu o que denominamos por Ação 1– E2: levantamento de ideias a respeito do conceito de fração presentes em materiais didáticos e em tarefas propostas por essas professoras para sala de aula. Apresentamos, a seguir, um trecho de transcrição do encontro que revela como a ideia acerca da realização da Ação 1– E2 foi articulada e como isso deflagrou as ações: Ação 2– E2 (Construção de material manipulativo para o ensino de frações), Ação 3 – E2 (Elaboração de tarefas associadas ao material manipulativo construído) e Ação 4 – E2 (Estudos de artigos relacionados com o conceito de fração).

Beatriz: Eu fiz esses slides (ANEXO 1) para trabalhar com a quinta série. Dá para ver daí?
Todos: Dá!
Beatriz: Eu coloquei um pouquinho de história. Como eles (antigos) faziam a definição de fração. E daí eu pedi para eles (alunos) trazerem aquelas forminhas de docinho e ia dobrando com eles. Eles localizavam: um meio, um quarto.
Débora: Ah, você me lembrou: eu tenho uma atividade bem bacana também que você vai dobrando e depois eles vão preenchendo. Eu vou ver onde é que está aquilo. Eu dava papel, eles desenhavam a circunferência, recortavam e iam dobrando.
Beatriz: Ah, eu levava as forminhas porque já ficava mais fácil.
Laís: Teve uma vez que a gente até tentou fazer, mas não concretizou nada. Estávamos em um projeto da faculdade, eu e a professora Ângela, trabalhando com TANGRAN. Aí a gente tentou fazer o TANGRAN no GeoGeobra, [...] A gente tinha um tópico de frações para trabalhar com TANGRAN. As "pecinhas" dão para sobrepor. A gente trabalhou um pouco, mas não passou nada para o papel. Essa é uma ideia também.
Débora: Tem esse livro aqui ó, o livro (Matemática Realidade de Iezzi, Dolce e Machado, 2009) que eu adoto. O livro começa com TANGRAN.
[...]
Débora: Eu achei bacana Beatriz, mas e daí?Você levou os alunos no laboratório ou colocou na TV- pendrive[27]?
Beatriz: Eu coloquei na TV-pendrive.
[...]
Débora: Esse livro (Promat – Projeto Oficina de Matemática de Grasseschi, Caputcho e Silva, 1999)... Aqui também tem uns recortes (ela mostra o livro para o grupo). Daí a gente faz um joguinho com essas fichas. Mas Tânia pensa numa confusão. Eu já dou isso aqui impresso para eles recortarem e peço para pintarem cada uma de uma cor. Deixa tudo dentro de um envelopinho, para trabalhar com a equivalência, comparação de quem é maior quem é menor, e depois a soma. Só que eu acho assim, como eu fazia no sulfite... Poderia ser feito numa cartolina. Tem um papel mais grossinho que dá para fazer isso, não é?
[...]
Tânia: Débora, você levava esse material com que finalidade?
Débora: Para eles identificarem o inteiro e as partes em que é dividida, quanto mais você divide menor é o pedaço. E depois para eles fazerem a comparação.
[...]
Tânia: Márcio, você tem alguma coisa para falar?
Márcio: Então, eu li um artigo a respeito de alguns pontos que trata dessa questão de o que é ensinar fração, do que é aprender fração. Vou ler o nome do artigo: "O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações quando tentamos lhes ensinar frações". É um artigo do Antônio José Lopes. (ANEXO 2)

[27] A TV – pendrive é um equipamento multimídia que possibilita a exibição de arquivos digitalizados de áudio, imagem e vídeo, por meio de grande diversidade de sinais: pendrive, cartão de memória, DVD, câmera fotográfica digital, TV aberta, TV a cabo, celular, notebook, computador pessoal ou em rede.

[...]

Márcio: Ele aponta algumas questões como essa dificuldade de lidar com a multiplicação, com a divisão de fração. Nosso exagero em querer contextualizar fração. [...] Essa busca de situações do dia-a-dia que a gente possa comparar. A questão do próprio professor não saber lidar com frações. O problema em falar de frações aparentes. Essa divisão: na quinta série aprende uma coisa, na sexta série, outra, ou seja, não tratar do ensino de frações como um processo contínuo.

Débora: É bem o material que a gente quer montar!

Tânia: Quando o Márcio falou desse artigo, eu pensei: é um artigo interessante para a gente ler não no sentido de seguirmos os passos dele, mas de ver os apontamentos que ele está colocando e juntarmos com aquilo que nós já temos: as práticas, as experiências que todos nós já temos para tentarmos fugir ou pelo menos escapar dessas situações que nós já sabemos que vão gerar problema.

(14º Encontro, 21/06/2011)

Os pontos de enfoque nesse episódio foram: a preocupação com o material manipulativo apresentado pela professora Beatriz e as ideias do artigo a respeito do qual eu comentei para o grupo. A professora Débora, com seu comentário, legitimou a fala da professora Beatriz no sentido de questionar a respeito dos detalhes de sua aula e também do material manipulativo utilizado por ela e, ainda, o que eu havia apresentado do artigo, dizendo que este trazia ideias de um material que o grupo poderia montar. Isso mostra outra característica das comunidades de prática: a contribuição dos participantes para a construção de um repertório compartilhado. É dessa maneira que os membros da comunidade podem reconhecer sua participação e se envolver na constituição e sustentação do empreendimento articulado.

Na discussão acerca desses dois pontos de enfoque, a Ação 2 – E2 tomou forma: construção de material manipulativo[28] para o ensino de frações. Durante a construção do material manipulativo que ocorreu no 16º Encontro (16/08/2011) muitas questões foram levantadas, como: Como começar o trabalho com frações em sala de aula? O que é o todo referencial? Que tipo de todo referencial levar em conta: discreto ou contínuo? Como trabalhar com as operações com frações? Diante das ideias presentes na discussão durante esse encontro, Tânia nos deu como tarefa para o próximo encontro: organizar um roteiro de questões para se trabalhar com aquele material construído que havíamos apontado. Nesse

---

[28] O material manipulativo citado trata-se de um jogo de tiras e de círculos feitos em papel cartolina. Para cada jogo, tem-se o todo referencial e as demais peças encontram-se divididas em meios, terços, quartos, quintos até nonos.

sentido, algumas professoras trouxeram tarefas obtidas a partir de livro didático. A professora Beatriz, além de apresentar a tarefa que ela havia coletado a partir do livro didático, apresentou também uma tarefa que ela mesma havia elaborado. Essa atitude da professora Beatriz induziu outras professoras também a elaborarem tarefas e, por esse motivo, tratamos como a Ação 3 – E2: elaboração de tarefas associadas ao material manipulativo construído na Ação 2 – E2.

Nos dois encontros seguintes, 17º Encontro (23/08/2011) e 18º Encontro (06/09/2011), a comunidade se empenhou em resolver as tarefas com o apoio do material construído e, nessa ação, foram surgindo dúvidas a respeito do conceito de fração, especificamente, das diferentes ideias relacionadas com esse conceito, o que estamos chamando nesse trabalho de subconstrutos. Diante disso, sugerimos para comunidade o estudo do artigo: "Uma nova visão sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais" (ANEXO 3) de Lourdes de La Rosa Onuchic e Luciene Souto Botta, o qual foi feito no 19º Encontro (20/09/2011). O estudo desse artigo desencadeou outras leituras, o que constituiu a Ação 4 – E2: Estudo de artigos relacionados com o conceito de fração. Com base nesses estudos e na resolução das tarefas no grupo, as professoras decidiram aplicar as tarefas em suas salas de aula. No sentido de trazer para o grupo a experiência da aplicação das tarefas e os questionamentos suscitados, estruturou-se, assim, a Ação 5 – E2 que tratou da discussão e reflexão na comunidade a respeito da aplicação que resultou na reestruturação dessas tarefas e também na reaplicação das mesmas.

Além dos empreendimentos (E1 e E2) e suas ações, listados anteriormente, a *Cop-PAEM* se propôs a produzir um material denominado de "Caderno de Tarefas" que contém as tarefas relacionadas com o conceito de frações, elaboradas pelos membros da comunidade e reflexões acerca da aplicação dessas tarefas em sala de aula (E3, em andamento). Esse "Caderno de Tarefas" conta também com um aporte teórico referente ao estudo que foi feito na comunidade a respeito dos subconstrutos do conceito de fração, tema abordado e discutido no capítulo 2. A pretensão da comunidade é de publicar esse "Caderno de Tarefas" na expectativa de que esse material possa contribuir com a prática pedagógica de outros professores. Embora estejamos anunciando mais esse empreendimento da *Cop-PAEM*, esclarecemos que ele não se caracteriza como objeto de análise para essa dissertação.

Na próxima seção, analisamos os processos de negociação de significados decorrentes do empreendimento E2 articulado pela *Cop-PAEM*, apresentando algumas interações entre os processos de participação e reificação. Buscamos identificar diferentes formas de participação dos membros da comunidade e as possíveis mudanças, durante as interações, e os pontos de enfoque que culminaram em reificações a respeito do conhecimento profissional de professores de Matemática.

4.2 NEGOCIAÇÕES DE SIGNIFICADOS DECORRENTES DO DESENVOLVIMENTO DO EMPREENDIMENTO E2: *ESTUDO A RESPEITO DO CONCEITO DE FRAÇÃO*

Na intenção de identificar os elementos do contexto da *Cop-PAEM*, que possibilitaram aprendizagens aos seus membros, relacionadas ao conhecimento profissional, tomamos como foco o empreendimento “Estudo a respeito do conceito de fração” (E2). Apresentamos, a seguir, episódios que revelaram processos de negociação de significados, destacando interações entre os processos de participação e de reificação (WENGER, 1998), ocorridos durante o desenvolvimento das ações descritas no Quadro 3.

Quadro 3 - Ações que compuseram o empreendimento *Estudo a respeito do conceito de fração* (E2)

Ação 1 – E2 (ação 1 do empreendimento 2):	Levantamento de ideias a respeito do conceito de fração desencadeadas pela utilização de materiais didáticos e pela discussão de tarefas propostas pelas professoras para sala de aula.
Ação 2 – E2 (ação 2 do empreendimento 2):	Construção de material manipulativo para o ensino de frações.
Ação 3 – E2 (ação 3 do empreendimento 2):	Elaboração e resolução de tarefas associadas ao material manipulativo construído.
Ação 4 – E2 (ação 4 do empreendimento 2):	Estudos de artigos relacionados com o conceito de fração.
Ação 5 – E2 (ação 5 do empreendimento 2):	Análise da aplicação das tarefas elaboradas em sala de aula.

4.2.1 Aprendizagens Ocorridas na Ação 1 – E2

No desenvolvimento da Ação 1 – E2 que tratou de um levantamento de ideias do conceito de fração desencadeadas pela utilização de materiais didáticos e pela discussão de tarefas propostas pelas professoras para sala de aula, cada um relatou suas experiências com o ensino e a aprendizagem do conceito de fração ou apresentou ao grupo tarefas ou artigos que remetessem a esse tema. A professora Beatriz foi a primeira a fazer o relato, apresentando um material em forma de slides (Anexo 1), feito por ela, no qual constam algumas ideias a respeito de fração, e a contar sua experiência de sala de aula com o uso de um material manipulativo feito a partir de “forminhas de doce”. Com essa atitude de se colocar diante da comunidade, pronunciando-se por primeiro, a professora Beatriz mostrou o seu compromisso com a prática desenvolvida pela comunidade. A partir do seu depoimento, dado em detalhes, com relação ao trabalho que realizou com seus alunos, a professora Beatriz manifestou a sua forma de afiliação como membro experiente no que se refere a essa ação. Diante de sua apresentação, a professora Débora se pronunciou:

Débora: Eu achei bacana Beatriz, mas e daí? Você levou os alunos no laboratório ou colocou na TV-pendrive?

(14º Encontro, 21/06/2011)

A fala da professora Débora evidencia um reconhecimento do trabalho da professora Beatriz e isso descreve o engajamento mútuo entre essas professoras em uma interação harmoniosa. A esse respeito, Wenger (1998, p.76) afirma que, “[...] uma comunidade de prática pode se tornar um laço forte de relações interpessoais” [29] (tradução nossa).

A ideia de utilizar material manipulativo para ensinar frações tornou-se um ponto de enfoque em torno do qual se organizou o processo de negociação de significado a respeito de como ensinar o conceito de fração. Isso é evidenciado pelo relato da professora Débora:

Débora: Ah, você me lembrou: eu tenho uma atividade bem bacana também que você vai dobrando e depois eles vão preenchendo. Eu vou ver onde é que está aquilo. Eu dava papel, eles desenhavam a circunferência, recortavam e iam dobrando.

(14º Encontro, 21/06/2011)

E também pelo relato da professora Laís:

Laís: Teve uma vez que a gente até tentou fazer, mas não concretizou nada. Estávamos em um projeto da faculdade, eu e a professora Ângela, trabalhando com TANGRAN. Aí a gente tentou fazer o TANGRAN no GeoGeobra, [...] A gente tinha um tópico de frações para trabalhar com TANGRAN. As “pecinhas” dão para sobrepor. A gente trabalhou um pouco, mas não passou nada para o papel. Essa é uma ideia também.

(14º Encontro, 21/06/2011)

---

[29] “[…] a community of practice can be become a very tight node of interpersonal relationships.” (WENGER, 1998, p. 76).

Diante desses relatos em torno da utilização de material manipulativo para ensinar frações, a professora Tânia fez alguns questionamentos, abrindo uma discussão a respeito dos enfrentamentos no ensino e na aprendizagem do conceito de frações que estão ligados a como ensinar o conceito de frações.

Tânia: Dessas experiências de sala de aula, o que vocês têm a dizer?
Beatriz: Representação, leitura, eles fazem bem. Eles começam a ter bastante dificuldade quando começa a soma, quando os denominadores são diferentes.
[...]
Débora: O problema começa nas operações quando os denominadores são diferentes.
Tânia: E esse é o ponto principal que vocês acham que dá problema?
Beatriz: Nosso aluno do Ensino Médio também, quando vai fazer a soma de frações com denominadores diferentes ele fica na dúvida.
Eliane: A gente fala que tem que calcular o mínimo múltiplo comum e eles falam: O que é isso professora?
[...]
Débora: Quando eles vão multiplicar fração e dividir fração eles querem fazer tudo igual!
[...]
Beatriz: Eles têm dificuldade de calcular também três quartos de um quilo, por exemplo. Dois quintos de uma hora.

(14º Encontro, 21/06/2011)

Observamos que, nesse episódio, as professoras tiveram participação plena no sentido de se envolverem umas com as outras ao compartilharem suas histórias de sala de aula. O fato de elas se manifestarem de forma a haver uma confluência nas ideias apresentadas evidencia um engajamento mútuo ocorrido de forma harmoniosa.

Consideramos esse um dos momentos importantes no que diz respeito ao processo de formação continuada, porque possibilita ao professor refletir sobre sua prática pedagógica. O professor tem a possibilidade de conhecer outras realidades por meio do depoimento de outros professores. Nessa troca de informações, no entanto, é possível haver um estreitamento entre suas experiências e obstáculos enfrentados e isso pode fortalecer o professor no sentido de buscar lidar com esses obstáculos. Isso ficou evidenciado a partir dos registros escritos feitos pelas professoras.

Figura 9 - Registro feito pela professora Beatriz, no cadermo, referente ao 4º Encontro (05/04/2011)

> É interessante observar que colegas de outras escolas compartilham das mesmas dificuldades e angustias no que se refere ao processo de ensino aprendizagem de nossas crianças, sabemos que da forma como tudo está sendo encaminhado não tem apresentado os resultados esperados, mas na correria do dia a dia na escola não temos tempo de sentar para juntos traçarmos estratégias e assim resolver o problema.

Fonte: o próprio autor.

Cláudia: Eu descobri que os mesmos medos, as ansiedades, as dificuldades que eu tenho, os outros também têm. E uma coisa que acho mais importante que a gente tem que sempre continuar aprendendo.

(25º Encontro, 08/11/2011)

A professora Tânia, no papel de coordenadora da comunidade, responsável por instigar os membros à participação, perguntou-me se eu tinha algo a dizer em relação a alguma temática tratada na Ação 1 – E2. Eu então comentei que havia lido o artigo “O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações quando tentamos lhes ensinar frações” (Anexo 2) e me coloquei a falar a respeito de algumas ideias presentes nesse artigo.

Márcio: Ele (o artigo) aponta algumas questões como essa dificuldade de lidar com a multiplicação, com a divisão de fração. Nosso exagero em querer contextualizar fração. [...] Essa busca de situações do dia-a-dia que a gente possa comparar. A questão do próprio professor não saber lidar com frações. O problema em falar de frações aparentes. Essa divisão: na quinta série aprende uma coisa, na sexta série, outra, ou seja, não tratar do ensino de frações como um processo contínuo.

(14º Encontro, 21/06/2011)

O grupo se propôs a estudar tal artigo, no sentido de analisar os apontamentos trazidos por ele juntamente com as nossas experiências, para discutirmos como lidar com o ensino de frações. As ideias que eu havia sublinhado no artigo tornaram-se ponto de enfoque em torno do qual se organizou a negociação de significado do conceito de fração.

Tânia: Alguém já falou o que é fração?

[...]

Beatriz: Uma parte de um todo.

Laís: Uma parte considerada de um todo.

[...]

Beatriz: Fração é um número que exprime uma ou mais partes iguais em que foi dividida uma unidade ou um inteiro.

[...]

Débora: Fração não é só parte do inteiro!

[...]

Débora: Não tem fração imprópria? Aparente?

Tânia: Mas daí ela não é parte de um inteiro?

Débora: Ela é mais do que um inteiro. Quero dizer, ela não é só um pedaço.

Tânia: Então uma parte é sempre menor do que o inteiro?

[...]

Laís: É que você pode tomar mais que um inteiro.

[...]

Eliane: E se tivermos mais do que uma pizza?

Tânia: Uma pizza e meia é parte da pizza inteira ou não?

[...]

Cláudia: “Fração é um número que exprime uma ou várias partes iguais de um inteiro ou de vários inteiros” (Frase lida em um livro trazido por essa professora).

(14º Encontro, 21/06/2011)

Esse episódio descreve a negociação de significado a respeito do conceito de fração a partir do subconstruto parte-todo, que é uma das ideias, se não a única, tratada no ensino e na aprendizagem do conceito de fração. Bota & Onuchic (1997, p.6) referenciam subconstrutos por significados e, no que diz respeito à relação parte-todo, elas afirmam que:

> No significado **parte-todo (medida)** a unidade é introduzida na forma de uma figura contínua (por ex. um pedaço de corda) ou um conjunto discreto (por ex. um determinado número de balas).Aqui o todo é repartido em partes de igual tamanho. Como medida envolve medir a área de uma região ao parti-la e cobri-la com unidades de um tamanho apropriado (formas congruentes ou não de mesma área).

Diante disso, consideramos que, no ensino de frações contemplando-se o subconstruto parte-todo, é importante que o professor deixe claro ao aluno que a divisão do todo referencial é de tal maneira que as partes ou pedaços tenham o mesmo tamanho. Nesse sentido, a fração representa uma comparação entre certa quantidade dessas partes em que foi dividido o todo, tomando-se como unidade de referência uma dessas partes. Ao nos referirmos, por exemplo, à fração $\frac{1}{5}$, no contexto da relação parte-todo, devemos criar situações em sala de aula para que o aluno compreenda que essa fração é a representação de uma das partes de um todo que foi dividido em cinco partes de igual tamanho. É importante criar espaços de questionamentos com os alunos no sentido de oportunizar a compreensão deles a respeito de que a fração $\frac{3}{5}$, por exemplo, representa três partes das cinco em que foi divido o todo e que para essa comparação toma-se como referencial a fração $\frac{1}{5}$. Notemos que com essa compreensão o aluno poderá ser desafiado a pensar, por exemplo, qual é a representação da fração $\frac{7}{5}$. Isso possibilita o trabalho com fração imprópria, fração que representa mais do que o todo. Além disso, o professor pode iniciar aí o trabalho com os chamados números mistos, levando o aluno a compreender que a fração $\frac{7}{5}$ pode ser representada pela soma $\frac{5}{5}+\frac{2}{5}=1\frac{2}{5}$.

O grupo também discutiu a ideia de fração como sistema notacional e como uma forma de representação de um número racional.

Débora: [...] o que é racional é a dízima periódica, não periódica é irracional, não é?
Tânia: Sim!
Débora: Então, agora como que esse irracional também se transforma em fração?
Tânia: Não, se é irracional não se transforma.
Márcio: Não há como escrever.
Tânia: O irracional já é irracional porque não dá para escrever na forma de fração.
Débora: Mas ele é escrito na fração, não é?
Tânia: Se ele pode ser escrito na forma de uma fração ele não é irracional[30].
Débora: Mas quando você vai dividir e ele dá dízima não periódica, não tem um número assim? Não existe esse número?
Tânia: Não. A definição de racional é da seguinte forma: o número é racional quando você pode escrever como razão entre dois inteiros.
[...]
Débora: Mas a dízima não periódica surge de onde?
Tânia: A dízima não periódica é um número irracional qualquer.
Débora: Mas não é uma divisão de números inteiros?
Tânia, Laís, Márcio: Não!
Débora: Eu achava que fosse uma divisão de inteiros.
[...]
Débora: Então qualquer fração formada por números inteiros é um número racional.

(14º Encontro, 21/06/2011)

Esse episódio apresenta algo que consideramos relevante nesse contexto de formação continuada: trata-se da possibilidade de o professor interagir com as competências dos outros e a parcialidade dos saberes de cada participante. A professora Débora, que está no magistério há vinte e cinco anos, possui especialização em Educação Matemática e já

[30] Esclarecemos a fala da professora Tânia, embora não esteja assim apresentada, deu a entender no contexto do encontro em que essa discussão ocorreu que o número irracional é aquele que não pode ser escrito como uma fração constituída por dois números inteiros.

participou do PDE, comportou-se como um recém-chegado ao grupo e isso é evidenciado pelos seus questionamentos. Sua participação foi intensa: ela expressou suas ideias e as defendeu quando os outros as questionaram, fez perguntas ao grupo e exigia respostas com justificativas. Diante disso, podemos concluir que a forma de relacionar-se com o conceito de fração legitimou a periferia de sua participação. A professora Débora teve uma trajetória de entrada com perspectiva de se tornar um participante pleno (WENGER, 1998). Para esse episódio, eu (Márcio), Laís e Tânia nos apresentamos como membros experientes no sentido de esclarecer à professora Débora que o número irracional é um número que não pode ser escrito como uma fração formada por dois números inteiros. Essa interação da professora Débora conosco mostrou a sua capacidade de negociar significados e também possibilitou a ela um processo de reificação a respeito do conceito de número racional e de número irracional.

A partir da situação descrita acima, destacamos a importância da dualidade dos processos de reificação e de participação na experiência de negociar significados. Quando a professora Débora projetou (reificou) um significado em relação ao que entendia por número racional e por número irracional, a intervenção e a interação (participação) dos outros membros possibilitaram uma redefinição de sua afirmação. Com relação a isso, Wenger afirma que:

> [...] produzimos significados que ampliam, redirecionam, rejeitam, reinterpretam, modificam ou confirmam – em outras palavras, que voltam a negociar – as histórias de significado de que são parte. Nesse sentido, viver é um processo constante de negociação de significado.[31] (WENGER, 1998, p. 52-53, tradução nossa).

De acordo com Lamon (2012), ao reconhecer fração como numeral estamos fazendo referência a um sistema notacional, a um símbolo e que, portanto, podemos ter frações que não representam números racionais como é o caso, por exemplo, da fração $\frac{\sqrt{2}}{4}$. No entanto, reafirmamos que, dessa perspectiva, a fração que representa um número racional é constituída por dois números inteiros, com denominador diferente de zero. Em outras palavras, todo número racional pode ser escrito na forma fracionária, mas nem todos os números escritos na forma fracionária são números racionais.

[31] "[...] we produce meanings that extend, redirect, dismiss, reinterpret, modify or confirm – in a word negotiate anew – the histories of meaning of which they are part. In this sense, living is a constant process of *negotiation of meaning.*" (WENGER, 1998, p. 52-53).

O episódio a seguir apresenta uma negociação de significado a respeito do início de “como ensinar frações”.

Tânia: Como é que a gente começaria a ensinar o conceito de fração? Qual seria a proposta?

Ana: “O ensino de frações não se dá com definições prontas e pseudo-problemas relacionados com pizzas e barras de chocolate. Deve ter atenção para a complexidade que o conceito envolve” (Essa frase foi lida de um livro levado por essa professora).

[...]

Tânia: Em se tratando do conceito de frações, o que vocês acham que é fundamental?

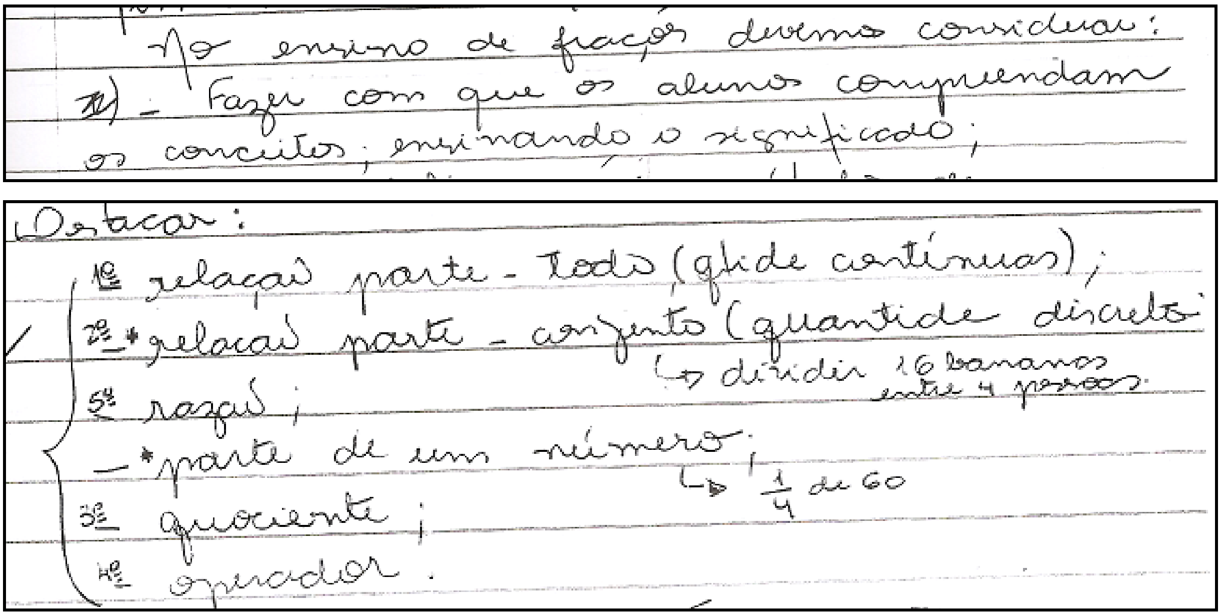
Débora: Pelo pouco que li, o autor fala que temos que privilegiar as frações equivalentes. É com elas que você faz a comparação, é com elas que você faz a soma.

(14º Encontro, 21/06/2011)

Nesse episódio, destacamos a participação da professora Ana que, em outros encontros absteve-se das discussões, permanecendo-se calada. A caracterização da participação da professora Ana como periférica legítima foi evidenciada, como registrado em nosso diário de campo, também em outros encontros. Destacamos dois: em um primeiro, no momento de discussão, a professora Ana vendo que eu fazia anotações se dirigiu a mim pedindo para que a deixasse copiar o que eu havia anotado; e em outro, no qual estávamos desenvolvendo tarefas a respeito do conceito de frações, a professora Ana olhou para meu caderno e comentou sobre a minha forma de apresentar detalhadamente o desenvolvimento da tarefa. Eu então argumentei que procurava fazer daquela forma em meus registros e também em minhas aulas, e que também estimulava meus alunos a desenvolverem suas tarefas de forma a escrever detalhadamente a resolução, os argumentos utilizados, apresentando os cálculos auxiliares e justificando os passos dados no desenvolvimento. Ela então disse que considerava essa forma de trabalho, no desenvolvimento de tarefas, bastante importante e que, a partir daquele momento, iria fazer da maneira como eu tinha relatado. Consideramos que atitudes como essa da professora Ana foram bastante relevantes no seu processo de aprendizagem, pois evidenciaram a relação de confiança estabelecida entre mim e ela. Segundo Graven (2003, p. 179), “[...] confiança é parte de uma forma de aprendizado de professores por meio da experiência, do fazer, do ser e do pertencer. Como tal isto está profundamente interconectado com o aprendizado como significado de mudança, prática, identidade e comunidade” [32] (tradução nossa).

Ainda com relação às discussões a respeito de “como ensinar frações”, apresentamos a seguir um depoimento da professora Débora.

Figura 10 - Registro feito pela professora Débora, no caderno, referente ao 15º Encontro (09/08/2011)


No ensino de frações devemos considerar:
1ª) – Fazer com que os alunos compreendam
os conceitos; ensinando o significado;

Destacar:
1º relação parte - todo (qtide contínuas);
2º * relação parte - conjunto (quantide discreta
↳ dividir 16 bananas entre 4 pessoas.
5º razão;
– * parte de um número;
↳ 1/4 de 60
3º quociente;
4º operador.

Fonte: o próprio autor

A declaração feita pela professora Débora, nesse registro, descreve sua aprendizagem quanto ao que deve ser considerado no ensino do conceito de frações. Ela reifica que o conceito de frações envolve diferentes ideias, tratadas nesse trabalho como subconstrutos, nomeadamente: relação parte-todo, razão, quociente e operador.

4.2.2 Aprendizagens Ocorridas na Ação 2 – E2

No desenvolvimento da Ação 2 – E2, que tratou da construção de material manipulativo para o ensino de frações, ocorrida no 16º Encontro no dia 16/08/2011, o grupo se dividiu em dois subgrupos com a finalidade de produzir o material. Essa dinâmica foi bastante importante, pois nos pequenos grupos as professoras discutiram: como produzir o material, como poderia utilizá-lo com o aluno e se deveriam levá-lo pronto ou não. Esse

[32] “[...] confidence is part of an individual teacher’s ways of learning through experiencing,doing,being, and belonging. As such it is deeply interconnected with learning as changing meaning, practice, identity and community.” (GRAVEN, 2003, p. 179)

trabalho possibilitou o engajamento das professoras nos pequenos grupos e, por conseguinte, no grupo maior, pois elas se sentiram confiantes em comentar a respeito dos possíveis obstáculos que enfrentariam ao construir, com os seus alunos, o material manipulativo citado anteriormente. Depois que o material ficou pronto, voltamos ao grupo maior e então começamos a explorá-lo a partir da seguinte tarefa dada pela professora Tânia: tomar uma das tiras e dobrá-la ao meio. Tânia nos interrogou: “Como é que representamos cada uma dessas partes?” Cada membro da comunidade apresentou a representação: $\frac{1}{2}$. Continuando, Tânia disse: “o número 2, nessa representação, indica o número de divisões do inteiro e o número 1 indica cada uma das partes das divisões.” Nesse momento, surgiu um comentário a respeito de outra possibilidade de leitura desse número.

Tânia: Outra proposta é de trabalhar em paralelo com frações a representação de número racional na forma decimal. [...] Vamos imaginar tomar a fração ½ e vamos supor que queiramos já ensinar para o aluno que ½ também pode ser escrito como 0,5. O que a gente precisaria fazer?

Débora: A divisão.

Tânia: Isso! Nesse caso, teríamos que tratar a fração como outra possibilidade. Temos que trazer outro contexto que é o de divisão. No exemplo dado, teríamos 1 dividido para 2. [...] Se eu tenho uma barra de chocolate e vou dividir para duas crianças, quanto de chocolate cada uma vai ganhar? [...] Então temos que explicar para a criança, na fração ½ o significado é 1 dividido para dois.

Débora: É que nesse caso, esse 1em cima é o inteiro! Mas que coisa!

(16º Encontro, 16/08/2011)

O diálogo entre Tânia e a professora Débora, tem como ponto de enfoque outra ideia relacionada com o conceito de fração que designamos nesse trabalho por subconstruto quociente. Segundo Bota e Onuchic (1997, p. 6), “o significado quociente é percebido quando um número de objetos precisa ser repartido num certo número de grupos [...].” A maneira com a qual a professora Débora apresenta sua última fala no diálogo anterior, em uma expressão de admiração, revela ampliação do significado do conceito de fração. Essa frase da professora Débora traz indícios de que ela não teria pensado na interpretação da fração dentro desse contexto. Consideramos que o que possibilitou esse novo olhar da professora Débora para fração foi ter se colocado em uma trajetória de entrada com participação intensa, ou seja, a professora Débora teve, nessa ação, uma participação periférica legítima.

Tendo por base as anotações feitas em nosso diário de campo, apontamos outros questionamentos que foram levantados no decorrer desse encontro, dentre os quais destacamos: *"É possível trabalhar com a operação* $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$ *utilizando esse material manipulativo?" (Tânia, 16/08/2011).* A partir desse questionamento, surgiram algumas dúvidas no que diz respeito a como trabalhar com soma de frações sem necessariamente lidar com o cálculo do mínimo múltiplo comum (mmc). Diante de outras possibilidades de interpretação para uma mesma fração, Tânia deixou-nos a seguinte tarefa para o próximo encontro: preparar um roteiro, uma sequência de questionamentos a respeito de fração que fizesse uso daquele material que havíamos construído e isso foi caracterizada por nós como Ação 3 – E2: Elaboração de tarefas associadas ao material manipulativo construído; sobre o qual trataremos, a seguir.

4.2.3 Aprendizagens Ocorridas na Ação 3 – E2

No desenvolvimento da Ação 3 – E2, a professora Beatriz iniciou apresentando a tarefa que havia escolhido[33] para trabalhar com o material. Quando questionada pela Tânia a respeito da pretensão que ela teria para com aquela tarefa, a professora Beatriz disse que seria para introduzir o conceito de fração. Em seguida, ela apresentou a tarefa conforme mostra o episódio a seguir:

Beatriz:	Sara fez um bolo e repartiu com seus quatro filhos: Diogo comeu três pedaços, Pedro quatro, Marta cinco e Jorge não comeu nenhum. Sabendo que o bolo foi dividido em vinte e quatro pedaços iguais, que parte foi consumida?
Tânia:	Ok, essa é uma ideia. Que relação de fração está aparecendo aí nessa questão?
[...]	
Débora:	É a relação parte-todo.
Tânia:	E é a relação parte-todo referente ao todo discreto ou todo contínuo?
Beatriz:	Eu sempre me confundo.
[...]	
Débora:	Ah essa é a relação parte-todo contínua.
[...]	
Beatriz:	Eu já tentei buscar na internet essa definição de todo discreto e todo contínuo, mas não consegui.

(17º Encontro, 23/08/2011)

[33] Em princípio, lembramos que a ideia era de escolher tarefas em materiais didáticos para trabalhar com o material manipulativo construído. O fato de a professora Beatriz ter elaborado uma tarefa, além de ter escolhido também outra é que deflagrou na produção de tarefas por outras professoras e que culminou nesta ação assim denominada.

Esse episódio teve como ponto de enfoque o conceito de todo discreto e todo contínuo. Embora em outros momentos já tivéssemos discutido a esse respeito, observamos, por meio da fala da professora Beatriz que isso ainda não estava claro para ela e também para o grupo de maneira geral. A professora Beatriz comporta-se aqui como um recém-chegado ao grupo no sentido de buscar entender o conceito de todo discreto e todo contínuo. O fato de ela ter assumido para o grupo que não conhecia o conceito de todo discreto e de todo contínuo legitimou a periferia da sua participação. Tânia então explicou a diferença entre o todo discreto e o todo contínuo tomando como exemplos: um bolo e um conjunto de canetas. Com relação ao bolo ela enfatizou a ideia de que poderíamos dividi-lo ao meio, em quartos, em quintos, mas que cada pedaço não deixaria de ser bolo. Já no caso do conjunto das canetas (ela tomou uma quantidade de canetas que era divisível por 4), ela explicou que poderíamos dividir em duas partes e quatro partes. Até poderíamos pensar em continuar a divisão, mas que a partir daí os fracionamentos não representariam mais o objeto, ou seja, não seriam mais canetas. Com relação a isso, a professora Débora conclui:

Débora: Então no todo discreto só se pode dividir pelo múltiplo de elementos do conjunto.

(17º Encontro, 23/08/2011)

Com essa fala, a professora Débora evidencia uma reificação a respeito do conceito de todo discreto: quando o todo referencial é discreto significa que estamos lidando com um conjunto para o qual a quantificação está associada à enumeração de seus elementos. Falaremos um pouco mais a respeito de todo discreto e todo contínuo no item a seguir, quando tratamos das aprendizagens ocorridas a respeito do conhecimento do aluno e do seu processo de aprendizagem.

Dando continuidade, a professora Beatriz apresentou uma segunda tarefa juntamente com um roteiro (Figura 11), que ela elaborou para trabalhar o conceito de frações utilizando o material manipulativo produzido pela comunidade.

Figura 11 - Tarefa elaborada pela professora Beatriz

PASSO A PASSO

ATIVIDADE - FRAÇÕES

1º)Reúna os alunos em grupos.

2º) Cada grupo deverá montar o seu material, três tiras ou três discos de mesmo tamanho para cada integrante.

3º)Após ler atentamente o problema pedir aos alunos que façam a representação das pizzas no material entregue.

4º)Num primeiro momento deixar que os grupos encontrem estratégias para resolver sozinhos as questões dadas no problema.

5º)Sempre que possível e necessário fazer orientações e intervenções que auxiliem na resolução do problema.

6º)Incentivar os alunos para que façam a divisão da pizza de maneira diferente e para que formule novas questões .

"Paulo e Mariana foram a um restaurante e pediram duas pizzas de mesmo tamanho: uma de quatro queijos que foi cortada em quatro pedaços iguais e outra de atum que foi cortada em oito pedaços iguais. Paulo comeu 2 pedaços da pizza de quatro queijos e 2 pedaços da pizza de atum, Mariana comeu 5 pedaços da pizza de atum e um pedaço da de quatro queijos. Com base nas informações dadas, resolva as questões dadas a seguir:

a) Quem comeu mais pizza?
b) Que fração representa o que sobrou da pizza de quatro queijos?
c) Que fração representa o que sobrou da pizza de atum?
d) Sobrou mais pizza de atum ou de quatro queijos?
e) Paulo comeu dois pedaços de cada pizza, isso quer dizer que ele comeu a mesma quantidade de cada pizza?
f) Qual o total de pizza consumida?"

Fonte: o próprio autor

Depois da apresentação da professora Beatriz, Tânia perguntou-nos o que poderíamos explorar com aquela tarefa. As professoras Beatriz e Débora responderam:

Beatriz: Trabalhar com aquele material.
Débora: Operação e simplificação.

(17º Encontro, 23/08/2011)

Diante disso, decidimos resolver aquela tarefa no grupo, tendo como apoio o material manipulativo construído, especificamente, o material formado por figuras circulares feitas de papel cartolina. Observamos que o desenvolvimento dessa tarefa foi bastante importante no sentido de possibilitar às professoras uma reflexão a respeito: das hipóteses que os alunos poderiam levantar, dos possíveis obstáculos que eles poderiam enfrentar, da forma com a qual o material utilizado auxiliaria na aprendizagem do conceito de fração e da potencialidade da tarefa, ou seja, quais ideias em se tratando do conceito de fração poderiam ser exploradas. Consideramos que tal reflexão pode contribuir para que o professor possa selecionar ou elaborar tarefas, optando por uma linguagem que seja acessível e que desafie adequadamente os alunos. Além disso, esse momento em que o grupo esteve desenvolvendo a tarefa da professora Beatriz representou uma valorização do engajamento dela nesse empreendimento, em particular, nessa ação, porque mostrou a sua contribuição para a construção de um repertório compartilhado.

Tânia: O que vocês acham, essa tarefa é algo que dá para experimentar?
Cláudia: Ah, essa aqui eu vou fazer com meus alunos!

(17º Encontro, 23/08/2011)

Além da professora Cláudia, as professoras Débora e Ana e a própria professora Beatriz decidiram aplicar essa tarefa que ficou conhecida como "tarefa das pizzas" em suas salas de aula. A "tarefa das pizzas" passou a ser um dos elementos que constituíram o repertório compartilhado da comunidade *Cop-PAEM*. Para Wenger (1998), o repertório compartilhado de uma prática combina diferentes elementos, como: "rotinas, palavras, ferramentas, maneiras de fazer, histórias, gestos, símbolos, gêneros, ações, ou conceitos" [34] que permitem se tornar um recurso para a negociação de significado. Nesse sentido, consideramos que a "tarefa das pizzas", que consistiu em uma ferramenta para o uso do material manipulativo construído, tornou-se um ponto de enfoque sobre o qual se organizou um processo de negociação de significado a respeito de maneiras de fazer (ensino de frações), símbolos (utilizados no ensino de frações) e conceitos (a respeito de frações).

Destacamos que os elementos que constituem o repertório compartilhado têm interpretações bem definidas, mas que ao mesmo tempo são vistos como recursos, admitindo-se a sua transformação, de modo a continuarem úteis para responder a novas situações.

[34] "[...] routines, words, tools, ways of doing things, stories, gestures, symbols, genres, actions, or concepts [...]". (WENGER, 1998, p. 83)

> O fato de que as ações e os artefatos têm histórias reconhecíveis de interpretação não é exclusivamente, ou mesmo principalmente, uma restrição sobre os significados possíveis, mas também um recurso a ser usado na produção de novos significados.[35] (WENGER, 1998, p. 83, tradução nossa).

É esse caráter de ambiguidade que se torna "uma condição de negociabilidade e, portanto, uma condição para a própria possibilidade de significado" [36] (WENGER, 1998, p. 83, tradução nossa). Isso é o que possibilita aos membros da comunidade sentir que contribuem para construção do repertório compartilhado, no sentido de que, com a sua participação, podem manter ou transformar o que existe. Com relação a isso, o desenvolvimento da "tarefa das pizzas" possibilitou que a comunidade se conscientizasse que deveria aprofundar seus estudos a respeito do conceito de frações para que essa tarefa pudesse ser entendida em toda sua extensão e as professoras tivessem mais segurança, na sua aplicação, em sala de aula. Essa busca em aprofundar os estudos a respeito do conceito de fração caracterizou a Ação 4 – E2: Estudos de artigos relacionados com o conceito de fração.

4.2.4 Aprendizagens Ocorridas na Ação 4 – E2

O desenvolvimento da Ação 4 – E2 permeou toda a trajetória da comunidade Cop- PAEM durante o período em que estivemos realizando nossa pesquisa. No entanto, focalizamos um desses encontros que nos forneceu elementos para nossa análise. O encontro a que nos referimos aconteceu no dia 20/09/2011 (19º Encontro) e se tratou do estudo do artigo: *Uma nova visão sobre o ensino e a aprendizagem de números racionais* de Lourdes de La Rosa Onuchic e Luciene Souto Botta que trata, dentre outras coisas, das diferentes "personalidades" do número racional, que chamamos de subconstrutos. Nesse encontro, cada um dos membros da comunidade leu um trecho do artigo para os demais e então, diante de cada um desses trechos, abríamos espaço para comentários e discussões. Em um desses momentos, a professora Débora, que estava fazendo a leitura, repetiu uma das frases que havia lido no artigo: "O ensino deveria ser mais orientado para o significado do que para o símbolo". Diante disso, Tânia fez um questionamento para o grupo:

---

[35] "The fact that actions and artifacts have recognizable histories of interpretation is not exclusively, or even primarily, a constraint on possible meanings, but also a resource to be used in the production of new meanings." (WENGER, 1998, p. 83)

[36] "[...] a condition of negotiability and thus a condition for the very possibility of meaning." (WENGER, 1998, p. 83).

Tânia: Quando vocês vão para aula ensinar frações, qual é o ponto de partida?
[...]
Beatriz: No caso da forminha de doce, por exemplo. Eu entrego a forminha para eles e vou falando para eles dividirem em duas partes, e vou perguntando: cada parte está representando o quê?
Tânia: Certo. Nessa experiência, o ensino está mais voltado para o significado ou para o símbolo?
Beatriz: Para o significado!

(19º Encontro, 20/09/2011)

Observamos que, nesse episódio, as professoras reafirmaram o que já havia sido reificado no desenvolvimento da Ação 1 – E2, a saber: o ensino de frações deve estar mais voltado para o significado do que para o símbolo. Nesse momento, o processo de negociação de significado é organizado em torno desse elemento reificado, mas no sentido de as professoras olharem para suas ações em sala de aula e avaliarem se estas estavam mais voltadas para o significado do que para o símbolo. Nesse sentido, Wenger (1998) trata do processo de reificação como o:

> [...] processo de dar forma a nossa experiência produzindo objetos que congelam esta experiência em uma "coisa". Com isso criamos pontos de enfoque em torno dos quais se organiza a negociação de significado. [...] E é dada uma forma a certa compreensão que, então, se converte em um foco da negociação de significado [...].[37] (WENGER, 1998, p. 58-59, tradução nossa).

O episódio, a seguir, descreve esse processo de negociação de significado:

Débora: O significado seria o prático?
Tânia: O que é significado? O que é prático, Débora?
Débora: Quando tem algo manipulável?
Tânia: Precisa ter algo manipulável?
Débora: Mas, no caso da fração, não precisaria?
[...]
Débora: Você, Márcio, que já dá aula no ensino superior, você acha que não?
Márcio: Eu defendo que pode ser feito, auxilia, mas pode não depender extremamente disso.
Tânia: A minha questão é: só o manipulável pode produzir significado sobre as frações ou será que a gente tem alguma coisa que não precisaria de material?
[...]
Débora: Alguma coisa significativa?

[37] "[...] process of give form to our experience by producing objects that congeal this experience into thingness". In so doing we create points of focus around which the negotiation of meaning becomes organized. "[...] A certain understand is give form then becomes a focus for the negotiations of meaning [...]." (WENGER, 1998, p. 58-59)

Tânia: O que é uma situação significativa?
Débora: Uma situação problema do dia-a-dia, do cotidiano dele (aluno), da realidade dele.
Tânia: E o que é ser da realidade dele? Para ser da realidade dele tem que estar onde?
Débora: Acessível a ele.
Tânia: E para ser acessível a ele tem que ser o quê?
Débora: Pode se falar de alguma coisa do meio ambiente, de consumo de energia, de consumo de água?
Tânia: Pode ser qualquer situação, desde que o aluno seja capaz de entender. [...] Precisa ser algo que o sujeito seja capaz de imaginar.

(19º Encontro, 20/09/2011)

Nesse episódio, foi possível identificar negociação de significados entre Tânia, a professora Débora e eu com relação à ideia do ensino de frações estar mais voltado para o significado do que para o símbolo. Em princípio, a professora Débora sugere que ter o ensino voltado para o significado implica em trabalhar com material manipulativo. Na posição de membros experientes, Tânia e eu a questionamos se o material manipulativo, somente, caracterizaria o ensino de frações como significativo. Com isso, a discussão ganha uma nova direção: a professora Débora coloca que o ensino para ser significativo deve tratar de algo ligado à realidade do aluno. Tânia completa, dizendo que essa realidade trata-se daquela que o aluno pode entender. Essa negociação permitiu a reificação de que a matemática que vale a pena ser ensinada e aprendida é a que promove uma aprendizagem com significado, que faz sentido para os alunos. Nesse sentido, Freudenthal (apud LOPES, 2008. p. 11), afirma que:

> A matemática é uma atividade humana, surge com a materialização da realidade, logo a aprendizagem matemática deve originar-se dessa realidade, isso não significa mantê-la conectada apenas aos fenômenos do mundo real, senão também ao realizável, imaginável ou razoável para os alunos, desta perspectiva a componente cultura tem que ser levada em conta como contexto.

A participação da professora Débora, com seus questionamentos, é intensa. Ela se mostra envolvida com a negociação e, dessa forma, legitima a periferia de sua participação, colocando-a em uma trajetória de entrada com a perspectiva de se tornar uma participante plena (WENGER, 1998). Isso é evidenciado por seu registro no caderno (Figura 12).

Figura 12 - Registro feito pela professora Débora, no caderno, referente ao 26º Encontro (12/11/2011)

Já aprendi que precisamos ensi-
nar com detalhes, pois o belo da
da matemática está na riqueza dos
detalhes, nada mais rico do que con
seguir mostrar para a criança e para
o adolescente, por exemplo: que a fra
ção tem muitos significados, leituras
diferentes, cálculos diferentes, tem em
probabilidade diferente. Em todos es-
ses anos de sala de aula, não me
lembro de ter ensinado fração mencio
nando o "todo discreto" e "todo contí
nuo". É fração está pronto e acabado.

Fonte: o próprio autor

O registro feito pela professora Débora revela uma reflexão a respeito de como ensinar frações. Representa como ela concebe a aprendizagem: uma oportunidade de proporcionar aos alunos compreender o conceito de fração. Esse depoimento é uma reificação que culminou a partir do processo de negociação de significado organizado sobre a ideia de que o ensino deve estar mais voltado para o significado do que para o símbolo. Com relação a isso, a professora Beatriz apresenta também uma declaração em seu caderno (Figura 13).

Figura 13 - Registro feito pela professora Beatriz, no caderno, referente ao 27º Encontro (22/11/2011)

Acho que avançamos bastante com a produção do nosso material, pois observando os alunos manusear o material produzido em sala e resolver as questões propostas pude ver que eles conseguiram de um modo geral compreender o significado da fração , estabelecer comparações e realizar algumas operações , mostrando interesse e realizando todas as tarefas propostas com uma certa satisfação.

O trabalho com material concreto e a formulação de questões significativas facilita a compreensão e dá sentido ao assunto estudado, para o ano que vem quero me organizar no sentido de pegar o maior número possível de turmas com a mesma série, e dessa forma poder preparar melhor as minhas aulas.

Fonte: o próprio autor

O depoimento da professora Beatriz evidencia sua aprendizagem em termos de buscar possibilidades, no sentido de superar ou pelo menos minimizar os obstáculos enfrentados no ensino e na aprendizagem do conceito de frações. Nesse trecho, podemos sublinhar duas possibilidades apontadas pela professora Beatriz: a atenção à formulação de questões que conduzam à compreensão do conceito e o trabalho com material manipulativo. A professora Débora apresenta uma concordância com a professora Beatriz quando dá a seguinte declaração:

Débora: O material manipulativo faz toda a diferença porque foi por meio desse material que eles (*os alunos*) puderam ir ao quadro explicar.

(36º Encontro, 24/04/2012)

4.2.5 Aprendizagens Ocorridas na Ação 5 – E2

O desenvolvimento da Ação 5 – E2: Análise da aplicação, em sala, das tarefas elaboradas ocorreu em mais de um encontro. Foram dois os momentos: o da primeira aplicação das tarefas e o da segunda aplicação. Apresentam-se, a seguir, alguns episódios desses encontros que desvelaram elementos que se constituíram objetos de análise.

Na primeira aplicação, as professoras construíram o material manipulativo (jogo de fitas e círculos) com seus alunos e desenvolveram a tarefa “Fração!!! Para que te quero?” (Apêndice 2), utilizando os dois materiais citados anteriormente e a “tarefa das pizzas” utilizando o jogo de círculos. O episódio, a seguir, descreve comentários das professoras depois de terem aplicado as tarefas pela primeira vez:

Tânia: Até agora nós já estamos na segunda tarefa que estamos aplicando, então teríamos que ter um momento para olhar essas tarefas.

[...]

Débora: Eu não consegui dar tudo. [...] Em minha opinião, com meus alunos, na faixa de idade que eu estou: não foi possível trabalhar com fita e círculo.

[...]

Débora: Tem que ser momentos separados. Fazer todo esse roteiro (*Tarefa Fração!!! Para que te quero?*) só com a fita.

[...]

Débora: Então eu acho que a gente tem que montar um roteiro desses (*Tarefa Fração!!! Para que te quero?*) só para fita e um roteiro desses só para círculo e depois em outro momento fazemos as comparações.

Tânia: Uma coisa que a gente pode discutir: precisa mesmo ter os dois? Ou só com um dos materiais damos conta de trabalhar?

(25º Encontro, 08/11/2011)

Com relação ao diálogo acima, é possível observar que o engajamento da professora Débora, nessa ação, com seus depoimentos, coloca-a na posição de membro experiente no que se refere à aplicação das tarefas. Isso é evidenciado pela proposta que ela apresenta em termos da mudança na aplicação da tarefa *Fração!!! Para que te quero?,* o que revela uma aprendizagem dessa professora no que diz respeito ao conhecimento do processo instrucional que compreende, entre outros aspectos, as formas de organização de trabalho com os alunos. As professoras que haviam também aplicado a tarefa, concordando com a professora Débora, legitimaram sua participação e isso fez com que ela tomasse a palavra mais uma vez chamando atenção para outro obstáculo enfrentado por ela durante o desenvolvimento da tarefa *"Fração!!! Para que te quero?"*, em sua sala de aula.

Débora: O experimento[38] 3 como eu os deixei fazendo, quando eu passei nos grupos eu percebi que eles tinham feito bastante coisa errada. Então aquele grupo que deu tempo de retomar, fazer passo a passo, a gente acertou. Mas aquele que não deu tempo de eu passar ficou sem ver. Então, por isso, que seria bom ter, Tânia, um material grande para depois fazer as correções.

Tânia: Então vamos providenciar.

Débora: Então, porque se eu tivesse um material grande eu poderia ter retomado com todos e dessa forma todos poderiam ter corrigido.

(25º Encontro, 08/11/2011)

Nesse diálogo, é possível observar a validação da proposta da professora Débora por parte da Tânia. Os demais membros da comunidade também concordaram com a sua ideia, conforme consta em nossos registros no diário de campo. Nesse sentido, percebemos que a professora Débora contribuiu para a construção do repertório compartilhado da *Cop-PAEM*, pois, para a segunda aplicação das tarefas, as professoras contavam com o auxílio do material feito em tamanho maior o que possibilitou com que essas professoras dinamizassem sua aula de forma diferente. Na segunda aplicação da tarefa, eu tive a oportunidade de acompanhar a aula da professora Débora em três turmas de 6º Ano e observei que, além do trabalho em grupo, que ela inicialmente sugeriu aos alunos, depois que eles desenvolveram a tarefa, ela os convidou para irem ao quadro apresentar suas formas de resolução. Quando algum grupo discordava do que estava sendo apresentado, a professora estimulava esses alunos a irem até o quadro e mostrarem a forma que haviam feito a tarefa. Diante do que esses alunos apresentavam no quadro, a professora Débora fazia intervenções,

---

[38] O experimento 3 corresponde a uma das quatro partes que formam a tarefa *Fração!!! Para que te quero?*.

questionando-os para que os demais compreendessem a resolução da tarefa. Eu pude constatar que a professora Débora, dessa forma, estava colocando o ensino de frações como um processo de negociação de significado.

Além da professora Débora, as professoras Ana e Beatriz também, em sua segunda aplicação, procederam da mesma forma. Podemos concluir que a reflexão feita nas reuniões da comunidade, a partir da primeira aplicação, proporcionou aprendizagens para essas professoras no que diz respeito às formas de organização do trabalho com os alunos, assim como a avaliação de aprendizagens deles e as suas também.

Débora: A participação nesse grupo tem me proporcionado uma reflexão de como trabalhar, uma reflexão de mudança, uma tentativa para que a gente mude nossas práticas.

[...]

Beatriz: A participação nesse grupo tem me feito pensar na minha prática em sala de aula, de certo modo eu tenho me obrigado mais a estudar, de repente, eu tenho olhado os meus alunos com outros olhos.

(25º Encontro, 08/11/2011)

No quadro a seguir, apresentamos algumas reificações que compuseram o repertório compartilhado da *Cop-PAEM*, relativas ao empreendimento *Estudo a respeito do conceito de fração*:

Quadro 4 – Frases que evidenciaram reificações durante processos de negociação de significados da *Cop-PAEM* relativas ao empreendimento *Estudo a respeito do conceito de fração*

Indícios de Aprendizagem	**O que foi reificado**	**Frases que evidenciam as reificações**
Conhecimento de Matemática a respeito do conceito de números racionais e frações	*Conceito de Fração:* *Fração é uma forma de representação de números racionais*	*[...] Então qualquer fração formada por números inteiros é um número racional.* (Débora, 14º Encontro, 21/06/2011)
	Conceito de Fração *Subconstruto Parte-Todo* *Fração é uma representação de uma ou mais partes de um todo que foi dividido em partes de igual tamanho, tomando-se como referencial uma dessas partes.*	*Fração é uma parte considerada de um todo.* (Laís, 14º Encontro, 21/06/2011)
		Fração é um número que exprime uma ou mais partes iguais em que foi dividida uma unidade ou um inteiro. (Beatriz, 14º Encontro, 21/06/2011)
		Fração é um número que exprime uma ou várias partes iguais de um inteiro ou de vários inteiros.

		(Cláudia, 14º Encontro, 21/06/2011)
	Conceito de Fração Subconstruto Quociente Fração também representa um quociente entre dois números inteiros: números decimais são números que se caracterizam como resultado da divisão do numerador pelo denominador	*Fração é o quociente entre dois números inteiros.* (Cláudia, 14º Encontro, 21/06/2011, Registro feito no caderno)
		Para eu comparar frações, eu acho mais fácil colocar na forma decimal. (Débora, 7º Encontro, 26/04/2011)
	Conceito de Frações Equivalentes: frações equivalentes são frações que, mesmo escritas de formas diferentes, representam o mesmo número racional.	*50% e 2/4 são diferentes representações para um mesmo número.* (Beatriz, 7º Encontro, 26/04/2011)
		Frações que representam a mesma quantidade são frações equivalentes. (Laís, 7º Encontro, 26/04/2011)
		É possível comparar frações colocando todas com o mesmo denominador. (Laís, 7º Encontro, 26/04/2011)
	O conceito de frações envolve diferentes ideias (subconstrutos), nomeadamente: relação parte-todo, razão, quociente, operador.	*No ensino de frações devemos considerar:* • *Fazer com que os alunos compreendam os conceitos; ensinando o significado; Destacar: relação parte-todo; razão; quociente; operador.* (Débora, 15º Encontro, 09/08/2011)
	Conceito de todo discreto: Com relação ao todo discreto há um limite pra o fracionamento	*[...] no todo discreto só se pode dividir pelo múltiplo da quantidade de elementos do conjunto.* (Débora, 23/08/2011)
	Conceito de fração unitária	*Essas frações são unitárias porque os numeradores são iguais a 1.* (Débora, 23/08/2011)
Conhecimento do aluno e do seu processo de aprendizagem	*A compreensão das operações de adição e subtração de frações heterogêneas e da multiplicação e da divisão de frações são obstáculos enfrentados pelos alunos no que diz respeito a esse conceito.*	*O problema no ensino de frações começa nas operações quando os denominadores são diferentes.* (Débora, 14º Encontro, 21/06/2011)
		A gente fala que tem calcular o mínimo múltiplo comum e eles falam: O que é isso professora? (Eliane, 14º Encontro, 21/06/2011)
		[...] quando vai multiplicar

		fração e dividir fração: eles querem fazer tudo igual! (Débora, 14º Encontro, 21/06/2011)
		Eles têm dificuldade de calcular também três quartos de um quilo, dois quintos de uma hora. (Beatriz, 14º Encontro, 21/06/2011).
	O ensino de frações deve estar mais voltado para o significado do que para o símbolo. Deve levar em contar a complexidade que esse conceito envolve.	*O ensino de frações não se dá com definições prontas e pseudo-problemas relacionados com pizzas e barras de chocolate. Deve ter atenção para a complexidade que o conceito envolve.* (Ana, 14º Encontro, 21/06/2011)
		Sentimos a necessidade de ensinar o conteúdo de forma mais significativa, devemos da prioridade à compreensão e não a resolução mecânica de exercícios em que os alunos decoram regras e conceitos e passada a avaliação se esquecem de tudo. (Beatriz, 20º Encontro, 27/09/2011, Registro feito no caderno)
		Já aprendi que precisamos ensinar com detalhes [...] a fração tem muitos significados, leituras diferentes, cálculos diferentes, tem empregabilidade diferente. (Débora, 26º Encontro, 12/11/2011, Registro feito no caderno)
	O ensino de frações deve levar em conta os dois tipos de todos referenciais: o todo contínuo e o todo discreto.	*Em todos esses anos de sala de aula, não me lembro de ter ensinado fração mencionando o "o todo discreto" e "todo contínuo". É fração e está pronto e acabado.* (Débora, 26º Encontro, 12/11/2011, Registro feito no caderno).
	O uso de material manipulativo no ensino de frações possibilita ao aluno a compreensão do conceito.	*[...] observando os alunos manusearem o material produzido em sala de aula e resolverem as questões propostas pude ver que eles conseguiram de um modo geral compreender o significado da fração, estabelecer comparações e realizar*

		algumas operações [...]. (Beatriz, 27º Encontro, 22/11/2011, Registro feito no caderno)
		O material manipulativo faz toda a diferença. Porque foi por meio desse material manipulativo que eles (os alunos) puderam ir ao quadro explicar. (Débora, 36º Encontro, 24/04/2012)
	A dinâmica estabelecida com o trabalho com o apoio do material manipulativo favoreceu um entrosamento maior.	*Eu acho que a relação professor-aluno também mudou muito porque parece que eles têm mais confiança neles e em nós (professores).* (Débora, 36º Encontro, 24/02/201)
Conhecimento do processo instrucional	*A formação continuada deve contemplar a discussão entre os professores no sentido de refletir a respeito de sua prática pedagógica. Deve propiciar ao professor incentivo à pesquisa*	*É interessante observar que colegas de outras escolas compartilham das mesmas dificuldades e angústias no que se refere ao processo de ensino e aprendizagem de nossas crianças, sabemos que da forma como tudo está sendo encaminhado não tem apresentado os resultados esperados [...].* (Beatriz, 4º Encontro, 05/04/2011, Registro feito no caderno)
		Estes encontros que estamos fazendo tem nos dado a oportunidade de sairmos um pouco da rotina, de estudar e de enxergar as coisas com outros olhos. Será que este não seria o caminho? O Estado não deveria aos seus professores uma formação continuada da forma como temos feito em nossos encontros? (Beatriz, 4º Encontro, 05/04/2011, Registro feito no caderno)
		[...] graças a esses encontros tenho tido a oportunidade de ler um pouco mais, trocar ideias com pessoas que compartilham das mesmas angústias que eu [...]. Seria realmente muito bom se a SEED promovesse uma capacitação nesses moldes

		para todos os professores da rede. (Beatriz, 13ºEncontro,30/05/2011, Registro feito no caderno)
		[...] quem não pesquisa não tem nada para ensinar. [...] precisamos ser também professor autônomo e autor. (Débora, 26º Encontro, 12/11/2011, Registro feito no caderno)
		Neste "curso" juntamente com a orientação da Tânia estamos pesquisando, lendo mais e produzindo o nosso próprio material. E estamos fazendo isso, sem que isso seja um fardo. (Débora, 26º Encontro, 12/11/2011, Registro feito no caderno)
		Este curso para mim é de extrema importância, pois além de tratar de conteúdos que para nós professores de Matemática são difíceis fazer com que os alunos entendam, como por exemplo, "frações", têm também a questão do grupo que é interativo e assim o trabalho fica cada vez mais motivador. (Fernanda, 30º Encontro, 13/03/2012, Registro feito no caderno)
		A participação nesse grupo tem me proporcionado uma reflexão de como trabalhar, uma reflexão de mudança, uma tentativa para que a gente mude nossas práticas. (Débora, 25º Encontro, 08/11/2011)
		A participação nesse grupo tem me feito pensar na minha prática em sala de aula, de certo modo eu tenho me obrigado mais a estudar, de repente eu tenho olhado os meus alunos com outros olhos. (Beatriz, 25º Encontro, 08/11/2011)
		Eu descobri que os mesmos medos, as ansiedades, as dificuldades que eu tenho, os

		outros também têm. E uma coisa que acho mais importante é que a gente tem que sempre continuar aprendendo. (Cláudia, 25º Encontro, 08/11/2011)

CAPÍTULO 5
CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na busca de responder a nossa questão de investigação: **"Que elementos do contexto de uma Comunidade de Prática de professores de Matemática permitem aprendizagens aos seus membros ao lidarem com empreendimentos na busca de aprender e ensinar frações?",** no Capítulo 4, descrevemos a trajetória da *Cop-PAEM* e a articulação do empreendimento *Estudo a respeito do conceito de fração*. Ao analisarmos as ações que constituíram esse empreendimento, elencamos aprendizagens dos professores, membros dessa comunidade, no que se refere aos conhecimentos profissionais de professores de Matemática. A partir disso, foi possível identificar alguns elementos da prática da *Cop-PAEM*, que permitiram aprendizagens aos seus membros, o que apresentamos, a seguir, na seção 5.1. Para encerrar, apontamos algumas implicações desse trabalho de pesquisa para a formação continuada de professores de Matemática.

5.1 ELEMENTOS CONSTITUINTES DA PRÁTICA DA COP-PAEM QUE PERMITIRAM APRENDIZAGENS AOS SEUS MEMBROS

A partir da descrição e análise das informações realizadas no Capítulo 4, identificamos os seguintes elementos que permitiram aprendizagens aos seus membros: **a oportunidade de refletir/discutir a respeito da prática pedagógica; a oportunidade de compartilhar experiências; a oportunidade de produzir material manipulativo (oficina) explorando suas potencialidades; a oportunidade de elaborar e resolver tarefas associadas ao material manipulativo construído; a oportunidade de refletir sobre aplicação dessas tarefas em sala de aula; a oportunidade de desafios como,** por exemplo: **ter suas aulas audiogravadas ou videogravadas; a possibilidade de questionar e de ser questionado (compromisso com a justificação); a oportunidade de reflexão a respeito do processo de formação continuada**.

Na Ação 1 – E2: Levantamento de ideias a respeito do conceito de fração desencadeadas pela utilização de materiais didáticos e pela discussão de tarefas propostas pelas professoras para sala de aula, os membros da *Cop-PAEM* tiveram **oportunidade de compartilhar sua prática pedagógica** diante dos relatos de experiências a respeito do ensino de frações, discutindo sobre a dinamicidade das aulas e os obstáculos enfrentados pelo professor, no que se refere ao ensino e a aprendizagem do conceito de frações. Os registros feitos pelas professoras em seus cadernos evidenciaram o fortalecimento que elas sentiram, a partir dos depoimentos dos demais membros, a respeito dos enfrentamentos em relação a sua prática pedagógica em seu cotidiano profissional. No decorrer de nossa pesquisa, percebemos que compartilhar a prática pedagógica tornou-se parte da estrutura dos encontros e constituiu-se como elemento do repertório compartilhado dessa comunidade. Na medida em que o número de encontros foi aumentando, os membros da *Cop-PAEM* foram se sentido mais "à vontade" para: contar os fatos ocorridos em suas aulas, fazer questionamentos a respeito de conteúdos matemáticos ou a respeito do ensino desses conteúdos.

Houve um episódio que, logo no início do encontro (43º Encontro 26/06/2012), chamou-nos a atenção: o diálogo entre as professoras Fernanda e Beatriz. A professora Fernanda estava perguntando à professora Beatriz a respeito da relação entre a soma e o produto das raízes de uma equação do segundo grau e os coeficientes de tal equação. As professoras apresentaram as dúvidas que elas tinham sobre tal assunto ao investigador. Nesse momento, os demais membros da comunidade, percebendo nossa conversa, envolveram-se também na discussão. Questionando-as se conheciam o que resultava em tal relação, ou ainda, como poderíamos obter as relações de soma e produto das raízes da equação do segundo grau, consideramos pertinente demonstrar tais relações no quadro. A seguir, tomando uma equação genérica do segundo grau, foi explicado como poderíamos obter a relação entre os coeficientes daquela equação e a soma e o produto de suas raízes. Diante disso, a professora Fernanda comentou que aquilo era muito difícil para explicar para os seus alunos e que daquela forma eles não entenderiam. A partir desse comentário, intuímos que o obstáculo para entender o que havíamos apresentado até o momento era, sobretudo, da própria professora e então passamos a questionar os membros da comunidade a respeito de como poderíamos abordar aquilo com os alunos, o que poderia ser feito, de tal forma, que os levasse a compreender aquela relação. Situações como estas de abertura das professoras em fazer questionamentos em relação aos conteúdos matemáticos e a sua prática pedagógica mostram a relação de confiança criada entre os membros. Isso possibilitou a participação plena na prática dessa comunidade e só foi possível porque houve uma convivência entre os membros com certa periodicidade.

Apresentamos, a seguir, dois depoimentos dados pelas professoras Beatriz e Laís que evidenciam **a oportunidade de compartilhar experiências,** como um dos elementos que permitiram a aprendizagem delas.

Figura 14 - Registro feito pela professora Beatriz, no caderno, referente ao 10º Encontro (17/05/2011)

Quero ainda relatar um fato acontecido no encontro do dia 17/05,reunião realizada na biblioteca do colégio para facilitar o acesso aos livros didáticos, no final da reunião eu vi você ,Tânia, apresentando para a Laís as obras de Matemática que temos no colégio, nossa, me senti tão mal, onde já se viu, eu trabalhando aqui no colégio ainda não tinha conseguido parar e analisar tudo de bom que temos aqui.

No entanto nesse dia mesmo peguei emprestado o livro 'O DIABO DOS NÚMEROS',muito bom por sinal, e li em uma semana, durante a leitura desse livro me veio à cabeça que eu poderia indicá-lo aos meus alunos e para minha surpresa os 10 volumes do 'DIABO DOS NÚMEROS' e outros títulos relacionados à Matemática estão emprestados, orientei os alunos para que façam a leitura e um resumo que será exposto no final do trimestre para a sala toda .

Fonte: o próprio autor.

O depoimento dado pela professora Beatriz dá indícios de mudança em sua atitude em relação a: conhecer o acervo da biblioteca da escola, motivar-se para a leitura e, acima de tudo, sentir a necessidade de levar isso para seus alunos.

Laís: Conversar com vocês, ver a experiência de vocês, ter ido às salas e ver como é uma situação lá. [...] Isso tem contribuído muito para mim, tanto no lado pessoal porque estou amadurecendo mais, como na parte de meus estudos.
[...] Apesar de saber que a gente tem que valorizar o que o aluno faz, eu não via tantas possibilidades como estou vendo agora. O fato de considerar o que o aluno está fazendo e das possibilidades sobre isto. [...] Eu não sabia o quanto isso era rico!

(25º Encontro, 08/11/2011)

O depoimento da professora Laís relaciona-se com a sua participação na comunidade e em algumas aulas nas quais as professoras aplicaram as tarefas associadas ao conceito de fração. A professora Laís revela que a mudança da perspectiva que tinha de ensinar é devida a essa participação na comunidade. Enfatizamos isso relatando que, no período de nossa pesquisa, a professora Laís tomou a decisão em entrar para o programa de Mestrado. Atualmente a professora Laís já se encontra dentro da *Cop-PAEM* como pesquisadora.

Na Ação 2 – E2: Construção de material manipulativo para o ensino de frações. A produção do material para o ensino de frações (oficina) atendendo às necessidades que emergiram da Ação 1 – E2 deu aos membros da *Cop-PAEM* **a oportunidade de levantar**

questionamentos no que se referia à exploração das potencialidades desse material, conflitando com a ideia de algumas professoras que, em princípio, pensavam em material manipulativo apenas como uma maneira de dar uma “aula diferente”. Isso foi sublinhado com o comentário feito pela professora Débora, dizendo que os alunos poderiam aprender se houvesse uma sala ambiente, um laboratório de Matemática na escola. Com esse comentário, a professora Débora deixa transparecer uma crença de que para haver aprendizagem deve haver um lugar específico que conte com um conjunto de materiais manipulativos associados a vários conteúdos matemáticos. Ainda, segundo ela, para haver aprendizagem é necessário que os alunos estejam em silêncio. Diante desse comentário, a professora Ana discordou da professora Débora dizendo que era preciso saber diferenciar “barulho”, quando os alunos se encontravam trabalhando, e “barulho” como indisciplina. A professora Ana disse que tinha turmas nas quais os alunos conversavam bastante, mas que ainda assim ocorriam aprendizagens. Nós observamos, a partir daí, que a realização dessa oficina para a construção do material manipulativo, com espaço para as professoras discutirem suas ideias, permitiu a elas rever a sua concepção de uso de material manipulativo além de discutirem a respeito de seus diferentes pontos de vista no que se refere à aprendizagem.

No que se refere à Ação 3 – E2, os membros da *Cop-PAEM* tiveram a **oportunidade de elaborar e resolver tarefas** que oferecessem um contexto para uso do material manipulativo construído, possibilitando às professoras perceber sua capacidade de produção de material didático e autonomia na decisão de escolha de tarefas para trabalho em sala de aula, bem como na dinâmica para o seu desenvolvimento. No momento de resolução dessas tarefas, as professoras puderam partilhar as diferentes formas de resolução possibilitando a estruturação de estratégias e levando-as a ideia de valorizar a variedade de formas de resolução por parte de seus alunos para uma mesma tarefa, bem como as diferentes formas de registros feitos por eles. A reflexão a respeito dos objetivos traçados, da clareza dos enunciados e da exploração das potencialidades de uma determinada tarefa permitiu que ocorresse aprendizagem aos membros da *Cop-PAEM* no que diz respeito à reestruturação de tarefas. Observamos traços de mudanças em algumas professoras, isso pode ser constatado a partir de seus depoimentos e de aulas em que as professoras aplicaram as tarefas elaboradas. As tarefas elaboradas juntamente com o material manipulativo construído constituíram também parte do repertório compartilhado pela comunidade, pois eles se traduzem como recursos para o desenvolvimento da sua prática. Foram elementos em torno dos quais se organizou o processo de negociação de significado que resultou em reificações por meio da participação dos membros da comunidade e que, consequentemente, fez com que ocorressem aprendizagens.

A resolução das tarefas também propiciou questionamentos que mostraram a necessidade de aprofundar o estudo com relação ao conceito de frações (Ação 4 – E2), que envolveu momentos de leitura de artigos científicos.

Notamos que essa experiência vivenciada, na comunidade, de elaborar e de resolver tarefas e de estudar artigos deu aos professores da *Cop-PAEM* a **possibilidade de questionar e de ser questionado tendo em conta o compromisso com a justificação das falas**, o que consideramos ser importante no processo de formação continuada, no sentido de permitir aos professores situações que, esperamos, eles também possibilitem aos seus alunos. Esse fator foi evidenciado a partir dos depoimentos dessas professoras e também por minha própria constatação ao presenciar, por exemplo, a aula da professora Débora, descrita no Capítulo 4. A dinâmica estabelecida em sua aula mostrou que ela estava validando a dinâmica vivenciada na comunidade de prática *Cop-PAEM*. Com relação a isso, mencionamos a aplicação das tarefas, em que algumas professoras tiveram suas aulas audiogravadas ou videogravadas o que consideramos como um **desafio** para essas professoras, pois elas permitiram que essas gravações fossem apresentadas aos demais membros da comunidade com a intenção de fazermos uma reflexão a respeito dessa aplicação, nomeada de Ação 5 – E2. Essa reflexão culminou na reestruturação das tarefas e em alguns questionamentos a respeito da dinâmica da aula, o que possibilitou às professoras reconhecerem que, em sua carreira profissional, é necessário aprender constantemente.

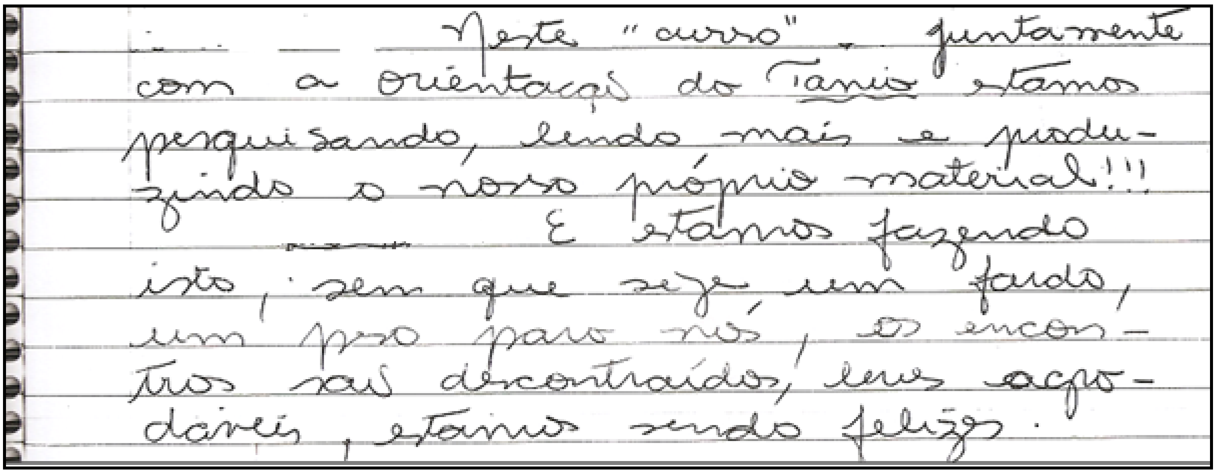
Apresentamos, a seguir, depoimentos que constatam a valorização das professoras no que diz respeito a sua participação na comunidade *Cop-PAEM*.

Figura 15 - Registro feito pela professora Beatriz, no caderno, referente ao 4º Encontro (05/04/2011)

> Cheguei à conclusão que com a correria do dia a dia tentamos fazer tanta coisa e acabamos andando em círculos e deixando de fazer muita coisa que seria fundamental para a nossa prática, graças esses encontros tenho tido a oportunidade de ler um pouco mais, trocar idéias com pessoas que compartilham das mesmas angustias que eu e a análise do livro didático foi de fundamental importância. Seria realmente muito bom se a SEED promovesse uma capacitação nesses moldes para todos os professores da rede.

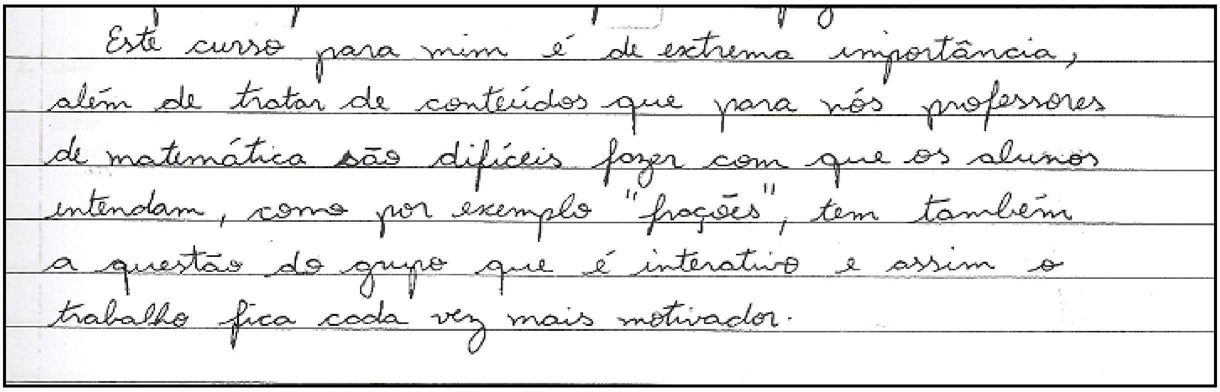
Fonte: o próprio autor.

Figura 16 - Registro feito pela professora Débora, no caderno, referente ao 26º Encontro (12/11/2011)


Neste "curso" juntamente
com a orientação do Tânio estamos
pesquisando, lendo mais e produ-
zindo o nosso próprio material!!!
E estamos fazendo
isto, sem que seja um fardo,
um peso para nós, os encon-
tros são descontraídos, leves agra-
dáveis, estamos sendo felizes.

Fonte: o próprio autor.

Figura 17 - Registro feito pela professora Fernanda, no caderno, referente ao 30º Encontro (13/03/2011)


Este curso para mim é de extrema importância,
além de tratar de conteúdos que para nós professores
de matemática são difíceis fazer com que os alunos
entendam, como por exemplo "frações", tem também
a questão do grupo que é interativo e assim o
trabalho fica cada vez mais motivador.

Fonte: o próprio autor.

Por esses depoimentos apresentados, consideramos que o engajamento na prática da *Cop-PAEM*, no desenvolvimento do empreendimento "Estudo a respeito do conceito de fração", teve como uma de suas consequências: **possibilitar que as professoras refletissem a respeito do seu processo de formação continuada**. As declarações feitas pelas professoras evidenciam o tipo de formação continuada almejado, nomeadamente, um trabalho desenvolvido a partir da articulação de empreendimentos pela comunidade e que dê condições para a valorização de experiências, repertórios e conhecimentos compartilhados, negociados e legitimados nessa comunidade. Com relação a isso e diante de tudo que apresentamos, defendemos que as comunidades de prática constituem um contexto que pode oportunizar esse tipo de formação.

5.2 Implicações da Pesquisa para a Formação de Professores que Ensinam Matemática

Conforme mostramos, o trabalho desenvolvido com o grupo de professores investigado no contexto de uma comunidade de prática permitiu aprendizagens aos membros. O processo de formação continuada de professores que ocorreu na *Cop-PAEM* partiu da prática pedagógica dos professores envolvidos e das necessidades que emergiram no decorrer do processo. Isso delegou aos membros da comunidade responsabilidade com relação a sua própria formação, diferentemente do que é proposto pelos programas vigentes de formação organizados na modalidade de curso.

Os formadores não impuseram à comunidade algo pronto, e sim negociaram com os membros dessa comunidade empreendimentos e, por isso, foi preciso saber lidar com os improvisos surgidos no sentido de desenvolver uma formação específica aos membros da *Cop-PAEM*. Em outras palavras, os professores e os formadores se encontraram em constante pesquisa e estudo.

Outro diferencial do trabalho desenvolvido na *Cop-PAEM* foi a adequação da carga horária. Em encontros semanais, com duas horas de duração, foi possível aos membros da comunidade compartilhar sua prática pedagógica, construir material manipulativo (oficina), elaborar e resolver tarefas, estudar artigos e refletir a respeito da aplicação das tarefas. Entendemos, dessa forma, que o processo de formação continuada deve contemplar situações que possibilitem o desenvolvimento de ações como essas, entre outras, tendo em conta a compatibilidade com a carga horária de trabalho do professor.

Outro fator a ser considerado foi o interesse das professoras em saber do nosso projeto de pesquisa e também de se informarem a respeito do programa de Mestrado e Doutorado. Talvez esse interesse se deva ao fato de, muitas vezes, termos feito comentários a respeito de eventos como EPREM e EBRAPEM, ou ainda de reuniões ocorridas com nossa orientadora e de outras situações do nosso cotidiano de pesquisadores. Entendemos que a relação de amizade estabelecida entre os pesquisadores e as professoras pode ter dado a liberdade de elas nos fazerem questionamentos dessa natureza e talvez isso possa mesmo tê-las estimulado a pensar na possibilidade de fazer pós-graduação, nesses níveis supracitados.

No presente estudo, apresentamos o contexto e os elementos constituintes desse contexto que permitiram aprendizagens às professoras envolvidas nesse processo de formação. Assim, julgamos imperativo que os responsáveis por políticas públicas levem em consideração essa perspectiva a respeito do processo de aprendizagem apresentada nessa pesquisa.

REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Tradução de: Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 1977.

BELINE, W. **Formação de professores de matemática em comunidades de prática:** um estudo sobre identidades. 2012. 312 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2012.

BEHR, M. J. et al. Rational-number concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Org.). **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto, 1994.

BOTTA, L.; ONUCHIC, L. R. Uma nova visão sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, n. 3, p. 5, 1997.

CALDEIRA, J. S. **Um estudo sobre o pensamento algébrico em uma comunidade de prática de formação de professores de matemática**. 2010. 127 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2010.

CAMPOS, T.; MAGINA, S. A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 21, n. 31, 2008. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema>. Acesso em: 6 fev. 2012.

CYRINO, M. C. C. T. Comunidades de prática de professores como espaço de investigação sobre a formação de professores de Matemática. In: BATISTA, I. L.; SALVI, R. F. **Pós-graduação em ensino de ciências e educação matemática**: perfil de pesquisas. Londrina: EDUEL, 2009. p. 95-110.

CYRINO, M. C. C. T. **Educação matemática de professores que ensinam matemática**. Projeto de Pesquisa. Universidade Estadual de Londrina, 2010.

COSTA, N. M. L. Formação continuada de professores: uma experiência de trabalho colaborativo com matemática e tecnologia. In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Org.). **A formação do professor que ensina matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 167-196.

FIORENTINI, D. Quando acadêmicos da universidade e professores da escola básica constituem uma comunidade de prática reflexiva e investigativa. In: FIORENTINI, D.; GRANDO, R. C.; MISKULIN, R. G. (Org.). **Práticas de formação e de pesquisa de professores que ensinam matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2009. p. 233-255.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

GRAVEN, M. Teacher learning as changing meaning, practice, community, identity and confidence: the Story of Ivan. **For the Learning of Mathematics,** Canadá, v. 23, n. 2, p. 25-33, 2003.

GRAVEN, M.; LERMAN, S. Book review: WENGER, E. Communities os practice: learning, meaning and identity. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1998. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Netherlands, v. 6, n. 2, p. 185-194, jun. 2003.

GRASSESCHI, M. C. C.; CAPUTCHO, M.; SILVA, A. A. B. dos S. **PROMAT**: projeto oficina de matemática. São Paulo: FTD, 1999.

IMBERNÓN, F. **Formação docente e profissional:** formar-se para a mudança e a incerteza. São Paulo: Cortez, 2001.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática realidade**. 6. ed. São Paulo: FTD, 2009.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations os rational numbers. In: LESH, R. (Org.). **Number and measurement:** papers from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC, 1976. p. 101-144.

KRAINER, K. Teams, communities & networks. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Netherlands, v. 6, n. 2, p. 93-105, jun. 2003.

LAVE, J.; WENGER, E. **Situated learning**: legimate peripheral participation. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding**: essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 2. ed. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 2005.

______. **Teaching fractions and ratios for understanding –** essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3. ed. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers Mahwah, 2012.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional reasoning. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Org.). **Number concepts and operations um the middle grades**. Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers Mathematics, 1988. p. 93-118.

LLINARES, S. Participation and reification in learning to teach: the role of knowledge and beliefs. In: LEDER, G. C.; PEHKONEN, E.; TÖRNER, G. (Ed.). **Beliefs:** a hidden variable in mathematics education? Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. v. 31, p. 195-209.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 21, n. 31, 2008. Disponível em <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema>. Acesso em: 6 fev. 2012.

MANRIQUE, A. L.; ANDRÉ, M. E. D. A. Relações com saberes na formação de professores. In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. **A formação do professor que ensina matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 133-147.

MORIEL JUNIOR, J. G. **Propostas de formação inicial de professores de matemática**: um estudo de projetos político-pedagógicos de cursos no Estado do Paraná. 2009. 162 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, 2009.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 1991.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. As diferentes ‘personalidades’ do número racional trabalhadas através da resolução de problemas. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, ano 21, n. 31, p. 79-102, 2008.

PARANÁ. **Secretaria da Educação do Estado do Paraná**. Caderno de atividades matemática. Curitiba, 2009.

PASSOS, C. L. B.; GALVÃO, C. Narrativas de formação: investigações matemáticas na formação e na atuação de professores. **Interacções**, Braga, v. 18, p. 76-103, 2011. Disponível em: <http://revistas.rcaap.pt/interaccoes/article/view/460/414.>. Acesso em: 18 fev. 2011.

PEDRO GÓMEZ, L. R. Learning in secondary preservice teacher education from the communities of practice perspective. In: ICMI STUDY: THE PROFESSIONAL EDUCATION AND DEVELOPMENT OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 15., 2005, Águas de Lindóia, 2005. **Anais…** Águas de Lindóia, 2005.

PONTE, J.; CHAPMAN, O. Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In: LYN, D. (Ed.). **Handbook of international research in mathematics education**. 2. ed. New York: Routledge, 2008. p. 225-263.

PONTE, J.; OLIVEIRA, H. Remar contra a maré: a construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. **Revista de Educação**, Campinas, v. 11, n. 2, p. 145-163, 2002.

ROMANATTO, M. C. **Número racional**: relações necessárias a sua compreensão. 1997. 158 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 1997.

______. Número racional: uma teia de relações. **Zetetiké**, Campinas, v. 7, n. 12, p. 37-49, jul./dez. 1999.

SANTOS, M. P. **Encontros e esperas com os Ardinas de Cabo Verde:** aprendizagem e participação numa prática social. 2004. Tese (Doutorado em Educação – Didática da Matemática) – Departamento de Educação, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa. 2004.

WENGER, E. **Communities of practice**: learning, meaning and identity. New York: Cambridge University Press, 1998.

WENGER, E.; MCDERMOTT, R.; SNYDER W. M. **Cultivating communities of practice**. Boston: Harvard Business School Press, 2002.

APÊNDICES

APÊNDICE A

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

I – DADOS DE IDENTIFICAÇÃO DO SUJEITO DA PESQUISA OU RESPONSÁVEL LEGAL

Nome do participante:

....

Documento de Identidade N^{o}:..Sexo: ( ) M ( ) F

Data de Nascimento:.........../.........../.................

Endereço:...No:..................Apto:.............

Bairro:...CEP:......................

Município...Telefone: (......)............................

e-mail:..

II – DADOS SOBRE A PESQUISA

1. Título do Protocolo de Pesquisa: "Educação Matemática de Professores que ensinam Matemática", vinculado ao Programa "Observatório da Educação" (Edital n^{o} 38/2010, da CAPES/INEP)

2. Pesquisadores:
Prof. Márcio Roberto da Rocha e Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino

3. Avaliação do Risco da Pesquisa:

Sem Risco ( )   Risco Mínimo (**X**)   Risco Médio ( )

Risco Baixo ( )   Risco Maior ( )

4. Duração da Pesquisa: A obtenção das informações terá momentos de entrevistas que não serão superiores a uma hora; gravações em áudio das interações dos participantes; acompanhamento das atividades desenvolvidas entre coordenação do projeto, professores e estudantes de Matemática; acompanhamento de preparação e desenvolvimento de atividades para sala de aula.

III – REGISTRO DAS EXPLICAÇÕES DO PESQUISADOR AO ENVOLVIDO OU SEU REPRESENTANTE LEGAL SOBRE A PESQUISA, CONSIGNANDO:

1. Justificativa e objetivo

O projeto "Educação Matemática de Professores que ensinam Matemática", em concordância com os objetivos propostos no Edital no 38/2010, da CAPES/INEP, tem como objetivo geral:

> • Fomentar a produção acadêmica relativa à Formação de Professores que ensinam Matemática e à formação de recursos humanos em Educação Matemática na Educação Básica, na Graduação e na Pós-Graduação (mestrado e doutorado), que colaborem para elevação do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – IDEB (CYRINO, 2010, p. 6).

E como objetivos específicos:

> • Fortalecer o diálogo entre pesquisadores da área de Educação Matemática do PECEM, estudantes de mestrado e de doutorado do PECEM, estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UEL e professores que ensinam Matemática de Escolas da Rede Pública de Ensino do Paraná, por meio da formação de grupos de trabalho que desenvolvam atividades acadêmicas voltadas para o diálogo qualificado entre esses dois níveis de escolaridade.
> • Investigar aspectos relativos à formação continuada desencadeados pelo diálogo entre os participantes para adoção de uma agenda de trabalho colaborativo e constituição de uma Comunidade de Prática de Professores que ensinam Matemática formada por pesquisadores, futuros professores de Matemática e professores de Matemática que atuam na Educação Básica.
> • Investigar contextos em que os participantes desenvolvam sua capacidade para analisar, explicar seu raciocínio, e comunicar suas ideias matemáticas enquanto propõem, formulam, resolvem e interpretam problemas em uma variedade de situações.
> • Propiciar um campo de investigação e formação profissional para os estudantes do PECEM e do curso de Licenciatura em Matemática, baseado na articulação entre teoria, prática docente e investigação, de modo a gerar uma reflexão sobre conteúdos matemáticos e, do modo como estes conteúdos se transformam em ensino.
> • Fomentar, disseminar e desenvolver metodologias de prática de ensino significativas, para enfrentamento dos problemas na área de Matemática (CYRINO, 2010, p. 7)

Procedimentos que serão adotados durante a pesquisa

Participaremos das reuniões semanais do grupo investigado que ocorrerão nas dependências do Colégio Estadual de Paranavaí, a fim de identificar e registrar aspectos relativos à formação continuada de professores de Matemática no contexto de Comunidade de Prática. Buscaremos, em todos os momentos, criar um relacionamento de confiança com os participantes, estabelecer uma comunicação agradável de modo que eles se sintam à vontade e com o mínimo de constrangimentos, valorizar o significado que dão as coisas e aos fatos, respeitar seus valores culturais e aspectos emocionais, e não somente o produto da investigação.

3. Desconfortos e riscos

No presente estudo todo o esforço será feito para que não ocorram constrangimentos por parte dos investigados.

4. Benefícios esperados

Esperamos que esta investigação possa fornecer aos organizadores de currículo, nomeadamente aos coordenadores de Curso de Licenciatura em Matemática, aos responsáveis pelas políticas públicas relativas a formação inicial de professores e aos pesquisadores da área subsídios que possam orientar ações relativas à formação de professores de Matemática.

IV – ESCLARECIMENTOS DADOS PELOS PESQUISADORES SOBRE GARANTIAS DO ENVOLVIDO NA PESQUISA

1. Exposição dos resultados e preservação da privacidade dos voluntários

Os resultados a serem obtidos neste estudo serão publicados, independente das informações encontradas, contudo sem que haja a identificação dos participantes que prestaram sua contribuição, respeitando-se, portanto, o direito de privacidade, conforme normas éticas.

2. Despesas decorrentes da participação no projeto de pesquisa

Os voluntários estarão isentos de qualquer despesa ou ressarcimento decorrente da participação voluntária neste projeto de pesquisa.

Liberdade de consentimento

Os participantes estarão livres para negar a assinatura deste consentimento ou, ainda, para parar de participar em qualquer momento, se desejarem, sem que isso traga algum prejuízo ao mesmo.

4. Questionamentos

Os participantes terão acesso, a qualquer tempo, às informações sobre procedimentos relacionados a esta pesquisa. No caso de outros esclarecimentos que se fizerem necessários, informações adicionais poderão ser obtidas com os responsáveis pelo projeto.

V – PARA CONTATO EM CASO DE DÚVIDAS

VI – CONSENTIMENTO PÓS-ESCLARECIDO

Declaro que, após convenientemente esclarecido pelos pesquisadores e ter entendido o que me foi explicado, consinto em participar do presente Protocolo de Pesquisa.

Londrina, ___________ de _________________________ de 2011.

Assinatura do participante

Pesquisadores:

Prof. Márcio Roberto da Rocha

Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino

APÊNDICE B

TAREFA: FRAÇÃO !!! PARA QUE TE QUERO?

Experimento I – Construção do Material

Esta é uma experiência com tiras e círculos de papel, que poderão ajudá-lo a compreender frações.

Relação de material necessário:	**Distribuição do Material:**
• Papel dobradura ou papel cartão em 9 cores diferentes; • Tesoura, régua, transferidor e compasso; • Canetas coloridas, lápis, caneta e borracha.	Cada aluno receberá 9 (nove) tiras de papel de mesmo tamanho, uma de cada cor, e 9 (nove) círculos de mesmo tamanho, um de cada cor. Após o uso do seu material, guarde as peças em um envelope ou em saco plástico e tenha-o sempre a mão.

• Pegue uma tira de qualquer cor e divida-as em 2 (duas) partes iguais, primeiro dobre e depois recorte. O que significa cada uma das partes?
• Cada uma dessas partes pode ser representada de várias maneiras, inclusive com números. Quais as formas que você conhece? Escreva-as na tira de papel.
• Pegue agora um círculo na cor que desejar e faça o mesmo, escrevendo as representações nas partes que você cortou.
• Compare uma parte da tira com uma parte do círculo e as representações que você escreveu nelas. A metade da tira é igual à metade do círculo? Comente sobre isso.

1. Vamos repetir esse trabalho com as demais tiras e círculos, dividindo-os em 3 (três), 4 (quatro), 5 (cinco), 6 (seis), 8 (oito), 9 (nove) e em 10 (dez) partes iguais (dobrando, traçando e recortando).
    - **Mas, atenção:** Você deverá ficar com uma tira e um círculo inteiros, que serão os INTEIROS REFERENCIAIS e servirão para fazermos algumas comparações.
    - Em cada uma dessas partes escreva as representações e compare as frações das tiras com as mesmas frações dos círculos e anote as suas observações.

2. Observe e compare as peças do seu material e as representações numéricas de cada uma. Escreva suas observações sobre elas.

Experimento II

Agora que seu material está construído, vamos usá-lo para explorar algumas ideias sobre frações.

1. Pegue a peça representada por $\frac{1}{3}$ no seu material de frações. Usando o restante das peças, verifique e responda. a) É possível formar $\frac{1}{3}$ usando quartos? _____________. Se for possível, quantos quartos serão necessários? ____________
b) É possível formar $\frac{1}{3}$ usando quintos? _____________. Se for possível, quantos quintos serão necessários? ____________
c) É possível formar $\frac{1}{3}$ usando sextos? _____________. Se for possível, quantos sextos serão necessários? ____________
d) Escreva todas as possibilidades de formar $\frac{1}{3}$, usando todo o material que você dispõe e represente isso matematicamente.
e) Forme $\frac{1}{3}$ com outras frações que não fazem parte do seu material e registre as possibilidades que encontrar.
f) Em Matemática, costumamos dizer que as frações que você encontrou nesse experimento são equivalentes a $\frac{1}{3}$. Escreva uma explicação para essa ideia.

2. Vamos fazer o mesmo com outras frações, escrevendo os resultados na tabela a seguir.

Fração Inicial	**Frações equivalentes**								
$\frac{1}{2}$									
$\frac{1}{3}$									
$\frac{1}{4}$									
$\frac{1}{5}$									

3. Faça outras experiências com seu material e discuta com seu grupo. 4. Anote o que vocês observaram até agora e elabore uma regra para escrever frações equivalentes a uma fração dada, representado-a também em linguagem matemática. Lembre-se que essa regra de "valer" para as outras frações.

Experimento III

1. Com o auxílio do seu material, compare as frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$ e $\frac{1}{10}$.

   Essas frações têm numerador igual a 1 e são chamadas frações unitárias.

   a) Qual a maior fração unitária no seu material? E a menor?

   b) Qual a relação entre o denominador da fração unitária e seu tamanho?

2. Com o material da equipe construa sobre a mesa as frações $\frac{3}{3}$ e $\frac{2}{3}$.

   a) Se ‘juntarmos’ as duas frações representadas podemos substituí-las por inteiros? Quantos?

   b) ‘Juntar’ as duas frações representa uma operação matemática? Qual?
   Represente usando desenho e linguagem matemática.

   c) Pode-se chegar ao mesmo resultado com frações diferentes? Dê um exemplo:

3. Agora construa sobre a mesa as frações $\frac{9}{5}$ e $\frac{3}{5}$.

   a) Qual das frações é maior?

   b) Se retirarmos a fração menor da fração maior, qual será o resultado? Represente usando desenho e linguagem matemática.

   c) É possível trocar as peças do resultado sem que este se altere? Represente o que você fez com desenhos e linguagem matemática.

Experimento IV

Reúna em grupos de três, você e mais dois colegas, juntando seus materiais de fração.

1. Pegue os inteiros (tira e círculo de papel) do seu material. Com o restante das partes, verifique e responda.

   a) Quantos quintos são necessários para formar esse inteiro? Faça essa experiência com as tiras e com os círculos.

   b) Quantos décimos são necessários para formar um inteiro?

   c) Escreva a que conclusão você chegou. Se necessário faça outras comparações.

2. Coloque sobre a mesa, lado a lado, o correspondente a $\frac{10}{5}$.

   a) É possível substituí-lo por inteiros? Quantos inteiros foram necessários?

   b) Represente numericamente a substituição efetuada.

3. Coloque sobre a mesa, lado a lado, o correspondente a $\frac{13}{4}$.

a)	É possível substituí-los por inteiros? Quantos inteiros foram necessários?
b)	Represente numericamente a substituição efetuada.

4. Ainda em grupos, pegue o correspondente a dois inteiros e $\frac{1}{9}$, isto é, $2\,\frac{1}{9}$.	
a)	Substitua os dois inteiros por nonos (denominadores numericamente iguais a 9). Qual foi o resultado?
b)	Represente numericamente a substituição efetuada.

ANEXOS

ANEXO A

Material a respeito de frações produzido em power point pela professora Beatriz

FRAÇÕES

- Nilo

- Porém, era necessário remarcar os terrenos de cada agricultor em setembro, quando as águas baixavam. Os responsáveis por essa marcação eram os agrimensores, que também eram chamados de estiradores de corda, pois mediam os terrenos com cordas nas quais uma unidade de medida estava marcada.

- Essas cordas eram esticadas e se verificava quantas vezes a tal unidade de medida cabia no terreno, mas é só parar para pensar um pouquinho para descobrir que nem sempre essa medida cabia inteira nos lados do terreno.
- Esse problema só foi resolvido quando os egípcios criaram um novo número: o número fracionário. Ele era representado com o uso de frações, porém os egípcios só entendiam a fração como uma unidade (ou seja, frações cujo numerador é igual a 1).

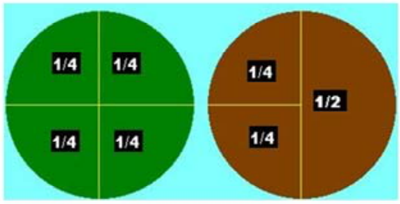
O QUE É UMA FRAÇÃO ?

- Fração é um número que exprime uma ou mais partes iguais em que foi dividida uma unidade ou um inteiro.
- Assim, por exemplo, se tivermos uma pizza inteira e a dividimos em quatro partes iguais, cada parte representará uma fração da pizza.

Leitura de frações:

Fração	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9
Leitura	um mei o	um ter ço	um qua rto	um qui nto	um sex to	um séti mo	um oita vo	um no no

- Quando a fração for da forma 1/d, com d maior do que 10, lemos: *1, o denominador e acrescentamos a palavra avos*.
- Avos é um substantivo masculino usado na leitura das frações, designa cada uma das partes iguais em que foi dividida a unidade e se cujo denominador é maior do que dez.



ANEXO B

Artigo a respeito do ensino e da aprendizagem de frações

Bolema, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, 2008, p. 1 a 22

ARTIGOS

O que Nossos Alunos Podem Estar Deixando de Aprender sobre Frações, quando Tentamos lhes Ensinar Frações

What our Students May Not be Learning about Fractions when we Try to Teach Them Fractions

Antonio José Lopes[1]

Resumo

Este artigo retoma intervenções da lista de discussões da SBEM para advogar pela permanência das frações no currículo do ensino fundamental. Fundamentado em resultados de pesquisas na área de Educação Matemática e nos dados coletados da experiência de sala de aula do autor, apresento uma perspectiva diferenciada daquela que existe hoje, e que é adotada pela maioria dos livros didáticos e professores de matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Frações. Currículo. Pensamento Proporcional.

Abstract

This article revisits interventions posted on the SBEM discussion list advocating for the maintenance of fractions in the elementary education curriculum. Based on research results in the field of Mathematics Education, and data collected during the author's experiences in the classroom, a perspective is presented that differs from the predominant one adopted by the majority of textbooks and mathematics teachers today.

Key-words: Mathematics Education. Fractions. Curriculum. Proportional Thinking.

[1] Educador matemático, professor da Escola Vera Cruz, doutorando em Didática da Matemática pela Universidade Autônoma de Barcelona.

O título deste artigo está longe de ser original, foi inspirado em dois debates, ocorridos com quase três décadas de intervalo, sem que a princípio os protagonistas do debate recente soubessem do teor do artigo que gerou o primeiro.

A primeira vez que tomei contato com uma crítica vigorosa ao ensino de frações foi através da leitura da conferência "Do We Still Need Fractions in the Elementary Curriculum"[2] proferida por Peter Hilton no ICME IV, realizado no ano de 1980 em Berkeley, EUA.

Já na introdução daquele vigoroso artigo, P. Hilton ameniza o impacto do título:

Naturalmente, a questão não deve ser interpretada tão literalmente - certamente nós devemos ensinar frações como parte do currículo elementar. Mas é minha convicção que nós não devemos ensinar frações do modo que tem sido ensinadas e ainda são ensinadas. Realmente, se a questão fosse "Nós ainda precisamos ensinar frações como elas são ensinadas hoje, na maioria dos programas elementares"?, então a questão pode ser interpretada literalmente e minha resposta seria "não, na verdade, nós nunca deveríamos ter ensinado frações deste modo".

Curiosamente, no debate recente, que ocupou algumas semanas da lista da SBEM[3], alguns posicionamentos se aproximaram da visão defendida por P. Hilton:

> (..) tenho insistido em retirar as frações COMO TEMA, ... sempre disse que as frações poderiam ser vistas dentro de probabilidades, razões, ... eu falava das frações TAL E QUAL elas aparecem nos livros didáticos ... Repito BANI-LAS refere-se estritamente a que elas não seriam um CAPITULO dos livros didáticos... não abririam uma unidade... elas simplesmente "apareceriam" onde tivessem que aparecer, NESTES CONTEXTOS "matemáticos" (..) (fragmentos de mensagem do professor Carlos Vianna, janeiro 2007)

---

[2] Há uma tradução deste artigo na página www.matematicahoje.com.br/telas/educ_mat/artigos/

[3] http://listas.rc.unesp.br/mailman/listinfo/sbem-l

Em seu artigo, Peter Hilton apontou cinco defeitos do currículo em relação às frações:

- Aplicações enganosas
- Confusão com a função dos decimais
- Ausência de cuidado com definições e explicações
- Desonestidade de apresentação
- Paixão pela ortodoxia

Concluiu desenvolvendo o que entendia serem os ingredientes para um bom curso de frações.

Seguirei um roteiro semelhante, até porque os defeitos apontados por P. Hilton permanecem nos currículos atuais. Mas o propósito maior deste texto é o de abrir a discussão sobre possibilidades não convencionais para o ensino das frações, que podem contribuir para uma aprendizagem significativa e um enriquecimento das idéias matemáticas que coabitam o campo conceitual das estruturas multiplicativas em que a proporcionalidade é a idéia forte (VERGNAUD, 1991).

Marcas do século passado.

Vasculhando minha biblioteca de livros antigos encontrei esta pérola autodenominada como "aplicações" das frações.

> *"Dois meninos treparam numa laranjeira e chuparam os 2/3 das laranjas que havia. Na laranjeira ficaram os 4/5 do que havia menos 14 laranjas. Quantas laranjas os meninos chuparam?"*

(Extraído de "Exercícios de Matemática" de Cecil Thiré. 1932, 2ª ed. Livraria Francisco Alves).

Este tipo de situação-problema recebeu pesadas críticas nas últimas décadas: Peter Hilton as chamou de *aplicações enganosas*; Mme. Krygowska[4] de *problemas pseudopráticos*; Malba Tahan em seu clássico Didática da Matemática (1961), cunhou o termo *algebrismo*; para mim não passa de uma aberração pseudo-didática.

[4] Mme. Anna Zofia Krygowska, educadora matemática polonesa, presidente de honra da Comisión Internationale pour l'Etude et l'Amelioration de l'Enseignement des Mathematiques - CIEAEM.

O grave desta pretensa "contextualização" é que problemas como este podem ser encontrados em muitas coleções de materiais didáticos disponíveis no mercado em pleno 2007, em especial no segmento de 1ª a 4ª séries. Não é raro encontrar enunciados do tipo: "*João comeu 3/17 avos de um bolo, seu irmão comeu 5/9 do que restou .. quanto sobrou para sua irmã ?*". Segundo Freudenthal "As frações complicadas e as operações com elas são invenções do professor só podem ser entendidas em nível superior".

Na linha das aberrações que persistem há mais de um século, destaco a insistência em dar valor a uma nomenclatura inútil e por se referir a conceitos obsoletos como, por exemplo, as frações aparentes, antes mesmo que os alunos tenham consolidado o conceito de frações próprias. Sim, ainda se perde tempo precioso das crianças, ensinando frações aparentes. Imagine a cabeça de um aluno de 9-10 anos quando alguém tenta lhe convencer que existem frações que se parecem com frações, mas são números inteiros. E o que se faz com tal informação? De produtivo NADA. Quando muito se pede aos alunos que definam ou identifiquem frações aparentes, numa prova que trata de frações aparentes. Não faz sentido gastar tempo produtivo das aulas de matemática com definições deste tipo. Falar de frações aparentes e até mesmo de frações impróprias, tão logo se está introduzindo as idéias sobre frações é um atentado à intuição dos alunos.

Tentei encontrar uma explicação plausível para este tipo de ocorrência nos programas escolares. Lanço aqui a hipótese de que tal abordagem expressa um desejo de autores e professores em fazer com que as crianças aceitem precocemente uma idéia, que não é nada simples ou intuitiva, a de que frações representam números racionais.

Outro problema grave relacionado ao ensino de frações é a prescrição de regras e macetes para realizar operações.

> "*Para dividir uma fracção por uma fracção, multiplica-se a fração dividendo pela fracção divisor invertida*" (Elementos de Aritmética, FTD, 1920).
>
> "*Para dividir um número racional por outro número racional diferente de zero, basta multiplicar o primeiro pelo inverso do segundo*" (Pensar e Descobrir, FTD, 2007)

Mais adiante discutiremos este ponto, em especial as operações de multiplicação e divisão.

Procuram-se frações no dia a dia

Considero aceitável que os professores investiguem e orientem seus alunos a pesquisar como se utilizam as frações no seu cotidiano. Estou me referindo ao uso fora dos livros de matemática. O que vamos constatar é o que já vem sendo discutido há pelo menos duas décadas. O uso direto das frações tende a se tornar cada vez mais raro[5]. Representações analógicas cedem lugar às digitais. Já não se encontram com facilidade balanças e instrumentos de medida com ponteiros, como é o caso dos hidrômetros antigos. O visor do odômetro dos automóveis resiste como um dos últimos mecanismos do gênero onde se **lê** frações, pelo posicionamento dos ponteiros numa escala, para saber se o tanque tem cerca de ¼ , ½ ou ¾ de combustível.

Temos que reconhecer estes fatos e nos ajustar à realidade. A notação decimal ganhou a guerra da comunicação e da usabilidade para representar números "quebrados", não inteiros. Isto não quer dizer que as frações devam ser abolidas, temos que reconhecer sua importância em contextos não utilitários, que atendem a outros significados e objetivos.

Há alguns anos fiz um levantamento de contextos e situações problema, em que as frações fossem imprescindíveis. Imaginava encontrar uma grande variedade de situações, acessíveis aos alunos do ensino fundamental, mas isto não se confirmou, pois a maioria das situações se referia a contextos do mundo dos adultos, pobres de significados para crianças e adolescentes.

a) Frações de uma coleção discreta, como 1/2, 2/3, 3/4 e 3/5, aparecem em capítulos da constituição federal ou do regimento de parlamentos estaduais ou municipais, como referências para aprovar leis ou mudar a constituição. Há um contexto em que o cálculo de 3/5 de 513 ou 2/3 de 81, não é artificial[6]; com dois terços dos

[5] Em 1937, Wilson y Dalrympe levaram a cabo uma investigação sobre os usos sociais e comerciais das frações. Concluíram que a necessidade de manejar com solvência as frações na vida ordinária se limita às metades, terços, quartos y doze avos; a subtração de frações se apresenta raramente; a divisão quase nunca aparece.

Mais adiante discutiremos este ponto, em especial as operações de multiplicação e divisão.

Procuram-se frações no dia a dia

Considero aceitável que os professores investiguem e orientem seus alunos a pesquisar como se utilizam as frações no seu cotidiano. Estou me referindo ao uso fora dos livros de matemática. O que vamos constatar é o que já vem sendo discutido há pelo menos duas décadas. O uso direto das frações tende a se tornar cada vez mais raro[5]. Representações analógicas cedem lugar às digitais. Já não se encontram com facilidade balanças e instrumentos de medida com ponteiros, como é o caso dos hidrômetros antigos. O visor do odômetro dos automóveis resiste como um dos últimos mecanismos do gênero onde se **lê** frações, pelo posicionamento dos ponteiros numa escala, para saber se o tanque tem cerca de ¼, ½ ou ¾ de combustível.

Temos que reconhecer estes fatos e nos ajustar à realidade. A notação decimal ganhou a guerra da comunicação e da usabilidade para representar números "quebrados", não inteiros. Isto não quer dizer que as frações devam ser abolidas, temos que reconhecer sua importância em contextos não utilitários, que atendem a outros significados e objetivos.

Há alguns anos fiz um levantamento de contextos e situações problema, em que as frações fossem imprescindíveis. Imaginava encontrar uma grande variedade de situações, acessíveis aos alunos do ensino fundamental, mas isto não se confirmou, pois a maioria das situações se referia a contextos do mundo dos adultos, pobres de significados para crianças e adolescentes.

a) Frações de uma coleção discreta, como 1/2, 2/3, 3/4 e 3/5, aparecem em capítulos da constituição federal ou do regimento de parlamentos estaduais ou municipais, como referências para aprovar leis ou mudar a constituição. Há um contexto em que o cálculo de 3/5 de 513 ou 2/3 de 81, não é artificial[6]; com dois terços dos

[5] Em 1937, Wilson y Dalrymple levaram a cabo uma investigação sobre os usos sociais e comerciais das frações. Concluíram que a necessidade de manejar com solvência as frações na vida ordinária se limita às metades, terços, quartos y doze avos; a subtração de frações se apresenta raramente; a divisão quase nunca aparece.

votos dos deputados federais pode-se iniciar um processo de impeachment do Presidente da República; 1/3 dos ministros do tribunal de contas são escolhidos pelo presidente da República, 2/3 pelo Congresso Nacional.

b) Frações aparecem em problemas reais de partilha de bens. Ainda que a temática seja adulta pode-se abordá-la através de um tratamento literário, onde a fantasia não precisa ser escondida, como fez Malba Tahan (1938) em "O problema dos 35 camelos" e "O problema dos 8 pães" em seu clássico "O Homem que Calculava".

c) Frações são utilizadas no cálculo de indenizações sem justa causa. Trata-se de um contexto adulto, pouco significativo para crianças, mas adequado para cursos de EJA. Para o cálculo de 13º e férias proporcionais, faz-se uso de frações com denominadores 12 (fração de ano), 28, 29, 30 ou 31 (fração de mês).

d) Frações estão presentes nos livros de receitas culinárias, envolvendo tanto grandezas discretas (ovos), contínuas (leite) ou híbridas (açúcar).

O contexto é apropriado, entretanto alguns cuidados têm que ser tomados, é ilusório acreditar que se pode ir muito longe, no estudo de frações, aumentando ou diminuindo uma receita. Nos contextos de receitas, em geral as frações são operadores sobre uma quantidade discreta ou contínua. Professores e matemáticos, que apreciam uma cozinha, sabem muito bem que há certa distância entre a matemática formal e a dos livros de receita.

Certa vez propus uma atividade de redução de receita colocando uma restrição para a quantidade de ovos. O objetivo era que os alunos diminuíssem a quantidade de ingredientes na mesma proporção que a diminuição dos ovos. Comecei a receber e-mails de alunos (de 11/12 anos) questionando como

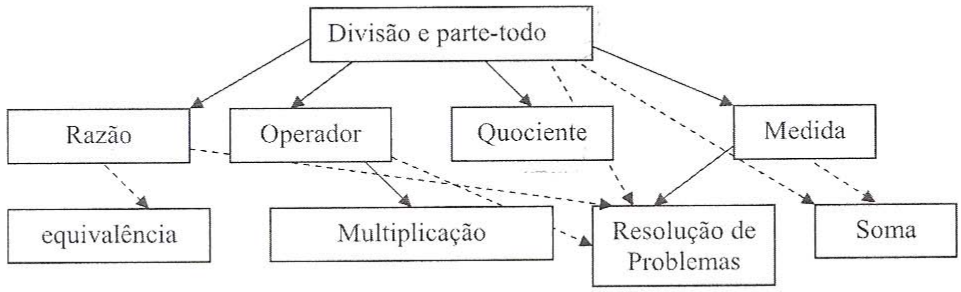
[6] 513 é o número de deputados da Câmara Federal, os senadores são 81.

poderiam calcular a terça parte de uma pitada de sal. Outros questionaram o formato das xícaras (não cilíndricas), que não tem marcas de divisão. Entendo que nestes exemplos a modelagem matemática esbarra na realidade.

A preocupação pela busca de contextos realistas a qualquer custo, leva alguns professores e autores a propor enunciados com referência a frações de polegadas, associadas à medida de parafusos e canos. Reconheço a boa intenção, mas discordo da eficácia nestes casos. A contextualização é inadequada, crianças deste início de século estão distantes de atividades técnicas específicas. Foi-se o tempo em que os filhos acompanhavam os pais em seu ofício, na oficina ou em casa. Para a maioria dos usuários não profissionais, falar de um cano 3/8 não tem muito significado, 3/8 não passa de um rótulo, sem referência direta ao sistema de medidas, no caso o imperial, em que as relações fracionárias são abundantes.

O que sabemos sobre a aprendizagem de frações

A aprendizagem de frações não se dá com definições prontas, nomenclatura obsoleta e pseudo-problemas sobre pizzas e barras de chocolates. Os professores deveriam ter atenção para as complexidades que envolvem conceito tão delicado. Os obstáculos à aprendizagem são muitos e de várias naturezas. A começar pelo fato de que a palavra **fração** estar relacionada a muitas idéias e constructos, ver BEHR (1983) e VERGNAUD (1983).



(BEHR, et al.,1983)

Frações são, assim consideradas, um "megaconceito"[7], constituído (construído) por diferentes subconceitos, aquilo que chamamos de interpretações do conceito.

No ensino fundamental as frações são apresentadas inicialmente como relação parte-todo, representam partes, números menores que a unidade, que foi dividida em partes iguais. Mas logo a seguir tal idéia é confrontada com a definição de frações impróprias como se isso fosse algo natural, quando de fato não é. Entendo que ocorre pela pressa em passar da idéia de relação parte – todo, para a idéia da fração representando um número racional ou um quociente (divisão). Há muitas hipóteses que tentam explicar o porquê desta passagem precoce. Analisando livros publicados a partir do movimento da Matemática Moderna, observei uma preocupação dos autores em abordar, tão rapidamente quanto possível, o conjunto Q dos números racionais. Por outro lado nos livros dos anos 1930, tão logo apresentavam as frações impróprias, orientavam os alunos a transformá-las em frações mistas, tão raras nos livros didáticos atuais, apesar de mais intuitivas.

Mas frações também representam relação parte – parte: as razões (porcentagem, escala, etc.). Em sua tese de doutorado Joaquín Gimenez (1990), listou 12 idéias distintas, associadas às frações, entre elas a de operador, taxa de variação, medida e probabilidade. Nem todas estas idéias têm sido contempladas no tratamento das frações nos livros didáticos, o que é um indicador de lacunas sérias na aprendizagem robusta do conceito. Os

[7] Citado por Salvador Llinares e Maria Victória Sánchez Garcia, in "Fracciones", Madrid: Editorial Sintesis, 1988.

especialistas aqui citados são unânimes em apontar que não é possível isolar cada uma das idéias das frações e suas interpretações, algumas das idéias tem vínculos naturais, como se pode ver no esquema de Behr, que não podem ser ignoradas.

O estatuto epistemológico das frações, não é o único obstáculo à sua aprendizagem, também a notação das frações constitui num obstáculo, não é tão trivial a associação de uma parte através de dois números inteiros separados por um tracinho[8].

Obstáculos de naturezas diversas interferem na resposta dos alunos frente a atividades com frações. Kathleen Hart observou que os alunos só conseguiam produzir diagramas de equivalência de frações, depois de já terem reconhecido a equivalência antes de produzir o diagrama. Kerslake (1986 *apud* NUNES, 1997), também estudou equivalências e, em um de seus estudos, apesar de ter encontrado algumas crianças que responderam corretamente 2/3 + 3/4, observou que nenhuma sabia explicar o porquê de transformar as frações originais utilizando o denominador 12. Concluiu que as crianças estavam apenas reproduzindo uma rotina que lhes foi ensinada. Aprendizagem mecânica no sentido atribuído por Ausubel (1978 *apud* MOREIRA, 2006).

Entendo que o conceito de fração equivalente é um dos mais importantes no ensino-aprendizagem das frações, mas considero insuficiente o trabalho restrito a grades retangulares. Temos observado que para escrever uma fração equivalente, na maioria dos casos, a atividade da criança reduz-se à contagem do total de células, tal como foi instruída.

1	2	3	4

$$\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$$

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	**16**

Crianças pequenas (6/7 anos) usam o referencial "metade" para resolver problemas que exigem julgamentos proporcionais (SPINILLO, 1995 na referencia está 1994).

[8] Para um maior aprofundamento ver o clássico *"A History of Mathematical Notatios"* de Florian Cajori. Dover. 1993 (1ª. Ed. 1928).

Alunos de quase todas as culturas cometem erros padrão no cálculo de adição de frações, trata-se de um fenômeno conhecido como "*sobregeneralização*"[9]. Quem nunca viu crianças somarem numeradores e denominadores como fazem nas multiplicações?

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Peter Hilton sugere um aproveitamento didático deste tipo de erro, explorando um contexto em que esta regra é válida. Considere a razão a/b como a relação gols/jogos, e cada razão representando um turno de um campeonato.

O leitor já deve ter se dado conta de que não é possível discorrer, num único artigo, sobre as centenas de investigações que têm como tema o processo de ensino-aprendizagem das frações. Certamente outros aspectos são abordados nos demais artigos deste Bolema especial. Tratemos então de discutir algumas seqüências didáticas que, fundamentadas naquilo que a pesquisa nos oferece, contribuem para uma aprendizagem significativa e sólida das frações e conceitos conexos.

O que os alunos poderiam estar aprendendo sobre frações

Um dos problemas que detectamos no ensino de frações, é o fato de que seu ensino tem estado restrito até o final da 6ª série. Parece estar implícito neste tipo de organização curricular, uma "reserva de mercado", característica dos currículos anteriores aos PCN, em que frações são tratadas nas 4ª e 5ª séries, razões e proporções na 6ª, álgebra na 7ª, e funções na 8ª. Por trás desta visão, subjaz a crença no caráter categórico e acumulativo dos conteúdos, bastando ensinar frações em algum ponto do programa e, pronto! Daí em diante as frações estariam disponíveis como objetos de domínio dos alunos. Mas a realidade é outra, é comum que professores das séries finais do ensino fundamental e mesmo do ensino médio, exponham sua incredulidade pelo

[9] O conceito de sobregeneralização é tratado por Helena Cury, em seu livro *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Belo Horizonte: Autêntica. 2007.

fato de seus alunos não responderem a atividades que envolvem frações com o desempenho esperado.

Confinar o tema frações em algumas séries do currículo é um erro grave, desconsidera o fato de que o desenvolvimento do pensamento proporcional se estende por um longo período que vai dos 7/8 anos aos 14/15 anos, em níveis distintos de complexidade. Uma conseqüência pedagógica que se pode extrair destas considerações, é que os currículos deveriam contemplar experiências diversas com frações em todas as séries do ensino fundamental e médio, algo que vá além da revisão com frações mais "difíceis". Refiro-me a um tratamento em espiral que implique em aquisição e mudança conceitual, no sentido de Santos (1991), que explore as distintas idéias e subconstructos, idéias conexas e contextos em que o conceito de frações se aplica e se consolida.

Hans Freudenthal e Peter Hilton enfatizaram a importância do desenvolvimento de um senso numérico para os números racionais. Para Freudenthal a matemática é uma atividade humana, surge como materialização da realidade, logo a aprendizagem matemática deve originar-se dessa realidade, isto não significa mantê-la conectada apenas aos fenômenos do mundo real, senão também ao realizável, imaginável ou razoável para os alunos, desta perspectiva a componente cultura tem que ser levada em conta como contexto.

O que queremos enfatizar é que a matemática que vale a pena ser ensinada, e aprendida, é a que promove aprendizagem significativa, que faça sentido para os alunos. Para a consecução deste objetivo, Freudenthal propõe que contextos realistas, sejam pontos de partida naturais para processos de descoberta e reinvenção da matemática.

É desta perspectiva que proponho um conjunto de atividades cujo objetivo, entre outros, é o desenvolvimento desse sentido numérico em níveis progressivos de complexidade, de modo a poder ser explorado em todas as séries do ensino fundamental:

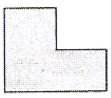
- Exponha os alunos a situações que possibilitem a problematização e exploração da noção de metade em distintos contextos de comparação.

12 Bolema, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, 2008, p. 1 a 22

Isto me fez lembrar de minha avó, que apesar de não saber nada de frações, tinha uma técnica muito engenhosa na hora de resolver a disputa entre seus dois netos, pelo melhor pedaço do bife: "Um corta e outro escolhe".

- Explore a metade da metade, e a metade da metade, da metade;
- Investigue o sentido das palavras que tenham a idéia de parte seus contextos: meio, metade, terço (da reza), quinto (dos quintos dos infernos), novena (da reza), dízimo, etc.;
- Explicite as idéias e o sentido de palavras que tenham a mesma raiz etimológica que "fração": fratura, fraco, frágil, fragmento, fracasso, fracionar, fracionado;
- Explore atividades de resolução de problema focadas na visualização:

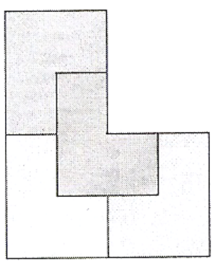
Desenhe ao menos duas figuras diferentes, em que a figura abaixo representa:



a) 1/2

b) 1/3

c) 1/4



Eis uma solução não trivial do item "c"

Explore somas infinitas.

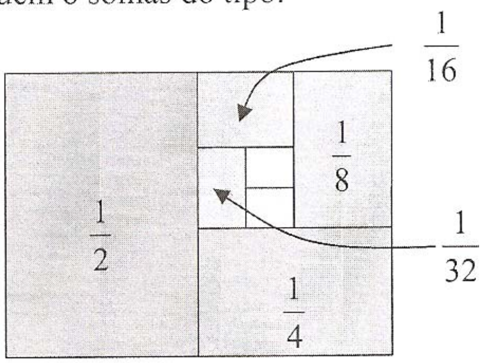
Proponha que os alunos investiguem o somas do tipo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=$$



Demonstração de que $\sum_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=2$ (10)

Neste tipo de atividade os alunos exercitam o cálculo de somas, sem grandes obstáculos de cálculo. Após algum tempo tendem a perceber padrões, o que contribui para que façam cálculo mental com frações de certo tipo. A atividade contribui para que os alunos tenham suas primeiras noções de aproximação e limite. Associado a este tipo de seqüência didática podemos introduzir as frações egípcias.

- Frações egípcias[11] são instigantes, curiosas e ricas de significados. Os egípcios representavam uma fração qualquer justapondo frações unitárias (um modo de indicar a soma). Um pequeno círculo sobre o hieróglifo que representa um número inteiro, indicava uma fração unitária, as frações 1/2, 2/3 e 3/4 tinham símbolos próprios.

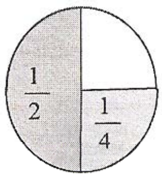
[10] In *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking* de Roger B. Nelsen. MAA. 1993.

[11] Para um maior aprofundamento sobre frações egípcias, ver "*Números fracionários: primórdios esclarecedores*" de Nilza Eigenheer Bertoni. In Coleção História da Matemática para professores, SBHM. 2005

 $= \frac{1}{3}$  $= \frac{1}{10}$

 $= \frac{1}{2}$  $= \frac{2}{3}$  $= \frac{3}{4}$

Alunos de 5ª série conseguem resolver o problema da decomposição da $\frac{3}{4}$ em duas frações unitárias, ainda que a situação seja inicialmente inusitada, uma vez que os alunos estão habituados a explorar a soma direta, do tipo "efetue".



Leve os alunos a admitir que $^{6}/_{7} = {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{3} + {}^{1}/_{42}$

Proponha a construção de tabelas de dupla entrada que dêem a soma de frações unitárias com denominadores de 2 a 12, os alunos vão descobrir regularidades, que serão incorporadas a seu acervo da fatos aritméticos, essenciais para o cálculo mental.

Decomponha as frações 5/6 e 7/12 em frações unitárias.

Em atividades realizadas com alunos de 11/12 anos, observamos que a tarefa de decompor uma fração, em frações unitárias é resolvida através de distintas estratégias, dentre as mais freqüentes destaca-se: a) o uso de representações geométricas como grades ou gráfico de setores; b) a estratégia de subtrair a maior fração unitária da fração a ser decomposta, reduzindo reiteradamente o problema:

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \qquad \frac{7}{12} = \frac{6}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \qquad \frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

Atividades com frações egípcias contribuem para que os alunos desenvolvam habilidades de cálculo mental com frações, desde que sejam "frações boas", e não "frações esquisitas" como $\frac{13}{47}$.

- O trabalho com frações deveria privilegiar a exploração de "frações boas". A esta altura o leitor deve estar indagando, mas o que são "frações boas"? Denominamos "frações boas" às frações que podemos construir uma imagem mental[12], ou que tenham alta significação cultural e de uso. Encaixam-se nesta categoria as frações com denominadores 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 e 12.
  Obviamente a fração 13/47 não é uma fração boa, entretanto os alunos podem desafiados a encontrar uma fração boa, tão próxima quanto possível de 13/47.
  Observe que $\frac{13}{47} \cong \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$. Pronto, os alunos não precisam saber exatamente quanto é 13/47, seu senso numérico lhe dá segurança de que é aproximadamente 1/4.
  Se sentir o entusiasmo da turma o professor pode propor que decidam se 13/47 é maior ou menor que 1/4.

O trabalho com frações egípcias e frações boas, dá conta dos alunos explorarem procedimentos e idéias chaves como frações equivalentes, comparação, adição e subtração simples. Contribui para que sejam introduzidas idéias importantes como aproximação, arredondamento, limites e ainda que se possam explorar distintas representações, é uma boa oportunidade para se explorar a calculadora como ferramenta de investigação.

- Quanto mais domínio computacional os alunos tiverem com as frações, mais preparados estarão para enfrentar problemas do tipo: "marque duas frações quaisquer na reta, e encontre uma terceira fração entre as duas"

[12] No sentido atribuído por FISCHBEIN, E. The Theory of Figural Concepts. Education Studies in Mathematics, 1993.

16 Bolema, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, 2008, p. 1 a 22

Encontre uma, ou mais frações entre 2/3 e 3/4.

O primeiro problema é estabelecer uma relação de ordem entre as frações dadas, o outro é encontrar a fração pedida. Os alunos experimentam distintas estratégias, sendo que a mais freqüente é a percepção de que a média aritmética responde ao problema. Esta dada a deixa para falar sobre a **densidade** do conjunto dos racionais na reta. A densidade é um conceito muito importante no estudo dos conjuntos numéricos, e apesar de seu potencial intuitivo nas séries finais do ensino fundamental, está restrito aos cursos de cálculo.
Nesta fase em que os alunos já dispõem de ferramentas algébricas, demonstrar, que existem infinitos números racionais entre dois números racionais quaisquer, é simples.
A média aritmética entre dois racionais a/b, c/d quaisquer, com $b,\ d \neq 0$ é o racional:

$$x = \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} = \frac{ad + bc}{2bd}.$$

- Frações têm um papel de destaque na história da matemática, não há razão para que esta abordagem fique ausente dos currículos. A notação decimal é relativamente recente na história da matemática, números irracionais como π eram substituídos por aproximações de números racionais.

Os alunos deveriam conhecer um pouco da história do π, e suas várias aproximações ao longo da história. Uma atividade importante é calcular áreas ou perímetros de coisas experimentando (com a calculadora é claro), distintos valores de π :

Aproximação de π

3	Chineses (1100 a.C.) e antigo testamento (550 a. C.)
3 1/8	Babilônios (2000 a. C.)
256/81	Egípcios (2000 a.C.)
3 10/71< π < 22/7.	Arquimedes (séc. III a. C.)
377/120	Cláudio Ptolomeu (séc. II d. C.)
142/45	Wang Fau (séc. III d. C.)
157/50	Liu Hui (263 d. C.)
355/113	Tsu Ch'ung-chih (aprox. 450)
62832/20000	Aryabhata (aprox. 530)
$\sqrt{10}$	Brahmagupta (aprox. 650)
3,141818	Leonardo de Pisa (Fibonacci1220)

Alunos e professores ficam impressionados com a aproximação 355/113 descoberta por um marceneiro chinês, com precisão de 1 milionésimo.

- O estudo de probabilidades contribui significativamente para o desenvolvimento do senso numérico dos números racionais, realça a idéia de razão, tanto em contextos discretos como contínuos. A introdução das probabilidades no ensino fundamental proposta nos PCN está fundamentada em estudos teóricos de reconhecimento nacional e internacional[13], sua prática está consolidada em alguns sistemas de ensino estaduais como o de Minas Gerais.

- As possibilidades de uma abordagem intuitiva para a divisão de frações são escassas, as aplicações realistas são mais escassas ainda. A regra geral da divisão de duas frações quaisquer, tem sentido quando os alunos dispõem de ferramental algébrico, o que não ocorre da 4ª à 6ª série.

[13] Para um maior aprofundamento ver as teses de doutorado da profa. Maria do Carmo Vila (UFMG) e do Prof. José Damasceno (UnB) e os trabalhos de investigação da Profra. Carmen Batanero (Univ. de Granada).

Em um estudo realizado com alunos de 12 anos[14], a divisão foi apresentada como um problema, sem prescrição de regra.

Os alunos construíram a regra a partir de duas idéias chave: a divisão como operação inversa da multiplicação, e o conceito de frações equivalentes.

Tão logo o professor escreveu "$\frac{14}{15} \div \frac{2}{5}$?", no quadro, os alunos não tiveram dúvidas em atacar o problema, dividindo numerador por numerador, denominador por denominador.

$$\frac{14}{15} \div \frac{2}{5} = \frac{7}{3}$$

Imaginei que estavam apenas reproduzindo a regra da multiplicação. Mas a argumentação dos alunos surpreendeu. Seguiu-se um intenso movimento de provas e refutações num ambiente de investigação.

Aluno 1: *"Ué a divisão não é a operação inversa da multiplicação?"*

A verificação não dá margem a dúvidas: $\frac{7}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{7 \times 2}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$

Podemos complicar a vida dos alunos:

Mas como você faria no caso $\frac{3}{14} \div \frac{2}{7}$?

Aluna 2: $\frac{3 \div 2}{14 \div 7} = \frac{\text{"1,5"}}{2}$

[14] A interação e os diálogos aqui reproduzidos ocorreram em uma turma de 6ª. Série da Escola da Vila, SP no ano de 1994. Uma versão da aula está documentada no livro da 6ª série da coleção Matemática Hoje é Feita Assim FTD, de Antonio José Lopes BIGODE.

Aluno 3: *Mas* $\frac{\text{"1,5"}}{2}$ *não é fração.*

Aluna 2: *Mas dá prá achar a fração* equivalente: $\frac{\text{"1,5"}}{2} \overset{\times 2}{=} \frac{3}{4}$

Aluno 4: *Mas e se for um divisão bem encrencada como por exemplo* $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7}$?

[observe que o encrencado proposto do aluno tem a ver com o fato de aparecer uma dízima, impossível de ser eliminada pela multiplicação de um número inteiro]

Aluna 2: *Humm ! Neste caso acho que o melhor é achar uma fração equivalente a* $\frac{2}{3}$ *que dê para aplicar minha regra. Tem que ser uma fração em que tanto o numerador como o denominador tem que ter os fatores 5 e 7.*

$\frac{2}{3}$ *é equivalente a* $\frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 7} = \frac{70}{105}$

se $\frac{2}{3}$ *é equivalente a* $\frac{70}{105}$ *então* $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7}$ *deve ser igual a* $\frac{70}{105} \div \frac{5}{7}$

Prof.: *Vamos verificar o resultado.*

Aluna 2: *Agora vai dar* $\frac{70}{105} \div \frac{5}{7} = \frac{70 \div 5}{105 \div 7} = \frac{14}{15}$

$\frac{5}{7} \times \frac{14}{15} = \frac{70}{105}$ que simplificando dá $\frac{}{3}$

Pode não parecer, mas a esta altura os alunos já tinham generalizado, ainda que não estivessem utilizando uma linguagem algébrica.

Neste ponto o professor avalia a seu critério, se os alunos têm condições de acompanhar e aceitar a generalização numa linguagem mais formal.

Se a, b, c, e d são números inteiros e a, b ≠ 0 Dada a divisão $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ e, sabendo que $\frac{a}{b}$ é equivalente a $\frac{acd}{bcd}$, pode-se efetuar a operação do seguinte modo: $\frac{acd}{bcd} \times \frac{c}{d} = \frac{acd \div c}{bcd \div d} = \frac{ad}{bc}$.

Considerações Finais

Ao pensar neste artigo – debate, não tive a pretensão de esgotar o tema, como se pode conferir pela leitura do conjunto de artigos deste Bolema, e a diversidade de perspectivas em que o tema foi abordado. Trata-se de um artigo fundamentado em experiências, investigações e no que de mais avançado tem sido produzido pela comunidade brasileira e internacional de Educação Matemática.

O objetivo que persegui foi o de mostrar que, apesar de as frações terem adquirido um outro estatuto no currículo, devido à perda de força da componente utilitarismo, seu ensino é essencial e inegociável, isto se atribuirmos a devida importância a outros aspectos: o cultural, o formativo (de natureza cognitiva) e o matemático. Mas para isto é necessária uma reflexão crítica sobre o currículo, as práticas e objetivos do ensino-aprendizagem da matemática.

A maioria dos professores e autores de materiais didáticos, desconhece a história do conceito de frações, bem como suas componentes, epistemológica e cognitiva. O ensino de frações tem sido praticado como se nossos alunos vivessem no final do século XIX, um ensino marcado pelo mecanicismo, pelo exagero na prescrição de regras e macetes, aplicações inúteis, conceitos obsoletos, "carroções", cálculo pelo cálculo. Esta fixação pelo adestramento empobrece as aulas de matemática, toma o lugar de atividades instigantes e com potencial para introduzir e aprofundar idéias fortes da matemática. Professores, autores, investigadores, não importa a natureza de nossa atividade profissional, não temos o direito de sonegar aos alunos as possibilidades de exercício de pensamento matemático autêntico.

[Agradeço ao professor Carlos Vianna (UFPR) pelas valiosas sugestões críticas que fez às primeiras versões deste artigo].

Referências

BEHR, M. J. et al.. **Racional Number Concepts in Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. Lesh, R. e Landau, M. (ed.) New York: Academic Press. 1983.

BERTONI, N. Números fracionários: primórdios esclarecedores. In: **Coleção História da Matemática para professores,** SBHM. 2005.

BIGODE, A. J. L. **Matemática Hoje é Feita Assim** (6ª série) São Paulo: FTD. 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemáti*ca: 1-4. Brasília: MEC/SEF. 1997.

___________. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemáti*ca: 5-8. Brasília: MEC/SEF. 1998.

CAJORI, F. **A History of Mathematical Notatios**. Florian Cajori. Dover. 1993 (1ª. Ed. 1928).

CURY, H. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica. 2007.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an Educational Task**. Dordrecht: Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1973.

FISCHBEIN, E. **The Theory of Figural Concepts**. Education Studies in Mathematics, 1993.

GIMENEZ, J. **Innovació metodológica sobre el racional positiu**. (1990) tese não publicada.

HART, K. M. **Fractions in Children´s Understanding of Mathematics**. Hart, K. (ed.) Londres: Murrray. 1981. p. 11-16.

HILTON, P. **Do We Still Need Fractions in the Elementary Curriculum?.** In: Proceedings of the IV International Congress on Mathematical Education. Boston: Birkhäuser. 1980. p. 37-41

LLINARES, S.;Garcia, M. V. S. **Fracciones**, Madrid: Editorial Sintesis, 1988.

MOREIRA, M. A. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação na sala de aula.** Brasília: Editora UnB. 2006.

NELSEN, R. B. **Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking**. MAA. 1993.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças Fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas. 1997.

SANTOS, M. E. V. M. **Mudança Conceitual na Sala de Aula – Um Desafio Pedagógico.** Lisboa: Livros Horizonte. 1991.

SPINILLO, A. G. **Aprendendo a fazer julgamentos proporcionais usando o referencial de 'metade'**. In: II Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática (CIBEM). 1994, Blumenau: Livro de resumos, 1994.

________________. **Noções iniciais das crianças sobre probabilidade**. In: XXIV Reunião anual de Psicologia da SBP, 1994. Livro de Resumos. Ribeirão Preto, 1994.

TAHAN, M. **O Homem que Calculava**. 55ª. Edição Rio de Janeiro. Ed. Record. 2001. (1ª. Ed. 1938).

__________. **Didática da Matemática**. São Paulo: Editora Saraiva. 1961.

VERGNAUD, G. (1983). **Multiplicative Structures in Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.** Lesh, R. e Landau, M. (ed.) New York: Academic Press. 1983.

________________ **El nino. Las Matemáticas y la Realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria**. México: Trillas. 1991.

Aprovado em novembro de 2007
Submetido em abril de 2007

ANEXO C

Artigo a respeito de novas perspectivas para o ensino e a aprendizagem dos números racionais

UMA NOVA VISÃO SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS

LOURDES DE LA ROSA ONUCHIC
LUCIENE SOUTO BOTTA

Atualmente, com o uso das calculadoras, é frequente se ouvir que pouca atenção deve ser dada ao ensino dos algoritmos das operações com números inteiros, decimais ou fracionários. Embora não haja muita pesquisa se preocupando com esse tipo de instrução, seria interessante pensar-se que se um trabalho, nesse sentido, devesse ser assumido, isso deveria ser feito de um modo mais significativo do que o que se tem feito até agora, onde regras de "como fazer" são privilegiadas.

Quem está ou já esteve trabalhando com números racionais nota grandes dificuldades no ensino-aprendizagem desse tópico. Na literatura existente sobre esse tema, todos os educadores matemáticos são concordes em dizer que há muita dificuldade aí, tanto para os alunos como para os professores.

O ensino sobre "frações" e principalmente o ensino de seus algoritmos tem sido muito questionado e isso acontece por várias razões. Há quem chegue a afirmar que os números racionais ainda estão no currículo escolar mais **por inércia** (... já que estão no programa então vamos trabalhar com eles) do que **por necessidade** (...onde, nas atividades diárias, usamos esse tipo de números?). Há muitas críticas devidas à constatação do baixo entendimento que os alunos apresentam em relação aos conceitos e às técnicas operatórias que envolvem esses números.

Patrick Groff, educador matemático americano, em seu artigo "A future for fractions" (Um futuro para as frações), na revista Mathematics Teacher, do NCTM (Conselho Nacional dos Professores de Matemática) nº 140, setembro de 1992, coloca que, ao se considerar o pouco uso daquilo que se conhece sobre frações nas necessidades de "fora da escola", dá para se concluir que a manipulação das frações, como ensinada nas escolas, seria raramente necessária e que o fato de os adultos fazerem tão poucq uso delas força um questionamento sobre o que se deve ensinar sobre elas. Além disso, diz ele, que o tempo tão grande gasto, nesse trabalho, poderia ser usado no trabalho de outras idéias, dentro do ensino da matemática, com um melhor aproveitamento.

Respondendo a ele, Gordon Haigh, em seu artigo "These schoolish things"(Essas coisas da escola), na revista Mathematics Teacher, NCTM, nº 145, dezembro de 1993, contesta certas colocações de Groff e levanta a possibilidade de um debate sobre o assunto.

Em 1996, na revista Mathematics Teaching in the Middle School, nº 8, janeiro-fevereiro de 1996, Groff volta a falar sobre o assunto, tecendo críticas ao ensino de frações, às dificuldades na aprendizagem das frações, discute sobre as causas da ocorrência de tantas falhas no trabalho com frações e garante que as operações com números fracionários são difíceis para os estudantes do mundo inteiro. Pede que se faça uma reforma no ensino das frações e deixa, aos leitores, uma pergunta: "que evidência experimental indica que devemos continuar ensinando frações do mesmo modo que era ensinado no passado?

Mas, com freqüência, nos deparamos com situações numéricas do mundo real que exigem, de nós, o conhecimento de números racionais. Embora o conjunto dos números inteiros seja útil e importante como ferramenta de contagem e de cálculo, ao encontrar situações como medir uma quantidade de farinha para fazer um bolo, um pedaço de tecido para fazer uma blusa ou a probabilidade de se ganhar na loteria, vemos que outros tipos de números se tornam necessários. Neste caso, precisamos dos números racionais que podem tomar a forma de frações, razões, decimais, porcentagem. Além disso, historicamente, o desenvolvimento das frações fornece um meio de se fazer a transição da contagem para a medida.

Sabemos que as "frações" foram criadas para tratar com partes de conjuntos contínuos (por ex. um metro de corda) ou conjuntos discretos (por ex. uma dúzia de laranjas) e, também, para tornar a divisão sempre possível, ou seja, ao dividirmos 2 por 3, no conjunto dos números inteiros, encontramos como quociente 0 e resto 2, portanto divisão com resto, mas, se essa divisão fosse feita no conjunto dos números racionais obteríamos quociente 2/3 e resto 0, portanto, divisão exata. Outra coisa importante a considerar nas "frações" é o todo-referência.

No livro "Understanding Rational Numbers and Proportions", do NCTM, 1994, está escrito que como a matemática continua a se desenvolver como uma disciplina, outros usos para os números racionais poderão, possivelmente, ser descobertos. Isso já aconteceu, durante o século XVII, quando Blaise Pascal e Pierre de Fermat formularam a Teoria da Probabilidade e quando, no século XX, Benoit Mandelbrot formulou a Geometria dos Fractais. Essas duas teorias empregam números racionais. Ainda, soluções para muitos problemas que envolvem medida, geometria, álgebra, probabilidade e estatística requerem o conhecimento de e a familiaridade com números racionais e proporções. Vemos que estas últimas colocações fazem a defesa do ensino dos números racionais em geral e das frações em particular.

Para o ensino das "frações", muitas questões pertinentes surgem e os professores e educadores responsáveis por esse trabalho precisam, com certeza, saber o que se está fazendo nessa linha.

Apesar de tudo, o que se encontra, em geral, é **frustração** da parte do professor (por mais que eu me esforce, meus alunos não aprendem ...), **desinteresse e desânimo** da parte dos alunos (para que aprender isso? ... onde vou usar essas coisas? ... não consigo entender ...) e **perplexidade** da parte da sociedade (gasta-se tanto dinheiro com escolas, com cursos para professores, com reciclagem, ... e o ensino cada vez pior ...). Testes são aplicados e, a cada novo teste, parece que os resultados são mais desanimadores. O que se pode fazer para mudar esse quadro?

É preciso que nós, professores e educadores, nos coloquemos no lugar de nossos alunos, que reconheçamos suas dificuldades e que os deixemos falar sobre elas, que eles coloquem o que já conhecem, o que pensam e, a partir disso, devemos trabalhar os conceitos que queremos que eles adquiram e se apropriem para que, nas ocasiões adequadas, saibam aplicá-los.

Reconhecemos que o ensino convencional dos graus médios está produzindo estudantes com concepções excessivamente simplistas de números e de operações sobre números e estratégias excessivamente mecânicas para resolver problemas. O que é que nós, professores e educadores, podemos fazer, então, para tornar a aprendizagem de "frações" menos difícil e mais significativa para os estudantes? Que ajuda a pesquisa pode dar?

Hiebert e Behr, pesquisadores americanos, recomendam que:

a) o ensino deveria ser mais orientado para o significado do que para o símbolo;

b) em lugar de se colocar o conhecimento como um pacote pronto e acabado, o ensino deveria encorajar os alunos a construírem seu próprio conhecimento;

c) o ensino deveria trabalhar os alunos dentro de experiências de aprendizagem estruturadas, para ajudá-los a adquirir um conhecimento essencial, tanto conceitual como de procedimento.

Eles recomendam que uma atenção crescente seja dada ao desenvolvimento dos símbolos fracionários, desenvolvendo-se conceitos como os de ordem e de equivalência, importantes para se dar sentido ao tamanho relativo das frações e que levem os alunos a ligar sua compreensão e suas estratégias intuitivas com métodos mais gerais e formais.

Compreender "frações como números", "comparação de frações", "conversão para decimais" e "porcentagem" deveria ser bastante enfatizado. Em geral, trabalha-se mais nas habilidades em operar sobre frações, deixando transparecer que um trabalho penoso, com grandes números e muito cálculo, é que levaria os alunos à compreensão dos conceitos. Habilidade nas técnicas operatórias não é suficiente para se saber resolver problemas.

Um número racional, comumente pensado como uma "fração", é um número que pode ser expresso como um **quociente** ou uma **razão** de dois inteiros a e b, com b diferente de zero, isto é $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$.

Kieren, outro educador matemático, foi o primeiro a identificar personalidades diferentes nos números racionais. Ele identificou quatro modos básicos, que chamou subconstrutos dos números racionais, nos quais esses números podem ser interpretados como relação parte-todo (medida), quociente, razão e operador:

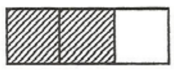
· No significado **parte-todo (medida)** a unidade é introduzida na forma de uma figura contínua (por ex. um pedaço de corda) ou um conjunto discreto (por ex. um determinado número de balas). Aqui o todo é repartido em partes de igual tamanho. Como **medida** envolve medir a área de uma região ao parti-la e cobri-la com unidades de um tamanho apropriado (formas congruentes ou não de mesma área).

· O significado **quociente** é percebido quando um número de objetos precisa ser repartido ou dividido igualmente num certo número de grupos. Este modo aparece, nas aplicações, mais freqüentemente do que os outros. Ele se refere ao uso dos números racionais como solução para uma situação de divisão (por ex. $\frac{2}{3}$ é o resultado da divisão de dois objetos entre três pessoas).

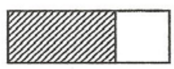
· Significado **razão** - Uma razão é uma relação de comparação multiplicativa entre duas quantidades de mesma medida (por ex. $\frac{1}{4}$ pode representar a razão de uma lata de suco concentrado para quatro latas de água e pode ser escrita 1:4). Observa-se que se diferentes medidas forem comparadas multiplicativamente a razão é chamada **taxa** (por ex. $\frac{50\,km}{h}$).

· Significado **operador** - Este significado é semelhante ao processo de "encolher" ou de "esticar", de "reduzir" ou "ampliar". Define uma estrutura multiplicativa de números racionais e é a "mais algébrica destas idéias básicas" (por ex. $\frac{1}{6}$, como operador, descreve a relação de se fazer pacotes com seis lápis). Ainda, como multiplicação, $a \times b$, onde a é o multiplicador e b é o multiplicando, $\frac{2}{3}$ pode ser visto assim:

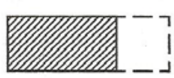
a) $\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$ (*duas vezes* $\frac{1}{3}$)



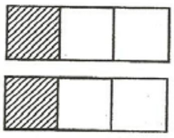
b) $\frac{2}{3} = 1 \times \frac{2}{3}$ (*uma vez* $\frac{2}{3}$)



c) $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times 1$ ($\frac{2}{3}$ *de* 1)



d) $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2$ ($\frac{1}{3}$ *de* 2)



Esses quatro subconstrutos têm propriedades matemáticas semelhantes e têm sido trabalhados com problemas diferentes, de modo a se extrair, dos alunos, tipos diferentes de respostas. Kieren recomendou que esses quatro subconstrutos estivessem presentes em qualquer currículo bem projetado de matemática. Ele insistiu dizendo que uma verdadeira compreensão de "frações" requer tanto uma compreensão desses subconstrutos quanto de suas inter-relações. Estas diferentes representações dependem do contexto do problema. De acordo com Kieren, o fato de terem entendido números racionais significa entenderem as diferentes interpretações dos números racionais tanto quanto as diferentes interpretações interrelacionadas.

Esta compreensão leva tempo para ser desenvolvida. "Compreensões não são tarefas de tudo ou nada mas, crescem, se desenvolvem e se expandem como um conceito que se encontra, repetidamente, em diferentes contextos e diferentes níveis de abstração e generalidade"(Gibb, Jones e Junge - 1959).

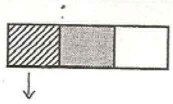
O modo mais eficaz de os alunos desenvolverem estas compreensões é o de lhes dar oportunidade de encontrar os diferentes significados dentro do contexto de uma variedade de situações-problema.

Usar símbolos abstratos, terminologia e formas de representação, sem desenvolver significado sobre a base das experiências dos estudantes, pode causar algumas das dificuldades que eles apresentam. A compreensão pode ser facilitada não somente quando os professores constroem sobre a linguagem informal dos alunos mas, também, quando usam materiais apropriados para representar os conceitos que serão desenvolvidos. Investir tempo para permitir aos estudantes trabalhar em pequenos grupos, a fim de repartirem suas idéias e interpretações sobre problemas que envolvem números racionais, poderá ajudá-los a esclarecer muitas dúvidas e avaliar suas idéias.

Fica mais difícil, para os estudantes, adquirirem a compreensão conceitual se, antes, eles tiverem aprendido os procedimentos de rotina. Assim, é essencial que se cuide bem da instrução inicial e, para isso, deve-se dar aos alunos muitas oportunidades de vivenciar os diferentes significados do número racional, dentro do contexto de uma variedade de situações-problema.

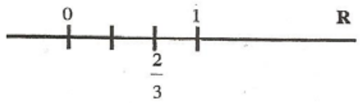
É importante deixar o aluno perceber que $\frac{2}{3}$ é ora um número, ora uma razão, ora uma relação parte-todo (ou medida), ora um operador. Ele deve perceber que essas situações representam questões diferentes:

- $\frac{2}{3}$, como **fração** (relação parte-todo), significa que se dividiu o todo em três partes iguais e se tomou duas delas.



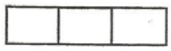
$\frac{1}{3}$ (medida da parte)

- $\frac{2}{3}$ como **número racional**, representa um ponto na reta.

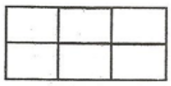


- $\frac{2}{3}$, como razão, vai dizer que **em cada 3** eu tomo 2. Por ex. se se pedisse para pintar $\frac{2}{3}$ de cada uma das figuras abaixo

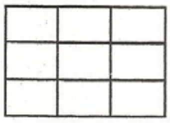
a)



b)



c)



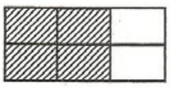
teríamos

a)

2 em 3, 2 : 3

$2:3 = \frac{2}{3}$

b)

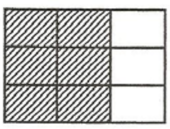


2 em 3, 2 : 3

2 em 3, 2: 3

$\rightarrow 4:6 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

c)



2 em 3, 2 : 3

2 em 3, 2 : 3

2 em 3, 2 : 3

$\rightarrow 6:9 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

. $\frac{2}{3}$, como um **operador,** visto dentro de uma aplicação, por ex., achar $\frac{2}{3}$ de 9, seria:

$$\frac{2}{3} \text{ x } 9 = (9 : 3) \text{ x } 2 = (9 \text{ x } 2) : 3 =$$

$$= \quad 3 \text{ x } 2 \quad = \quad 18 : 3 = 6$$

Nestes simples exemplos podemos perceber a grande variedade de problemas que podem ser trabalhados, a partir dessas diferentes "personalidades" assumidas pelo número racional.

Lourdes de la Rosa Onuchic
ICMSC - USP e UNESP - RC
Luciene Souto Botta
UNESP - RC