



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

DIEGO BARBOZA PRESTES

**PROVA EM FASES DE MATEMÁTICA:
UMA EXPERIÊNCIA NO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Londrina
2015

DIEGO BARBOZA PRESTES

**PROVA EM FASES DE MATEMÁTICA:
UMA EXPERIÊNCIA NO 5^o ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco

Londrina
2015

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da
Universidade Estadual de Londrina**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

P936p Prestes, Diego Barboza.

Prova em fases de matemática : uma experiência no 5º ano do ensino fundamental / Diego Barboza Prestes. – Londrina, 2015.
122 f. : il.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2015.

Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Rendimento escolar – Avaliação – Teses. 3. Estudantes – Avaliação – Teses. 4. Educação matemática – Teses. 5. Estudantes – Testes e medidas educacionais – Teses. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

DIEGO BARBOZA PRESTES

**PROVA EM FASES DE MATEMÁTICA:
UMA EXPERIÊNCIA NO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Profa. Dra. Regina Luzia Corio
de Buriasco
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Profa. Dra. Magna Natalia Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Profa. Dra. Maria Isabel Ramalho Ortigão
Universidade do Estado do Rio de Janeiro -
UERJ

Londrina, ____ de _____ de ____.

À minha mãe e ao meu pai por tudo
que vêm me ensinando.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado saúde e sabedoria.

Aos meus pais, que sempre me incentivaram a estudar e a ser um homem de bem.

À minha orientadora Regina Buriasco, não só pela constante orientação neste trabalho, mas sobretudo pelo seu respeito e por acreditar em meu potencial, talvez até mais do que eu mesmo.

À Adriane Gaspari, por seus incentivos e principalmente por sua compreensão durante toda a trajetória do mestrado.

Às professoras da banca, Magna Natalia Marin Pires, Maria Isabel Ramalho Ortigão e às suplentes Edilaine Regina dos Santos e Marcia Cristina Nagy, por aceitarem examinar este trabalho e pelas importantes contribuições.

A todos da Escola Municipal José Brazil Camargo, por conceder o “espaço” para a realização da pesquisa, em especial aos alunos do 5º ano de 2014, à diretora Miriam, à coordenadora Debora e à professora Patrícia, que disponibilizou parte de suas aulas durante o desenvolvimento do trabalho.

Aos parceiros do GEPEMA que são quase irmãos para mim.

Às minhas colegas de viagem semanal a Apucarana.

A todos os amigos que me ajudaram de alguma forma.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro concedido a esta pesquisa.

Tudo posso naquele que me fortalece.

Filipenses 4:13

PRESTES, Diego Barboza. **Prova em fases de Matemática:** uma experiência no 5º ano do Ensino Fundamental. 2015. 122f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma pesquisa realizada com uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do Paraná na qual se utilizou uma prova em fases como instrumento de avaliação. A avaliação da aprendizagem escolar tomada como prática de investigação, possibilitou ao pesquisador analisar as produções escritas dos alunos em diferentes momentos, para realizar suas intervenções. As resoluções das tarefas propostas na primeira fase da prova foram o ponto de partida para intervenções. Assim como proposto na abordagem de ensino da Educação Matemática Realística, os alunos desempenharam o papel de protagonistas de sua aprendizagem, e o pesquisador por sua vez, um tipo de guia, intervindo no processo por meio de perguntas e/ou considerações a respeito da produção de cada aluno em suas respectivas provas no decorrer de cada fase. A prova em fases mostrou-se um “bom” instrumento de avaliação capaz de estabelecer um diálogo entre professor e alunos, com potencial para possibilitar uma reflexão tanto de alunos quanto de professores, além de proporcionar mais uma oportunidade de aprendizagem.

Palavras-chaves: Educação Matemática Realística. Prova em Fases. Análise da Produção Escrita. Avaliação Escolar como Prática de Investigação.

PRESTES, Diego Barboza. **Stage Test in Mathematics**: an experience in a fifth grade class of Elementary School. 2015. 122f. Dissertation of Master's degree (Post-Graduation Program on the Teaching of Sciences and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina, 2015.

ABSTRACT

This paper presents a survey of a fifth grade class of Elementary School, in a public school of Paraná, in which we used the Stage Test as an assessment tool. The assessment of school learning taken as investigation practice, enabled the researcher to analyze the written productions of the students at different times, to carry out their activities. The resolutions of the tasks proposed in the first stage of the test were the starting point for interventions. As proposed in the teaching approach of Realistic Mathematics Education, students played the role of protagonists of their learning, and, the researcher in turn, a kind of guide, intervening in the proceedings by asking questions and/or considerations of production of each student in their evidence during each phase. The Stage Test proved to be a “good” assessment tool able to establish a dialogue between teacher and students, with the potential to enable a reflection of both, students and teachers, besides providing more opportunities for learning.

Key words: Realistic Mathematics Education. Stage Test. Analysis of Written Production. School Assessment Process as an Investigation Practice.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Movimento da aplicação da prova em fases	43
Figura 2 – Painel da Copa do Mundo construído pela turma do 5º ano	55

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Descrição da análise da produção escrita em matemática no âmbito do GEPEMA.....	25
Quadro 2 – Classificação a respeito do uso de contexto segundo De Lange (1987)	36
Quadro 3 – Classificação de problemas segundo Butts (1997).....	36
Quadro 4 – Classificação de problemas por contexto segundo Díaz e Poblete (2005)	37
Quadro 5 – Classificação das tarefas da prova em fases	38
Quadro 6 – Frequência dos alunos no decorrer da prova	62
Quadro 7 – Agrupamentos das respostas	64

SUMÁRIO

TRAJETÓRIA ESCOLAR	12
1 INTRODUÇÃO	15
2 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA	17
3 ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA.....	24
4 AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR COMO PRÁTICA DE INVESTIGAÇÃO	30
5 PROVA EM FASES	34
5.1 CLASSIFICAÇÃO DAS TAREFAS	36
6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	39
6.1 A PRIMEIRA FASE	43
6.1.1 Após a 1ª Fase da Prova	47
6.2 A SEGUNDA FASE	48
6.2.1 Após a 2ª Fase da Prova	50
6.3 A TERCEIRA FASE.....	51
6.3.1 Após a 3ª Fase da Prova	54
6.4 A QUARTA FASE	54
6.4.1 Após a 4ª Fase da Prova	58
6.5 A QUINTA FASE	59
6.5.1 Após a 5ª Fase da Prova	61
7 ANÁLISE DO MATERIAL.....	62
7.1 ALUNOS DO GRUPO G1	64
7.1.1 Aluno 14D01	64
7.1.2 Aluno 14D08	66
7.1.3 Aluno 14D11	68
7.1.4 Aluno 14D16	69
7.1.5 Aluno 14D17	72
7.1.6 Aluno 14D18	73
7.1.7 Aluno 14D26	76
7.2 ALUNOS DO GRUPO G2.....	77

7.2.1 Aluno 14D07	77
7.2.2 Aluno 14D20	80
7.2.3 Aluno 14D21	82
7.2.4 Aluno 14D25	85
7.3 ALUNOS DO GRUPO G3.....	87
7.3.1 Aluno 14D05	88
7.3.2 Aluno 14D12	90
7.3.3 Aluno 14D15	92
7.3.4 Aluno 14D23	94
7.3.5 Aluno 14D24	97
7.3.6 Aluno 14D27	99
7.3.7 Aluno 14D28	101
7.3.8 Aluno 14D30	103
8 DISCUSSÃO	106
9 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES.....	109
REFERÊNCIAS.....	112
APÊNDICES	117
APÊNDICE A.....	118
APÊNDICE B.....	120

TRAJETÓRIA ESCOLAR

Minha trajetória escolar começou na pré-escola, onde iniciei meus compromissos com horários e aulas diárias. No Ensino Fundamental I, eu já “me dava bem” com a Matemática e não tive dificuldades em “decorar” a tabuada como a maioria dos meus colegas. No Ensino Fundamental II, muitos colegas se referiam à Matemática como se fosse “um bicho de sete cabeças”, por isso, no início da antiga 5ª série, fiquei com um pouco de medo, de tanto eles comentarem da suposta dificuldade que eu teria com a Matemática. Esse medo me assombrou até a primeira prova, quando fui relativamente bem, e percebi que a Matemática da 5ª série não era “tudo aquilo” que os colegas me disseram.

Logo veio o Ensino Médio e eu começava a prestar atenção aos comentários dos meus pais, que, mesmo sem terem concluído o Ensino Fundamental, informavam a minhas irmãs e a mim que estudar era importante. Nesse período consegui meu primeiro emprego, em uma marcenaria, local onde eu ficava fascinado com o rápido raciocínio matemático do marceneiro ao cortar as chapas de madeira de modo a obter o menor desperdício possível. Nesse trabalho, a Matemática estava presente a todo momento, ali eu começava a perceber o quanto essa ciência era importante para determinadas profissões.

Quando eu estava no 3º ano do Ensino Médio, só pensava em terminar aquele nível escolar e trabalhar para ajudar minha família com as despesas domésticas, até que, certo dia, um dos meus professores de Matemática me perguntou para qual curso eu iria prestar vestibular. Eu lhe respondi que não pretendia participar de tal seleção e ele me disse que eu “levava jeito com a Matemática” e que, na opinião dele, deveria prestar vestibular para um curso de ciências exatas. A partir desse dia, comecei a pensar em prestar vestibular. Pouco tempo depois, o filho do marceneiro para o qual eu trabalhava, que era meu amigo, me informou que iria se matricular em um “cursinho” pré-vestibular e me convidou, dizendo algumas supostas vantagens que o curso oferecia. Assim, me encorajei e decidi me matricular no “cursinho” pré-vestibular para participar do processo seletivo, mas não sabia ao certo para qual curso prestaria o vestibular. No dia de preencher o formulário de inscrição, optei pela Matemática e, em meu primeiro vestibular, consegui uma vaga para o curso de Bacharelado em Matemática na UEL (Universidade Estadual de Londrina), sem saber a diferença entre bacharelado e

licenciatura.

Em minha primeira prova no Ensino Superior, meu desempenho foi péssimo, pois eu não havia estudado coisa alguma, imaginando que na universidade seria igual ao que era na escola, em que eu não estudava para as provas e sempre me “saía bem”. Cheguei a pensar que a universidade não era lugar para mim, mas, sabendo das dificuldades, estudei muito para a segunda prova e consegui um bom resultado. Com isso comecei a ter mais confiança e a perceber que, se eu me esforçasse, seria possível terminar o curso de Matemática.

No início do 2^o ano de graduação, transferi-me para o curso de Licenciatura em Matemática da própria UEL. No ano de 2005, quando cursava o 3^o ano de graduação, a professora Regina Buriasco me convidou para participar das reuniões do GEPEMA (Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação). Mesmo sem saber ao certo do que tratavam os encontros, fui conhecer e tive o privilégio de participar de discussões relacionadas a Educação Matemática e Avaliação da Aprendizagem Escolar em Matemática, na maioria das vezes como ouvinte. No entanto, essa minha primeira participação no GEPEMA não durou muito tempo, pois, por problemas pessoais, fui obrigado a deixar o grupo.

Mesmo após deixar o grupo de estudo, ao encontrar e conversar com colegas que permaneceram estudando no GEPEMA, quase sempre, eles me perguntavam quando eu iria voltar a participar das reuniões. Essas conversas me faziam refletir a respeito da minha volta para o GEPEMA, mas, após algum tempo afastado dos estudos, desanimei e já não acreditava em meu potencial para estudar. Meu pensamento por algum tempo era que eu não havia nascido para seguir carreira acadêmica.

No ano de 2012, ainda fora do GEPEMA, matriculei-me no curso de especialização em Educação Matemática na UEL e tive o privilégio de ser orientado pela professora Regina Buriasco, que me pediu veementemente para participar do GEPEMA e aceitei sem questionar. Assim, após quase sete anos afastado do grupo, voltei a participar do GEPEMA, do qual nunca deveria ter saído.

Quando retornei, o grupo estava realizando estudos a respeito da Educação Matemática Realística (RME)¹, uma abordagem da Educação Matemática de que eu nunca havia ouvido falar até então, mas, após fazer algumas leituras a

¹ *Realistic Mathematics Education.*

respeito do tema e participar das discussões do grupo, comecei a perceber o quanto essa abordagem faz sentido.

No final do ano de 2012, em uma das reuniões do GEPEMA, ao ser questionado se iria participar do processo seletivo para o Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, respondi que ainda não sabia, porque não me sentia preparado para cursar uma pós-graduação com o “peso” do mestrado da UEL. Nesse momento, a professora Regina Buriasco me perguntou: “Como assim não se sente preparado?” e fez uma afirmação categórica que me levou a rever meus conceitos: “Meu, você tem que acreditar mais em você!”. Após essa fala, comecei a perceber que algumas pessoas acreditavam mais em meu potencial para os estudos do que eu mesmo, então decidi me inscrever para o processo seletivo do mestrado. Assim, logo em meu primeiro processo seletivo, consegui entrar como aluno regular no mestrado, o que eu nunca havia imaginado que pudesse acontecer em minha vida.

Após ingressar no mestrado, comecei a pensar o porquê de não haver prestado a seleção anteriormente, e me vinha à cabeça a imagem de alguns colegas que me incentivavam a continuar estudando. Acredito, porém, que tudo na vida tem sua hora para acontecer, talvez antes eu ainda não tivesse certas experiências de vida que me auxiliaram a superar determinadas dificuldades no decorrer dos estudos ou mesmo maturidade para reconhecer a importância e me dedicar ao máximo em um curso como esse. No mestrado, ainda tive a oportunidade de cursar algumas disciplinas que me fizeram refletir sobre a vida e não apenas sobre o ensino de Matemática, isso foi muito importante para mim, pois, de certo modo, alterou minha maneira de encarar as situações do dia a dia.

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho, que tem como objetivo analisar a maneira como os alunos do 5º ano do Ensino Fundamental lidam com tarefas não rotineiras de Matemática em situação de prova, foi organizado em quatro partes.

A primeira parte traz a fundamentação teórica que sustenta o trabalho. Nela estão contidos três capítulos: Educação Matemática Realística (RME), com um breve histórico e principais características dessa abordagem de ensino, na qual o instrumento de avaliação utilizado neste estudo tem suas raízes; Análise da Produção Escrita, que mostra o entendimento de alguns integrantes do GEPEMA a respeito desse tipo de análise, assim como as informações que podem ser obtidas por meio de sua utilização; Avaliação da Aprendizagem Escolar como Prática de Investigação, em que se apresenta a Prova em Fases.

A segunda parte traz os procedimentos metodológicos utilizados no trabalho, com uma descrição do movimento da prova em fases no decorrer de cada etapa e de toda a trajetória percorrida em cada um dos encontros com os alunos.

A terceira parte está destinada à análise do material, com o caminho seguido para realizar certas escolhas, agrupar os registros dos alunos e a descrição completa da produção escrita de um recorte de dezenove participantes em cada uma das fases da prova.

Na quarta parte estão algumas discussões: elementos que saíram como o esperado e também elementos que não foi possível atingir neste trabalho; e algumas considerações a respeito do trabalho como um todo.

A história por trás da construção deste trabalho começou bem antes do estudo de referenciais teóricos específicos ou de colher registros escritos dos alunos. No início das aulas do primeiro ano do curso de Mestrado em 2013, houve o convite para participar do projeto “Educação Matemática de Professores que ensinam Matemática”² do Programa Observatório da Educação³ - Edital CAPES/INEP nº 38/2010. Ao ingressar no projeto, ele já se encontrava em andamento e ocorria presencialmente às terças-feiras com alguns professores do

² “O projeto tem por objetivo principal fomentar a produção acadêmica relativa à formação de professores que ensinam matemática e à formação de recursos humanos em Educação Matemática na Educação Básica, na Graduação e na Pós-Graduação (mestrado e doutorado), na busca de subsídios para elevação do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – IDEB” (PIRES, 2013, p. 11).

³ O programa visa ao desenvolvimento de estudos e pesquisas na área de educação e um de seus principais objetivos é promover a articulação entre a pós-graduação, as licenciaturas e as escolas de educação básica.

Ensino Fundamental I em uma escola municipal localizada em Apucarana no norte do Paraná. O projeto estava organizado com duas equipes, uma delas, da qual passei a fazer parte, trabalhava com a capacitação dos professores, enquanto a outra trabalhava com os alunos da escola.

Esse foi um dos motivos que me levou a realizar esta pesquisa, pois estava interessado em desenvolver um trabalho que estivesse intimamente ligado com o projeto em que acabara de entrar, mas que não se afastasse da linha de pesquisa do GEPEMA. Após algum tempo, decidi o tema da pesquisa: análise da produção escrita de alunos do Ensino Fundamental I em tarefas não-rotineiras⁴ de Matemática, que aliava as primeiras pesquisas realizadas pelos integrantes do GEPEMA, que tratam da análise da produção escrita, com os estudos do grupo naquele momento, Educação Matemática Realística (RME), e os sujeitos da escola de Ensino Fundamental I, que forneceriam as informações a serem tratadas na pesquisa. Outro motivo que levou a realizar esta pesquisa foi a possibilidade de apresentar as potencialidades que a análise da produção escrita oportuniza aos professores que ainda não a conhecem.

Optou-se pelas tarefas não-rotineiras para fugir do que a maioria dos alunos estão “treinados” a fazer, para afastá-los das palavras-chaves que geralmente os professores desse nível de ensino utilizam para ensinar a resolver tarefas matemáticas, de modo que não precisem mais ler o enunciado da tarefa para resolvê-la, apenas reconhecer as palavras-chaves, por já conhecerem o modelo pré-estabelecido. Como as tarefas não-rotineiras não seguem um “modelo” específico, pode-se olhar a produção escrita dos alunos em um contexto em que eles de fato tenham que ler o enunciado da tarefa, como se fosse pela “primeira vez”.

Para realizar esta pesquisa, escolheu-se a prova em fases, porque até então, no âmbito do GEPEMA, não havia trabalho algum que utilizasse esse tipo de ferramenta com alunos do Ensino Fundamental I, além de a prova em fases estar com seus pressupostos relacionados à abordagem da RME.

⁴ Questões que não são frequentemente trabalhadas em sala de aula e geralmente não são encontradas com frequência nos livros didáticos.

2 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

A Educação Matemática Realística (RME) é uma abordagem para o ensino de Matemática desenvolvida, principalmente, a partir das ideias do educador matemático Hans Freudenthal⁵ (1905-1990).

Hans Freudenthal nasceu em 1905, em Luckenwalde na Alemanha, e desde cedo alguns fenômenos matemáticos lhe chamavam a atenção. Em 1923, começou a estudar Matemática na universidade de Berlim e, em 1930, mudou-se para Amsterdã para ser assistente do famoso matemático L. E. J. Brouwer (1881-1966) na universidade local. No início da década de 1940, Freudenthal teve problemas com o regime nazista por ser judeu e se afastou das suas funções na universidade de Amsterdã. Em 1946, Freudenthal se tornou professor de Matemática Teórica e Aplicada na Universidade de Utrecht, também na Holanda, onde trabalhou até se aposentar, em 1975. Nesse período, contribuiu significativamente para a Topologia, a Geometria e a Teoria de Grupos de Lie. Ainda como professor, ganhou fama internacional por ser um dos precursores da RME, que se baseia na resolução de problemas reais que partem de experiências cotidianas ou possíveis de serem imaginadas, em vez de regras de Matemática abstratas e distantes da realidade dos alunos.

Desde 1968, Freudenthal se destacava como uma das principais lideranças da comunidade internacional de Educação Matemática, por ter sido o primeiro presidente do ICMI (*International Commission on Mathematical Instruction*) e por ter criado a importante revista *Educational Studies in Mathematics*.

Hans Freudenthal nos ensinou a olhar a matemática como um campo de conhecimento que é firmemente integrado em nossa cultura e determinado por ambos os fatores: externo ('aplicada') e interno ('pura') (WITTMANN, 2005, p. 295, tradução nossa⁶).

O termo inglês "realistic" está relacionado com o verbo neerlandês "zich REALISE-ren" que foi traduzido como "realístico", atrelado ao significado de "imaginar", "realizar", "fazer ideia", "tomar consciência de". Mesmo assim, o termo "realística" pode levar algumas pessoas a pensarem que os contextos das tarefas da RME devem ser sempre do "mundo real", quando na verdade isso nem sempre é

⁵ Mais informações a respeito da vida e obra de Hans Freudenthal podem ser obtidas no *site* do instituto Freudenthal: <www.fisme.science.uu.nl>.

⁶ Hans Freudenthal has taught us to look at mathematics as a field of knowledge that is firmly integrated into our culture and determined by both external ('applied') and internal ('pure') factors.

necessário.

O mundo da fantasia dos contos de fadas e até mesmo o mundo formal da matemática pode proporcionar adequados contextos para um problema, na medida em que sejam reais nas mentes dos estudantes e eles possam tê-los como experiências reais para si mesmos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 2, tradução nossa⁷).

No período em que a RME surgiu na Holanda, os educadores locais buscavam uma proposta curricular que modernizasse a Educação Matemática no país. O propósito era elaborar uma alternativa às influências principalmente do Movimento de Matemática Moderna que começava a interferir na educação holandesa por meio de materiais traduzidos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996). Um dos principais motivos para a reforma holandesa relacionava-se com a substituição da abordagem mecanicista que estava prevalecendo na Educação Matemática do país. Nessa abordagem, o foco estava em cálculos com números simples e pouca atenção às aplicações. Para realizar essa alteração, os educadores não adotaram a abordagem empirista – em que os alunos eram deixados livres para descobrir por si próprios – que predominava na Inglaterra, nem a abordagem estruturalista – que visa ao ensino de Matemática com foco em conceitos abstratos – que levou os Estados Unidos ao movimento da Matemática Moderna (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).

O impulso para o movimento de reforma na Holanda ocorreu mais precisamente em 1968, com a criação do projeto Wiskobas (que significa “matemática nas escolas primárias”) iniciado por Wijdeveld, Goffree e Treffers⁸, que se juntou a eles um pouco mais tarde. Em 1971, o estabelecimento do IOWO (Instituto para o Desenvolvimento de Educação Matemática), que tinha Freudenthal como diretor, forneceu as instalações para o desenvolvimento do projeto Wiskobas. Como Freudenthal era resistente ao movimento da Matemática Moderna para a educação, houve novo impulso para o movimento holandês (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, 2010). Freudenthal (1979, p. 323) resumiu os conceitos fundamentais do IOWO por meio de alguns *slogans*:

⁷ The fantasy world of fairy tales and even the formal world of mathematics can provide suitable contexts for a problem, as long as they are real in the students’ minds and they can experience them as real for themselves.

⁸ Foram esses três que de fato construíram a fundação para a Educação Matemática Realística (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).

- actividade humana em vez de disciplina pré-estabelecida;
- matematização da realidade, em vez de realidade já matematizada;
- reinvenção em vez de transmissão dos conceitos;
- apresentação da realidade como fonte, *a priori*, da matemática, em vez de domínio de aplicação;
- articulação da matemática com os outros domínios, em vez de apresentação isolada;
- contextos ricos de significado, em vez de reunião de problemas linguísticos;
- elaboração de figurações mentais, em vez de conceitos;
- abordagens múltiplas em relação a conceitos novos, em vez de concretização múltipla;
- compreensão em vez de mecanismo.

No ano de 1981, o IOWO foi sucedido pelo OW & OC (Grupo de Investigação para a Educação Matemática e Centro de Computação Educacional) e, em 1991, passou a se chamar FI (Instituto Freudenthal) ou Flsme (*Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education*), em homenagem a Freudenthal.

Segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2001), a forma atual da RME é caracterizada principalmente pela visão que Freudenthal tinha da Matemática. “De acordo com Freudenthal, a matemática deve ser conectada com a realidade, estar perto das crianças e ser relevante para a sociedade, a fim de ser de valor humano” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 10, tradução nossa⁹). “Em vez de ver a matemática como tema que tem de ser transmitido, Freudenthal destacou a ideia de matemática como uma atividade humana” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001, p. 3, tradução nossa¹⁰). Para ele, além de a Matemática ser “uma atividade humana simultaneamente natural e social, tal como a palavra, o desenho e a escrita” (FREUDENTHAL, 1979, p. 321), também

é uma atividade de resolução de problemas, de procura por problemas, mas é também uma atividade de organização de um determinado assunto. Esse pode ser um assunto da realidade, que deve ser organizado de acordo com padrões matemáticos caso os problemas da realidade tenham que ser resolvidos. Também pode ser um assunto matemático, resultados novos ou antigos, seus próprios ou de outros, que deve ser organizado de acordo com novas ideias, para ser mais bem compreendido, em um contexto mais amplo ou por meio de uma abordagem axiomática (FREUDENTHAL,

⁹ According to Freudenthal, mathematics must be connected to reality, stay close to children and be relevant to society in order to be of human value.

¹⁰ Instead of seeing mathematics as subject matter that has to be transmitted, Freudenthal stressed the idea of mathematics as a human activity.

1971, p. 413-414, tradução nossa¹¹).

Concebendo a Matemática como uma atividade humana, pode-se afirmar que os alunos aprendem Matemática fazendo-a, ou, como propõe a RME, aprendem Matemática matematizando, o que os coloca em uma posição central no processo de ensino e de aprendizagem, ou seja, “os alunos, em vez de serem os receptores de Matemática pronta, são tratados como participantes ativos no processo educacional, no qual eles mesmos desenvolvem todos os tipos de ferramentas matemáticas e *insights*” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p.11, tradução nossa¹²). Uma aula somente pode tornar-se vital para um estudante se ela fizer sentido para ele, por meio de uma reconstrução ativa do que lhe foi proposto (WITTMANN, 2005).

A abordagem “tradicional” de ensino que parte do conteúdo matemático pronto para só depois ser aplicada em problemas é o trajeto contrário do trabalho dos matemáticos, o que Freudenthal chamou de inversão antididática (GRAVEMEIJER, 2005). Assim, a Educação Matemática deve propiciar ao aluno a oportunidade de ser “guiado” para “reinventar” a Matemática, isto é, o ponto focal na Educação Matemática não deve estar na disciplina como um sistema fechado, e sim no processo de matematização (FREUDENTHAL, 1968). Tanto o estudante quanto o professor ocupam uma posição central no processo de reinvenção guiada.

Freudenthal (1973) argumentava que os alunos conseguem reinventar a Matemática através da matematização, embora ele também reconhecesse que os alunos não conseguem simplesmente reinventar a Matemática que levou milhões de anos a matemáticos brilhantes a inventarem. Por isso, ele propõe a *reinvenção guiada*. Os professores e os manuais escolares têm de ajudar os alunos no processo, enquanto tentam garantir que os alunos experienciem a aprendizagem da Matemática como um processo de invenção da Matemática, por eles próprios (GRAVEMEIJER, 2005, p. 92).

Freudenthal chamou de matematização a atividade de organização de assuntos que envolvam tanto “questões da realidade” quanto “questões matemáticas”, utilizando ideias e conceitos matemáticos (GRAVEMEIJER; TERWEL,

¹¹ It is an activity of solving problems, of looking for problems, but it is also an activity of organizing a subject matter. This can be a matter from reality which has to be organized according to mathematical patterns if problems from reality have to be solved. It can also be a mathematical matter, new or old results, of your own or of others, which have to be organized according to new ideas, to be better understood, in a broader context, or by an axiomatic approach.

¹² The students, instead of being the receivers of ready-made mathematics, are treated as active participants in the educational process, in which they themselves develop all sorts of mathematical tools and insights.

2000). Treffers (1987) descreveu a matematização como uma atividade organizada essencial à construção de conhecimento, à aprendizagem de conceitos, à utilização de diferentes estratégias para resolução de problemas, ao uso da linguagem e de outras formas de organizações. O conceito de matematização foi introduzido inicialmente por Freudenthal e depois reformulado por Treffers (1978, 1987), que, em um contexto educativo, desenvolveu a ideia de dois tipos de matematização, distinguindo-a em “horizontal” e “vertical” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, 2001).

Na matematização horizontal, os alunos utilizam conhecimentos e competências matemáticas para tentar esquematizar o problema matematicamente, e as tarefas relacionadas a esse conceito geralmente são aquelas relacionadas com a tradução de um problema do mundo real para o mundo matemático, a determinação de relações e regularidades, entre outros (TREFFERS, 1987). Já na matematização vertical, os alunos realizam um processo de reorganização dentro do mundo matemático, generalizam uma solução, formalizam conceitos, e as tarefas envolvem o refinamento e ajustes de modelos, provas de regularidades e generalizações.

Van den Heuvel-Panhuizen também fez uma descrição dos tipos de matematização ao citar Treffers.

Na matematização horizontal, os alunos são confrontados com ferramentas matemáticas que podem ajudar a organizar e resolver um problema localizado em uma situação da vida real. A matematização vertical é o processo de reorganização dentro do próprio sistema matemático, como, por exemplo, encontrar atalhos e descobrir as conexões entre os conceitos e estratégias e então aplicar essas descobertas (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001, p. 3, tradução nossa¹³).

Freudenthal (1991) caracterizou a matematização horizontal como a ida do mundo real para o mundo dos símbolos e a matematização vertical como o movimento dentro do mundo dos símbolos, ou seja, quando os símbolos são moldados, manipulados, quando são determinadas conexões entre os conceitos e as estratégias. No entanto, para Freudenthal, não há muita clareza na distinção

¹³ In horizontal mathematization, the students come up with mathematical tools, which can help to organize and solve a problem located in a real-life situation. Vertical mathematization is the process of reorganization within the mathematical system itself, like, for instance, finding shortcuts and discovering connections between concepts and strategies and then applying these discoveries.

desses dois tipos de matematização, um não é mais importante que o outro, isto é, ambos possuem o mesmo valor e não é possível determinar quando termina um e começa o outro.

A RME pode ser resumidamente caracterizada por seis¹⁴ princípios¹⁵ que, de acordo com Van den Heuvel-Panhuizen (2010), são:

- Princípio da atividade: diz respeito à Matemática como atividade humana, ou seja, os alunos aprendem Matemática fazendo-a, sendo participantes ativos no processo de aprendizagem;
- Princípio da realidade: enfatiza a capacidade dos alunos em aplicar os conhecimentos matemáticos, não apenas ao fim de um processo, mas também no início. Assim, o processo de aprendizagem dos alunos deve começar com tarefas que possuem contextos ricos, que necessitam de certa organização matemática, isto é, contextos que podem ser matematizados.
- Princípio do nível: salienta que os alunos passam por vários níveis de compreensão na aprendizagem matemática, desde a invenção de soluções informais até a criação de atalhos e esquematizações para entender como os conceitos e estratégias estão relacionados. Os modelos são importantes para ligar os conhecimentos informais à Matemática mais formal, mas, para isso, um “modelo de” uma situação particular deve ser alterado para um “modelo para” todas as outras situações equivalentes.
- Princípio do entrelaçamento: remete à ideia de que os domínios da Matemática, como números, geometria e medidas, por exemplo, devem estar fortemente integrados, isto é, não devem ser tratados como capítulos estanques. Devem ser propostos aos alunos por meio de tarefas ricas em que eles possam utilizar vários conhecimentos e ferramentas matemáticas.
- Princípio da interatividade: traz à tona a ideia de que a aprendizagem da matemática não é apenas uma atividade pessoal, mas também é uma atividade social. Desse modo, a

¹⁴ Vários seguidores da RME, como Treffers (1987), por exemplo, apresentam em seus textos cinco princípios para RME, mas neste trabalho optou-se por utilizar como referência a autora Van den Heuvel-Panhuizen (2010), que descreve seis princípios.

¹⁵ Esses princípios estão relacionados com os dois tipos de matematização.

Educação Matemática deve propiciar aos alunos oportunidades para que compartilhem suas estratégias, invenções e descobertas com seus colegas, pois, assim, eles podem desenvolver suas estratégias e realizar reflexões, que podem levá-los a um nível maior de compreensão da tarefa proposta.

- Princípio da orientação: refere-se ao trabalho do sistema educacional de “guiar” os alunos para “reinventar” a Matemática. Para isso, professores e programas educacionais têm um papel crucial – professores com função proativa na aprendizagem dos alunos e programas educacionais disponibilizando cenários com potencial para alavancar alterações na compreensão dos alunos. Tanto professores quanto programas educacionais deveriam basear-se em longas trajetórias de ensino-aprendizagem coerentes.

3 ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA

Alguns trabalhos a respeito da produção escrita em Matemática desenvolvidos no GEPEMA¹⁶ (NAGY-SILVA, 2005; PEREGO, S., 2005; SEGURA, 2005; PEREGO, F., 2006; NEGRÃO DE LIMA, 2006; ALVES, 2006; DALTO, 2007; VIOLA DOS SANTOS, 2007; CELESTE, 2008; SANTOS, 2008; ALMEIDA, 2009; FERREIRA, 2009; BEZERRA, 2010; LOPEZ, 2010; SANTOS, 2014) têm mostrado, entre outros elementos, que, por meio da análise das produções escritas, é possível:

- compreender como alunos e professores que ensinam Matemática lidam¹⁷ com tarefas de Matemática;
- evidenciar os conhecimentos matemáticos que os alunos mostram saber em suas produções;
- obter indícios das características dos problemas que eles constroem por meio de sua interpretação do enunciado original;
- apontar que em muitos casos os alunos demonstram conhecer a Matemática necessária para resolver um problema, mas não conseguem interpretar o enunciado da maneira esperada.

Além disso, de acordo com Santos (2014, p. 69), “em aulas de matemática sob a luz da reinvenção guiada, a análise da produção escrita pode ser utilizada como uma estratégia de ensino”.

A partir desses trabalhos, pode-se apresentar um panorama geral de como a análise da produção escrita¹⁸ vem sendo tomada nas pesquisas realizadas pelos integrantes do GEPEMA. As descrições a seguir estão organizadas de acordo com o que se entende por produção escrita em cada trabalho.

¹⁶ Mais informações a respeito da análise da produção escrita em matemática no âmbito do GEPEMA podem ser obtidas no trabalho de Santos (2014).

¹⁷ Está se referindo às possíveis interpretações que alunos e professores podem fazer do enunciado, às estratégias (modo pelo qual se aborda um problema) e aos procedimentos (modo pelo qual se desenvolve a estratégia) utilizados por eles na resolução.

¹⁸ No decorrer do trabalho, quando nos referirmos a “análise da produção escrita” estamos falando em “análise da produção escrita em Matemática”.

Quadro 1 – Descrição da análise da produção escrita em matemática no âmbito do GEPEMA

Autor/Ano	Análise da produção escrita em matemática	
	Descrição do que é	Descrição do que possibilita
NAGY-SILVA (2005)	Alternativa para a reorientação da avaliação escolar e uma forma de conhecer quais conhecimentos os alunos demonstram ter e quais ainda estão em construção.	Realizar intervenções de modo a contribuir para o desenvolvimento dos alunos.
PEREGO, S. (2005)	Ferramenta que pode ser utilizada para investigar as respostas dos alunos e descobrir o que sabem ou como lidam com aquilo que não dominam ou dominam parcialmente.	Obter informações de como agir e em que e como intervir durante o processo de aprendizagem de seus alunos.
SEGURA (2005)	Fonte de informações a respeito das compreensões dos diferentes conteúdos, estratégias e procedimentos presentes na produção escrita.	Identificar o caminho percorrido pelos alunos e escolher quais intervenções poderão favorecer a aprendizagem.
PEREGO, F. (2006)	Caminho que pode ser utilizado para investigar e auxiliar o processo de aprendizagem.	Conhecer como os alunos expressam aquilo que sabem.
NEGRÃO DE LIMA (2006)	Processo investigativo da produção escrita dos alunos.	Conhecer e compreender como os alunos utilizam seus conhecimentos matemáticos.
ALVES (2006)	Conversa com a escrita do aluno que fornece informações, pistas sobre o desenvolvimento do processo ensino/aprendizagem.	Ter uma visão geral da aprendizagem dos alunos.
DALTO (2007)		Inferir algo acerca de seu conhecimento matemático e de como esse conhecimento matemático foi mobilizado para a resolução do problema.
VIOLA DOS SANTOS (2007)	Uma das formas de buscar conhecer as maneiras de alunos resolverem questões abertas de matemática, de conhecer como se configuram seus processos de aprendizagem. A análise da produção escrita se apresenta como uma estratégia para a	Inferir a respeito dos modos como interpretam o enunciado de uma questão, das estratégias que elaboram, dos procedimentos que utilizam, ou seja, é possível compreender como lidam com questões abertas de matemática.

	implementação da avaliação como prática de investigação.	
CELESTE (2008)	Um procedimento que pode ser utilizado para conhecer as estratégias de resolução dos alunos, as dificuldades apresentadas por eles e os erros cometidos.	(Re)orientação na prática pedagógica do professor.
SANTOS (2008)	Um dos caminhos que pode ser adotado em sala de aula pelo professor para implementar a avaliação como prática de investigação, para compreender os modos de pensar dos alunos e como lidam com problemas.	Contribuir para o professor planejar ações de modo que estas possam contribuir com a aprendizagem dos alunos.
ALMEIDA (2009)	Um dos caminhos que pode ser utilizado para que a avaliação como prática investigativa se constitua.	Inferir a respeito do que mostram saber e acerca dos caminhos que escolheram para resolver um problema.
FERREIRA (2009)	Ferramenta de investigação por meio da qual se pode obter informações a respeito dos processos de ensino e aprendizagem.	Conhecer de que forma os alunos lidam com questões de matemática, sejam elas rotineiras ou não.
LOPEZ (2010)	Um meio de obter informações sobre o processo de ensino e aprendizagem de alunos.	Obter informações a respeito do modo como os alunos lidam com tarefas apresentadas em situação de avaliação.
BEZERRA (2010)	Fonte de comunicação entre professor e aluno.	Conhecer os modos de compreensão dos alunos, os caminhos percorridos por eles, e o aluno, acompanhar o desenvolvimento de sua aprendizagem.

Fonte: SANTOS (2014, p. 20 – 22).

De modo geral, a análise da produção escrita está sendo utilizada pelo GEPEMA como uma fonte de investigação, que apresenta possibilidades de obter informações dos processos de ensino e aprendizagem em Matemática.

Entretanto, é preciso reconhecer que a análise da produção escrita por si só não dá conta de todos os processos. A sugestão é de que ela venha acompanhada de outras alternativas como, por exemplo, entrevistas, discussões e explorações coletivas, em sala de aula, a respeito de uma ou mais produções (FERREIRA, 2009, p. 24).

Ao destacar o potencial da produção escrita na avaliação, Van den Heuvel-Panhuizen (1996) também afirma que a análise da produção escrita permite

uma reflexão tanto da aprendizagem dos alunos quanto da atuação do professor. Para essa autora, mesmo que as informações obtidas com a produção escrita sejam meras impressões, se aliadas às observações constantes dos alunos durante o desenvolvimento das atividades, à interpretação dessas observações e à reflexão a respeito delas, essas informações podem fornecer um “retrato” do processo de ensino e de aprendizagem, indicando pistas de como o professor pode auxiliar os alunos em sua aprendizagem.

Os registros que os alunos fazem ao resolver as questões dão valiosas informações sobre o modo como compreenderam e registraram suas idéias a respeito da situação apresentada. Tais informações fornecem rico material para o professor incorporar ao seu repertório, no planejamento das aulas e para orientar suas escolhas didáticas, servindo como referência para conversar sobre matemática com o aluno (BURIASCO; CYRINO; SOARES, 2004, p. 2).

De acordo com Smith, Hillen e Heffernan (2001, p. 65 *apud* CIANI, 2012, p. 43),

[...] se os professores forem capazes de interpretar e entender os modos que os estudantes pensam e representam a matemática, eles podem utilizar estratégias de ensino sobre esses entendimentos, como também, ajudar os alunos a fazer conexões entre suas representações idiossincráticas e aquelas mais convencionais.

A análise da produção escrita também pode ser tomada como um tipo de diálogo, isto é, uma maneira de comunicação entre estudante e professor, e esse fato é um motivo a mais para fazer análise das produções escritas, pois, muitas vezes, essa é a única forma de diálogo existente entre professores e estudantes.

A análise da produção escrita também pode contribuir para que o professor procure entender o desenvolvimento e as respostas apresentadas nas resoluções dos alunos e até a razão pela qual foi escolhida determinada estratégia para resolver certa tarefa. Fazendo essa análise, o professor aumenta a possibilidade de (re)conhecer os conhecimentos matemáticos que os alunos já possuem e os conhecimentos que ainda estão em construção. Nesse processo é quase que inevitável o professor não identificar os possíveis equívocos que a resolução possa conter, mas até esses elementos da resolução devem ser utilizados para auxiliar a aprendizagem dos alunos, pois, a partir da “constatação de equívocos ou de falsas regras, o professor pode reorganizar sua prática pedagógica de modo a oportunizar aos alunos meios para compreensão/superação desses enganos”.

(NAGY-SILVA; BURIASCO, 2005, p. 507). Esses equívocos, que geralmente são chamados de erros, podem ser considerados como um tipo de alerta ao professor. Considerado “como um marco ou baliza, o erro é um indicador de (re)direcionamento pedagógico porque ele oferece oportunidade de crescimento, ao aluno, bem como de evolução, ao professor” (LORENZATO, 2010, p. 49 – 50).

A análise da produção escrita vai além de classificar as respostas dos alunos como certas ou erradas, pois um dos seus objetivos primordiais é analisar os meios que as originaram, “buscar o processo de construção de sua resolução, iniciando pela interpretação que [os alunos] fizeram do enunciado, passando pela elaboração de estratégia, utilização de procedimentos e chegando à apresentação de uma resposta” (VIOLA DOS SANTOS; BURIASCO; CIANI, 2008, p. 39). Ou seja, a análise da produção escrita permite “interrogar-se sobre os processos nos quais os alunos se envolvem ao resolver um problema, independentemente das respostas apresentadas” (FERREIRA, 2009, p. 26). Desse modo, espera-se que o professor, ao utilizar essa prática, abandone a cultura dicotômica das respostas certas ou erradas, que, segundo Viola Dos Santos, Buriasco e Ciani (2008, p. 37), está “intimamente ligada à exclusão e à competição, para uma cultura da multiplicidade das maneiras de lidar com os conhecimentos, que está ligada à solidariedade e à cooperação”.

Assim, seria interessante a análise da produção escrita fazer parte do grupo de procedimentos de ensino e de aprendizagem da Matemática na formação inicial dos professores e também na formação continuada, sendo apresentada a esses professores as características que lhes possibilitam entender os modos idiossincráticos com os quais os alunos lidam com as questões matemáticas e também as características que possibilitam a adequação ou a elaboração de uma ou mais formas de ensino diferente para atender as maneiras com as quais os estudantes lidaram com determinadas questões matemáticas (VIOLA DOS SANTOS; BURIASCO; CIANI, 2008).

No entanto, é preciso estar bem esclarecido que a utilização da análise da produção escrita fornece apenas uma amostra possível das informações a respeito da aprendizagem dos alunos. Por conseguinte, não é possível afirmar “que um estudante não sabe determinado conteúdo pelo fato de não se ter obtido uma informação sobre ele em sua produção escrita. Somente pode-se dizer algo a

respeito do que o estudante fez, e não do que deixou de fazer” (SANTOS, 2008, p. 23).

4 AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR COMO PRÁTICA DE INVESTIGAÇÃO

De certo modo, como seres humanos, somos avaliados constantemente: pela família, pelos colegas, pela sociedade. Mesmo sem perceber, estamos sendo avaliados com diferentes objetivos, nas mais diversas situações. Na escola, isso não é diferente, e a avaliação escolar é um elemento importante no processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com a Deliberação nº 007/99 do Conselho Estadual de Educação do estado do Paraná, em seu Artigo nº 6, “para que a avaliação cumpra sua finalidade educativa, deverá ser contínua, permanente e cumulativa” (PARANÁ, 1999). As orientações contidas em documentos que norteiam as práticas escolares indicam que a “avaliação não pode ser fundamentada apenas em provas bimestrais, mas deve ocorrer ao longo do processo de aprendizagem propiciando ao aluno múltiplas possibilidades de expressar e aprofundar a sua visão do conteúdo trabalhado” (PARANÁ, 2003, p. 68). Porém a avaliação que geralmente ocorre nas escolas se resume ao cumprimento de normas burocráticas baseadas na dicotomia da aprovação ou reprovação, não se preocupando com a aprendizagem, isto é, a alteração no discurso a respeito da perspectiva de avaliação em alguns documentos não está provocando mudança na prática avaliativa.

Segundo Buriasco (2000, p.160),

a avaliação precisa ser vista como um dos fios condutores da busca do conhecimento, de modo a dar pistas ao professor sobre qual o caminho já percorrido, onde o aluno se encontra, que práticas ou decisões devem ser revistas ou mantidas para que juntos, professor e alunos, possam chegar à construção do resultado satisfatório.

A avaliação como prática de investigação é uma alternativa para se tratar a avaliação como um desses fios condutores, pois esse tipo de avaliação é entendido como

um processo de buscar conhecer ou, pelo menos, obter esclarecimentos, informes sobre o desconhecido por meio de um conjunto de ações previamente projetadas e/ou planejadas que procura seguir os rastros, os vestígios, esquadrihar, seguir a pista do que é observável, conhecido (FERREIRA, 2009, p. 21).

Tomando a avaliação nessa perspectiva, o professor assume a função de investigador, com o propósito de se colocar na situação do estudante para

analisar suas produções escritas e inferir a respeito do porquê das soluções e respostas dadas às tarefas. Assim, o professor pode obter informações a respeito do andamento da aprendizagem de seus alunos e, com isso, readequar suas ações de ensino com o objetivo de gerar oportunidades de aprendizagem. Os alunos, por sua vez, podem obter informações acerca de seu processo de aprendizagem e tomar decisões que podem auxiliá-los em seus estudos. Desse modo, a avaliação passa a cumprir sua principal função que é “ajudar o aluno por intermédio da inter-relação aluno/professor ao longo do processo de ensino e aprendizagem” (BURIASCO, 2000, p. 158).

Para isso ocorrer, há que se alterar a maneira “tradicional” de se pensar a avaliação, pois, como prática de investigação, o objetivo não é classificar ou excluir os alunos, mas sim “interpretar, incluir, regular, mediar os processos de ensino e aprendizagem proporcionando indicativos para o desenvolvimento de capacidades matemáticas dos alunos e para a prática pedagógica dos professores” (VIOLA DOS SANTOS; BURIASCO; CIANI, 2008, p. 37). “A análise da produção escrita de alunos é considerada como um dos recursos para que a avaliação escolar seja entendida como prática de investigação” (FERREIRA, 2013, p. 20).

Essa prática vai ao encontro do objetivo da avaliação proposto nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática (PARANÁ, 2008), que é o de proporcionar “subsídios para as decisões a serem tomadas a respeito do processo educativo que envolve professor e aluno no acesso ao conhecimento” (p. 31).

De acordo com Esteban (2000, p. 11),

a avaliação como prática de investigação se configura pelo reconhecimento dos múltiplos saberes, lógicas e valores que permeiam a tessitura do conhecimento. Neste sentido, a avaliação vai sendo constituída como um processo que indaga os resultados apresentados, os trajetos percorridos, os percursos previstos, as relações estabelecidas entre pessoas, saberes, informações, fatos, contextos.

Nesse tipo de avaliação, a ênfase está na trajetória percorrida pelo aluno ao resolver uma tarefa e não apenas no resultado obtido. O professor não trabalha a partir de uma única resposta esperada, aquela considerada correta, mas questiona os alunos a respeito das mais diferentes respostas dadas, das estratégias utilizadas, dos procedimentos adotados, para obter informações a respeito do que os alunos sabem.

Dessa maneira, o professor reconhece e valoriza os caminhos percorridos nas construções das soluções das tarefas e as várias interpretações que um mesmo tipo de situação pode oferecer, abrindo espaços para as diferenças entre os saberes dos alunos, levando em consideração o ritmo de aprendizagem de cada um deles, que estão em constante processo de aprendizagem.

Nessa perspectiva, a avaliação deixa de ser realizada apenas ao final de um ciclo para ser realizada em todo o processo de aprendizagem. Por conseguinte, os diversos tipos de tarefas que o professor utiliza no cotidiano da sala de aula para oportunizar aprendizagem podem se configurar como tarefas de avaliação, sendo “impossível dizer onde termina a aprendizagem e começa a avaliação” (DE LANGE, 1999, p. 25, tradução nossa¹⁹).

Para colher informações que auxiliem tanto professores quanto alunos a tomarem certas decisões, vários instrumentos podem ser utilizados uma vez que um instrumento de avaliação pode priorizar determinados elementos e deixar outros de lado. Geralmente as informações obtidas com um instrumento de avaliação completam ou esclarecem algumas informações que já começaram a ser obtidas por meio de outro instrumento de avaliação. Essa é uma das razões pelas quais é importante conhecer as potencialidades e as limitações de cada instrumento de avaliação que se pretende utilizar.

Um dos instrumentos de avaliação da aprendizagem mais utilizados é a prova escrita, que geralmente é tomada como sinônimo de avaliação nas escolas. As questões são, normalmente, retiradas de livros didáticos e priorizam exercícios de técnicas, reprodução de procedimentos e o reconhecimento de propriedades, o que tem sido criticado. A crítica, porém, não deve estar voltada para o instrumento prova escrita, mas para o uso que se faz dela, porque é possível utilizar a prova escrita como um dos instrumentos da avaliação como prática de investigação, realizando, por exemplo, uma análise da produção escrita dos alunos. Para isso são consideradas “boas” as tarefas que proporcionam oportunidade de justificar estratégias e procedimentos e de produzir conhecimento matemático.

De Lange (1999) lista nove princípios para nortear o trabalho do professor no preparo da avaliação:

1. o objetivo principal da avaliação escolar deve ser a aprendizagem;

¹⁹ “It is impossible to say where the learning ends and assessment begins.”

2. a matemática deve estar imersa em problemas que sejam realísticos e “valham a pena”;
3. os métodos de avaliação devem permitir que os estudantes revelem mais aquilo que sabem ao invés do que não sabem;
4. a avaliação deve ser balanceada e incluir múltiplas e variadas oportunidades para os estudantes mostrarem e documentarem suas realizações;
5. as tarefas de avaliação devem operacionalizar todas as metas do currículo;
6. os critérios de classificação devem ser públicos e consistentemente aplicados;
7. o processo de avaliação, incluindo os critérios de pontuação e classificação, deve ser acessível aos estudantes;
8. os estudantes devem ter oportunidade de receber *feedback* do seu trabalho;
9. a qualidade de uma tarefa deve ser definida por características como autenticidade e equidade (*apud* TREVISAN, 2013, p. 72).

Considerando-se esses nove princípios e a ideia da avaliação como prática de investigação, a avaliação deixa de ser um elemento de punição e passa a ser encarada como mais uma oportunidade de aprendizagem, além de contribuir para a inclusão, aceitando as diferenças entre alunos.

5 PROVA EM FASES

No âmbito da RME, são utilizados alguns instrumentos de avaliação desenvolvidos como alternativa para a prova escrita dita “tradicional” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996), aquela realizada individualmente, sem consulta e com tempo restrito. Entre esses instrumentos está a prova em duas fases, concebida na Holanda (PIRES, 2013) como sendo objeto de estudo de De Lange em 1987. A ideia central desse instrumento de avaliação consiste basicamente em

elaborar um teste a que o aluno responde em dois momentos: num primeiro momento, na sala de aula e sem quaisquer indicações do professor; num segundo momento, dispondo de mais tempo e dos comentários que o professor formulou ao avaliar as respostas iniciais (PONTE et al., 1997, p. 106-107).

Uma das características marcantes da prova em duas fases é a combinação das vantagens de uma prova escrita, geralmente utilizada em todos os níveis escolares, com as possibilidades que as tarefas consideradas abertas²⁰ podem oferecer (DE LANGE, 1999). “Esse formato de instrumento de avaliação permite que o aluno volte a refletir sobre o que ele já escreveu apoiado nas observações do professor, essa pode ser uma excelente oportunidade para a aprendizagem” (PIRES; BURIASCO, 2012, p. 9).

Um dos alicerces desse tipo de prova são os comentários do professor, isto é, “as pistas e sugestões dadas pelo professor entre os dois momentos, variáveis consoante as respostas da primeira fase, desempenham um papel crucial no trabalho subsequente dos alunos” (PONTE et al., 1997, p. 107). É extremamente necessário, porém, que o professor seja autocrítico em seus comentários com relação ao seu poder de avaliação, e os comentários devem respeitar certas características, pois comentários vagos e limitados por juízo de valor provavelmente não auxiliarão o trabalho dos alunos na segunda fase. Os comentários elaborados pelo professor entre as fases devem chamar a atenção dos alunos para que eles identifiquem e corrijam os seus erros, além de incentivá-los à reflexão, dar pistas que os auxiliem a prosseguir suas resoluções e avançar em algumas ideias oportunizando aprendizagem. Questionar e fazer indicações nos pontos fortes de seu trabalho também pode auxiliá-los na segunda fase da prova.

²⁰ Tarefas que podem ser resolvidas de várias maneiras e admitem mais de uma resposta correta.

São exemplo de anotações deste tipo: “Experimenta para... O que podes concluir?”; “Afirmas que... Porquê? Como podes convencer alguém de que é verdade o que dizes?”; “Vai ao teu livro na página... e confirma o que afirmas” ou “Para organizares as tuas experiências utilizaste uma tabela. É uma excelente estratégia para situações deste tipo” (SANTOS, L. 2004, p. 6).

Essas perguntas podem indicar diferentes caminhos, por isso elas podem ser exploradas em diferentes direções. Desse modo, a correção da prova em duas fases ou a classificação final das produções apresentadas pelos alunos devem ser realizadas levando em consideração o que os alunos produziram em ambas as fases, além de seu progresso de uma fase para outra.

No entanto, para a utilização desse tipo de instrumento de avaliação, é necessário que tanto o professor quanto os alunos estejam cientes de que a segunda fase da prova não é um meio para forçar os alunos a corrigirem seus erros e garantirem uma “boa nota”, mas sim uma parte essencial do processo de aprendizagem que tem como objetivo a reflexão a respeito da primeira fase (DE LANGE, 1987). Vale a pena lembrar que, assim como em outros tipos de avaliação, ao utilizar a prova em duas fases é necessário que os alunos tenham conhecimento dos objetivos e de como a prova funcionará.

Com base na prova em duas fases, em seus estudos, o GEPEMA ampliou a ideia para prova em fases, com a quantidade de fases definida de acordo com o desenrolar das resoluções dos alunos, isto é, enquanto houver oportunidade de discutir a resolução da fase anterior considerada relevante para a elaboração do conhecimento do estudante.

Utilizou-se esse instrumento de avaliação assim como fizeram alguns integrantes do GEPEMA²¹ e como vem fazendo a Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco nos últimos anos, em suas aulas no curso de Licenciatura em Matemática da UEL, no qual tivemos o privilégio de acompanhá-la em duas disciplinas²² ministradas no 2º ano do curso, durante todo o ano de 2013.

A prova em fases possibilita tomar a avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem, pois permite ao professor refletir a respeito de suas ações em sala de aula, de suas escolhas didáticas e aos alunos um repensar a respeito de suas estratégias de estudo, o que vai ao encontro das perspectivas de estudo e pesquisa do GEPEMA.

²¹ Pires (2013), Trevisan (2013) e Mendes (2014) em suas teses de doutoramento.

²² Didática da Matemática – 2MAT035 e Tópicos em Educação Matemática I – 2MAT036.

A Prova em Fases pode provocar a mudança na maneira que os professores interpretam e analisam a produção escrita dos alunos. Esta proposta, trabalhar com Prova em Fases, requer muito mais do que olhar apenas para a resposta do aluno. Realizar uma prova em fases exige a elaboração de perguntas que guiem o aluno no processo de ensino e aprendizagem. A tarefa de elaborar as perguntas é uma tarefa que exige reflexão e estudo (PIRES, 2013, p. 97).

5.1 CLASSIFICAÇÃO DAS TAREFAS

Para as tarefas que compuseram tanto a “prova piloto²³” quanto a prova em fases, foram utilizadas as classificações²⁴ propostas por De Lange (1987), Butts (1997) e Díaz e Pobleto (2005).

Quadro 2 – Classificação a respeito do uso de contexto segundo De Lange (1987)

Classificação	Característica
Contexto de Ordem Zero	É utilizado apenas para tornar o problema parecido com uma situação da vida real. São chamados por De Lange (1999) de “contexto falso”, “contexto de camuflagem”.
Contexto de Primeira Ordem	É aquele que apresenta operações matemáticas “textualmente embaladas”, no qual uma simples tradução do enunciado para uma linguagem matemática é suficiente (DE LANGE, 1987).
Contexto de Segunda Ordem	É aquele com o qual o estudante é confrontado com uma situação realística e dele é esperado que encontre ferramentas matemáticas para organizar, estruturar e resolver a tarefa (DE LANGE, 1987).
Contexto de Terceira Ordem	É aquele que possibilita um “processo de matematização conceitual” e serve para “introduzir ou desenvolver um conceito ou modelo matemático” (DE LANGE, 1987, p. 76).

Fonte: FERREIRA (2013, p. 44 – 45).

Quadro 3 – Classificação de problemas segundo Butts (1997)

Classificação	Característica
Exercício de reconhecimento	Usualmente, pede ao “resolvedor” para reconhecer

²³ A “prova piloto” foi composta apenas de uma fase, pois nosso objetivo era realizar um diagnóstico.

²⁴ No trabalho de Ferreira (2013) há um estudo detalhado a respeito da classificação de enunciados de tarefas de Matemática.

	ou recordar um fato específico, uma definição ou enunciado de um teorema, de uma propriedade, etc.
Exercícios algorítmicos	Exercícios que podem ser resolvidos com um procedimento passo a passo, frequentemente, um algoritmo.
Problemas de aplicação	São os que precisam da mudança da linguagem escrita com palavras para uma linguagem matemática (formulação do problema simbolicamente) adequada de modo que se possam utilizar os algoritmos apropriados.
Problemas de pesquisa aberta	Problemas de pesquisa aberta são aqueles em cujo enunciado não há uma estratégia para resolvê-los. Usualmente, tais problemas expressam-se por: “prove que”, “encontre todos”, ou “para quais”, mais outras muitas variações.
Situação – Problema	Neste subconjunto não estão incluídos “problemas” propriamente ditos, mas situações, nas quais uma das etapas decisivas é identificar o(s) problema(s) inerente(s) à situação.

Fonte: BUTTS (1997, p. 32 – 44).

Quadro 4 – Classificação de problemas por contexto segundo Díaz e Poblete (2005)

Classificação	Característica
Problema de contexto real	Um contexto é real, se ele é produzido efetivamente na realidade e envolve ações do aluno nela mesma.
Problema de contexto realista	Um contexto é realista, se ele é produzido em uma simulação de realidade ou de uma parte dela.
Problema de contexto fantasioso	Um contexto é fantasioso se for fruto da imaginação sem fundamento na realidade.
Problema de contexto puramente matemático	Um contexto puramente matemático se refere exclusivamente a objetos matemáticos: números, relações e operações aritméticas, figuras geométricas, etc.

Fonte: DÍAZ e POBLETE (2005, p. 4, tradução nossa²⁵).

²⁵ Problema de contexto real: Un contexto es real si se produce efectivamente en la realidad y compromete el accionar del estudiante en la misma.

Problema de contexto realista: Un contexto es realista si es susceptible de producirse realmente. Se trata de una simulación de la realidad o de una parte de la realidad.

Problema de contexto fantasista: Un contexto es fantasista si es fruto de la imaginación y está sin fundamento en la realidad.

Problema de contexto puramente matemático: Un contexto es puramente matemático si hace referencia exclusivamente a objetos matemáticos: números, relaciones y operaciones aritméticas, figuras geométricas, etc.

As tarefas da “prova piloto” e da prova em fases podem ser agrupadas da seguinte maneira:

Quadro 5 – Classificação das tarefas da prova em fases

Tarefa	Classificação		
	De Lange (1987)	Butts (1997)	Díaz e Poblete (2005)
1	Contexto de Segunda Ordem	Problemas de pesquisa aberta	Problema de contexto real
2	Contexto de Segunda Ordem	Problemas de pesquisa aberta	Problema de contexto real
3	Contexto de Ordem Zero	Problemas de aplicação	Problema de contexto realista
4	Contexto de Segunda Ordem	Problemas de pesquisa aberta	Problema de contexto realista

Fonte: autor.

6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste trabalho, o objetivo é analisar como alunos do 5º ano do Ensino Fundamental lidam com tarefas não-rotineiras de Matemática em uma prova em fases. A pesquisa realizada é de natureza qualitativa de cunho interpretativo que, de acordo com Garnica (2004, *apud* BORBA, 2004), tem como características a transitoriedade de seus resultados, a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, a não neutralidade do pesquisador e a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.

Como esta pesquisa possibilitou o contato direto com o ambiente e a situação em estudo, foi possível dar ênfase à tentativa de compreender o processo mediante o qual os alunos deram significados e descrever em que estes mesmos significados consistem.

Com o tema da pesquisa definido, decidiu-se aplicar uma prova de sondagem, nomeada de “prova piloto”, para verificar o que os alunos do 5º ano, daquele ano (2013)²⁶, poderiam fornecer de produção escrita em Matemática. Assim seria possível ter noção do que esperar dos alunos do 5º ano da turma de 2014, que seria pesquisada de fato. A “prova piloto” e a prova em fases eram compostas pelas seguintes tarefas:

- 1) Bruna e Pedro são irmãos e resolveram comprar juntos um presente para o pai.
Bruna só tinha notas de 5 reais e Pedro só tinha notas de 2 real²⁷.
Juntando o dinheiro os dois tinham 28 reais.
Cada um dos irmãos tinha o **mesmo número de notas**.
Quantas notas tinha cada um?

Tarefa retirada e adaptada do pré-teste para a realização da Prova de Questões Abertas de Matemática da Avaliação Estadual do Rendimento Escolar do Paraná – AVA/2002²⁸.

²⁶ Lembrando que os resultados desta pesquisa foram obtidos a partir dos estudantes que cursavam o 5º ano no ano de 2014.

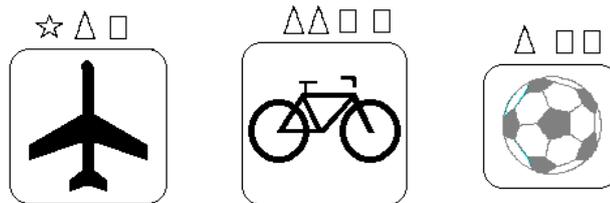
²⁷ O correto seria estar escrito “2 reais”. Esse equívoco ocorreu no momento em que adaptamos a questão, pois no original estava notas de 1 real, mas como essas notas não estão mais em circulação no Brasil decidimos alterar para notas de 2 reais.

²⁸ Retiramos as questões desses órgãos oficiais por elas já terem sido validadas e escolhemos estas por considerá-las não-rotineiras.

João, Carla e Luís brincavam de lojinha com dinheiro de “faz de conta”.

Cada	□	vale	1 dinheiro.
Cada	△	vale	□ □ □
Cada	☆	vale	△ △ △

Analise os preços dos brinquedos da lojinha e responda.



- 2) Qual deles pode ser comprado com uma ☆?
- 3) Com duas ☆ João pode comprar o avião e a bola?

Tarefa retirada do pré-teste para a realização da Prova de Questões Abertas de Matemática da Avaliação Estadual do Rendimento Escolar do Paraná – AVA/2002.

- 4) A caixinha abaixo possui uma seqüência²⁹ de 20 bolinhas. Quantas bolinhas brancas estão nesta seqüência? Explique como pensou para resolver.



Tarefa retirada e adaptada³⁰ do livro *Assessment and Realistic Mathematics Education* de Van den Heuvel-Panhuizen (1996, p. 36).

Antes de os alunos iniciarem as resoluções da “prova piloto”, fui à frente da sala de aula em companhia da professora responsável pela turma que me apresentou a eles. Em seguida, expliquei o que pretendia com a resolução daquelas tarefas, deixando bem claro que cada um deveria resolver da maneira que julgasse ser a correta, isto é, cada aluno deveria resolver as tarefas do modo como entendesse, pois não iríamos (professora e pesquisador) intervir nem dar qualquer auxílio para eles resolverem as questões, já que a interpretação dos enunciados também é um elemento importante para a pesquisa.

²⁹ De acordo com o novo acordo ortográfico a palavra “seqüência” deveria estar escrita sem trema na letra u, ou seja, deveria estar escrita “sequência”.

³⁰ O enunciado original da questão é “A string of 20 beads. How many white beads are on this string?” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 36) seguido da imagem da caixinha com as contas.

Desse modo, a “prova piloto” foi aplicada aos 35 alunos do 5º ano presentes no período vespertino do dia 30-04-2013, sendo constituída de 3 folhas: uma com a tarefa 1, outra com as tarefas 2 e 3 e uma terceira com a tarefa 4. Cada folha continha o enunciado na parte superior e o restante estava em branco para os alunos resolverem. Ficou combinado com eles que, assim que terminassem de resolver a questão, eles ergueriam a mão e outra folha, com outra questão para eles resolverem, seria entregue, até que as quatro tarefas propostas fossem resolvidas.

O tempo foi o suficiente para que todos os alunos resolvessem as quatro tarefas individualmente. Mesmo com todas as explicações, houve vários deles que insistiam em me chamar para pedir algum tipo de explicação ou dizer que não entenderam (talvez por estarem acostumados a ter auxílio do professor em suas tarefas), e a resposta era quase sempre a mesma: que lessem outra vez a tarefa com muita atenção e resolvessem da maneira que julgasse correta.

Após realizar uma leitura da resolução dos alunos, surpreendi-me positivamente, pois havia várias produções interessantes, inclusive algumas que nem havia imaginado ser possível.

A pesquisa começou a ser posta em prática no meu segundo ano de participação no projeto Educação Matemática de Professores que ensinam Matemática, em 2014. Uma das primeiras atitudes foi conversar com a supervisora da escola para informar que naquele ano iria desenvolver um trabalho de recolha de informações com todos os alunos da única turma de 5º ano da escola, para minha pesquisa de dissertação de mestrado. Ela deixou-me tranquilo dizendo que eu poderia realizar o trabalho no momento em que preferisse, apenas pediu para avisá-la com antecedência para poder comunicar a professora responsável pela turma.

Não foi preciso entrar em contato com a diretora da escola, pois, de certo modo, tanto ela quanto a supervisora participavam do curso de capacitação de professores desenvolvido pelo projeto e já sabiam que minha participação no projeto estava relacionada à produção de um trabalho de dissertação, assim como ocorreu com outros participantes.

Com o aval das responsáveis pela escola, estava sob minha responsabilidade escolher as tarefas que iriam compor a prova em fases a ser aplicada. Sugeri à orientadora da dissertação a utilização das mesmas tarefas que compuseram a “prova piloto”, destinada aos alunos do 5º ano da mesma escola no ano anterior, pois, de certo modo, o resultado obtido havia sido satisfatório.

O trabalho de coleta das produções escritas dos alunos ocorreu de 13 de maio de 2014 a 10 de junho de 2014. Nesse período, o encontro com os alunos do 5º ano aconteceu uma vez por semana no horário de aula deles, o que resultou em 5 encontros, sempre às terças-feiras no período vespertino. Esses encontros estavam programados para ocorrer na própria sala de aula em que eles estudavam.

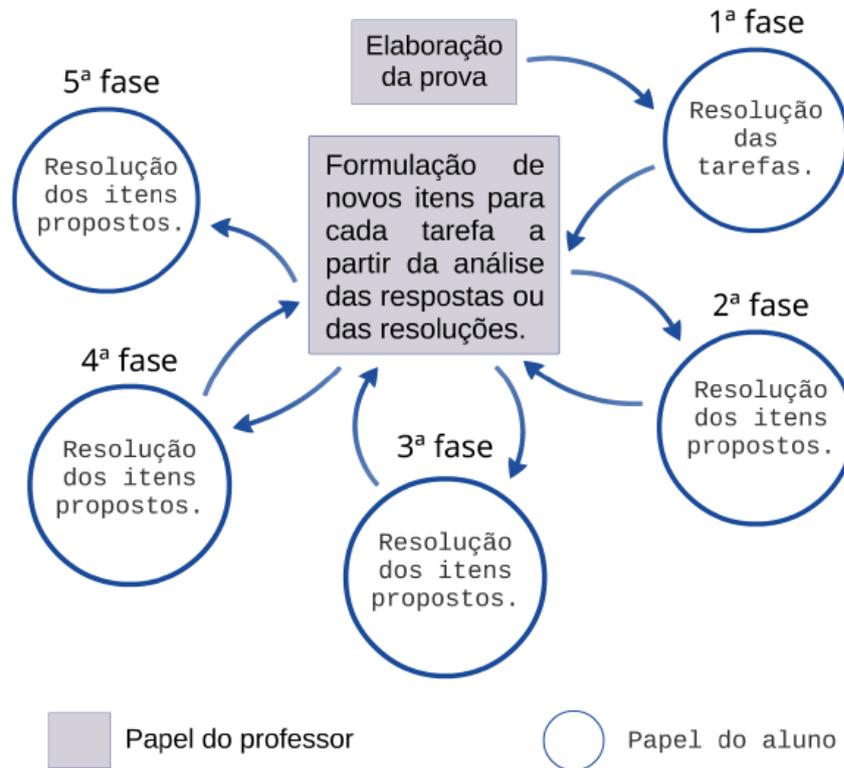
A prova teve um total de 5 fases, que não foram definidas *a priori*. Em todas as fases, a professora titular da turma permaneceu dentro da sala de aula, sem realizar interferências. Na primeira fase da prova, os alunos resolveram as tarefas sem orientações a respeito da maneira como deveriam proceder e sem consultar os colegas ou qualquer tipo de material, isto é, foi proporcionada a eles uma situação de prova “tradicional”. Tanto nessa fase quanto nas demais, não foi estipulado tempo limite para a entrega das tarefas resolvidas, por isso julguei que o tempo para a resolução foi suficiente em todas as fases.

Da segunda fase em diante, os alunos responderam e/ou resolveram itens propostos a partir de seus próprios registros escritos na fase anterior, pois, de uma fase para outra, houve uma análise de suas produções e, de acordo com os registros apresentadas por eles, foram propostos vários itens que consistiam basicamente em solicitações de justificativas e/ou esclarecimentos. Em alguns casos, quando se julgou que as potencialidades das produções haviam se esgotado, foi proposta outra tarefa, utilizando o contexto da tarefa original ou não.

Desse modo, os itens propostos para cada aluno, em cada uma das 4 tarefas, geralmente não eram iguais, pois dependiam dos registros escritos na fase anterior. Além disso, para algumas produções, foram propostos mais de um item por fase.

Esse movimento de “vai e vem” da prova em fases pode ser representado pelo seguinte esquema:

Figura 1 – Movimento da aplicação da prova em fases



Fonte: autor.

A seguir, apresenta-se um relato das 5 fases da prova com base nas anotações do diário de campo e em percepções durante todo esse trajeto.

6.1 A PRIMEIRA FASE

Uma semana antes de iniciar o trabalho com a prova em fases (06 de maio de 2014), conversei com a supervisora da escola no final do curso de capacitação de professores, informando-a de que no próximo encontro iria realizar um trabalho com todos os alunos do 5º ano por cerca de 30 minutos no horário de aula. Assim, considerei que ela teve um período de tempo razoável para comunicar a professora responsável pela turma para que também pudesse se organizar.

No dia da primeira aplicação da prova em fases (13 de maio de 2014), eu e outros colegas responsáveis por ministrar o curso de capacitação de professores chegamos à escola por volta das 13 horas e 30 minutos, como de costume. Ao entrar na sala dos professores, a professora responsável pela turma do 5º ano naquele período me viu e disse: “hoje você vai na minha sala, né?”. Respondi que sim e imaginei que o processo estava começando a dar certo, pois a professora

da turma estava ciente do trabalho que eu iria realizar e provavelmente não iria atrapalhá-la.

A professora disse que os alunos estavam na aula de Educação Física naquele momento e que, em seguida, era o intervalo do recreio, e só depois ela assumiria a turma e eu poderia realizar o trabalho. Em poucos minutos de conversa, ela contou que não era a professora de Matemática da turma, pois, como a escola adota o sistema de período integral, a professora de Matemática trabalhava no período matutino. Por isso pedi que ela entregasse à professora de Matemática da turma um questionário de oportunidade de aprendizagem (Apêndice A)³¹, acompanhado das tarefas que seriam aplicadas (Apêndice B), para que fosse respondido.

Após essa conversa, participei do curso de capacitação por certo período e, quando soou o sinal para os alunos do 5º ano voltarem do recreio para a sala de aula, reencontrei a professora na sala dos professores e nos dirigimos para a sala de aula. Chegamos à sala de aula às 14 horas e 50 minutos e os alunos se encontravam sentados em seus lugares, porém um pouco agitados, o que se considera normal, pois eles vinham de uma aula de Educação Física seguida do intervalo para o recreio. A professora chamou-lhes a atenção rigidamente e eles logo ficaram em silêncio.

Em seguida, me apresentei aos alunos, dizendo que estava ali para trabalharmos com algumas tarefas de Matemática, que essa seria a primeira etapa do trabalho e que, nos próximos encontros (nas próximas terças-feiras), continuaríamos com as demais etapas. Em momento algum citei a expressão “prova em fases” para os alunos, pois, além de as resoluções não valerem “pontos” em suas médias, temia que a palavra “prova” pudesse causar-lhes certo desconforto. Também não foi dada orientação alguma a respeito de poderem ou não conversar entre si sobre as tarefas propostas fora do horário do nosso encontro, o que não seria um problema caso ocorresse, pois a preocupação era em oportunizar a aprendizagem.

Em relação à prova, informei que cada folha continha um campo na parte superior, no qual eles deveriam escrever seus nomes, que todas as respostas e/ou resoluções e anotações deveriam ser realizadas a caneta, de tinta de cor azul

³¹ O questionário de oportunidade de aprendizagem foi respondido pela professora de Matemática durante a semana e entregue no segundo encontro (20 de maio de 2014).

ou preta. Essa instrução foi necessária para auxiliar na visualização dos registros e para evitar que eles apagassem os registros de fases anteriores. Depois, perguntei se todos eles tinham canetas das cores indicadas e eles responderam que sim. Nesse dia, dos 31 alunos matriculados na turma do 5º ano, 30 deles estavam presentes para realizar a prova.

Comecei, então, a distribuir as tarefas que estavam separadas em três pilhas, pois as folhas não estavam grampeadas ou fixadas umas nas outras. Inicialmente, foram entregues para todos eles as duas primeiras folhas, uma contendo as tarefas 1 e 2 e a outra, a tarefa 3. Em seguida, foi entregue a terceira e última folha com a tarefa 4 a todos os alunos³².

Após entregar toda a prova para todos os alunos, percebi que eles não haviam começado a resolver. Dei uma olhada geral para toda a turma e notei que eles estavam me olhando e, nesse momento, um dos alunos perguntou: “pode começar professor?”. Dei-me conta de que não tinha dito para eles começarem a resolver, o que de certo modo foi bom, porque assim todos eles começaram a resolver a prova ao mesmo tempo, por volta das 15 horas.

Depois de um curto período do início das resoluções, um aluno chamou, levantando a mão, e disse que não havia entendido o que era para fazer em determinada tarefa. Pedi a ele que lesse a tarefa e tentasse resolver da maneira que julgasse ser a adequada, mas, logo em seguida, esse mesmo aluno chamou novamente e disse que mesmo relendo algumas vezes, não havia entendido o que era para fazer. Então, indiquei com o dedo a pergunta no enunciado da tarefa e disse para ele ler e responder aquela pergunta utilizando as informações do enunciado. Procedi da mesma maneira com os demais alunos que chamavam para fazer esse tipo de comentário. Alguns alunos perguntaram se era necessário realizar cálculos para resolver as tarefas e eu disse a eles que deveriam apenas responder a pergunta proposta e que eles mesmos deveriam verificar a necessidade ou não de realizar cálculos.

Com menos de 10 minutos após terem sido distribuídas as tarefas, um dos alunos me chamou em sua carteira, dizendo que havia terminado e queria entregar as folhas. Pedi a ele para conferir se havia escrito seu nome em todas as folhas antes de entregar. A partir de então, o mesmo procedimento foi realizado com

³² As três folhas não foram entregues simultaneamente para tentar agilizar o processo de distribuição, pois estava complicado segurar as três pilhas de folhas e entregar uma folha de cada pilha para cada aluno.

os demais alunos no momento em que chamavam para entregar as tarefas resolvidas. Assim que recolhi as tarefas do primeiro aluno, notei que ele não havia realizado cálculo algum, tinha apenas indicado um número como suposta resposta, mas não comentei coisa alguma, apenas lhe pedi para permanecer sentado e esperar os demais colegas terminarem de resolver as tarefas.

Mesmo tendo sido pedido no início do trabalho para os alunos realizarem todos os registros a caneta, durante a resolução das tarefas era possível perceber que muitos deles escreviam a lápis e quando os informava de que deveriam escrever a caneta, a maioria deles dizia que iria passar a caneta por cima após terminar.

Um aluno perguntou se poderia realizar anotações sobre as imagens dos enunciados das tarefas 1 e 2. Respondi que ele poderia registrar o que julgasse necessário para responder e/ou resolver a tarefa. Outro aluno perguntou se poderia realizar desenhos para resolver a tarefa 4, e lhe disse que sim. Nessa mesma tarefa, um aluno chamou e disse não ter entendido o que era para fazer. Quando indiquei com o dedo a pergunta que deveria ser respondida, ele me disse: “então é na minha opinião”. Outro aluno chamou para dizer que tinha errado ao registrar a resposta e perguntou se poderia inserir parênteses na parte incorreta e escrever a resposta correta logo abaixo, disse que sim, mas sugeri que, na frente dos parênteses, ele deveria escrever a palavra “errado”, para lembrar que os registros que estivessem entre parênteses indicavam uma resposta nula. A partir desse momento, esta mesma sugestão foi dada para casos semelhantes.

Um fato que chamou atenção durante essa primeira fase foi no momento em que a professora da turma, que estava sentada em sua cadeira, saiu da sala e alguns alunos que haviam terminado de resolver as tarefas começaram a conversar. Pedi-lhes que conversassem em um tom de voz mais baixo, para não atrapalhar os colegas que ainda estavam resolvendo as tarefas, e um deles disse: “é só você dar um grito dizendo FIQUEM QUIETOS que o pessoal para de conversar, professor”. Fiquei espantado com aquela atitude, pois deu a impressão de que estavam acostumados a serem tratados com gritos. Então respondi àquele aluno que não era necessário gritar para manter a ordem e, pouco tempo depois, eles atenderam e passaram a conversar um pouco mais baixo.

O último aluno entregou as tarefas respondidas às 15 horas e 30 minutos. Nesse instante, recolhi todas as tarefas que eles entregaram, informei que

no próximo encontro continuaríamos o trabalho com aquelas mesmas tarefas, agradei a colaboração de todos e me despedi, passando a palavra para a professora da turma.

6.1.1 Após a 1ª Fase da Prova

Um dia após a realização da primeira fase da prova (14 de maio de 2014), encontrei-me com a minha orientadora para inserirmos os itens em cada uma das 4 tarefas de todos os alunos, de acordo com a resposta ou resolução que eles apresentaram.

Inicialmente decidimos identificar cada aluno com um código para preservar suas identidades. Esse código contém o número 14, que faz menção ao ano de 2014³³, a letra D, que é a inicial de meu primeiro nome (Diego) e dois algarismos que indicam a ordem em que as tarefas foram recolhidas na primeira fase. Por exemplo, o aluno nomeado com o código 14D03 indica que ele foi o terceiro a entregar as tarefas resolvidas na primeira fase. Os códigos variaram de 14D01 até 14D30.

Depois de codificar todas as folhas que continham as tarefas, elas foram separadas de acordo com o número da tarefa, perfazendo três pilhas: uma pilha com as tarefas 1 e 2 de todos os alunos, pois estavam impressas na mesma folha, outra pilha com a tarefa 3 e outra com a tarefa 4.

Começamos realizando uma leitura geral de todas as respostas e/ou resoluções das tarefas 1 e 2 e propusemos os itens correspondentes. Depois procedemos da mesma maneira com as tarefas 3 e 4. Todos esses itens foram manuscritos nas provas com uma caneta de cor roxa, pelo fato de ser distinta da cor azul ou preta utilizada pelos alunos. Os itens referentes a cada tarefa receberam uma numeração sequencial, por exemplo, o primeiro item correspondente à tarefa 1 foi indicado como item 1.2³⁴, o segundo item correspondente à tarefa 1 foi indicado como 1.3, o terceiro item correspondente à tarefa 1 foi indicado como 1.4 e assim sucessivamente.

³³ Optamos por indicar o ano de coleta das informações para auxiliar a descrição dessas tarefas caso sejam utilizadas em pesquisas futuras.

³⁴ Optamos por nomear o primeiro item da tarefa 1 como 1.2 com o intuito de indicar o número da tarefa com o algarismo presente antes do ponto e a fase em que o item foi proposto pelo algarismo presente depois do ponto. No entanto, isso não funcionou como esperávamos, porque em algumas fases houve mais de um item por tarefa.

Determinamos um item correspondente à tarefa 1 e um item correspondente à tarefa 2, pois em geral as respostas e/ou resoluções foram semelhantes. Para a tarefa 3, formulamos quatro itens distintos e, para a tarefa 4, formulamos seis itens distintos, de acordo com a semelhança das respostas dadas. Esses itens compuseram a segunda fase da prova.

6.2 A SEGUNDA FASE

Nesse dia (20 de maio de 2014), encontrei-me com a mesma professora da turma do 5^o ano na sala dos professores e novamente após soar o sinal para a volta do intervalo dos alunos, me dirigi à sala de aula do 5^o ano juntamente com a professora. Chegamos à sala de aula por volta das 14 horas e 50 minutos e nem todos os alunos estavam presentes, porém aos poucos foram chegando e se dirigindo a seus devidos lugares. Desta vez, a professora não precisou chamar a atenção, pois eles se sentaram em silêncio como se estivessem esperando para iniciar o trabalho. Logo na chegada foi possível ouvir um deles murmurando ao nos ver: “nossa dinovo”. Tudo indica que esse aluno estava se queixando de ter que realizar as tarefas novamente.

Cumprimentei os alunos e informei que iria continuar com as tarefas de Matemática que eles tinham resolvido em nosso primeiro encontro, mas dessa vez eles teriam que responder alguns itens relacionados às respostas e/ou resoluções que eles mesmos apresentaram na primeira fase. Também informei que receberiam as folhas correspondentes à primeira e à segunda tarefa e outra folha adicional para que tivessem espaço suficiente para responder os itens propostos.

Como não sabia o nome de todos eles naquele momento, pedi para a professora realizar a distribuição das primeiras duas folhas para seus respectivos “donos”. A partir dessas primeiras folhas, fui capaz de entregar as próximas, orientando-me pelos códigos identificadores localizados na parte superior de cada folha. Após entregar as duas folhas para todos eles, expliquei que, em relação ao(s) item(ns) correspondente(s) à tarefa 1, eles deveriam responder no verso da própria folha que continha os enunciados das tarefas e que, em relação ao(s) item(ns) correspondente(s) à tarefa 2, eles deveriam responder na outra folha. Ainda assim, houve alguns alunos que chamaram para informar que não haviam compreendido como era para responder e/ou resolver os itens. Expliquei novamente e também

lembrei que os registros deveriam ser a tinta, porque, mesmo com essa instrução na primeira fase, houve alunos que deixaram seus registros a lápis.

Ao entregar as primeiras duas folhas, a professora devolveu as tarefas de dois alunos que haviam faltado. Perguntei se todos haviam recebido as duas folhas iniciais e um aluno se manifestou, pois não estava presente em nosso primeiro encontro, por isso não havia realizado a primeira fase da prova. Assim, entreguei-lhe as 4 (quatro) tarefas, instruí que registrasse seu nome em cada folha no campo destinado e resolvesse, com caneta de tinta azul ou preta, as tarefas da maneira que julgasse ser a correta.

Ainda com as tarefas dos dois alunos que faltaram nas mãos, questionei a professora a respeito do que havia ocorrido com tais alunos. Ela informou que um deles havia faltado e o outro havia caído na quadra poliesportiva e batido a cabeça no chão, por isso estava na secretaria com dores na cabeça e não podia estar presente para realizar a segunda fase da prova.

Alguns minutos após a entrega das tarefas, os alunos começaram a chamar para informar que já haviam terminado de responder os itens correspondentes às duas primeiras tarefas. Imediatamente, passei de fileira em fileira recolhendo as folhas e entregando a tarefa 3 para os respectivos “donos”. Nesses instantes houve certo barulho na sala de aula, pois muitos alunos chamavam ao mesmo tempo e eu não conseguia entregar a folha com o item correspondente à tarefa 3 na mesma velocidade que eles chamavam.

Em seguida, vários alunos começaram a chamar para informar que já haviam terminado de responder o item correspondente à tarefa 3. O problema era que alguns ainda estavam com as folhas referentes às duas primeiras tarefas, enquanto outros queriam entregar a folha com o(s) item(ns) correspondente(s) à tarefa 3. Por isso, fui à frente da turma, pedi um pouco de atenção a todos e informei que naquele momento recolheria somente as folhas referentes às duas primeiras tarefas e que os demais deveriam esperar um pouco, em silêncio, que seriam atendidos logo, na sequência.

As duas primeiras tarefas foram recolhidas e entregue a folha com o item correspondente à tarefa 3. De acordo com esses acontecimentos, na transição de uma folha para a outra, foram informados de que eu passaria de fileira em fileira para verificar quais deles haviam terminado de responder o item correspondente à

tarefa 3 para entregar a folha com o item correspondente à tarefa 4. Deste modo, não houve tanto tumulto na transição de recolha e entrega das últimas duas tarefas.

Nessa segunda fase, alguns alunos novamente perguntaram se era preciso realizar algum tipo de cálculo para responder os itens propostos e foram informados novamente de que deveriam decidir a necessidade ou não de realizar cálculos.

Conforme os alunos foram terminando de responder o item correspondente à tarefa 4, recolhi as folhas, pedindo a eles que permanecessem sentados e em silêncio. Não houve grandes problemas com indisciplina nessa fase. Em geral, os alunos se comportaram bem e respeitaram os colegas que ainda estavam realizando a tarefa. O último aluno entregou a tarefa 4 às 15 horas e 24 minutos. Imaginei que eles demorariam um tempo maior para responder os itens, mas eles surpreenderam e terminaram bem antes do que se esperava.

Antes de sair da sala de aula agradei os alunos e perguntei se estava difícil responder os itens propostos. No geral, eles responderam que não, apenas um deles se manifestou de maneira distinta do restante da turma, dizendo que havia um item que estava difícil. Agradei à professora, informando que continuaria o trabalho na próxima terça-feira e ela disse: “tudo bem, sem problemas”.

6.2.1 Após a 2ª Fase da Prova

Para o aluno que realizou a prova pela primeira vez nessa fase, porque havia faltado ao primeiro encontro, atribuí o código 14D31, que era o próximo código da sequência. Entre os 30 alunos que realizaram a primeira fase da prova, apenas os alunos identificados pelo código 14D10 e 14D02 não participaram da segunda fase da prova neste segundo dia trabalho. Os mesmos itens que foram propostos a esses alunos para serem resolvidos na fase 2 da prova foram mantidos para a fase 3.

Em conversa com um colega a respeito da pesquisa, contei que escrever mais de 120 itens a mão, para a realização da 2ª fase da prova, foi trabalhoso e ele sugeriu digitar os itens das próximas fases, imprimir, recortar e colar nas provas, já que muitos itens eram repetidos.

Na orientação para a terceira fase da prova, que ocorreu no dia 21 de maio de 2014, um dia após a segunda fase da prova, apresentei essa ideia para a orientadora e ela aceitou. Mesmo com os itens da segunda fase manuscritos,

acredito que não teria problemas em continuar a prova com itens digitalizados e realmente não tive. Desse modo, a partir dessa fase, os itens passaram a ser digitados, impressos e colados nas provas.

Procedeu-se de maneira semelhante à preparação para a segunda fase da prova, quanto à análise dos registros dos alunos, e foram formulados cinco tipos de itens distintos para a tarefa 1, quatro tipos para a tarefa 2, quatro para a tarefa 3 e quatro para a tarefa 4.

6.3 A TERCEIRA FASE

Nessa fase da prova, houve a oportunidade de iniciar o trabalho antes do intervalo dos alunos, porque, excepcionalmente nessa terça-feira (27 de maio de 2014), os alunos do 5^o ano não tiveram aula de Educação Física. Logo que cheguei à escola, a professora responsável pela turma informou que o trabalho poderia ser iniciado antes do intervalo, caso eu preferisse. Mas, como nas fases anteriores a prova fora aplicada depois do intervalo, a opção foi por manter o horário de aplicação, então me dirigi à sala de aula, juntamente com a professora responsável pela turma, após soar o sinal para a volta do intervalo. Cheguei à sala às 14 horas e 50 minutos, e todos os alunos estavam dentro da sala, sentados em seus devidos lugares conversando baixinho uns com os outros.

Nesse momento foi possível perceber que vários alunos mostraram-se insatisfeitos em ter que participar novamente da resolução das tarefas, pois foi possível ouvir alguns comentários do tipo “nossa di novo”, “vixi, Matemática outra vez”, “aquelas perguntas dinovo”, entre outros. Mesmo assim, cumprimentei-os e informei que iríamos continuar o trabalho com as tarefas de Matemática. Em seguida, disse que inicialmente receberiam duas folhas com os itens correspondentes à primeira e à segunda tarefa e que, depois que terminassem de responder esses itens, receberiam as demais com o restante dos itens, correspondentes às tarefas 3 e 4.

Assim como na fase anterior, pedi para a professora distribuir as folhas correspondentes às duas primeiras tarefas, pois ainda não era capaz de reconhecer os alunos pelos seus respectivos nomes. Para a distribuição das demais folhas, segui o código que cada uma continha em sua parte superior. Nessa fase, decidi entregar as duas últimas folhas de uma só vez, pois, na fase anterior, percebi que os alunos terminaram de responder e/ou resolver rapidamente o(s) item(ns)

correspondente(s) à tarefa 3 e deu certo trabalho recolher a tarefa 3 de todos eles e entregar a folha com os itens relacionados à tarefa 4. Desse modo, a professora entregou as folhas correspondentes às duas primeiras tarefas e entreguei as folhas correspondentes às duas últimas tarefas de uma só vez, sendo apenas duas etapas de entrega e recolha das folhas, o que realmente agilizou o processo.

No decorrer do trabalho desse dia, muitos alunos questionaram sobre a quantidade de itens que teriam de responder: “são só essas perguntas, professor?”. Com esse tipo de questionamento e conforme os observava, tive a impressão que os alunos estavam “cansados” de responder os itens da prova, parecendo que não queriam mais realizar aquele tipo de atividade. Em certos momentos inclusive, imaginei que alguns deles estavam respondendo os itens com a “maior má vontade”, apenas porque estavam no horário de aula e eram “obrigados” a realizar aquela atividade.

Em alguns itens correspondentes às tarefas 1 e 2, em que era conveniente os alunos observarem o quadro do enunciado com o valor em “dinheiro” do quadrilátero, do triângulo e da estrela para dar a resposta esperada, vários deles não tiveram essa percepção e estavam tentando responder a pergunta por si só. Acredito que, por isso, vários deles chamaram para dizer que não haviam entendido o que era para fazer. Por isso, disse a eles para reler a pergunta e, se necessário, rever o quadro apresentado no enunciado da tarefa. Nesse momento, alguns deles pareciam ter uma espécie de *insight*, com exclamações do tipo “aaaaa”.

Em uma das tarefas foi proposto um item para determinado aluno, que pedia para ele escrever uma distribuição que citou em sua resposta na fase anterior. Esse aluno chamou para informar que não se lembrava da distribuição à qual havia se referido anteriormente. Então, eu disse a ele para reler a tarefa e suas resoluções anteriores para tentar se lembrar da tal distribuição e que, caso isso não ocorresse, era para ele escrever que não se lembrava da distribuição referida. É possível que ele não se lembrasse devido ao intervalo da realização de uma fase da prova para a outra, que era de exatamente uma semana (de terça-feira a terça-feira). Esse pode ser um intervalo consideravelmente grande para se lembrar de um dos procedimentos realizados em certa resolução, tendo em vista que eles realizam várias outras atividades no decorrer dessa semana.

Apesar de ser o terceiro encontro, alguns alunos ainda insistiam em perguntar se, para responder determinados itens, era necessário realizar algum tipo

de cálculo. Novamente foi dito que era preciso apenas responder o item e quem deveria decidir se era ou não necessário realizar cálculos seriam eles.

Para alguns alunos foi solicitado que resolvessem a tarefa 3 de outra maneira. Dois deles chamaram para perguntar a qual dos enunciados me referia, isto é, se era para resolver de outra maneira a tarefa ou o item referente à fase anterior. Disse que era para eles resolverem a tarefa de outra maneira. Um deles perguntou o que deveria fazer caso não conseguisse resolver a tarefa de outra maneira. Respondi que ele escrevesse que não encontrou outra maneira de resolver a tarefa, assim como havia dito.

A pergunta desses alunos apresenta indícios de que eles estavam levando a sério a proposta de trabalho, nesse momento. Caso contrário poderiam responder o item de qualquer maneira, mesmo não entendendo o que era solicitado no enunciado.

Após certo tempo, os alunos começaram a entregar as duas últimas tarefas e um deles chamou a atenção, pois olhou-me bem nos olhos com uma expressão facial de preocupação, parecendo com medo de algo. Então perguntei se ele estava preocupado com alguma coisa e ele balançou a cabeça indicando que sim. Indaguei sobre o que ele estava preocupado, mas não respondeu, apenas abaixou a cabeça com um sorriso “sem graça” e não disse coisa alguma. Acredito que ele estava preocupado com seu desempenho na prova em fases, talvez estivesse com medo de não ter ido como esperava e sofrer alguma penalidade por isso.

O último aluno terminou de responder os itens referentes às tarefas 3 e 4, e entregou as folhas às 15 horas e 25 minutos. Com as tarefas de todos eles em mãos, prestes a sair da sala de aula, agradei, dizendo “obrigado por responderem os itens mais uma vez” e eles surpreendentemente responderam em coro “sim”. Não entendi muito bem por que eles agiram daquela maneira e, ao sair da sala de aula, a professora responsável pela turma ainda brincou: “eu acho que você nunca havia visto alguém responder um pedido de obrigado com sim”.

Um fato que intrigou nessa fase da prova foi que cinco alunos faltaram à aula, o que não havia visto ocorrer naquela turma. Depois da aplicação das tarefas, em conversa com a coordenadora da escola na sala dos professores, perguntei a ela se havia ocorrido algo diferente para tantos alunos do 5º ano faltar à aula. Ela respondeu que provavelmente era devido ao frio, pois aquele dia foi um

dos dias mais frios do ano até então, ou por causa da chuva, já que nos dois ou três dias anteriores a essa terça-feira (27 de maio de 2014) havia chovido muito na região. Ela explicou, também, que alguns alunos moram longe da escola e precisam sair, relativamente, cedo de casa para “tomar” uma condução para chegar à escola. É possível que, com as baixas temperaturas, alguns pais ou responsáveis optaram por deixar os alunos em casa ou tiveram problemas com a própria condução, pois, com as chuvas, esta não tem acesso a algumas residências e ao ponto marcado com os alunos que moram em determinadas regiões da zona rural. Por fim, ela informou que, dependendo do clima, isso ocorre com alunos da escola toda e não apenas com o 5º ano.

6.3.1 Após a 3ª Fase da Prova

Os alunos identificados com o código 14D04, 14D06, 14D09, 14D19 e 14D29 faltaram à aula e não realizaram a terceira fase da prova nesse dia de trabalho. Assim, os mesmos itens, que foram propostos a esses alunos para serem resolvidos na fase 3 da prova, foram mantidos para a fase 4.

O aluno identificado pelo código 14D31 tinha respondido e/ou resolvido os itens referentes às duas primeiras tarefas, quando uma funcionária da escola se dirigiu até a sala de aula, pediu licença e disse que aquele aluno precisava sair da sala naquele momento para ir embora. Por isso, na fase 4, esse aluno resolveria outros itens correspondentes às tarefas 1 e 2 e os mesmos itens propostos na fase 3.

Por algum motivo, o aluno identificado pelo código 14D10 não respondeu o item correspondente à tarefa 4 proposto para esta fase, por falta de tempo não foi. Esse item ficaria para ser respondido na próxima fase.

Da mesma maneira que nas fases anteriores, foram formuladas três tipos de itens para a tarefa 1, cinco tipos para a tarefa 2, dez tipos para a tarefa 3 e dez tipos para a tarefa 4.

6.4 A QUARTA FASE

Como de costume, nesse dia (03 de julho de 2014) encontrei com a professora responsável pela turma do 5º ano na sala dos professores, na hora do intervalo, e ela contou que estava desenvolvendo uma atividade com o tema Copa

do Mundo de futebol, pois faltava pouco mais de uma semana para o início do evento. Para a realização desse trabalho, os alunos foram organizados em grupos para construírem um painel, o que não haviam terminado até o intervalo do recreio. Para realizar mais uma fase da prova, seria necessário desmontar todos os grupos e, depois da prova, retomar a organização das carteiras em grupos para eles retomarem o trabalho da Copa do Mundo de futebol.

Figura 2 – Painel da Copa do Mundo construído pela turma do 5º ano



Fonte: corredor da escola.

Para que não houvesse esse trabalho de organização e reorganização de carteiras, a professora responsável pela turma do 5º ano perguntou à professora responsável pelo 4º ano se ela poderia ceder sua sala, enquanto realizava com sua turma uma atividade na quadra poliesportiva. Ela gentilmente aceitou a proposta, dizendo apenas que era para comunicarmos a coordenadora.

Assim, ao soar o sinal para a volta do intervalo, às 14 horas e 50 minutos, nos dirigimos à sala de aula do 5º ano e, chegando lá, ela pediu aos alunos que apanhassem o estojo, organizou-os em duas filas do lado de fora da sala de aula, uma masculina e outra feminina, e depois partimos em direção à sala de aula do 4º ano que estava vazia. Após os alunos se acomodarem na “nova” sala de aula, pedi novamente para a professora entregar as duas folhas correspondentes às duas primeiras tarefas e disse aos alunos que, após a professora entregar as folhas a todos, seria dada uma explicação a respeito de como eles deveriam responder os

itens propostos, porque muitos deles estavam se confundindo ao determinar a resposta do(s) item(ns).

Após todos estarem com as folhas correspondentes às duas primeiras tarefas em mãos, peguei a prova de um aluno que havia faltado no dia como exemplo, posicionei-me na frente da sala de aula e, mostrando essa prova, disse a eles que, para completar o item com o valor do retângulo, do triângulo e da estrela, era necessário retomar a leitura do quadro com os valores do enunciado da tarefa. Para exemplificar, pedi que observassem o quadro de valores do enunciado da tarefa e perguntei: “quantos dinheiros vale um retângulo?”, e eles responderam em coro: “um”; depois perguntei: “quantos dinheiros vale um triângulo?”, e alguns deles responderam: “três”. Então, expliquei que eles deveriam relacionar o valor do retângulo com o valor do triângulo e depois relacionar o valor do triângulo com o valor da estrela para completar o que se pedia no(s) item(ns). Para finalizar a fala a respeito dessas tarefas, disse que quem não entendesse poderia chamar que eu explicaria novamente e aqueles que não tivessem esse item na prova também poderiam chamar, caso não entendessem algo. Não demorou muito e um dos alunos me chamou dizendo que não havia entendido o que acabara de ser explicado e, ao dar a mesma explicação, mas indicando os símbolos (retângulo, triângulo e estrela) em sua prova, o aluno disse ter entendido. Esse fato ocorreu com mais alguns deles.

Um aluno que havia respondido da maneira esperada na fase anterior chamou e afirmou que sua resposta estava correta e explicou como tinha pensado para determinar os valores. Houve um erro da minha parte ao colar esse item na prova dele.

Não demorou muito tempo e eles começaram a chamar dizendo que haviam terminado. Ao distribuir as folhas com os itens correspondentes às tarefas 3 e 4, informei aos alunos que iria realizar uma explicação a respeito da tarefa 3 e pedi que iniciassem a resolução após essa explicação. Para entregar as tarefas, dividi com a professora o montante de folhas e começamos a distribuir aos alunos que já haviam terminado de resolver os itens correspondentes às tarefas 1 e 2. Eu os identificava pelo código de cada folha, já a professora entregava com mais agilidade, pois os reconhecia pelo nome.

Após todos os alunos estarem com as folhas correspondentes às tarefas 3 e 4 em mãos, fui à frente da sala de aula e disse que alguns deles estavam confundindo quantidade de cédulas de real com quantia em reais. Para exemplificar,

peguei propositalmente 4 cédulas de 2 reais e 3 cédulas de 5 reais em miniatura, porque a tarefa 3 se referia a cédulas de 2 reais e 5 reais. Inicialmente mostrei 4 cédulas de 2 reais e perguntei: “Quantas notas³⁵ tenho aqui?”, e eles me responderam em coro: “4 notas de 2 reais”. Apenas um aluno me respondeu 8 reais, por isso, expliquei a ele que a quantia era de 8 reais, mas que a quantidade de notas, que era o que se estava perguntando, era de 4 notas. Ainda com as cédulas de 2 reais em mãos, perguntei: “Que quantia em reais tenho aqui?”, e eles me responderam em coro: “8 reais”. Para verificar se tinham entendido essa diferença, levantei 3 cédulas de 5 reais e perguntei: “Quantas notas tenho aqui?”, e eles me responderam em coro: “3 notas de 5 reais”, mas o mesmo aluno que respondera de maneira equivocada a pergunta anterior, respondeu de maneira equivocada outra vez, informando que eu tinha em mãos 15 reais. Expliquei novamente que a quantia era de 15 reais, mas que a quantidade de notas, que era o que eu estava perguntando, era de 3 notas. Ainda com as cédulas de 5 reais em mãos, perguntei: “Que quantia em reais tenho aqui?”, e eles responderam em coro: “15 reais”.

Fiquei na dúvida se o aluno que respondeu de maneira equivocada não sabia ou estava apenas tentando tumultuar a explicação, porém expliquei da maneira que julgava a mais apropriada para a situação. Para finalizar a fala a respeito da tarefa 3, disse que quem não tivesse entendido poderia chamar eu que explicaria novamente e pedi, também, que lessem atentamente os itens para não haver confusão em relação à quantidade de notas de real e à quantia em reais. Após essa explicação, curiosamente nenhum aluno chamou para perguntar algo a esse respeito. Os alunos que solicitaram minha presença questionaram acerca da resolução do item que continha as mesmas informações da tarefa original com alteração em uma das informações, ou seja, que os irmãos tinham “um número diferente de notas”, pois alguns deles não atentaram para esse detalhe e julgaram ser o mesmo enunciado da tarefa original.

Em relação à tarefa 4, acerca da qual não foi dada explicação alguma, um aluno disse que não havia entendido o que se pedia no item, por isso pedi que lesse novamente o item e ele se deu conta de que o item se referia às respostas que ele tinha dado nos itens anteriores. Em outro item que supunha certa quantidade de bolinhas vermelhas dentro da caixa, um aluno chamou e disse que

³⁵ Utilizei a palavra “notas” com os estudantes, para referir às cédulas de real, porque no enunciado da tarefa não se fala em cédula de real, mas sim em notas.

não havia nenhuma bolinha vermelha e perguntei o porquê. Ele disse que o enunciado só falava de bolinhas pretas e brancas, não falava nada de bolinhas vermelhas. Para outro aluno, foi indicado que observasse as respostas dadas anteriormente para entender o item proposto, mas ele perguntou: “Eu posso responder apenas a pergunta?”. Respondi que sim, mas a intenção era que ele observasse suas respostas anteriores e percebesse que havia certa incoerência nelas, mas isso não foi possível naquele momento.

Rapidamente os alunos foram chamando para dizer que haviam terminado e logo passamos de fileira em fileira recolhendo as tarefas. Quando só restava um aluno para terminar, a professora decidiu retornar com os demais para a sala de aula do 5º ano, porque eles estavam sem ocupação alguma e estavam começando a ficar inquietos. Assim, fiquei por mais algum tempo com um aluno na sala de aula do 4º ano, até ele entregar as folhas correspondentes às tarefas 3 e 4, às 15 horas e 29 minutos. Depois, o acompanhei até a sala de aula do 5º ano.

6.4.1 Após a 4ª Fase da Prova

Os alunos identificados com os códigos 14D14, 14D22 e 14D29 não realizaram a quarta fase da prova porque faltaram à aula. Portanto, caso esses alunos comparecessem à aula do próximo encontro, eles resolveriam na fase 5 os mesmos itens propostos anteriormente.

Essa foi a primeira fase da prova em que foi explicado algo a todos os alunos de uma só vez, na frente de toda a turma, porque, analisando a terceira fase da prova, percebi que um mesmo tipo de explicação poderia ser útil para vários alunos.

Na orientação do dia seguinte à aplicação (04 de julho de 2014), sem qualquer motivo específico, começamos a determinar os itens correspondentes à tarefa 3, depois passamos para a tarefa 4, em seguida para a tarefa 1 e por último à tarefa 2. Para a tarefa 3, propusemos treze itens; para a tarefa 4, doze itens; para a tarefa 1, oito itens e para a tarefa 2, cinco itens.

Para os alunos identificados com os códigos 14D12 e 14D21, não foi proposto item algum em relação à tarefa 2, pois, de acordo com suas respostas, inferimos que esses alunos compreenderam a ideia da tarefa. Para os alunos 14D01, 14D02, 14D05, 14D08, 14D09, 14D15, 14D16, 14D21, 14D24 e 14D31, foi proposta outra tarefa derivada da tarefa 3, pois, para esses alunos, a tarefa

acompanhada dos itens já havia se esgotado. A impressão era que estava em um caminho que tenderia a voltar ao início.

6.5 A QUINTA FASE

Como nas fases anteriores, nesse dia (10 de julho de 2014), encontrei a professora do 5^o ano na sala dos professores, na hora do intervalo, e, após soar o sinal para os alunos voltarem do intervalo, dirigimo-nos à sala de aula. Chegamos à sala às 14 horas e 50 minutos e, nesse momento, quase todos os alunos estavam presentes, sentados em seus devidos lugares. Em pouco tempo, todos os alunos se encontravam dentro da sala de aula.

Ao entrar na sala de aula, foi possível perceber que grande parte dos alunos aparentava insatisfação em ter que participar da atividade mais uma vez, porque houve quase que um coro dizendo “aaaaaaa” e alguns comentários, em tom mais baixo, do tipo “di novo” ou “nossa, outra vez aquelas perguntas”. Mesmo assim, cumprimentei os alunos como se nada estivesse acontecendo, agradei pela cooperação e por terem participado até o momento e informei que aquela poderia ser a última etapa do trabalho, porque, na semana seguinte, eles entrariam em férias. Mais uma vez pedi para a professora entregar as duas primeiras tarefas e informei que eles iriam receber 2 (duas) folhas com os itens correspondentes à primeira e à segunda tarefa.

Diferentemente das fases anteriores, nessa, passei de carteira em carteira, conversando com um aluno de cada vez e perguntando se eles haviam entendido o que o item estava solicitando. A maioria deles pediu ajuda, dizendo que não havia entendido, mas houve quem dissesse que já havia terminado. Houve também alunos que alteraram sua resposta após pedir explicação. Para a grande maioria deles, o procedimento foi semelhante, ou seja, pedia que lessem o item e perguntava o que eles deveriam realizar para responder e/ou resolver o item. A partir da resposta, continuava realizando perguntas, o que, de certa forma, guiava-os para a resposta esperada.

Para grande parte dos alunos que não realizaram a conversão do quadrilátero, do triângulo e da estrela em “dinheiro” nas tarefas 1 e 2, da maneira esperada, indicava a observação do quadro que apresentava esses valores e informava que era necessário escrever o valor de cada símbolo em “dinheiros”. Para alguns deles, realizava perguntas do tipo: “Quantos dinheiros vale um retângulo?”;

“Quantos dinheiros vale um triângulo?”; “Se você disse que cada triângulo vale três dinheiros, então quantos dinheiros vale uma estrela?”. Após completarem as lacunas com os valores dos símbolos em um dos itens, muitos nem percebiam que havia uma pergunta logo na sequência. Por isso, informava que, de posse dos valores que eles acabavam de preencher nas lacunas, deveriam responder a pergunta, que pedia para determinar o valor de um ou dois brinquedos (avião, bola ou avião e bola).

Talvez pelo fato de estarmos na 5ª fase da prova, alguns deles não lembravam ou até não sabiam que o valor do brinquedo se localizava sobre sua imagem no enunciado da tarefa, representado com símbolos e, por isso, eu perguntava o local em que se localizava o valor dos brinquedos. Muitos deles indicavam corretamente a sequência de símbolos que estava no verso da folha. Para aqueles alunos que não respondiam de imediato, pedia para voltar a ler o enunciado original. Desse modo eles geralmente conseguiam identificar o valor dos brinquedos em símbolos, e eu informava que deveriam indicar o valor em “dinheiro”. Deixava os alunos pensando e passava para a carteira de outro aluno.

Explicações, indicações e perguntas desse tipo foram utilizadas com grande parte dos alunos, pois muitos deles tinham que realizar a conversão dos símbolos para “dinheiro” no item correspondente à tarefa 1, outros no item correspondente à tarefa 2 e outros nos itens correspondentes a ambas as tarefas. Nesse caso, a pergunta que estava logo após a parte de completar as lacunas era diferente. Em certos casos, ao dar essa explicação, alguns deles mostravam ter *insights*, porque faziam comentários do tipo: “ah, agora entendi” ou “ah, era isso que era para fazer”. Como levou certo tempo para atender aluno por aluno, os primeiros que havia sido atendidos estavam realizando outras atividades, como desenho e pintura, por exemplo, quando terminei de atender a todos.

Após passar pela carteira de todos os alunos, fui à frente da sala de aula e disse que iria passar recolhendo as duas primeiras folhas de quem já tivesse terminado e entregar as duas últimas com as tarefas 3 e 4. Novamente alguns deles mostraram insatisfação com comentários do tipo: “nossa, tem mais”, “vixi, isso nunca acaba” ou “agora é última né?”.

Após recolher as folhas com as tarefas 1 e 2 e entregar as folhas com as tarefas 3 e 4, não repeti o procedimento de passar de carteira em carteira dando explicações, pois isso não estava nos planos estabelecidos na última

orientação porque julgamos desnecessário. Em relação às tarefas 3 e 4, atendi apenas os alunos que solicitavam minha presença.

Pelo fato de ter passado de carteira em carteira para dar algumas explicações referentes aos itens correspondentes às tarefas 1 e 2, essa foi a fase da prova em que mais permaneci dentro da sala de aula do 5º ano, por volta de uma hora, porque, depois de agradecer-lhes por terem respondido as tarefas e desejar-lhes boas férias, o relógio marcava 15 horas e 52 minutos.

6.5.1 Após a 5ª Fase da Prova

Os alunos identificados pelos códigos 14D02, 14D03, 14D13 e 14D29 não realizaram a quinta fase da prova porque faltaram à aula. Como esse tinha sido nosso último encontro antes das férias do meio do ano, esses alunos não tiveram uma nova oportunidade de realizar os itens que foram propostos a eles.

A professora responsável pela turma informou que o aluno 14D29 não estava mais frequentando as aulas porque fora transferido de escola nesse período em que a prova em fases foi realizada.

Uma característica marcante dessa fase, que não ocorreu nas demais, foi o atendimento individual, de carteira em carteira, a respeito dos itens correspondentes às tarefas 1 e 2, o que prolongou um pouco minha permanência na sala de aula.

7 ANÁLISE DO MATERIAL

Optou-se por analisar somente as tarefas dos alunos que estiveram presentes em todas as 5 (cinco) fases da prova. O quadro a seguir apresenta a frequência dos alunos no decorrer da prova. Nele, a letra **P** indica presença e a letra **A**, em destaque, indica ausência.

Quadro 6 – Frequência dos alunos no decorrer da prova

Aluno	1ª fase	2ª fase	3ª fase	4ª fase	5ª fase
14D01	P	P	P	P	P
14D02	P	A	P	P	A
14D03	P	P	P	P	A
14D04	P	P	A	P	P
14D05	P	P	P	P	P
14D06	P	P	A	P	P
14D07	P	P	P	P	P
14D08	P	P	P	P	P
14D09	P	P	A	P	P
14D10	P	A	P	P	P
14D11	P	P	P	P	P
14D12	P	P	P	P	P
14D13	P	P	P	P	A
14D14	P	P	P	A	P
14D15	P	P	P	P	P
14D16	P	P	P	P	P
14D17	P	P	P	P	P
14D18	P	P	P	P	P
14D19	P	P	A	P	P
14D20	P	P	P	P	P
14D21	P	P	P	P	P
14D22	P	P	P	A	P
14D23	P	P	P	P	P
14D24	P	P	P	P	P

14D25	P	P	P	P	P
14D26	P	P	P	P	P
14D27	P	P	P	P	P
14D28	P	P	P	P	P
14D29	P	P	A	A	A
14D30	P	P	P	P	P
14D31	A	P	P	P	P

Fonte: autor.

Assim, foram analisadas as tarefas dos 19 alunos identificados pelos códigos 14D01, 14D05, 14D07, 14D08, 14D11, 14D12, 14D15, 14D16, 14D17, 14D18, 14D20, 14D21, 14D23, 14D24, 14D25, 14D26, 14D27, 14D28 e 14D30.

Mesmo realizando esse corte, ainda contava com a produção de 19 alunos, em 4 tarefas, com no mínimo 4 itens em cada uma delas, o que resultou em mais de 304 respostas e/ou resoluções. Por isso decidiu-se, por conveniência, analisar neste trabalho apenas as produções correspondentes a uma das tarefas e seus respectivos itens, o que reduziu a amostra para um pouco mais de 76 respostas e/ou resoluções. A tarefa seguinte foi escolhida porque apresentou a maior quantidade de respostas e/ou resoluções distintas na primeira fase da prova.

4) A caixinha abaixo possui uma sequência de 20 bolinhas. Quantas bolinhas brancas estão nesta sequência? Explique como pensou para resolver.



No quadro 5, essa tarefa foi classificada como sendo de contexto de segunda ordem, de acordo com De Lange (1987), problema de pesquisa aberta, segundo Butts (1997) e problema de contexto realista, de acordo com Díaz e Poblete (2005). Concordamos com Pires (2013), que também considera essa tarefa como sendo de contexto realístico, além de imaginável e flexível no sentido de possibilitar o desenvolvimento de várias ideias distintas para obter uma resposta consistente. Essa tarefa admite várias respostas corretas, pois a sequência pode ter de 5 a 15 bolinhas brancas, dependendo de como o leitor interpreta a situação. Por isso, há a necessidade de o aluno explicar como pensou para resolver.

Com essa tarefa, acredita-se que os alunos tiveram a oportunidade de pensar “mais livremente” sem se apegar a um determinado conteúdo matemático ou a alguma palavra-chave que alguns professores utilizam para “ensiná-los” a resolver determinadas tarefas. Isso ocorre porque não é necessário utilizar um conteúdo matemático específico para obter uma resposta. O objetivo é que os alunos utilizem suas experiências pessoais, matemáticas ou não, para organizar as informações, ou seja, espera-se que eles matematizem a situação para mostrar como lidaram com a tarefa.

De acordo com a semelhança das respostas dadas na primeira fase da prova, as produções foram agrupadas em três grupos excludentes.

Quadro 7 – Agrupamentos das respostas

Grupo	Característica	Alunos
G1	Não respondeu a pergunta da tarefa.	14D01, 14D08, 14D11, 14D16, 14D17, 14D18 e 14D26.
G2	Respondeu a pergunta da tarefa e explicou de maneira consistente ³⁶ .	14D07, 14D20, 14D21 e 14D25.
G3	Respondeu a pergunta da tarefa, mas a explicação não foi consistente.	14D05, 14D12, 14D15, 14D23, 14D24, 14D27, 14D28 e 14D30.

Fonte: autor.

Da segunda fase em diante, foram propostos itens para cada aluno, individualmente, de acordo com as respostas dadas na fase anterior, por isso pode haver itens distintos para alunos de um mesmo grupo.

7.1 ALUNOS DO GRUPO G1

Segue uma análise baseada na interpretação e nas inferências do pesquisador a respeito da produção escrita de todos os alunos agrupados em G1, no decorrer das 5 fases da prova.

7.1.1 Aluno 14D01

De posse do enunciado da tarefa e sem indicação alguma, na primeira fase da prova, esse aluno produziu o seguinte registro:

³⁶ A palavra consistente está sendo utilizada, nesse caso, para indicar uma explicação que esteja de acordo com a estratégia utilizada para se obter a resposta e não apenas explicando o cálculo apresentado.

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 10 \\ \hline 20 \end{array}$$

foi muito facil $10 + 10 = 20$

Ao observar essa produção, é possível inferir que o aluno supôs haver 10 bolinhas brancas e 10 bolinhas pretas. E, ao adicionar essas quantidades, obteve a quantidade total de bolinhas da sequência, como se tivesse realizado o cálculo mental e registrado a prova real, o que seria uma estratégia que poderia resultar em uma das respostas esperadas, porém ele não respondeu à pergunta da tarefa.

Para a segunda fase da prova, repetiu-se a pergunta:

1.2 Nesta sequência, quantas são as bolinhas brancas?
 Com 20 Bolinhas

De acordo com essa resposta, inferiu-se que esse aluno não havia interpretado a tarefa da maneira esperada, por isso foi proposto um item referente à interpretação de texto para ser respondido na terceira fase.

4.3 Quantas bolinhas o problema informa que a sequência tem?
 Com 20 Bolinhas

Com essa resposta, o aluno deu indícios de ter interpretado a tarefa da maneira correta. Assim, um item foi proposto para ser respondido na quarta fase, objetivando confrontar suas respostas anteriores.

4.4 As bolinhas da sequência desenhadas na figura são da mesma cor?
 Sim

Esse aluno surpreendeu ao responder que as bolinhas desenhadas da imagem eram da mesma cor. Para a quinta fase, foi proposto um item com o

objetivo de verificar seu poder de argumentação, pois desejava-se saber o porquê de ele ter respondido o item da quarta fase daquele modo.

4.5 João acha que as bolinhas de sequência são pretas e brancas. O que você acha?

Nim que elas são brancas e pretas

Como o aluno mostrou ter mudado sua opinião, não foi possível saber o porquê de ele ter afirmado, no item proposto na fase 4, que as bolinhas eram da mesma cor.

Nessa produção, em que o aluno parece ter partido de uma resposta que poderia ser considerada a esperada, as intervenções não surtiram o efeito esperado.

7.1.2 Aluno 14D08

Produção escrita da primeira fase da prova:

*estão nesta sequência e
bolinhas brancas eu
contei quantas bolinhas
brancas tinham.*

Não foi possível entender a resposta porque, no final da primeira linha, existe um símbolo irreconhecível. Decidiu-se, então, repetir a mesma pergunta da tarefa para esse aluno responder na segunda fase da prova.

*4.2 Nesta sequência, quantas são as bolinhas brancas:
nessa sequência possui 5 bolinhas brancas.*

Com essa resposta o aluno respondeu a pergunta proposta.

A fim de aprofundar o diálogo em direção ao que ele havia afirmado em sua resposta da primeira fase, isto é, de que havia realizado uma contagem das bolinhas brancas que havia na sequência e, para provocar uma discussão a respeito das bolinhas que não é possível visualizar na imagem, foram propostos dois itens

para a terceira fase da prova: um de contagem e outro supondo uma situação.

4.3 No desenho é possível ver fora da caixa quantas bolinhas brancas? E quantas bolinhas pretas?

Sim é possível ver.

4.4 Se as bolinhas que estão dentro da caixa forem vermelhas, quantas são as bolinhas vermelhas?

** serão DE 5 cinco bolinhas Branca.*

Ao que tudo indica, ele não conseguiu interpretar o item 4.3 da maneira esperada, pois não determinou a quantidade de bolinhas brancas e pretas que é possível ver na imagem. Ele apenas afirmou que é possível visualizar bolinhas brancas e bolinhas pretas na imagem.

Em relação ao item 4.4, ele afirmou novamente que são cinco bolinhas brancas, mas não respondeu o item proposto. Para a quarta fase da prova, o item 4.4 foi proposto novamente.

4.5 Você respondeu que são cinco bolinhas brancas, mas responda a pergunta 4.4.

4 bolinhas brancas.

O aluno não respondeu o item proposto, que diz respeito às bolinhas vermelhas, pois, em seu registro ele indica uma quantidade de bolinhas brancas. Mesmo assim insistiu-se nesse item. Ele foi proposto novamente, alterando-se a cor das bolinhas.

4.6 Se as bolinhas que estão dentro da caixa forem azuis, quantas serão as bolinhas azuis?

~~serão~~ *serão 5 bolinhas azuis.*

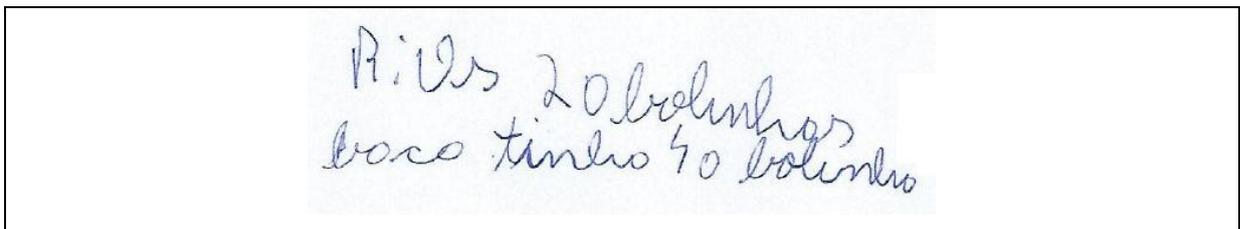
Nessa fase, o aluno determinou uma quantidade de bolinhas azuis que supostamente estaria dentro da caixa. Mesmo não sendo a resposta esperada,

pode ser que ele tenha compreendido a situação.

Apesar dessas respostas desconstruídas, na primeira fase da prova, ele utilizou uma estratégia que responde a pergunta da tarefa (contar as bolinhas brancas que aparecem na imagem) e, na segunda fase, afirmou ter 5 bolinhas brancas na sequência, o que é uma das possíveis respostas.

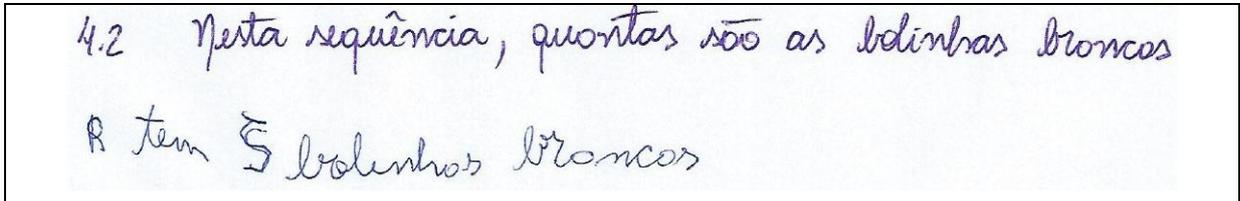
7.1.3 Aluno 14D11

Produção escrita da primeira fase da prova:

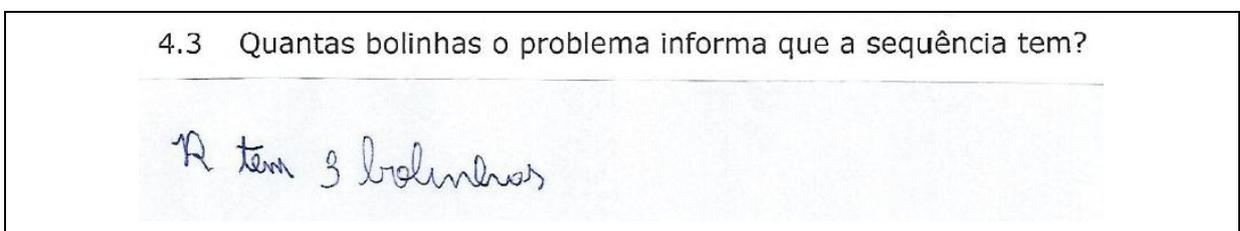


De acordo com essa produção, não ficou clara a resposta do aluno, pois ele registrou algo com 20 bolinhas e com 40 bolinhas, mas não informou a quantidade de bolinhas brancas que estavam na sequência.

Para a segunda fase da prova, repetiu-se a pergunta:



A afirmação de que havia 5 bolinhas brancas na sequência era uma das respostas esperadas, pois esse aluno pode ter realizado a contagem das bolinhas brancas que era possível visualizar na imagem. Para tentar confrontá-lo com sua resposta na primeira fase, para a terceira, foi proposto o seguinte item:



Não foi possível estabelecer sentido algum para essa resposta, por isso um item semelhante ao anterior foi proposto.

4.4 Assinale no enunciado do problema onde aparece a informação da quantidade de bolinhas que o problema tem.

tem 10 bolinhas

O aluno parece não ter compreendido o item proposto, porque, ao invés de assinalar a quantidade de bolinhas no enunciado, ele escreveu uma determinada quantidade.

De posse dessas informações, na quinta fase, não se propôs item algum para esse aluno, pois suspeitava-se que ele sequer estivesse lendo os enunciados. Assim, na quinta fase foi pedido para ele apenas ler o enunciado da tarefa, o que ele fez com alguma dificuldade.

Nesse caso, é possível que, mesmo esse aluno estando no 5º ano, seria interessante ler a tarefa e depois os itens de cada uma das fases para ele tentar responder. Desse modo talvez se pudesse ter um resultado diferente.

7.1.4 Aluno 14D16

Produção escrita da primeira fase da prova:

The image shows a student's handwritten work. On the left, there is a division calculation:
$$\begin{array}{r} 20 \overline{) 20} \\ \underline{20} \\ 00 \end{array}$$
 Below the calculation, the student has written the sentence: "Eu pegue o numero 20 e dividiu por Quatro".

Esse aluno não respondeu à pergunta da tarefa. Ele apenas descreveu o cálculo que realizou, mas, de acordo com sua descrição, o cálculo não está correto. Ao observar o cálculo, é possível inferir, porém, que inicialmente ele realizou a divisão de 20 por 5 corretamente, mas, por algum motivo, ele resolveu dividir 20 por 4 e alterou apenas o divisor, de 5 para 4, não modificando o restante dos elementos da divisão.

Na segunda fase da prova, foi proposto um item para ele explicar por que realizou tal divisão, além de repetir a pergunta original da tarefa.

4.2 Explique por que você resolveu dividir 20 por 4?

Porque eu peguei 20 e 4 e contei as bolinhas e dividi 20 por 4.

4.3 Quantas são as bolinhas brancas?

R. São 5 bolinhas

No item 4.2, inferiu-se que ele utilizou o número 20 por ser a quantidade total de bolinhas da sequência, mas ele não especificou a contagem que realizou para obter o número 4. No item 4.3, ele afirmou que há 5 bolinhas brancas, provavelmente porque contou as bolinhas brancas da imagem, por isso é possível que ele tenha obtido o número 4 ao contar as bolinhas pretas que estão na imagem.

Para confirmar se ele realmente realizou a contagem das bolinhas que era possível visualizar na imagem e para promover uma discussão a respeito da cor das bolinhas que estavam dentro da caixa, foram propostos os seguintes itens para a terceira fase:

4.4 No desenho é possível ver fora da caixa quantas bolinhas brancas? E quantas bolinhas pretas?

5 bolinhas pretas

4.5 Se as bolinhas que estão dentro da caixa forem vermelhas, quantas são as bolinhas vermelhas?

4 bolinhas vermelhas.

A resposta do item 4.4 revela que o número 4, que o aluno disse ter obtido por meio de uma contagem no item 4.2, não foi obtido por meio da contagem das bolinhas pretas que aparecem na imagem, foi por meio de outra contagem. Talvez por ter afirmado no item 4.3 que havia 5 bolinhas brancas, no item 4.4, ele respondeu apenas em relação às bolinhas de cor preta.

No item 4.5, ele afirmou que havia 4 bolinhas vermelhas dentro da

caixa, mas não deu indício algum de como chegou a essa conclusão. De acordo com suas respostas a respeito das bolinhas que estão fora e dentro da caixa, a sequência não podia ter 20 bolinhas, como indicado no enunciado da tarefa, por isso, para a quarta fase da prova, o seguinte item foi proposto:

4.6 Nas perguntas anteriores você respondeu que são 5 bolinhas brancas, 5 bolinhas pretas e 4 bolinhas vermelhas. Então quantas bolinhas a sequência têm?

ela tem 14 bolinhas.

$$\begin{array}{r} 5 \\ 5 \\ 4 \\ \hline 14 \end{array}$$

De acordo com suas afirmações anteriores, a resposta desse item está coerente, pois, mesmo sem indicar o sinal da operação na “conta armada”, é possível perceber que ele adicionou as quantidades de bolinhas brancas, pretas e vermelhas que ele afirmou ter na sequência e obteve 14 bolinhas, o que também mostra que esse aluno é capaz de efetuar certas adições com 3 parcelas. O enunciado da tarefa, porém, afirma que havia 20 bolinhas na sequência e, para questioná-lo a esse respeito, propôs-se o seguinte item para a quinta fase da prova:

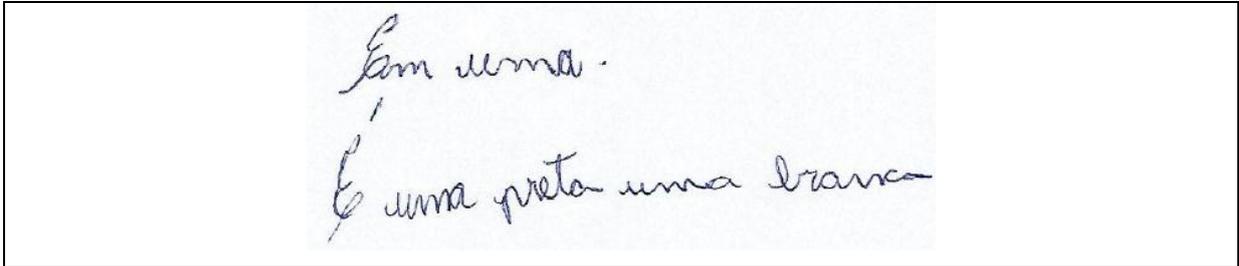
4.7 No item anterior você disse que a sequência tem 14 bolinhas, mas o enunciado do problema afirma que a sequência tem 20 bolinhas. Como você explica isso?

Eu explico que eu adiei esse número 14 nas vezes mais se somar 20 por 14 vai dar 34

É possível entender parte da explicação como sendo “eu achei esse número 14 fazendo”, o que realmente ele mostrou no item 4.6 ao adicionar as quantidades de bolinhas brancas, pretas e vermelhas, e outra parte como sendo “mais se somar 20 por 14 vai ter 34”, o que mostra que esse aluno, mesmo não apresentando a resposta esperada, possivelmente realizou algum tipo de reflexão para tomar a decisão de adicionar 20 com 14 de maneira correta, pois obteve como soma 34.

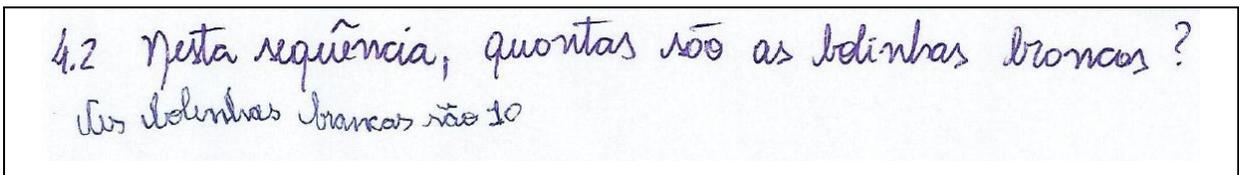
7.1.5 Aluno 14D17

Produção escrita da primeira fase da prova:



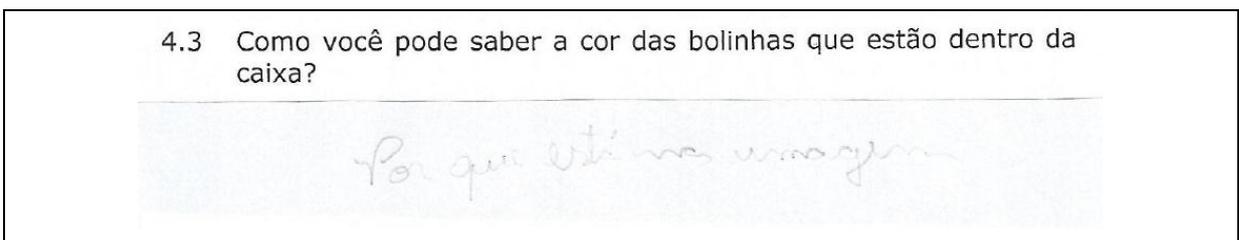
Levando em consideração a abordagem para o ensino de Matemática da RME, é possível afirmar que o aluno realizou alguma matematização, pois foi capaz de observar as bolinhas que aparecem na imagem e generalizar um padrão para todas as bolinhas da sequência. Entretanto, ele não respondeu à pergunta.

Para a segunda fase, foi proposta a seguinte pergunta:



Com essa resposta, o aluno respondeu à pergunta proposta. Pode-se inferir que, ao determinar o padrão de uma bolinha branca e outra preta, o aluno dividiu a quantidade total de bolinhas da sequência em duas partes iguais, por imaginar que houvesse bolinhas de apenas duas cores, brancas e pretas.

Em seguida foi colocado o seguinte item³⁷:



Com esse item, o interesse era realizar uma discussão a respeito das bolinhas que estavam dentro da caixa, ou seja, das bolinhas que não era possível visualizar na imagem, mas a resposta dele foi justamente o contrário, pois possivelmente faz menção às bolinhas que era possível visualizar na imagem.

Para a quarta fase, foram propostos dois itens: um a respeito das bolinhas que era possível visualizar na imagem e outro seguindo a mesma ideia utilizada na fase anterior, tentando dialogar a respeito das bolinhas que não era

³⁷ Essa produção está um pouco apagada porque o aluno não seguiu as indicações e a produziu com lápis.

possível visualizar na imagem.

- 4.4 No desenho é possível ver fora da caixa quantas bolinhas brancas? E quantas bolinhas pretas?

As brancas são 5 e as pretas 5.

- 4.5 Se as bolinhas que estão dentro da caixa forem vermelhas, quantas são as bolinhas vermelhas?

São 5 bolinhas vermelhas.

Com relação à resposta do item 4.4, não se julgou necessário continuar o diálogo, pois o aluno respondeu da maneira que se esperava. Mas, em relação à resposta do item 4.5, decidiu-se investir com mais um item na fase 5, porque parece existir uma incoerência nas quantidades de bolinhas indicadas por ele nas respostas anteriores. Para conduzir o aluno a uma reflexão nesse sentido, foi proposto o seguinte item:

- 4.6 Nas respostas dos itens anteriores, você disse que há 5 bolinhas vermelhas dentro da caixa, 5 bolinhas pretas e 5 bolinhas brancas. Quantas bolinhas há no total?

R: No total há 15 bolinhas

Sua resposta está coerente com as quantidades de bolinhas brancas, pretas e vermelhas que ele afirmou ter nos itens da fase 4. Entretanto, a quantidade total de bolinhas não condiz com a quantidade informada no enunciado da tarefa. Mesmo a resposta não sendo considerada a ideal, foi possível perceber que o aluno retomou algumas de suas respostas anteriores para obter outras, o que possivelmente pode tê-lo induzido a uma reflexão a respeito das respostas dadas anteriormente.

7.1.6 Aluno 14D18

Produção escrita da primeira fase da prova:

Ex
Eu pensei de cabeça

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 5 \\ \hline 100 \end{array}$$

Nessa produção foi possível perceber que o aluno sabe realizar a multiplicação de 5 por 20 por meio de uma conta armada. Porém essa estratégia não resolve a tarefa, além disso sua justificativa também não foi convincente.

Para a segunda fase da prova, repetiu-se a pergunta:

4.2 Nesta sequência, quantas são as bolinhas brancas?
Elas são 10 bolinhas brancas.

Utilizando outra estratégia, que não foi registrada, esse aluno apresentou uma possível resposta para o item. Foram propostos dois itens para a terceira fase: um a respeito das bolinhas que é possível visualizar na imagem e outro supondo algo a respeito das bolinhas que não é possível visualizar na imagem.

4.3 No desenho é possível ver fora da caixa quantas bolinhas brancas? E quantas bolinhas pretas?

$$\begin{array}{r} 5 \\ + 5 \\ \hline 10 \end{array}$$

As pretas é 20 e as brancas 10.

4.4 Se as bolinhas que estão dentro da caixa forem vermelhas, quantas são as bolinhas vermelhas?

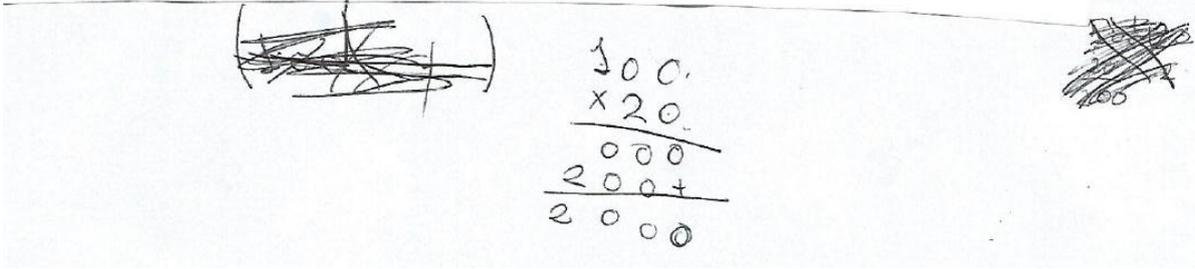
As bolinhas vermelhas são 100 também.

No item 4.3 inferiu-se que o aluno interpretou da maneira esperada, porque havia 5 bolinhas brancas e 5 bolinhas pretas visíveis na imagem, mas, ao adicionar essas quantidades, ele obteve como soma 10 bolinhas. Ele pode ter pensado que, se houvesse 20 bolinhas no total, então haveria 10 bolinhas brancas e 10 bolinhas pretas. Com essa resposta, o aluno deixa de considerar a condição do

item que diz respeito às bolinhas que era possível visualizar na imagem.

No item 4.4 parece haver um equívoco no registro da quantidade de bolinhas vermelhas, porque a última palavra de sua resposta é “também”. Como no item 4.3 ele afirma haver 10 bolinhas brancas e 10 bolinhas pretas, é possível que ele tenha inserido um zero a mais ao registrar o número 10 e assim registrou o número 100. Caso isso realmente tenha ocorrido, sua interpretação está totalmente coerente com a resposta, mas, caso sua intenção realmente fosse registrar o número 100, caberia uma outra discussão. Foi justamente com o intuito de esclarecer essa dúvida que se propôs o item para a fase 4.

4.5 O problema informa que a sequência tem 20 bolinhas, então como podem ser 100 bolinhas vermelhas?



The image shows a student's handwritten response to question 4.5. The question asks how 100 red beads could be possible given that the sequence only has 20 beads. The student has scribbled out some text on the left and right. In the center, they have written a multiplication problem: $100 \times 20 = 2000$. The calculation is written as follows: 100 on the top line, $\times 20$ on the second line, a horizontal line, then 000 on the third line, 2000 on the fourth line, and 2000 on the fifth line.

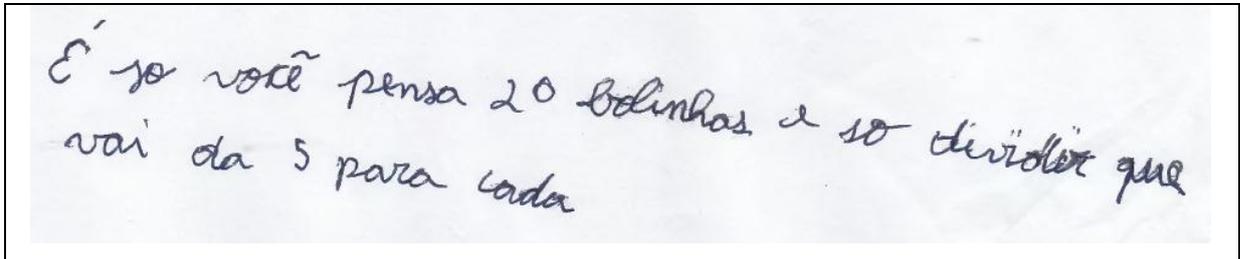
Como o aluno não contestou o fato de seu possível equívoco ao registrar o número 10, a inferência realizada anteriormente acerca da resposta dada no item 4.4 não faz o menor sentido. Nessa produção foi possível notar que o aluno sabe realizar a multiplicação de 20 por 100 por meio de uma “conta armada”, mas esse cálculo não estava diretamente relacionado com a resposta do item. Tudo indica que o aluno realizou uma operação qualquer com os números presentes no enunciado.

Para a quinta fase não se propôs item algum para esse aluno, pois suspeitou-se que ele sequer leu o enunciado do item anterior. Assim, na quinta fase, foi pedido para ele apenas ler o enunciado do item anterior e, quem sabe, refletir a respeito da resposta que havia dado. Pode até ser que ele tenha realizado alguma reflexão, mas o fato é que ele não realizou registro algum na quinta fase da prova.

Nesse caso, parece ter havido um desinteresse por parte do aluno que não levou a sério a quarta fase da prova, porque houve indícios em suas produções de que ele estava trilhando um caminho que o levaria à resposta esperada, mas isso não ocorreu.

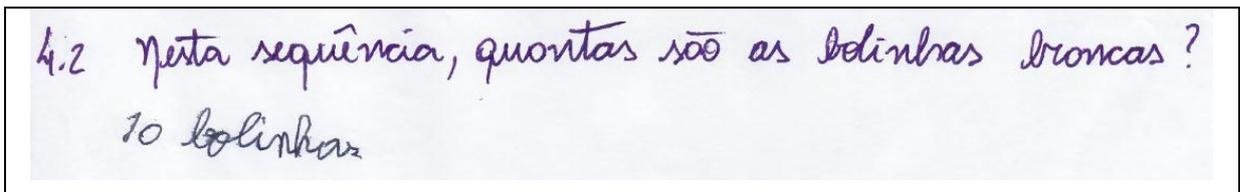
7.1.7 Aluno 14D26

Produção escrita da primeira fase da prova:



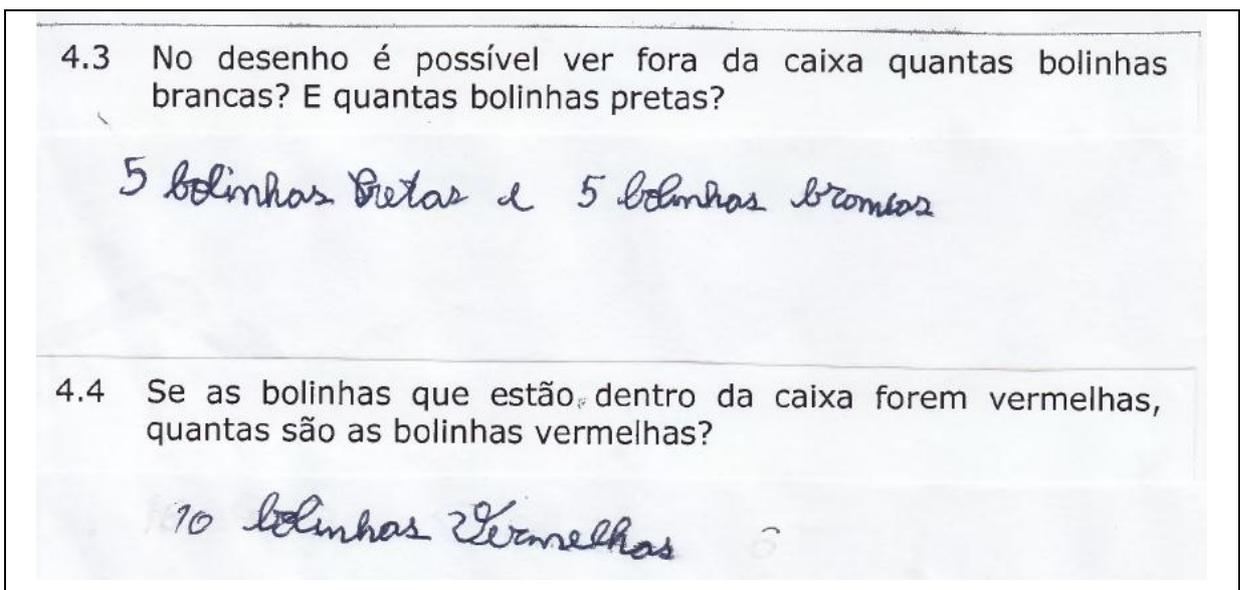
O aluno explicou um procedimento de divisão das 20 bolinhas da sequência por algum número, que se infere como ser o número 4, que resulta em 5 bolinhas. No entanto ele não determinou a quantidade de bolinhas brancas que estavam na sequência.

Para a segunda fase da prova, repetiu-se a pergunta:



Agora ele determinou a quantidade de bolinhas brancas da sequência. Infere-se que ele dividiu a quantidade total de bolinhas da sequência por 2 por pensar que existiam apenas bolinhas brancas e pretas nessa sequência.

Na terceira fase, decidiu-se provocar uma discussão a respeito das bolinhas que não é possível visualizar na imagem, por isso os seguintes itens:



As respostas dadas em ambos os itens foram as esperadas. Pode-se inferir que esse aluno utilizou a informação inicial da tarefa, de que havia 20

bolinhas na sequência, pois, ao adicionar a quantidade de bolinhas brancas, pretas e vermelhas, a soma é 20 ($5+5+10=20$).

Para a quarta fase da prova, foi proposta uma variação do item 4.4, supondo que havia duas cores de bolinhas dentro da caixa.

4.5 E se as bolinhas que estão dentro da caixa forem azuis e verdes, quantas são as bolinhas azuis e verdes?

5 bolinhas azuis e 5 verdes

Inferre-se que esse aluno manteve o mesmo raciocínio do item 4.4, pois ele afirma que havia 10 bolinhas no interior da caixa, 5 bolinhas azuis e 5 bolinhas verdes. Além disso, ele pode ter associado o padrão de uma bolinha branca e outra preta, que é possível visualizar na imagem, para determinar que havia 5 bolinhas azuis e 5 bolinhas verdes.

Na quinta fase da prova, foi proposta uma situação um pouco diferente para “testar” o aluno, que parecia ter compreendido as ideias apresentadas nos itens anteriores.

4.6 E se todas as bolinhas fossem amarelas, quantas bolinhas a sequência teria?

20 bolinhas

A resposta esperada era 20 bolinhas amarelas, pois, no enunciado da tarefa, é informado que na sequência havia 20 bolinhas, assim a cor das bolinhas não interfere na quantidade total. Entretanto, pode-se considerar que esse aluno teve um desenvolvimento satisfatório no decorrer das 5 fases da prova.

7.2 ALUNOS DO GRUPO G2

Segue uma análise baseada na interpretação e nas inferências do pesquisador a respeito da produção escrita de todos os alunos agrupados em G2, no decorrer das 5 fases da prova.

7.2.1 Aluno 14D07

Produção escrita da primeira fase da prova:

$$\begin{array}{r} 20/2 \\ \underline{20} \quad 10 \\ 0 \end{array}$$

Nessa sequência tem 10 bolinhas brancas. Se tem uma bolinha branca a cada uma preta tem metade do total.

O aluno respondeu a pergunta da tarefa e explicou como pensou para resolver utilizando um tipo de generalização, pois, quando afirma que há “uma bolinha branca a cada uma preta”, ele supôs que esse padrão, preta e branca, se estende por todas as bolinhas da sequência.

Para obter a quantidade de bolinhas brancas, ele efetuou a divisão de 20 por 2 por meio de uma “conta armada” de maneira correta. Também associou metade com a divisão por dois, algo que nem todos os alunos dessa faixa etária são capazes de realizar.

Como a resposta e a justificativa dada foram satisfatórias, supôs-se uma nova situação no item da segunda fase da prova.

4.2 É se as bolinhas que estão dentro da caixa forem de outra cor?
 Não muda nada

De acordo com essa resposta, pode-se inferir que o aluno fez essa afirmação pelo fato de a sequência continuar com 20 bolinhas no total, ou de a sequência seguir o padrão de uma bolinha branca e outra preta fora da caixa e de uma bolinha branca e outra de alguma cor diferente de branca dentro da caixa, o que manteria 10 bolinhas brancas na sequência.

Foram propostos os seguintes itens para a terceira fase da prova:

4.3 No desenho é possível ver fora da caixa quantas bolinhas brancas? E quantas bolinhas pretas?
 Não

4.4 Se as bolinhas que estão dentro da caixa forem vermelhas, quantas são as bolinhas vermelhas?

Tam ser 10 bolinhas vermelhas

A interpretação da resposta do item 4.3 é bem complicada, pois a palavra “não” não responde a pergunta. Esperava-se uma resposta que indicasse certa quantidade de bolinhas brancas e pretas. No item 4.4, ele respondeu a pergunta e, de acordo com a quantidade de bolinhas vermelhas indicadas, pode ter realizado a contagem das bolinhas que é possível visualizar na imagem e subtraído da quantidade total de bolinhas, que é de 20 bolinhas. Porém, isso não faz sentido algum se for levada em consideração a resposta do item 4.3. Por isso, não se pode descartar a possibilidade de esse aluno ter copiado a resposta do item 4.4 de algum colega.

Para a quarta fase da prova, propôs-se um item para tentar induzir o aluno a contar as bolinhas que aparecem na imagem.

4.5 Você disse que são 10 bolinhas vermelhas dentro da caixa, então quantas bolinhas pretas e quantas bolinhas brancas tem a sequência?

Ta ser 10 bolinhas pretas e 10 bolinhas brancas

Para obter essa resposta, o aluno pode ter desconsiderado a primeira parte da pergunta, que informa que há 10 bolinhas vermelhas dentro da caixa, e ter pensado como na primeira fase, ou seja, que, na sequência, as bolinhas são metade brancas e metade pretas. Porque, se a sequência tivesse 10 bolinhas vermelhas, 10 bolinhas pretas e 10 bolinhas brancas, haveria 30 bolinhas no total, o que contraria o enunciado da tarefa que informa que a sequência tem 20 bolinhas.

Para a quinta fase da prova, propôs-se um item semelhante ao 4.4.

4.6 Se as bolinhas que estão dentro da caixa for metade azul e metade amarela, quantas serão as bolinhas azuis?

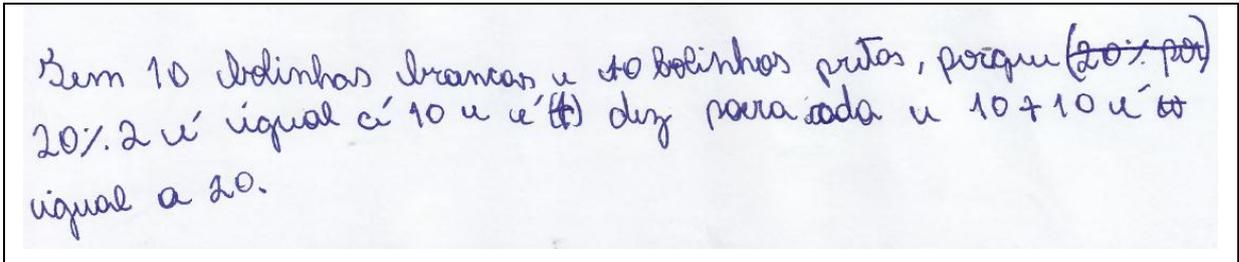
Serão 10 bolinhas azuis

De acordo com a resposta dada no item 4.4, a resposta esperada era 5 bolinhas azuis. No entanto, pode-se inferir que esse aluno não copiou a resposta do item 4.4 de um colega. Ele também pode ter observado a resposta do

item 4.4 e associado com esse item, o que não seria nada mal, porque um dos objetivos da prova em fases é a reflexão das produções anteriores.

7.2.2 Aluno 14D20

Produção escrita da primeira fase da prova:

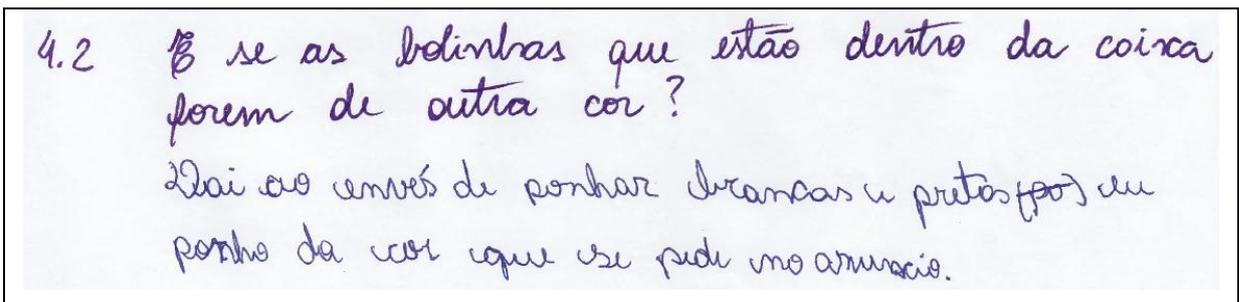


Tem 10 bolinhas brancas e 10 bolinhas pretas, porque $(20:2)$ $20:2$ é igual a 10 e a (10) diz para cada 10+10 é igual a 20.

De acordo com essa resposta, infere-se que o aluno generalizou a sequência de bolinhas como sendo composta por bolinhas pretas e brancas, organizadas de maneira alternada como aparece na parte da sequência que é possível visualizar.

Outro fato interessante nessa resposta é que ele descreve a divisão de 20 por 2 e, em seguida, faz uma espécie de validação do resultado com a adição $10 + 10$, como se estivesse realizando a “prova real” do cálculo da divisão. Desse modo, ele também pode ter mostrado que, havendo 10 bolinhas brancas e 10 bolinhas, pretas a condição de que há 20 bolinhas na sequência é satisfeita.

Para a segunda fase da prova, foi proposto o seguinte item:



4.2 B se as bolinhas que estão dentro da caixa forem de outra cor?
Não eu em vez de colocar brancas e pretas eu pinto da cor que eu pedir no anúncio.

É provável que esse aluno não tenha entendido o item da maneira esperada, porque sua resposta indica que as bolinhas pretas e brancas seriam substituídas por bolinhas de outras cores, o que não era a intenção.

Para a terceira fase da prova, dois itens foram propostos.

4.3 No desenho é possível ver fora da caixa quantas bolinhas brancas? E quantas bolinhas pretas?

brancas são 5 e pretas são 5 também.

4.4 Se as bolinhas que estão dentro da caixa forem vermelhas, quantas são as bolinhas vermelhas?

são 10 vermelhas (porque)

Agora o aluno parece ter compreendido os itens da maneira que se esperava, pois é provável que ele tenha realizado a contagem das bolinhas que é possível visualizar na imagem para dar a resposta do item 4.3. E para dar a resposta do item 4.4, ele possivelmente levou em consideração a resposta dada no item 4.3, pois registrou que havia 10 bolinhas fora da caixa, 5 brancas e 5 pretas, e no item 4.4 registrou que havia 10 bolinhas vermelhas dentro da caixa, ou seja, a quantidade que faltava para completar as 20 bolinhas da sequência.

Para a quarta fase da prova foi proposto um item parecido com o item 4.4, mas com nível de dificuldade um pouco maior.

4.5 E se as bolinhas que estão dentro da caixa forem azuis e verdes, quantas são as bolinhas azuis e verdes?

azuis são 10 e verdes são 10 também.

É provável que ele tenha tido uma interpretação semelhante à do item 4.2, porque, de acordo com sua resposta, ele pode ter entendido que as bolinhas pretas e brancas seriam substituídas por bolinhas azuis e verdes. Mas a intenção era discutir a respeito das bolinhas que se considerava estar dentro da caixa, ou seja, as bolinhas que não é possível de visualizar na imagem.

Para a quinta fase da prova, propôs-se o seguinte item:

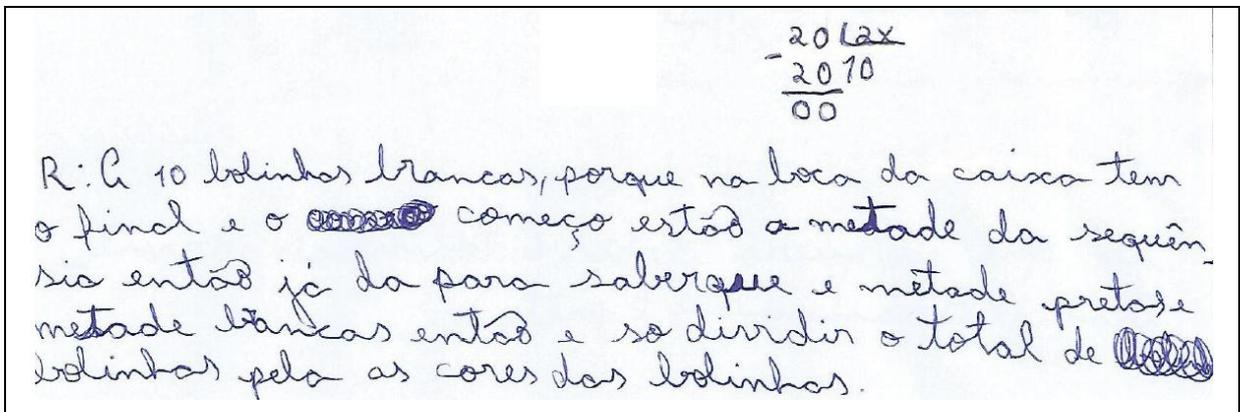
4.6 Nas respostas dos itens anteriores, você disse que há 10 bolinhas azuis e 10 bolinhas verdes dentro da caixa, 5 bolinhas pretas e 5 bolinhas brancas. Quantas bolinhas há no total?

10 dez bolinhas no total, porque $5 + 5$ é igual a 10.

A resposta dada nessa fase não foi a esperada, pois como se perguntou a quantidade total de bolinhas, esperava-se obter como resposta 30 bolinhas (10+10+5+5). No entanto, ele pode ter fixado as 20 bolinhas da sequência, 10 bolinhas azuis e 10 bolinhas verdes, de acordo com a resposta do item 4.5, e realizado a adição da quantidade total de bolinhas pretas e bolinhas brancas, o que resulta em 10 bolinhas. Mesmo assim, não é a quantidade total de bolinhas, é apenas um outro tipo de interpretação para a situação proposta.

7.2.3 Aluno 14D21

Produção escrita da primeira fase da prova:



$$\begin{array}{r} 20 \text{ } 2x \\ - 20 \text{ } 10 \\ \hline 00 \end{array}$$

R: C 10 bolinhas brancas, porque na boca da caixa tem o final e o ~~começo~~ começo estão a metade da sequência então já dá para saber que a metade pretas e metade brancas então se dividir o total de ~~bolinhas~~ bolinhas pela as cores das bolinhas.

O aluno mostrou ter reconhecido um tipo de padrão ao verificar o início e o final das bolinhas da sequência e determinar que metade delas são brancas e a outra metade pretas. Provavelmente o padrão que ele determinou sugere que há bolinhas brancas e pretas alternadamente por toda a sequência.

Outro fato interessante nessa produção é o modo como ele realizou o cálculo $20 : 2$, pois na “chave” em que se localiza o divisor há um sinal de multiplicação, indicando que ele realizou tal operação entre o quociente e o divisor para obter um valor menor ou igual ao dividendo.

Para a segunda fase da prova, foi proposto um item que diz respeito às bolinhas que estão dentro da caixa, ou seja, aquelas que não podem ser visualizadas na imagem.

4.2 É se as bolinhas que estão dentro da caixa fazem de outra cor?

É só mudar a divisão para ~~outro~~ outro número como 20 : 3, 20 : 4, 20 : 5 e a sim vai indo até o total das ~~cores~~ cores que estão dentro da caixa.

A partir dessa resposta, pode-se inferir que, independentemente das cores das bolinhas que pode haver na sequência, ele considerou ter a mesma quantidade de bolinhas de cada cor, por isso sugeriu a realização de divisões por 3, 4 ou 5 que correspondem à quantidade de cores das bolinhas que supostamente pode haver na sequência. O que é uma linha de raciocínio relativamente coerente, porque, considerando bolinhas pretas e brancas na sequência, ele realizou a divisão de 20 por 2 (resposta dada na primeira fase da prova), então, havendo três cores distintas de bolinhas na sequência, ele sugere que seja realizada a divisão de 20 por 3 e assim sucessivamente para outras quantidades de cores.

Persistiu-se em discutir a respeito das bolinhas que não podem ser visualizadas na imagem.

4.3 No desenho é possível ver fora da caixa quantas bolinhas brancas? E quantas bolinhas pretas?

10 dez bolinhas de cada cor preta e branca.

$$\begin{array}{r} 20/2 \\ 20 \\ \underline{00} \end{array}$$

4.4 Se as bolinhas que estão dentro da caixa forem vermelhas, quantas são as bolinhas vermelhas?

São 6 bolinhas vermelhas

$$\begin{array}{r} 20/3 \\ 18 \\ \underline{02} \end{array}$$

BPBPBPBPBP
 PVPVPVPVP
 PVPVPVPVP

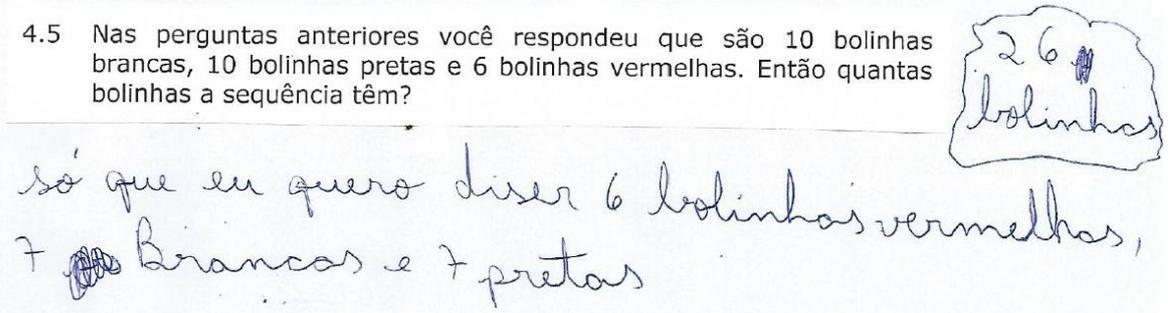
A resposta do item 4.3 sugere que ele não compreendeu esse item da maneira esperada, porque a intenção era que ele realizasse a contagem das bolinhas brancas e pretas que podem ser visualizadas na imagem. Porém ele deu a mesma resposta da primeira fase da prova, inclusive apresentando o mesmo cálculo, ou seja, em sua resposta ele provavelmente considerou todas as bolinhas

da sequência.

O item 4.4 também não foi interpretado da maneira esperada, pois, ao que tudo indica, ele considerou que as 20 bolinhas da sequência estariam divididas entre as cores branca, preta e vermelha. Isso pode explicar o porquê da divisão de 20 por 3. Como essa divisão não é exata, ele construiu um esquema de distribuição de cores, provavelmente indicando as bolinhas brancas pela letra B, as pretas por P e as vermelhas por V, para determinar a quantidade de bolinhas vermelhas.

Para a quarta fase da prova, decidiu-se confrontar as respostas apresentadas nas fases anteriores.

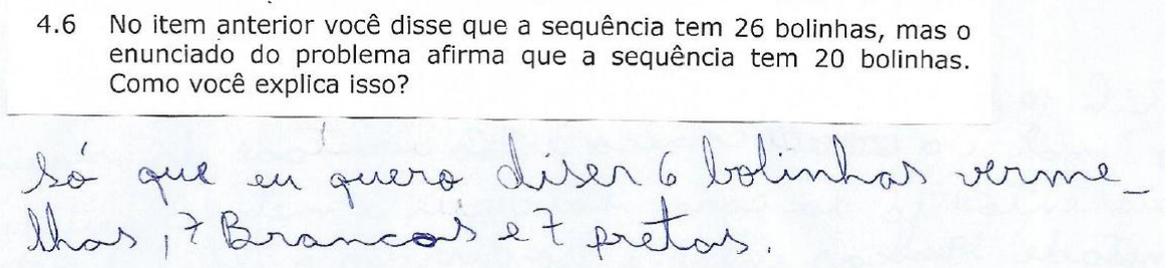
4.5 Nas perguntas anteriores você respondeu que são 10 bolinhas brancas, 10 bolinhas pretas e 6 bolinhas vermelhas. Então quantas bolinhas a sequência têm?



Provavelmente ele adicionou as quantidades indicadas nesse item e obteve 26 bolinhas, resposta destacada com um contorno. No entanto, é possível que ele tenha percebido que a quantidade total de bolinhas da sequência era 20 e por isso, a resposta 26 bolinhas não era coerente. Assim, pode-se inferir que ele retomou seu registro apresentado no item 4.4 e realizou a contagem das bolinhas de cada cor que ele organizou no esquema e por conseguinte obteve como resposta “6 bolinhas vermelhas, 7 brancas e 7 pretas”.

Para confirmar as inferências, propôs-se o seguinte item:

4.6 No item anterior você disse que a sequência tem 26 bolinhas, mas o enunciado do problema afirma que a sequência tem 20 bolinhas. Como você explica isso?



É possível que ele tenha contornado a soma “26 bolinhas” para anular essa informação, porque, para explicar que a sequência possui 20 bolinhas e não 26 bolinhas, ele repetiu a resposta dada no item anterior.

Esse aluno foi coerente em seu raciocínio desde o início, pois,

mesmo com todos os questionamentos durante as fases da prova, ele se manteve firme com seu raciocínio e tentou justificar sua maneira de pensar.

7.2.4 Aluno 14D25

Produção escrita da primeira fase da prova:

$$\begin{array}{r} 2012 \\ - 210 \\ \hline 00 \end{array}$$

R. Eu pensei que era dois tipos de bolinhas, uma branca e uma de outra cor então eu peguei os 20 que é o inteiro e dividi por 2 e deu a resposta que eu queria

A resposta da tarefa não está explícita, mas, de acordo com seu cálculo e com sua explicação, pode-se inferir que a resposta é 10 bolinhas brancas. Para dar essa resposta, ele provavelmente identificou o padrão da sequência como sendo uma bolinha branca seguida de uma bolinha de outra cor. Além disso, considerou que havia a mesma quantidade de bolinhas brancas e da outra cor.

Para promover uma discussão a respeito das bolinhas que não aparecem na imagem, foi proposto o seguinte item para a segunda fase:

4.2 É se as bolinhas que estão dentro da coisca forem de outra cor?

R. Não muda nada porque se mudasse tanto de bolinha daí sim ia mudar a conta.

Não é possível entender muito bem o que ele quis dizer com essa resposta. Dá a impressão que estão faltando palavras para completar a ideia. Mas, ao mesmo tempo, parece que ele está querendo se referir à quantidade total de bolinhas da sequência, informando que o cálculo não se alteraria se as bolinhas que

não aparecem na imagem forem de outra cor, mas, caso a quantidade total de bolinhas (“o tanto”) fosse diferente de 20, seria necessário realizar outro cálculo para determinar a quantidade de bolinhas brancas.

Seguindo a ideia do item 4.2, foram propostos dois itens para a terceira fase.

4.3 No desenho é possível ver fora da caixa quantas bolinhas brancas? E quantas bolinhas pretas?

R: No desenho é possível ver 5 bolinhas brancas e 5 bolinhas pretas

4.4 Se as bolinhas que estão dentro da caixa forem vermelhas, quantas são as bolinhas vermelhas?

$$\begin{array}{r} 20 \\ - 10 \\ \hline 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \overline{) 20} \\ - 10 \overline{) 10} \\ \hline 0 \end{array}$$

R: Se as bolinhas ~~for~~ serem vermelhas terá 5 delas

A resposta do item 4.3 está de acordo com a imagem, o que sugere que ele interpretou o item da maneira como se esperava.

No item 4.4, ele teve uma compreensão um pouco diferente da esperada. De acordo com seus cálculos, pode-se inferir que ele iniciou subtraindo 10 bolinhas do total de bolinhas da sequência, isto é, 5 bolinhas brancas e 5 bolinhas pretas obtidas no item 4.3. Em seguida, ele dividiu as 10 bolinhas que supostamente estariam dentro da caixa por 2, pois ele pode ter imaginado que dentro da caixa o padrão de uma bolinha de cada cor também predominava e, como queria determinar a quantidade de bolinhas vermelhas, obteve 5 como resposta.

Com intenção de questioná-lo a respeito de suas respostas anteriores, foi proposto o seguinte item:

- 4.5 Nas perguntas anteriores você respondeu que são 5 bolinhas brancas, 5 bolinhas pretas e 5 bolinhas vermelhas. Então quantas bolinhas a sequência têm?

$$\begin{array}{r} 20 \overline{) 3} \\ - 18 \\ \hline 02 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ + 2 \\ \hline 8 \end{array}$$

R: A sequência tem 8 bolinhas

Mesmo indicando em sua resposta que há 8 bolinhas na sequência, pode-se inferir, com base em seus cálculos, que ele pode ter reconhecido que a sequência tem 20 bolinhas, pois, ao dividir 20 por 3, é possível que, por algum motivo, ele tinha dividido a quantidade total de bolinhas da sequência pela quantidade de cores das bolinhas indicadas no item.

Para induzi-lo a uma reflexão a respeito de sua resposta ao item 4.5, foram pedidas explicações na quinta fase da prova.

- 4.6 No item anterior você disse que a sequência tem 8 bolinhas, mas o enunciado do problema afirma que a sequência tem 20 bolinhas. Como você explica isso?

R: não sei como explicar

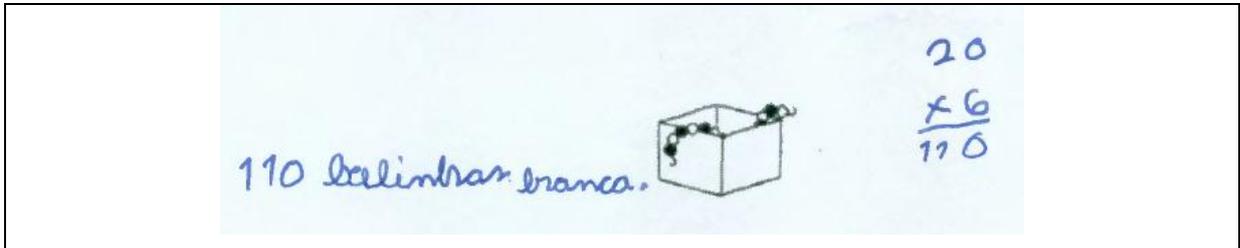
Inferiu-se que esse aluno tinha ciência de que havia 20 bolinhas na sequência, mesmo não conseguindo explicar o porquê de seus cálculos não estarem compatíveis com essa quantidade. Além disso, todos os cálculos apresentados no decorrer das cinco fases estão corretos, isso sugere que ele sabe realizar determinados cálculos e que sua dificuldade não estava nos procedimentos matemáticos, mas sim na interpretação que ele fez dos enunciados.

7.3 ALUNOS DO GRUPO G3

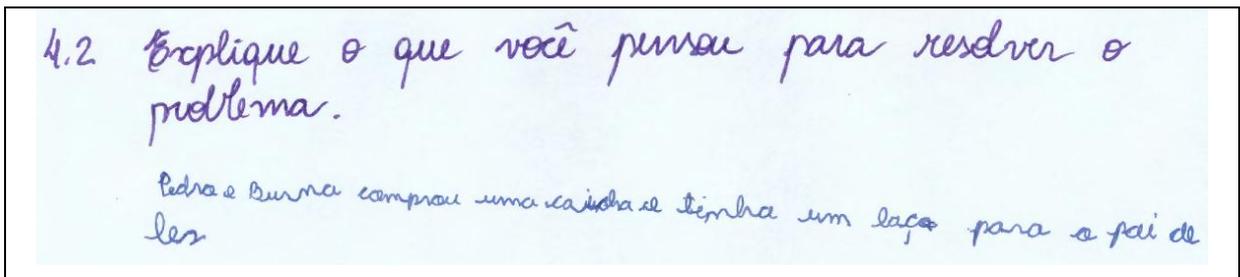
Segue uma análise baseada na interpretação e nas inferências do pesquisador a respeito da produção escrita de todos os estudantes agrupados em G3, no decorrer das 5 fases da prova.

7.3.1 Aluno 14D05

Produção escrita da primeira fase da prova:

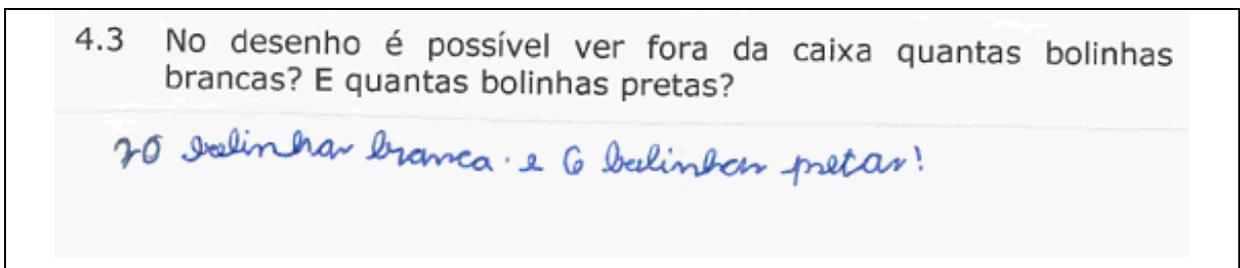


O aluno apresentou um cálculo envolvendo o número 6, que pode ser a quantidade de bolinhas brancas que ele conseguiu contar observando a imagem, e o número 20, que pode ser a quantidade total de bolinhas da sequência. Em sua resposta ele afirmou que havia 110 bolinhas brancas, mas não registrou por escrito como pensou para obter tal quantidade. Para a segunda fase da prova, foi proposto um item solicitando explicação.



Em sua explicação, esse aluno indicou que Pedro e Bruna compraram uma caixa com um laço para o pai deles. Infere-se que isso ocorreu pelo fato de o contexto³⁸ da tarefa anterior tratar do assunto da compra de um presente para o pai de Pedro e Bruna.

Para a terceira fase da prova, foram propostos os seguintes itens:



³⁸ O enunciado da tarefa, que tem como contexto a compra de um presente para o pai de Pedro e Bruna, se encontra na seção “piloto” que norteou a pesquisa.

4.4 Se as bolinhas que estão dentro da caixa forem vermelhas, quantas são as bolinhas vermelhas?

tinha 10 bolinha vermelhas.

De acordo com a resposta dada no item 4.3, infere-se que esse aluno indicou a quantidade total de bolinhas da sequência como se fosse a quantidade de bolinhas brancas e realizou a contagem das bolinhas pretas que aparecem na imagem para determinar tal quantidade, conforme se esperava.

A resposta do item 4.4 sugere que ele realizou a contagem das bolinhas que é possível visualizar na imagem (10 bolinhas) e subtraiu da quantidade total de bolinhas da sequência (20 bolinhas) para obter sua resposta. No entanto, de acordo com a resposta apresentada no item 4.3, é pouco provável que isso tenha acontecido.

Foi proposto um item para a quarta fase com o objetivo de induzi-lo a uma reflexão a respeito de suas respostas anteriores:

4.5 Você disse que são 10 bolinhas vermelhas dentro da caixa, então quantas bolinhas pretas e quantas bolinhas brancas tem a sequência?

6 bolinha preta 6 bolinha . e 5 bolinha branca 5 bolinha .

Parece que o aluno realizou a contagem das bolinhas pretas e das bolinhas brancas que é possível ver na imagem. Porém, com as quantidades de bolinhas pretas, brancas e vermelhas indicadas a informação inicial de que havia 20 bolinhas na sequência não é satisfeita, por isso propôs-se o seguinte item para a quinta fase da prova:

4.6 Nas respostas dos itens anteriores, você disse que há 10 bolinhas vermelhas dentro da caixa, 6 bolinhas pretas e 5 bolinhas brancas. Quantas bolinhas há no total?

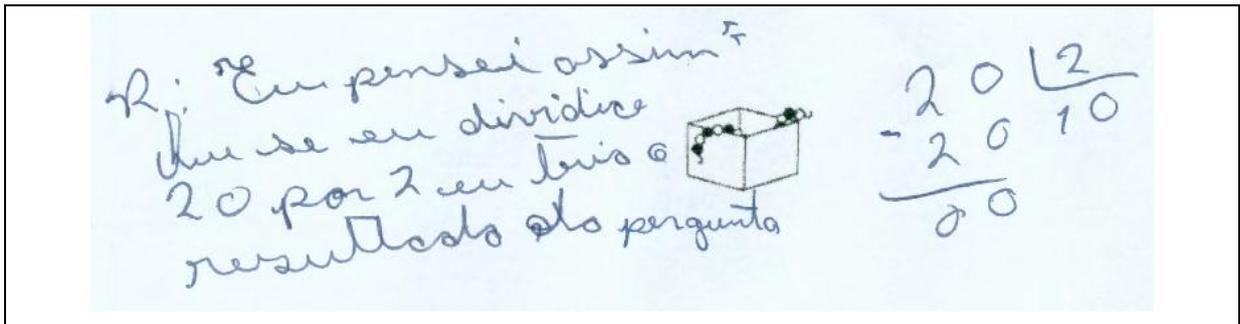
$$\begin{array}{r} 10 \\ 6 \\ + 3 \\ \hline 21 \end{array}$$
 21 bolinha .

Provavelmente ele não se atentou para a informação inicial de que a sequência contém 20 bolinhas no total. No entanto, há indícios de que ele compreendeu a suposição de que a sequência possui bolinhas vermelhas, brancas e

pretas, ou seja, ele conseguiu interpretar algumas informações supostas no decorrer das fases da prova. Além do mais, para determinar a quantidade total de bolinhas da sequência, ele realizou a adição corretamente, utilizando as informações apresentadas no item.

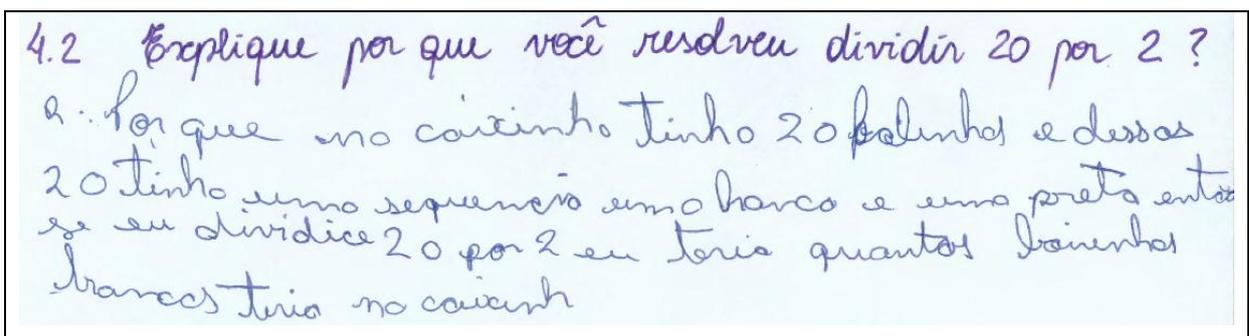
7.3.2 Aluno 14D12

Produção escrita da primeira fase da prova:



Pode-se inferir que a resposta dada pelo aluno era que havia 10 bolinhas brancas na sequência, porque, de acordo com sua explicação, era necessário dividir a quantidade de bolinhas da sequência por dois para obter a resposta da tarefa. Isso indica que ele realizou uma generalização imaginando haver uma bolinha branca seguida de uma preta por toda a extensão da sequência, inclusive na parte que não era possível visualizar na imagem.

De todo modo, ele não explicou como pensou para resolver, por isso foi proposto o seguinte item para a segunda fase da prova:



Esse registro responde a pergunta proposta e confirma a inferência de que o aluno havia generalizado a sequência de bolinhas de acordo com o que ele pode ver na imagem.

Para promover uma discussão a respeito das bolinhas que não são possíveis de ver na imagem, foram propostos os seguintes itens:

4.3 No desenho é possível ver fora da caixa quantas bolinhas brancas? E quantas bolinhas pretas?

Da para ver algumas, tem por fora da caixa 5 bolinhas brancas e 5 pretas

4.4 Se as bolinhas que estão dentro da caixa forem vermelhas, quantas são as bolinhas vermelhas?

6 bolinhas vermelhas

A resposta do item 4.3 está de acordo com o que se esperava. Já a resposta do item 4.4 fugiu um pouco das expectativas, pois, seguindo a resposta dada no item 4.3, esperava-se no item 4.4 a resposta 10 bolinhas vermelhas, porque subtraindo 10 bolinhas (5 brancas e 5 pretas) da sequência de 20 o resultado seria 10 vermelhas.

Para entender a maneira pela qual o aluno obteve a resposta “6 bolinhas vermelhas”, o seguinte item foi proposto:

4.5 Explique como você pensou para responder a pergunta 4.4.

Eu pensei que se eu dividisse eu teria o resultado

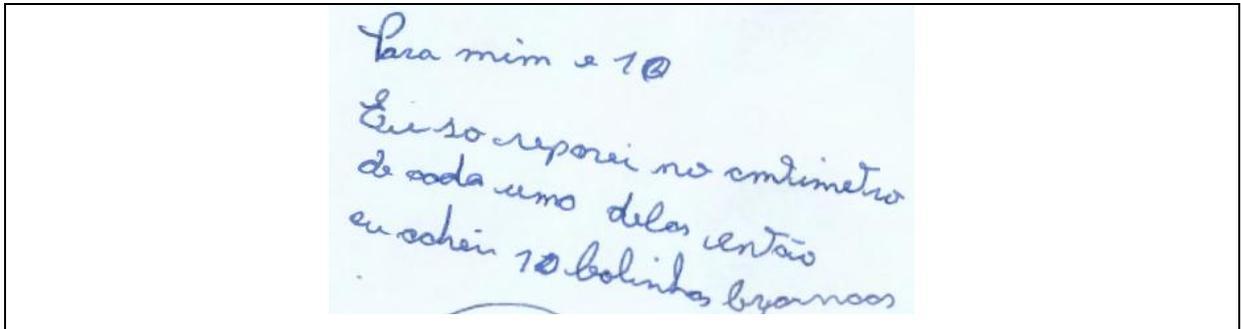
De acordo com o registro apresentado, pode-se inferir que esse aluno supôs haver a mesma quantidade de bolinhas brancas, pretas e vermelhas na sequência. Desse modo, provavelmente realizou a divisão de 20 por 3 e obteve 6 como quociente, por isso afirmou haver 6 bolinhas vermelhas dentro da caixa. Esse é um raciocínio coerente, pois, quando havia bolinhas de duas cores na sequência, ele dividiu por 2, por conseguinte, havendo bolinhas de três cores diferentes na sequência, ele dividiu por 3 e obteve a quantidade de cada uma delas.

Para induzi-lo a uma reflexão a respeito de suas respostas anteriores, foi proposto o item 4.6, que, por algum motivo que não se consegue identificar, não foi respondido.

4.6 Nas respostas dos itens anteriores, você disse que há 6 bolinhas vermelhas dentro da caixa, 5 bolinhas pretas e 5 bolinhas brancas. Quantas bolinhas há no total?

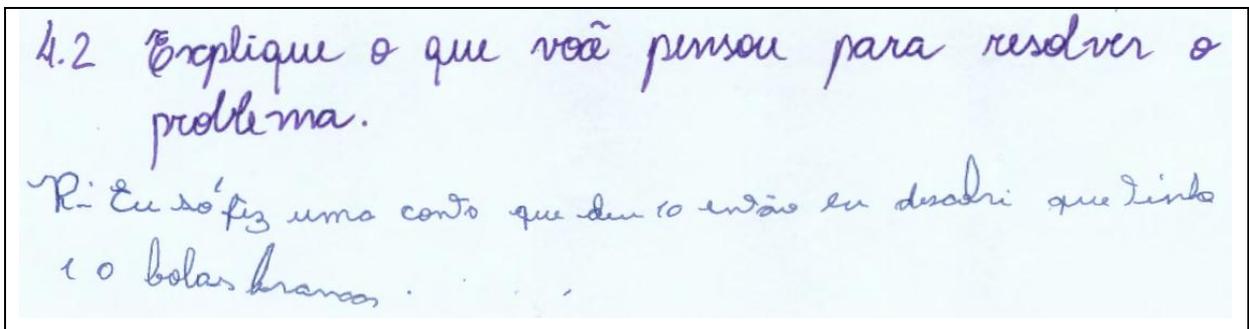
7.3.3 Aluno 14D15

Produção escrita da primeira fase da prova:



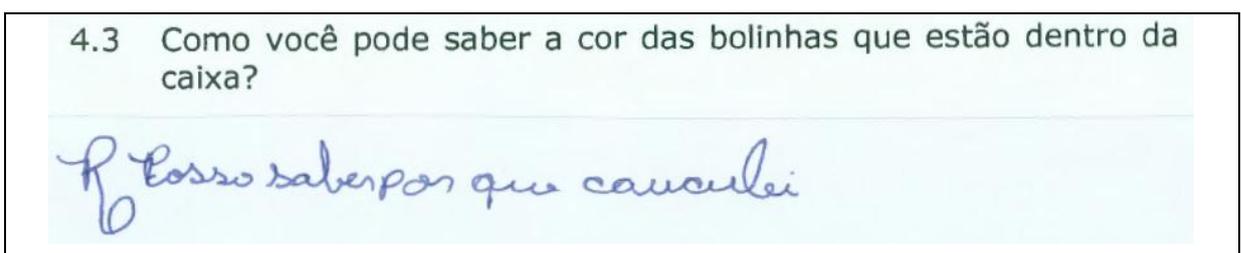
O aluno respondeu a pergunta afirmando haver 10 bolinhas brancas na sequência, o que indica que ele também realizou uma generalização imaginando uma bolinha branca seguida de uma preta por toda a extensão da sequência, inclusive na parte que não era possível ver na imagem. Depois dividiu as 20 bolinhas da sequência por 2, correspondente às duas cores, e obteve o resultado.

Não foi possível entender como o aluno pensou para resolver essa tarefa, porque sua explicação estava um pouco confusa. Para a segunda fase da prova, foi proposto um item semelhante a uma parte da tarefa.



Essa explicação também ficou um pouco vaga, pois o aluno não explicitou o cálculo que havia realizado para obter tal resposta, além de não informar por que realizou esse cálculo.

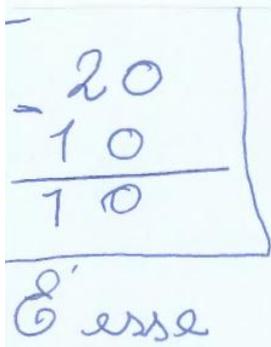
Para a terceira fase da prova, propôs-se um item para “provocar” o aluno a se expressar mais claramente.



Essa “provocação” parece não ter funcionando muito bem, porque, assim como no item anterior, não é possível inferir muita coisa a respeito dessa produção.

Para a quarta fase da prova, foi proposto o seguinte item:

4.4 Então a cor das bolinhas que estão dentro da caixa é dada por um cálculo? Qual cálculo?



Handwritten response:
$$\begin{array}{r} 20 \\ - 10 \\ \hline 10 \end{array}$$
 Esse

A partir dessa resposta pode-se inferir que ele realizou a contagem das bolinhas que aparecem na imagem e subtraiu essa quantidade do total de bolinhas da sequência, obtendo 10 bolinhas dentro da caixa. Assim, ele determinou a quantidade de bolinhas que havia dentro da caixa e não a cor das bolinhas.

Para a quinta fase da prova foram propostos dois itens.

4.5 No desenho é possível ver fora da caixa quantas bolinhas brancas? E quantas bolinhas pretas?

Handwritten response: Também deu 10.

4.6 Se as bolinhas que estão dentro da caixa forem vermelhas, quantas são as bolinhas vermelhas?

Handwritten response: seriam 20

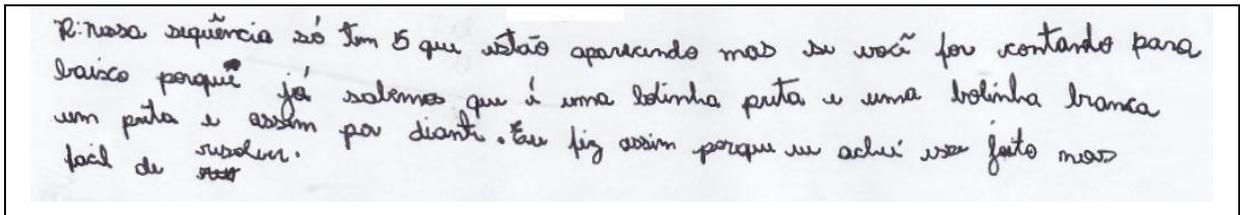
No item 4.5, inferiu-se que esse aluno realizou a contagem das bolinhas brancas e pretas que aparecem na imagem e adicionou as quantidades obtendo 10 bolinhas. Talvez esse seja o motivo de ter registrado as palavras “tambem deu”, o que indica a realização de algum tipo de operação para obter a resposta.

O item 4.6 não foi compreendido da maneira que se imaginava, pois de acordo com a resposta no item 4.5, esperava-se que ele registrasse a quantidade

de 10 bolinhas vermelhas, pois, se existiam 10 bolinhas fora da caixa, deveriam existir 10 bolinhas dentro da caixa. Mas ele pode ter compreendido que todas as bolinhas da sequência seriam vermelhas e nesse caso haveria 20 bolinhas vermelhas.

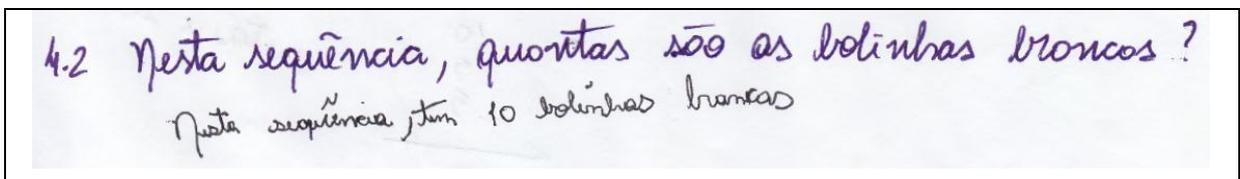
7.3.4 Aluno 14D23

Produção escrita da primeira fase da prova:



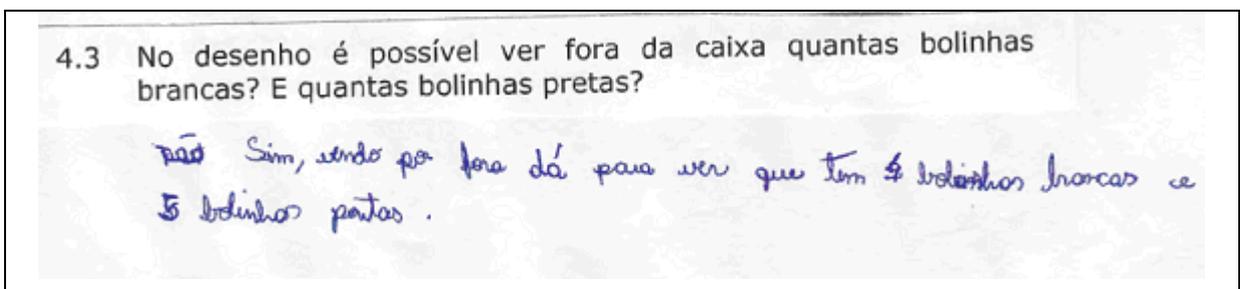
Esse aluno informou a quantidade de bolinhas que é possível visualizar na imagem e determinou um padrão para a sequência, porém não registrou a quantidade de bolinhas brancas caso fosse considerado o padrão que ele determinou.

Para a segunda fase da prova, repetiu-se a pergunta:



Agora ele parece ter indicado a quantidade de bolinhas brancas de acordo com seu padrão e com o total de bolinhas da sequência, além do mais, essa é uma das respostas esperadas.

Na terceira fase, decidiu-se provocar uma discussão a respeito das bolinhas que não é possível visualizar na imagem, por isso os seguintes itens foram propostos:



4.4 Se as bolinhas que estão dentro da caixa forem vermelhas, quantas são as bolinhas vermelhas?

São 6 bolinhas.

O item 4.3 foi respondido da maneira esperada, pois o aluno registrou a quantidade de bolinhas brancas e pretas que ele visualizou na imagem. Mas, de acordo com a resposta do item 4.4, a quantidade total de bolinhas da sequência não poderia ser a indicada no enunciado, 20 bolinhas. Por isso, na quarta fase da prova, foi proposto um item com o intuito de induzi-lo a realizar tal reflexão.

4.5 Nas perguntas anteriores você respondeu que são 4 bolinhas brancas, 5 bolinhas pretas e 6 bolinhas vermelhas. Então quantas bolinhas a sequência têm?

Na sequência tem 20 bolinhas

A resposta para a pergunta proposta está correta, porque no enunciado da tarefa é informado que a sequência possui 20 bolinhas. É provável, porém, que esse aluno não tenha levado em consideração suas respostas anteriores, porque, ao adicionar as quantidades de bolinhas brancas, pretas e vermelhas que ele havia indicado anteriormente, o resultado seria 15 bolinhas e não em 20 bolinhas como o registrado.

Para a quinta fase da prova, insistiu-se na mesma ideia e foi proposto um item semelhante ao da fase anterior, alterando apenas a escrita.

- 4.6 Nos itens anteriores você respondeu que fora da caixa tinha 4 bolinhas brancas e 5 bolinhas pretas e que dentro da caixa tinha 6 bolinhas vermelhas, mas calculando o total dá 20 bolinhas?

The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. It contains three addition problems and a concluding statement:

$$\begin{array}{r} 4 \\ + 5 \\ \hline 9 \end{array}$$

então pode ser a conta.

$$\begin{array}{r} 6 \\ + 6 \\ \hline 12 \end{array}$$

a resposta certa é 20.

$$\begin{array}{r} 10 \\ + 5 \\ + 5 \\ \hline 20 \end{array}$$

Pode-se inferir que o aluno adicionou a quantidade de bolinhas brancas, pretas e vermelhas para verificar se resultaria em 20 bolinhas e, mesmo efetuando essa adição de maneira incorreta ($4+5+6=14$ quando o correto seria $4+5+6=15$), ele percebeu que a soma não era igual a 20.

Ao escrever “então pode ser a conta”, esse aluno deu indícios de que começaria a supor quantidades para as bolinhas brancas, pretas e vermelhas até obter como soma 20. Mas desse modo é possível que ele não tenha levado em consideração a quantidade de bolinhas brancas e pretas que ele pode visualizar fora da caixa.

Ao escrever “a resposta certa é 20”, pode ser que ele tenha chegado à conclusão de que havia 5 bolinhas brancas, 5 bolinhas pretas e 10 bolinhas vermelhas, ou seja, à conclusão que se esperava que ele chegasse. Entretanto, como não há registro algum indicando a quantidade de cada cor de bolinha, não é possível afirmar que o aluno obteve qualquer tipo de conclusão. Mesmo assim, acredita-se que o aluno percebeu que não era possível ter nessa sequência apenas 4 bolinhas brancas, 5 bolinhas pretas e 6 bolinhas vermelhas.

7.3.5 Aluno 14D24

Produção escrita da primeira fase da prova:

E facio, são 10 bolinha brancas e as outras também são 10

De acordo com essa resposta infere-se que esse aluno também realizou uma generalização imaginando que a sequência era composta por bolinhas brancas e pretas alternadamente. Provavelmente ele dividiu as 20 bolinhas da sequência em duas partes iguais e obteve como resposta 10 bolinhas brancas e 10 bolinhas da outra cor.

Porém, ele não registrou a maneira que pensou para obter tal resposta. Assim, para a segunda fase da prova, tentou-se induzi-lo a explicar como pensou.

4.2 Explique o que você pensou para resolver o problema. 10 bolinha branco e as outras também são 10

$$\begin{array}{r} 20 \\ - 10 \\ \hline 10 \end{array}$$

É possível verificar que o aluno repetiu a resposta dada na primeira fase e que tentou justificar com um exemplo numérico envolvendo uma operação de subtração. Observando essa operação, infere-se que ele apresentou uma espécie de “prova real”, pois, subtraindo 10 bolinhas de um total de 20, sobram 10 bolinhas, isto é, na sequência de 20 bolinhas havia 10 brancas e 10 de outra cor.

Para a terceira fase da prova, foram propostos os seguintes itens:

4.3 No desenho é possível ver fora da caixa quantas bolinhas brancas? E quantas bolinhas pretas?

Também são 10

4.4 Se as bolinhas que estão dentro da caixa forem vermelhas, quantas são as bolinhas vermelhas?

Seriam 10 bolinhas vermelhas

De acordo com a resposta do item 4.3, pode-se afirmar que esse aluno compreendeu o item de uma maneira diferente da esperada, porque o intuito era que fossem registradas as quantidades de bolinhas brancas e pretas separadamente. Infere-se que ele tenha realizado a contagem de todas as bolinhas que aparecem na imagem, pois nela é possível ver apenas bolinhas dessas duas cores. Assim, obteve 10 como resposta.

O item 4.4 foi respondido da maneira que se esperava, pois, se era possível ver 10 bolinhas fora caixa, dentro só poderia haver 10 bolinhas, porque a sequência continha 20 bolinhas no total.

Independentemente da compreensão do item 4.3, esse aluno respondeu ambas as perguntas de modo coerente com seu raciocínio.

Para a quarta fase da prova, propôs-se uma situação considerando que no item 4.3 ele tenha respondido 10 bolinhas brancas e 10 bolinhas pretas.

4.5 Nas perguntas anteriores você respondeu que são 10 bolinhas brancas, 10 bolinhas pretas e 10 bolinhas vermelhas. Então quantas bolinhas a sequência têm?

Tenho 20 bolinhas, 10 bolinha branco e 10 bolinha preto com mais 10 bolinha vermelho então isso dá 30 Bolinhas

Essa resposta está coerente com o item, pois adicionando as 10 bolinhas brancas com as 10 pretas e as 10 vermelhas, obtêm-se 30 bolinhas. Porém, no enunciado da tarefa foi informado que era uma sequência com 20 bolinhas. Na quinta fase da prova, pediu-se uma explicação de por que estava ocorrendo essa diferença nas quantidades de bolinhas.

4.6 No item anterior você disse que a sequência tem 30 bolinhas, mas o enunciado do problema afirma que a sequência tem 20 bolinhas. Como você explica isso?

Se tinha 10 bolinhas PRETA e 10 bolinhas, se a sequência disse se tivesse mais 10 bolinhas vermelhas.

Parece que ele estava ciente de que havia 20 bolinhas na sequência, porque afirmou haver 10 bolinhas brancas e 10 pretas, o que totaliza 20 bolinhas, e no decorrer da prova foi realizada a suposição: “se tivesse mais 10 bolinhas vermelhas”. Por isso, infere-se que ele indicou haver 30 bolinhas na sequência, 20 iniciais mais 10 vermelhas, que foram supostas no decorrer da prova.

7.3.6 Aluno 14D27

Produção escrita da primeira fase da prova:

R: Eu peguei o total e dividi com a sequência e número de bolinha 10 brancas

Está explícito que o aluno respondeu que havia 10 bolinhas brancas na sequência. Sua explicação, porém, está um pouco confusa, porque ele afirma ter “pegado” o total de 20 bolinhas e dividido com a sequência. Provavelmente ele dividiu as 20 bolinhas por dois pelo fato de visualizar bolinhas de duas cores: pretas e brancas. Assim, infere-se que ele também realizou uma generalização imaginando que a sequência era composta apenas por bolinhas brancas e pretas organizadas de modo alternado.

Para a segunda fase da prova, tentou-se induzi-lo a explicar como pensou para obter a resposta.

4.2 Explique o que você pensou para resolver o problema.

R: Eu peguei o total e diminuí por a bolinha pretas e deu 10 bolinha brancas.

Mesmo ele informando que não dividiu a quantidade total de bolinhas por dois, conforme se inferiu, acredita-se que ele realizou tal operação. Isso

porque, antes de subtrair 10 bolinhas pretas da quantidade total, ele realizou alguma operação matemática para obter essas 10 bolinhas pretas e conseqüentemente as 10 bolinhas brancas.

Nessa segunda fase, no entanto, fica a dúvida se ele alterou sua resposta, indicando haver 20 bolinhas brancas na seqüência. Assim, foi proposto o seguinte item para a terceira fase da prova.

4.3 Quantas bolinhas o problema informa que a seqüência tem?

R: O problema informa que tem 20 bolinha

De acordo com essa resposta, provavelmente ele registrou a quantidade 10 bolinhas brancas no item 4.2, mas o registro do número 10 ficou bem parecido com o número 20. Desse modo, a dúvida foi sanada.

Para a quarta fase da prova, dois itens foram propostos.

4.4 No desenho é possível ver fora da caixa quantas bolinhas brancas? E quantas bolinhas pretas?

R: tinha 5 bolinhas brancas e 5 bolinha preta

4.5 Se as bolinhas que estão dentro da caixa forem vermelhas, quantas são as bolinhas vermelhas?

R: Nem sei. Por que na enunciado se tinha bolinhas brancas e pretas

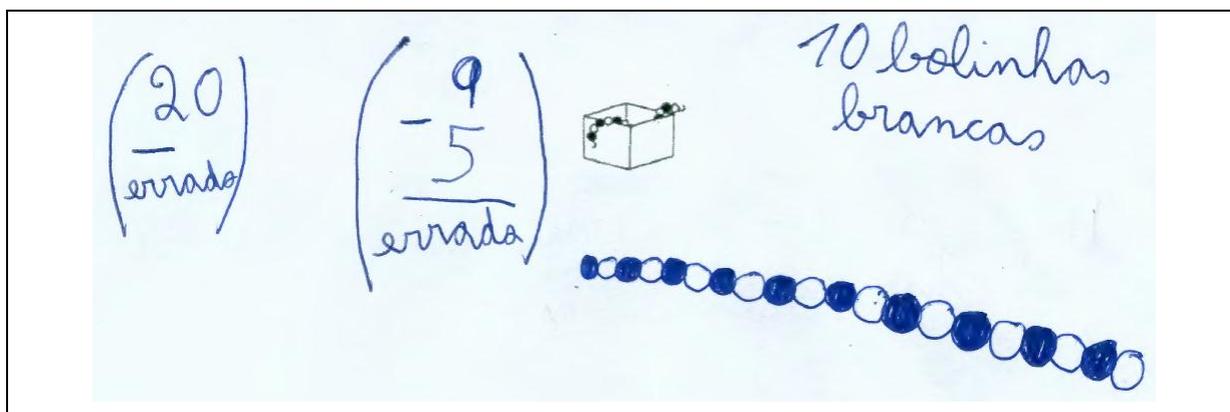
A resposta do item 4.4 está de acordo com o que se esperava, porque provavelmente ele realizou a contagem das bolinhas que é possível ver na imagem para apresentar tal resposta. Já no item 4.5, ele teve uma compreensão um pouco diferente da que se esperava, pois esse item apresenta uma suposição. Talvez pelo fato de não ter visto nada a respeito de bolinhas vermelhas nessa tarefa, tenha respondido dessa maneira.

Para a quinta fase da prova, não se propôs item algum. Foi pedido apenas que ele lesse o enunciado da tarefa e indicasse o local em que se informava haver somente bolinhas pretas e brancas, conforme ele afirmou no item 4.5. O aluno

leu o enunciado e ficou com um olhar meio “sem graça” ao perceber que no enunciado da tarefa não havia essa informação.

7.3.7 Aluno 14D28

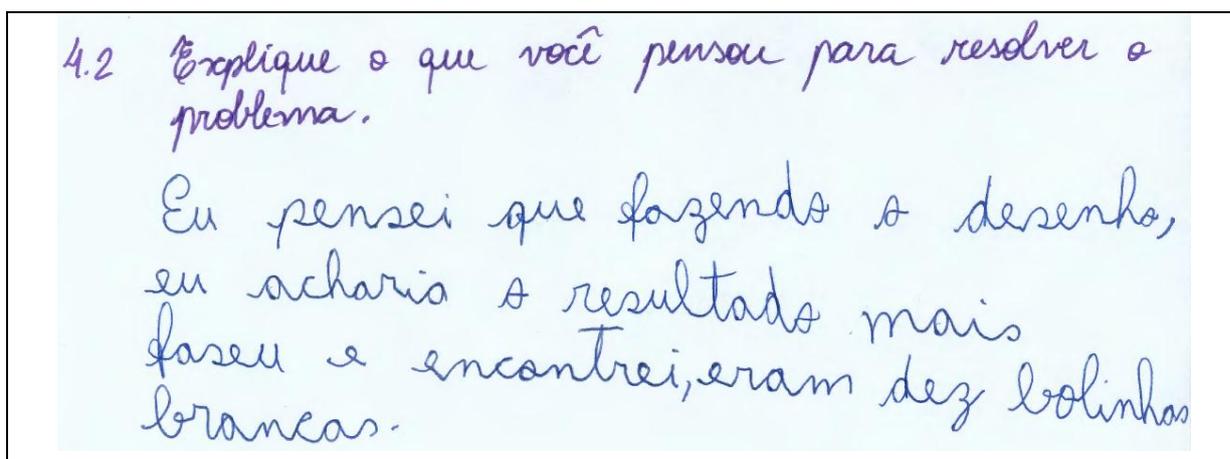
Produção escrita da primeira fase da prova:



O aluno respondeu a pergunta da tarefa, mas não registrou por escrito como pensou para obter tal resposta. Provavelmente ele desenhou toda a sequência, imaginando ser uma bolinha branca e outra preta alternadamente, e realizou a contagem das bolinhas brancas.

Um fato interessante nessa produção é que o aluno parece ter escolhido algumas estratégias que não resolveram a tarefa inicialmente, pois apresentou partes de cálculos acompanhadas da palavra “errada”, indicando que não deram certo para esse caso especificamente.

Para a segunda fase da prova, propôs-se o seguinte item:



Agora ficou evidente que esse aluno utilizou a estratégia de representar a sequência por meio de desenho para responder a pergunta.

Para fomentar uma discussão a respeito das bolinhas que não aparecem na imagem, foram propostos os seguintes itens para a terceira fase da prova:

4.3 No desenho é possível ver fora da caixa quantas bolinhas brancas? E quantas bolinhas pretas?

5 bolinhas brancas e 5 bolinhas pretas

4.4 Se as bolinhas que estão dentro da caixa forem vermelhas, quantas são as bolinhas vermelhas?

20 bolinhas vermelhas

A resposta do item 4.3 está de acordo com o que se esperava, porque possivelmente ele realizou a contagem das bolinhas brancas e pretas que aparecem na imagem para apresentar tal resposta.

O item 4.4 foi compreendido de maneira diferente da esperada, pois o interesse era em discutir apenas a cor das bolinhas que não aparecem na imagem. Infere-se que o aluno considerou que todas as bolinhas da sequência estavam no interior da caixa, ao afirmar que eram 20 bolinhas vermelhas. Isso pode ter ocorrido porque o enunciado da tarefa informava que a caixinha possuía uma sequência de 20 bolinhas.

Para confrontar suas respostas anteriores, foi proposto o seguinte item na quarta fase da prova:

4.5 Nas perguntas anteriores você respondeu que são 5 bolinhas brancas, 5 bolinhas pretas e 20 bolinhas vermelhas. Então quantas bolinhas a sequência têm?

20 bolinhas

Mesmo indicando as quantidades de bolinhas de cada cor que havia mencionado nos itens anteriores, manteve-se de acordo com a informação do enunciado da tarefa indicando que a sequência tinha 20 bolinhas.

Insistiu-se na ideia de confrontar as respostas anteriores e foi proposto o seguinte item:

4.6 Nos itens anteriores você respondeu que fora da caixa tinha 5 bolinhas brancas e 5 bolinhas pretas e que dentro da caixa tinha 20 bolinhas vermelhas, mas calculando o total dá 20 bolinhas?

Não vai dar 20 bolinhas na verdade vai dar 50 bolinhas.

De acordo com essa resposta, pode-se inferir que esse aluno adicionou todos os valores apresentados no enunciado do item. Esperava-se que ele realizasse a adição das bolinhas que estavam dentro da caixa (20 bolinhas vermelhas) com as que estavam fora da caixa (5 bolinhas brancas e 5 bolinhas pretas) e percebesse que a soma (30 bolinhas) não correspondia à quantidade de bolinhas indicadas no enunciado da tarefa e refletisse a respeito de por que isso tinha ocorrido. Mas esse objetivo não foi atingido com esse item.

7.3.8 Aluno 14D30

Produção escrita da primeira fase da prova:

R: Teria 21 porque no desenho mostra que ter
meio em branco.



O aluno respondeu a pergunta da tarefa, mas sua explicação parece estar incompleta, porque só o fato de a sequência terminar com uma bolinha branca, não justifica a resposta: 21 bolinhas brancas.

Para a segunda fase da prova, foi proposto um item dando oportunidade a esse aluno de explicar como pensou para resolver.

4.2 Explique o que você pensou para resolver o problema.

R: Eu pensei que tinha 20 bolinhas pretas e assim teriam 20 ~~bolinhas~~ mas eu fim errado meus calculos porque teriam 20 bolinhas brancas.

De acordo com essa resposta, o aluno estava considerando uma sequência de 40 bolinhas, 20 pretas e 20 brancas. Mesmo ele não levando em consideração a informação do enunciado de que havia 20 bolinhas na sequência, infere-se que ele realizou uma generalização imaginando que a sequência era composta por bolinhas brancas e pretas alternadamente.

Para induzir o aluno a perceber que a sequência possuía 20 bolinhas no total, propôs-se o seguinte item para a terceira prova:

4.3 Quantas bolinhas o problema informa que a sequência tem?

R: Que tem vinte bolinhas.

Com essa resposta, imagina-se ter atingido o objetivo com esse item. A partir dessa fase, esperava-se que o aluno considerasse a sequência com 20 bolinhas para responder os itens subsequentes.

Para a quarta fase da prova, foram propostos dois itens.

4.4 No desenho é possível ver fora da caixa quantas bolinhas brancas? E quantas bolinhas pretas?

RA cinco bolinhas brancas e 5 pretas

4.5 Se as bolinhas que estão dentro da caixa forem vermelhas, quantas são as bolinhas vermelhas?

R Terá 10 bolinhas vermelhas

Tanto a resposta do item 4.4 quanto a resposta do item 4.5 está de acordo com o que se esperava. Para obter a resposta do item 4.4, ele

provavelmente realizou a contagem das bolinhas brancas e pretas que aparecem na imagem. Para o item 4.5, inferiu-se que ele adicionou a quantidade de bolinhas brancas e pretas que é possível visualizar na imagem ($5+5=10$) e subtraiu da quantidade total de bolinhas da sequência, que, de acordo com o item anterior, era de 20 bolinhas ($20-10=10$).

Para a quinta fase da prova, propôs-se um item semelhante ao item 4.5.

4.6 Se as bolinhas que estão dentro da caixa for metade azul e metade amarela, quantas serão as bolinhas azuis?

R: Serão 5 bolinhas

Para obter essa resposta, inferiu-se que o aluno dividiu a quantidade de bolinhas, que ele afirmou haver dentro da caixa no item 4.5 (10 bolinhas) por dois, porque o item supõe haver metade das bolinhas azuis e metade amarela.

De modo geral, esse aluno partiu de uma resposta que não era considerada esperada para respostas esperadas, ou seja, caso essa prova fosse realizada em uma única fase esse aluno provavelmente teria errado a tarefa, mas, no decorrer das fases, verificou-se seu progresso com as respostas dos itens propostos e pode-se inferir que ele compreendeu a situação.

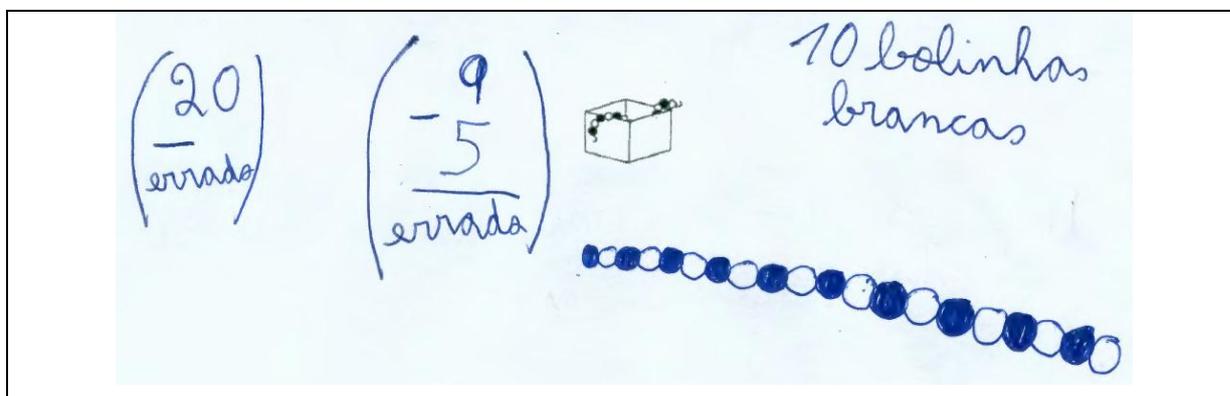
8 DISCUSSÃO

De acordo com a abordagem de ensino da RME, a tarefa analisada pode ser considerada uma boa tarefa de avaliação³⁹, porque julga-se que ela possui um caráter informativo e significativo, conforme descrito por Van den Heuvel-Panhuizen (1996):

- informativo, no sentido de possibilitar ao aluno mostrar aquilo que sabe, ou seja, fornecer informações ao professor a respeito do conhecimento do aluno, de suas competências, maneiras de raciocinar, estratégias, procedimentos, entre outros;
- significativo, que possa envolver os alunos, ser atrativo, desafiador, que dê a oportunidade de tentarem resolver a tarefa, que admita mais de uma maneira de resolver e mais de uma resposta padrão.

Pela classificação realizada no quadro 5, essa tarefa pode ser considerada realística e, por seu contexto ter sido produzido em uma situação possível de ser imaginada pelos alunos, infere-se que houve certo estímulo para eles quererem resolvê-la. Essa tarefa também cumpriu uma de suas funções principais que era confrontar o estudante com uma situação realística na qual se esperava que ele encontrasse ferramentas matemáticas para organizá-la e resolvê-la. Ela também não apresentou uma estratégia de resolução em seu enunciado e atribuem-se a esse fato as várias estratégias distintas apresentadas pelos alunos em suas produções.

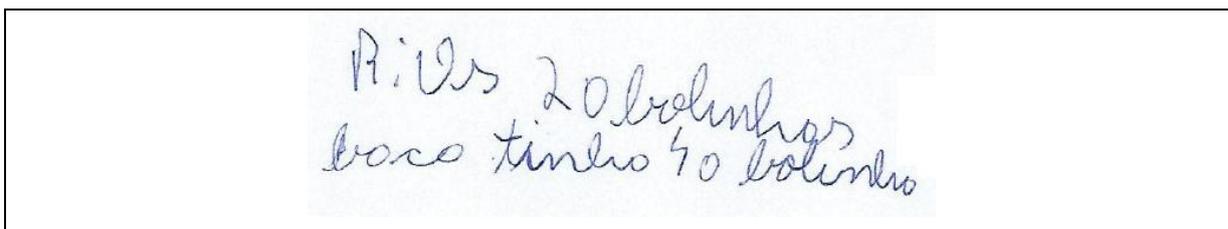
Por meio dessa tarefa, alguns alunos mostraram indícios de algum tipo de matematização na primeira fase da prova, como o aluno 14D28, por exemplo.



³⁹ Vale a pena lembrar que não deve haver diferença entre os trabalhos realizados em sala de aula e a avaliação, pois entende-se a avaliação como um processo que deve ocorrer a todo momento.

Nessa produção é possível perceber que o aluno organizou a situação por meio da representação da imagem da sequência, determinando o padrão de uma bolinha branca e outra preta para a sequência. Também pode-se notar que ele “testou” outras estratégias aritméticas para tentar resolver a tarefa.

Entretanto, também houve alunos que não mostraram indícios de matematização na primeira fase da prova, como o aluno 14D11, por exemplo.



De acordo com essa produção, não se pode afirmar que houve qualquer tipo de organização da situação proposta na tarefa, por isso não se pode considerar que houve indícios de matematização.

Com a utilização da prova em fases, os alunos foram tratados como participantes ativos do processo educacional, assim como propõe a RME. Consideram-se ter atingidos os seguintes princípios da RME:

- princípio da atividade, em que os alunos aprendem matemática fazendo-a, pois eles participaram ativamente das fases da prova e conseqüentemente de suas possíveis aprendizagens;
- princípio da realidade, em que os alunos aplicam conhecimentos matemáticos no início do processo em tarefas com contextos que podem ser matematizados, pois acredita-se que eles tiveram a oportunidade de mostrar seus conhecimentos em tarefas realísticas sem qualquer indicação da maneira como resolvê-las;
- princípio da orientação, em que o professor guia o aluno para “reinventar” a matemática, pois, de certo modo, os itens propostos no decorrer das fases foram um tipo de orientação.

Acredita-se não ter atingido o princípio:

- do nível, em que um “modelo de” uma situação particular deve ser alterado para um “modelo para” todas as outras situações equivalentes, porque o objetivo era que o aluno desse uma resposta esperada para cada tarefa;
- do entrelaçamento, em que os domínios da matemática devem estar fortemente integrados, porque o intuito era analisar a

maneira que os alunos lidavam com tarefas não rotineiras em situação de prova;

- da interatividade, em que os alunos devem compartilhar suas estratégias que podem levá-los a um nível maior de compreensão de uma tarefa, porque, na prova em fases que se desenvolveu, os alunos resolviam suas tarefas individualmente sem consultar os colegas naquele momento.

Com relação à análise da produção escrita em Matemática, identificaram-se alguns dos elementos citados anteriormente em trabalhos desenvolvidos por participantes do GEPEMA, como a possibilidade de:

- compreender como os alunos lidam com tarefas matemáticas;
- evidenciar o conhecimento matemático que os alunos mostram saber em suas produções;
- obter indícios das tarefas que eles constroem por meio de sua interpretação do enunciado original;

Além disso, ao aplicar a prova em fases, a qual considera-se proporcionar um tipo de reinvenção guiada, na realidade utilizou-se a análise da produção escrita como uma estratégia de ensino, assim como propõe Santos (2014).

Ao utilizar o instrumento de avaliação prova em fases, também estamos considerando a avaliação da aprendizagem escolar como prática de investigação, porque nesse tipo de avaliação a ênfase está na trajetória percorrida pelo aluno ao resolver uma tarefa e no questionamento das mais diferentes respostas dadas, com o objetivo de obter informações a respeito do que eles sabem de Matemática. Assim, buscou-se reconhecer e valorizar os caminhos percorridos nas construções das soluções das tarefas, abrindo espaço e respeitando as diferenças dos saberes de cada um dos alunos. Desse modo, a prova em fases pode ser considerada como mais uma oportunidade de aprendizagem.

9 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

As produções dos alunos que participaram da prova em fases não se diferenciaram muito das produções apresentadas pelos alunos do 5º ano que realizaram a “prova piloto” no ano de 2013. Uma das estratégias mais utilizadas para determinar a quantidade de bolinhas brancas da sequência foi dividir a quantidade total de bolinhas da sequência por dois.

No questionário de oportunidade de aprendizagem (Apêndice A) respondido pela professora de Matemática do 5º ano investigado, ela afirma ter ensinado o conteúdo necessário para os alunos responderem corretamente a tarefa e que o enunciado era suficientemente claro para os alunos compreenderem o que estava sendo pedido. Também acreditava que entre 90 e 100% dos alunos, ou seja, praticamente todos, responderiam a tarefa analisada da maneira esperada na primeira fase. No entanto, por meio do agrupamento que se realizou no quadro 7, foi possível verificar que, entre os alunos que tiveram suas tarefas analisadas, todos do grupo G2 (14D07, 14D20, 14D21 e 14D25) e seis dos oito alunos do grupo G3 (14D12, 14D15, 14D23, 14D24, 14D27 e 14D28) responderam a tarefa da maneira esperada na primeira fase. Isso significa que, entre os 19 alunos que tiveram suas tarefas analisadas, 10 responderam da maneira esperada, o que corresponde a aproximadamente 53%.

Esse baixo percentual de resposta esperada pode estar relacionado ao fato de a tarefa ser não-rotineira, pois possivelmente os alunos não estão habituados a trabalhar com esse tipo de tarefa. Se fosse uma prova convencional, de uma única fase, provavelmente 9 dos 19 alunos (47%) teriam tirado zero nessa tarefa, porque grande parte deles não respondeu a pergunta da tarefa. Porém, com a utilização da prova em fases, pode-se afirmar que todos os 19 alunos iriam obter alguma nota, pois todos eles foram capazes de responder e/ou resolver pelo menos um item proposto da maneira esperada.

Ficou evidente neste trabalho que a prova em fases pode ser um eficiente instrumento para possibilitar o diálogo entre professor e aluno. Mesmo com alguns problemas na comunicação, o fato é que houve comunicação. Utilizando a prova em fases, foi possível constatar que a “avaliação aparece como mais uma oportunidade de aprendizagem, associada à ideia de que o erro pode ser tomado como parte do processo de aprender e que sua ocorrência demanda ser analisada e

compreendida, para que possa ser superada” (PIRES; BURIASCO, 2012, p. 15).

A prova em fases pode ser considerada como um bom instrumento de avaliação para o professor que toma a avaliação da aprendizagem escolar como prática de investigação, pois, de certo modo, o professor se coloca no lugar do aluno ao analisar suas produções escritas para propor os itens de cada fase. Essa análise fornece informações a respeito da aprendizagem dos alunos que podem subsidiar o professor a readequar seu trabalho em sala de aula. Nesse processo, os alunos podem refletir e até rever suas maneiras de estudar.

A quantidade de fases dessa prova ou o modo como foi desenvolvida poderiam ser repensados, pois, a partir da terceira fase, alguns alunos começaram a se queixar de modo explícito e outros mostraram indícios de desinteresse. É preciso reconhecer que ficar respondendo itens relacionados à Matemática sem ter um *feedback* não foi fácil para os alunos do 5º ano, que tinham em média dez anos de idade. Por isso acredita-se que duas ou três fases, no máximo, seria o suficiente para trabalhar com alunos dessa faixa etária.

O objetivo desse instrumento de avaliação era guiar os alunos com questionamentos propostos nos itens de cada fase para a resposta que se esperava, o que pode ser considerado como parte de um dos princípios da RME, o princípio da orientação ou da reinvenção guiada, no qual tanto os alunos quanto o professor ocupam posição central.

Vários alunos apresentaram algum tipo de matematização, pois, de certo modo, foram capazes de organizar a situação matematicamente desde a primeira fase da prova. Mesmo não sendo a organização que se julga necessária para obter a resposta esperada, realizaram certa organização.

Assim como nos trabalhos desenvolvidos pelo GEPEMA, nesta pesquisa também foi possível identificar alunos que demonstraram conhecer a Matemática necessária para dar a resposta esperada, mas não conseguiram fazer isso porque não interpretaram o enunciado da tarefa de maneira esperada.

A principal mensagem que se pode tirar deste trabalho é que é possível depositar esperança nas crianças. Isso porque se subestimou o potencial delas em Matemática e elas surpreenderam positivamente. Assim pode-se inferir que elas são capazes de nos surpreender em diferentes aspectos.

Espera-se que os professores ou futuros professores de Matemática, utilizem as ideias apresentadas neste trabalho para ao menos tentarem realizar uma

prova em fases, independentemente da quantidade de fases, pois é dever de todos os professores oportunizar a aprendizagem. Caso não tentem, nunca saberão o que a utilização da prova em fases pode revelar em sua sala de aula, sua realidade. Uma intenção subjacente seria os professores de Matemática difundirem a ideia da utilização da prova em fases para seus colegas professores de outras disciplinas, pois esse instrumento de avaliação pode ser utilizado em qualquer área do conhecimento.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, V. L. C. de. **Questões não-rotineiras**: a produção escrita de alunos da graduação em Matemática. 2009. 144f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.
- ALVES, R. M. F. **Estudo da produção escrita de alunos do Ensino Médio em questões de matemática**. 2006. 158f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.
- BEZERRA, G. C. **Registros escritos de alunos em questões não-rotineiras da área de conteúdo quantidade**: um estudo. 2010. 183f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.
- BORBA, M. C. A pesquisa qualitativa em Educação Matemática. In: **Publicado em CD nos Anais da 27ª reunião anual da ANPEd**. Caxambu, MG, 21 – 24 nov. 2004.
- BURIASCO, R. L. C. Algumas considerações sobre avaliação educacional. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, n. 22, p.155 – 177, jul/dez. 2000.
- BURIASCO, R. L. C.; CYRINO, M. C. C. T.; SOARES, M. T. C. Um estudo sobre a construção de um manual para correção das provas com questões abertas de matemática – AVA 2002. In: VIII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004, Recife. **Anais...** Disponível em: <www.sbem.com.br/files/viii/pdf/08/CC32989431934.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2014.
- BUTTS, T. Formulando problemas adequadamente. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. São Paulo: Atual, 1997. p. 32 – 48.
- CELESTE, L. B. **A Produção Escrita de alunos do Ensino Fundamental em questões de matemática do PISA**. 2008. 85f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.
- CIANI, A. B. **O realístico em questões não-rotineiras de matemática**. 2012. 166f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.
- DALTO, J. O. **A produção escrita em matemática**: análise interpretativa da questão discursiva de matemática comum à 8ª série do ensino fundamental e a 3ª série do ensino médio da AVA/2002. 2007. 100f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.
- DE LANGE, J. **Mathematics, Insight and Meaning**. Utrecht: OW&OC, 1987.

_____. **Framework for classroom assessment in mathematics**. 1999. Disponível em: <www.fi.uu.nl/catch/products/framework/de_lange_framework.doc>. Acesso em: 28 jan. 2014.

DÍAZ, V.; POBLETE, A. Competencias en Matemáticas y Tipos de problemas. In: CIBEM – Proceedings V Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, n. 5, 2005, Portugal. **Anais...** Portugal: Publicaciones con Comité Editorial, 2005.

ESTEBAN, M. T. Avaliar: ato tecido pelas imprecisões do cotidiano. In: **23ª Reunião Anual da ANPEd**, 2000. Caxambu. Disponível em: <<http://23reuniao.anped.org.br/textos/0611t.PDF>> Acesso: 14 jul.14.

FERREIRA, P. E. A. **Análise da produção escrita de professores da Educação Básica em questões não-rotineiras de matemática**. 2009. 166f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

_____. **Enunciados de tarefas de matemática**: um estudo sob a perspectiva da educação matemática realística. 2013. 121f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2013.

FREUDENTHAL, H. Why to Teach Mathematics so as to Be Useful. **Educational Studies in Mathematics**, v. 1, n. 1, p. 3 – 8, 1968.

_____. Matemática nova ou educação nova? **Perspectivas**, Portugal, vol. IX, n.3, p. 317 – 328, 1979.

_____. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GRAVEMEIJER, K. P. E. O que torna a Matemática tão difícil e o que podemos fazer para o alterar? In: SANTOS, Maria Leonor; CANAVARRO, Ana Paula; BROCARD, Joana. **Educação matemática**: Caminhos e encruzilhadas, Lisboa: APM. 2005. p. 83 – 101.

GRAVEMEIJER, K. P. E.; TERWEL J. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. **Journal of Curriculum Studies**, v. 32, n. 6, p. 777 – 796, nov-dez. 2000.

HRESCAK, R. D.; TREVISAN, A. L. Tarefa em fases em aulas de matemática: análise de uma experiência nos anos iniciais. **VIDYA**, Santa Maria, v. 33, n. 1, p. 67 – 79, janeiro/junho 2013.

LOPEZ, J. M. S. **Análise interpretativa de questões não-rotineiras de matemática**. 2010. 141f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de professores)

MENDES, Marcelle Tavares. **Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. 275f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

NAGY-SILVA, M. C. **Do Observável ao Oculto**: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª série em questões de matemática. 2005. 123f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

NAGY-SILVA, M. C.; BURIASCO, R. L. C. Análise da produção escrita em matemática: algumas considerações. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 11, n. 3, p. 499 – 512, 2005.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria Segundo a teoria de Van Hiele**. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

NEGRÃO DE LIMA, R. C. **Avaliação em Matemática**: análise da produção escrita de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental em questões discursivas. 2006. 201f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

PARANÁ. **Deliberação n.º 007/99**. Curitiba: Conselho Estadual de Educação. 1999.

_____. **Currículo Básico para a Escola Pública do Estado do Paraná**. Versão Eletrônica. Curitiba: Secretaria de Estado da Educação. 2003. Disponível em: <www.grugratulinofreitas.seed.pr.gov.br/redeescola/escolas/21/970/26/arquivos/File/materialdidatico/diversos/Ensino-Curriculo-Basico-para-a-Escola-Publica-do-Estado-do-Parana.pdf>. Acesso em: 13 jul. 2014.

_____. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes curriculares da educação básica: Matemática**. Curitiba, 2008.

PEREGO, F. **O que a produção escrita pode revelar? Uma análise de questões de matemática**. 2006. 126f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

PEREGO, S. C. **Questões Abertas de Matemática**: um estudo de registros escritos. 2005. 104f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

PEREIRA JUNIOR, Ademir. **Enunciados de Itens de provas de Matemática**: um estudo na perspectiva da Educação Matemática Realística. 2014. 65f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PIRES, M. N. M. **Oportunidade para aprender**: uma Prática da Reinvenção Guiada na Prova em Fases. 2013. 122f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

PIRES, M. N. M.; BURIASCO, R. L. C. Prova em fases: instrumento para aprender. In: V SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2012, Petrópolis. **Anais...** Disponível em: <http://sipem-sbem.lematec.net/CD/PDFs/GT08/CC46820833920_A.pdf>. Acesso em: 27 jan. 2014.

PONTE, J. P.; BOAVIDA, A.; GRAÇA, M.; ABRANTES, P. **Didáctica da matemática**. Lisboa: DES do ME, 1997.

SANTOS, E. R. **Estudo da produção escrita de estudantes do ensino médio em questões discursivas não rotineiras de matemática**. 2008. 166f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

_____. **Análise da produção escrita em matemática**: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. 156f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

SANTOS, L. **As actuais orientações curriculares no ensino e aprendizagem da matemática**: a avaliação e os seus desafios. 2004. Disponível em: <www.educ.fc.ul.pt/docentes/msantos/rm.pdf>. Acesso em: 27 jan. 2014.

SEGURA, R. O. **Estudo da Produção Escrita de Professores em Questões discursivas de Matemática**. 2005. 175f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

TREFFERS, A. **Three Dimensions**: a model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987.

TREVISAN, A. L. **Prova em fases e um repensar da prática avaliativa em matemática**. 2013. 168f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Assessment and Realistic Mathematics Education**. Utrecht: CD-β Press/Freudenthal Institute, Utrecht University. 1996.

_____. Realistic Mathematics Education as work in progress. In: LIN, F. L. (Ed.). **Common Sense in Mathematics Education**. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics. Taipei, Taiwan, p. 1 – 43, November 2001.

_____. The role of contexts in assessment problems in mathematics. **For the Learning of Mathematics**. FLM Publishing Association, Edmonton, Alberta, Canada, v. 25, n. 2, p. 2 – 9, July 2005.

_____. Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In: SPARROW, L.; KISSANE, B. & HURST, C. (Eds.). **Shaping the future of mathematics education**: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Fremantle: MERGA. 2010.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. **O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática**. 2007. 108f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

VIOLA DOS SANTOS, J. R.; BURIASCO, R. L. C. Uma análise interpretativa da produção escrita em matemática de alunos da escola básica. **ZETETIKÉ**, Campinas, v. 16, n. 30, p. 11 – 43, junho/dezembro 2008.

VIOLA DOS SANTOS, J. R.; BURIASCO, R. L. C.; CIANI, A. B. A Avaliação como Prática de Investigação e Análise da Produção Escrita em Matemática. **Revista de Educação**, Campinas, n. 25, p. 35 – 45, novembro 2008.

WITTMANN, E. C. Realistic Mathematics Education, past and present. **Nieuw Archief voor Wiskunde**, v. 6, n. 4, p. 294 – 296, December 2005.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Questionário de oportunidade de aprendizagem



Universidade Estadual de Londrina
Departamento de Matemática - CCE
Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática
Área: Educação Matemática
Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação

QUESTIONÁRIO SOBRE OPORTUNIDADE DE APRENDIZAGEM

Prezada Professora

Estamos empenhados em fazer um estudo para conhecer:

- como os alunos lidam com as informações contidas nos enunciados de questões apresentadas em um contexto não-rotineiro;
- quais conhecimentos matemáticos utilizam;
- quais os procedimentos/estratégias que utilizam para resolvê-las e como o fazem;
- quais os erros mais frequentes e qual a natureza deles;
- que linguagem matemática utilizam nas resoluções que apresentam.

Na busca de maiores informações é de fundamental importância que você compartilhe conosco a sua experiência, analisando cada questão da prova que seus alunos responderam.

Desde já agradecemos sua valiosa colaboração e solicitamos que para cada questão da prova do aluno responda cada uma das três perguntas abaixo marcando com um **X** na folha de respostas a alternativa adequada.

- 1) Que porcentagem dos seus alunos você acha que responderá corretamente esta questão? (Escolha somente uma das alternativas seguintes)
 - A) Entre 0 e 10% dos alunos, ou seja, praticamente nenhum aluno.
 - B) Entre 10 e 40% dos alunos, ou seja, poucos alunos.
 - C) Entre 41 e 60% dos alunos, ou seja, mais ou menos a metade dos alunos.
 - D) Entre 61 e 90% dos alunos, ou seja, muitos alunos.
 - E) Entre 90 e 100%, ou seja, praticamente todos os alunos.

- 2) Durante este ano escolar você ensinou o conteúdo necessário para seus alunos responderem corretamente esta questão?
 - A) Sim.
 - B) Não, porque já havia sido ensinado em anos anteriores a esta.
 - C) Não, porque será ensinado em anos posteriores a esta.
 - D) Não, porque não considero este conteúdo importante.
 - E) Não, porque não houve tempo.
 - F) Não, porque.....

- 3) O enunciado da questão é suficientemente claro para que seus alunos compreendam o que está sendo pedido?
 - A) Sim.
 - B) Não.



Universidade Estadual de Londrina
Departamento de Matemática - CCE
Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática
Área: Educação Matemática
Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação

QUESTIONÁRIO SOBRE OPORTUNIDADE DE APRENDIZAGEM

Data de aplicação:/05/2014

FOLHA DE RESPOSTAS

Ano :..... do Ensino Fundamental Turno:.....

Questão	1^a.					2^a.						3^a.	
	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	F	A	B
1													
2													
3													
4													

Profa.....

APÊNDICE B

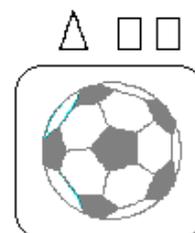
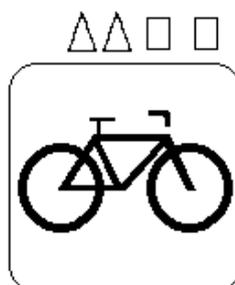
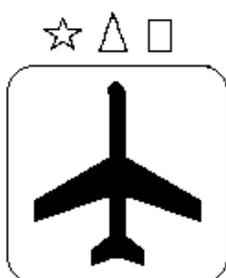
Prova aplicada

Escola Municipal José Brazil Camargo**13/05/2014****Nome:**

João, Carla e Luís brincavam de lojinha com dinheiro de "faz de conta".

Cada	□	vale	1 dinheiro.
Cada	△	vale	□ □ □
Cada	☆	vale	△ △ △

Analise os preços dos brinquedos da lojinha e responda.



1) Qual deles pode ser comprado com uma ☆ ?

2) Com duas ☆ João pode comprar o avião e a bola?

Escola Municipal José Brazil Camargo	13/05/2014
Nome:	

3) Bruna e Pedro são irmãos e resolveram comprar juntos um presente para o pai.

Bruna só tinha notas de 5 reais e Pedro só tinha notas de 2 reais.

Juntando o dinheiro os dois tinham 28 reais.

Cada um dos irmãos tinha o **mesmo número de notas**.

Quantas notas tinha cada um?

Escola Municipal José Brazil Camargo**13/05/2014****Nome:**

- 4) A caixinha abaixo possui uma seqüência de 20 bolinhas. Quantas bolinhas brancas estão nesta seqüência? Explique como pensou para resolver.

