UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

CRISTINA APARECIDA DE MELO PIZA

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E USO DIDÁTICO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA:

UM ESTUDO SOBRE PARÁBOLA

Londrina
2009

CRISTINA APARECIDA DE MELO PIZA

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E USO DIDÁTICO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA:

UM ESTUDO SOBRE PARÁBOLA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli.

Londrina
2009

Catalogação na publicação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

P695r Piza, Cristina Aparecida de Melo.
Registros de representação semiótica e uso didático da história da matemática : um estudo sobre parábola / Cristina Aparecida de Melo Piza. – Londrina, 2009.
110 f. : il.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2009.
Inclui bibliografia.

1. Educação matemática – Teses. 2. Matemática – Semiótica – Teses. 3. Matemática – Estudo e ensino – Teses. I. Savioli, Angela Marta Pereira das Dores. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

CRISTINA APARECIDA DE MELO PIZA

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E USO DIDÁTICO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA:

UM ESTUDO SOBRE PARÁBOLA

BANCA EXAMINADORA

____
Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina

____
Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina

____
Profa. Dra. Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Londrina, 7 de Maio de 2009.

DEDICATÓRIA

Aos meus pais,

Mário e Maria por,

entusiasmadamente,

sonharem meus sonhos comigo.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Senhor Jesus Cristo, “porque Dele, por Ele e para Ele são todas as coisas”!

À professora Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli, orientadora desta pesquisa, não apenas pela competência e disponibilidade, mas por ter se tornado uma grande amiga. Também ao Paulino, ao José Paulo e à Mariana por sempre me atenderem com muita atenção e carinho.

Às professoras Dra. Lourdes Werle de Almeida e Dra. Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho pelas contribuições que muito enriqueceram este trabalho.

À professora Ms. Denise Trindade Moreira, que me apoiou, me incentivando desde o início e à professora Dra. Marie-Claire Ribeiro Póla pela contrução de figuras, além de outras ricas sugestões.

Aos professores do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, em especial, à professora Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco, que, num momento difícil, me incentivou e me fez acreditar que era possível.

Aos estudantes do 3º ano do curso de Matemática (Licenciatura) que colaboraram com sua participação no desenvolvimento desta pesquisa.

Ao colegas do Programa de Mestrado, especialmente, à Cláudia, ao Gefferson, ao Eduardo e ao Chistian, pela amizade, troca de idéias e disposição em me ouvir sempre!

Ao meu marido Jorge, pelo amor, paciência e dedicação no decorrer desta fase de nossa vida.

Às minha filhas, Ana Luíza e Maria Eduarda, que mesmo pequenas, entenderam que a mamãe precisava estudar!

À minha irmã Jucelina, pelo capricho e disposição em me ajudar a contruir algumas figuras que compõe este trabalho.

Aos meus pais, minha irmã Elisângela, minha avó Celeste, meus familiares e todos os amigos que sempre se alegram por minhas conquistas.

Aos meus pastores Jozias e Zila que sempre oraram por mim, me apoiando e muitas vezes, compreendendo minhas ausências.

À Capes pelo apoio financeiro.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, meus sinceros agradecimentos.

Ó profundidade da riqueza
da sabedoria e do conhecimento de Deus!
Quão insondáveis são os seus juízos
e inescrutáveis os seus caminhos!
“Quem conheceu a mente do Senhor?
Ou quem foi seu conselheiro?”
“Quem primeiro lhe deu, para que
ele o recompense?”
Pois dele, por ele e para ele
são todas as coisas.
A ele seja a glória para sempre!
Amém.
Romanos 11: 33-36 (NVI)

PIZA, Cristina Aparecida de Melo. **Registros de representação semiótica e uso didático da história da matemática:** um estudo sobre parábola. 2009. 109f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

RESUMO

A presente pesquisa fundamenta-se na Teoria das Situações Didáticas, de Brousseau, e na Teoria dos registros de Representação Semiótica, de Duval, propondo uma interlocução com a História da Matemática. Tem por objetivo investigar se o desenvolvimento de uma seqüência didática que considera o tratamento, a conversão e a coordenação de diferentes registros de representação semiótica da parábola, com o uso didático da História da Matemática, possibilita ao estudante compreender que a parábola caracterizada como seção de um cone ou como lugar geométrico representa o mesmo objeto matemático. A metodologia empregada baseia-se nos princípios da Engenharia Didática, envolvendo estudantes da terceira série do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina, estado do Paraná. O confronto entre a análise a priori e a análise a posteriori mostrou que o desenvolvimento da seqüência didática proposta possibilitou aos estudantes, sujeitos dessa pesquisa, compreender que a parábola caracterizada como seção de um cone ou como lugar geométrico, representa o mesmo objeto matemático.

Palavras-chave: Parábola. Registro de representação semiótica. História da matemática. Engenharia didática. Educação matemática.

PIZA, Cristina Aparecida de Melo. **Registros de representação semiótica e uso didático da história da matemática:** um estudo sobre parábola. 2009. 109f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

ABSTRACT

The present research is well-founded in the Theory of Didactics Situations, by Brousseau, and the Theory of Records of Representations Semiotic, by Duval, proposing a dialogue with the History of Mathematics. The objective of this study is to investigate whether the use of a didactic sequence that considers the treatment, the conversion and coordination of different records of semiotic representation of the parabola, with the help of the History of Mathematics, allows students to understand that it characterized as a section of a cone or characterized as locus represents the same mathematical object. The methodology utilized is base on the principles of the Didactic Engineering, involving third year students of an university-level Mathematics teacher-training program at Universidade Estadual de Londrina, Paraná. The confrontation between the previous analysis and a posterior analysis showed that the development of the didactic sequence applied possibilities that the students of this research, understanding that the parabola that is characterized like section of a cone or characterized as locus represents the same mathematical object.

Keywords: Parabola. Records of semiotic representation. History of mathematics. Didactic engineering. Mathematics education.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta dissertação constitui-se numa pesquisa relacionada ao tema Seções Cônicas, tema este que foi também objeto de estudo de minha Monografia apresentada no curso de Especialização em Educação Matemática, no ano de 2002, na Universidade Estadual de Londrina, no Paraná.

Nas leituras sobre este tema me deparei com um artigo sobre cônicas de Teukolsky (1994), no qual a autora diz ter como objetivo provocar os estudantes com a seguinte questão: “como é possível que curvas geradas de maneiras tão diferentes possam levar às mesmas seções cônicas?” (TEUKOLSKY, 1994, p.192). Ela estava se referindo às caracterizações das cônicas como seção de um cone como lugar geométrico.

A partir dessa inquietação levantamos as seguintes questões: o tema Cônicas é abordado no ensino superior de forma que o futuro professor construa os conceitos, caracterize as Cônicas como seção do cone e como lugar geométrico, estabeleça relações entre as definições e tenha autonomia para traçar estratégias de ensino ao lecionar?

Nosso próximo passo foi verificar, por meio das ementas das disciplinas dos Cursos de Licenciatura em Matemática das universidades estaduais do Paraná: UEL, UEM, UEPG, UNICENTRO e UNIOESTE, em que série ou séries as Cônicas são trabalhadas e, por meio da análise de livros-textos, verificar também quais Cônicas são estudadas, que caracterizações são apresentadas, ou seja, como se dá o ensino[1] deste tema na formação de professores. A principal constatação, considerando que as Cônicas são estudadas nos cursos assim como livros as apresentam, foi que as Cônicas como seção de um cone e como lugar geométrico são sim abordadas, porém, em momentos distintos, sem o estabelecimento de alguma relação entre as caracterizações, a não ser, a nomenclatura das curvas.

Diante deste quadro, decidimos desenvolver um estudo abordando a parábola, tendo como sujeitos de pesquisa estudantes de um curso de formação de professores de Matemática. Detemos-nos apenas à parábola, primeiro porque demandaria um tempo maior para abordarmos as três curvas e depois, porque acreditamos que das cônicas, a parábola é a curva mais usual, já que os estudantes a conhecem desde o Ensino Médio, sendo estudada tanto na disciplina de Física quanto em Matemática, como gráfico de uma função quadrática.

[1] Apresentamos uma breve análise do ensino atual das Cônicas na seção 3.2 deste estudo.

Antes, porém, de buscarmos um referencial teórico já tínhamos em mente o desejo de trabalhar com as caracterizações da parábola como seção de um cone e como lugar geométrico de forma que o estudante reconhecesse que as duas curvas, porquanto geradas de maneira bem diferentes, diziam respeito ao mesmo objeto matemático[2].

Na busca, então, de um referencial teórico apropriado, localizamos uma teoria que ia ao encontro do que pensávamos, já que gostaríamos de trabalhar com representações algébricas, geométricas e gráficas da parábola possibilitando ao estudante identificar, nos diferentes registros de representação[3], esta mesma curva.

Esse referencial trata-se da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, que investiga os aspectos cognitivos da aprendizagem analisando os meios pelos quais o estudante tem acesso ao objeto matemático. O acesso ao objeto matemático se dá por meio de seus registros de representação (DUVAL, 2003). Segundo o mesmo autor, "há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros de representação é condição para a compreensão em matemática" (DUVAL, 2003, p.31).

Decidimos, a seguir, conforme os princípios da Engenharia Didática, elaborar uma seqüência didática abordando a parábola, composta por situações didáticas, segundo a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, que propiciassem a utilização de diferentes registros de representação, a saber, registros de representação da parábola como seção de um cone e registros de representação da parábola como lugar geométrico.

Atentando novamente à Teoria dos Registros de Representação Semiótica, vimos que Duval coloca que a coordenação, pelo estudante, dos diferentes registros de representação de um determinado objeto matemático, isto é, a percepção de que nos diferentes registros de representação semiótica está representado o mesmo objeto matemático, não acontece espontaneamente devendo ser estimulada durante as aulas. Frente a este fato, notamos que o uso didático da História da Matemática poderia auxiliar na promoção desta coordenação.

Pautadas, então, pela análise realizada dos livros-textos e das ementas das disciplinas dos cursos de licenciatura em Matemática, além de considerar nossos referenciais teóricos, partimos da hipótese de que o estudante não percebe, nas diferentes caracterizações

[2] "Objeto matemático é qualquer entidade ou coisa a qual nos referimos ou da qual falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que intervém de algum modo na atividade matemática" (FONT et al, 2005, p.4, tradução nossa).
[3] Neste trabalho usamos o termo "registro de representação" com o mesmo significado de "registro de representação semiótica", conforme caracterização de Duval (2004).

da parábola, abordadas aqui, o mesmo objeto matemático e formulamos o problema de nossa pesquisa: o desenvolvimento de uma seqüência didática que considera o tratamento, a conversão e a coordenação de diferentes registros de representação semiótica da parábola, com o uso didático da História da Matemática, possibilita ao estudante compreender que a parábola caracterizada como seção de um cone ou como lugar geométrico representa o mesmo objeto matemático?

Nosso objetivo era verificar se o desenvolvimento de uma seqüência didática, elaborada segundo os referenciais teóricos escolhidos, possibilitaria ao estudante realizar uma articulação entre diferentes registros de representação semiótica da parábola, a saber, registros de representação da parábola caracterizada como seção de um cone e como lugar geométrico, identificando, nestes diferentes registros de representação, o mesmo objeto matemático representado.

Pretendíamos verificar especificamente:

- se o estudante caracterizaria a parábola como seção de um cone;
- se o estudante caracterizaria a parábola como lugar geométrico;
- se o estudante realizaria os tratamentos e conversões envolvidos no estudo analítico da parábola, considerando esta curva com vértice na origem do sistema cartesiano;
- se o estudante realizaria a coordenação entre registros de representação da parábola, especificamente, registros de representação da parábola como seção de um cone e como lugar geométrico;
- se o estudante relacionaria *latus rectum* e parâmetro.

Quanto à relevância do tema Cônicas, há mais de dois mil anos, filósofos e matemáticos gregos, como Arquimedes, Menaecmo e Apolônio estudavam essas interessantes curvas (KLINE, 1972) e muitas descobertas científicas importantes estão relacionadas às Seções Cônicas. Uma delas é a descoberta de Kepler, no início do século XVII, que na sua obra *Astronomia Nova* editada em 1609, apresenta uma das principais leis da astronomia que diz que “os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, com o Sol ocupando um dos focos” (BOYER, 1974, p.238). Ainda por meio das aplicações das Cônicas dos gregos, surge, mais tarde, os “*Principia*” de Isaac Newton. A lei da gravitação de Newton e as descobertas de Kepler possibilitaram “o estudo analítico das Cônicas e das suas aplicações aos movimentos no espaço, este, por sua vez, deu aos cientistas de hoje condições para que a viagem de ida e volta à Lua fosse possível” (SATO, 2004, p.3).

Em sua tese de doutorado, Bongiovanni (2001) justifica o ensino das Cônicas na formação de professores colocando que:

- é um tópico desconhecido dos professores e muitas vezes, o único conhecimento que eles têm é reduzido às equações das cônicas;
- é um tema rico em sua constituição, no seu desenvolvimento, e especialmente nos seus problemas. Seu estudo oferece a possibilidade de formar uma rede de conexões entre os conhecimentos de várias áreas da geometria;
- a construção de uma cônica envolve muitas construções geométricas elementares;
- vários problemas clássicos de construções podem ser resolvidos por meio das cônicas;
- a justificação das propriedades das cônicas pode basear uma multiplicidade de conhecimentos geométricos tais como da geometria das configurações, das transformações e da geometria métrica.

Ainda segundo este autor, “em uma palavra, a escolha das cônicas permite a revisão e a conexão de vários resultados da geometria elementar plana e espacial em diferentes contextos matemáticos” (BONGIOVANNI, 2001, p.3, tradução nossa).

Este fato é confirmado por Teukolsky (1994), quando coloca que o estudo das Seções Cônicas propicia uma rara oportunidade de mesclar Geometria Plana, Geometria Espacial e Geometria Analítica articulando Geometria e Álgebra. Articulação esta que pode ser potencializada com a utilização de diferentes registros de representação semiótica do objeto estudado, especialmente registros de representação gráficos, geométricos e algébricos como propomos em nosso trabalho.

Salientamos ainda que, segundo Shulman (1986), além dos tradicionais eixos *conhecimento específico* e *conhecimento pedagógico*, faz-se necessária a introdução de um terceiro eixo, denominado pelo autor de *conhecimento do conteúdo no ensino*, compreendido por: conhecimento sobre a matéria a ser ensinada, conhecimento didático da matéria e conhecimento curricular da matéria. Nesta pesquisa, destacamos a importância do conhecimento sobre a matéria a ser ensinada, neste caso, sobre as Seções Cônicas. Acreditamos que, para o futuro professor, a construção do conhecimento sobre o conteúdo a ensinar interfere fortemente na maneira pela qual este professor abordará o mesmo em sala de aula. Por isso, como bem coloca Fiorentini (2005):

> [...] para ser professor de Matemática não basta ter um domínio conceitual e procedimental da Matemática produzida historicamente. Sobretudo, necessita conhecer seus fundamentos epistemológicos, sua evolução histórica, a relação da matemática com a realidade, seus usos sociais e as diferentes linguagens com as quais se pode representar ou expressar um conceito matemático (FIORENTINI, 2005. p.110).

Dessa forma, em nosso trabalho, sugerimos abordar o tema Cônicas na formação de professores, por meio de situações didáticas propostas de acordo com a Teoria das Situações Didáticas, com o uso didático da História da Matemática, além de utilizar diferentes registros de representação da parábola, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Considerando que aqui colocamos a problemática que envolve esta pesquisa, o problema propriamente dito, nossos objetivos, bem como as justificativas para a realização deste trabalho, apresentaremos a seguir mais cinco capítulos.

No capítulo I trataremos da fundamentação teórica discutindo a Teoria das Situações Didáticas e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. No capítulo II, abordaremos uma reconstrução histórica para Seções Cônicas e o papel da História da Matemática em nossa pesquisa. O capítulo III contemplará os aspectos metodológicos, isto é, a Engenharia Didática, as análises preliminares, bem como a construção da seqüência didática. No desenvolvimento do estudo, apresentado no capítulo IV, detalharemos a experimentação, as análises a priori, a posteriori e a validação. Apresentaremos também uma análise global. Por último, no capítulo V, teceremos nossas considerações finais.

CAPÍTULO 1
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta pesquisa fundamentamo-nos na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, além de sugerirmos uma interlocução com a História da Matemática. Sobre esta última, trataremos no próximo capítulo.

1.1 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A Teoria das Situações Didáticas foi desenvolvida pelo pesquisador francês Guy Brousseau[4] e propõe uma modelização do processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos (BROUSSEAU, 1996), ou seja, "busca criar um modelo da interação entre o aprendiz, o saber e o milieu (ou meio) [5] no qual a aprendizagem deve se desenrolar" (ALMOULOUD, 2007, p.31).

Para Brousseau (1996), o meio sem intencionalidade didática é insuficiente para que ocorra a construção de conhecimentos matemáticos. É, portanto, responsabilidade do professor, criar e organizar um meio propondo situações didáticas mediante as quais se torne possível provocar nos estudantes essas aprendizagens. Segundo Almouloud (2007), "o objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a *situação didática* na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber" (ALMOULOUD, 2007, p.32).

De acordo com Brousseau,

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição (apud FREITAS, 1999, p.67).

[4] Guy Brousseau é professor no IUFM (Instituto Universitário de Formação de Professores) de Aquitaine e Diretor do Laboratório Aquitaine de Didática das Ciências e Técnicas da Universidade de Boordeaux I. É autor de numerosas pesquisas em didática da matemática.

[5] Almouloud (2007) utiliza o termo *milieu* ou *miliuex* em francês em vez de sua tradução "meio". Neste trabalho adotaremos a tradução para o português.

Toda situação didática é regida por um *contrato didático*, ou seja, por um conjunto de obrigações implícitas ou explícitas relativas a um saber colocado entre o professor e os estudantes (FREITAS, 1999). As análises dessas situações didáticas possibilitam investigar problemas que envolvem a aprendizagem matemática, revelando aspectos presentes durante a resolução e a elaboração de conceitos pelos estudantes.

Como parte essencial da situação didática é importante destacar a noção de *situação adidática* que, segundo Brousseau (1996), acontece quando o estudante é capaz de mobilizar por si mesmo o conhecimento que está construindo, em "situações com que se depara fora do contexto do ensino, e na ausência de qualquer indicação intencional" (BROUSSEAU, 1996, p.49). Sendo assim, numa situação adidática, não é revelada a intenção de ensinar, a qual foi imaginada, planejada e construída pelo professor com o intuito de proporcionar condições favoráveis para que ocorra a construção, pelo estudante, do novo saber que se deseja ensinar. Pode ocorrer uma ou mais situações adidáticas em uma situação didática mais ampla, a qual se torna mais rica quanto mais favorece o aparecimento dessas situações adidáticas.

Cabe aqui colocar também a noção de *devolução* que, de acordo com Brousseau (1996), ocorre quando o professor "devolve" ao estudante um bom problema (uma situação adidática) e o faz aceitar a responsabilidade de resolvê-lo como se fosse seu, trabalhando autonomamente. Se o estudante aceita participar desse desafio e, além disso, obtém sucesso, inicia-se então o processo de aprendizagem. Estes momentos, para Brousseau, são considerados os mais importantes, pois o sucesso do estudante nas situações adidáticas, significa que ele conseguiu sintetizar um conhecimento devido a seu próprio mérito. Ainda de acordo com Brousseau (1996), "na didática moderna, o ensino é a devolução ao aluno de uma situação a-didática, e a aprendizagem é uma adaptação a esta situação" (BROUSSEAU, 1996, p.51).

Segundo Freitas (1999), levando em consideração as diferentes relações do estudante com o saber em jogo e analisando as principais atividades próprias da aprendizagem matemática, Brousseau classificou as situações didáticas em quatro tipos: *situação de ação, situação de formulação, situação de validação e situação de institucionalização*. No entanto, o autor ressalta que a descrição que se faz não é com o intuito de induzir uma separação entre elas, já que estas se entrelaçam fortemente, mas é principalmente para permitir uma análise dos aspectos fundamentais.

Na *situação de ação* o professor fornece alguns dados convenientes para que o estudante tenha condições de agir e buscar a resposta para um dado problema. Nessa busca, o estudante, realiza determinadas ações imediatas, resultando na produção de um conhecimento mais operacional, predominando quase que exclusivamente, o aspecto experimental do conhecimento. Normalmente, o estudante apresenta uma solução, *mas não explica como ela foi elaborada*, não se preocupando, também, com argumentos teóricos que justifiquem a validade de sua resposta.

Numa *situação de formulação* o objetivo principal é proporcionar ao estudante a *troca de informações* com uma ou mais pessoas com o intuito de explicitar, escrita ou oralmente, numa linguagem que todos compreendam, as ferramentas e os procedimentos usados para a solução de um determinado problema. Ainda nesta situação, não há debates de provas (BROUSSEAU, 1996).

As *situações de validação* acontecem quando os estudantes utilizam *mecanismos de provas* para validar as asserções formuladas durante as situações de ação e de formulação, incluindo um debate sobre a certeza dessas asserções (FREITAS, 1999).

Por fim, numa *situação de institucionalização*, cabe ao professor realizar uma *sistematização do conhecimento* já construído e validado, elevando-o a um status de saber, estabelecendo assim, o caráter de objetividade e universalidade desse conhecimento. (FREITAS, 1999). A partir de então, esse conhecimento deve ser incorporado aos esquemas mentais dos estudantes, que poderão disponibilizá-lo para a resolução de problemas matemáticos.

Fundamentadas então, na teoria ora vista, é que sugerimos situações didáticas, abordando a parábola, organizadas numa seqüência didática segundo os princípios da Engenharia Didática que discutiremos mais adiante.

1.2 TEORIAS DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Recorrendo à História da Matemática, vemos que as representações ocuparam um papel relevante no desenvolvimento da Matemática.

De acordo com Flores (2006), durante a Antiguidade Grega e a Idade Média, por exemplo, usava-se a linguagem para explicar, demonstrar e representar o que se pensava referente à matemática. Quando se utilizava de símbolos além da escrita, estes eram criados momentaneamente, tendo um significado apenas para aquele que os criara. Já na Idade

Clássica aparece a escrita algébrica e diferentes representações vão surgindo até o ponto de não mais ser possível fazer matemática sem a utilização de representações.

A noção de representação torna possível também o estudo de fenômenos relativos à construção do conhecimento e por isso aparece em estudos psicológicos relativos a este assunto, como na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval[6] (DUVAL, 2004). Segundo este autor, as representações semióticas são relativas a um sistema particular de signos como a língua natural, a escrita algébrica, os gráficos cartesianos, e podem ser convertidas em representações "equivalentes" em outro sistema semiótico, podendo ter diferentes significados para quem as utiliza. O termo "registros de representação semiótica" é usado para indicar os diferentes tipos de representação semiótica.

Para Duval (2004), as representações não cumprem apenas uma função de comunicação, mas são fundamentais para as atividades cognitivas do pensamento. Os objetos matemáticos não são acessíveis pela percepção e por isso, o indivíduo precisa recorrer a uma representação desse objeto para ter acesso a ele. De acordo com Damm (1999) "[...] não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxílio de uma representação" (DAMM, 1999, p.137). Para garantir a compreensão em matemática, segundo Duval (2003), não se deve usar um único registro de representação semiótica para representar o mesmo objeto matemático, para que este não venha a ser confundido com sua representação, e sim, dispor de ao menos duas representações de maneira que estas sejam percebidas como representando o mesmo objeto matemático. É necessário também que o estudante transite de uma representação a outra, isto é, seja capaz de articular diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático.

Além das representações semióticas, Duval (2004) considera mais dois tipos de representações: as mentais e as computacionais.

De acordo com o autor, as representações mentais são *internas* porque não são visíveis ou observáveis e consistem num conjunto de imagens, crenças, noções, conceitos e concepções que o sujeito pode ter sobre um objeto ou uma situação ou sobre aquilo que está relacionado ao objeto ou à situação. Esse tipo de representação cumpre a *função de objetivação* que corresponde à formação de representações mentais novas e são, portanto, *conscientes* do sujeito. Tais representações estão associadas à interiorização das representações externas.

[6] Raymond Duval é filósofo e psicólogo de formação. Desenvolveu estudos em Psicologia Cognitiva no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (Irem) de Estrasburgo, na França, no período de 1970 a 1999.

As representações computacionais são também *internas*, porém *não conscientes* do sujeito, pois este "acaba executando certas tarefas sem pensar em todos os passos necessários para a sua realização (por exemplo, os algoritmos computacionais, ou mesmo os algoritmos das operações)" (DAMM, 1999, p.139). Realizam a *função de tratamento* de uma informação que se caracteriza pela execução automática de uma determinada tarefa com o intuito de produzir uma resposta adequada à situação.

Os tipos de representações distinguidas por Duval, incluindo as semióticas, não são espécies diferentes de representações, mas representações que realizam diferentes funções. Como já colocamos, as representações mentais desempenham a função de objetivação e as representações computacionais a função de tratamento. Já as representações semióticas são *externas* e *conscientes* ao indivíduo e cumprem de modo indissociável uma *função de objetivação* e uma *função de expressão*. Apresentam dois aspectos: sua forma (o representante) e seu conteúdo (o representado). Realizam também uma função de *tratamento* não automático, mas *intencional*, sendo esta função essencial para a aprendizagem (DAMM, 1999).

Para Duval (2004), as representações semióticas não se constituem em um suporte para as representações mentais, ou seja, não têm apenas a função de comunicar as representações mentais, mas são essenciais para as atividades referentes ao funcionamento cognitivo humano. As representações semióticas são fundamentais para tornar possível a construção do conhecimento pelo indivíduo que aprende.

Cabe aqui, apresentar os termos "*semiósis*" e "*noésis*" colocados por Duval (2004). O primeiro refere-se à apreensão ou a produção de uma representação semiótica e o segundo à apreensão conceitual de um objeto. "Para que ocorra a apreensão de um objeto matemático é necessário que a *noésis* (conceitualização) ocorra através de significativas *semiósis* (representações)" (DAMM, 1999, p.143). Quanto mais registros de representação diferentes do mesmo objeto matemático forem mobilizados pelo sujeito maior será a expectativa de apreensão deste objeto.

Duval (2004) coloca três atividades cognitivas fundamentais de representação ligadas a semiósis, quais sejam: a *formação de uma representação identificável*, o *tratamento* e *conversão*, sendo as duas últimas, tipos heterogêneos de transformação das representações semióticas. Um sistema se signos deve permitir essas três atividades para que seja considerado como um registro de representação.

Uma representação é identificável quando pertence a um sistema de signos estabelecidos na sociedade, portanto comum a todas as pessoas. Não compete ao sujeito criálas, mas usá-las para distinguir as representações. Um exemplo são as placas de trânsito. Convencionou-se que uma circunferência com um traço diagonal sobre a letra “E”, indica que é proibido estacionar. As placas de trânsito são representações identificáveis e permitem a conversão, porém não são consideradas registros de representação semiótica, por não permitirem o tratamento.

O tratamento de uma representação é uma transformação interna a um registro, ou seja, é a transformação dessa representação em outra conservando o próprio registro de partida. De acordo com Duval (2003):

> Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria (DUVAL, 2003, p.16).

Os tratamentos dependem da forma e não do conteúdo envolvido, existindo regras de tratamento adequadas a cada registro. Assim, distintas representações podem envolver tratamentos diferentes para o mesmo objeto matemático, tratamentos estes, que devem ser compreendidos, construídos, além de estabelecidas normas para seu uso (DAMM, 1999).

A conversão é a transformação da representação de um objeto matemático em outro registro de representação deste mesmo objeto, conservando totalmente ou em parte as características do objeto representado. Para Duval (2005), “as conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica” (DUVAL, 2003, p.16).

É importante observar que na conversão de uma representação a outra não muda apenas o modo de tratamento, mas, de acordo com o mesmo autor, podem ser explicadas as propriedades ou os diferentes aspectos de um mesmo objeto matemático, mudando de fato o conteúdo da representação. Por este motivo não se deve privilegiar um único registro, pois este pode não contemplar todas as características do objeto, resultando numa compreensão parcial por parte de quem aprende. A solução está em dispor de ao menos dois registros de representação diferentes para que não seja confundido o conteúdo de uma representação com o objeto representado (DUVAL, 2003).

Outra observação importante está relacionada ao sentido da conversão. Privilegia-se um sentido da conversão acreditando que automaticamente trabalha-se com a conversão em sentido contrário. Isso não é verdade e pode haver casos em que realizar uma conversão em um sentido não significa que seja possível realizá-la em sentido contrário. Por isso o registro de partida e o de chegada deve ser sempre indicado (ALMOULOUD, 2007).

Vimos até aqui que, de modo geral, a compreensão em matemática está ligada à utilização de diferentes registros de representação semiótica e especialmente à atividade de conversão entre estes registros de representação. De acordo com Damm (1999), Duval destaca três vantagens ao se trabalhar com diferentes registros de representação: a economia de tratamento, a complementaridade de registros de representação e a conceitualização que implica uma coordenação dos registros de representação.

Quanto à economia de tratamento, na diversidade dos registros de representação podem-se efetuar trocas de registros de representação realizando tratamentos de forma mais econômica e poderosa, como por exemplo, numa determinada situação, decidir operar com números fracionários ao invés de decimais.

A complementaridade de registros de representação torna-se necessária por conta das limitações de cada registro: como já colocado, um registro pode não contemplar todas as características do objeto estudado.

A coordenação acontece quando se identifica, nos diferentes registros de representação, o mesmo objeto matemático representado (DUVAL, 2003). Esta coordenação não acontece espontaneamente, mas deve ser incitada durante as aulas (DAMM, 1999). Torna-se importante, então, promover um ambiente de ensino no qual surjam diferentes registros de representação para o mesmo objeto matemático e seja necessária a realização da conversão e coordenação entre estes registros de representação.

Dessa forma, propomos nesta pesquisa, situações didáticas envolvendo o tratamento, a conversão e a coordenação de diferentes registros de representação semiótica da parábola. “Há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros de representação é condição para a compreensão em matemática...” (DUVAL, 2003, p.31).

Considerando a teoria discutida, apresentamos na subseção seguinte, registros de representação semiótica da parábola que abordaremos neste trabalho e uma possibilidade de articulação entre eles.

1.2.1 Diferentes Registros de Representação da Parábola

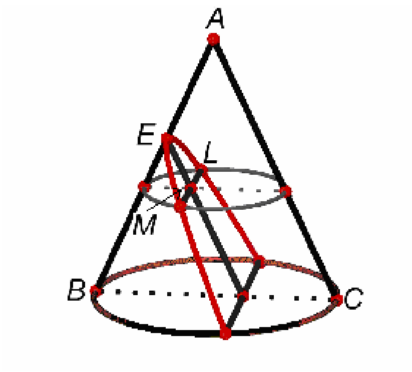
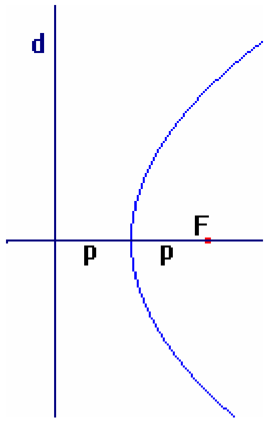
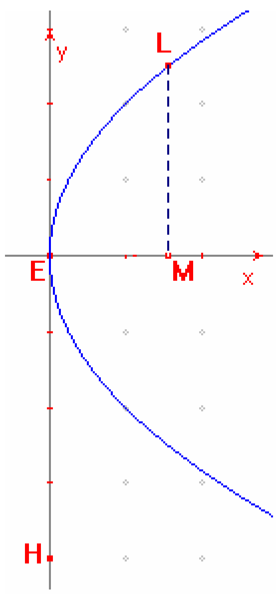
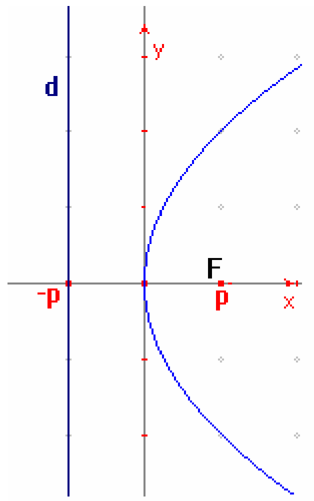
A parábola pode ser identificada em diferentes registros de representação construídos desde a antiguidade, sendo vários estes registros de representação, quando consideradas distintas caracterizações desta curva.

Em sua tese de doutoramento, Bongiovanni (2001) teve como objetivo construir um hiperdocumento interativo sobre caracterizações das cônicas para a formação continuada de professores de Matemática do Ensino Básico, na França, visando reativar e estruturar os conhecimentos em geometria destes professores. Segundo este autor, o tema Cônicas foi escolhido por envolver uma multiplicidade de conhecimentos geométricos em seu estudo. Na referida tese, podemos distinguir quatro caracterizações para a parábola:

- a parábola como seção plana de um cone;
- a parábola como lugar geométrico;
- a parábola como curva algébrica do 2º grau;
- a parábola como projeção do círculo.

Diante da diversidade de registros de representação para esta curva, nesta pesquisa, escolhemos abordar os registros de representação da parábola como seção de um cone e como lugar geométrico. No entanto, na elaboração e aplicação da seqüência didática a parábola como curva algébrica do 2º grau também foi abordada, ao conferirmos um tratamento analítico à curva. Diferentemente de Bongiovanni (2001), temos por objetivo investigar se o desenvolvimento de uma seqüência didática que considera o tratamento, a conversão e a coordenação de diferentes registros de representação semiótica da parábola, com o uso didático da História da Matemática, possibilita ao estudante compreender que a parábola caracterizada como seção de um cone ou como lugar geométrico representa o mesmo objeto matemático.

Apresentamos no quadro 1, na página seguinte, os registros de representação geométricos, em língua natural, gráficos e algébricos da parábola caracterizada como seção do cone, bem como desta curva caracterizada como lugar geométrico.

<table>
<tr><th></th><th>Parábola como seção do cone</th><th>Parábola como lugar geométrico</th></tr>
<tr><td>Registro Geométrico</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Registro em Língua Natural</td><td>Curva gerada pela interseção de um plano paralelo a geratriz de um cone.</td><td>Lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta fixa d, chamada diretriz, e de um ponto fixo F, não pertencente à diretriz, chamado foco.</td></tr>
<tr><td>Registro Gráfico</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Registro Algébrico</td><td>$LM^2 = EH \cdot EM$</td><td>$y^2 = 4px$</td></tr>
</table>

Quadro 1 – Diferentes registros de representação da Parábola

Segundo a Teoria de Duval (2004), os diferentes registros de representação da parábola apontam suas diversas propriedades e podem contribuir para a construção do conhecimento do estudante acerca deste objeto matemático. Poderíamos discorrer neste momento sobre as propriedades contempladas nos registros de representação semiótica que destacamos no quadro 1, entretanto, nosso maior objetivo é discutir uma questão que parece ser crucial em nosso trabalho: será que o estudante reconhece nos diferentes registros de representação, de acordo com as caracterizações da parábola distinguidas aqui, o mesmo objeto matemático?

Na análise dos livros didáticos, utilizados no Ensino superior, realizada na seção 3.2 desta pesquisa, verificamos que todos eles apresentam a definição da parábola tanto como lugar geométrico quanto como seção de um cone, contemplando diferentes registros de representação. No entanto, as duas caracterizações são discutidas cada qual num capítulo e não são oferecidas ao leitor situações que promovam a articulação dos diferentes registros de representação referentes a estas caracterizações.

Levantamos, então, outra questão: será que somente a presença de distintos registros de representação da parábola como seção do cone e da parábola como lugar geométrico, estudados separadamente, é suficiente para que o estudante reconheça neles o mesmo objeto matemático representado?

Damm (1999) responde esta pergunta colocando que de maneira alguma a coordenação de diferentes registros de representação é espontânea devendo ser estimulada durante as aulas. Coordenar implica em reconhecer em distintos registros de representação o mesmo objeto representado e é condição necessária para a compreensão em matemática (DUVAL, 2003).

Considerando que promover esta coordenação é o principal objetivo desta pesquisa, propomos investigar se o uso de uma seqüência didática que considera não só os registros de representação da parábola, mas uma articulação entre eles, possibilita ao estudante compreender que as duas caracterizações desta cônica, consideradas aqui, dizem respeito à mesma curva.

Recorrendo à História da Matemática (BOYER, 1974; EVES, 1997; KATZ, 1998; KLINE, 1972), identificamos uma possibilidade de promover uma articulação entre os registros de representação da parábola como seção do cone e da parábola como lugar geométrico. A Figura 1 é referente a uma construção, presente em nossa seqüência didática, na qual, no mesmo sistema cartesiano, sugerimos a representação do gráfico da parábola como lugar geométrico e da propriedade fundamental da parábola deduzida por Apolônio, que pode ser vista no segundo capítulo deste trabalho.

Por meio desta construção, esperamos que o estudante reconheça que, na parábola representada como lugar geométrico, a corda que passa pelo foco (parâmetro) é de medida equivalente ao lado EH do retângulo (*latus rectum*) proposto por Apolônio.

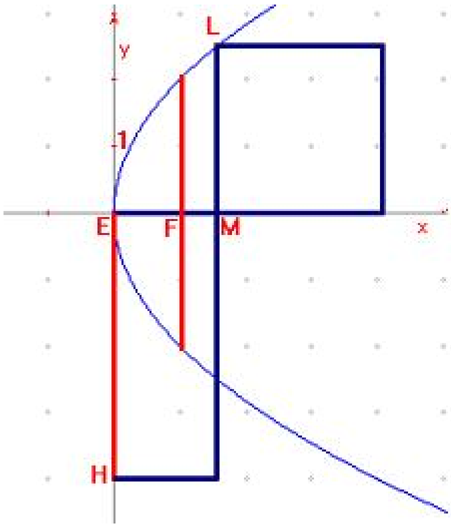


Figura 1 – *Latus rectum* e parâmetro

Analisando os registros de representação $\mathbf{y^2 = 4px}$ (da parábola como lugar geométrico) e $\mathbf{LM^2 = EH \cdot EM}$ (da parábola como seção de um cone), no plano cartesiano, nossa intenção é que o estudante compreenda que para qualquer ponto da parábola representada tanto no plano cartesiano quanto no cone, o quadrado da ordenada desse ponto é igual à área do retângulo formado pela abscissa do mesmo ponto e pelo *latus rectum* que tem medida igual à do parâmetro[7].

Dessa maneira, acreditamos numa possível coordenação de diferentes registros de representação semiótica da parábola, a saber, registros de representação da parábola como seção de um cone e como lugar geométrico.

No próximo capítulo abordaremos uma reconstrução histórica para as Seções Cônicas e buscaremos explicitar o papel da História da Matemática em nesta pesquisa.

[7] Discutiremos esta relação, mais detalhadamente, no próximo capítulo.

CAPÍTULO 2
SEÇÕES CÔNICAS: UMA RECONSTRUÇÃO HISTÓRICA

Os primeiros três séculos da matemática grega, por volta de 600 a.C. a 200 a.C., formam o período clássico e constituem uma época de grande atividade matemática com extraordinárias realizações (KLINE, 1972).

Segundo Kline (1972), foi nesta época que surgiu o mais importante tratado sobre Seções Cônicas. Uma obra composta por oito livros, de Apolônio de Perga (262 – 190 a.C.), que foram as maiores e mais significativas contribuições.

No entanto, Segundo Boyer (1974), as Seções Cônicas eram conhecidas já havia cerca de um século e meio quando surgiu a obra. Foram estudadas por Euclides, Aristeu e também Arquimedes. Mas acredita-se que foram construídas por Menaecmo (séc. IV a.C.) ao tentar resolver o problema da Duplicação do Cubo[8], que consiste em construir um cubo cujo volume fosse o dobro do volume de um cubo dado.

A hipótese que normalmente se faz é que ele teria obtido as Cônicas utilizando três tipos de cone de uma folha, que se diferem pelo ângulo da seção meridiana[9]. No caso de o ângulo ser agudo, um plano que corta a superfície do cone perpendicularmente a uma geratriz, produz uma elipse (Fig. 2a); se o ângulo é reto, a seção é uma parábola (Fig. 2b); e se é um ângulo obtuso, um ramo de hipérbole (Fig. 2c).

Apolônio, no entanto, mostrou sistematicamente que não é necessário tomar seções perpendiculares a um elemento do cone e que apenas variando a inclinação do plano da seção, de um cone, podem ser obtidas as três espécies de seções cônicas. Provou que o cone não precisa ser reto para a obtenção das curvas, mas pode ser também um cone oblíquo ou escaleno. Substituiu o cone de uma só folha por um duplo e foi quem deu os nomes “Elipse” (Fig. 3a), “parábola” (Fig. 3b) e “hipérbole” (Fig. 3c) para essas curvas (KATZ, 1998).

---

[8] Acredita-se que o problema da duplicação do cubo possa ter surgido nas palavras de um poeta grego antigo, ignorante em matemática, ao escrever sobre a insatisfação do rei Minos por conta do tamanho do túmulo erguido para seu filho Glauco. Minos ordenou que o tamanho do túmulo fosse dobrado, o que fez com que o poeta sugerisse a ele que isso fosse feito dobrando-se cada uma das dimensões do túmulo, o que é matematicamente incorreto. Essa falha matemática levou os geômetras a abraçar o problema de como dobrar um dado sólido mantendo-se sua forma. Mais tarde, conta-se ainda que para livrar-se de um peste que os assolava, os delianos foram orientados por seu oráculo a dobrar o tamanho do altar cúbico de Apolo. Por causa desta última história o problema da duplicação do cubo é também conhecido por problema de Delos (EVES, 1997).

[9] A seção meridiana de uma superfície é obtida por sua intersecção com um plano que passa pelo seu eixo de rotação.

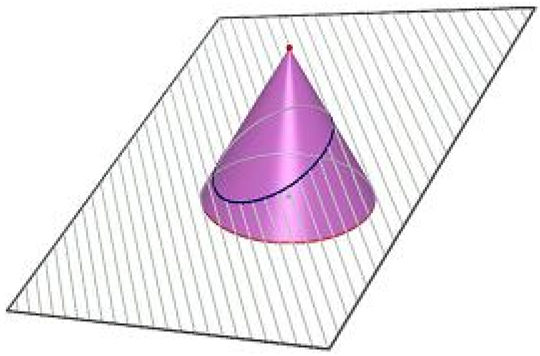


Figura 2a – Elipse

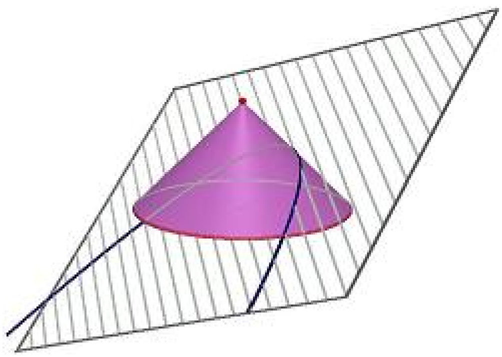


Figura 2b – Parábola

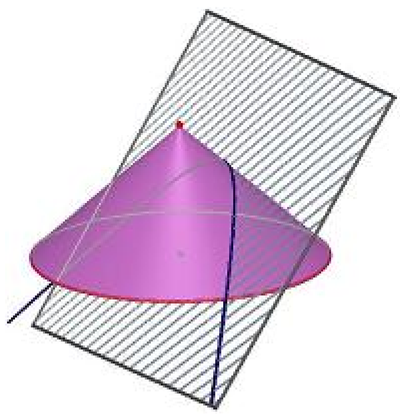


Figura 2c – Hipérbole

Se o plano de intersecção passar ainda pelo vértice do cone, obtém-se uma *cônica degenerada*, que pode ser um ponto, uma reta ou um par de retas concorrentes.

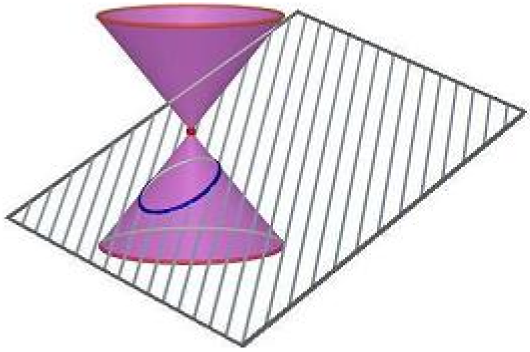


Figura 3a – Elipse

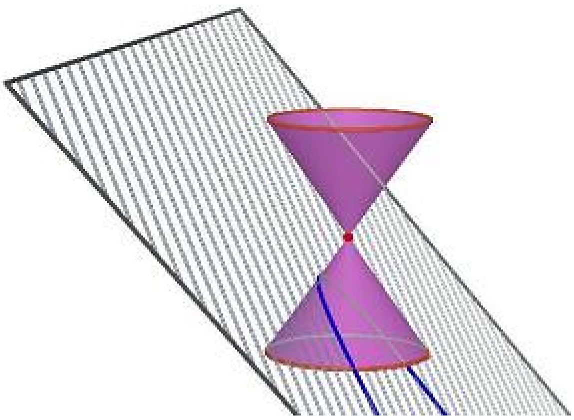


Figura 3b – Parábola

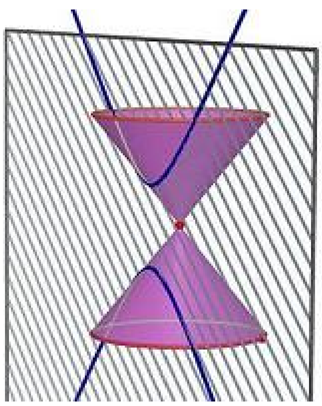


Figura 3c – Hipérbole

Segundo Eves (1992), os nomes dados às Cônicas se devem à relação entre a área do quadrado da ordenada de um ponto da curva (y^2) e a área do retângulo formado pelo *latus rectum* que corresponde ao valor do parâmetro[10] (p) e pela abscissa deste mesmo ponto (x):

- se $y^2 < px$, a cônica é uma Elipse (*ellipsis*, que indica *falta*);
- se $y^2 = px$, a cônica é uma parábola (*parabole*, que significa *comparação*, indicando nem excesso nem deficiência);
- se $y^2 > px$, a cônica é uma hipérbole (*hyperbole*, indicando *excesso*).

Os nomes elipse, parábola e hipérbole foram usados anteriormente pelos pitagóricos por ocasião do método chamado “aplicação de áreas” [11].

Ainda, de acordo com Boyer (1974), para os geômetras gregos, as Seções Cônicas estavam inseridas numa classe de curvas chamada “lugares sólidos” por serem obtidas de seções de uma figura tridimensional. Apolônio também obtinha as Cônicas de um cone no espaço tridimensional, mas logo deduziu do cone uma propriedade plana para as seções e daí por diante continuou seus estudos no espaço bidimensional, dispensando o cone.

A seguir, examinaremos mais atentamente, como Apolônio determinou a parábola obtida a partir de uma seção plana do cone e, de acordo com Katz (1998), como Apolônio deduziu a propriedade fundamental da parábola, chamada também de *symptome* da parábola. É possível descrever este tratamento também para as outras curvas, mas aqui nos deteremos apenas à parábola, como justificamos anteriormente.

Considerando o cone da figura 4, seja o plano que contém os pontos E, M e L paralelo ao plano que contém a geratriz AC, então a intersecção do plano que contém os pontos E, M e L com o cone é uma curva chamada parábola.

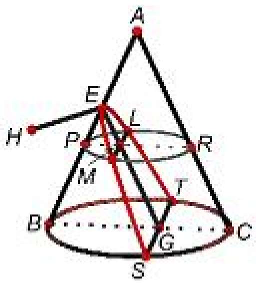


Figura 4 – A Parábola como seção de um cone

[10] O comprimento da corda que passa por um foco da cônica e que é perpendicular ao eixo principal.
[11] Quando os pitagóricos aplicavam um retângulo a um segmento de reta, isto é, colocavam a base do retângulo ao longo do segmento de reta, com um vértice do retângulo sobre uma extremidade do segmento, eles diziam que se tinha um caso de “ellipsis”, “parabole” ou “hyperbole”, conforme a base do retângulo ficava aquém do segmento de reta, coincidia com ele ou o excedia (EVES, 1997).

Para deduzir a *symptome* da parábola, Apolônio começa tomando um ponto arbitrário L na seção (Figura 4), passando por L um plano paralelo à base circular. A seção do cone obtida por esse plano é um círculo com diâmetro PR. Seja M a intersecção deste plano com o segmento EG. Então LM é perpendicular a PR, e, portanto, $LM^2 = PM.\ MR.$[12]

Se EG é paralelo a AC, um lado do triângulo axial[13], Apolônio deriva a *symptome* da parábola, ou seja, a relação entre EM e LM, a abscissa e a ordenada, respectivamente, do ponto L da curva. Para isso, ele desenha EH (*latus rectum*) perpendicular a EM tal que (Figura 5):

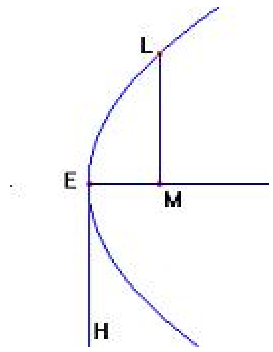


Figura 5 – L*atus rectum*

$$\frac{EH}{EA} = \frac{BC^2}{BA.AC}$$

que é equivalente a: $\frac{EH}{EA} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{BC}{AC}$.

Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{BC}{BA} = \frac{PR}{PA} = \frac{PM}{EP} = \frac{MR}{EA} \text{ e } \frac{BC}{AC} = \frac{PR}{AR} = \frac{PM}{EM}$$

Segue que $\frac{EH}{EA} = \frac{MR \cdot PM}{EA \cdot EM}$.

[12] Adotamos a notação, para a dedução da symptome da parábola, usada pelos autores Boyer, 1974 ; Eves, 1997; Katz, 1998; Kline, 1972; entre outros.
[13] É a região triangular obtida pela intersecção do cone com um plano que contém o eixo do mesmo.

Mas, também: $\dfrac{EH}{EA} = \dfrac{EH}{EA} \cdot \dfrac{EM}{EM}$. Assim, $MR \cdot PM = EH \cdot EM$.

Lembrando que $LM^2 = PM \cdot MR$, logo

$\boxed{LM^2 = EH \cdot EM}$ → *symptome* da parábola

Durante o séc. XVII, as Cônicas passam a ter um novo tratamento matemático dado por Pierre Fermat (1601-1665), um dos precursores da Geometria Analítica. Foi ele quem descreveu as equações mais simples da elipse, parábola e hipérbole. Antes disso, não se dispunha de uma notação algébrica adequada (KLINE 1972).

O tratamento dado por Fermat consiste em definir uma Cônica como lugar geométrico, que é o conjunto de todos os pontos de uma região (plana ou espacial) que satisfazem uma determinada propriedade.

Veremos agora, na notação atual, como são definidas as curvas elipse, hipérbole e parábola em termos de lugar geométrico (DANTE, 2003).

Elipse: é o lugar geométrico dos pontos de um plano tal que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos, denominados F_1 e F_2, seja constante, igual a 2a e maior que a distância entre os focos (2a > 2c).

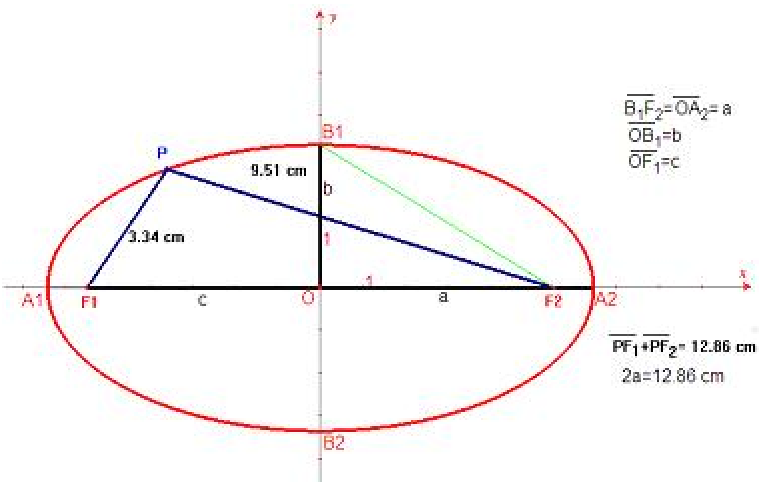


Figura 6 – A Elipse como lugar geométrico

Parábola: é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta fixa **d**, chamada *diretriz*, e de um ponto fixo **F**, não pertencente à diretriz, chamado *foco*. À distância do *vértice* ao *foco* chamamos p.

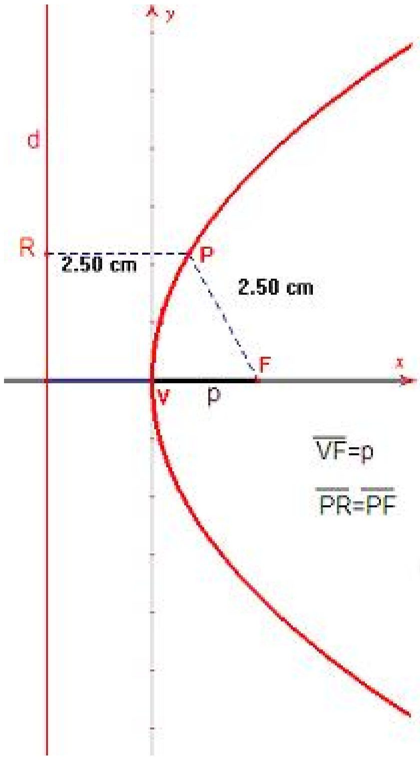


Figura 7 – A Parábola como lugar geométrico

Hipérbole: é o lugar geométrico dos pontos de um plano tal que a diferença (em módulo) de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante (2a < 2c), com $F_1 F_2$ = 2c.

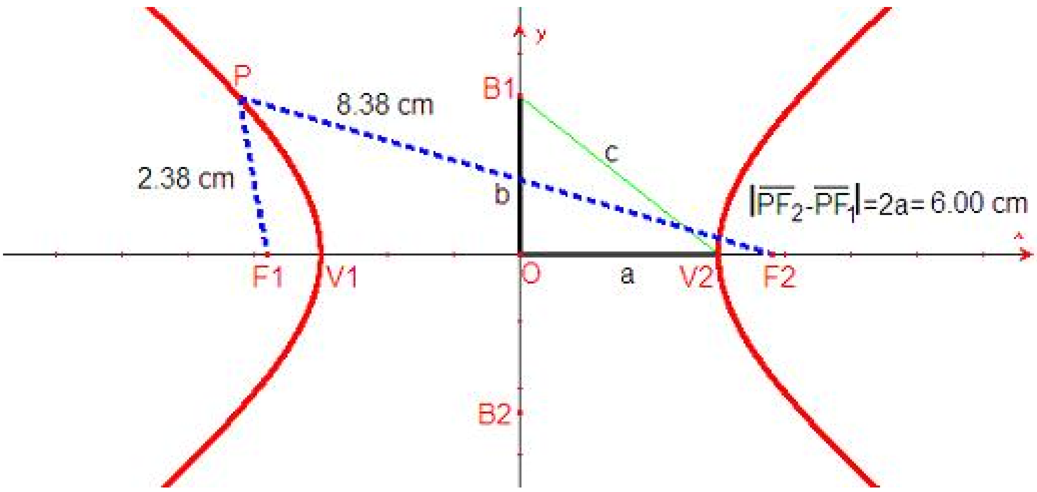


Figura 8 – A Hipérbole como lugar geométrico

Detendo-nos novamente à parábola, veremos como deduzir uma equação para esta curva levando em consideração essa sua nova definição, mostrando que ela é coerente com a *symptome* da parábola desenvolvida por Apolônio.

Para deduzirmos a equação, considere o sistema de coordenadas, conforme a figura a seguir, L (x, y) um ponto da curva e F (p, 0) o foco.

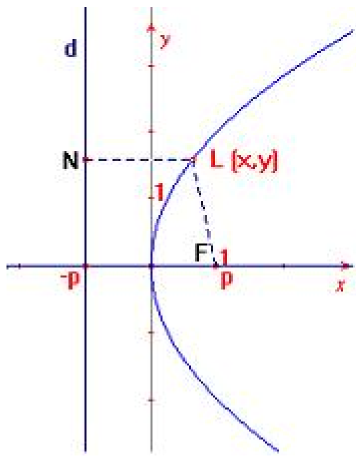


Figura 9 – Propriedade foco-diretriz

Pela definição da parábola como lugar geométrico, $\overline{LN} = \overline{LF}$, portanto:

$$p + x = \sqrt{(x-p)^2 + y^2} \Rightarrow y^2 = 4px$$

Considere também a parábola representada na figura, segundo o trabalho de Apolônio:

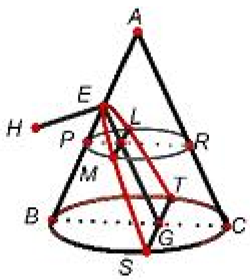


Figura 10 – A Parábola e o *latus rectum*

Veja agora uma parábola e seu foco F representados no sistema cartesiano a seguir. O comprimento da corda que passa pelo foco e é perpendicular ao eixo da curva é o parâmetro 4p. Introduzindo neste sistema os pontos L, M, E e H da Figura 10, temos $LM = y$ e $EM = x$. Sabendo que $LM^2 = EH \cdot EM$ (*symptome*), teremos $y^2 = EH \cdot x$. Mas $y^2 = 4px$, logo $4p = EH$. Isto significa que o valor 4p do parâmetro da parábola definida como lugar geométrico corresponde ao *latus rectum* da parábola definida como seção do cone.

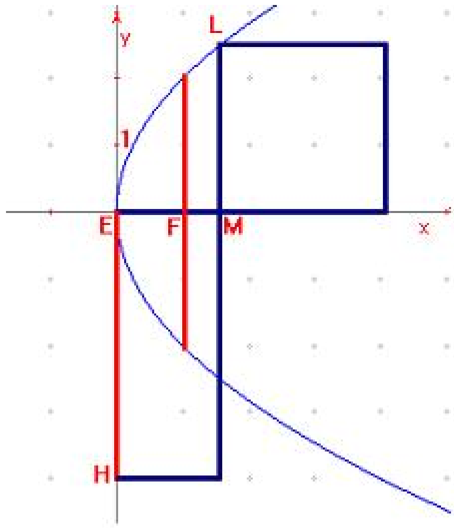


Figura 11 – Articulação entre registros de representação

Como queríamos demonstrar, $y^2 = 4px$ é coerente com a *symptome* $LM^2 = EH \cdot EM$, ou seja, ambas representam a mesma curva.

Sendo assim, tanto numa definição quanto na outra, para qualquer ponto da parábola representada no plano cartesiano ou no cone, o quadrado da ordenada desse ponto é igual à área do retângulo formado pela abscissa do mesmo ponto e pelo valor do parâmetro ou do *latus rectum* da curva.

As cônicas de Apolônio constituem um trabalho amplo e extraordinário, mesmo não sendo possível encontrar alguns elementos fundamentais estudados atualmente como os focos, a excentricidade e a reta-diretriz (BOYER, 1974). No entanto, é possível determinar, geometricamente, os focos de uma cônica no cone. Este trabalho foi desenvolvido em 1822, pelo matemático belga G. P. Dandelin (1794 – 1847), mas não será discutido aqui.

Ainda, de acordo com Kline (1972), podemos destacar os estudos, envolvendo as Seções Cônicas, de Johann Kepler (1517-1630), Grégoire de Saint Vicent (1584- 1667), Desargues (1591-1661), Descartes (1596 - 1650), Blaise Pascal (1623 -1662), John Wallis (1616 - 1703), Jan de Witt (1629 – 1672), Newton (1643 - 1727), durante o século XVII; os estudos de Euler (1707 - 1783) durante o século XVIII; no século XIX, o trabalho de Dandelin (1794 - 1847), entre outros, os quais comprovam a grande contribuição da criação destas curvas para o desenvolvimento não só da Matemática, mas também da Ciência.

Nossa intenção até aqui foi mostrar como se deu, historicamente, a construção do conceito de Cônicas, mais detalhadamente, da parábola. Mostrar que, mesmo geradas de maneira bem diferentes, tanto a parábola como seção do cone quanto a parábola como lugar geométrico, dizem respeito ao mesmo objeto matemático.

2.1 SOBRE O PAPEL DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NESTE ESTUDO

Centros acadêmicos de todo mundo têm o ensino da matemática como uma preocupação básica, sendo este, objeto de estudo em trabalhos e pesquisas em Educação Matemática. Grande parte destes estudos sugere diferentes estratégias que podem ser incorporadas à prática do professor com vistas a garantir uma melhoria na qualidade do referido ensino (MENDES, 2001).

Dentre estas estratégias, optamos pelo uso didático da História da Matemática em nossa pesquisa, o qual vem ganhando lugar nas aulas de matemática em qualquer que seja o nível.

Vianna (1995), numa discussão sobre a utilização didática da História da Matemática, confirma que o interesse por este tema pela comunidade acadêmica vem crescendo, porém há prós e contras em relação a esta utilização da História.

Algumas objeções ao uso didático da História da Matemática, levantadas por diversos autores, são listadas por Vianna (1995), como:

> - o passado da matemática não é significativo para a compreensão da matemática atual;
> - não há literatura para o uso dos professores de Ensino Fundamental e Médio;
> - ou poucos textos existentes destacam os resultados mas nada revelam sobre a forma como se chegou a esses resultados;
> - o caminho histórico é mais árduo para os estudantes que o caminho lógico e;
> - o tempo despendido no estudo da História da Matemática deveria ser utilizado pra aprender mais matemática (VIANNA, 1995, p.15).

Além dos contras, Vianna (1995) também discute a respeito dos prós no uso didático da História da Matemática colocando uma lista das funções pedagógicas atribuídas à História da Matemática por diversos autores, elaboradas por Miguel (1993). As principais funções que os textos revelaram vêem na história:

> 1) uma fonte de motivação para o ensino-aprendizagem (História-Motivação);
> 2) uma fonte de seleção de objetivos para o ensino-aprendizagem (História-Objetivo);
> 3) uma fonte de métodos adequados para o ensino-aprendizagem (História-Método);
> 4) uma fonte para a seleção de problemas práticos, curiosos ou recreativos a serem incorporados de maneira episódica nas aulas de matemática (História-Recreação);
> 5) um instrumento que possibilita a desmistificação da matemática e a desalienação do seu ensino (História-Desmistificação);
> 6) um instrumento na formalização de conceitos matemáticos (História-Formalização);
> 7) um instrumento na construção de um pensamento independente e crítico (História-Dialética);
> 8) um instrumento unificador dos vários campos da matemática (História-Unificação);
> 9) um instrumento promotor de atitudes e valores (História-Axiologia);
> 10) um instrumento de conscientização epistemológica (História-Conscientização);
> 11) um instrumento de promoção da aprendizagem significativa e compreensiva (História-Significação);
> 12) um instrumento de resgate da identidade cultural (História-Cultura);
> 13) um instrumento revelador da natureza da matemática (História-Epistemologia). (MIGUEL, 1993, p.106-107).

Observando os prós e os contras do uso didático da História da Matemática, optamos por utilizá-la dessa forma, pois acreditamos que seja importante para a formação dos professores em nossa pesquisa.

Brito (2007), coloca que por meio de sua prática docente e de diversos trabalhos sobre a História da Matemática na formação de professores (BRITO, 1995; MIGUEL; BRITO, 1996; BRITO; MIORIM, 1999) que desenvolveu, tem observado que se faz necessária a organização de um projeto pedagógico no qual a História da Matemática esteja presente, não como disciplina isolada, mas articulada dentro das próprias disciplinas do conteúdo.

A mesma autora ainda coloca que a utilização didática da História da Matemática na formação de professores "colabora no aprofundamento de conceitos e procedimentos matemáticos, pois impõe um outro/novo olhar sobre tais conceitos e procedimentos, olhar este necessário para a compreensão da matemática dos antigos" (BRITO, 2007, p.15). Além disso, "contribui para articular teorias educacionais, uma vez que colabora na reflexão sobre aspectos curriculares e metodológicos presentes no ensino atual de matemática" (BRITO, 2007, p.15).

Considerando, então, o uso didático da História da Matemática neste trabalho, queremos explicar também de que forma isto nos auxiliou no estudo da parábola, curva que abordamos nesta pesquisa.

Instigadas por um artigo de Teukolsky (1994), no qual a autora diz ter como objetivo provocar os estudantes com a seguinte questão: "como é possível que curvas geradas de maneiras tão diferentes possam levar às mesmas seções cônicas?" (TEUKOLSKY, 1994, p.192), fomos buscar na literatura uma resposta.

Por meio da reconstrução histórica das seções cônicas, presente neste capítulo, vimos que, apesar da abordagem de Apolônio com respeito a estas curvas, ser inicialmente tridimensional, ele as estudou como figuras planas, deduzindo para cada uma delas uma propriedade. Vimos também que é possível mostrar que as propriedades deduzidas por Apolônio a partir do cone, para cada uma das Cônicas, são equivalentes às equações que temos hoje para estas curvas caracterizadas como lugar geométrico.

Ao tomar como referencial a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a Teoria das Situações Didáticas, elaboramos uma seqüência didática contemplando diferentes registros de representação da parábola, definida como seção de um cone e como lugar geométrico, encontrando na História da Matemática uma possibilidade de articular estes registros de representação. Esta se tornou para nós, uma forte aliada no ensino, pois utilizando a História podemos mostrar não só diferentes registros de representação semiótica da parábola, mas possibilitar ao estudante a compreensão de que representam o mesmo objeto matemático.

No próximo Capítulo trataremos de aspectos metodológicos desta pesquisa, abordando a Metodologia propriamente dita, as Análises Preliminares e a construção da Seqüência Didática.

CAPÍTULO 3
ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo abordaremos a Engenharia Didática, como metodologia, as análises preliminares e explicaremos como se deu a construção da seqüência didática.

3.1 METODOLOGIA: ENGENHARIA DIDÁTICA

A Metodologia utilizada nesta pesquisa é a Engenharia Didática proposta por Artigue (1996), desenvolvida na escola francesa de Didática da Matemática. Tal metodologia possibilita investigar aspectos dos processos de aprendizagem de matemática, interessando-se pela concepção, realização, observação e análise de seqüências de ensino. Caracteriza-se ainda pela forma de validação que consiste no confronto entre a análise *a priori*, que se apóia no referencial teórico, e a análise *a posteriori* baseada nos resultados de experimentação. Segundo Machado (1999), "torna-se importante ressaltar que a singularidade da engenharia didática não repousa sobre seus objetivos, mas sobre suas características de funcionamento metodológico" (MACHADO, 1999, p.200).

A investigação se desenvolveu de acordo com as quatro fases da Engenharia Didática caracterizadas por Artigue (1996):

- Análise Preliminar

Nesta fase busca-se analisar as possíveis causas do problema a ser pesquisado, bem como subsídios para o tratamento desse problema, com vistas a embasar a concepção da engenharia didática. As análises são feitas levando-se em consideração o quadro teórico sobre o qual o pesquisador se apóia e os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o tema em estudo. Além disso, dependendo do objetivo da pesquisa, pode constar análise epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino, análise do ensino atual e seus efeitos, análise da concepção dos estudantes, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução.

- Concepção e Análise *a priori*

Tomando como base as análises preliminares e o referencial teórico, é nesta fase que o pesquisador elabora a seqüência didática que será aplicada, além de decidir agir sobre um determinado número de variáveis relacionadas ao problema estudado. São previstas as ações e comportamentos dos estudantes durante a experimentação, indicando de que modo as atividades propostas propiciarão a aprendizagem desejada. Já nesta fase, fundamentada em hipóteses, estabelece-se o processo de validação que ocorre na confrontação entre as análises *a priori* e *a posteriori.*

- Experimentação

É nesta fase que se dá o contato pesquisador/professor/observadores com a população de estudantes, sujeitos da pesquisa, e são explicitados os objetivos e condições em que se realizará a investigação (MACHADO, 1999). Neste momento ocorre a aplicação da seqüência didática, esta, segundo Pais (2002), "formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem..." (PAIS, 2002, p.102). Ainda de acordo com este autor, essas aulas também podem ser chamadas *sessões*, por serem específicas para pesquisa. Nesta fase, há de se escolher também os meios de registros dos dados colhidos na experimentação, que vai depender das variáveis priorizadas na análise *a priori*. Os dados podem ser coletados mediante observações feitas nas sessões de ensino e pelas produções dos estudantes, com a utilização de gravações de áudio e vídeo e anotações do diário de campo. Além disso, para uma melhor compreensão do ocorrido, estes dados podem se completados com o uso de questionários, entrevistas e testes, individuais ou em pequenos grupos, realizados durante a experimentação ou no final dela.

- Análise *a posteriori* e Validação

Na fase da análise *a posteriori* acontece o tratamento dos dados obtidos durante a experimentação, por meio da análise da produção dos estudantes e de tudo o quanto se pode registrar. Há o confronto da análise *a priori* e da análise *a posteriori*, com o intuito de validar ou refutar as hipóteses levantadas na análise *a priori*. O processo de validação é interno, permanecendo no âmbito da experiência realizada (PAIS, 2002).

3.2 SOBRE AS ANÁLISES PRELIMINARES

As análises preliminares constituem-se na primeira fase da Engenharia Didática como explicitamos na seção anterior.

Ainda no início deste estudo, levantamos as seguintes questões: o tema Cônicas é abordado no ensino superior de forma que o futuro professor construa os conceitos, caracterize as Cônicas como seção do cone e como lugar geométrico, estabeleça relações entre as definições e tenha autonomia para traçar estratégias de ensino ao lecionar?

À procura por respostas a estas questões decidimos verificar nas ementas das disciplinas dos cursos de licenciatura em Matemática das universidades estaduais do estado do Paraná, em que série ou séries as Cônicas são trabalhadas e, por meio da análise de livros-textos, verificar também quais Cônicas são estudadas, que caracterizações são apresentadas, ou seja, como se dá o ensino deste tema na formação de professores.

Escolhemos as universidades estaduais pela facilidade no acesso a dados para esta pesquisa e livros-textos presentes nas bibliografias dos programas das disciplinas que abordam o tema Cônicas, ministradas nas licenciaturas em Matemática destas universidades, com exceção de Venturi (1994). Este foi escolhido por abordar especificamente o tema Cônicas.

Olhamos as ementas das disciplinas dos cursos de licenciatura em Matemática das seguintes instituições: Universidade Estadual de Londrina (UEL), Universidade Estadual de Maringá (UEM), Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE), Universidade Estadual do Centro-Oeste (UNICENTRO) e constatamos o seguinte:

- na UEL, este tema é estudado somente na *1ª série*, em apenas uma disciplina: "*Geometria Analítica e Álgebra Linear*";
- na UEM, as cônicas são abordadas também somente na *1ª série* em apenas uma disciplina: "*Geometria Analítica*";
- as curvas cônicas são estudadas, na UEPG, em duas séries do curso: na *1ª série* nas disciplinas de *"Geometria Analítica"* e *"Geometria Plana e Desenho Geométrico",* e na 2ª série, na disciplina de *"Álgebra Linear";*

- na UNIOESTE, Campus de CASCAVEL, as cônicas são trabalhadas na *1ª série*, nas disciplinas de: *"Geometria Analítica e Vetorial"* e *"Desenho Geométrico",* e na *2ª série*, na disciplina de *"Geometria Euclidiana II"*;
- na UNIOESTE, Campus de FOZ DO IGUAÇU, as cônicas são trabalhadas na *1ª série*, nas disciplinas de: *"Geometria Analítica"* e *"Geometria Euclidiana"*, e na *2ª série*, na disciplina de *"Desenho Geométrico"*;
- por fim, na UNICENTRO, tanto no Campus SANTA CRUZ quanto no Campus IRATI, o tema Cônicas é abordado apenas na 1ª série em duas disciplinas: *"Desenho Geométrico e Noções de Geometria Descritiva"* e *"Vetores e Geometria Analítica".*

Frente a esta análise, verificamos que as cônicas são estudadas, geralmente, somente na 1ª série ou, nesta e também na 2ª série. Este fato nos motivou a tomarmos estudantes da 3ª série da licenciatura como sujeitos de pesquisa, pois gostaríamos de trabalhar com estudantes que já tivessem estudado as cônicas. Dessa forma, poderíamos investigar se eles conheciam, matematicamente, que as diferentes caracterizações, em particular, da parábola, que já haviam estudado, diziam respeito ao mesmo objeto matemático.

Quanto aos livros-textos, numa primeira análise, notamos logo que as Cônicas como seção de um cone e como lugar geométrico são sim abordadas, porém, em momentos distintos, sem o estabelecimento de alguma relação entre as caracterizações, a não ser, a nomenclatura das curvas. Isso foi suficiente para que propuséssemos esta pesquisa, contemplando numa seqüência didática, das três curvas, a parábola, caracterizando-a como seção de um cone e como lugar geométrico, além de mostrar, matematicamente, que as duas caracterizações referem-se ao mesmo objeto matemático.

Em seguida, já definidas nossas bases teóricas, estabelecemos algumas categorias - que estão organizadas no Quadro 2 - sob a ótica desses referenciais, com o intuito de realizar uma análise mais cuidadosa dos livros-textos escolhidos. Tais categorias foram estabelecidas com base nos aspectos relacionados à parábola que abordaríamos em nossa seqüência didática.

As categorias *Definição da parábola como lugar geométrico* e *Definição da parábola como seção de um cone*, foram colocadas para que verificássemos se os livros contemplavam registros de representação referentes a estas duas caracterizações, que poderiam ser registros de representação gráficos, algébricos, geométricos ou em língua natural.

Por meio da categoria *Traçado manual com régua e compasso* verificaríamos se os livros abordavam ou não, especificamente, o registro de representação geométrico da parábola definida como lugar geométrico.

A categoria *Estudo de equações cartesianas da parábola* foi elaborada para que constatássemos ou não, a presença de registros de representação algébricos e gráficos da curva.

Referência à curva como lugar geométrico é uma categoria, por meio da qual pretendíamos averiguar se nos livros a parábola é chamada de "lugar geométrico" ou apenas de "um conjunto de pontos".

A categoria *Dedução da propriedade fundamental da parábola* foi posta para que identificássemos se constava, nos livros, algum registro de representação da propriedade fundamental da parábola.

Por meio da categoria *Mostra que as duas definições da parábola dizem respeito ao mesmo objeto matemático* verificaríamos se os livros mostram matematicamente que as duas definições são referentes ao mesmo objeto matemático.

Por fim, a categoria *Presença da história das Cônicas* foi estabelecida para que olhássemos o quanto da história das Cônicas apareceriam nos livros e se estes apresentavam o uso didático da História da Matemática para mostrar que as duas caracterizações da parábola, distinguidas aqui, representam o mesmo objeto matemático.

Escolhemos para análise os seguintes livros:

1. BOULOS, P.; CAMARGO, I. **Geometria analítica**: um tratamento vetorial. 3ª ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

2. LEITHOLD, L. **O cálculo com Geometria analítica**. v. 1. São Paulo: Harbra, 1986.

3. STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria analítica.** 2ª ed. São Paulo: McGrawHill, 1987.

4. VENTURI, J. J. **Cônicas e Quádricas**. Curitiba: Artes Gráficas e Ed. Unificado, 1994.

O quadro 2, a seguir, mostra na primeira linha, os livros analisados e, na primeira coluna, quais aspectos relacionados à parábola eles contemplam ou não.

	BOULOS	LEITHOLD	STEINBRUCH	VENTURI
Presença da história das Cônicas	**sim**	**sim**	não	**sim**
Traçado manual com régua e compasso	**sim**	não	não	**sim**
Definição da parábola como lugar geométrico	**sim**	**sim**	**sim**	**sim**
Referência à curva como lugar geométrico	**sim**	não	**sim**	**sim**
Estudo de equações cartesianas da parábola	**sim**	**sim**	**sim**	**sim**
Definição da parábola como seção de um cone	**sim**	**sim**	**sim**	**sim**
Dedução da propriedade fundamental da parábola	não	não	não	não
Mostra que as duas definições da parábola dizem respeito ao mesmo objeto matemático	não	não	não	não

Quadro 2 – Análise de livros-textos

Apesar do quadro 2 explicitar que aspectos da parábola os livros contemplam ou não, algumas considerações são pertinentes.

Notamos que todos eles mostram registros de representação da parábola como lugar geométrico e como seção de um cone, mais especificamente, registros de representação algébricos, gráficos e em língua natural da parábola como lugar geométrico e registros de representação geométricos e em língua natural da parábola como seção de um cone. Também identificamos a presença da História da Matemática em todos, com exceção do Steinbruch (1987), mas em nenhum deles o uso didático da História da Matemática. Na definição da parábola como lugar geométrico apresentada nos livros, somente Leithold (1986) não se refere a esta curva como “lugar geométrico” e sim como a “um conjunto de pontos”. Apenas Venturi (1994) apresenta o traçado manual da parábola com régua e compasso, e Boulos (2005) exibe os procedimentos para a construção da elipse e da hipérbole, sugerindo ao estudante que escreva os procedimentos para a construção da parábola com instrumentos de desenho. Somente Boulos (2005) comenta que as cônicas definidas como lugar geométrico são equivalentes às cônicas como seção de um cone, acrescentando que uma prova para isso foi descoberta por Dandelin (1794 – 1847). Boulos (2005) também fala da origem dos nomes das cônicas, mas não se refere ao *latus rectum* e nem ao parâmetro, nesta ocasião. Observamos que nenhum deles deduz a propriedade fundamental da parábola a partir do cone, e, portanto, não apresentam os registros de representação algébrico e gráfico da parábola como seção de um cone.

De modo geral, como já esperávamos, verificamos que os livros-textos analisados tratam as cônicas como seção de um cone e as cônicas como lugar geométrico, em capítulos distintos, ou seja, separadamente, não estabelecendo nenhuma relação entre elas, a não ser a mesma nomenclatura. Somente Boulos (2005) comenta, timidamente, que se trata da mesma curva. Vemos então que a literatura analisada não garante que, por meio dela, o estudante identificará, matematicamente, que as duas caracterizações referem-se à mesma curva. Pressupondo que nos cursos de formação de professores as cônicas são trabalhadas tal qual a literatura sugere, acreditamos que sozinho o estudante não compreende que as diferentes caracterizações de uma mesma cônica, dizem respeito á mesma curva, necessitando de alguma intervenção para que este conhecimento seja construído. Segundo Bongiovanni (2001),

> [...] a apropriação de um conceito amplo como o de cônicas envolve uma rede complexa de relações, baseadas ao mesmo tempo, sobre a apropriação de suas diferentes representações em vários meios de expressão e sobre a construção da conexão entre suas diferentes representações. (BONGIOVANNI, 2001, p.13, tradução nossa).

Também, de acordo com Damm (1999) a coordenação diferentes registros de representação semiótica pelo estudante não é espontânea, mas deve ser estimulada durante as aulas. Coordenar significa reconhecer em distintos registros de representação, o mesmo objeto matemático (DUVAL, 2003).

Dessa forma, sugerimos o uso didático da História da Matemática para oportunizar tal coordenação da seguinte maneira: deduz-se a equação da parábola como lugar geométrico e a propriedade fundamental da parábola como seção de um cone (deduzida por Apolônio[14]), e mostra-se, matematicamente, que estes dois registros de representação algébricos são equivalentes, ou seja, representam o mesmo objeto matemático.

Considerando as análises realizadas nesta seção, partimos da hipótese de que o estudante não percebe nas diferentes caracterizações da parábola, abordadas aqui, o mesmo objeto matemático para formularmos o problema de nossa pesquisa. Nosso objetivo era investigar se o desenvolvimento de uma seqüência didática, que considera o tratamento, a

---

[14] Veja dedução da propriedade fundamental da parábola no Capítulo 2 deste trabalho.

conversão e a coordenação de diferentes registros de representação semiótica da parábola, com o uso didático da História da Matemática, possibilita ao estudante compreender que a parábola caracterizada como seção de um cone ou como lugar geométrico representa o mesmo objeto matemático.

Acreditamos que as análises, discutidas nesta seção, foram essenciais para que esta pesquisa fosse proposta. Além da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e do uso didático da História da Matemática, nos fundamentamos na Teoria das Situações Didáticas.

Discorreremos, a seguir, sobre a construção de nossa seqüência didática.

3.3 CONSTRUÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA[15]

As questões que compõe a seqüência didática dizem respeito ao conceito de parábola, mais especificamente, às caracterizações desta curva como seção de um cone e como lugar geométrico. Nosso objetivo era que o estudante reconhecesse a parábola nos diferentes registros de representação, referentes a estas caracterizações. Para isso, elaboramos questões que permitiram a utilização desses registros de representação e utilizamos a História da Matemática com o intuito de promover a articulação entre eles.

Mesmo tendo como sujeitos de pesquisa indivíduos que já haviam estudado as cônicas, em especial a parábola, decidimos trabalhar com a definição desta como seção de um cone e como lugar geométrico, além de propor o tratamento analítico considerando a curva com vértice na origem do sistema cartesiano. Com isso, pretendíamos constatar se eles realmente tinham construído o conhecimento acerca destas duas caracterizações da parábola. Caso não o tivessem, ofereceríamos a eles a oportunidade de fazê-lo para que pudéssemos verificar se o uso dessa seqüência didática possibilitaria ao estudante compreender que as duas caracterizações abordadas referem-se ao mesmo objeto matemático. Propomos o tratamento analítico para que o estudante observasse que a equação da curva, caracterizada como lugar geométrico é equivalente à propriedade fundamental da curva caracterizada como seção de um cone, tratando-se, portanto, do mesmo objeto matemático.

[15] Referimos-nos, aqui, à concepção da seqüência, de acordo com a Engenharia Didática.

Após a aplicação da seqüência didática, esperávamos que os estudantes fossem capazes de:

- caracterizar a parábola como seção de um cone;
- caracterizar a parábola como lugar geométrico;
- realizar os tratamentos e conversões envolvidas no estudo analítico da parábola, considerando a curva com vértice na origem do sistema cartesiano;
- realizar a coordenação entre os registros de representação da parábola, especificamente, os registros de representação da parábola como seção de um cone e como lugar geométrico,
- relacionar *latus rectum* e parâmetro.

Fundamentamo-nos, para a construção de nossa seqüência didática, na Teoria das Situações Didáticas, por considerarmos relevante para a aprendizagem a relação entre o professor, o estudante e o meio, proposta nesta teoria. Na Teoria dos Registros de Representação Semiótica[16] encontramos apoio para trabalhar com as diferentes caracterizações da parábola e justificar a importância de se reconhecer em diferentes registros de representação o mesmo objeto matemático. Além disso, vimos nesta teoria, que a articulação entre esses diferentes registros de representação não é espontânea, por isso, sugerimos uma interlocução com a História da Matemática para que esta articulação fosse estabelecida.

Apresentaremos no Capítulo seguinte, o desenvolvimento de nossa pesquisa, no qual constam a experimentação, a análise a priori, a análise a posteriori e validação e também uma análise global.

[16] Teorias discutidas no Capítulo 1 deste trabalho.

CAPÍTULO 4
DESENVOLVIMENTO DO ESTUDO

Apresentaremos a seguir o desenvolvimento do estudo, ou seja, como ocorreu a experimentação, as análises a priori, as análises a posteriori e a validação, além de uma análise global.

4.1 A EXPERIMENTAÇÃO

A experimentação ocorreu no 2º semestre de 2008, numa turma de 19 estudantes da 3ª série do Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura (noturno), da Universidade Estadual de Londrina, durante aulas da disciplina Tópicos de Educação Matemática II, ministrada pela professora orientadora desta pesquisa.

Decidimos que a experimentação aconteceria nesta turma por dois motivos. Primeiro, porque gostaríamos que a seqüência fosse aplicada a estudantes que já tivessem estudado cônicas, como justificamos na seção 3.2 e, segundo, pelo acesso aos estudantes intermediado pela professora orientadora deste trabalho.

Antes, porém, de iniciarmos a aplicação da seqüência esclarecemos aos estudantes que se tratava de uma pesquisa e que ao participarem suas identidades seriam preservadas. Solicitamos, a cada um, que lesse e assinasse um Termo de Consentimento[17] para que pudéssemos usar todo o material produzido por eles durante o desenvolvimento da seqüência didática.

Dos 19 estudantes, 16 resolveram as questões de pelo menos alguma parte da seqüência didática, mas apenas 8 concluíram a resolução de todas as questões propostas. Isso ocorreu porque nos três encontros nos quais desenvolvemos a seqüência didática, alguns estudantes faltaram em um ou mais deles, o que consideramos normal. Contudo, em um dos encontros tivemos problemas com a falta de energia elétrica por conta do mau tempo, impossibilitando alguns estudantes de comparecerem.

[17] Presente no Anexo A.

Ainda, desses 8 estudantes, 5 participaram no horário normal das aulas e os demais foram atendidos conforme a disponibilidade de cada um. Os 3 estudantes que participaram fora do horário das aulas levaram em média, para a resolução de cada questão, o mesmo tempo que os estudantes que resolveram em sala.

As questões da seqüência didática resolvidas por esses 8 estudantes, foram, então, separadas para análise.

A aplicação da seqüência didática foi dividida em duas etapas.

Parte I

A primeira parte da seqüência didática, constituída de 9 questões, foi aplicada durante 10 aulas: um encontro com 2 aulas e dois encontros com 4 aulas cada. As questões ficaram assim distribuídas:

- 1º encontro – questão 1;
- 2º encontro – questões 2, 3, 4 e 5;
- 3º encontro – questões 6, 7, 8 e 9.

A cada encontro disponibilizamos o material preparado com as questões da seqüência didática, que foram resolvidas pelos estudantes e devolvidas ao final do mesmo. Além disso, durante os encontros anotamos qualquer fato ocorrido, em relação ao desenvolvimento do trabalho, que nos chamasse atenção.

A princípio, pedimos aos estudantes que se organizassem em duplas, mas já no segundo encontro alguns estudantes faltaram e as duplas se desfizeram. Por este motivo, decidimos deixar os estudantes à vontade que, naturalmente se organizaram em duplas, trios ou grupos maiores, o que promoveu interação entre eles. Nesta primeira etapa, procuramos interferir o menos possível durante a resolução das questões, mas auxiliávamos os estudantes sempre que necessário.

Além da seqüência didática, utilizamos em alguns momentos outros materiais impressos[18]. Descreveremos a seguir como foram as situações de institucionalização, conforme caracterizamos na seção 1.1 deste trabalho, e em que ocasião usamos material impresso.

[18] Materiais disponíveis no Apêndice B, deste trabalho.

Após a resolução da questão **1**, numa situação de institucionalização, utilizamos material impresso com a representação geométrica e a definição como lugar geométrico não só da parábola, mas também da elipse e da hipérbole.

Depois da resolução da questão **2**, também houve um momento de institucionalização, quando alguns estudantes colocaram na lousa os registros de representação gráficos e algébricos estudados naquela ocasião.

Antes da resolução da questão **6**, concedemos aos estudantes um resumo impresso a respeito do desenvolvimento histórico das cônicas, sobre o qual tecemos alguns comentários.

A seguir, também com o uso de material impresso, mostramos os cones seccionados, resultando nas cônicas: elipse, parábola e hipérbole.

Uma outra situação de institucionalização aconteceu após a resolução da questão **7**, quando relacionamos o *latus rectum* da *symptome* da parábola com o parâmetro da parábola definida como lugar geométrico.

Ao final da resolução da questão **9**, utilizando novamente material impresso, explicamos aos estudantes que procuramos facilitar a descrição de uma pequena parte do trabalho de Apolônio, relativo à parábola, por meio de termos e símbolos atuais e aproveitamos este momento para colocar também a provável origem dos nomes elipse, parábola e hipérbole dados às cônicas.

Parte II

A segunda parte da seqüência didática, composta por 6 questões, foi aplicada em apenas 1 aula. Os estudantes receberam o material preparado e trabalharam individualmente, sem acesso às anotações anteriores e sem nossa interferência.

Participaram desta segunda parte somente os 8 estudantes que concluíram a resolução da primeira parte da seqüência.

Além das questões da seqüência, neste mesmo encontro, os estudantes responderam a um breve questionário[19] a respeito da participação dos mesmos na pesquisa.

---

[19] Questionário disponível no Apêndice C

4.2 Análise a Priori

Nesta seção, apresentamos as questões tanto da primeira quanto da segunda parte da seqüência didática, seguidas de suas respectivas análises. Procuramos detalhar cada questão explicitando seus objetivos, os conhecimentos necessários à sua resolução, as possíveis estratégias e/ou dificuldades encontradas pelos estudantes e demais comentários. A seqüência didática consta no Apêndice A.

4.2.1 Análises das Questões – Parte I

Questão 1

Construa uma parábola, por meio de traçado manual, conhecidos a Diretriz *d* e o Foco *F* (Extraído de GIONGO, 1975, adaptado).

Procedimentos:

- Por *F* traçar a reta t perpendicular a *d* da seguinte maneira:

  - com centro do compasso em *F* e raio qualquer marcar os pontos B e C em *d*;
  - com centro em B e raio qualquer traçar arcos acima e abaixo de *d*;
  - com centro em C e mesmo raio obter a perpendicular t à reta *d.*

- Chamar A o ponto de intersecção entre *d* e t;
- Marcar o ponto médio O entre A e *F*;
- O é o vértice da parábola;
- Sobre a reta t, a partir de O, na direção de *F*, marcar dois pontos D e D’, quaisquer;
- Por D, traçar a perpendicular r à reta t;
- Por D’, traçar a perpendicular s à reta t;
- Com centro em *F* e raio AD, cortar a perpendicular r em M e M’, que são pontos da parábola;
- Com centro em *F* e raio AD’, cortar a perpendicular s em N e N’, que são pontos da parábola;

- Analogamente, obtêm-se outros pontos da curva que unidos representarão a parábola.

Ao concluir a construção, responda: considerando um ponto qualquer da parábola, que relação há entre a distância deste ponto à *diretriz* e a distância deste mesmo ponto ao *foco*? Por meio de que procedimentos da construção sua resposta pode ser justificada?

Análise a priori

Nesta questão, propomos inicialmente o traçado manual de uma parábola, com auxílio de régua e compasso, conhecidos a diretriz e o foco.

Os procedimentos para o traçado estão registrados em língua natural e o estudante deverá fazer a conversão desse registro de representação para o registro geométrico da parábola.

A seguir são propostas duas perguntas que deverão ser respondidas com base na construção. A primeira diz respeito à relação existente entre um ponto da curva e o foco e entre este mesmo ponto e a diretriz. Na segunda, pedimos ao estudante que justifique sua resposta por meio dos procedimentos da construção.

Para a resolução desta questão é necessário que o estudante tenha os seguintes conhecimentos disponíveis: ponto, ponto de intersecção, ponto médio, reta, reta perpendicular, além de habilidade para manusear régua e compasso.

Nosso objetivo é que ao fazer a conversão do registro de representação em língua natural para o registro de representação geométrico e, ao analisar a construção, o estudante caracterize a parábola como lugar geométrico.

Durante a conversão do registro em língua natural para o registro geométrico, esperamos que algumas dificuldades apareçam por conta da falta de atenção aos procedimentos do desenho. No entanto, corrigindo-se a falha, a construção poderá ser retomada.

Acreditamos que alguns estudantes possam usar a régua para responder à primeira pergunta, mas quando confrontados na segunda pergunta, tentarão encontrar uma justificativa fundamentada na construção, como desejamos.

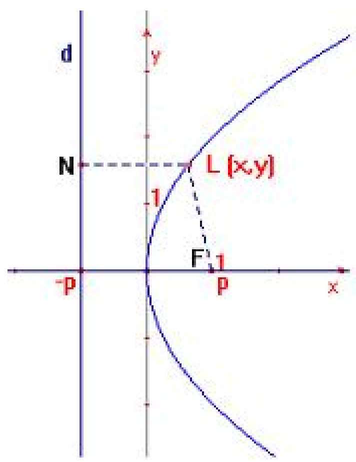
Esperamos que ao usar o compasso para encontrar os pontos que definem a parábola, o estudante perceba que a distância de um determinado ponto da curva à diretriz é equivalente à distância deste mesmo ponto ao foco. Pretendemos que perceba também, que todos os pontos do "desenho" que ele construiu possuem uma mesma propriedade que é usada para definir tal objeto matemático.

Finalizando a questão, numa situação de institucionalização, definiremos primeiramente "lugar geométrico" e caracterizaremos como lugar geométrico, não só a parábola, mas também a elipse e a hipérbole, com o objetivo de classificar também estas curvas como cônicas.

Questão 2

Vamos agora estudar alguns registros de representação da parábola caracterizada como lugar geométrico a partir do plano cartesiano:

a) Seja o sistema de coordenadas, conforme a figura seguinte, L (x, y) um ponto da curva e F (p, 0) o foco. Pela definição da parábola como lugar geométrico, $\overline{LN} = \overline{LF}$. Encontre a equação da parábola em função de x.



b) Esboce o gráfico e, como no item anterior, determine a equação da parábola que tem como diretriz a reta de equação x = p e como foco o ponto F(-p, 0).

c) Compare as equações e seus respectivos gráficos encontrados nos itens **a** e **b** e escreva suas conclusões.

d) Esboce o gráfico e determine a equação da parábola que tem como diretriz a reta de equação y = -p e como foco o ponto F(0, p).

e) Esboce o gráfico e encontre a equação da parábola que tem como diretriz a reta de equação y = p e como foco o ponto F(0, -p).

f) Escreva suas conclusões, depois de comparar as equações e seus respectivos gráficos dos itens **d** e **e**.

Análise a priori

Trabalhamos, nesta questão, com a caracterização da parábola como lugar geométrico, propondo um breve estudo analítico da curva, com o vértice da parábola na origem do sistema cartesiano. Esperamos que os estudantes não encontrem muitas dificuldades ao resolverem esta questão, visto que já estudaram este tema anteriormente e, pela análise do ensino das Cônicas, apresentada na seção 3.2, vemos que a parábola recebe tratamento predominantemente analítico quando abordada.

Para resolver esta questão, o estudante precisa ter os seguintes conhecimentos disponíveis: definição da parábola como lugar geométrico, plano cartesiano, coordenadas de pontos no plano cartesiano, cálculo algébrico da distância entre dois pontos no sistema cartesiano, produtos notáveis, saber resolver equações.

No item **a**, apresentamos o gráfico da parábola no plano cartesiano, contendo um ponto da curva, o foco e a diretriz paralela ao eixo dos y. Nosso objetivo é que o estudante faça a conversão do registro de representação gráfico da parábola para o registro de representação algébrico. Esta questão envolve também tratamentos já que o estudante deverá trabalhar dentro do mesmo registro de representação para chegar à equação reduzida da curva. Acreditamos que a maior parte dos estudantes utilizará apenas o cálculo da distância entre dois pontos para a resolução, porém alguns poderão utilizar também o cálculo da distância entre ponto e reta. Para nós, qualquer uma das duas formas cumpre o propósito.

No item **b**, nosso objetivo é que o estudante converta o registro de representação algébrico da diretriz para registro de representação gráfico e, juntamente com as coordenadas do foco, construa o registro de representação gráfico da parábola. Em seguida, realize a conversão do registro de representação gráfico para o registro de representação algébrico da parábola.

A proposta do item **c** é que o estudante compare os registros de representação gráficos e algébricos dos itens anteriores colocando suas conclusões, que esperamos que sejam as seguintes: estando a equação da parábola em função de x com o vértice na origem, a diretriz é paralela ao eixo y e, portanto, a parábola é simétrica em relação ao eixo x. Além disso, na equação, o parâmetro 4p é positivo quando o foco tem abscissa positiva; e o parâmetro 4p é negativo quando o foco tem abscissa negativa.

Nos itens **d** e **e** repetem-se as propostas e os objetivos do item **b**.

A diferença aparece no item **f** quando ao estudante é pedido que compare os registros de representação gráficos e algébricos dos referidos itens **d** e **e,** além de escrever suas conclusões. Agora, estando a equação da parábola em função de y com o vértice na origem, esperamos que o estudante conclua que a diretriz é paralela ao eixo x e, portanto, a parábola é simétrica em relação ao eixo y. Na equação, o parâmetro 4p é positivo quando o foco tem ordenada positiva; e o parâmetro 4p é negativo quando o foco tem ordenada negativa.

Ao final da resolução desta questão, numa situação de institucionalização, proporemos uma discussão e a sistematização dos registros de representação gráficos e algébricos estudados, levantando a questão do significado do parâmetro 4p da parábola. Estas generalizações serão úteis na resolução das três próximas questões e por conta delas, acreditamos que os estudantes não terão muitas dificuldades.

Questão3

Esboce o gráfico da parábola de equação $y^2 = 4x$. Dê as coordenadas do foco, do vértice e a equação da diretriz.

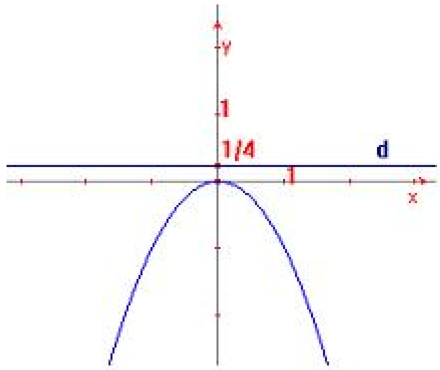
Análise a priori

Continuando o estudo da parábola caracterizada como lugar geométrico, propomos, nesta questão, que o estudante realize a conversão do registro de representação algébrico para o registro de representação gráfico da parábola. A partir do registro de representação algébrico, é necessário que se determinem as coordenadas do foco, do vértice e equação da diretriz para que se faça o registro de representação gráfico pedido.

Na resolução desta questão, é necessário que o estudante disponibilize alguns dos conhecimentos já requeridos na questão **2**, como definição da parábola como lugar geométrico, plano cartesiano, coordenadas de pontos no plano cartesiano, além das generalizações feitas no final da referida questão. Se o estudante, porém, seguir por outro caminho, indagaremos a respeito do significado do parâmetro da parábola, já discutido na questão anterior, pois, a partir deste valor, podemos determinar o foco e representar a parábola graficamente.

Questão 4

Dada a equação da diretriz y = ¼, determine a equação e as coordenadas do foco da parábola representada no gráfico seguinte:



Análise a priori

Ainda considerando a caracterização da parábola como lugar geométrico, nosso intuito agora é que o estudante faça a conversão do registro de representação gráfico para o algébrico. No registro de representação gráfico, além da parábola, é dada a diretriz e seu respectivo registro de representação algébrico.

É preciso que o estudante tenha disponível os conhecimentos citados na questão anterior, além de recorrer às generalizações da questão **2**. Esperamos que o estudante determine o valor de p e, consequentemente, o valor 4p do parâmetro, para então apresentar o registro de representação algébrico da curva.

Questão 5

Escreva a equação da parábola que tem como diretriz a reta de equação y = -2 e como foco o ponto F (0,2). Esboce o gráfico.

Análise a priori

O propósito desta questão, mais uma vez tomando a definição da parábola como lugar geométrico, é que o estudante converta o registro de representação algébrico da diretriz para registro de representação gráfico e, juntamente com as coordenadas do foco, construa o registro de representação gráfico da parábola.

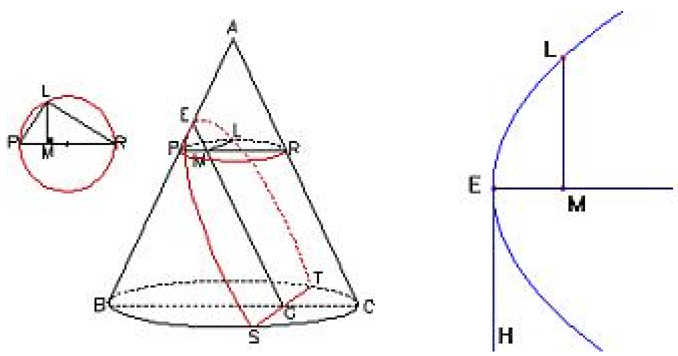
Aqui também esperamos que o estudante tenha disponíveis os conhecimentos utilizados nas duas questões anteriores e use as generalizações da questão **2,** a fim de realizar a conversão do registro de representação gráfico encontrado para o registro de representação algébrico da parábola.

Questão 6

Historicamente, vemos que apesar da abordagem de Apolônio, com respeito às cônicas, ser inicialmente tridimensional, ele estudou estas curvas como figuras planas (BOYER, 1998).

Veremos agora, de acordo com Katz (1998), como Apolônio determinou a propriedade fundamental da parábola, chamada também de *symptome* da parábola.

Ele começa tomando um ponto arbitrário L na seção (veja figura seguinte), passando por L um plano paralelo à base circular. A seção do cone obtida por esse plano é um círculo com diâmetro PR. Seja M a intersecção deste plano com o segmento EG. Então LM é perpendicular a PR, e, portanto, $LM^2 = PM. MR$

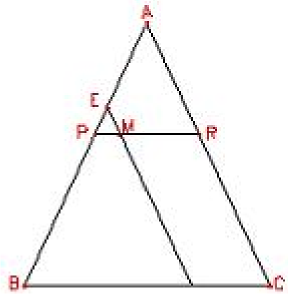


Se EG é paralelo a AC, um lado do triângulo axial[20], Apolônio deriva a *symptome* da parábola, ou seja, a relação entre EM e LM, a abscissa e a ordenada, respectivamente, do ponto L da curva. Para isso, ele desenha EH (*latus rectum*) perpendicular a EM tal que

$$\frac{EH}{EA} = \frac{BC^2}{BA.AC}$$

a) Verifique as igualdades e justifique sua resposta:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{PM}{EM} \text{ e } \frac{BC}{BA} = \frac{MR}{EA}$$



b) Mostre que

$$\frac{EH}{EA} = \frac{MR.PM}{EA.EM}$$

c) Verifique se é válida a igualdade e justifique sua resposta:

$$\frac{EH}{EA} = \frac{EH.EM}{EA.EM}$$

d) Utilizando os itens anteriores e lembrando que $LM^2 = PM.\ MR$, mostre que

$$LM^2 = EH.\ EM$$

[20] É a região triangular obtida pela intersecção do cone com um plano que contém o eixo do mesmo

e) Dê, com suas palavras, uma interpretação geométrica para a propriedade fundamental da parábola $LM^2 = EH . EM$.

Análise a priori

Nesta questão, com o objetivo de trabalhar com a caracterização da parábola como seção de um cone, pretendemos ver como Apolônio, a partir de uma seção do cone, determinou a propriedade fundamental da parábola, chamada também de *symptome* da parábola. Esta propriedade consiste numa relação entre a abscissa e a ordenada, na nomenclatura atual, de um determinado ponto da curva. É nossa intenção que o estudante veja o tratamento que Apolônio deu à curva para relacioná-lo, nas próximas questões, ao tratamento analítico que temos hoje.

Antes, porém, da questão propriamente dita, utilizando material impresso, faremos uma breve exposição oral sobre o desenvolvimento histórico do tema Cônicas além de mostrar os cones seccionados, resultando nas cônicas: elipse, parábola e hipérbole. Dessa forma, os estudantes terão acesso aos registros de representação geométricos e em língua natural destas três cônicas caracterizadas como seção do cone.

Os conhecimentos que os estudantes precisam ter disponíveis para resolver esta questão são: definição da parábola como seção de um cone, noção de paralelismo e perpendicularismo, interseção, círculo, diâmetro, triângulo, abscissa e ordenada, relações métricas no triângulo retângulo, semelhança de triângulos, noções de razão e proporção.

Inicialmente, é dado o registro de representação geométrico da parábola como seção do cone e nomeados os elementos necessários para a dedução da *symptome* da parábola, ou seja, para realização da conversão do registro de representação geométrico para o registro de representação algébrico da parábola, neste caso.

Apolônio deduziu a *symptome* da parábola, utilizando basicamente a semelhança de triângulos. Propomos então, alguns itens nesta questão, para que, como Apolônio, o estudante deduza esta propriedade da parábola. Acreditamos que os estudantes não terão dificuldades com os tratamentos utilizando a semelhança de triângulos.

No último item propomos ao estudante que escreva com suas palavras uma interpretação geométrica da propriedade $\mathbf{LM^2 = EH. EM}$, chamada *symptome* da parábola. Na própria questão o estudante tem condições de saber o que cada termo desta propriedade representa. Temos interesse em verificar se o estudante relacionará $\mathbf{LM^2}$ com a área do quadrado da ordenada de **L** e **EH. EM** com a área do retângulo formado pela abscissa de **L** e pelo *latus rectum* **EH**. Além disso, se observará a equivalência das áreas. Não acreditamos que isso fique claro para a maior parte dos estudantes até aqui, por isso propomos um trabalho com a interpretação geométrica da referida propriedade na próxima questão.

Questão 7

Vamos analisar a propriedade $LM^2 = EH \cdot EM$, deduzida por Apolônio, aplicada à parábola de equação $y^2 = x$. Para isso, construa, no plano cartesiano, o gráfico da parábola $y^2 = x$, encontre o foco F e faça o seguinte:

- trace o segmento AB perpendicular ao eixo de simetria da parábola em F com os pontos A e B pertencentes à curva;
- determine o comprimento $\overline{AB}$;
- marque o ponto L (4, 2) sobre a curva ;
- construa sobre o eixo x, à direita da abscissa 4, o quadrado da ordenada de L;
- construa um retângulo de área equivalente à do quadrado, sendo um de seus lados, a abscissa de L.

a) Qual a relação entre o comprimento $\overline{AB}$ e o coeficiente de x na equação da parábola? Como é denominado o comprimento $\overline{AB}$ então?

b) Como Apolônio denominava o comprimento do lado do retângulo construído sobre o eixo y? Compare o comprimento deste lado com o comprimento $\overline{AB}$. O que você conclui?

Análise a priori

Propomos primeiramente nesta questão, que o estudante faça a conversão do registro de representação algébrico de uma parábola dada para o registro de representação gráfico no plano cartesiano, localizando o foco. Em seguida, sugerimos alguns "passos" para que a partir do registro de representação gráfico da parábola seja encontrado o comprimento da corda focal mínima[21] e sejam construídos o quadrado da ordenada de um determinado ponto da curva dada e o retângulo de área equivalente à do quadrado, sendo um de seus lados, a abscissa de L. Por fim colocamos algumas perguntas relacionadas aos termos *latus rectum* e parâmetro, que deverão ser respondidas após a construção.

[21] Corda que passa pelo foco da parábola e é perpendicular ao eixo principal.

Nosso objetivo é oportunizar ao estudante a realização de uma articulação entre diferentes registros de representação da parábola, desta como seção de um cone e também como lugar geométrico. Para tal, propomos a realização da conversão do registro de representação algébrico da parábola como seção de um cone ($LM^2 = EH. EM$) para um registro de representação gráfico, bem como a conversão do registro de representação algébrico da parábola como lugar geométrico ($y^2 = x$) para o registro de representação gráfico. Estes dois registros de representação gráficos serão apresentados no mesmo sistema cartesiano.

Temos também a intenção de possibilitar ao estudante verificar que se considerando um ponto na parábola e construindo-se o quadrado e o retângulo com pede a questão, o comprimento do segmento AB (comprimento da corda que passa pelo foco da parábola e é perpendicular ao eixo principal) representa o coeficiente de x, chamado parâmetro, na equação da curva dada e é igual ao comprimento de um dos lados do retângulo (*latus rectum)* construído.

São necessários os seguintes conhecimentos disponíveis para responder esta questão: conversão do registro algébrico da parábola para o registro gráfico no plano cartesiano, segmento, coordenadas do foco, eixo de simetria, noção de perpendicularismo, abscissa e ordenada, quadrado e retângulo e cálculo de suas respectivas áreas.

Esperamos que o estudante não tenha dificuldades para realizar a conversão do registro de representação algébrico da parábola dada para o registro de representação gráfico no plano cartesiano, bem como para localizar o foco, por já termos trabalhado com isso nas questões anteriores.

Nos “passos” para a construção do desenho pedimos ao estudante que calcule o comprimento $\overline{AB}$. Será preciso encontrar as ordenadas de A e B e o cálculo do comprimento pedido pode ser feito pela “distância entre dois pontos”. Alguns estudantes podem resolver dessa forma, no entanto, acreditamos que a maioria deles, visualizará o valor do comprimento no próprio gráfico. Esperamos que não encontrem dificuldades ao construir o quadrado e o retângulo pedidos.

Acreditamos que os estudantes notarão que o valor do comprimento $\overline{AB}$ representa o coeficiente de x na equação da parábola dada nesta questão, sendo, portanto, denominado parâmetro. Acreditamos também que o estudante observará que Apolônio chamava *latus rectum* o lado do retângulo construído sobre o eixo y, retomando a questão **6**, se necessário, porém que, a maioria deles, senão todos, nunca tenham relacionado o parâmetro ao comprimento da corda focal mínima.

Ainda, cremos que, por meio da resolução desta questão, os estudantes construirão mais facilmente, a interpretação geométrica da equação da parábola, pedida na próxima questão, a interpretação geométrica da *symptome* da parábola, pedida na questão **6,** bem como estabelecerão a relação entre o *latus rectum* da parábola definida como seção de um cone, e o parâmetro, da parábola definida como lugar geométrico.

Questão 8

Dê, com suas palavras, uma interpretação geométrica para a equação da parábola $y^2 = 4px$. Compare sua resposta com a interpretação geométrica dada para a propriedade $LM^2 = EH. EM$, no item **e** da questão **6**.

Análise a priori

Pedimos ao estudante, nesta questão, que dê com suas palavras uma interpretação geométrica para a equação da parábola $y^2 = 4px$. Além disso, que compare sua resposta à interpretação geométrica dada para a propriedade $\mathbf{LM^2 = EH . EM}$, no item **e** da questão **6**.

Nossa intenção é que, por meio da interpretação geométrica pedida, o estudante realize a coordenação dos registros de representação semiótica abordados nesta questão. Em outras palavras, que o estudante identifique nestes diferentes registros de representação, o mesmo objeto matemático representado.

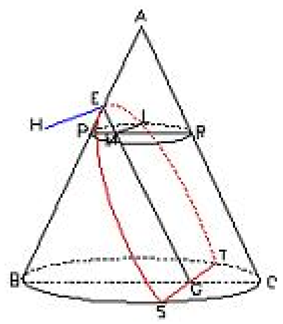
Pretendemos também verificar se ele relacionará y^2 à área do quadrado da ordenada de um determinado ponto da curva e 4px à área do retângulo formado pela abscissa desse ponto e pelo parâmetro 4p. Além disso, se observará a equivalência das áreas.

Ao propor que compare sua resposta à interpretação geométrica dada para $\mathbf{LM^2 = EH. EM}$, esperamos que o estudante retome esta questão e estabeleça uma relação entre *latus rectum* (EH) e parâmetro (4p), entre $\mathbf{LM^2}$ e y^2 e entre **EM** e x.

Acreditamos que os estudantes alcançarão nossas expectativas porque já terão resolvido a questão **7**, a qual aborda registros de representação algébricos e gráficos referentes às duas caracterizações da parábola estudadas neste trabalho.

Questão 9

A parábola caracterizada como seção de um cone e a parábola caracterizada como lugar geométrico representam exatamente a mesma curva? Para responder essa questão, considere a parábola representada no cone a seguir:



a) Introduza num sistema de coordenadas cartesianas a parábola e os pontos L, M, E e H e verifique, algebricamente, se a *symptome* da parábola $LM^2 = EH.\ EM$, é equivalente à equação da parábola $y^2 = 4px$ definida analiticamente.

Análise a priori

Iniciamos esta questão perguntando se a parábola caracterizada como seção de um cone e a parábola caracterizada como lugar geométrico representam exatamente a mesma curva. Nosso objetivo é, agora de maneira mais explícita na questão, que o estudante veja que mesmo sendo geradas de maneiras diferentes, as duas curvas, provenientes das duas caracterizações, representam o mesmo objeto matemático. Além disso, colocar que, apesar da abordagem de Apolônio, com respeito às Cônicas, ser inicialmente tridimensional, ele estudou estas curvas como figuras planas.

Apresentamos ao estudante o registro de representação geométrico da parábola no cone e pedimos que faça a conversão para o registro de representação gráfico da parábola no plano cartesiano. Em seguida, colocamos o registro de representação algébrico da parábola como seção do cone, $\mathbf{LM^2 = EH.\ EM}$, e o registro de representação algébrico da parábola como lugar geométrico, $y^2 = 4px$, propondo que o estudante verifique se estes dois registros de representação são equivalentes, ou seja, se representam o mesmo objeto matemático.

O estudante precisa mostrar algebricamente, que o *latus rectum* **EH**, da propriedade deduzida por Apolônio, é equivalente ao valor 4p do parâmetro da equação da parábola definida analiticamente, e que **EM** e **LM**, representam, respectivamente, a abscissa e a ordenada na equação.

Vale ressaltar que, enquanto nas questões **7** e **8** privilegiamos aspectos geométricos tanto da *symptome* da parábola quanto de sua equação para que o estudante compreendesse a equivalência entre elas, na questão **9**, continuamos com este mesmo propósito, porém agora, sugerindo que o estudante mostre, algebricamente, esta equivalência.

Ao final da resolução da questão, utilizando material impresso, pretendemos explicar aos estudantes que procuramos facilitar a descrição de uma pequena parte do trabalho de Apolônio, relativo à parábola, por meio de termos e símbolos atuais.

Aproveitaremos este momento para colocar também a provável origem dos nomes das cônicas: elipse, parábola e hipérbole, com o objetivo de que o estudante saiba da possibilidade de se verificar geometricamente a relação entre abscissa, ordenada e *latus rectum* da elipse, bem como da hipérbole.

Acreditamos que, se por meio da seqüência didática tivermos cumprido nossos objetivos, o estudante não encontrará dificuldades para resolver esta questão, realizando, com sucesso, a coordenação entre diferentes registros de representação semiótica referentes às caracterizações da parábola tratadas neste trabalho.

4.2.2 Análise das Questões – Parte II

Recordemos que na aplicação dessa parte da seqüência didática, os estudantes trabalharam individualmente, sem acesso às anotações anteriores, durante uma aula.

Questão 1

Quais cônicas você conhece? Por que são chamadas “cônicas”?

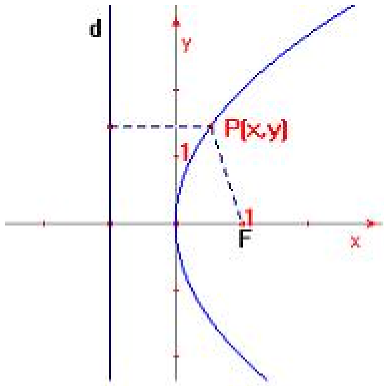
Análise a priori

Nesta questão, perguntamos ao estudante quais cônicas conhece e porque são chamadas cônicas. Queremos verificar se o estudante classifica como cônicas a elipse, a parábola e a hipérbole, além de verificar se ele reconhece que estas curvas são provenientes de cortes do cone.

Esperamos como resposta que o estudante cite pelo menos a elipse, a parábola e a hipérbole como cônicas e explique que recebem essa nomenclatura por serem seções de um cone.

Questão 2

Considere o ponto P pertencente à parábola representada no plano cartesiano da figura seguinte:



Na figura, qual é a relação entre a distância do ponto P ao foco F e a distância de P à diretriz d? Justifique.

Análise a priori

Trabalhamos, nesta questão, com o registro de representação gráfico da parábola, indicando um ponto da curva, o foco e a diretriz.

Nosso objetivo é verificar se o estudante caracteriza a parábola como lugar geométrico, questionando-o a respeito da propriedade comum a todos os pontos desta curva.

Esperamos que estudante responda que a distância do ponto P ao foco F e a distância de P à diretriz d são iguais.

Questão 3

Como é chamado o valor representado pelo comprimento do segmento de reta que passa pelo foco de uma parábola, tem extremidades nos pontos desta curva e é perpendicular ao seu eixo?

Análise a priori

Perguntamos, nesta questão, como é chamado o comprimento da corda focal mínima.

Desejamos verificar se o estudante associou a medida deste comprimento com o parâmetro da parábola. Esperamos, então, que a resposta dada seja “parâmetro”.

Questão 4

Esboce o gráfico da parábola de equação $y^2 = -12x$. Determine as coordenadas do foco e a equação da diretriz.

Análise a priori

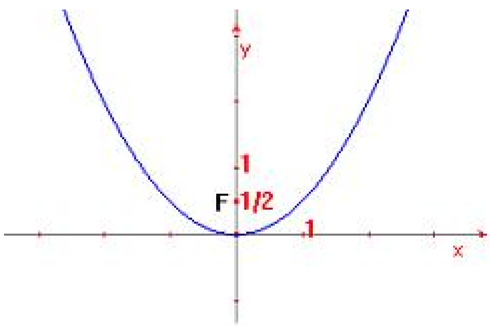
Tomando a definição da parábola como lugar geométrico, nesta questão, propomos que o estudante realize a conversão do registro de representação algébrico para o registro de representação gráfico da parábola.

Temos como objetivo verificar se o estudante realiza os tratamentos e as conversões que se apresentam no estudo analítico da parábola com vértice na origem do sistema cartesiano.

Consideraremos satisfatória a resolução que contemplar o registro de representação gráfico da parábola, com diretriz x = 3 e foco (-3,0).

Questão 5

Dado o ponto F (0,1/2), determine a equação da diretriz e a equação da parábola representada no seguinte gráfico:



Análise a priori

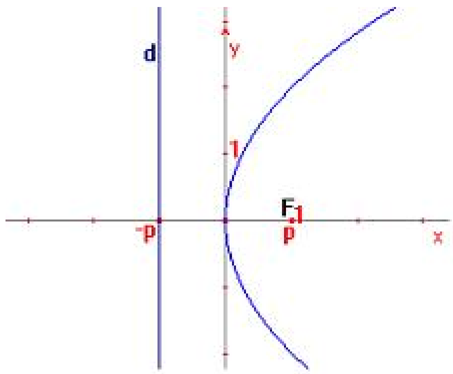
Ainda considerando a definição da parábola como lugar geométrico, propomos aqui que o estudante realize a conversão do registro de representação gráfico da parábola para o registro de representação algébrico.

Como na questão anterior, queremos verificar se o estudante realiza os tratamentos e as conversões que se apresentam no estudo analítico da parábola com vértice (0,0).

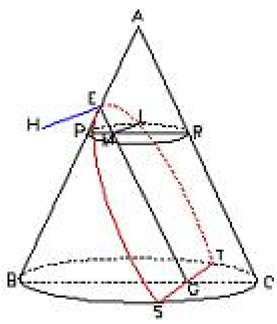
Esperamos como resposta os registros de representação algébricos $x^2 = 2y$, da parábola e $y = -1/2$, da diretriz.

Questão 6

Considere o gráfico da equação $y^2 = 4px$ representado na figura abaixo:



Considere também a propriedade $LM^2 = EH \cdot EM$, da curva representada a seguir:



$LM^2 = EH \cdot EM$ e $y^2 = 4px$ representam a mesma curva? Justifique sua resposta.

Análise a priori

Nesta questão apresentamos, primeiramente, os registros de representação algébrico e gráfico da parábola, no plano cartesiano, seguidos da *symptome* da parábola (registro de representação algébrico) e seu registro de representação geométrico no cone. Em seguida, perguntamos se os registros de representação tratam do mesmo objeto matemático e pedimos uma justificativa.

Nosso objetivo é verificar se o estudante compreende que estes registros de representação algébricos são equivalentes, mostrando que o valor do parâmetro na equação (4p) corresponde ao *latus rectum* (EH) no cone e vice-versa.

Esperamos que articulando estes diferentes registros de representação, a saber, registros de representação da parábola caracterizada como lugar geométrico e registros de representação da parábola caracterizada como seção de um cone, o estudante conclua que, ambas as caracterizações, referem-se ao mesmo objeto matemático.

4.3 ANÁLISE APOSTERIORI EVALIDAÇÃO

Apresentamos, nesta seção, a análise a posteriori de cada questão da seqüência didática juntamente com a validação, que se deu no confronto entre análise a priori e análise a posteriori, segundo a Engenharia Didática.

4.3.1 Análises das Questões – Parte I

Questão 1

A resolução desta questão ocorreu no nosso primeiro encontro que durou cerca de 60 minutos. Propusemos inicialmente o traçado manual de uma parábola, com auxílio de régua e compasso, dados a diretriz e o foco.

Nosso objetivo era que, ao fazer a conversão do registro de representação em língua natural (os procedimentos) para o registro de representação geométrico e, analisando a construção, os estudantes caracterizassem a parábola como lugar geométrico.

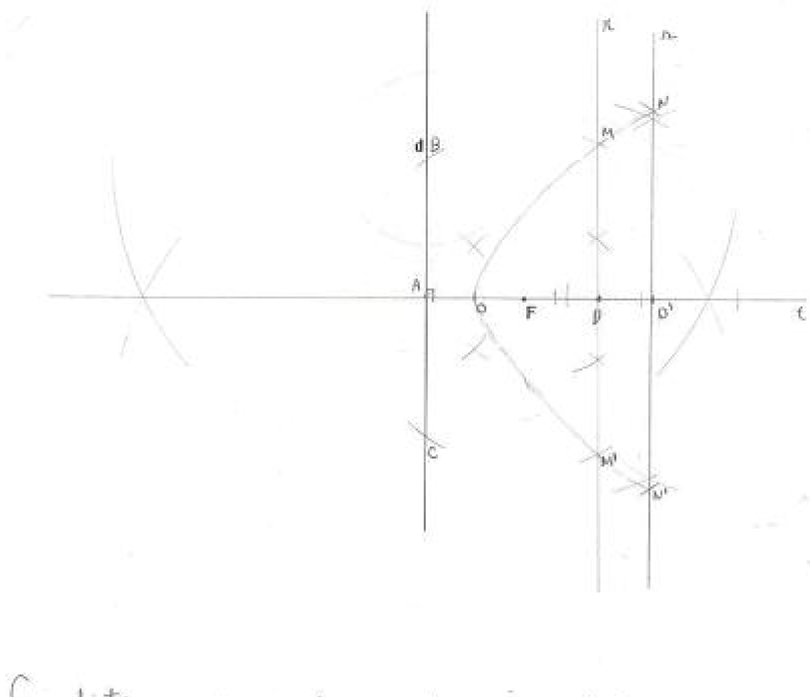
Organizados em duplas e de posse de régua e compasso, os estudante iniciaram a construção.

Como previsto, algumas dificuldades foram encontradas por conta da falta de atenção aos procedimentos do desenho, mais precisamente no traçado das retas perpendiculares pedidas. Alguns estudantes precisaram de ajuda para prosseguirem.

Concluído o desenho, os estudantes foram interrogados, na própria questão, a respeito da relação entre a distância de um ponto da parábola à diretriz e a distância deste mesmo ponto ao foco. Antes mesmo de pensar em justificar a resposta por meio dos procedimentos da construção, como propusemos na questão, a maioria deles, conforme previsto, utilizou a régua para medir as distâncias pedidas. Ficaram com dúvidas, pois as distâncias pareciam iguais, mas não tinham certeza por causa da imprecisão no desenho.

Confrontados, então, com a segunda pergunta, retomaram a construção para justificar a resposta, como esperávamos. A alguns estudantes, porém, foi preciso reforçar que buscassem a justificativa nos procedimentos do desenho. A maior parte deles localizou quais procedimentos justificavam a resposta, mas não sabiam como escrever isso. Refletiram por um tempo, escreveram e todos tiveram êxito.

Queremos destacar a seguir, a resolução do estudante E6, na qual podemos ver a justificativa pedida na última parte da questão.



A distância de qualquer ponto da parábola à diretriz é a mesma distância desse ponto ao foco. O procedimento que justifica é:

• Com centro em F e raio AD, cortar a perpendicular r em M e M', que são pontos da parábola.

Consideramos que esta última parte da questão foi um momento crucial para que o estudante fosse agente na construção do conhecimento. A construção da parábola por meio dos procedimentos dados não seria suficiente para tal. A justificativa pedida contribuiu, pois, analisando passo a passo a construção do registro de representação geométrico da parábola, os estudantes identificaram em que momentos tomaram, utilizando o compasso, distâncias iguais para encontrarem pontos dessa curva. Compreenderam, dessa forma, que todos os pontos de tal curva têm a mesma propriedade, ou seja, que a parábola é o lugar geométrico dos pontos que distam igualmente da diretriz e do foco. O diferencial nesta questão foi justamente analisar os procedimentos da construção.

Finalizando esta questão, definimos primeiramente "lugar geométrico", nos baseando na propriedade dos pontos da parábola que eles construíram. Em seguida, caracterizamos como lugar geométrico, não só a parábola, mas também a elipse e a hipérbole, como planejado.

Por meio desta questão, os estudantes se envolveram, segundo a Teoria das Situações Didáticas[22]: em situações de ação, ao traçarem o desenho pedido; em situações de formulação, ao responderem o item **a**; em situações de validação, quando confrontados pelo item **b**; e também em uma situação de institucionalização, na qual, fizemos uma sistematização definindo lugar geométrico a parábola, a elipse e a hipérbole. Estes estudantes se tornaram participantes na construção desse conhecimento.

Questão 2

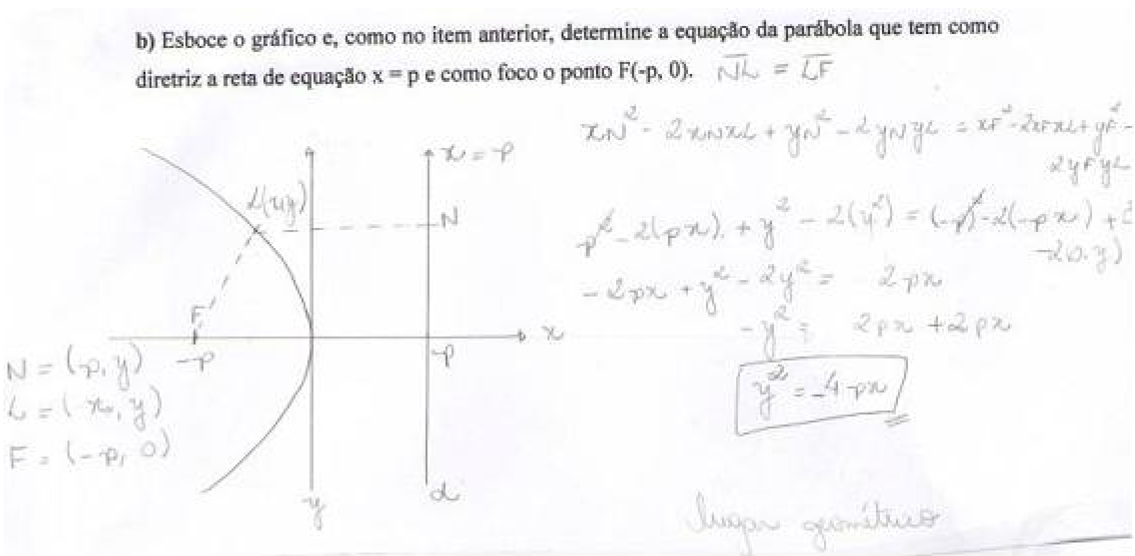
Esta questão foi resolvida em cerca de 70 minutos, pelos estudantes organizados em duplas ou trios, no nosso segundo encontro. Trabalhamos com a caracterização da parábola como lugar geométrico e propusemos um breve estudo analítico da curva, com o vértice da parábola na origem do sistema cartesiano. Esperávamos que os estudantes não tivessem muitas dificuldades por terem visto o tratamento analítico das cônicas anteriormente, porém, esta foi a questão que eles mais encontraram dificuldades, as quais procuraremos explicitar, ao abordarmos cada item da questão, no decorrer desta análise.

Nosso objetivo no item **a** era que o estudante fizesse a conversão do registro de representação gráfico da parábola para o registro de representação algébrico. Como apontamos na análise a priori, esta questão não envolve apenas a conversão, mas também tratamentos, pois o estudante deverá trabalhar dentro do mesmo registro de representação para

[22] A partir desta seção, nos referiremos às situações de ação, formulação, validação e institucionalização, segundo a Teoria das Situações Didáticas discutida na seção 1.1 deste trabalho.

chegar à equação reduzida da curva. Como previsto, a maioria optou por utilizar o cálculo da distância entre dois pontos para a resolução, sendo que isto não foi imediato. Tiveram que pensar um pouco para lembrarem que poderiam assim proceder. As dificuldades apareceram quando precisaram converter registros de representação gráficos de determinados pontos para registros de representação algébricos, ou seja, quando precisaram escrever coordenadas de pontos do gráfico da parábola para calcularem a distância entre dois pontos. Pelo menos metade dos estudantes precisou de ajuda para prosseguir. Vencida esta etapa, as dificuldades apareceram novamente por conta dos tratamentos, ao substituírem as abscissas e as ordenadas dos pontos na fórmula do cálculo da distância entre dois pontos, para chegarem ao registro de representação algébrico da curva. Outra vez, alguns necessitaram de auxílio para concluírem a questão.

No item **b**, nosso objetivo era que o estudante fizesse a conversão do registro de representação algébrico da diretriz para registro de representação gráfico e, juntamente com as coordenadas do foco, construísse o registro de representação gráfico da parábola. Em seguida, realizasse a conversão do registro de representação gráfico para registro de representação algébrico da parábola. A tarefa pedida no item **b,** parecia ser um tanto mais complexa do que a proposta no item **a** porque pedimos a construção do registro de representação gráfico da curva. No entanto, por se basearem no item anterior, a maioria dos estudantes teve sucesso na resolução da questão. Mesmo assim, o estudante E8 ainda teve dificuldades semelhantes às que apareceram no item **a**. A resolução deste estudante, ilustrada a seguir, mostra um


b) Esboce o gráfico e, como no item anterior, determine a equação da parábola que tem como diretriz a reta de equação x = p e como foco o ponto F(-p, 0).

equívoco na escrita das coordenadas do ponto L, que deveria ter abscissa negativa, e problemas na realização dos tratamentos para encontrar a equação da curva. Todos os estudantes realizaram os tratamentos para chegar à equação da curva, ou, ao registro de representação algébrico da parábola, com exceção dos estudantes E3 e E5, que omitiram os tratamentos, pois pelas características da diretriz e do foco já notaram como seria a equação.

A proposta do item **c** era que o estudante comparasse os registros de representação gráficos e algébricos dos itens anteriores colocando suas conclusões. Esperávamos que os estudantes notassem que estando a equação da parábola em função de x com o vértice na origem, a diretriz é paralela ao eixo y e, portanto, a parábola é simétrica em relação ao eixo x. Entretanto, apenas o estudante E1 escreveu estas duas observações. Os estudantes E2 e E6 escreveram: “os gráficos são simétricos entre si em relação ao eixo y”, o que dá a entender que, se representados no mesmo sistema cartesiano, os gráficos são simétricos ao eixo y, o que está correto, apesar da escrita estar equivocada. O estudante E5 observou que se o foco tem abscissa positiva, a concavidade da parábola está voltada para a direita e se foco tem abscissa negativa, a concavidade está voltada para a esquerda. Esperávamos ainda, o que não ocorreu, que os estudantes concluíssem que, na equação, o parâmetro 4p é positivo quando o foco tem abscissa positiva; e o parâmetro 4p é negativo quando o foco tem abscissa negativa.

Nos itens **d** e **e** repetimos as propostas e os objetivos do item **b** e, novamente, os estudantes E3 e E5, pela mesma razão, omitiram os tratamentos. Os demais tiveram ainda algumas dificuldades, mas com o nosso auxílio, todos conseguiram concluir estes itens.

Outra vez, no item **f**, propusemos aos estudantes que comparassem os registros de representação gráficos e algébricos encontrados nos itens **d** e **e,** além de escrever suas conclusões. Estas foram análogas às tiradas no item **c**, desta questão.

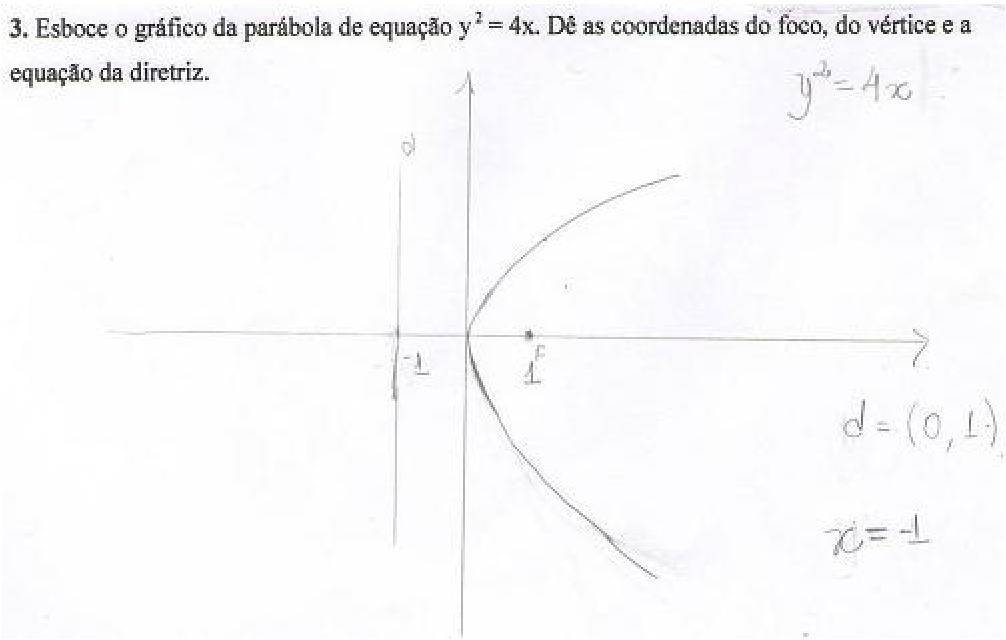
Ao final da resolução desta questão, alguns estudantes colocaram os gráficos e suas respectivas equações na lousa e em seguida, sugerimos uma discussão e a sistematização dos registros de representação gráficos e algébricos estudados. Nenhum dos estudantes conhecia que 4p é referente ao valor do parâmetro da parábola.

Por meio do trabalho com esta questão, foram proporcionadas aos estudantes: situações de ação, nos itens **a**, **b**, **d** e **e**; situações de formulação e validação, nos itens **c** e **f** e uma situação de institucionalização, ao final da resolução da questão.

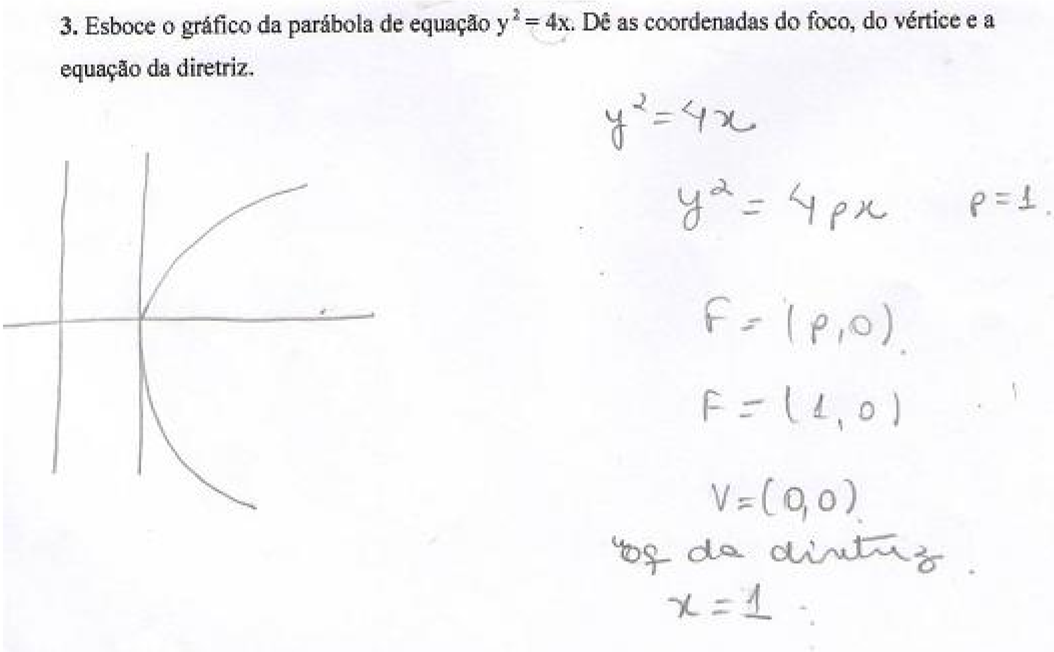
Questão 3

Continuando o estudo da parábola caracterizada como lugar geométrico, propusemos, nesta questão, a realização da conversão do registro de representação algébrico para o registro de representação gráfico da parábola. A partir do registro de representação algébrico, era necessário que se determinassem as coordenadas do foco, do vértice e a equação da diretriz para que se chegasse ao registro de representação gráfico da curva. O trabalho com esta questão ocorreu ainda no segundo encontro, com os estudantes em grupos, durando cerca de 8 minutos.

Como esperávamos, todos os estudantes utilizaram as generalizações feitas a partir da questão **2** e a maioria deles não encontrou dificuldades. Apenas os estudantes E4 e E5, dos quais as resoluções estão, respectivamente, ilustradas a seguir, encontraram dificuldades no registro de representação algébrico da diretriz. O estudante E4 demonstrou incerteza na escrita



e o estudante E5, deveria ter registrado x = - 1.



3. Esboce o gráfico da parábola de equação $y^2 = 4x$. Dê as coordenadas do foco, do vértice e a equação da diretriz.

$y^2=4x$

$y^2 = 4px$ $p=1$

$F=(p,0)$

$F=(1,0)$

$V=(0,0)$

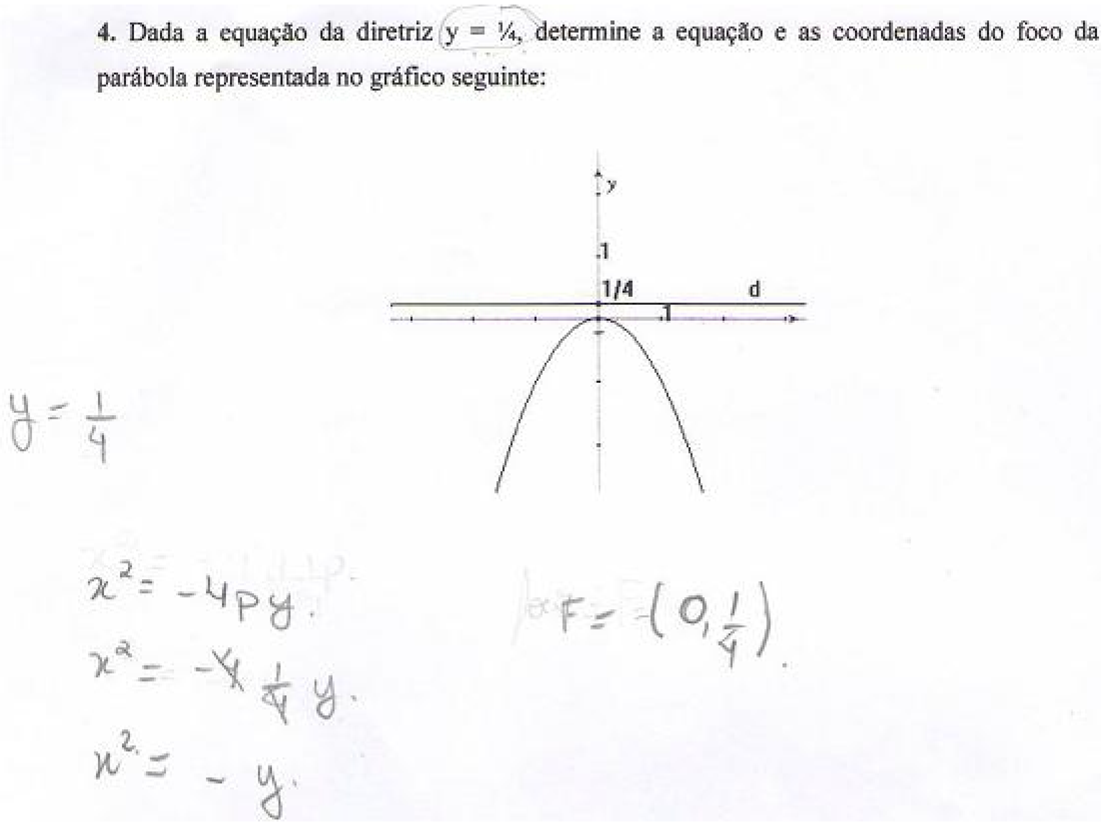
eq da diretriz

$x=1$

Questão 4

Ainda considerando a caracterização da parábola como lugar geométrico, nosso intuito era que o estudante fizesse a conversão do registro de representação gráfico para o algébrico. No registro de representação gráfico, além da parábola, foi dada a diretriz e seu respectivo registro de representação algébrico. Esta questão foi resolvida em nosso segundo encontro, com os estudantes organizados em grupos e durou cerca de 8 minutos.

Novamente, como esperado, os estudantes utilizaram as generalizações feitas na questão **2** e não tiveram dificuldades. Outra vez o estudante E5 teve problemas, agora para representar as coordenadas do foco, como podemos ver a seguir. Ele deveria ter escrito F (0,-¼).



4. Dada a equação da diretriz $y = \frac{1}{4}$, determine a equação e as coordenadas do foco da parábola representada no gráfico seguinte:

Questão 5

A resolução desta questão aconteceu em nosso segundo encontro, pelos estudantes organizados em grupos e durou cerca de 8 minutos. Nosso propósito, mais uma vez tomando a definição da parábola como lugar geométrico, era que o estudante convertesse o registro de representação algébrico da diretriz para registro de representação gráfico e, juntamente com as coordenadas do foco, construísse o registro de representação gráfico e também o algébrico da parábola.

Como nas questões anteriores, os estudantes usaram as generalizações feitas na questão **2**, mas nesta, todos tiveram êxito.

Questão 6

Nesta questão, com o objetivo de trabalhar com a caracterização da parábola como seção de um cone, pretendíamos que os estudantes vissem como Apolônio, a partir da seção do cone, determinou a propriedade fundamental da parábola, chamada também de *symptome* da parábola. Os estudantes, organizados em grupos, resolveram esta questão em nosso terceiro encontro e levaram cerca de 75 minutos.

Antes, porém, da questão propriamente dita, utilizando material impresso, fizemos uma breve exposição oral sobre a história das Cônicas, além de mostrar os cones seccionados, resultando nas cônicas: elipse, hipérbole e parábola, como planejamos. Assim, os estudantes tiveram acesso aos registros de representação geométricos e em língua natural destas três cônicas caracterizadas como seção do cone. Apesar dos nossos sujeitos de pesquisa já terem estudado este tema, no questionário[23] que responderam depois da aplicação da seqüência didática, somente o estudante E5 afirmou conhecer a história das Cônicas e apenas o estudante E3 disse ter visto um tratamento da parábola diferente do analítico.

Inicialmente, foi dado o registro de representação geométrico da parábola como seção do cone e nomeados os elementos necessários para a dedução da *symptome* da parábola, ou seja, para realização da conversão do registro de representação geométrico para o registro de representação algébrico da parábola, neste caso. Propomos então, alguns itens nesta questão, para que, como Apolônio, o estudante deduzisse, utilizando semelhança de triângulos, a referida *symptome* da parábola. Acreditávamos que os estudantes não teriam dificuldades com os tratamentos utilizando a semelhança de triângulos. Realmente a maioria não teve grandes dificuldades, entretanto, alguns estudantes demoraram um pouco a notar que deveriam utilizar seus conhecimentos sobre semelhança de triângulos e também a identificar um triângulo que não estava tão evidente. Somente o estudante E5, não alcançou o objetivo no item **d**, que era, finalmente, chegar ao registro de representação algébrico ou *symptome* da parábola.

No último item propusemos ao estudante que escrevesse com suas palavras uma interpretação geométrica da propriedade $\mathbf{LM}^2 = \mathbf{EH.\ EM}$, *symptome* da parábola. Interessava-nos verificar se o estudante relacionaria $\mathbf{LM}^2$ com a área do quadrado da ordenada de **L** e **EH . EM** com a área do retângulo formado pela abscissa de **L** e pelo *latus rectum* **EH**. Além disso, se observaria a equivalência das áreas. Metade dos estudantes não escreveu nada que demonstrasse isso. Dos restantes, o estudante E4 anotou que "*$\boldsymbol{LM}^2$ dá idéia de área e* ***E . EM****, base x altura.*" e o estudante E5 escreveu "***EH. EM*** *é uma multiplicação de números diferentes podendo formar um retângulo.*" Já o estudante E1 explicou "*Área do quadrado = área do retângulo/* ***LM. LM = EH. EM***" e, por fim, E8 interpretou "*Podemos observar com a equação que $\boldsymbol{LM}^2$ representa a área de duas figuras, onde um dos lados é* ***EH*** *e o outro é* ***EM*** *em uma figura e na outra figura um lado é* ***LM*** *e outro lado é* ***LM****. Sendo assim possuímos duas figura de áreas iguais e lados diferentes.*" Analisando estas respostas, verificamos que os estudantes demonstraram relacionar, cada qual a seu modo, $\mathbf{LM}^2$ à área de um quadrado e **EH. EM** à área de um retângulo, com apenas dois

[23] Disponível no Apêndice C.

deles atentando para a equivalência destas áreas. Como esperávamos, a interpretação geométrica da propriedade **LM** ^{2} **= EH . EM**, não ficou clara para os estudantes, pois nenhum deles relacionou **LM** com a ordenada de **L** (um ponto da parábola), **EH** com o *latus rectum* e **EM** com a abscissa de **L**. Dessa forma, vemos que se fez realmente necessário o trabalho com a próxima questão para oportunizar ao estudante a construção do conhecimento acerca da interpretação geométrica mencionada.

Ainda, por meio desta questão, os estudantes se envolveram, especialmente, em situações de formulação, quando na troca de informações com os colegas para chegarem à dedução da propriedade fundamental da parábola; e em situações de validação, ao buscarem verificar a validade de suas respostas. Cada um tornou-se, assim, ativo na construção do próprio conhecimento.

Questão 7

O trabalho com esta questão se desenvolveu também em nosso terceiro encontro, com os estudantes organizados em grupos, por cerca de 45 minutos. Propusemos, primeiramente, que o estudante fizesse a conversão do registro de representação algébrico de uma parábola dada para o registro de representação gráfico no plano cartesiano, localizando o foco. Em seguida, sugerimos alguns "passos" para que a partir do registro de representação gráfico da parábola fosse encontrado o comprimento da corda focal mínima e fossem construídos o quadrado da ordenada de um determinado ponto da curva dada e o retângulo de área equivalente à do quadrado, sendo um de seus lados, a abscissa de L. Por fim colocamos algumas perguntas relacionadas aos termos *latus rectum* e parâmetro, que deveriam ser respondidas após a construção.

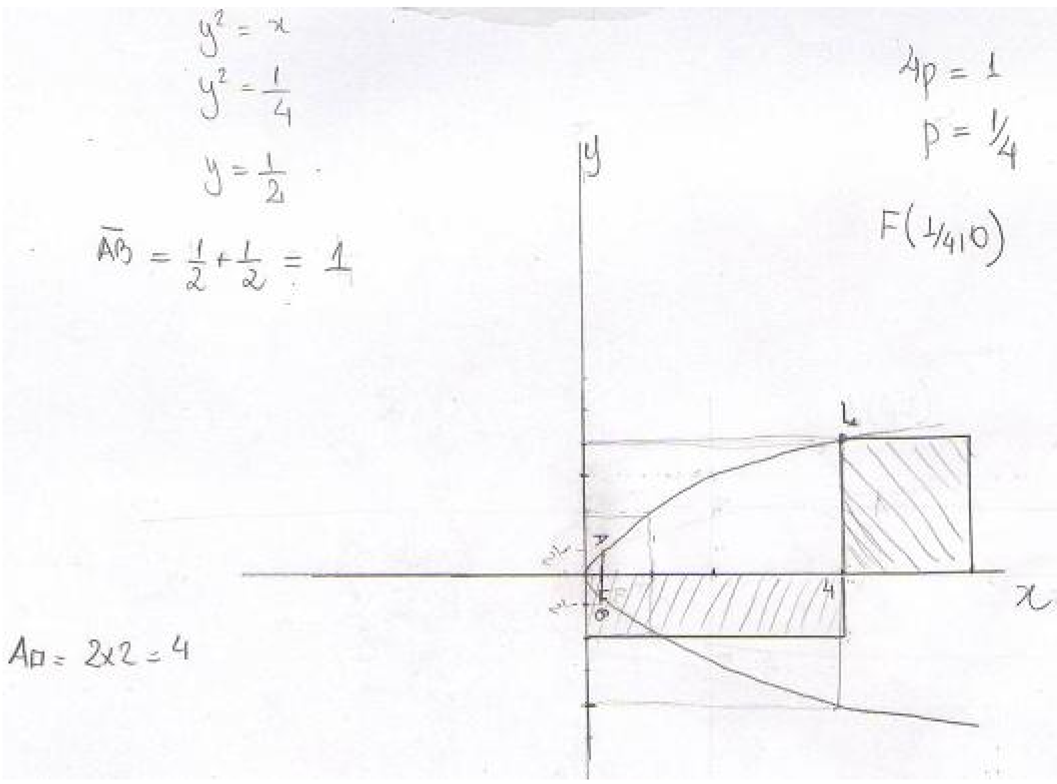
Nosso objetivo era oportunizar ao estudante a realização de uma articulação entre registros de representação da parábola como seção de um cone e registros de representação da parábola como lugar geométrico.

Tínhamos também a intenção de possibilitar ao estudante verificar que, se considerando um ponto na parábola e construindo-se o quadrado e o retângulo com pedia a questão, o comprimento do segmento AB (comprimento da corda que passa pelo foco da parábola e é perpendicular ao eixo principal) representava o coeficiente de x, chamado parâmetro, na equação da curva dada e era igual ao comprimento de um dos lados do retângulo (*latus rectum)* construído.

Esperávamos que os estudantes não tivessem dúvidas ao realizar a conversão do registro de representação algébrico da parábola dada para o registro de representação gráfico no plano cartesiano por já termos trabalhado com isso nas questões anteriores, no entanto, a maioria deles ainda necessitou de nossa ajuda, especialmente para achar as coordenadas do foco.

Na construção do desenho pedido os estudantes não tiveram dificuldades, e todos visualizaram o valor do comprimento do segmento AB no próprio gráfico, como esperávamos.

A seguir, destacamos a resolução do estudante E1, o único que construiu o retângulo no IV quadrante do sistema cartesiano, considerando que os outros estudantes construíram este retângulo no I quadrante.



Analisando o desenho construído, todos os estudantes notaram que o valor do comprimento $\overline{AB}$ é o mesmo valor do coeficiente de x na equação da parábola, mas alguns não se lembravam da palavra "parâmetro" que denomina ambos os valores. Retomando a questão **6**, os estudantes identificaram a que medida Apolônio chamava *latus rectum*, como esperávamos. Como previamos, também, os estudantes nunca haviam relacionado o parâmetro ao comprimento da corda focal mínima.

Apesar de, nesta questão, apresentarmos “passos” para a construção pedida, isso não fez com que o trabalho se tornasse desinteressante. Ao contrário, durante a construção os estudantes se mostraram entusiasmados, mais ainda, ao término desta, quando notaram que o valor do parâmetro correspondia ao *latus rectum* e vice-versa. Outra vez, os estudantes se tornaram agentes na construção do conhecimento.

Questão 8

Pedimos aos estudantes, nesta questão, que escrevessem, com suas palavras, uma interpretação geométrica para a equação da parábola $y^2 = 4px$ e que comparassem sua resposta à interpretação geométrica dada para a propriedade $\mathbf{LM^2 = EH \cdot EM}$, no item **e** da questão **6**. O trabalho com esta questão durou cerca de 10 minutos, ainda durante nosso terceiro encontro, com os estudantes organizados em grupos.

Como pensávamos, por meio da resolução desta questão, foi possível verificar que os estudantes relacionaram y^2 à área do quadrado da ordenada de um determinado ponto da curva, 4px à área do retângulo formado pela abscissa desse ponto e pelo parâmetro 4p, além de observarem a equivalência das áreas. Quando propomos que comparassem estas conclusões com a interpretação geométrica que deveriam ter dado para $\mathbf{LM^2 = EH. EM}$, na questão **6**, eles não só notaram que o *latus rectum,* da parábola caracterizada como seção de um cone, correspondia ao valor do parâmetro, da parábola caracterizada como lugar geométrico, como também realizaram corretamente a referida interpretação geométrica pedida na questão **6**. Assim, verificamos que a resolução desta questão possibilitou aos estudantes enxergarem nos diferentes registros de representação abordados, o mesmo objeto matemático.

Como prevíamos, a resolução da questão **7,** possibilitou aos estudantes construírem mais facilmente a interpretação geométrica da equação da parábola, pedida nesta questão, a interpretação geométrica da *symptome* da parábola pedida na questão **6,** bem como estabelecerem a relação entre *latus rectum* e parâmetro.

Um momento interessante na resolução desta questão aconteceu quando os estudantes foram convidados a retomarem a interpretação geométrica realizada na questão **6**, se envolvendo numa situação de validação. Novamente, a construção do conhecimento foi devido ao próprio mérito de cada um.

Questão 9

Esta foi a última questão, desta parte da seqüência didática, desenvolvida em nosso terceiro encontro, por cerca de 20 minutos, com os estudantes organizados em grupos.

Apresentamos ao estudante o registro de representação geométrico da parábola no cone e pedimos que fizesse a conversão para o registro de representação gráfico da parábola no plano cartesiano. Em seguida, colocamos o registro de representação algébrico da parábola como seção do cone, $\mathbf{LM}^2 = \mathbf{EH} \cdot \mathbf{EM}$, e o registro de representação algébrico da parábola como lugar geométrico, $y^2 = 4px$, propondo que o estudante verificasse se estes dois registros de representação eram equivalentes, ou seja, se representavam o mesmo objeto matemático.

O estudante precisava mostrar algebricamente, que o *latus rectum* **EH**, da propriedade deduzida por Apolônio, era equivalente ao valor 4p do parâmetro da equação da parábola definida analiticamente, e que **EM** e **LM**, representavam, respectivamente, a abscissa e a ordenada na equação. Todos os estudantes resolveram corretamente esta questão.

Como na análise a priori, queremos ressaltar que, enquanto nas questões **7** e **8** privilegiamos aspectos geométricos, tanto da *symptome* da parábola quanto de sua equação, para que o estudante compreendesse a equivalência entre elas, nesta questão, continuamos com este mesmo propósito, porém agora, sugerindo que o estudante mostrasse, algebricamente, esta equivalência. Acreditamos que o trabalho com a interpretação geométrica nas questões **7** e **8**, facilitou a realização da coordenação, pelo estudante, dos diferentes registros de representação algébricos mencionados. Mostrando a equivalência destes dois registros de representação, o estudante conseguiu identificar, nas diferentes caracterizações da parábola, o mesmo objeto matemático representado.

Ao final da resolução desta questão, utilizando material impresso, como planejado, explicamos aos estudantes que procuramos facilitar a descrição de uma pequena parte do trabalho de Apolônio, relativo à parábola, por meio de termos e símbolos atuais.

Aproveitamos este momento para colocar também a provável origem dos nomes das cônicas: elipse, parábola e hipérbole, com o objetivo de que o estudante soubesse da possibilidade de se verificar, geometricamente, a relação entre abscissa, ordenada e *latus rectum* da elipse, bem como da hipérbole.

Somente nesta última questão, lançamos aos estudantes a pergunta que norteou grande parte de nossas escolhas na elaboração da seqüência didática: “A parábola caracterizada como seção de um cone e a parábola caracterizada como lugar geométrico representam exatamente a mesma curva?”. Após a resolução, o estudante E1 respondeu: “Sim, pois acabamos de ver que a propriedade deduzida por Apolônio $\mathbf{LM^2 = EH \cdot EM}$ com a seção do cone é equivalente à equação da parábola caracterizada como lugar geométrico, $y^2 = 4px$.” Analisando estas e as outras repostas verificamos que, realmente, os estudantes tiveram êxito, além de terem sido participantes na construção do próprio conhecimento, quando envolvidos nas situações didáticas propostas.

4.3.2 Análises das Questões – Parte II

Questão 1

Nosso objetivo era verificar se o estudante classificaria como cônicas a elipse, a parábola e a hipérbole e se reconheceria que estas curvas são provenientes de cortes do cone.

Todos os estudantes responderam como esperávamos, com exceção de dois deles. O estudante E3 classificou como cônicas a elipse, a parábola e a hipérbole, contudo não explicou que as curvas citadas eram resultantes de cortes ou seções do cone. Já o estudante E7 também não explicou que as curvas resultavam de cortes do cone e apresentou apenas a parábola como cônica.

Questão 2

Nesta questão, tínhamos como objetivo verificar se o estudante caracterizaria a parábola como lugar geométrico, questionando-o a respeito da propriedade comum a todos os pontos desta curva.

Os estudantes responderam corretamente, verificando no registro de representação gráfico dado que a distância do ponto P ao foco F e a distância de P à diretriz d eram iguais. Somente o estudante E7 respondeu de maneira incorreta, realizando uma conversão para o registro de representação algébrico, ao invés de responder a pergunta, demonstrando assim, que pode não ter compreendido o que pedia a questão.

Questão 3

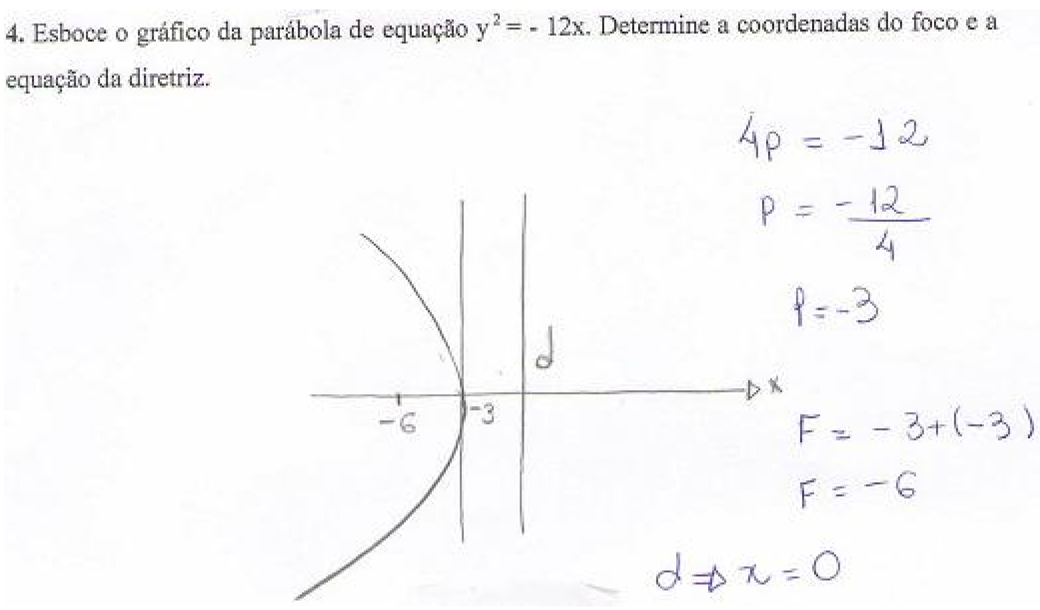
Desejávamos verificar se os estudantes associariam a medida do comprimento da corda focal mínima ao parâmetro. Todos tiveram êxito.

Questão 4

Pretendíamos verificar, nesta questão, se o estudante realizaria a conversão do registro de representação algébrico da parábola para o registro de representação gráfico, além dos tratamentos que se apresentam no estudo analítico da parábola com vértice na origem do sistema cartesiano.

Durante a aplicação da primeira parte da seqüência didática, pudemos observar dificuldades, muito além do que esperávamos, no estudo analítico proposto. Dificuldades que, para alguns estudantes, permaneceram mesmo após terem concluído a primeira parte da seqüência desenvolvida.

Dos 8 estudantes participantes desta pesquisa, 3 resolveram esta questão exatamente como esperávamos. Em relação aos demais, os estudantes E4 e E7 encontraram, mas não escreveram as coordenadas do foco e a equação da diretriz pedidas. Também tiveram problemas no esboço do gráfico. O estudante E8 teve dificuldades nos tratamentos, não conseguindo achar o valor de p, e, consequentemente, não encontrando as coordenadas do foco e equação da diretriz. Veja a resolução deste estudante a seguir:



O estudante E5 apenas encontrou o valor de p e esboçou o gráfico sem indicar as coordenadas do foco e a equação da diretriz. O estudante E1 esboçou o gráfico sem indicação da diretriz e de algum valor numérico. Verificamos que estes 5 estudantes, ao esboçar o gráfico, mesmo se equivocando em alguns momentos, demonstraram saber que o enunciado da questão estava se referindo a uma parábola com vértice na origem do sistema cartesiano, além de saber identificar o foco e a diretriz de tal curva.

Questão 5

Como na questão anterior, tínhamos interesse em verificar se o estudante realizaria os tratamentos e as conversões que se apresentam no estudo analítico da parábola com vértice (0,0), mais especificamente, se realizaria a conversão do registro de representação gráfico da parábola para o registro de representação algébrico.

Novamente, dos 8 estudantes, sujeitos desta pesquisa, 3 resolveram esta questão exatamente como esperávamos. Os estudantes E4, E5 e E8, tiveram dificuldades na realização dos tratamentos e não chegaram ao registro de representação algébrico da parábola. Os estudantes E1, E5 e E7 não escreveram o registro de representação algébrico da diretriz da parábola dada.

Verificamos que os 5 estudantes que apresentaram dúvidas na questão anterior, apresentaram também nesta, no entanto, demonstraram saber que tratava-se de uma parábola com vértice na origem do sistema cartesiano além de identificarem o valor p.

Questão 6

Nosso intuito, nesta questão era verificar se o estudante compreenderia que os registros de representação algébrico e gráfico, da parábola como lugar geométrico e, os registros de representação algébrico e geométrico, da parábola como seção de um cone, representavam a mesma curva. Também, se justificariam a resposta, mostrando que o valor do parâmetro na equação (4p) corresponde ao *latus rectum* (EH) no cone ou vice-versa.

Verificamos que metade dos estudantes afirmou que os registros de representação, constantes na questão, representavam a mesma curva, além de não só mostrar que o valor do parâmetro correspondia ao *latus rectum*, mas também, que os registros de representação algébricos, referentes às duas caracterizações da parábola, eram equivalentes.

A outra metade, também afirmou que os registros de representação diziam respeito à mesma curva, porém, apenas indicou, corretamente, a que cada termo de um registro de representação algébrico da parábola correspondia no outro. Consideramos esta resposta válida, mesmo porque, na questão, pedíamos somente uma justificativa para a resposta.

Acreditamos que esta questão oportunizou, mais uma vez, ao estudante, a realização da coordenação de diferentes registros de representação semiótica da parábola, de acordo com as caracterizações desta curva abordadas aqui, ou seja, possibilitou ao estudante compreender que a parábola caracterizada como seção de um cone ou como lugar geométrico representa o mesmo objeto matemático.

4.4 UMA ANÁLISE GLOBAL

As análises, apresentadas até o momento, encaminharam-se no sentido de estabelecer relações entre a análise a priori e a análise a posteriori, realizadas para cada uma das questões desenvolvidas na seqüência didática. O confronto entre estas análises, diz respeito à validação interna da metodologia Engenharia Didática, empregada nesta pesquisa.

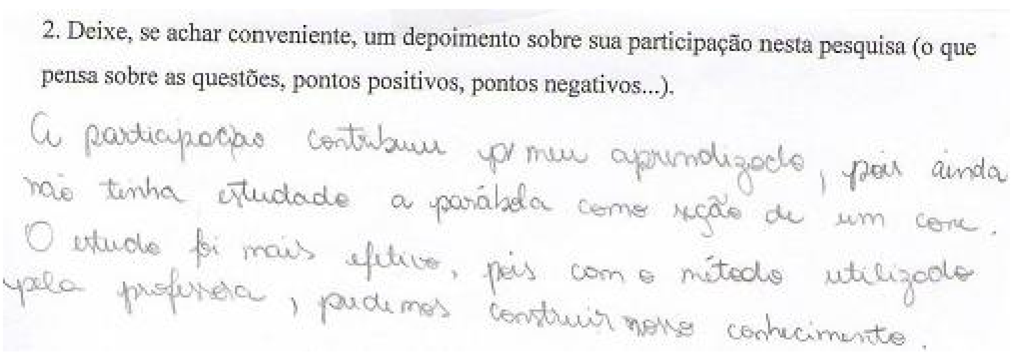
Pretendemos, nesta seção, apresentar uma análise um pouco mais geral, considerando aspectos da Teoria das Situações Didáticas, da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e da utilização didática da História da Matemática, discutidas nos dois primeiros capítulos deste trabalho. Buscamos, também, destacar alguns pontos identificados no desenvolvimento da seqüência didática e nas análises concluídas até então, que estejam de acordo com os objetivos desta pesquisa, tratados na introdução deste estudo.

Inicialmente, elaboramos uma seqüência didática, segundo os princípios da Engenharia Didática, composta por situações didáticas, que contemplaram diferentes registros de representação semiótica da parábola, com a utilização didática da História da Matemática articulando esses diferentes registros de representação.

Na primeira questão, durante a experimentação, ao abordarmos especificamente a parábola como lugar geométrico, verificamos que nenhum dos estudantes se lembrava o que era um lugar geométrico e menos ainda da propriedade que fazia da parábola um lugar geométrico. Eles se mostraram surpresos e entusiasmados com as constatações feitas por meio da resolução da questão. Após a aplicação da seqüência didática, *verificamos que os estudantes caracterizavam a parábola como lugar geométrico*, por meio de seu registro de representação geométrico e em língua natural.

Nas questões de número 2 a 5, constantes na primeira parte da seqüência didática, ainda consideramos a parábola como lugar geométrico, agora conferindo um tratamento analítico com o vértice da curva na origem do sistema cartesiano. Como apontamos nas análises realizadas até então, foi nas resoluções destas questões que os estudantes encontraram mais dificuldades, sendo que isto não era esperado por nós. Não esperávamos, pois, por meio das análises preliminares, verificamos que o estudo das cônicas é predominantemente analítico, nas licenciaturas em Matemática, às quais consideramos. Durante a primeira parte da experimentação, a maioria dos estudantes, precisou de ajuda para realizar os tratamentos e as conversões envolvidos especialmente na questão **2**. A sistematização ocorrida ao final da resolução da referida questão, fez com que os estudantes não tivessem muitas dificuldades para resolverem as questões 3, 4 e 5. Já na segunda parte da experimentação, justamente nas duas questões que abordavam o tratamento analítico da parábola, as dúvidas reapareceram. De 8 estudantes, apenas 3 as resolveram corretamente. Apesar da *maioria dos estudantes não realizar de maneira satisfatória os tratamentos e as conversões propostos no estudo analítico* aqui tratado, isso não nos impediu de continuar o trabalho, pois verificamos que eles reconheciam a parábola no registro de representação algébrico $y^2 = 4px$, realizando a conversão deste, para o registro de representação gráfico e até em língua natural. As maiores dificuldades apareciam mesmo, quando lidavam com valores numéricos.

A parábola, caracterizada como seção de um cone, foi abordada na primeira parte da seqüência didática, quando, com o uso didático da História da Matemática, elaboramos a sexta questão, na qual, como Apolônio, o estudante deduziria a *symptome* da parábola, ou seja, a propriedade fundamental da parábola. No trabalho com esta questão o estudante teve acesso a um breve estudo da história das Cônicas, contemplando, especialmente, as cônicas como seção de um cone. No questionário aplicado após a experimentação, pudemos constatar que apenas um estudante disse ter ouvido falar na história das cônicas. Também, somente um estudante disse ter visto um tratamento da parábola, diferente do analítico. Destacamos os depoimentos dos estudantes E1 e E2, a seguir:


2. Deixe, se achar conveniente, um depoimento sobre sua participação nesta pesquisa (o que pensa sobre as questões, pontos positivos, pontos negativos...).

A participação contribuiu p/ meu aprendizado, pois ainda não tinha estudado a parábola como seção de um cone. O estudo foi mais efetivo, pois com o método utilizado pela professora, pudemos construir nosso conhecimento.

Foi muito interessante, aprendi um pouco da história das cônicas, relembrei algumas coisas, aprendi outras como pensar em uma parábola como corte de um plano em um cone, ficou mais claro na minha mente a posição da parábola quando olho somente para a equação.

Nesta questão o estudante trabalhou com os registros de representação geométricos, algébricos e em língua natural da parábola como seção de um cone. Após a aplicação da seqüência didática *verificamos que os estudantes caracterizavam a parábola como seção de um cone.*

Por meio das questões 7, 8 e 9, presentes na primeira parte da experimentação, com o uso didático da História da Matemática, oportunizamos aos estudantes a realização da coordenação de diferentes registros de representação semiótica da parábola como seção de um cone e como lugar geométrico. Consideramos isto um aspecto relevante em nossa pesquisa, pois Damm (1999) explica que de maneira alguma a coordenação de diferentes registros de representação é espontânea devendo ser estimulada durante as aulas. Coordenar implica em reconhecer em distintos registros de representação o mesmo objeto representado e é condição para a compreensão em matemática (DUVAL, 2003). Mediante a aplicação do questionário, somente dois estudantes disseram ter verificado, matematicamente, que a parábola caracterizada como seção de um cone e a parábola caracterizada como lugar geométrico representavam a mesma curva. Após a experimentação verificamos que os estudantes *realizavam a coordenação entre os registros de representação da parábola, especificamente, os registros de representação da parábola como seção de um cone e como lugar geométrico, além de relacionarem latus rectum e parâmetro.*

Seguindo para a parte final desta análise, recordamos que, no início desta pesquisa, baseadas nas análises preliminares realizadas, partimos da hipótese de que o estudante não reconhece nas diferentes caracterizações da parábola o mesmo objeto matemático para formularmos o problema de nossa pesquisa. Tínhamos como objetivo investigar se o desenvolvimento de uma seqüência didática, que considera o tratamento, a conversão e a coordenação de diferentes registros de representação semiótica da parábola, com o uso didático da História da Matemática, possibilitaria ao estudante compreender que a parábola caracterizada como seção de um cone ou como lugar geométrico representa o mesmo objeto matemático. Primeiramente, podemos concluir, com base nos resultados obtidos, que os estudantes que desenvolveram esta seqüência didática, identificaram a parábola nos diferentes registros de representação semiótica tratados aqui. Entretanto, o que promoveu esta coordenação foi o uso didático da História da Matemática, possibilitando ao estudante compreender que parábola caracterizada como seção de um cone ou como lugar geométrico representa o mesmo objeto matemático. Em relação à hipótese levantada, comprovamos sua validade, pois verificamos no início da aplicação da seqüência didática e por meio do questionário, que os estudantes, sujeitos desta pesquisa, realmente não reconheciam, nas diferentes caracterizações da parábola, o mesmo objeto matemático.

Mediante as análises realizadas verificamos a construção de conhecimentos matemáticos, por parte dos estudantes, durante todo o desenvolvimento da seqüência didática. Isso ocorreu também, por conta das interações estabelecidas, neste caso, entre as professoras, os estudantes, e o saber, proporcionadas pelas situações didáticas propostas, como discutimos na seção 1.1 deste trabalho.

A seguir, faremos nossas considerações finais.

CAPÍTULO 5
CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na introdução desta pesquisa, destacamos que Shulman (1986) discorre, em um de seus artigos, sobre a necessidade de se conhecer o conteúdo a ser ensinado. Aqui, concordamos com o autor sobre esta necessidade, especialmente, nos cursos de licenciatura em Matemática. Quando este autor fala sobre "conhecer o conteúdo a ensinar", ele não está se referindo ao conhecimento específico e nem ao conhecimento pedagógico deste conteúdo, mas em conhecê-lo de forma a incluir também um sentido educativo/formativo. Fiorentini (2005) coloca que o professor

> [...] precisa conhecer e avaliar potencialidades educativas do saber matemático; isso ajudará a problematizá-lo e mobilizá-lo de forma mais adequada, tendo em vista a realidade escolar onde atua e os objetivos pedagógicos relativos à formação dos estudantes tanto no que respeita ao desenvolvimento intelectual e à possibilidade de compreender e atuar melhor no mundo (FIORENTINI, 2005, p.109).

Neste sentido, propusemos um estudo sobre o tema Seções Cônicas, de maneira que o estudante conhecesse a evolução histórica deste tema, bem como diferentes formas com as quais se podem representar ou expressar o conceito de Parábola. Acreditamos que assim, contribuímos, positivamente, para a formação dos futuros professores, sujeitos de nossa pesquisa, no que se refere "ao desenvolvimento intelectual e à possibilidade de compreender e atuar melhor no mundo", como coloca Fiorentini (2005). Contribuímos para o desenvolvimento intelectual, quando oportunizamos aos estudantes a construção de conhecimentos acerca do conceito de Parábola. Quanto à possibilidade de compreender e atuar melhor no mundo, contribuímos quando permitimos ao estudante observar que o conhecimento matemático não é pronto, acabado e a-histórico, mas que foi e continua sendo construído pelos indivíduos ao longo do tempo. Esta concepção pode interferir na maneira pela qual este futuro professor compreende o processo de aprendizagem, sendo que esta compreensão pode direcionar também sua prática.

Em relação a futuras pesquisas, sugerimos que, exatamente como neste trabalho, podem ser abordadas a Elipse e também a Hipérbole. Sugerimos ainda, a realização de pesquisas, sobre conteúdos matemáticos, especialmente nas licenciaturas, observando as potencialidades educativas do saber matemático como aponta Fiorentini (2005), citado nesta seção. Um desses conteúdos poderia ser a Geometria Analítica, considerando que, neste estudo, os sujeitos apresentaram dificuldades no trabalho com a mesma. Recomendamos também a realização de mais trabalhos com a utilização didática da História da Matemática, que pode ser enriquecedora e fascinante, além de poder suscitar uma reflexão sobre as concepções epistemológicas do professor em formação, como já apontamos.

Finalmente, esperamos que este estudo possa provocar reflexões sobre o ensino da Matemática na formação de professores e oferecer subsídios para o trabalho do docente ao abordar as Seções Cônicas.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In. BRUN, J. (Org.) Trad. Maria José Figueiredo **Didactica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

BONGIOVANNI, V. **Les caractérisations des coniques avec Cabri-géomètre en formation continue d'enseignants**: étude d'une sequence d'activités et conception d´un hyperdocument. 2001. Tese de Doutorado – Universite Joseph Fourier, Grenoble.

BOULOS, P.; CAMARGO, I. **Geometria analítica**: um tratamento vetorial. 3ª ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. Brasil: Edgard Blücher, 1974.

BRITO, A. J. A história da matemática e a da Educação Matemática na formação de professores. **Educação Matemática em Revista SBEM.** São Paulo. Ano 13, n. 22. p. 11-15, jun. 2007.

BRITO, A. J.; MIORIM, M. A. A história na formação de professores de matemática: reflexões sobre uma experiência. In: SILVA, C. M. S. (org). **Anais do III Seminário Nacional de História da Matemática**. Vitória: Ed. UFES, 1999.

BRITO, A. J. **Geometrias não-euclidianas**: um estudo histórico pedagógico. 1995. Dissertação de mestrado (Educação) - UNICAMP, Campinas.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática. In: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 35-113.

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999, p.135- 154.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Editora Ática, 2003. v.3

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p.11-34.

_________. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Trad. Myriam Veja Restrepo. Colômbia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogia, Grupo de Educación Matemática, 2004.

EVES, H. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula.** Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. v.3

________. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues- 2ª ed. Campinas, São Paulo: Unicamp, 1997.

FIORENTINI, Dario. A Formação Matemática e Didático-Pedagógica nas Disciplinas da Licenciatura em Matemática. In: **Revista de Educação**. PUC – Campinas, n. 18, p. 107-115, junho 2005.

FLORES, C. R. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **BOLEMA – Boletim de Educação matemática**. Rio Claro, nº 26, p. 77 a 102. 2006

FONT, V. *et al*. **Enfoque ontosemiótico de las representaciones em educación matemática**. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidade de Granada, 2005. Disponível em: <http:/www.ugr.es/~jgodino/funcionessemioticas/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf>. Acesso em 10 nov. 2008.

FREITAS, J. M. Situações Didáticas. In: MACHADO, S. D. A. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999, p. 65-87.

GIONGO, A. R. **Curso de Desenho Geométrico**. 26ª ed. São Paulo: Nobel, 1975.

KATZ, V. J. **The History Mathematics**: an Introduction. 2ª ed. Editora Addison Wesley. Longman, 1998.

KLINE, Morris. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**. Nova York, Oxford: Oxford University Press, 1972.

LEITHOLD, L. **O cálculo com Geometria analítica**. São Paulo: Harbra, 1986. v. 1

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 197-208.

MENDES, I. A. História no ensino da matemática: o caso da trigonometria. **Revista Informat**, Lisboa, v. 07, p. 04 a 05. 2001.

MIGUEL, A.; BRITO, A. de J. A história da matemática na formação do professor de matemática. In: FERREIRA, E. S. (Org.) **Cadernos CEDES. n. 40**. Campinas: Papirus, 1996.p. 47- 61.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre história e educação matemática.** 1993. Tese de doutorado (Educação). UNICAMP, Campinas.

PAIS, L. C. Didática da Matemática: uma análise da influência francesa. In: **Coleção Tendências em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

SATO, J. **As Cônicas e suas aplicações**. Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2004. Disponível em: <http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/Curso_ConicasAplicacoes.pdf>. Acesso em: 25 maio 2007.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge Growth in Teaching. In: **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria Analítica.** 2ª ed. São Paulo: McGrawHill, 1987.

TEUKOLSKY, R. Seções Cônicas: um tópico interessante e enriquecedor. In: LINDQUIST, M. M. & SHULTE, A. P. (Orgs). **Aprendendo e Ensinando Geometria.** Trad. Domingues, Hygino H. São Paulo: Atual, 1994. p. 191-213.

VENTURI, J. J. **Cônicas e Quádricas**. Curitiba: Artes Gráficas e Ed. Unificado, 1994.

VIANNA, C. R. **Matemática e História**: algumas relações e implicações pedagógicas. 1995. Dissertação de Mestrado. USP, São Paulo.

APÊNDICES

APÊNDICE A – A sequência didática

Apresentamos a seguir, as questões da seqüência didática.

PARTE I

1. Construa uma parábola, por meio de traçado manual, conhecidos a Diretriz *d* e o Foco *F* (Extraído de GIONGO, 1975, adaptado).

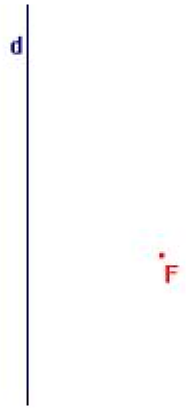
Procedimentos:

- Por *F* traçar a reta t perpendicular a *d* da seguinte maneira:

- com centro do compasso em *F* e raio qualquer marcar os pontos B e C em *d*;
- com centro em B e raio qualquer traçar arcos acima e abaixo de *d*;
- com centro em C e mesmo raio obter a perpendicular t à reta *d.*

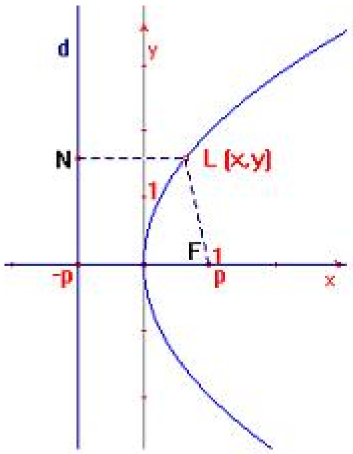
- Chamar A o ponto de intersecção entre *d* e t;
- Marcar o ponto médio O entre A e *F*;
- O é o vértice da parábola;
- Sobre a reta t, a partir de O, na direção de *F*, marcar dois pontos D e D', quaisquer;
- Por D, traçar perpendicular r à reta t;
- Por D', traçar perpendicular s à reta t;
- Com centro em *F* e raio AD, cortar a perpendicular r em M e M', que são pontos da parábola;
- Com centro em *F* e raio AD', cortar a perpendicular s em N e N', que são pontos da parábola;
- Analogamente, obtêm-se outros pontos da curva que unidos representarão a parábola.

Ao concluir a construção, responda: considerando um ponto qualquer da parábola, que relação há entre a distância deste ponto à *diretriz* e a distância deste mesmo ponto ao *foco*? Por meio de que procedimentos da construção sua resposta pode ser justificada?



2. Vamos agora estudar alguns registros de representação da parábola caracterizada como lugar geométrico a partir do plano cartesiano:

a) Seja o sistema de coordenadas, conforme a figura a seguir, L (x, y) um ponto da curva e F (p, 0) o foco. Pela definição da parábola como lugar geométrico, $\overline{LN} = \overline{LF}$. Encontre a equação da parábola em função de x.



b) Esboce o gráfico e, como no item anterior, determine a equação da parábola que tem como diretriz a reta de equação x = p e como foco o ponto F(-p, 0).

c) Compare as equações e seus respectivos gráficos encontrados nos itens **a** e **b** e escreva suas conclusões.

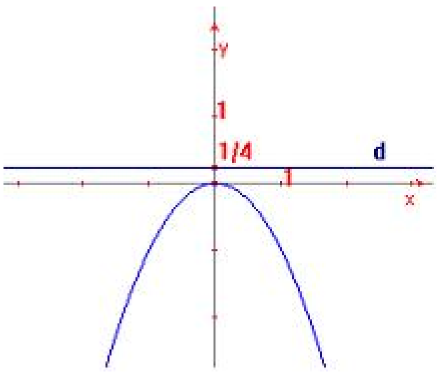
d) Esboce o gráfico e determine a equação da parábola que tem como diretriz a reta de equação y = -p e como foco o ponto F(0, p).

e) Esboce o gráfico e encontre a equação da parábola que tem como diretriz a reta de equação y = p e como foco o ponto F(0, -p).

f) Escreva suas conclusões, depois de comparar as equações e seus respectivos gráficos dos itens **d** e **e**.

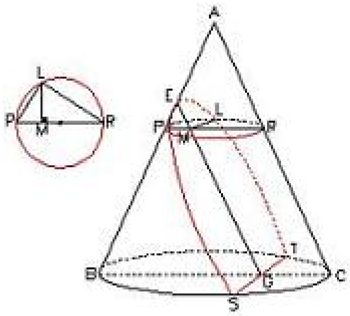
3. Esboce o gráfico da parábola de equação $y^2 = 4x$. Dê as coordenadas do foco, do vértice e a equação da diretriz.

4. Dada a equação da diretriz y = ¼, determine a equação e as coordenadas do foco da parábola representada no gráfico seguinte:

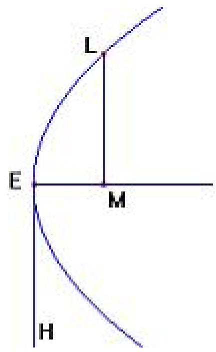


5. Escreva a equação da parábola que tem como diretriz a reta de equação y = -2 e como foco o ponto F (0,2). Esboce o gráfico.

6. Historicamente, vemos que apesar da abordagem de Apolônio, com respeito às Cônicas, ser inicialmente tridimensional, ele estudou estas curvas como figuras planas (BOYER, 1998).
Veremos agora, de acordo com Katz (1998), como Apolônio determinou a propriedade fundamental da parábola, chamada também de *symptome* da parábola.
Ele começa tomando um ponto arbitrário L na seção (veja figura seguinte), passando por L um plano paralelo à base circular. A seção do cone obtida por esse plano é um círculo com diâmetro PR. Seja M a intersecção deste plano com o segmento EG. Então LM é perpendicular a PR, e, portanto, $LM^2 = PM. MR$



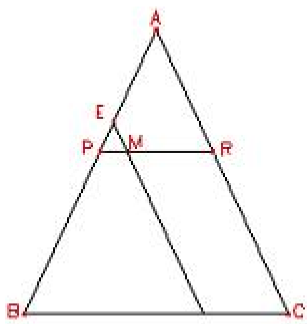
Se EG é paralelo a AC, um lado do triângulo axial[24], Apolônio deriva a *symptome* da parábola, ou seja, a relação entre EM e LM, a abscissa e a ordenada, respectivamente, do ponto L da curva. Para isso, ele desenha EH (*latus rectum*) perpendicular a EM tal que



$$\frac{EH}{EA} = \frac{BC^2}{BA.AC}$$

a) Verifique as igualdades e justifique sua resposta:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{PM}{EM} \text{ e } \frac{BC}{BA} = \frac{MR}{EA}$$



[24] É a região triangular obtida pela intersecção do cone com um plano que contém o eixo do mesmo

b) Mostre que

$$\frac{EH}{EA} = \frac{MR.PM}{EA.EM}$$

c) Verifique se é válida a igualdade e justifique sua resposta:

$$\frac{EH}{EA} = \frac{EH.EM}{EA.EM}$$

d) Utilizando os itens anteriores e lembrando que $LM^2 = PM.\ MR$, mostre que

$$LM^2 = EH\ .\ EM$$

e) Dê, com suas palavras, uma interpretação geométrica para a propriedade fundamental da parábola $LM^2 = EH\ .\ EM$.

7. Vamos analisar a propriedade $LM^2 = EH\ .\ EM$, deduzida por Apolônio, aplicada à parábola de equação $y^2 = x$. Para isso, construa, no plano cartesiano, o gráfico da parábola $y^2 = x$, encontre o foco F e faça o seguinte:

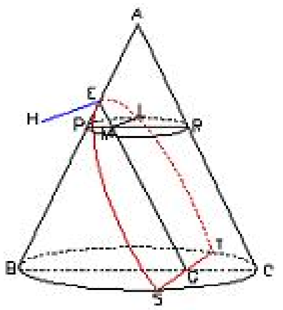
- trace o segmento AB perpendicular ao eixo de simetria da parábola em F com os pontos A e B pertencentes à curva;
- determine o comprimento $\overline{AB}$;
- marque o ponto L (4, 2) sobre a curva ;
- construa sobre o eixo x, à direita da abscissa 4, o quadrado da ordenada de L;
- construa um retângulo de área equivalente à do quadrado, sendo um de seus lados, a abscissa de L.

a) Qual a relação entre o comprimento $\overline{AB}$ e o coeficiente de x na equação da parábola? Como é denominado o comprimento $\overline{AB}$ então?

b) Como Apolônio denominava o comprimento do lado do retângulo construído sobre o eixo y? Compare o comprimento deste lado com o comprimento $\overline{AB}$. O que você conclui?

8. Dê, <u>com suas palavras</u>, uma interpretação geométrica para a equação da parábola $y^2 = 4px$. Compare sua resposta com a interpretação geométrica dada para a propriedade $LM^2 = EH \cdot EM$, no item **e** da questão **6**.

9. A parábola caracterizada como seção de um cone e a parábola caracterizada como lugar geométrico representam exatamente a mesma curva? Para responder essa questão, considere a parábola representada no cone a seguir:

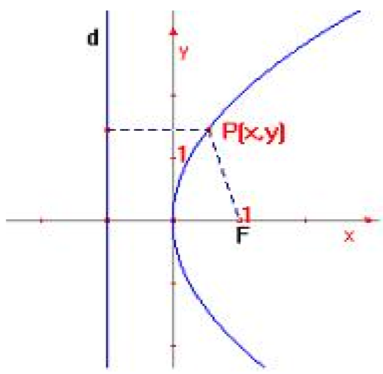


a) Introduza num sistema de coordenadas cartesianas a parábola e os pontos L, M, E e H e verifique, algebricamente, se a *symptome* da parábola $LM^2 = EH \cdot EM$, é equivalente à equação da parábola $y^2 = 4px$ definida analiticamente.

PARTE II

1. Quais cônicas você conhece? Por que são chamadas "cônicas"?

2. Considere o ponto P pertencente à parábola representada no plano cartesiano da figura seguinte:

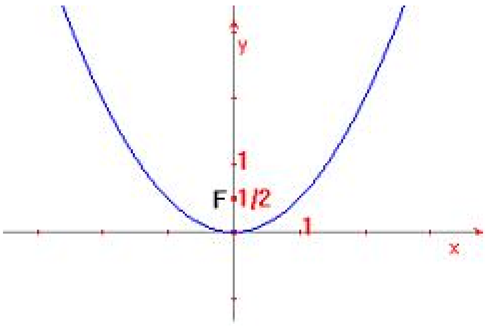


Na figura, qual é a relação entre a distância do ponto P ao foco F e a distância de P à diretriz d? Justifique.

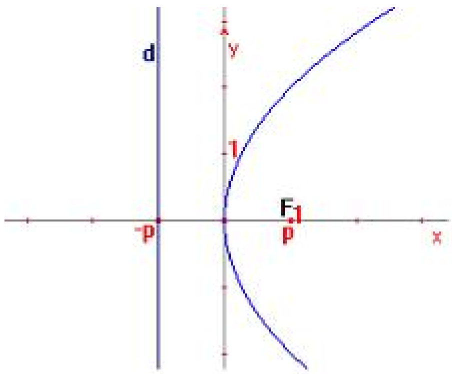
3. Como é chamado o valor representado pelo comprimento do segmento de reta que passa pelo foco de uma parábola, tem extremidades nos pontos desta curva e é perpendicular ao seu eixo?

4. Esboce o gráfico da parábola de equação $y^2 = -12x$. Determine a coordenadas do foco e a equação da diretriz.

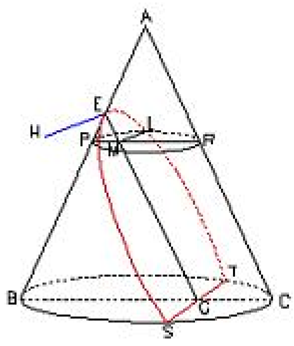
5. Dado o ponto F (0,1/2), determine a equação da diretriz e a equação da parábola representada no seguinte gráfico:



6. Considere o gráfico da equação $y^2 = 4px$ representado na figura abaixo:



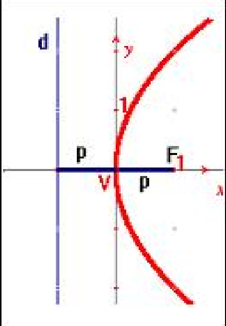
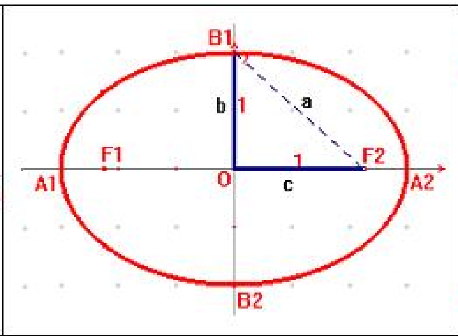
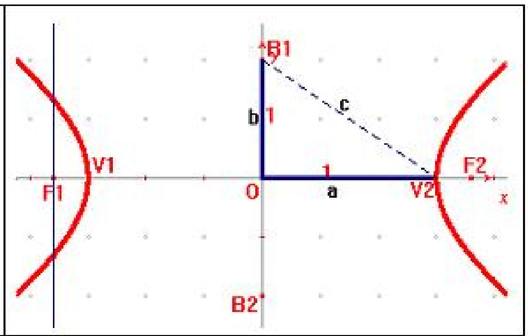
Considere também a propriedade $LM^2 = EH \cdot EM$ da curva representada a seguir:



$LM^2 = EH.\ EM$ e $y^2 = 4px$ representam a mesma curva? Justifique sua resposta.

APÊNDICE B – Materiais impressos utilizados durante os encontros

Caracterização das Cônicas como lugar geométrico[25] (DANTE, 2003).

		
Parábola: é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta fixa **d**, chamada *diretriz*, e de um ponto fixo **F**, não pertencente à diretriz, chamado *foco*. À distância do Vértice ao Foco chamamos p.	**Elipse**: é o lugar geométrico dos pontos de um plano tal que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos, denominados F_1 e F_2, seja constante, igual a 2a e maior que a distância entre os focos (2a > 2c).	**Hipérbole**: é o lugar geométrico dos pontos de um plano tal que a diferença (em módulo) de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante (2a < 2c), com F_1F_2 = 2c.

Cônicas: síntese histórica

Segundo Kline (1972), por volta de 600 a.C. a 200 a.C., surgiu o mais importante tratado sobre Seções Cônicas. Umas obras compostas por oito livros, de Apolônio de Perga, que foram as maiores e mais significativas contribuições daquele tempo.

No entanto, Segundo Boyer (1947), as Seções Cônicas eram conhecidas já havia cerca de um século e meio quando surgiu a obra. Foram estudadas por Euclides, Aristeu e também Arquimedes. Mas acredita-se que foram construídas por Menaecmo (séc. IV a.C) ao tentar resolver o problema da Duplicação do Cubo[26], que consista em construir um cubo cujo volume fosse o dobro do volume de um cubo dado.

---

[25] Consiste no conjunto de pontos do espaço que gozam de uma determinada propriedade matemática qualquer.

[26] Segundo a lenda, uma peste assolou Atenas, por volta de 430 a.C.: Através do oráculo de Delfos, Zeus anunciou que a peste somente cessaria se fosse construído um altar a Apolo, cujo tamanho fosse o dobro do que lá existia. O problema também é conhecido como "problema de Delos" (EVES, 1997).

A hipótese que normalmente se faz é que ele teria obtido as Cônicas utilizando três tipos de cone de uma folha, que se diferem pelo ângulo da seção meridiana[27]. No caso de o ângulo ser agudo, um plano que corta a superfície do cone perpendicularmente a uma geratriz, produz uma elipse (Fig.1); se o ângulo é reto, a seção é uma parábola (Fig. 2); e se é um ângulo obtuso, um ramo de hipérbole (Fig. 3).

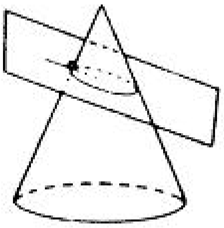


Fig. 1 – Elipse

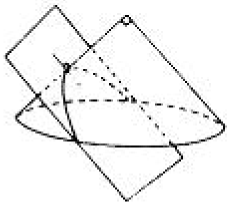


Fig. 2 – Parábola

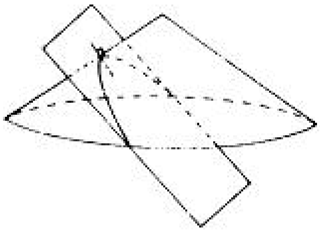


Fig. 3 -–Hipérbole

Apolônio, no entanto, mostrou sistematicamente que não é necessário tomar seções perpendiculares a um elemento do cone e que apenas variando a inclinação do plano da seção, de um cone, podem ser obtidas as três espécies de seções cônicas (Fig. 2). Provou que o cone não precisa ser reto para a obtenção das curvas, mas pode ser também um cone oblíquo ou escaleno. Substituiu o cone de uma só folha por um duplo e foi quem deu os nomes “elipse”, “hipérbole” e “parábola” para essas curvas (KATZ, 1998).

Apolônio obtinha as Cônicas de um cone no espaço tridimensional, mas logo deduziu do cone uma propriedade plana para as seções e daí por diante continuou seus estudos no espaço bidimensional, dispensando o cone.

Somente durante o séc. XVII, com o início da criação da Geometria Analítica por Pierre Fermat (1601-1665), as Cônicas passaram a ter um novo tratamento matemático, que consistia em definir uma Cônica como lugar geométrico.

BIBLIOGRAFIA

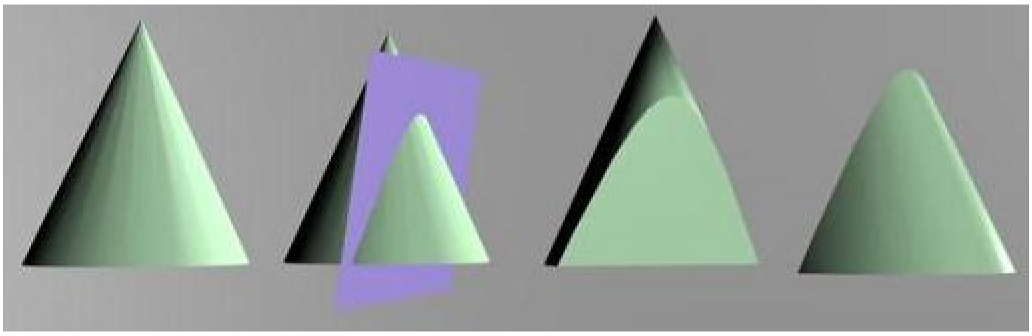
BOYER, Carl B.. **História da Matemática**. (1ª ed. 1968) Trad. Elza F. Gomide. 2ª ed. Brasil: Edgard Blücher, 1998.

KATZ, Victor J. **The History Mathematics: an Introduction**. 2ª ed. Editora Addison Wesley Longman, 1998.

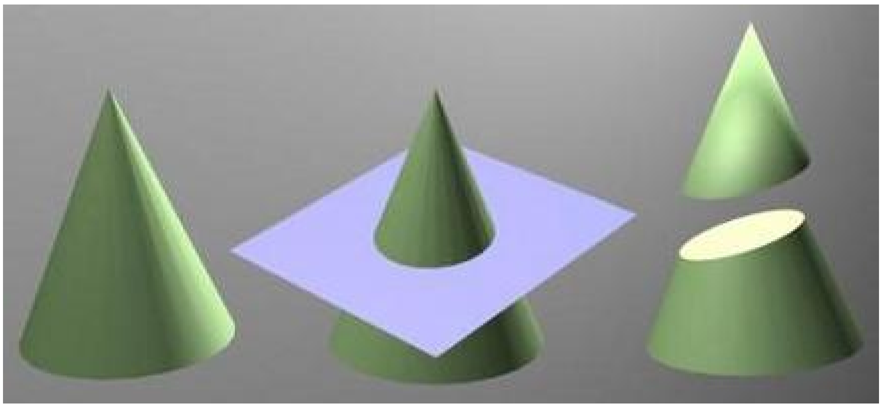
KLINE, Morris. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**. Nova York, Oxford: Oxford. University Press, 1972.

[27] A seção meridiana de uma superfície é obtida por sua intersecção com um plano que passa pelo seu eixo de rotação.

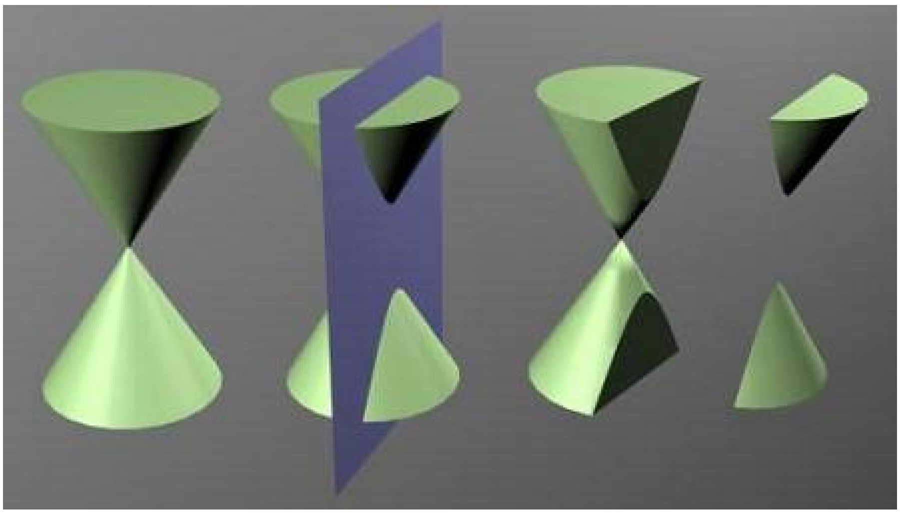
Caracterização das Cônicas como seção de um cone



Se o plano é paralelo a uma geratriz do cone temos uma **parábola**.



Se o plano intersecta apenas uma folha do cone temos uma **elipse**.



Se o plano intersecta as duas folhas do cone temos uma **hipérbole**.

Os nomes das curvas

Segundo Eves (1992), “todo trabalho de Apolônio foi apresentado sob a forma geométrica regular, sem a ajuda da notação algébrica analítica de nossos dias.” (EVES, 1992, p.61). Porém, este autor também coloca que é mais fácil descrever o trabalho de Apolônio por meio do uso de termos e símbolos atuais, como fazemos na construção da questão **7**.

Os nomes dados às Cônicas se devem à relação entre a área do quadrado da ordenada de um ponto da curva (y^2) e a área do retângulo formado pelo *latus rectum* que corresponde ao valor do parâmetro[28] (p) e pela abscissa deste mesmo ponto (x):

- se $y^2 < px$, a cônica é uma Elipse (*ellipsis*, que indica *falta*);
- se $y^2 = px$, a cônica é uma parábola (*parabole*, que significa *comparação*, indicando nem excesso nem deficiência);
- se $y^2 > px$, a cônica é uma hipérbole (*hyperbole*, indicando *excesso*).

Os nomes elipse, parábola e hipérbole foram usados anteriormente pelos pitagóricos por ocasião do método chamado “aplicação de áreas” [29].

[28] O comprimento da corda que passa por um foco da cônica e que é perpendicular ao eixo principal.

[29] Quando os pitagóricos aplicavam um retângulo a um segmento de reta, isto é, colocavam a base do retângulo ao longo do segmento de reta, com um vértice do retângulo sobre uma extremidade do segmento, eles diziam que se tinha um caso de “ellipsis”, “parabole” ou “hyperbole”, conforme a base do retângulo ficava aquém do segmento de reta, coincidia com ele ou o excedia. (EVES, 1997)

APÊNDICE C – Questionário

1. Antes de resolver as questões da Seqüência Didática:

a) Você já conhecia ou tinha ouvido falar na história das Cônicas?

b) Já havia estudado as Cônicas, especialmente a parábola? Se sim, em que momento do curso?

c) Já tinha visto um tratamento da parábola diferente do tratamento analítico?

d) Você já havia verificado matematicamente que a parábola caracterizada como seção de um cone e a parábola caracterizada como lugar geométrico representam a mesma curva?

2. Deixe, se achar conveniente, um depoimento sobre sua participação nesta pesquisa (o que pensa sobre as questões, pontos positivos, pontos negativos...).

ANEXOS

ANEXO A – Termo de consentimento

Eu, ____, portador (a) do RG nº _______________________, SSP/ ______, autorizo a professora Cristina Aparecida de Melo Piza, a utilizar, parcial ou integralmente minhas anotações, respostas a questionários, bem como registros de entrevistas, para fins de pesquisa, sem restrições de prazo e citações, desde a presente data. Estes dados também poderão ser divulgados integralmente ou em partes em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que meu nome seja citado apenas como participante da pesquisa, garantido o anonimato no relato desta.

Declaro ainda, que fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Abdicando direitos meus e de meus descendentes, subscrevo o presente termo.

Londrina, 08 de outubro de 2008.

____