Universidade Estadual de Londrina

MAGNA NATALIA MARIN PIRES

OPORTUNIDADE PARA APRENDER:

UMA PRÁTICA DA REINVENÇÃO GUIADA NA PROVA EM FASES

Londrina
2013

MAGNA NATALIA MARIN PIRES

OPORTUNIDADE PARA APRENDER:

UMA PRÁTICA DA REINVENÇÃO GUIADA NA PROVA EM FASES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito Parcial à obtenção do título de Doutor.

Orientadora: Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco.

Londrina
2013

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

P667o Pires, Magna Natalia Marin.
Oportunidade para aprender : uma prática da reinvenção guiada na prova em fases / Magna Natalia Marin Pires. – Londrina, 2013.
123 f. : il.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Professores – Testes e medidas educacionais – Teses. 3. Professores – Formação – Teses. 4. Educação matemática – Teses. 5. Aprendizagem – Avaliação – Teses. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

MAGNA NATALIA MARIN PIRES

OPORTUNIDADE PARA APRENDER:

UMA PRÁTICA DA REINVENÇÃO GUIADA NA PROVA EM FASES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito Parcial à obtenção do título de Doutor.

BANCA EXAMINADORA

____
Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco
UEL – Londrina - PR

____
Prof. Dr. Carlos Roberto Vianna
UTFPR – Londrina - PR

____
Profa. Dra. Helena Noronha Cury
UNIFRA – Santa Maria - RS

____
Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
UEL – Londrina - PR

____
Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
UEL – Londrina - PR

Londrina, 25 de fevereiro de 2013.

À Débora, Elza, Lúcia, Lucinei,

Mara, Márcia, Maria Lúcia,

Mírian e Siumara.

AGRADECIMENTOS

Àquele que me sustentou como filha, esposa, mãe, amiga, profissional e estudante. Sem **o meu Deus,** seria impossível exercer todos esses papéis.

Aos meus pais, pelo exemplo de vida e apoio em todos os momentos.

À minha amiga, colega, um pouco mãe, um pouco filha e orientadora Regina Luzia Corio de Buriasco, pelo acompanhamento e participação na minha formação profissional e como pessoa desde os meus últimos anos de graduação, ou seja, nos últimos 22 anos.

Ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

A todos da Escola Municipal José Brazil Camargo, pelo espaço concedido para a realização da pesquisa; especialmente às *minhas* nove professoras, pela dedicação, disponibilidade, amizade e por todo o apoio durante o desenvolvimento do trabalho.

Aos professores/pesquisadores componentes da banca, Angela Marta Pereira das Dores Savioli, Carlos Roberto Vianna, Helena Noronha Cury e Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino, por aceitarem examinar este trabalho e pelas importantes contribuições para que ele pudesse ser finalizado.

À coordenação do Projeto Educação Matemática de Professores que ensinam Matemática nas pessoas das professoras Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino e Lourdes Maria Werle de Almeida, que se empenharam e não mediram esforços para que eu pudesse desenvolver o projeto.

Ao corpo docente do departamento de Matemática da UEL, pelo apoio durante os quatro anos de afastamento para a realização deste doutoramento.

Aos membros do GEPEMA, grupo muito especial, pelas amizades, pelos exemplos e ensinamentos oferecidos durante a nossa convivência.

À minha amiga e irmã do coração, Marilda Trecenti Gomes, pela companhia, pelo consolo, pela amizade e pelo carinho dispensados nessa caminhada profissional e pessoal.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro concedido a esta pesquisa.

Aos meus filhos, Maria Carolina e Thales, que, mesmo reclamando, suportaram as minhas ausências, falta de atenção e também as minhas queixas.

Ao meu marido, Charles, pelo companheirismo, pelo poder de fazer-me sentir pessoa amada e querida, sentimentos sem os quais essa caminhada seria muito mais difícil.

Aos meus alunos, que, nos meus 25 anos de profissão, tiveram grande contribuição na minha formação profissional.

A todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho.

PIRES, Magna Natalia Marin. **Oportunidade para aprender:** uma prática da reinvenção guiada na prova em fases. 2013. 123 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

RESUMO

Este trabalho descreve e analisa uma pesquisa com uma prova em fases, realizada com nove professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal do Paraná. Essa prova foi analisada como uma forma de realizar uma reinvenção guiada na perspectiva da Educação Matemática Realística. A Prova em Fases, tomada como instrumento também de avaliação formativa, viabilizou à pesquisadora/formadora analisar o trabalho das participantes em diferentes momentos, para fazer intervenções que considerou oportunas. Na reinvenção guiada conduzida neste estudo como estratégia de formação continuada, as participantes desempenharam um papel fundamental como protagonistas da aprendizagem. As questões da prova foram o ponto de partida para o processo de reinvenção e, nesse processo, a pesquisadora/formadora participou como guia, recurso, mediando o processo com perguntas e considerações a respeito da produção escrita das participantes. Estas, em lugar de serem meras receptoras de uma matemática pronta e acabada, desempenharam o papel de agentes do processo desenvolvido e, como tal, foram estimuladas a utilizar sua própria produção na “re-invenção guiada”, uma vez que diferentes estratégias, por vezes refletindo diferentes níveis, puderam ser provocadas e utilizadas de forma produtiva no processo de aprendizagem.

Palavras-chaves: Educação matemática realística. Reinvenção guiada. Prova em fases. Avaliação formativa.

PIRES, Magna Natalia Marin. **Opportunity to learn:** a practical guided reinvention of the stages test. 2013. 123 p. Thesis (Doctorate Sciences and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

ABSTRACT

This work describes and analyses a research considering a stages test, performed with nine teachers of the early grades of the Fundamental Teaching in a city public school in Parana State. This test was analyzed as a way to achieve of a guided reinvention on the Realistic Mathematics Education perspective. The stages test, also taken as formative assessment, enabled the researcher/trainer to evaluate the participants work in different moments, in order to make interventions considered appropriate. In the guided reinvention conducted in this study as an ongoing formation strategy, the participants had a key role as learning protagonists. The tests questions were the start point for the reinvention process and, in this process the researcher/trainer participated as a guide, resource, mediating the process with questions and considerations about the written production of the participants. These ones, instead of being mere receivers of a ready and finished Mathematics, played the role of agents of the developed process, and, as such, were stimulated using their own production in "re-guided invention", since different strategies, sometimes reflecting different levels, could be triggered and used in a productive way.

Keywords: Realistic mathematics education. Guided reinvention. Stages test. Formative assessment.

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

Introdução

Este estudo diz respeito a uma das ações desenvolvidas no projeto "Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática" proposto pelo grupo de Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PECEM da Universidade Estadual de Londrina, aprovado no Edital CAPES/INEP nº 38/2010 do Programa Observatório da Educação. O projeto tem por objetivo principal fomentar a produção acadêmica relativa à formação de professores que ensinam matemática e à formação de recursos humanos em Educação Matemática na Educação Básica, na Graduação e na Pós-Graduação (mestrado e doutorado), na busca de subsídios para elevação do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – IDEB.

O projeto está sendo desenvolvido em duas cidades do Paraná e é conduzido por duas doutorandas do PECEM, uma em cada local. Em uma das cidades, o trabalho é feito com professoras e alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental e, em outra, com professoras dos anos finais.

A presente pesquisa refere-se ao desenvolvimento do trabalho realizado por esta autora com professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Para atender ao objetivo do projeto, uma das ações propostas é o desenvolvimento concomitante, por um lado, de uma agenda de trabalho de capacitação envolvendo professoras dos anos inicias do Ensino Fundamental e a coordenadora de uma escola pública em um município situado no norte do Paraná e, por outro lado, uma investigação a respeito dessa capacitação.

No trabalho de capacitação foi utilizada uma *prova em fases*[1] a partir da qual foi realizada uma análise da produção escrita, para a obtenção de informações a respeito do processo de aprendizagem das participantes. A análise da produção escrita, como estratégia de

[1] Prova realizada em dois ou mais momentos.

investigação, tem sido utilizada nos trabalhos desenvolvidos no âmbito do GEPEMA[2] - Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação (BURIASCO, 1999; 2004; 2009; PEREGO, S., 2005; BURIASCO e SOARES, 2008; PEREGO, F., 2006; DALTO, 2007; SANTOS, 2008; FERREIRA, 2009; BURIASCO, FERREIRA, e CIANI, 2009; VIOLA DOS SANTOS, BURIASCO e FERREIRA, 2010). Enquanto estratégia de investigação, a perspectiva é aquela na qual a formação de professores é vista como um *campo de prática* e como *um campo de pesquisa*. Por conseguinte, o pesquisador não deve estar fora da prática, tendo esta como fonte direta dos dados. Deste modo, ao longo do processo de investigação, esta autora assume o duplo papel: o de professora e o de investigadora.

Os dados foram gerados a partir da resolução das professoras em uma prova em fases, por um movimento contínuo de interação e comunicação considerado aqui como ação de intervenção.

O desenvolvimento do projeto "Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática" toma um modelo de capacitação diferente do utilizado usualmente. Dado o contato semanal com as professoras e de acordo com as dúvidas, os questionamentos e o que é possível observar quanto ao desenvolvimento do pensamento matemático das professoras, ações são planejadas e postas em prática.

Segundo Buriasco (1999, p.62), a capacitação dos professores em serviço

> precisa ser feita a partir da problematização e discussão da sua prática pedagógica e a partir daí trabalhar os conteúdos necessários. Isto porque a formação não se efetiva na simples acumulação de cursos, de técnicas, mas mediante um trabalho permanente de reflexão crítica sobre as práticas e uma construção, também permanente, tanto pessoal quanto profissional. Daí a importância de se valorizar, dar um certo status ao saber da experiência.

e mais, a escola

[2] http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/.

> precisa ser um espaço onde trabalhar e formar sejam atividades indissociáveis e, sendo assim, a formação será vista como um processo permanente, parte do cotidiano dos professores e das escolas (BURIASCO, 1999, p.63-64).

A intenção deste trabalho é investigar a configuração[3] da análise da produção escrita como ação de intervenção organizada (reinvenção guiada) de modo que os participantes desenvolvam sua capacidade para analisar, explicar seu raciocínio, comunicar suas ideias matemáticas, enquanto resolvem, interpretam tarefas em uma variedade de situações que envolvem o pensamento matemático.

Nessas ações serão investigados processos de aprendizagem dos professores e estratégias de enfrentamento às suas dificuldades de aprendizagem da Matemática. As ações foram organizadas de modo a oportunizar momentos nos quais a pesquisadora e as professoras participantes desenvolveram uma atitude investigativa relativa às atividades desenvolvidas.

Para conhecer e apresentar a configuração da análise da produção escrita como ação de intervenção organizada (reinvenção guiada), pretende-se:

- apresentar e descrever o trabalho com uma prova em fases, na perspectiva da Educação Matemática Realística[4], como uma forma de tomar a avaliação como um meio para aprender;
- analisar a prova em fases, na perspectiva da Educação Matemática Realística, como uma forma de conduzir a reinvenção guiada;
- apresentar características da reinvenção guiada no desenvolvimento de uma prova em fases.

[3] Configurar: dar ou tomar forma, feitio; desenhar, esculpir. Ex.: movimentos geológicos configuram as montanhas.
[4] Designação de uma abordagem holandesa para o ensino de Matemática.

Capítulo 1

APRESENTAÇÃO DOS ELEMENTOS DA PESQUISA

A pesquisa aqui apresentada é de natureza qualitativa, de cunho essencialmente interpretativo (BOGDAN e BIKLEN, 1994; GARNICA, 2004). De acordo com Garnica (2004, p.86), o adjetivo "qualitativa" estará adequado às pesquisas que

> reconhecerem: (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.

Os procedimentos de uma pesquisa qualitativa variam de acordo com os objetivos a serem alcançados, e, nela, o interesse é pelo processo e não pelo produto, além disso o pesquisador atua como um viajante que não planejou sua viagem (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

O trabalho de campo da pesquisa em tela foi desenvolvido de fevereiro de 2011 a junho de 2012.

Considerando que o programa Observatório da Educação – Edital 2010, entre outros, tem interesse especial

- por estudos e pesquisas sobre os processos de alfabetização e de domínio da Língua Portuguesa e da Matemática;
- pelo fortalecimento do diálogo entre a comunidade acadêmica, os gestores das políticas nacionais de

educação e os diversos atores envolvidos no processo educacional;

- pelo estímulo à utilização de dados estatísticos educacionais produzidos pelo INEP como subsídio ao aprofundamento de estudos sobre a realidade educacional brasileira;

em dezembro de 2010, fez-se contato com a Diretora Pedagógica da SEDESHU (Secretaria de Desenvolvimento Humano) – da Prefeitura de Apucarana para esclarecimentos a respeito do projeto e a indicação de uma escola que pudesse e quisesse ser cenário para o desenvolvimento de uma parte dele. A Diretora Pedagógica sugeriu uma escola de periferia que tinha tirado nota menor que cinco de IDEB – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica na avaliação feita em 2007. Por seu intermédio foi agendada uma reunião com a diretora da escola sugerida, na qual os objetivos e os encaminhamentos do projeto foram expostos. Uma semana depois, a diretora informou que todas as professoras, seis regentes de classe, duas auxiliares e a coordenadora estavam dispostas a participar dos encontros. Foi então agendado o primeiro encontro com as professoras para fevereiro de 2011, durante a chamada Semana Pedagógica, período destinado ao planejamento e à capacitação. No dia 05 de fevereiro foi então realizada a reunião na qual foram apresentados os detalhes do projeto e o cronograma de trabalho.

Para traçar um perfil das participantes foi elaborado um questionário (Apêndice A) que elas responderam por escrito na escola, no primeiro encontro. As informações assim obtidas foram organizadas em um quadro, apresentado na secção 1.1. Na mesma ocasião assinaram um termo de consentimento livre e esclarecido (Apêndice B).

Os encontros semanais da pesquisadora com as professoras ficaram agendados para todas as sextas-feiras das 8h às 11h, a partir de março do mesmo ano. Ficou combinado que, em cada encontro, o primeiro tempo (período de tempo antes do recreio) seria destinado ao desenvolvimento do trabalho com a prova em fases e que o segundo tempo (período de tempo depois do recreio) seria utilizado para a realização e discussão de tarefas da *Early Algebra*[5]. Para a realização deste estudo, utilizou-se apenas o trabalho com a prova em fases.

Estabeleceu-se também que os bolsistas do projeto (mestrandos e estudantes da Licenciatura em Matemática) atenderiam as turmas da escola enquanto as professoras participavam dos encontros.

1.1 As Participantes

Participaram da pesquisa:

- a pesquisadora, que assumiu também o papel de formadora;
- nove professoras de uma escola municipal da cidade de Apucarana, aqui denominadas PA1, PA2, PA3, PA4, PA5, PA6, PA7, PA8 e PA9. Destaca-se, dentre as nove professoras que participaram do projeto que:
    - duas delas estão na faixa dos 30 anos, seis na faixa dos 40 e uma na faixa dos 50 anos;
    - todas trabalham 40 horas semanais;
    - sete delas estudaram tanto o Ensino Fundamental quanto o Ensino Médio em escolas públicas; duas estudaram o Ensino Fundamental parte em escola pública e parte em particular e o Ensino Médio na escola pública;
    - todas tem curso superior, sendo que duas delas fizeram curso à distância;
    - somente uma professora não fez especialização;

[5] Mais informações em: http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/about.asp

- seis delas não haviam participado de outros projetos.

O quadro a seguir retrata o perfil das professoras participantes.

Quadro 1. Perfil das professoras participantes da pesquisa

Profes-sora	**Idade (anos)**	**Tempo no magis-tério (anos)**	**Carga horária de trabalho por semana**	**Série em que leciona (2011)**	**Curso Superior/Dep. administrativa**	**Especialização**
PA1	36	12	40	4º ano	Ciências Biológicas/ Particular	Não
PA2	42	14	40	Reforço - todos os anos	Pedagogia/ Pública	Psicopedagogia
PA3	41	24	40	4º ano	Pedagogia/ Particular	Gestão do Trabalho Pedagógico
PA4	42	20	40	2º ano	Normal Superior a Distância/ Particular	Classe Especial e Inclusão
PA5	42	15	40	3º ano	Letras/ Particular	Educação Especial
PA6	53	21	40	2º ano	Normal Superior a Distância/ Particular	Psicopedagogia
PA7	47	15	40	Coorde-nação	Pedagogia/ Particular	Supervisão, Orientação e Gestão Escolar
PA8	38	11	40	3º ano	Ciências Biológicas/ Particular	Educação Especial
PA9	45	15	40	Reforço - todos os anos	Pedagogia/ Particular	Educação Especial

1.2 Prova em Fases

A Prova em Duas Fases foi concebida originalmente na Holanda. A ideia consiste em elaborar uma prova que o aluno resolve em dois momentos: num primeiro, na sala de aula e sem quaisquer indicações do professor; num segundo momento, dispondo de mais tempo e dos comentários que o professor formulou ao avaliar as resoluções iniciais.

Nesta pesquisa utilizou-se a ideia desse tipo de prova, não especificamente com duas fases, mas como vem sendo utilizado por Buriasco nas aulas ministradas em disciplinas da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina nos últimos anos – prova em fases. Com isso, busca-se atender as necessidades e as oportunidades reconhecidas nas resoluções estudadas.

A prova em fases utilizada continha onze (11) questões de matemática (Apêndice C), cada uma das questões foi selecionada levando em conta a sua potencialidade quanto à exploração de elementos caracterizadores do pensamento matemático, assim como a possibilidade de resolver a questão de mais de uma maneira, ou de ter mais de uma resposta.

As informações colhidas para esta pesquisa foram sistematicamente organizadas mediante uma análise das resoluções das professoras nas questões da prova em fases e das anotações feitas pela pesquisadora durante os encontros.

A primeira fase da prova foi desenvolvida durante três (3) encontros: quatro (4) questões foram resolvidas no primeiro encontro, quatro (4) no segundo e o restante, no terceiro. Nessa primeira fase, as questões foram resolvidas sem nenhuma indicação da pesquisadora, em um determinado tempo (aproximadamente 1h em cada um do s encontros), em situação de avaliação. Após a p rimeira fase, a pesquisadora analisou as r esoluções iniciais de cada questão, fez comentários pedindo justificativas e/ou esclarecimentos.

Nos encontros posteriores a e sses três primeiros, as professoras trabalharam nas respostas aos questionamentos da pesquisadora, sempre em duas questões concomitantemente. Quando o entendimento da pesquisadora era de que a potencialidade das respostas da professora e também da questão tinha sido esgotada, passava-se para outra questão. Dessa maneira o número de “fases” de cada questão foi diferente, oscilando entre três e dezessete, e, em consequência, o número de fases da prova também variou de professora para professora.

A prova em fases teve vários objetivos:

- caracterizá-la como uma forma de praticar a reinvenção guiada;
- fornecer material para análise da produção escrita;
- reconhecer nesse instrumento oportunidade de aprendizagem.

1.3 A Escolha das Questões e das Produções Apresentadas no Capítulo 4

De acordo com BOGDAN e BIKLEN (1994), em uma pesquisa qualitativa, a escolha de dados se assemelha a um funil, primeiramente se recolhem os dados de uma maneira mais ampla, escolhendo vários sujeitos, depois, conforme os objetivos vão sendo clareados com base naquilo que interessa, estreita-se o âmbito da escolha de dados.

A prova continha 11 questões e o número de participantes da pesquisa em tela foi 9, desta forma tivemos um total de 99 questões, com respectivas soluções, comentários da pesquisadora, esclarecimentos e assim por diante. Tendo em vista essa quantidade de questões, por conveniência (apresentam mais detalhes), foram escolhidas as produções escritas de quatro professoras em quatro questões que serão aqui apresentadas e discutidas, conforme mostrado a seguir.

Questão da Prova	Professora
Q2	PA8
Q4	PA9
Q4	PA4
Q1	PA1

1.4 Procedimentos de Análise

Os dados colhidos durante a investigação precisaram ser analisados constantemente, porque as perguntas que foram sendo feitas dependiam dessa análise.

As análises e as discussões apresentadas no decorrer das explorações das resoluções das participantes tiveram como pano de fundo o aporte teórico da RME e a avaliação como oportunidade de aprendizagem. Esse caminho só pode ser trilhado apresentando os dados de forma sistematizada e explorando o fato de os encaminhamentos serem guiados pelas perguntas da pesquisadora e com a apresentação do que se considera evidências da aprendizagem das participantes.

As transcrições foram observadas em suas particularidades, tentando explorar todos os seus detalhes.

1.5 Aplicação da Prova em Fases

04 de março de 2011 - Relato do 1º Encontro no qual as professoras resolveram as questões da prova.

- Apresentação pessoal dos participantes do projeto.
- Realização de uma parte da prova em fases.

1º Momento: Apresentação dos participantes

O grupo que atua na escola é composto por esta pesquisadora que conduz a ação com as professoras da escola, quatro mestrandos, dois que desenvolvem suas pesquisas em classes dos anos iniciais e outros dois alunos que acompanham a ação junto às professoras, e mais seis alunos de graduação em Matemática que atendem alunos da escola enquanto as professoras fazem a capacitação.

No primeiro encontro não havia aula na escola, pois o dia estava reservado para atividades de planejamento pedagógico. Essa reunião contou com a participação de todos os integrantes da equipe, que se apresentaram e relataram suas funções no projeto.

2º Momento: Realização de uma prova em fases[6]

Conversei com as professoras e disse-lhes que uma das tarefas que elas fariam seria uma prova em fases composta de 11 questões, que seria aplicada em três etapas. A 1ª e a 2ª etapas, compostas de quatro (4) questões cada uma, seriam realizadas nos dias 4 e 11 de março de 2011, e a 3ª etapa, composta de três (3) questões, aconteceria em 18 de março.

Inicialmente procurei deixar as professoras bem à vontade dizendo que as soluções apresentadas por elas seriam utilizadas para orientar algumas das atividades que realizaríamos e que o acerto e o erro não seriam valorizados. A ênfase estaria na forma de encaminhamento de solução que elas dariam a cada uma das questões. Em seguida, dei algumas instruções:

- a resolução deve ser individual e sem consulta;
- a resolução deve ser feita a caneta;
- todos os rascunhos deveriam estar na folha da prova em fases, ou seja, não utilizar uma outra folha ou caderno para rascunhar.

Ao resolver as questões da prova, algumas professoras falaram:

PA6: “Ixe, e agora, nada dá certo” (ela utilizou um caderno para fazer seus rascunhos).

PA7: “A gente recebe a nota agora?” No momento em que ela entregou a prova indagou: “A nota não vai sair em edital não, né?” E, com tom um pouco irônico, disse: “Eu fiz rápido porque eu uso a lógica e desenhos”.

Outras afirmações: “O problema é o carteiro”, “Não vou mais comprar saia e blusa”.

[6] Nesta secção os relatos serão feitos na primeira pessoa (singular e plural).

PA6, no momento em que entregou a prova, disse: “Olha, eu não sei não, este curso só vai servir para gente quebrar a cab eça”. “Olha, eu posso errar, pois sou do 1º Ano”. Esta professora falava muito (sozinha) durante a resolução.

A professora PA4 disse: “Pode desistir?”

Outra professora: “Eu já estou quase desistindo, não bate nunca, eu já fiz umas 300 vezes”.

Após todas terem terminado a resolução, fomos para um breve intervalo.

Os outros encontros não estão aqui relatados como o primeiro porque a partir dele se constituíram as fases analisadas.

Capítulo 2

PANO DE FUNDO: A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

A abordagem Educação Matemática Realística – RME[7], foi uma resposta holandesa à reforma no ensino da Matemática denominada Matemática Moderna, e teve origem no projeto Wiskobas, iniciado em 1968 no então *Institute for Development of Mathematics Education*, atualmente denominado Instituto Freudenthal.

Segundo Armanto (2002, p. 29),

> de acordo com Freudenthal, a matemática deve estar conectada com a realidade, deve estar próxima das crianças e ser relevante para a sociedade, a fim de ter valor humano. Este ponto de vista envolve considerar a matemática não como matéria, um assunto, mas sim como uma atividade humana (tradução nossa)[8].

Se esse ponto de vista for considerado, a Matemática não deve ser apresentada para os alunos como um produto pronto e acabado. Na abordagem RME, os alunos devem assumir a responsabilidade por sua aprendizagem e participar ativamente nas discussões em sala de aula, orientados pelo professor (ARMANTO, 2002). O sentimento de "descobrir" matemática pode influenciar positivamente o comportamento do aluno em sala de aula. Além disso, nessa abordagem, os vários elementos que serão discutidos mais à frente são desenvolvidos com a intenção de gerar confiança dos alunos na aprendizagem matemática.

O termo realístico se refere a situações que possam ser imagináveis, realizáveis pelos alunos, por isso os contextos envolvidos nos problemas não precisam ser necessariamente do cotidiano no sentido usual da expressão. Nos contextos realísticos, incluem-se situações

[7] *Realistic Mathematics Education.*

[8] [...] according to Freudenthal, mathematics must be connected to reality, stay close to children and be relevant to society in order to be of human value. This point of view involves regarding mathematics not as subject matter but, rather, as a human activity.

cotidianas, situações fictícias, de fantasias e até situações da própria Matemática.

Duas das ideias centrais da abordagem RME são a reinvenção guiada e a matematização. Para Freudenthal, na escola deveria ser dada a oportunidade de o aluno reinventar a Matemática sob a orientação do professor. Nas palavras de Van Den Heuvel-Panhuizen (2001), a educação deveria fornecer aos estudantes a o portunidade "guiada" para "re-inventar" matemática, fazendo-a. Isto significa que, na perspectiva da Educação Matemática proposta por Freudenthal, o foco não está na Matemática como um sistema fechado, mas na atividade de quem lida com ela, no processo de matematização.

O princípio da reinvenção guiada leva em conta que o conhecimento não deve ser transmitido pelo professor, mas sim elaborado pelo aluno. O p rocesso de reinvenção exige que os alunos se envolvam com situações realísticas, com a intenção de matematizá-las, em um processo semelhante ao vivenciado pelo matemático profissional.

Freudenthal (1991) entende "invenções" como passos no processo de aprendizagem e atribui o "re" na invenção porque supostamente a invenção que o aluno fará, guiado pelo professor, já foi feita por outros antes. Esse autor utilizou o termo "reinvenção guiada" para explicar como ele imaginou que a matemática poderia ser aprendida. Para ele, participar de um processo desses não significa ter de passar por toda a "genealogia histórica" e "hierarquia conceitual" do conhecimento que surgiram e foram construídas por meio da incessante interação da forma e conteúdo. Entretanto, considerava que as pessoas deveriam, sim, ter a chance de "pular" de alturas como de um penhasco e mergulhar em profundidade que conseguissem alcançar e sustentar. Acreditava também que sempre haveria uma altura e uma profundidade dentro do alcance de todos.

Tradicionalmente, nas aulas de matemática, as definições e notações são as p rimeiras "coisas" que são apresentadas aos alunos. Contudo, historicamente, sabe-se que, para chegar a u ma definição, o conhecimento foi organizado e sistematizado muitas vezes num processo nada retilíneo, até chegar a uma etapa de ser comunicado a outros. Para que as definições e notações tenham sentido para o aluno, Freudenthal (1991) acreditava que até as definições e notações deveriam passar por um processo de reinvenção pelo aluno.

A tarefa de conduzir os alunos nesse processo de reinventar não foi considerada simples por Freudenthal (1991), entendendo que é preciso, num primeiro passo, consciência desse desafio e preparação para enfrentá-lo. Um passo essencial para uma discussão a esse respeito é a formação do professor, já que é ele que tem a tarefa de guiar. A discussão dessa formação envolve procurar atingir um equilíbrio sutil entre a liberdade de inventar e a força de guiar. E mais, permitir àquele que aprende satisfazer-se nesse processo. Algumas vezes o aluno inventará algo que é novo para ele, mas bem conhecido daquele que guia. Outras vezes não, aquele que guia pode deparar-se com surpresas e tem que estar preparado para enfrentar o desafio de também, ele próprio, estar "reinventando" ao mesmo tempo que seu aluno.

Orientar o aluno num processo de reinvenção implica em o aluno ter oportunidades constantes de abstração, esquematização, formalização, sistematização, em um contínuo processo de matematização.

De acordo com Gravemeijer e Doorman (1999, p.116), para Freudenthal, "o núcleo da atividade matemática é a 'matematização', que significa organizar numa perspectiva matemática. Freudenthal vê essa atividade dos estudantes como uma maneira de reinventar a matemática" (tradução nossa)[9]. Para Freudenthal, matematizar não é uma atividade exclusiva dos matemáticos. Esse processo pode ajudar o aluno a familiarizar-se com os aspectos matemáticos de situações diversas, uma vez que, para ele, no processo de matematização, o aluno "constrói" matemática.

[9] [...] the core mathematical activity is 'mathematizing', which stands for organizing from a mathematical perspective. Freudenthal sees this activity of the students as a way to reinvent mathematics.

> O PISA tem a intenção de examinar a capacidade dos alunos de analisar, raciocinar e comunicar ideias matemáticas de forma eficaz bem como de propor, formular, resolver e interpretar problemas matemáticos em uma variedade de situações. A resolução problema exige que os alunos utilizem processos matemáticos, conhecimentos e habilidades elaborados por meio das experiências escolares e de vida. No PISA, o processo fundamental que os alunos utilizam para resolver problemas da vida real é denominado matematização (tradução nossa) (OECD 2009, p.105).[10]

Treffers (1987) definiu dois tipos de matematização: horizontal e vertical. A matematização horizontal compreende o processo de descrever uma situação utilizando ferramentas matemáticas que podem ajudar a organizar e resolver um problema, ou ainda podemos entender esse processo como aquele de ir do mundo real para o mundo matemático. A matematização vertical é um processo dentro da própria Matemática. Nesse processo, o aluno encontra conexões entre os conceitos e as estratégias, ou seja, manipula, aperfeiçoa modelos matemáticos do problema do mundo real.

Segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (2001, p.3), na

> matematização horizontal, os alunos lidam com ferramentas matemáticas que podem ajudar a organizar e resolver um problema de uma situação da vida real. A matematização vertical é o processo de reorganização dentro do próprio sistema matemático, como, por exemplo, encontrar atalhos e descobrir conexões entre conceitos e estratégias, para então aplicar essas descobertas (tradução nossa)[11].

São consideradas como matematização horizontal atividades tais como:

- identificar a matemática específica em um contexto geral;
- esquematizar;

[10] PISA examines the ability of students to analyse, reason and communicate mathematical ideas effectively as they pose, formulate, solve and interpret mathematical problems in a variety of situations. Such problem solving requires students to use the mathematical processes, knowledge and skills they have acquired through schooling and life experiences. In PISA, the fundamental process that students use to solve real-life problems is referred to as mathematisation.

[11] […] horizontal mathematization, the students come up with mathematical tools, which can help to organize and solve a problem located in a real-life situation. Vertical mathematization is the process of reorganization within the mathematical system itself, like, for instance, finding shortcuts and discovering connections between concepts and strategies and then applying these discoveries.

- formular e visualizar um problema de diferentes maneiras;
- descobrir relações;
- descobrir regularidades;
- reconhecer aspectos isomorfos em problemas diferentes;
- transferir um problema do mundo real para um problema matemático;
- transferir um problema do mundo real para um modelo de conhecimento matemático (DE LANGE, 1987).

A matematização vertical envolve:

- representar uma relação em uma fórmula;
- provar regularidades;
- refinar e ajustar modelos;
- usar diferentes modelos;
- combinar e integrar modelos;
- formular um novo conceito matemático;
- generalizar (DE LANGE, 1987).

De acordo com Van den Heuvel-Panhuizen (1996, p.11), o conceito

> de matematização horizontal e vertical é uma das características marcantes dos métodos de ensino da RME. Ele contém, na verdade, todos os aspectos importantes da teoria educacional da RME (tradução nossa)[12].

Treffers (1987, p.71) ressalta que dividir a atividade matemática

> nesses dois elementos é uma operação artificial. Na realidade, é difícil fazer a distinção, principalmente porque a esquematização e o processamento matemático estão intimamente relacionados. No entanto, esta distinção é significativa, apenas para deixar claro que atividades como a construção, experimentação e classificação se encaixam tão

[12] The concept of horizontal and vertical mathematization is one of the salient features of the RME teaching methods. It contains, in fact, all of the important aspects of the RME educational theory.

> bem no processo de matematização como no de simbolização e de formalização (tradução nossa)[13].

Segundo Treffers (1987), a composição desses dois componentes, matematização horizontal e vertical, constitui-se na matematização progressiva. E é nesse processo de matematização progressiva que os alunos constroem, reinventam ou até inventam matemática.

O contexto de um problema é um elemento muito importante na abordagem da RME e funciona como uma fonte no processo de aprendizagem. Os problemas de contextos e as situações da "vida real" são utilizados para constituir e aplicar conceitos matemáticos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001). Ao trabalhar com problemas de contexto, os alunos podem desenvolver estratégias ligadas ao contexto; em seguida alguns aspectos conectados ao contexto podem tornar-se mais gerais, tornando-se um modelo que poderá servir para resolver problemas que tenham alguma relação com o que deu origem ao modelo.

Um dos objetivos da Educação Matemática é ajudar os alunos a se tornarem matematicamente letrados. Isso significa que o indivíduo deve ser capaz de lidar com a matemática envolvida nos problemas do mundo real (natureza, sociedade, cultura, incluindo matemática) tanto em suas necessidades individuais momentâneas como nas da sua vida particular futura (como um cidadão inteligente e atuante), nas da vida profissional (estudos futuros ou trabalho), além de ser capaz de compreender e apreciar a matemática como disciplina científica (DE LANGE, 1999).

[13] [...] into these two elements is an artificial operation. In reality the distinction is difficult to make, mainly because schematization and mathematical processing are closely related. Yet this distinction is meaningful, if only to make it clear that activities like constructing, experimenting and classifying fit as well into the process of the mathematisation as do symbolizing and formalizing.

Capítulo 3

A AVALIAÇÃO: UM DOS CAMINHOS PARA EFETIVAR A CAPACITAÇÃO DAS PROFESSORAS

...para agir eficazmente, é útil compreender primeiro.
(HADJI, 2001, p.22)

A avaliação pode perder muito da sua finalidade quando tomada como uma ação isolada, no entanto, quando articulada a outras tarefas relativas à educação escolar, pode contribuir significativamente para o processo de formação do aluno.

Segundo Hadji (1994, p.63), a

> avaliação formativa tem por objetivo contribuir para melhorar a aprendizagem em curso, informando o professor sobre as condições em que está a de correr essa aprendizagem, e instruindo o aprendente sobre o seu próprio percurso, os seus êxitos e as suas dificuldades.

Nessa perspectiva a avaliação é parte dos processos de ensino e de aprendizagem e não uma etapa posterior a eles. Levando em conta que a aprendizagem depende principalmente do aprendente, é importante que ele seja informado dos resultados da avaliação, mas se ele for informado apenas no final do processo, como ainda acontece na prática da sala de aula, nada poderá fazer para mudar o desfecho.

Para Barlow (2006), na avaliação é importante que os alunos tenham um *feedback* que possa ajudá-los a se tornarem sujeitos ativos de seu desenvolvimento.

Depois do aluno, o outro sujeito que possui grande responsabilidade nos processos de ensino e de aprendizagem é o professor, e os resultados da avaliação servem para guiar suas escolhas. De acordo com Hadji (1994, p.63),

> [...] se o objectivo é o **de *regular*** (guiar constantemente o processo de aprendizagem), o avaliador esforçar-se-á por

> obter informações sobre as estratégias de ataque dos problemas e sobre as dificuldades encontradas.

Para Barlow (2006, p.110), a troca de informações

> ocorre não no término da formação, mas durante seu processo: trata-se, para o avaliador, de ajudar seus interlocutores a re solver melhor sua tarefa, fazendo um diagnóstico das dificuldades ou das estratégias em questão [...] visando escolher a s equência de formação mais adequada às suas características.

E mais,

> as decisões que se tomam são de ordem estritamente pedagógica: o professor pode voltar atrás, oferecer complementos, ou mesmo modificar seu planejamento, seu método e sua atitude (BARLOW, 2006, p.111).

Para Van den Heuvel-Panhuizen (1996), na avaliação o aluno pode passar por vários níveis de matematização e, assim, desenvolver sua "própria" matemática. Para reforçar a i mportância que tem a avaliação nos processos de ensino e de aprendizagem e para torná-la presente nas atividades da escola, essa autora se refere à av aliação usando a expressão "avaliação didática"[14].

Mesmo com o potencial que pode ter no processo de formação do estudante, é comum a prática da avaliação servir apenas para dar uma nota aos alunos, para aprová-los ou reprová-los. Utilizar assim a avaliação significa tomar os resultados dessa prática para, supostamente, "medir" a distância entre o que o aluno realizou e o objetivo projetado pelo professor.

Van den Heuvel-Panhuizen (1996, p. 84, tradução nossa) ressalta que a avaliação para ser apropriada na persepctiva da RME

> tem que ser planejada e contemplados os três pilares da RME que são: os pontos de vistas a respeito do assunto [olhar as várias ideias, significados], a respeito de como as instruções são dadas, e do modo no qual o processo de aprendizagem se desenvolve. Juntos eles determinam o quê, o porquê e como ocorre a avaliação (tradução nossa)[15].

[14] Termo original em inglês: didactical assessment.
[15] […] assessment is to be appropriate to RME, then it must be tailored to the three pillars of RME, to wit: the viewpoints on the subject matter, on how instruction should be given, and on the manner in which learning processes progress. Together, they determine what, why, and how assessment occurs.

Ter em foco esses pilares quando o professor pensa a avaliação, quando elabora, executa e reflete nos seus resultados aproxima-o da função formadora que a avaliação pode assumir.

A avaliação (DE LANDSHEERE, 1976 apud HADJI, 1994) pode ter as funções de

- inventário dos conhecimentos e das aquisições – certifica;
- diagnóstico para o aluno situar-se no seu processo de aprendizagem e diagnosticar as su as lacunas e dificuldades – regula;
- prognóstico que permite orientar e guiar nas escolhas futuras – orienta.

Considerando essas funções, a avaliação pode ter uma ação somativa, diagnóstica e formadora. Quando se quer explorar ou identificar características daquele que aprende, está-se na ação de diagnosticar. O trabalho do avaliador é propor encaminhamentos a partir da articulação desse diagnóstico com o que se pretende do aprendente. Quando se integra a avaliação ao processo de formação, ela torna-se parte do processo de ensino. Já a avaliação somativa é aquela que faz um balanço de final de um ciclo ou sequência.

Um instrumento usualmente utilizado para a avaliação da aprendizagem pode contribuir com uma ação de formação continuada, uma vez que pode fornecer informações úteis relativas ao trabalho desenvolvido pelo próprio professor, colocando-se a se rviço de seu desenvolvimento intelectual, visto que, quando em formação, é necessário tomar consciência do desenvolvimento do seu próprio processo de aprendizagem. Essa questão, tomada de consciência, é um dos fatores de real interferência na formação do indivíduo (BARLOW, 2006).

Para Hadji (1994, p.125), "[...] a avaliação formativa quer-se, afinal, reguladora. O seu objetivo é o de permitir ajustar o tratamento didático à n atureza das dificuldades constatadas e à realidade dos progressos registrados". De acordo com esse autor, o objetivo principal da avaliação formativa é o de possibilitar ao aprendente saber o que se espera dele e que ele tome atitudes em relação a isso para que obtenha sucesso.

Para Villas Boas (2010, p.82), essa

> é a essência da avaliação formativa: o professor analisa o trabalho do estudante a cada momento, enquanto ele ocorre, para fazer as intervenções no momento oportuno. Além disso, registra as informações que coleta para construir o retrato da turma [...]

por meio do qual o professor orienta o aluno sobre o que apresentou e este tem oportunidades de rever seus erros, completar, melhorar, enfim, fazer novas construções a respeito daquilo que o professor lhe apontou e ir até mesmo além.

Para justificar a presença da avaliação nesta pesquisa, utilizam-se as palavras de Hadji (2001, p.20): "a avaliação torna-se formativa na medida em que se inscreve em um projeto educativo específico, o de favorecer o desenvolvimento daquele que aprende, deixando de lado qualquer outra preocupação".

Nunes e Ponte (2004, p.3) defendem que a avaliação em Matemática

> compreende a recolha de diversas evidências sobre a evolução das aprendizagens de um aluno: o conhecimento matemático, a sua aptidão para o usar, e a sua predisposição para a Matemática. Por outro lado, o processo só fica completo com o estabelecimento de inferências, a partir dessas evidências, para vários propósitos, em especial o da promoção das aprendizagens.

Neste trabalho, enfatiza-se à utilização de um instrumento, usualmente de avaliação, para apresentá-lo como um instrumento que pode desencadear uma ação de formação. Especificamente, esse instrumento de avaliação é uma prova em fases.

Uma avaliação utilizada na sala de aula deve permitir que professores e alunos retirem dela informações que possam reorientar sua prática, oportunizem a reflexão e favoreçam a aprendizagem. Um tipo de instrumento que pode atender a esses propósitos é a prova em duas fases. Segundo De Lange (1999), provas em duas fases combinam as vantagens de uma prova escrita usual com as possibilidades oferecidas pelas tarefas que são mais abertas. Uma possibilidade de realização de uma prova em duas fases poderia ser no seguinte formato:

1º) o professor elabora a prova e os alunos, em uma primeira fase, resolvem sem nenhuma indicação do professor, em tempo determinado;

2º) o professor avalia as resoluções iniciais dos alunos e tece comentários pedindo justificativas e esclarecimentos;

3º) na segunda fase, os alunos tentam responder as questões postas pelo professor, podendo dispor de um tempo maior que na anterior. Nessa etapa espera-se que os alunos melhorem as respostas dadas na primeira fase.

Esse formato de avaliação permite que o aluno volte a refletir sobre o que ele já escreveu, apoiado nas observações do professor, essa pode ser uma excelente oportunidade para a aprendizagem.

Nesse caso, a avaliação do professor leva em conta a produção do aluno nas duas fases, uma vez que é possível que, com os questionamentos feitos pelo professor, o aluno avance em algumas ideias oportunizando aprendizagem. Na segunda fase, é preciso ter claro que o intuito não é apenas chegar à resposta correta. Ao tentar esclarecer pontos levantados pelo professor, o aluno tem a oportunidade de, por exemplo:

- estabelecer um processo de comunicação por escrito: ao explicar o que fez, pode, ao mesmo tempo, mostrar o que compreendeu das considerações feitas pelo professor;
- refletir sobre sua resposta inicial procurando reconstituir e criticar o seu próprio raciocínio, podendo descrever e explicar o que fez;

- desenvolver a resolução feita inicialmente, encorajado pelo professor.

Uma das vantagens da prova em duas fases é que os comentários do professor em relação à primeira resolução do aluno não dizem respeito a informar se houve acerto ou não, mas sim devem ser tais que ajudem o aluno a reconstituir, explicar, criticar a sua própria resolução. Outra vantagem é que os comentários do professor são específicos para cada aluno e isso permite uma aproximação maior entre eles, além de exigirem uma ação, uma intervenção no processo de ensino e aprendizagem. Uma avaliação nesse formato permite ao aluno refletir, comunicar suas ideias, desenvolver a responsabilidade que certamente será necessária, pois a "conversa" por escrito será apenas entre ele e o professor.

Neste trabalho, foi feito um desdobramento da prova em duas fases, para uma prova em fases, considerando que nessa proposta o número de fases será definido pela discussão dos elementos disponibilizados pela resolução dos alunos na fase anterior. A proposta de ampliar o número de fases tem por objetivo ampliar também a possibilidade de discutir e investir na produção escrita dos alunos ao resolver uma questão de matemática.

O objetivo de utilizar uma prova em fases na presente pesquisa é apresentá-la como um instrumento que pode desencadear uma ação formativa.

Capítulo 4

APRESENTANDO ALGUNS ELEMENTOS COLHIDOS DURANTE O DESENVOLVIMENTO DO PROJETO

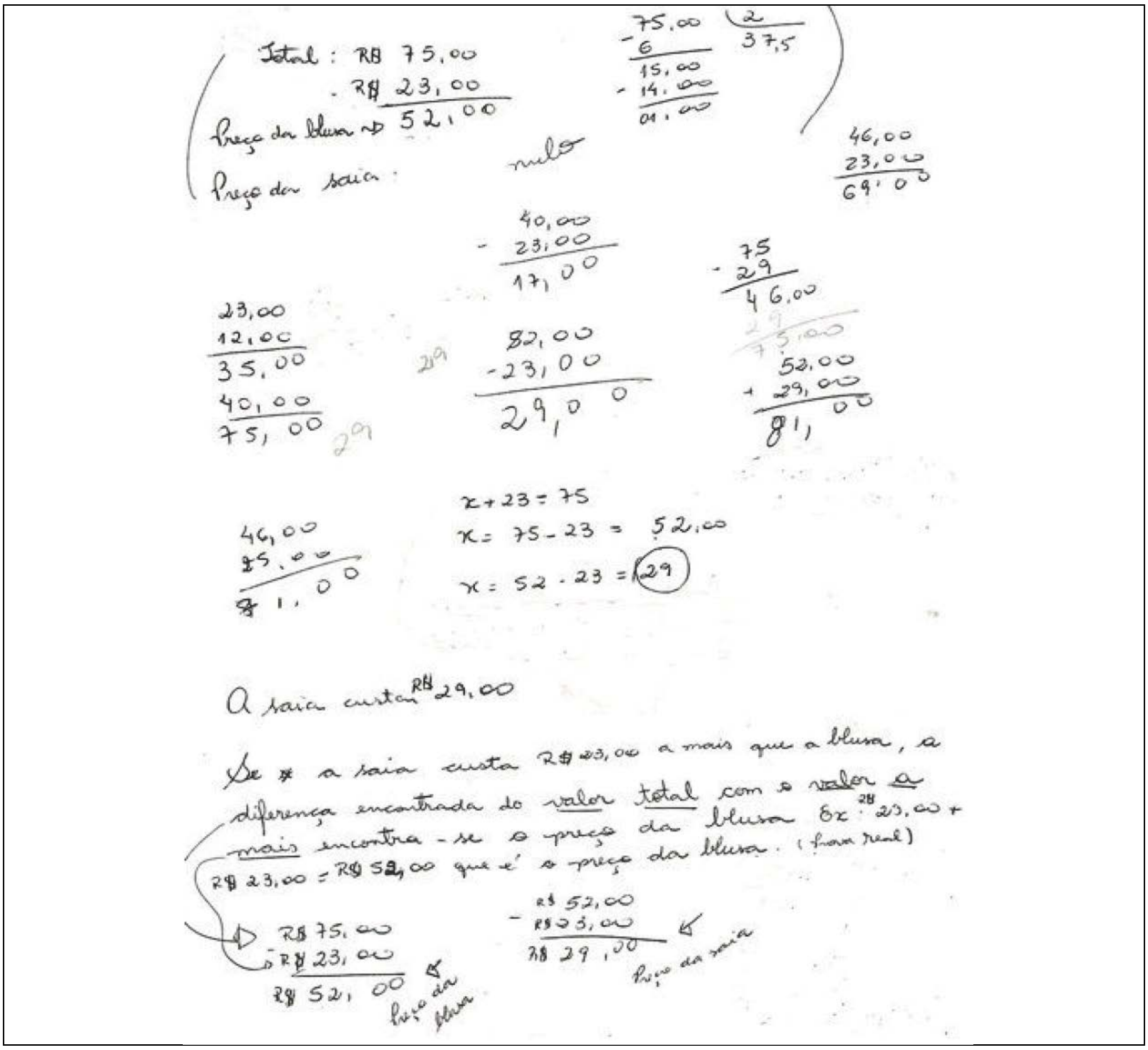
As produções aqui apresentadas são de quatro das professoras participantes, contém as resoluções e as respostas dadas por elas aos questionamentos feitos pela pesquisadora nas diferentes fases da prova e foram escolhidas de acordo com o exposto no item 1.3.

4.1 Caso da Professora PA8 – Questão 2

O enunciado da Questão 02 e a resolução inicial de PA8 são apresentados no quadro a seguir.

Paguei R$ 75,00 por uma saia e uma blusa. A saia foi R$ 23,00 mais barata do que a blusa. Qual o preço da saia?

Quadro 1. Fase 1 – resolução apresentada por PA8 na questão 02



Na primeira fase, PA8 apresenta várias operações envolvendo, na maioria delas, números do enunciado do problema, parecendo tentar achar o valor da saia, que responde a pergunta do problema. Inicialmente, subtrai $R\$23{,}00$ de $R\$75{,}00$ e escreve que o resultado dessa operação é o valor da blusa, depois divide corretamente $75{,}00$ por 2 e não utiliza esse valor em outra operação; em seguida faz mais algumas operações utilizando os números retirados do enunciado e os números encontrados nas operações anteriores $(23{,}00 + 12{,}00; 35{,}00 + 40{,}00; 40{,}00 - 23{,}00; 53{,}00 - 23{,}00; 46{,}00 + 23{,}00; 75 - 29; 52{,}00 + 29{,}00\ e\ 46{,}00 + 25{,}00)$, sem esclarecer ou escrever o que representam os valores encontrados; escreve uma equação $(x + 23 = 75)$, que não representa o problema dado, subtrai novamente $23\,de\,52$, circula o resultado 29 e escreve que a sai a custa $R\$29{,}00$; e, finalmente, subtrai novamente $R\$23{,}00$ de $R\$75{,}00$, obtendo $R\$52{,}00$, responde que a blusa custa $R\$52{,}00$. Subtrai novamente $R\$23{,}00$ de $R\$52{,}00$ e responde que a saia custa $R\$29{,}00$.

Após efetuar as operações descritas, a resolvedora responde à pergunta do problema, qual seja, o preço da saia. Isso dá uma pista de que todas as suas operações foram tentativas de achar um valor para a saia.

Ao apresentar as d uas últimas operações, a r esolvedora escreve algumas condições do problema e indica-as como prova real.

No Quadro 2 é apresentada a segunda fase, constituída de perguntas relativas à resolução inicial e das respostas de PA8.

Quadro 2. Fase 2 - perguntas da pesquisadora relativas à resolução inicial e as respostas de PA8

	Parte da resolução de PA8 e/ou perguntas da pesquisadora	**Respostas de PA8**
1.	23,00 12,00 → ① De onde saiu este 12? 35,00 40,00 75,00	É uma tentativa de acertar a resposta[16].
2.	52,00 + 29,00 81,00 ② Este resultado indica o quê?	Este resultado não indica nada, também foi uma tentativa de chegar na resposta.
3.	x + 23 = 75 x = 75 - 23 = 52,00 x = 52 - 23 = 29 ③ esta equação é continuação da anterior?	Esta equação foi uma outra maneira de encontrar o preço das peças.

[16] As respostas dadas pelas participantes foram transcritas na forma original.

4.	Segundo sua resposta, a saia custa 29 e a blusa 52, então quanto foi pago pelas duas peças?	A resposta encontrada não condiz com o valor total das peças. Então se a blusa custa $R\$52{,}00$ que foi o valor encontrado entre o preço total das duas peças com o valor da blusa (diferença) $R\$23{,}00$. Resolução R$ 75,00 - R$ 23,00 → preço da saia 52,00 → preço da blusa + R$ 52,00 R$ 23,00 R$ 75,00 Valor total.

As resposta dadas às questões 1 e 2 confirmam a inferência da pesquisadora de que as operações eram apenas uma tentativa de chegar à resposta do problema.

Em relação à equação que PA8 escreveu, ela responde também que foi apenas uma tentativa de acertar a resposta (ver 1ª fase). A primeira e a segunda linhas da equação poderiam ser um caminho para a participante chegar à resposta, isso se ela se desse conta de que o 52, da segunda linha, é a parte correspondente a metade do preço da saia e metade do preço da blusa, já que ela retirou do total a diferença entre as peças. No entanto ela retira novamente 23 do resultado (52), o que não condiz com a equação escrita.

Com relação à resposta dada à pergunta 4, pode-se notar que a professora percebe o erro por uma das condições do problema ($R\$52{,}00$ da blusa mais $R\$29{,}00$ da saia somam um valor diferente de $R\$75{,}00$). Então, baseando-se apenas em uma das condições do problema (as duas peças somam $R\$75{,}00$), a professora subtrai $R\$23{,}00$ de $R\$75{,}00$ novamente, soma o resultado $R\$52{,}00$ com $R\$23{,}00$, confirmando que as duas peças juntas custam $R\$75{,}00$ e responde que $R\$23{,}00$ é o valor da saia e $R\$52{,}00$ o valor da blusa.

Na primeira tentativa de resolver o problema, PA8 atendeu à condição de que a diferença entre as duas peças seria de $R\$23{,}00$ e, na segunda tentativa, PA8 atendeu à condição de que as duas peças juntas custariam $R\$75{,}00$, contudo, até esse momento, parece que PA8 não percebeu que a resposta deve atender as duas condições, isso porque, nesta fase, ela trabalha apenas com a condição de que as duas peças juntas custam 75 reais.

Apresenta-se, na sequência, a fase 3 da questão em pauta.

Quadro 3. Fase 3 - perguntas da pesquisadora relativas à resolução inicial ou às respostas de PA8 na 2ª fase, e as respostas de PA8 relativas à 3ª fase

	Perguntas da pesquisadora	**Respostas de PA8**
5.	De acordo com sua resposta 1, por que utilizou o número 12 e não outro número?	Porque se eu somar o $R\$12{,}00$ com o $R\$23{,}00$, encontro o valor $R\$35{,}00$ que somado com $R\$40{,}00$ encontro o valor das duas peças juntas. O problema fala que a saia é mais barata que a blusa, se eu pegar outro valor, a saia vai sair mais cara.
6.	Mas (com relação a sua resposta 2) em que situação se resolve uma adição?	Quando preciso saber o valor de duas peças juntas no caso deste problema. Acredito que tenha feito errado porque ele pede a diferença.
7.	Mas (com relação a sua resposta 3) por que você escolheu especificamente uma equação?	Achei que poderia ser mais fácil se encontrasse o valor do x (mas também não deu certo).
8.	Então você mudou sua resposta encontrando um valor diferente para a saia (resposta 4). Neste caso qual a diferença entre os preços das duas peças?	Mudei a resposta, mas o valor também não está de acordo com o valor das duas peças. O valor encontrado continua errado. Vou voltar na teoria da tentativa de acerto da resposta 7 75,00 − 23,00 = 52,00 ~~23,00 + 12,00 = 35,00~~ 52,00 − 23,00 = 29,00 75,00 − 29,00 = 46,00 A saia custa $R\$29{,}00$ e a blusa $R\$46{,}00$.

Como as respostas dadas por PA8 às perguntas 1 e 2 (2ª fase de questão) não pareceram fundamentadas, a pesquisadora volta a questioná-la, nas perguntas 5 e 6 (ver Quadro 3), em relação ao número 12 somado com 23.

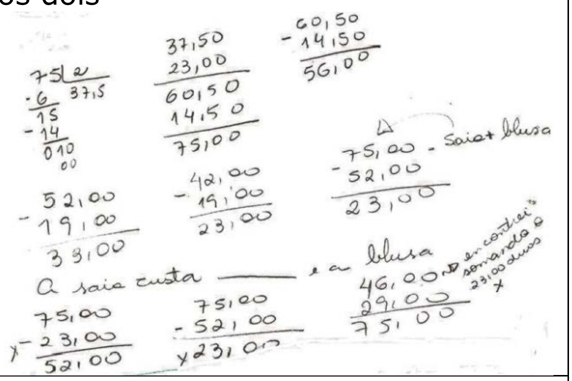
PA8 diz que pensou que procurava um valor que somado com $R\$23{,}00$ fosse $R\$35{,}00$, porque $R\$35{,}00$ com $R\$40{,}00$ resultava em $R\$75{,}00$, o valor das duas peças juntas. Agora a intenção de usar o 12 fica clara. Essa ideia, exposta pela participante, parece indicar que ela usa uma estratégia de procurar dois valores que somados resultam 75. Um desses valores, para PA8, deve ter uma parte composta de 23.

Na pergunta 7, a pesquisadora insiste em saber por que ela escolheu uma equação para resolver o problema. Neste caso a intenção era constatar se PA8 tinha noção de quais seriam as incógnitas, porém a resposta de PA8 é vaga. Diz apenas que achou que poderia ser mais fácil se encontrasse o valor do x.

A pesquisadora, na pergunta 8 da 3ª fase, questiona PA8 para saber por que ela subtraiu duas vezes $R\$23{,}00$ de $R\$75{,}00$. Ela responde que o valor não está de acordo e continua errado. Diz que volta na tentativa de acerto, subtrai $23{,}00$ de $75{,}00$, soma $23{,}00$ com $12{,}00$ e risca. Subtrai $23{,}00$ de $52{,}00$ e, por fim, subtrai $29{,}00$ de $75{,}00$. Responde que a saia custa $29{,}00$ e a blusa $46{,}00$. Infere-se que nesta fase a participante está mais consciente das duas condições do problema e de que elas devem ser atendidas simultaneamente.

Quadro 4. Fase 4 – perguntas da pesquisadora relativas à resolução inicial ou às respostas de PA8 na 2ª e 3ª fases, e as respostas de PA8 relativas à 4ª fase

	Perguntas da pesquisadora	**Respostas de PA8**
9.	Por que você subtraiu 23 reais, que é a diferença de preço entre as duas peças, duas vezes seguidas?	Porque 1º eu subtraí para tentar encontrar o preço de uma das peças e também porque são os únicos valores que tem no problema para que eu faça tentativas. Em seguida, quando encontrei o valor feito na subtração, que foi o $R\$52{,}00$, eu subtraí novamente porque o problema diz que a saia foi $R\$23{,}00$

		mais barata que a blusa. Então tirei o $R\$52{,}00$ para tentar descobrir o resultado. O valor encontrado dos preços entre os dois 
10.	Por esta sua resposta, qual é a diferença entre os preços das duas peças?	Por essa resposta encontrada, o preço da blusa é $46{,}00$ e a saia é $29{,}00$.

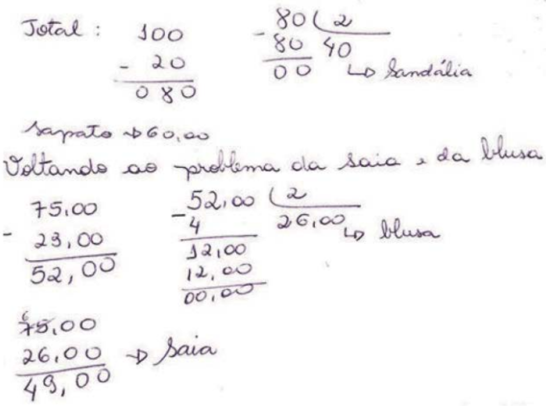
A pesquisadora, na 4ª fase, questiona PA8 para saber por que ela subtraiu duas vezes $R\$23{,}00$ de $R\$75{,}00$. Ela responde que foi mais uma tentativa de encontrar os valores das peças, e também porque são os únicos números do problema. A resposta dada remete a inferir que a resolvedora não estabelece uma lógica para tratar os dados do problema. Ela manipula os números do enunciado de diversas maneiras sem escolher uma estratégia coerente com a situação do problema.

Numa nova tentativa, PA8 muda de estratégia. Começa por dividir 75 por 2, soma o resultado com $R\$23{,}00$, encontrando $R\$60{,}50$, e, para chegar em $R\$75{,}00$, soma $R\$60{,}50$ com $R\$14{,}50$, porém, quando vai verificar a diferença, encontra $R\$56{,}00$ e não $R\$23{,}00$. Parece que agora PA8 está levando em conta as duas condições do problema. Faz novos cálculos $(52{,}00 - 19{,}00,\ 42{,}00 - 19{,}00\ e\ 75{,}00 - 52{,}00)$ na tentativa de encontrar a diferença $R\$23{,}00$. Abandona a ideia e volta a subtrair $R\$23{,}00$ de $R\$75{,}00$, $R\$52{,}00$de $R\$75{,}00$ e apresenta a soma de $R\$46{,}00$ com $R\$29{,}00$. Responde pela segunda vez que a saia custa $R\$46{,}00$ e a blusa $R\$29{,}00$ e, voltando à ideia anterior, justifica dizendo que é porque dentro do $R\$52{,}00$ ainda tem a diferença da saia.

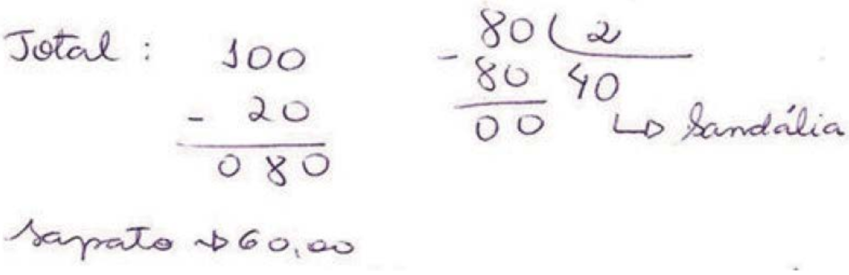
Em relação à terceira resposta dada por PA8 para os valores das peças (saia $R\$29{,}00$ e blusa $R\$46{,}00$), a pesquisadora volta a questionar a diferença entre as duas peças. PA8 não responde a pergunta, apenas escreve que o preço da blusa é $46{,}00$ e o da saia é $29{,}00$.

As perguntas feitas até essa fase não tiveram sucesso no sentido de a resolvedora levar em consideração as duas condições do problema, então a pesquisadora resolveu propor um problema semelhante mas com valores arredondados na casa das dezenas, como segue.

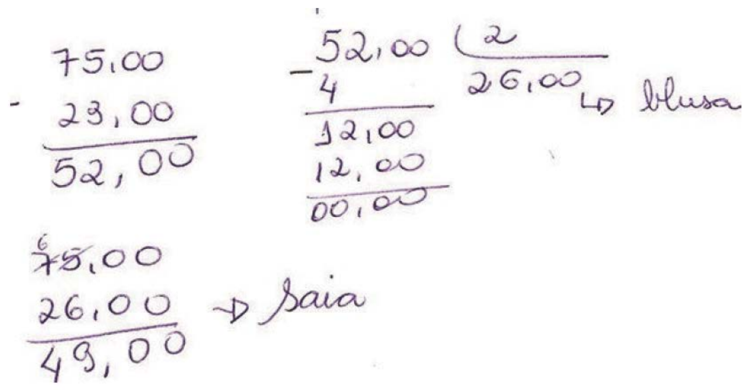
Quadro 5. Fase 5 – pergunta da pesquisadora relativa à resolução inicial ou às respostas de PA8 na 2ª, 3ª ou 4ª fases, e a resposta de PA8 relativas à 5ª fase

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA8**
11.	Então se um sapato custa $R\$60{,}00$ e uma sandália custa $R\$40{,}00$, isto significa que o preço total do sapato e da sandália é $R\$100{,}00$ e posso afirmar que o sapato é $R\$20{,}00$ mais caro do que a sandália. Segundo sua resposta A, para eu saber o preço de cada um devo subtrair $R\$20{,}00$ do preço total duas vezes?	Não. Cheguei à conclusão que esta resposta está errada. Resolução deste problema: 

Analisando a nova situação, PA8 resolve o problema da sandália e do sapato da seguinte forma:

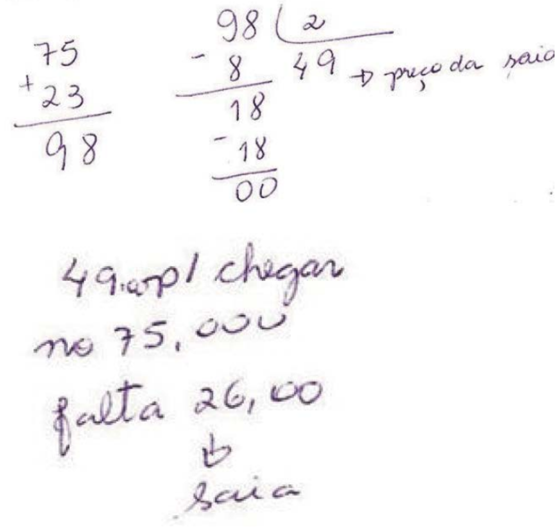


E utilizando essa mesma estratégia, resolve novamente o problema da saia e da blusa.

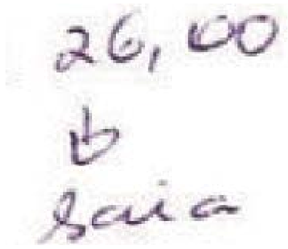


Verifica-se que a resolvedora troca o valor da saia pelo valor da blusa e vice-versa.

Quadro 6. Fase 6 – pergunta da pesquisadora relativa à resolução inicial ou às respostas de PA8 na 2ª, 3ª, 4ª ou 5ª fases, e, a resposta de PA8 relativa à 6ª. Fase

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA8**
12.	Agora está correto. Será que existe outro jeito de resolver esse problema?	Acredito que sim. Fiz uma tentativa e acredito que deu certo.  Se a saia custa $R\$49{,}00$, a blusa custará $R\$26{,}00$.

A pesquisadora escreve para PA8 que a r esposta está correta, mas, analisando posteriormente verifica que a resolvedora equivocara-se ao dar a r esposta. Na sua resolução aparece duas vezes que o preço da saia é $49{,}00$ e uma vez que a saia é $26{,}00$.



PA8 encontrou uma estratégia para resolver o problema e a utiliza também para resolver outro problema do mesmo “tipo”.

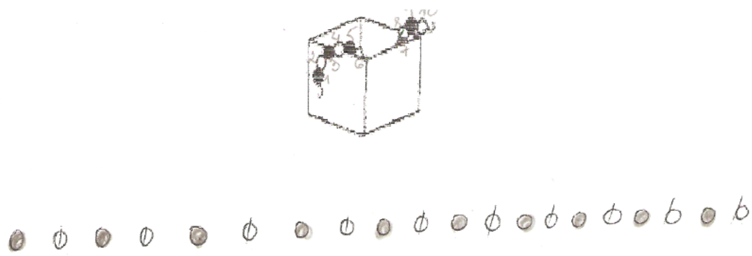
4.2 Caso da Professora PA9 – Questão 04

A seguir, apresentam-se a resolução dada por uma das professoras participantes do projeto, aqui denominada PA9, os questionamentos feitos pela pesquisadora e as respostas dadas por PA9 a esses questionamentos, nas onze fases da prova.

O enunciado da Questão 04 e a resolução inicial de PA9 são apresentados no quadro a seguir.

Quadro 7. Fase 1 – resolução apresentada por PA9 na questão 04

A caixinha abaixo possui uma sequência de 20 contas. Quantas contas brancas estão nesta sequência?



no total tem 10 contas brancas, numa seqüência de uma branca e uma preta

Se tem vinte contas, começa com uma preta e termina com a branca; eu contei conforme o desenho acima;

O traço que separa as duas explicações que a professora deu na resolução da questão demarca momentos diferentes, considerados da primeira fase da questão. Acima do traço, foi no primeiro dia da prova; abaixo do traço foi uma explicação complementar que a pesquisadora pediu para as professoras darem se elas julgassem que não tinham, no primeiro momento, justificado sua resposta.

Percebe-se na primeira fase que PA9 considera que a sequência de contas alterna-se em uma preta e uma branca, como se apresenta nas pontas visíveis fora da caixa.

No Quadro 8 é apresentada a segunda fase, constituída da pergunta da pesquisadora relativa às respostas de PA9.

Quadro 8. Fase 2 – pergunta da pesquisadora relativa à resolução inicial e as respostas de PA9

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA9**
1.	De acordo com a sua regra, sua resposta está certa. Mas como ter certeza de que as contas que não podem ser vistas são brancas ou pretas?	Porque pelo que aparece no desenho, eu conclui que a sequência é a mesma, ou seja, uma branca e preta; são 20 ao todo, começando com uma preta.

Na pergunta feita pela pesquisadora foi utilizada a palavra regra porque nessa fase do trabalho essa palavra estava sendo utilizada nas tarefas da *Early Algebra* trabalhadas com as professoras.

Ao ser questionada sobre como ter certeza de que as contas que não podem ser vistas obedecem a mesma regra daquelas que podem ser vistas, PA9 responde apenas que concluiu isso a partir da parte que pode ser vista.

Tentando mostrar à PA9 que pode haver outras possibilidades para as contas que não podem ser vistas, a pesquisadora inventa a resposta de outras duas pessoas para a mesma questão.

Quadro 9. Fase 3 – perguntas da pesquisadora relativas às respostas de PA9

	Perguntas da pesquisadora	Respostas de PA9
2.	A Regina, uma amiga minha, acha que uma resposta poderia ser: 15 contas brancas ou 5 brancas. Como você acha que ela pensou para chegar a essa resposta?	Ela acha que as contas que estão dentro da caixa, repetem as cores, só as pontas são alternadas.
3.	A Pamela, outra amiga minha, pensa que o colar tem 5 contas brancas, 5 pretas e 10 vermelhas, porque essas são as cores do time dela. Ela poderia chegar a essa conclusão? Por quê?	Sim, pois daria as 20 contas existentes no colar. 5 brancas 5 pretas + 10 vermelhas 20

PA9 mostra que ela compreende os raciocínios hipotéticos e justifica as respostas dessas outras pessoas. Note que PA9 chama a sequência de “colar”.

Nessa etapa, a participante mostra que são possíveis três possibilidades. O objetivo da pesquisadora agora é investigar o que a participante pensa disso.

Quadro 10. Fase 4 – perguntas da pesquisadora relativas às respostas de PA9

	Perguntas da pesquisadora	Respostas de PA9
4.	Na resposta à pergunta 1, você diz: “concluí que a sequência é a mesma”. Leia também as respostas que você deu às perguntas 2 e 3, reflita sobre o que leu e tire alguma conclusão.	Quando respondi à pergunta 1, eu pensei na lógica do meu desenho, as respostas seguintes foram em relação aos questionamentos posteriores. Hoje eu responderia que são 5 contas brancas, pois é a quantia que vejo e não sei as cores que estão dentro da caixa.
5.	Existem, até agora, pela nossa discussão, 3 possibilidades, a sua (que é de ter 10 contas brancas), a da Regina e a da Pamela. A sua possibilidade pode estar correta?	Sim, com certeza. Ou melhor, acabo ficando confusa, pois não sei se analiso pelo que tenho de concreto, posso ver ou pelo que deveria ser na lógica (ou seja, uma conta branca e uma preta, alternadas).

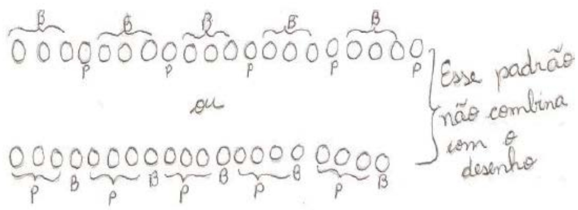
Nessa fase notamos que PA9 ainda está na dúvida de qual é a "resposta certa". Isso fica evidente quando ela diz que não sabe como "analisar". Por conseguinte, sentimos a necessidade de explorar mais as diferentes possibilidades que o "meio" do colar pode ter.

Quadro 11. Fase 5 – perguntas da pesquisadora relativas às respostas de PA9

	Perguntas da pesquisadora	**Respostas de PA9**
6.	E o que você tem de concreto?	A figura.
7.	Pela lógica, você só pode concluir que o colar tem uma conta branca e uma preta, alternadas?	Para que tenha um padrão de sequência, sim.

Para PA9 só tem "padrão de sequência" se ela tiver uma conta branca, uma conta preta, uma branca, uma preta e assim sucessivamente. Para discutir o conceito de padrão apresentado por PA9, a pesquisadora continua.

Quadro 12. Fase 6 – pergunta da pesquisadora relativa às respostas de PA9

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA9**
8.	Na resposta da m inha amiga não há padrão? Por quê? E na da Pamela?	• Regina: 15 contas brancas/5 pretas ou 15 pretas/ 5 brancas  Não há padrão na resposta da sua amiga se relacionarmos ao desenho. • Pamela: 5 brancas, 5 pretas e 10 vermelhas. <u>No padrão da Pamela</u> poderia ser as pontas alternadas e o meio vermelhas, <u>mas não seguiria um padrão</u> (baseando-se na figura). 

Ao analisar as respostas de "Regina" e de "Pamela", PA9 entra em contradição. Veja que, ao analisar o "padrão" de Regina, ela não considera as pontas da sequência e, ao analisar o padrão da Pamela, ela o faz. Com essa resposta, PA9 mostra que não compreendeu por que Regina respondeu à questão dizendo que a sequência poderia ter 15 ou 5 contas brancas e que, ao expor isso para PA9, a pesquisadora considerava as mesmas pontas da sequência mostrada na figura. O mesmo não acontece com a interpretação de PA9 em relação à resposta de Pamela. Ela considera as pontas da figura e coloca as 10 contas vermelhas no interior da caixa, que não está visível.

Sente-se a necessidade de conduzir PA9 a mais reflexões em relação ao que seja uma sequência.

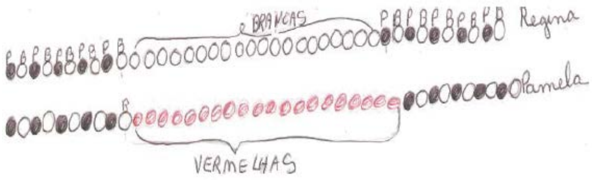
Quadro 13. Fase 7 – pergunta da pesquisadora relativa às respostas de PA9

	Pergunta da pesquisadora	**Respostas de PA9**
9.	De acordo com o que se pode ver na figura do enunciado temos em uma ponta do colar[17]  e na outra ponta temos . Com isso já é possível ver 5 brancas e 5 pretas, ou seja, 10 contas. Então é possível pensar que:  Observando esses desenhos que representam o que a Regina e o que a Pamela acham, seria possível montar um colar seguindo a mesma regra que tivesse 40 contas?	Sim, seria o dobro de contas (referente ao primeiro colar).

[17] Note que a pesquisadora chamou a sequência de colar e que PA9 se refere à sequência também chamando-a de colar.

Como PA9 não mostrou como seriam esses colares, foi preciso pedir que ela desenhasse, mostrando dessa forma se compreende o conceito de sequência.

Quadro 14. Fase 8 – pergunta da pesquisadora relativa às respostas de PA9

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA9**
10.	Desenhe um colar com 40 contas seguindo o modelo da Regina e outro seguindo o da Pamela.	

Como ainda restava alguma dúvida da pesquisadora em relação ao que PA9 considera como sequência, segue a pergunta feita a PA9.

Quadro 15. Fase 9 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA9

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA9**
11.	E nos colares que você desenhou (item anterior) você acha que existe um padrão?	Sim; pois de 40 contas são: as pontas são alternadas em preta/branca, 10 de cada lado = 20 contas alternadas e o meio (20 contas) de cor vermelha, pode ser branca, ou pode ser preta, dependendo da preferência.

É preciso voltar à sequência do desenho para confirmar se agora PA9 considera que a sequência da questão inicial poderia ter o "meio"[18] diferente das pontas e, mesmo assim, ter um padrão para configurar a sequência.

[18] Neste caso, o meio significa a parte da sequência que não pode ser vista na figura.

Quadro 16. Fase 10 – pergunta da pesquisadora relativas à resposta de PA9

	Pergunta da pesquisadora	Resposta de PA9
12.	Então o colar, desse "jeito", com 40 contas tem um padrão e o com 20 contas não tem um padrão? Por quê?	Ambos têm o mesmo padrão, apenas aumenta o número de contas.

Para finalizar a conversa e confirmar se PA9 considera que esse problema pode ter diferentes respostas, a pesquisadora lança a pergunta 13 que segue no quadro 17.

Quadro 17. Fase 11 – pergunta da pesquisadora relativa a resposta de PA9

	Pergunta da pesquisadora	Resposta de PA9
13.	Releia perguntas e respostas das questões 7 e 8. Você acha que o colar que a Pamela idealizou não segue um padrão baseado na figura?	Ele tem uma parte baseado na figura que seriam as pontas, quanto ao meio do colar eu não sei responder.

Com a resposta apresentada por PA9, infere-se que ela chegou à conclusão de que o meio do colar, que não pode ser visto, pode ter diversas configurações e, ainda assim, ser uma sequência.

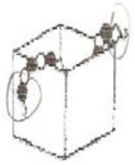
4.3 Caso da Professora PA4 – Questão 04

A seguir, apresentam-se a resolução dada por uma das professoras participantes do projeto, aqui denominada PA4, os questionamentos feitos pela pesquisadora e as respostas dadas por PA4 a esses questionamentos nas quinze fases da questão.

O enunciado da Questão 04 e a resolução inicial de PA4 são apresentados no quadro 18.

Quadro 18. Fase 1 – resolução apresentada por PA4 na questão 04

A caixinha abaixo possui uma sequência de 20 contas. Quantas contas brancas estão nesta sequência?



São brancas 10, a metade.

Eu pensei que seria 10 dividido por 2.

A explicação dada por PA4 abaixo do traço foi feita no dia em que a pesquisadora pediu uma explicação complementar, caso a professora julgasse que, no primeiro momento, não havia justificado sua resposta.

Percebe-se na primeira fase que é possível que PA4 considere que a sequência de contas alterna-se em uma preta e uma branca, porque responde que serão 10 as contas brancas, porém, ao justificar sua resposta, diz que pensou ser 10 dividido por 2. Para comprovar se houve algum engano ou verificar se a divisão de 10 dividido por 2 diz respeito a outro pensamento, segue a pergunta feita para PA4 na segunda fase da prova.

Quadro 19. Fase 2 – pergunta da pesquisadora relativa à resolução inicial e as respostas de PA4

	Pergunta da pesquisadora	Respostas de PA4
1.	Mas o resultado de 10 dividido por 2, que é 5, representa o quê?	Eu errei, é 20 dividido por 2.

Essa resposta sugere que a resolvedora está considerando que a sequência possui contas pretas e brancas alternadas, no entanto não dá certeza disso. Então a pesquisadora segue com a pergunta do próximo quadro.

Quadro 20. Fase 3 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA4

	Pergunta da pesquisadora	Respostas de PA4
2.	Por que vinte dividido por dois fornece a resposta do problema?	Porque eram 2 cores: preto e branco.

A resposta de PA4 reforça a ideia de que ela pode estar considerando uma conta preta, uma conta branca e assim por diante. Tentando mostrar a PA4 que pode haver outras possibilidades para as contas que não podem ser vistas, a pesquisadora inventa a resposta de outra pessoa para a mesma questão.

Quadro 21. Fase 4 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA4

	Pergunta da pesquisadora	Resposta de PA4
3.	A Regina, uma amiga minha, acha que uma resposta poderia ser: 15 contas brancas ou 5 brancas. Como você acha que ela pensou para chegar a essa resposta?	 1º Ela pensou 1 branca e 3 pretas no total de 20 contas seria 5 brancas e 15 pretas. 2º Poderia ser trocado 1 preta e 3 brancas seria um total de 20, 5 pretas e 15 brancas.

Pela resposta de PA4 percebe-se que ela não está considerando as pontas visíveis do desenho apresentado no enunciado, o que aconteceu também com PA9, descrição anterior.

Quadro 22. Fase 5 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA4

	Pergunta da pesquisadora	Resposta de PA4
4.	Isso que você escreveu sobre o pensamento da Regina corresponde ao desenho apresentado no problema?	Ao desenho do problema da 1ª etapa não, porque tinha que ser branca e preta alternadas. Mas da outra etapa teria de ser 5 brancas e 15 pretas; não tem como ser 1 branca e 1 preta.

PA4 está considerando duas situações distintas. Para chamar a atenção de PA4 para o fato de que nos dois casos as pontas visíveis devem ser consideradas, a pesquisadora continua na próxima fase.

Quadro 23. Fase 6 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA4

	Pergunta das pesquisadoras	**Respostas de PA4**
5.	Em todos os casos, neste problema, as "pontas" do colar estão definidas como aparecem no desenho. Pensando nisso, como você acha que a Regina pensou para chegar a resposta dela?	 De acordo com o desenho só pode ser mudando a parte escondida, coloca as brancas todas no meio do colar, ou no outro caso as pretas.

Prosseguindo a conversa com a professora, a pesquisadora continua a perguntar com a intenção de confirmar se PA4 está mesmo segura do que está pensando agora sobre a certeza que o desenho do enunciado lhe dá.

Quadro 24. Fase 7 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA4

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA4**
6.	Por enquanto temos então a sua resposta e a da Regina. Agora apareceu mais uma. A Pamela, outra amiga minha, pensa que o colar tem 5 contas brancas, 5 pretas e 10 vermelhas, porque essas são as cores do time dela. Ela poderia chegar a essa conclusão? Por quê?	 Poderia sim ser adaptado para as cores do seu time, desde que sejam mantidas as cores das duas pontas.

Com a intenção de discutir a possibilidade de um problema ter várias respostas, a pesquisadora prossegue na fase 8.

Quadro 25. Fase 8 – pergunta da pesquisadora relativas à resposta de PA4

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA4**
7.	Analisando a sua resposta, a da Regina e a da Pamela, todas podem ou não estar correta, por quê?	Sim, podem estar corretas. Desde que seja mantida a resposta que as duas pontas seja a sequência branca e preta que é a parte que é vista da caixa. A parte escondida não se sabe, pode ser de qualquer cor.

Com a resposta de PA4 à pergunta 7 pode-se inferir que sua interpretação em relação às condições do problema é satisfatória, tanto no que diz respeito à noção de sequência como em relação à prerrogativa que a figura apresentada no enunciado exige.

Nessa fase, surgiu a ideia de associar o raciocínio apresentado pela professora à linguagem um pouco mais formal da álgebra, já que nessa altura do trabalho (essa fase deu-se no mês de outubro), várias questões relacionadas ao pensamento e à notação algébrica tinham sido discutidas.

Quadro 26. Fase 9 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA4

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA4**
8.	Em resumo, sabemos que: • a caixa contém 20 contas; • numa ponta temos 3 contas brancas e 3 pretas; • na outra ponta temos 2 brancas e 2 pretas; • segundo sua resposta a "parte escondida não se sabe, pode ser de qualquer cor". Escreva então uma regra (fórmula) que represente essa situação.	$P+B+P+B+P+B+10\ desconhecida\ +P+B+P+B$ Seriam 6 alternadas 3 pretas e 4 brancas $+10$ que podem ser de qualquer cor $+4$ alternadas: 2 pretas e brancas.

PA4 representou a situação utilizando a letra P para as contas pretas e a letra B para as contas brancas, representação que se assemelha a uma das fases do desenvolvimento da linguagem algébrica, a fase sincopada[19], já que para as co res desconhecidas ela utilizava a palavra *desconhecida*. A pesquisadora resolve investir mais na ideia desenvolvida por PA4.

Quadro 27. Fase10 – pergunta da pesquisadora relativas à resposta de PA4

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA4**
9.	Na sua resposta à pergunta 8 aparece: $P+B+P+B+P+B+10\ desconhecida\ +P+B+P+B,$ seria correto escrever isso do seguinte jeito: $3P+3B+10d+2P+2B?$ E desse outro: $5P+5B+10d?$ Por quê?	Poderia ser correto, só que teria que ser preta e branca alternadas igual está no desenho e não juntas. Essa "fórmula" apenas o total está correto.

De acordo com a resposta da professora, ela não está levando em consideração que o "sinal de mais", utilizado por ela na expressão, já indica uma representação da soma. Ela associa a representação física com a al gébrica, a p artir da indicação física das contas. Para mostrar a PA4 que essa expressão pode ser escrita de outras maneiras, a pesquisadora continua.

[19] A fase sincopada da expressão do pensamento algébrico teria surgido com Diofanto de Alexandria, pois foi ele quem, ao que se sabe, pela primeira vez introduziu um símbolo para a incógnita – a letra "sigma" do alfabeto grego – e utilizou uma forma mais abreviada e concisa para expressar suas equações. Uma forma sincopada similar à de Diofanto seria, mais tarde, desenvolvida pelos hindus, especialmente por Brahmagupta (século XII). A álgebra árabe, por sua vez, parece não ter utilizado essa forma de expressão. Entretanto, convém assinalar que, apesar de terem se utilizado da forma retórica para exprimir a álgebra, os árabes introduziram um novo vocabulário técnico para esse campo do conhecimento, dando-lhe uma certa autonomia que, mais tarde, seria reconhecida através da aceitação do termo *al-jabr* (ou *al-gabr*) introduzido por Al-Khwarizmi (FIORENTINI, MIGUEL E MIORIM, 1993, p.80).

Quadro 28. Fase11 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA4

	Pergunta da pesquisadora	Resposta de PA4
10.	É correto estão dizer que 1- $P + B + P + B + P + B + 10\ desconhecidas\ + P + B + P + B$ *é igual a* 2- $3P + 3B + 10d + 2P + 2B$ *que também é igual a* 3- $5P + 5B + 10d$, ou seja $P + B + P + B + P + B + 10\ desconhecidas\ + P + B + P + B = \, = 3P + 3B + 10d + 2P + 2B = 5P + 5B + 10d$ E essa expressão representa apenas o total das contas e não a sequência delas?	Eu acho $3P + 3B + 10d + 2P + 2B = 5P + 5B + 10d$ se tem uma ideia que seja 3 pretas juntas e 3 brancas juntas + 10 desconhecidas + 2 pretas e 2 brancas $= 5$ pretas juntas $+ 5$ brancas $+ 10$ desconhecidas $+ 2$ pretas juntas e 2 brancas juntas. O mais importante e seguir a sequência: preta-branca-desconhecidas-preta-branca. A expressão acho que não está errada, mas não representa aquele problema do início da caixa e colar.

Novamente PA4 mostra na sua resposta que entende que a ordem dos símbolos na expressão representa a sequência e não apenas a quantidade total de contas. Ao tentar fazê-la compreender que a operação representa a soma das contas, a pesquisadora lança a próxima pergunta.

Quadro 29. Fase12 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA4

	Pergunta das pesquisadoras	Respostas de PA4
11.	Vamos considerar as quantidades de cada cor das contas. Então na sequência $P + B + P + B + P + B + 10desconhecida\ + P + B + P + B$ temos no total $5P + 5B + 10d$, ou seja, 5 contas pretas mais 5 contas brancas, mais 10 contas de cor desconhecida. Considerando, assim, apenas as quantidades das cores e não a sua ordem na sequência, é correto afirmar que $P + B + P + B + P + B + 10desconhecida\ + P + B + P + B = \, = 3P + 3B + 10d + 2P + 2B = 5P + 5B + 10d?$	Se levar em conta as quantidades e não a sequência, é correto sim.

PA4 volta a responder o que tinha escrito na questão 9. É possível inferir que ela aceita considerar que a expressão pode referir-se a quantidade, porém ainda exprime a possibilidade de a expressão apresentar a sequência. Para tirar essa dúvida, a pesquisadora continua perguntando.

Quadro 30. Fase13 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA4

	Pergunta das pesquisadoras	**Respostas de PA4**
12.	Então você concorda que $P+B+P+B+P+B+10d+P+B+P+B = 5P+5B+10d.$ Com base nisso complete as expressões: a) $2P+2B+2P+2B+2P+2B+10d+2P+2B+2P+2B =$ b) $P+2B+P+2V+P+2B+P+2V =$ c) $P+B+2P+2V+2B+3V+40 =$	a) $10P+10B+20d$ b) $4P+4B+4V$ c) $3P+3B+5V=40$

Nessa fase, PA4 mostra que considera a expressão para o total de contas e não para a posição delas. Porém, ao manipular a expressão c), comete um erro ao transformá-la numa equação. Isto é confirmado quando lhe é perguntado a respeito.

Quadro 31. Fase14 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA4

	Pergunta das pesquisadoras	**Respostas de PA4**
13.	Por que você transformou a expressão c na equação $3P+3B+5V=40$?	Bem, foi o que eu sabia fazer, somei os termos iguais e separei o 40 porque é diferente, e para poder ser resolvido, ou seja, aplicar a regra e chegar a um número reduzido.

Com a intenção de fazer PA4 perceber que não existe nenhuma propriedade matemática que permita a transformação feita por ela na expressão c) do quadro 13, a pesquisadora continua interrogando.

Quadro 32. Fase 15 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA4

	Pergunta das pesquisadoras	**Respostas de PA4**
14.	Então para você $P + B + 2P + 2V + 2B + 3V + 40$ é o mesmo que $3P + 3B + 5V = 40$. Vamos supor que $P = 2\ B = 3\ e\ V = 4$ Substituindo na primeira expressão temos $2 + 3 + 2x2 + 2x4 + 2x3 + 3x4 + 40$ fazendo as contas $2 + 3 + 4 + 8 + 6 + 12 + 40$ $5 + 12 + 18 + 40$ $17 + 58$ 75 Substituindo na segunda expressão teremos $3x2 + 3x3 + 5x4 = 40$ $fazendo\ as\ contas$ $6 + 9 + 20 = 40$ $35 = 40$ E então, o que diz disso?	Você resolveu a expressão, e seguindo seu “modelo” na segunda expressão vou terminar $35 = 40 \quad 35 + 40 = 75$ O que você fez? Você transformou as cores das contas do colar em uma expressão ou seja “somou” cores iguais ou termos e depois obteve o total.

Percebe-se, com esse esclarecimento, que PA4 faz confusão com os dados e por coincidência os valores 35 e 40 que aparecem na segunda expressão somam 75, valor que aparece na primeira expressão, que não tem nada a ver com a outra expressão.

Por meio desse diálogo socrático[20], pretende-se fazer a participante compreender a não associação entre as duas expressões e, posteriormente, a impossibilidade da transformação que PA4 fez na segunda expressão.

[20] Um **Diálogo Socrático** é uma sessão de investigação filosófica em grupo na forma de um diálogo orientado por um filósofo, regido por determinadas regras e cujo intuito principal é o de promover o pensamento autónomo e crítico dos participantes.
Retirado de: http://filosofiacritica.wordpress.com/o-que-e-um-dialogo-socratico/.

Quadro 33. Fase 16 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA4

	Pergunta das pesquisadoras	Respostas de PA4
15.	Mas eu já tinha terminado em $35 = 40$. Há algum problema nesse fim? Qual?	$\frac{40}{35} \overset{:5}{\cdot} \frac{8}{7}$ Só pode terminar uma expressão quando não tiver nem uma outra alternativa para fazer, que não é o caso. $35 = 40$. Eu só sei que há algo errado. Não sei responder qual e nem porquê.

Percebe-se que a participante está fazendo alguma associação com frações. Ela simplifica a fração $\frac{40}{35}$, mas não consegue encontrar nenhuma relação que indique o erro cometido.

Quadro 34. Fase 17 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA4

	Pergunta das pesquisadoras	Respostas de PA4
16.	Pode 35 ser igual a 40?	Não, 35 não pode ser igual a 40. Quarenta tem 5 elementos a mais que 35. Prometo que vou pesquisar, depois respondo, acho que a resposta certa teria que ser um total de 20, que seria a soma de 5 pretas, 5 brancas e 10 desconhecidas, mas não consigo achar o erro no meio de um processo enorme, cheio de expressões por sinal, erradas.

Como a discussão se prolongou demais, percebe-se, nessa fase da questão, que a participante não conseguia mais separar as questões que foram desenvolvidas durante todo o processo. Por conseguinte, decidiu-se encerrar com essa fase.

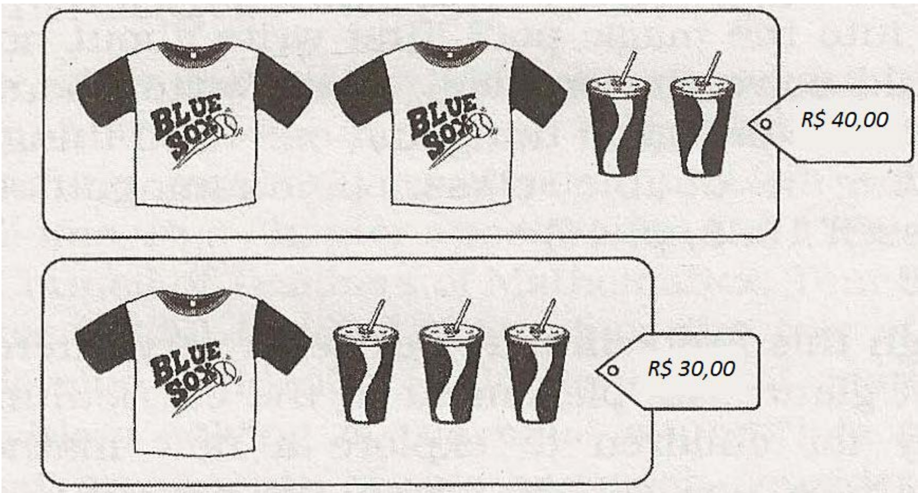
4.4 Caso da Professora PA1 – Questão 01

A seguir são apresentadas a resolução dada por uma das professoras participantes do projeto, aqui denominada PA1, os questionamentos feitos pela pesquisadora e as respostas dadas por PA1 a esses questionamentos nas 13 fases da prova.

O enunciado da Questão 01 e a resolução inicial de PA1 são apresentados no quadro a seguir.

Quadro 35. Fase 1 – resolução apresentada por PA1 na questão 01

1) **Observe as informações:**



a) Quanto custa a camiseta? Justifique sua resposta.
b) Quanto custa o copo de suco? Justifique sua resposta.

Camiseta custou R$15,00 cada

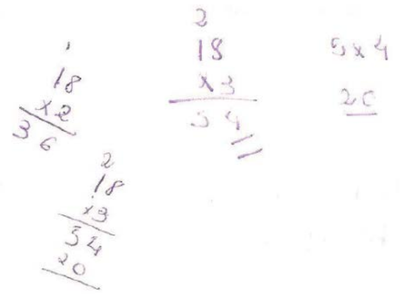
O suco custou R$ 5,00 cada copo.

Analisando os dois cartazes com as ofertas, eu comparei um com o outro dividindo os preços entre os produtos para chegar ao valor de cada produto.

Como, nas duas questões já apresentadas, a e xplicação dada por PA1 abaixo do traço foi feita no dia em que a pesquisadora pediu uma explicação complementar, se a professora julgasse que, no primeiro momento, não havia justificado sua resposta.

A pesquisadora altera a primeira etiqueta para $R\$44{,}00$. A resposta apresentada pela professora PA1 está de acordo com as condições do problema, mas novo questionamento foi feito para explorar como a professora chegou ao valor de cada camiseta e de cada copo de suco.

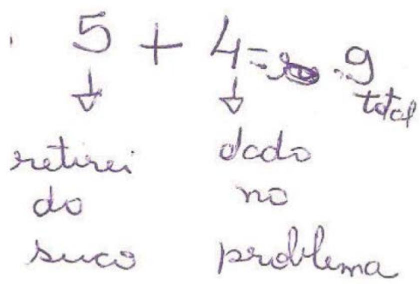
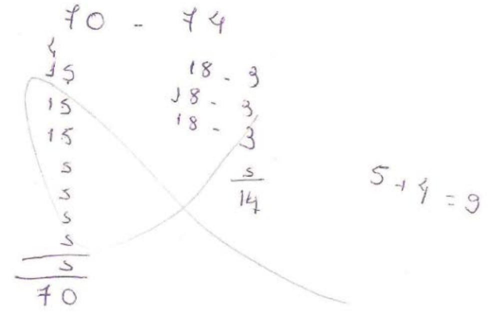
Quadro 36. Fase 2 – pergunta da pesquisadora relativa à resolução inicial de PA1

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA1**
1.	E se na primeira etiqueta fosse $R\$44{,}00$ em vez de $R\$40{,}00$, quais seriam as resposta para a e b?	a) Camiseta custará $R\$18{,}00$ O suco custou $R\$4{,}00$ Totalizando $R\$74{,}00$.[21] 

PA1 apresenta os valores dos itens corretamente, porém não explicita a maneira como encontrou os valores para a camiseta e para o copo de suco. O que chama a atenção é que, na última linha da resposta, ela escreve o total das duas compras, $R\$\ 74{,}00$.

[21] As respostas dadas pelas participantes foram transcritas na forma original.

Quadro 37. Fase 3 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA1

	Pergunta das pesquisadoras	**Respostas de PA1**
2.	Como você encontrou o valor $R\$18{,}00$ para a c amiseta e $R\$4{,}00$ para o suco?	Aumentei o valor da camiseta e diminuí o valor do suco. Retirei 1 real de cada suco totalizando  Distribui 3 reais a mais para cada camiseta ficando: 18 reais camiseta 4 reais suco. 

De acordo com as "contas" apresentadas por PA1 e pela sua explicação, ela trabalha com as duas compras ao mesmo tempo. Na primeira situação ($R\$\,40{,}00$ para a primeira compra e $R\$\,30{,}00$ para a segunda compra, preço da camiseta igual a $R\$\,15{,}00$ e preço do copo do suco igual a $R\$\,5{,}00$), como a pesquisadora muda a etiqueta da primeira compra de $R\$\,40{,}00$ para $R\$\,44{,}00$, ela retira $R\$\,1{,}00$ de cada copo (duas compras juntas), totalizando $R\$\,5{,}00$, que somados a $R\$\,4{,}00$, do aumento que a pesquisadora propõe na primeira etiqueta, totalizam $R\$\,9{,}00$.

$$\underbrace{5}_{\text{retirei do suco}} + \underbrace{4}_{\text{dado no problema}} = \underbrace{9}_{\text{total}}$$

Ela divide esses $R\$ \,9{,}00$ entre as três camisetas (duas compras juntas), logo o preço de cada camiseta passa de $R\$ \,15{,}00$ para $R\$ \,18{,}00$ e o copo de suco passa de $R\$ \,5{,}00$ para $R\$ \,4{,}00$, porque ela retirou $R\$ \,1{,}00$ de cada copo.

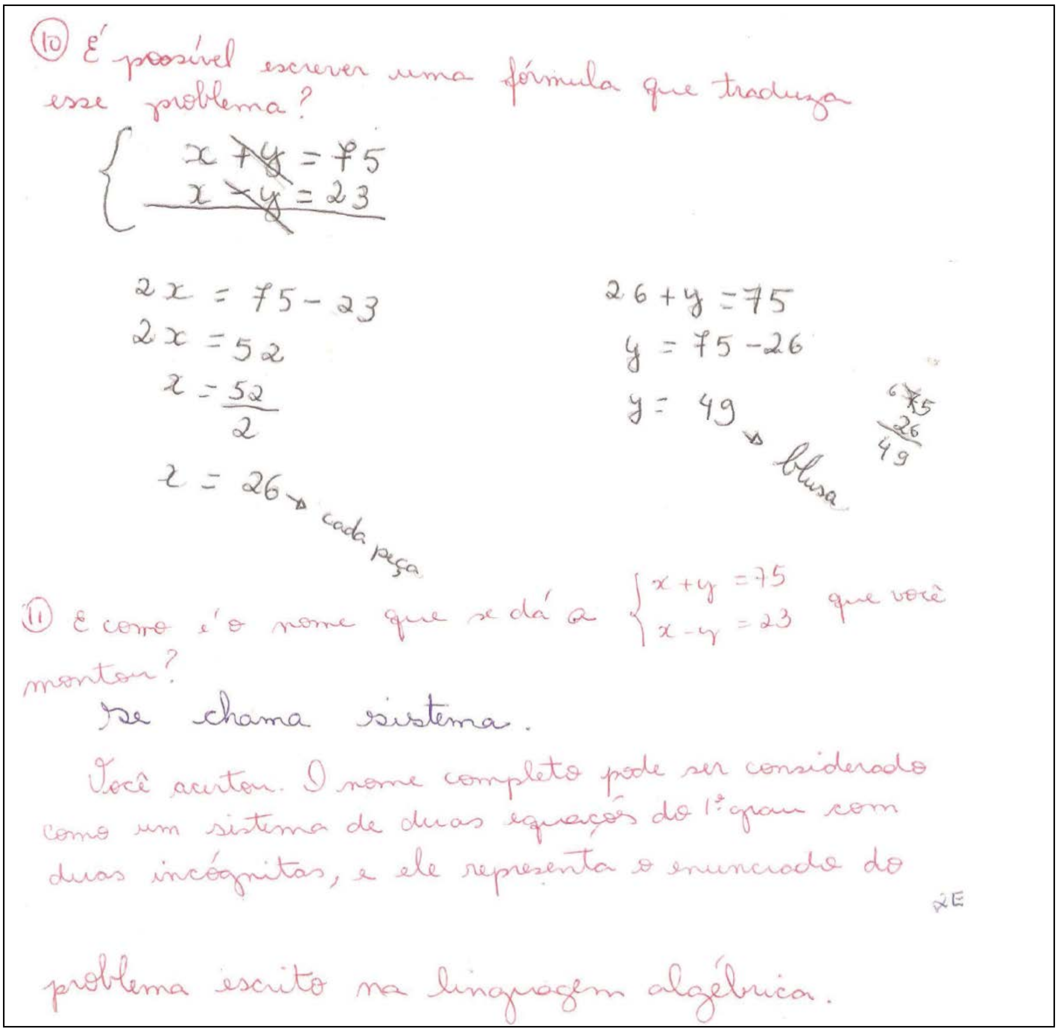
Com a intenção de verificar se PA1 é capaz de escrever as informações utilizando alguma linguagem algébrica, a pesquisadora continua.

Quadro 38. Fase 4 - pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA1

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA1**
3.	Se chamarmos cada camiseta de c e cada copo de suco de s, como você representaria esse problema?	$2 \cdot c + 2 \cdot s = 44$ $1\,c + 3 \cdot s = 30$

Nessa etapa do trabalho com a prova em fases, já haviam sido realizadas várias tarefas da *Early Algebra* com as professoras. É possível que a forma de expressar o problema tenha sido influenciada por essas discussões.

Algumas semanas antes, PA1 havia apresentado corretamente a resolução de um sistema de duas equações com duas incógnitas, no desenvolvimento da resposta dada à questão 02.



A pesquisadora pediu, então, que PA1 revisse a resolução que apresentara para a questão 02, para que pudesse verificar se PA1 seria capaz de resolver o sistema, que ela mesma escrevera para a questão 01.

Quadro 39. Fase 5 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA1

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA1**
4.	Releia as folhas $2E$ e $2F$ (referentes ao problema 2)	$3.x + 5.y = 74$ $3.18 + 5.4 =$ $54 + 20 = 74$

Revendo o sistema de equações montado por PA1 neste problema:

$$2.c + 2.s = 44$$
$$1\,c + 3.s = 30.$$

e a manipulação apresentada na fase 5, percebe-se que a professora substitui c por x e s por y, depois substitui os valores 18 para x e 4 para y, verificando então que o total pago pelos produtos das duas etiquetas conferem 74 reais. Como ela já sabia os valores de c e s (ou x e y), apenas substitui esses valores, o que não deixa de ser a solução do sistema.

Na tentativa de compreender as ações de PA1 e de guiá-la para uma das formas de resolver um sistema de equações com duas incógnitas, prossegue-se com as perguntas.

Quadro 40. Fase 6 – perguntas da pesquisadora relativas à resolução e as respostas de PA1

	Perguntas da pesquisadora	**Respostas de PA1**
5.	Por que você substituiu c e s por x e y?	A letra está sendo usada apenas para representar os valores, neste problema suco e camiseta. Eu poderia usar qualquer letra para representar esses valores.
6.	Depois você substituiu x por 18 (valor de cada camiseta) e y por 4 (valor de cada copo de suco) e se você não soubesse esses valores, como você faria para encontrá-los em: $2c + 2s = 44$ $1c + 3s = 30$?	Como não tem um c ou um s negativo para simplificar, não consigo resolver.

PA1 responde à pergunta 5 possivelmente influenciada pelas discussões que a pesquisadora teve no grupo a respeito das tarefas da

Early Algebra, e pode-se inferir, neste caso, que é possível que ela tenha mais segurança quando as incógnitas são representadas pelas letras x e y. Outra inferência é que também é possível que PA1 saiba resolver sistemas de equações apenas por adição e quando as disposições das incógnitas favoreçam a utilização dessa estratégia.

Na tentativa de que ela própria possa encontrar outra maneira de resolver o sistema em questão, neste caso a estratégia de substituição, foi feita nova pergunta.

Quadro 41. Fase 7 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA1

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA1**
7.	Se a soma do peso de uma panela com o peso de uma leiteira é igual a 420 gramas, é correto afirmar que o peso da panela é igual a 420 gramas menos o peso da leiteira? Por quê?	Sim, porque se souber o peso da leiteira e tirar de 420 teremos o peso da panela.

Com essa pergunta a pesquisadora pretendeu verificar se PA1 concordava que o preço de uma camiseta poderia ser expresso pela diferença entre 30 reais e o preço de 3 copos de sucos. Então, considerando a segunda equação por ela escrita, pergunta:

Quadro 42. Fase 8 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA1

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA1**
8.	Então se $1c + 3s = 30$, conforme sua resposta à pergunta número 3, é correto afirmar que $1c = 30 - 3s$?	Não, porque 3 é o número de camisetas não o preço de cada uma.

De acordo com a resposta dada à pergunta 8, a pesquisadora verifica que PA1 não relacionou o exemplo do preço da panela e da leiteira com a equação $1c + 3s = 30$. A saída que a pesquisadora encontrou, naquele momento, foi investir mais na equação apresentada por PA1 na fase 4 e pergunta:

Quadro 43. Fase 9 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA1

	Pergunta da pesquisadora	Resposta de PA1
9.	a) Mas então o que é $3s$ na expressão $1c + 3s = 30?$ b) Por que existe c no 1 e s no 3 e nada no 30?	Porque eu sei que $1c$ representa o número de camisetas e $3s$ o número de sucos, o 30 é o valor pago pelos itens que estão sendo vendidos.

A resposta dada por PA1 não esclarece se ela considera que c seja o valor da camiseta e s o valor do copo de suco, então a pesquisadora resolve retomar a conversa levantada na fase anterior.

Quadro 44. Fase 10 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA1

	Pergunta da pesquisadora	Resposta de PA1
10.	Você disse que "$1c$ representa o número de camisetas", então o que representa cada camiseta?	Quando eu analisei a e xpressão $1c + 3s = 30$ e afirmei que $1c$ é para uma camiseta é porque na informação do cartaz contém apenas 1 camiseta, logo $1c$ = uma camiseta, já os copos de sucos são 3, então: $3s$ = três camisetas $\underbrace{1c}_{\text{uma camiseta}} + \underbrace{3s}_{\text{três sucos}} = 30$

A resposta de PA1 faz inferir que ela pode estar chegando perto do entendimento do significado de $1c$ e $3s$, porém, nessa etapa, ela aborda somente o significado dos coeficientes de c e de s, não faz nenhum comentário a respeito do que o c e o s representam.

Quadro 45. Fase 11 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA1

	Pergunta da pesquisadora	Resposta de PA1
11.	Quando você afirma em sua resposta que "$1c$ = uma camiseta" está se referindo ao número de camisetas ou ao preço de uma camiseta?	1 é o preço de uma camiseta.

Agora PA1 volta atrás e mostra que sua interpretação não vai ao encontro do que se tinha considerado que ela pensava a respeito dos coeficientes, e que parecia claro na resposta dela à q uestão 10, quando ela considera o "cartaz". Segue a próxima questão.

Quadro 46. Fase 12 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA1

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA1**
12.	De acordo com a sua última resposta, o 1 é o preço de uma camiseta, então o 3 deve ser o preço de um copo de suco, não é? Se isso estiver correto, na segunda etiqueta teremos: $1+3+3+3$ que é igual a 10 e não a 30, e agora?	Quando eu digo $1c+3s=30$, representa $1 = quantidade\ de\ camisetas$ $c = preço\ da\ camiseta$ $3 = quantidade\ de\ suco$ $s = preço\ do\ suco$ $1\,x\,c+3\,x\,s=30$

Agora ela separa cada termo da equação, mas ainda não é possível saber se ela sabe o significado de $1c$ ou $3s$. No momento dessa fase, a pesquisadora leva em consideração que o entendimento dela seja coerente e volta à pergunta da fase 8 para ver se PA1 consegue enxergar a equivalência de

$$1c+3s=30 \quad e \quad c=30-3s.$$

Quadro 47. Fase 13 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA1

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA1**
13.	Então é correto afirmar que $1xc=30-3s$? Por quê?	$1\,c+3\,s=30$ $1.15+3.5=30$ $15+15=30$ $1x15+3x5=30$ $15+15=30$

PA1 substitui os valores encontrados para os itens, antes da mudança do valor da primeira etiqueta, utiliza duas formas de representar a multiplicação, parecendo conferir se o v alor do lado esquerdo da equação dá realmente 30. Considerando que a participante não responde à questão da pesquisadora, continuam os questionamentos.

Quadro 48. Fase 14 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA1

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA1**
14.	Responda a questão 13.	Sim, porque o valor da camiseta é igual a 30 – valor do suco. Se tirar o valor do suco de 30 o que sobra é o valor da camiseta.

Diante dessa resposta, foi proposta a questão que segue.

Quadro 49. Fase 15 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA1

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA1**
15.	Você disse na resposta 1 que a camiseta custaria $R\$18{,}00$ e o copos de suco $R\$4{,}00$. Teste então para : $c = 30 - 3s$	$c = 30 - 3s$ $18 = 30 - 3 \cdot 4$ $18 = 30 - 12$ $18 = 38$ $\frac{38}{18}$ não da certo Com os valores que encontrei não dá para resolver essa função.

Acredita-se que, por falta de atenção, PA1 equivoca-se ao subtrair 12 de 30.

Quadro 50. Fase 16 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA1

	Pergunta da pesquisadora	Resposta de PA1
16.	Quanto é $30 - 12$?	$\begin{array}{r}30\\-12\\\hline 18\end{array}$ O resultado da subtração é 18, sendo assim na função da pergunta 15, ela pode ser resolvida, ou seja, ela está certa com esses valores.

A intenção da pesquisadora era que PA1 percebesse que na segunda equação, da fase 3, escrita pela própria participante, era possível isolar o c.

Quadro 51. Fase 17 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA1

	Pergunta da pesquisadora	Resposta de PA1
17.	Então, de acordo com a sua constatação: $1c + 3s = 30$ equivale a $c = 30 - 3s$. Volte à questão 3 e tente resolver o sistema.	Então eu posso escrever que: $2c + 2s = 44$ $c = 30 - 3s$ $2c + 2s = 44$ $2(30 - 3s) + 2s = 44$ $60 - 6s + 2s = 44$ $60 - 44 = 6s - 2s$ $16 = 4s$ $\frac{16}{4} = s$ $\cancel{s = 4}$ $4 = s$ $\begin{array}{r}60\\44\\\hline 16\end{array}$ Achei o valor do suco.

Na resolução da participante, fase 17 da questão, ela apresenta parte importante da resolução do sistema, utilizando a estratégia de substituição. Porém dá só o valor de s, e não se atém que o sistema possui duas incógnitas.

Quadro 52. Fases 18, 19 e 20 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA1

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA1**
18.	Existe outra letra em: $2c + 2s = 44$ $c = 30 - 3s$ que tem um valor numérico?	Sim, a letra c, $C = 30 - 3s$ $C = 30 - 3 . 4$ $C = 30 - 12$ $C = 18$
19.	Teste esses valores em: $2c + 2s = 44$ $c + 3s = 30$	$2 . 18 + 2 . 4 = 44$ $36 + 8 = 44$ $44 = 44$ $C + 3s = 30$ $18 + 3 . 4 = 30$ $18 + 12 = 30$ $30 = 30$
20.	O que você conclui?	Concluo que existem várias formas de chegar ao resultado e que é possível aprender matemática utilizando regras e funções, ou seja, álgebra.

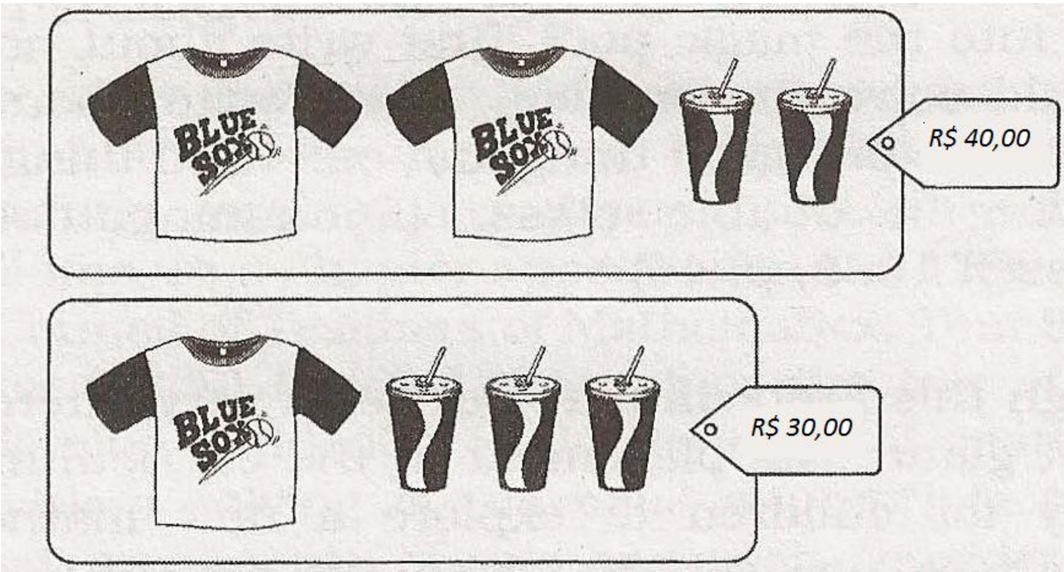
Por contar com a possiblidade de a prova ter várias fases, a resolvedora teve a oportunidade de encontrar o valor das duas incógnitas quando resolvia o sistema de equações por substituição. Foi possível também, de acordo com a resposta dada à questão 20, lembrar à professora que os problemas podem ter "várias formas de chegar ao resultado", detalhe importante quando se pretende considerar a individualidade daquele que aprende.

Capítulo 5

OLHANDO PARA A PRODUÇÃO DAS PARTICIPANTES NA PROVA EM FASES À LUZ DA RME E DA AVALIAÇÃO

5.1 Questão da Camiseta e do Copo de Suco

1) Observe as informações:



a) Quanto custa a camiseta? Justifique sua resposta.
b) Quanto custa o copo de suco? Justifique sua resposta.

Esse problema foi usado neste estudo com a intenção de oportunizar aprendizagem para desenvolver uma linguagem matemática. Foi selecionado porque, na perspectiva da RME, a escolha dos problemas deve ser de acordo com a possibilidade de matematização que ele pode oferecer. A proposta era utilizar o problema para discutir alguma representação algébrica e desenvolver sistemas de equações em outros contextos.

Considerou-se realístico o contexto do problema porque dar o preço total de compras envolvendo os mesmos produtos com diferentes quantidades é uma situação imaginável para as participantes da pesquisa.

Considerou-se também que o contexto no qual ele está inserido gera ideias matemáticas que poderiam ser desenvolvidas e, ainda, que o problema é flexível, isto é, oferece possibilidade de ser resolvido por diferentes estratégias, o que permite maior liberdade para o aluno mostrar o sabe. De Lange (1999, p. 10) afirma que "métodos de avaliação deveriam ser tais que habilitem os estudantes a revelarem o que sabem ao invés do que não sabem".

Em relação à avaliação formativa, a escolha pareceu apropriada já que as diferentes estratégias que as participantes poderiam utilizar dariam informações para guiá-las no processo de aprendizagem.

Usualmente, esse tipo de problema é sempre associado à montagem de um sistema de equações com duas incógnitas, basta ver a quantidade de problemas desse tipo que aparecem nos capítulos que tratam desse assunto nos livros didáticos. Entretanto esse não foi o caminho escolhido por participante alguma, tal caminho só foi escolhido por quatro participantes no decorrer da reinvenção guiada. Isso confirma a possibilidade de diferentes estratégias para abordar o problema.

Apresenta-se, a seguir, uma estratégia, desenvolvida por uma das participantes, que não é usual na resolução de problemas desse tipo.

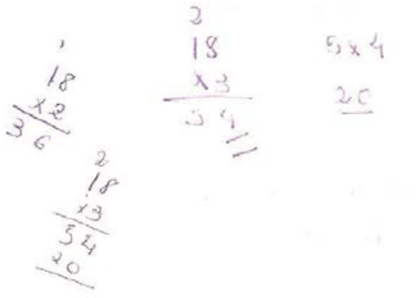
O valor da primeira etiqueta é alterado para R\$44,00 e a participante responde que:

Camiseta custará R\$18,00

O suco custou R\$4,00

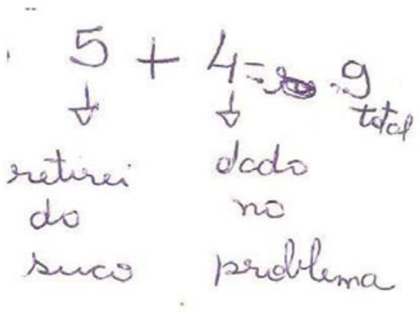
Totalizando R\$74,00.

Com os cálculos:

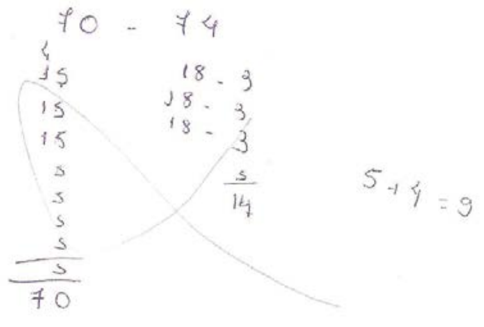


Perguntou-se, então, como ela chegou a esses valores, e ela manifestou-se da seguinte forma:

Aumentei o valor da camiseta e diminuí o valor do suco.
Retirei 1 real de cada suco, totalizando



Distribuí 3 reais a mais para cada camiseta, ficando:
18 reais camiseta
4 reais suco.



Acredita-se que esse é um exemplo de raciocínio matemático: ela retira $R\$ 1{,}00$ de cada copo (duas compras juntas) totalizando $R\$ 5{,}00$, mais $R\$ 4{,}00$ do aumento que a pesquisadora propõe na primeira etiqueta totalizam $R\$ 9{,}00$. Esses $R\$ 9{,}00$, ela divide entre as três camisetas (duas compras juntas), logo o preço de cada camiseta passa de $R\$ 15{,}00$ para $R\$ 18{,}00$ e o do copo de suco passa de $R\$ 5{,}00$ para $R\$ 4{,}00$, porque ela retirou $R\$ 1{,}00$ de cada copo.

Para resolver o problema, a resolvedora utiliza o procedimento da compensação que é considerado um raciocínio matemático envolvido em diversas técnicas de cálculo, por exemplo, a subtração por compensação que funciona da seguinte forma:

$70 - 23 =$

$$\begin{array}{rrr} & 7 & 0 \\ - & 2_1 & 3 \\ \hline & & 7 \end{array}$$

Iniciando pela ordem das unidades: 3 para chegar em 10 faltam 7, como considerou 10 na ordem das unidades (que era zero) no minuendo, compensa acrescentando 1 dezena no subtraendo.

$$\begin{array}{rrr} & 7 & 0 \\ - & 2_1 & 3 \\ \hline & 4 & 7 \end{array}$$

Havia duas dezenas no subtraendo. Com mais uma da compensação, tem-se 3, 3 para chegar em 7, faltam 4.

Discutir com a turma, numa aula de matemática, o raciocínio que acaba de ser exposto seria uma forma de ir contra a forma mecânica, na qual muitas vezes, a Matemática é apresentada e abordada.

Com relação à resolução de PA1 para a questão 01, a pesquisadora busca uma forma de a resolvedora reconhecer que o problema também pode ser resolvido por meio de um sistema de equações com duas incógnitas. Para isso, encaminha a pergunta que segue:

Se chamarmos cada camiseta de c e cada copo de suco de s, como você representaria esse problema?

PA1 escreve um sistema que representa a situação:

$$2 \cdot c + 2 \cdot s = 44$$
$$1c + 3 \cdot s = 30$$

Outras participantes da pesquisa apresentaram as seguintes representações ao responder a mesma questão:

PA4

$C = 18 \quad s = 4$

$C + C + s + s = R\$44{,}00$

$C + s + s + s = R\$40{,}00$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 18 \\ +\ 4 \\ 4 \\ \hline 44{,}00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ \hline 40{,}00 \end{array}$$

PA8

5- Para a etiqueta com valor de R$ 40,00 ficaria assim: $C_1 + C_2 + S_1 + S_2 = 40{,}00$

Para a etiqueta com valor de R$ 30,00 ficaria assim:

$C_1 + S_1 + S_2 + S_3 = 30{,}00$.

PA2

③ Você consegue traduzir esse problema usando linguagem algébrica?

$$2.18 + 2.4 = 44 \qquad \begin{cases} 2.x + 2.y = 44 \\ x + 3.y = 30 \end{cases} \quad A$$
$$18 + 3.4 = 30$$

$x \to$ camiseta

$y \to$ copo de suco.

Numa aula de matemática, a professora poderia usar essas representações para discutir suas semelhanças, explorando a representação formal.

O contexto dos preços das camisetas e dos copos de sucos são exemplos de como experiências de situações da "vida cotidiana" podem ser impulsos para o desenvolvimento de ideias e conceitos em Matemática.

Com o decorrer das fases e guiada pelas observações e perguntas da pesquisadora, PA1 escreve que a situação pode ser escrita da seguinte maneira.

$$2.c + 2.s = 44$$
$$1c + 3.s = 30$$

e

$$3.x + 5.y = 74$$
$$3.18 + 5.4 =$$
$$54 + 20 = 74$$

E, ainda,

$$2c + 2s = 44$$
$$c = 30 - 3s$$

Aprender supõe passar por diferentes níveis de compreensão. De acordo com Lopez (2010, p.18),

> por focar a aprendizagem por meio da matematização da realidade, outro ponto em relação à "reinvenção guiada" é a possibilidade de as diferenças entre os níveis de compreensão dos estudantes serem respeitadas e exploradas, uma vez que uma atividade permite diferentes níveis de matematização, tanto em relação à sua própria atividade quanto em relação às atividades de outros estudantes.

Praticar a reinvenção guiada numa prova em fases permite atender as diferenças entre os níveis de compreensão dos estudantes.

Apresentam-se, a seguir, alguns dos encaminhamentos dados nessa questão de acordo com o nível de compreensão de algumas das participantes.

Depois de escrever um sistema de equações com duas incógnitas que representa a situação do problema a participante não consegue resolvê-lo e justifica afirmando "Como não tem um c ou um s negativo para simplificar, não consigo resolver (PA1, Q01, Fase 6)".

Ao que tudo indica, ela sabe resolver o sistema por adição, mas naquele momento, não estava encontrando uma maneira de resolvê-lo.

O encaminhamento dado pela pesquisadora foi fazê-la compreender que

$$1c + 3s = 30 \; equivale \; a \; c = 30 - 3s$$

com a intenção de conduzir uma resolução do sistema pelo procedimento de substituição. Várias fases foram necessárias até que a participante percebesse que:

$$\begin{aligned} 2c + 2s &= 44 \\ 1c + 3s &= 30 \end{aligned}$$

também pode ser escrito por

$$\begin{aligned} 2c + 2s &= 44 \\ c &= 30 - 3s \end{aligned}$$

E finalmente resolve-o (verificar item 5.1.4).

Para fazer a participante compreender a equivalência dos dois sistemas, foi necessário guia-la com as seguintes perguntas e sugestões.

Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA1**
Se a soma do peso de uma panela com o peso de uma leiteira é igual a 420 gramas, é correto afirmar que o peso da panela é igual a 420 gramas menos o peso da leiteira? Por quê?	Sim, porque se souber o peso da leiteira e tirar de 420 teremos o peso da panela.
Então se $1c + 3s = 30$, conforme sua resposta à pergunta número 3, é correto afirmar que $1c = 30 - 3s$?	Não, porque 3 é o número de camisetas não o preço de cada uma.
5) Mas então o que é $3s$ na expressão $1c + 3s = 30$? b) Por que existe c no 1 e s no 3 e nada no 30?	Porque eu sei que $1c$ representa o número de camisetas e $3s$ o número de sucos, o 30 é o valor pago pelos itens que estão sendo vendidos.
Você disse que "$1c$ representa o número de camisetas", então o que representa cada camiseta?	Quando eu analisei a expressão $1c + 3s = 30$ e afirmei que $1c$ é para uma camiseta e porque na informação do cartaz contém apenas 1 camiseta, logo $1c$ = uma camiseta, já os copos de sucos são 3, então: $3s$ = três camisetas $1c \quad + \quad 3s \quad = \quad 30$ uma camiseta três sucos
Quando você afirma em sua resposta que "$1c$ = uma camiseta" está se referindo ao número de camisetas ou ao preço de uma camiseta?	1 é o preço de uma camiseta.
De acordo com a sua última resposta, o 1 é o preço de uma camiseta, então o 3 deve ser o preço de um copo de suco, né? Se isso estiver correto, na segunda etiqueta teremos: $1 + 3 + 3 + 3$ que é igual a 10 e não a 30, e agora?	Quando eu digo $1c + 3s = 30$, representa $1 = quantidade\ de\ camisetas$ $c = preço\ da\ camiseta$ $3 = quantidade\ de\ suco$ $S = peço\ do\ suco$ $1 \, x \, c + 3 \, x \, s = 30$

Responda a questão anterior.	Sim, porque o valor da camiseta é igual a $30 -$ valor do suco. Se tirar o valor do suco de 30, o que sobra é o valor da camiseta.
Você disse na resposta 1 que a camiseta custaria $R\$18{,}00$ e os copos de suco $R\$4{,}00$. Teste então para: $c = 30 - 3s$	$c = 30 - 3s$ $\cancel{18 = 30 - 3 \cdot 4}$ $\cancel{18 = 30 - 12}$ $\cancel{18 = 38}$ $\cancel{\frac{38}{18}}$ não da certo Com os valores que encontrei, não dá para resolver essa função.
Quanto é $30 - 12?$	$\begin{array}{r} 30 \\ -12 \\ \hline 18 \end{array}$ O resultado da subtração é 18, sendo assim na função da pergunta 15, ela pode ser resolvida, ou seja, ela esta certa com esses valores.
Então, de acordo com a sua constatação: $1c + 3s = 30 \, equivale \, a \, c = 30 - 3s.$ Volte à questão 3 e tente resolver o sistema.	Então eu posso escrever que: $2c + 2s = 44$ $c = 30 - 3s$ $2c + 2s = 44$ $2(30 - 3s) + 2s = 44$ $60 - 6s + 2s = 44$ $60 + 44 = 6s - 2s$ $16 = 4s$ $\frac{16}{4} = s$ $\cancel{s = 4}$ $4 = s$ $\begin{array}{r} 60 \\ 44 \\ \hline 16 \end{array}$ Achei o valor do suco.

Depois de vários questionamentos, a pesquisadora sugere que PA1 traduza o problema para a linguagem algébrica. Ela o faz e utiliza o procedimento da adição para resolvê-lo.

Pergunta da pesquisadora	Resposta de PA1
Você consegue traduzir esse problema usando linguagem algébrica?	$2.18 + 2.4 = 44$ $18 + 3.4 = 30$ $\begin{cases} 2.x + 2.y = 44 \\ x + 3.y = 30 \end{cases}$ $x \to$ camiseta $y \to$ copo de suco
Em matemática chamamos essa representação algébrica de sistema de equação com duas incógnitas. Você sabe resolvê-lo? Se souber resolva-o.	$\begin{cases} 2x + 2y = 44 \\ x + 3y = 30 \quad \cdot(-2) \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 2y = 44 \\ -2x - 6y = -60 \end{cases}$ $-4y = -16$ $y = \frac{16}{4}$ $\boxed{y = 4}$ $\Rightarrow x + 3y = 30$ $x + 3.4 = 30$ $x = 30 - 12$ $\boxed{x = 18}$

A experiência com a prova em fases e a reinvenção guiada permitiu vislumbrar um caminho no qual é possível considerar o conhecimento e a individualidade daquele que aprende.

Na perspectiva da RME, e como apresentado no capítulo 3 desta tese, a avaliação é considerada parte do processo de ensino e aprendizagem e não uma sua lacuna. A análise apresentada tem a intenção de apontar também que, com a prova em fases é possível efetivar a reinvenção guiada de acordo com o nível de compreensão de cada aluno.

5.2 Questão da Saia e da Blusa

Paguei R$75,00 por uma saia e uma blusa. A saia foi R$23,00 mais barata do que a blusa. Qual o preço da saia?

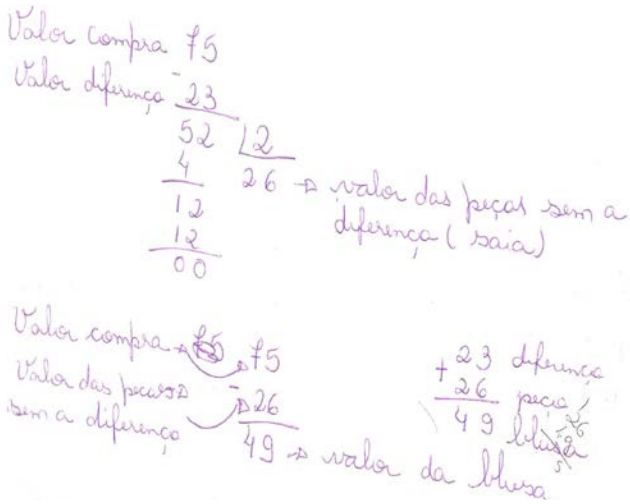
Este problema fez parte da Prova de Questões Abertas de Matemática, da Avaliação do Rendimento Escolar do Paraná – AVA 2002. Foi uma das questões da prova da 4ª e da 8ª séries do Ensino Fundamental. Além disso, a questão já foi objeto de pesquisa dos componentes do GEPEMA.

O problema "da saia e da blusa" é considerado realístico, porque pôde ser imaginável pelas participantes e suas resoluções indicam que elas o interpretaram. É flexível, pois pode ser resolvido por várias estratégias.

As produções das participantes fazem inferir que a maioria delas compreendeu a situação, pois a imaginaram sem dificuldades, porém, das nove participantes, oito, inicialmente, não resolveram corretamente a questão. Essa constatação, entretanto, não impediu, pelo contrário, impulsionou o diálogo que foi estabelecido com as nove participantes, por meio da prova em fases.

Apesar de este problema possuir uma única resposta, o preço da saia é $R\$ \, 26{,}00$, ele possui diferentes estratégias que possibilitam chegar à resposta. A seguir, são apresentadas algumas das soluções dadas por participantes da pesquisa.

PA1

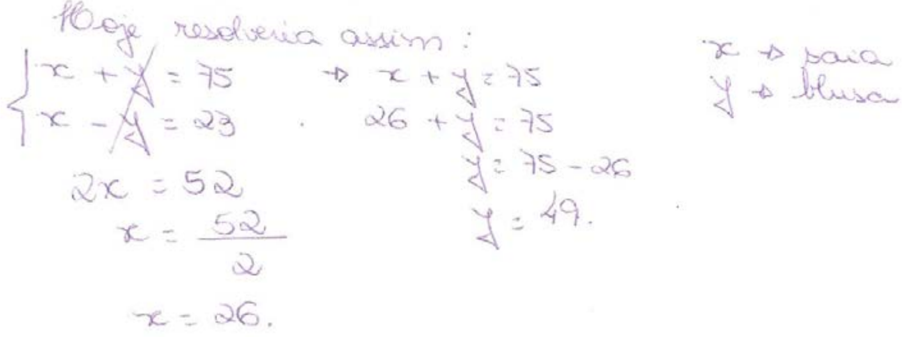


Valor compra 75
Valor diferença − 23
52 | 2
4 26 → valor das peças sem a diferença (saia)
12
12
00

Valor compra → 75
Valor das peças sem a diferença → 26
49 → valor da blusa

+ 23 diferença
26 peça
49 blusa

PA2



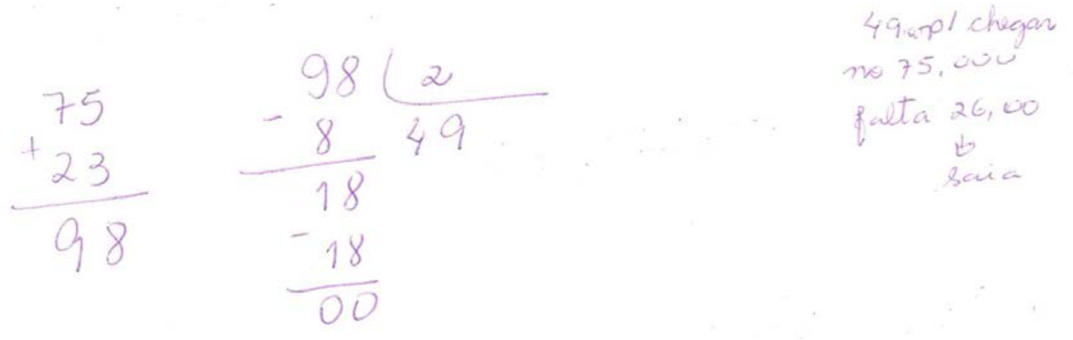
Hoje resolveria assim:

$$\begin{cases} x + y = 75 \\ x - y = 23 \end{cases}$$
$$2x = 52$$
$$x = \frac{52}{2}$$
$$x = 26.$$

$$\rightarrow x + y = 75$$
$$26 + y = 75$$
$$y = 75 - 26$$
$$y = 49.$$

$x \rightarrow$ saia
$y \rightarrow$ blusa

PA8



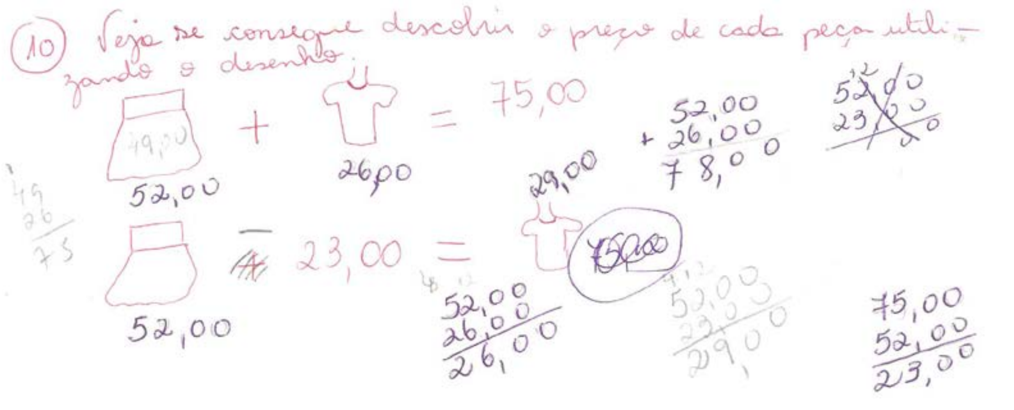
É importante ressaltar que as soluções apresentadas não foram dadas na primeira fase. Apenas uma das participantes chegou ao valor de $R\$26{,}00$ para a saia na primeira fase da prova, e utilizou a mesma estratégia de PA1, apresentada anteriormente.

A intenção de apresentar as estratégias nos quadros anteriores é mostrar que cada uma delas trabalha ideias matemáticas que podem ser exploradas, assim os estudantes estarão mais preparados para lidarem com outros problemas.

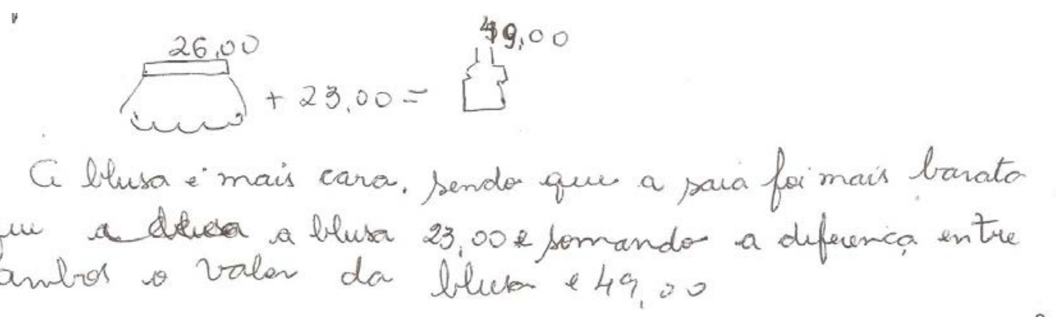
Em uma das fases de resolução, uma das participantes apresentou a seguinte produção.

PA7

9ª Fase

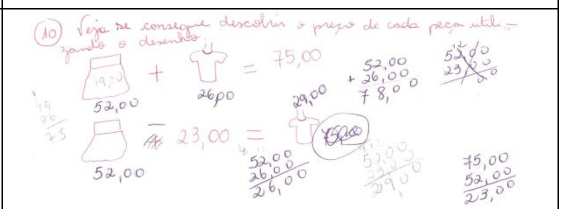


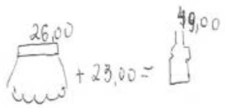
11ª Fase



Os autores da RME enfatizam a importância de o aluno ser capaz de imaginar a situação na qual o problema está envolvido. A produção de PA7 mostra, por meio de desenhos, que o problema foi imaginável para ela, e o diálogo com a pesquisadora a respeito da sua produção ocorreu da 9ª até a 11ª fase.

Quadro 44. Fase 9, 10 e 11 – pergunta da pesquisadora relativa à resposta de PA7

	Pergunta da pesquisadora	**Resposta de PA7**
10	Veja se você consegue descobrir o preço de cada peça utilizando o desenho.	

11	Segundo o seu desenho:  qual é mais cara, a saia ou a blusa? Explique a sua resposta.	A blusa 49,00 e a saia 26,00 observando o problema foi colocado que a saia foi 23,00 mais barata que a blusa e a diferença é 23,00. 49,00 26,00 23,00
12	Por favor, leia novamente e responda à pergunta 11.	A blusa, porque a saia é 23,00 mais barata que a blusa.
13	É possível associar o que você acabou de escrever com o desenho? Explique.	~~A blusa porque a saia é 23,00 mais cara que a blusa.~~  A blusa é mais cara, sendo que a saia foi mais barato que a ~~blusa~~ a blusa 23,00 e somando a diferença entre ambos o valor da blusa é 49,00

Percebe-se que, ao responder à questão 10, a resolvedora representa os desenhos condizentes com o enunciado do problema, porém os valores não atendem as relações entre as peças. Com as reflexões para responder as perguntas da pesquisadora, a resolvedora associa corretamente os valores aos desenhos das peças.

No caso apresentado, PA7 teve uma participação ativa na construção de seu conhecimento matemático e, nesse processo, a matemática não lhe foi apresentada pronta e acabada.

O problema da saia e da blusa, na prova em fases desta pesquisa, permitiu que as participantes produzissem informações que puderam orientar a pesquisadora na tarefa de guiar o processo de ensino e aprendizagem. Esse fato permite atingir um dois principais objetivos de uma avaliação, que é servir para que os alunos aprendam.

Na descrição 4.1 (Questão 02 – Participante PA1) pode-se observar que, durante o processo, houve aprendizagem porque PA1:

- fez várias suposições a respeito dos valores das peças;

- resolveu aritmeticamente um pr oblema correlacionado com o da saia e da blusa;
- conseguiu fazer uma associação com a e stratégia do problema correlacionado e aplicou-a para resolver o d a saia e da blusa.

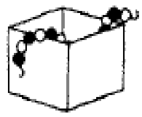
Considerando que, para Freudenthal, a matemática é uma atividade humana, fazer suposições a r espeito dos valores de itens, associar dois problemas que podem ser resolvidos com a mesma estratégia é matemática.

Para Van den Heuvel-Panhuizen (1996), um problema de avaliação deve ser acessível para quem vai resolvê-lo de maneira que a pessoa possa, ao menos, começar uma formulação de resposta. Todas as participantes da pesquisa mostraram que, para elas, o problema foi acessível. Pode-se dizer ainda que o problema da saia e da blusa dá àquele que vai resolvê-lo a oportunidade de abordá-lo em diferentes níveis de matematização, entre eles, aritmética, algébrica, por estimativa, por meio de desenho.

Neste trabalho, orientar as participantes da pesquisa num processo de reinvenção utilizando o problema em análise oportunizou indícios de processos de abstração, de esquematização, de formalização, de sistematização, em um contínuo processo de matematização, e, como diria Freudenthal, de aprendizagem, tanto das participantes quanto da pesquisadora.

5.3 Questão das Contas na Caixinha

> A caixinha abaixo possui uma sequência de 20 contas. Quantas contas brancas estão nesta sequência? Justifique sua resposta.



Este problema foi retirado de Van Den Heuvel-Panhuizen (1996, p.36), é considerado de contexto realístico, imaginável e flexível no sentido de possibilitar o desenvolvimento de várias ideias.

Várias das participantes associaram as contas do problema com as contas de um colar. Uma delas, PA8, escreveu:

> *Minha mãe tinha um colar assim, com duas cores na sequência e o meio terminava com a mesma cor, fora da sequência* (PA8, folha 4B).

De acordo com a abordagem RME, é importante que o resolvedor seja capaz de imaginar a situação inerente ao problema.

Esse problema foi usado neste estudo com a intenção de guiar as participantes a percorrerem um caminho de suposições que mostrasse a possibilidade de considerar elementos importantes no que diz respeito a produção de seus alunos para encaminhar as atividades em classe, por isso, ligados à formação do professor.

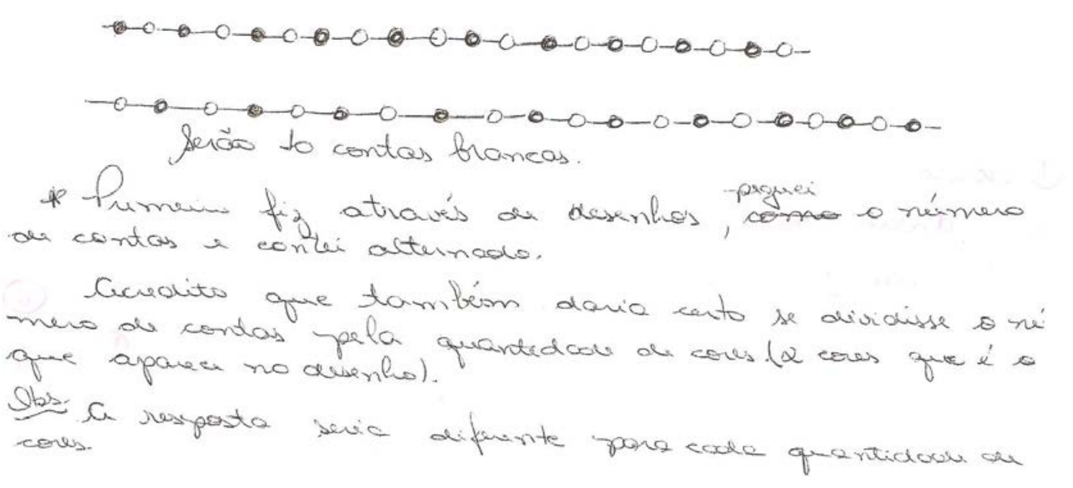
Considerou-se também que o problema em tela não possuía uma resposta padrão, predeterminada pelo professor, o que permite uma maior liberdade para os alunos pensarem de acordo com suas experiências e repertório matemático e, desta maneira, oportunizar que mostrem como lidam com a questão e, o mais importante, o que sabem.

Dos problemas escolhidos para a prova em fases este foi um dos que não se tinha muita ideia de que caminhos e conteúdos matemáticos poderiam ser explorados. Além disso, era necessário responder também aos seguintes questionamentos:

- quais significados as participantes podem produzir a partir do problema?
- quais conceitos de sequência e de padrão as participantes possuíam e como se poderia trabalhar com eles?

Num primeiro contato com o problema, é possível que se tenha pensado que ele não daria muita margem para explorar ideias matemática, isso porque uma solução parecia óbvia, uma sequência de 20 contas nas cores branca e preta intercaladas. Das nove participantes da pesquisa, oito responderam imediatamente que seriam 10 contas brancas e apresentaram justificativas como as que seguem.

PA2



A participante apresenta duas justificativas para sua resposta: o desenho e a indicação de que a divisão do total de contas pelo número de cores também chegaria à resposta.

PA3

Considerou-se que as participantes não tiveram dificuldade em apresentar raciocínios para justificarem suas respostas e que, se a mesma questão fosse apresentada para crianças dos anos iniciais, o problema, da forma como foi apresentado, poderia ter gerado, na primeira fase, outros elementos que possibilitariam mais oportunidade de discussão. Entretanto, foi possível guiar as participantes para outras áreas. Como a maioria delas considerou que a sequência toda era de contas brancas e pretas alternadas, a pesquisadora voltou a questionar.

Pesquisadora

Como ter certeza de que as contas que não podem ser vistas são brancas ou pretas?

A seguir algumas respostas dadas a esta pergunta.

PA4

O enunciado afirma que a caixinha possui uma sequência

PA2

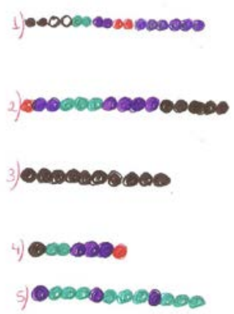
Por causa da sequência que aparece (que pode ser vis-ta). Se houvesse contas diferentes apareceriam para que se pudesse resolver o problema.

A resposta de PA4 leva a inferir que, para ela, sendo uma sequência, obrigatoriamente o que acontece nas pontas tem que acontecer na parte que ela não está vendo.

Para algumas das participantes, foram apresentadas as seguintes “sequências” para provocá-las a enxergarem outras possibilidades.

PA8

6 Olhe com cuidado os desenhos a seguir.



a) Quais são sequências? Por quê?

Esse questionamento teve como intenção fazer com que a participante produzisse significados a respeito do conceito de sequência e de padrão a partir das situações apresentadas para aprender matemática, encaminhamento proposto pela RME. Mas, especificamente nessa etapa, a intenção era fazê-la construir o conceito de sequência.

Para a questão $a)$, PA8 respondeu:

PA8

O nº 2 e o 5. Porque no nº 2 acredito que seria sequência de quantidades e o 5 seria sequência de duas cores, com sequência de 1 azul e 3 verdes e assim sucessivamente.

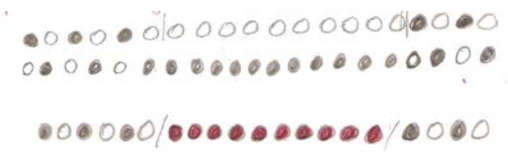
Então a pesquisadora perguntou o que ela poderia considerar se as contas do desenho 1 se repetissem três vezes.

A partir dessa suposição, a participante diz que "pensando dessa forma todas seriam sequência". Mais adiante ela vai, por conta própria, a um dicionário e escreve que sequência significa ato ou efeito de seguir, continuação. Freudenthal (1973), ao se referir ao processo de reinvenção guiada, sugere que o aluno seja chamado e guiado a percorrer um caminho de experiências mentais que o conduza ao que se deseja que ele aprenda.

É possível inferir que o caminho apresentado anteriormente possibilitou que a participante da pesquisa trilhasse um caminho para a compreensão do conceito de sequência, buscando inclusive o significado em um dicionário de Língua Portuguesa. O que vai ao encontro da afirmação de Freudenthal (1991) de que também definições e notações deveriam passar por um processo de reinvenção pelo aluno, para que tenham sentido.

Na fase seguinte, PA8 considerou como possível, dentro do enunciado do problema, um "colar" com as pontas como as da figura e com todas as contas que não se podem ver, verdes. Essa experiência nos mostra que é possível utilizar a própria produção do aluno para encaminhá-lo ao entendimento do que se deseja.

Analisando a descrição do item 4.3 (questão 04, participante PA4), discutiu-se, a partir da fase 6, a possiblidade das cores das contas que não podem ser vistas. PA4 apresenta as várias possibilidades com desenho, deixando bem claro ter compreendido que, embora as pontas sejam, como aparece na figura, formadas por contas brancas e pretas, o meio pode ser de variados modos.



Dando continuidade, a pesquisadora faz uma proposta na tentativa de obter uma representação algébrica para o problema.

PA4
Em resumo, sabemos que: • *a caixa contém* 20 *contas;* • *numa ponta temos* 3 *contas brancas e* 3 *pretas;* • *na outra ponta temos* 2 *brancas e* 2 *pretas;* • *segundo sua resposta a "parte escondida não se sabe, pode ser de qualquer cor".* *Escreva então uma regra (fórmula) que represente essa situação.*

Como resposta PA4 escreve:

$$P + B + P + B + P + B + 10\, desconhecida\ + P + B + P + B$$

Em fases posteriores, ela não aceitou juntar os P e os B, porque estava "presa" à disposição física das contas. A intenção era que ela reconhecesse que na equação que, representava algebricamente a situação, a disposição física não precisa ser respeitada e que o total "20", que aparece no segundo membro, equivale a tudo que está no primeiro membro. No entanto, foi possível explorar ideias matemáticas de representação da situação utilizando álgebra e conceito de sequência.

Analisando o desenvolvimento de PA4 na questão 04, acredita-se que o processo da reinvenção guiada permitiu que a participante elaborasse conhecimento, pois envolveu-se com situações realísticas, matematizando-as, em um processo semelhante ao vivenciado pelo matemático profissional.

Inferiu-se que, durante o processo, houve aprendizagem porque PA4:

- identificou o padrão da sequência das contas;
- concebeu a ideia de que as variadas maneiras que o "meio" do "colar" poderia ter não o descaracterizavam como sequência;
- escreveu uma representação algébrica para a situação.

Ao discutir a reinvenção guiada nesta tese, levantou-se a importância da formação do professor no sentido de equilibrar a liberdade de criar e a força de guiar (expressões utilizadas por Freudenthal (1991)). A respeito desse item, avaliou-se que, levando em conta o que a participante escreve na última fase,

> PA4
> *Não, 35 não pode ser igual a 40. Quarenta tem 5 elementos a mais que 35. Prometo que vou pesquisar, depois respondo, acho que a resposta certa teria que ser um total de 20, que seria a soma de 5 pretas, 5 brancas e 10 desconhecidas,* ***mas não consigo achar o erro no meio de um processo enorme, cheio de expressões por sinal, erradas.***

a questão e a quantidade de ideias trabalhadas estavam deixando a participante confusa. Pode ser que tenha havido um desequilíbrio entre o guiar e o inventar, o que é natural num processo novo, vivenciados pela pesquisadora.

Esse exemplo mostra a importância de o professor experienciar, como está acontecendo com as participantes desta pesquisa, um processo similar ao que ele vai propor para o aluno, o que pode provocar reflexões e discussões. Uma sugestão poderia ser: colocar o professor vivendo essa experiência, como está acontecendo com as participantes desta pesquisa, depois estudariam os elementos que caracterizam a Prova em Fases como um instrumento de aprendizagem, ou seja, estudar teorias de avaliação, por exemplo. Em seguida as professoras poderiam iniciar uma experiência com seus alunos tendo uma formadora para dialogar e tirar suas dúvidas.

Pode-se considerar que no desenvolvimento da questão 04, as participantes PA4 e PA9 (descrições: 4.2 e 4. 3) matematizaram. As ações que levam a concluir que houve matematização são: identificaram a matemática específica em um contexto geral, esquematizaram, descobriram relações, descobriram regularidades, transferiram um problema do mundo real para um pr oblema matemático, generalizaram (DE LANGE, 1987).

Van den Heuvel-Panhuizen (1996) afirma que o processo de matematização é uma das características importantes da abordagem RME.

Hadji (1994) considera que a av aliação formativa objetiva contribuir para a aprendizagem em curso, informando o p rofessor a respeito das condições em que a aprendizagem decorre, e instruindo aquele que aprende sobre o seu próprio percurso, os seus êxitos e as suas dificuldades. Os elementos da questão 04, descritos e analisados, permitem inferir que a prova em fases desta pesquisa ocorreu conforme o que o autor considera como avaliação formativa.

A Prova em Fases permite obter informações a respeito da produção e da aprendizagem do aluno. Van den Heuvel-Panhuizen (1996) sugere diferentes tipos de provas escritas com essa intenção, entre elas estão: as provas em duas fases, os ensaios; utilização de problemas significativos e informativos. Pode-se dizer que a Prova em Fases é um caso particular da prova em duas fases.

A avaliação, segundo Hadji (1994), pode ter as seguintes funções: inventariar, diagnosticar e prognosticar. A Prova em Fases pode permitir ao professor alcançar essas funções.

Com os relatos e outros materiais colhidos nesta pesquisa, é possível inventariar vários itens relativos ao que as participantes sabem, por exemplo:

- na descrição da produção de PA8, questão 02, item 4.1 desta tese, a p articipante mostra que sabe somar, subtrair, resolver uma equação simples, sabe dividir quando o quociente é um número decimal;
- na descrição da produção de PA1, questão 01, item 4.4, a participante mostra que sabe representar uma situação na forma algébrica.
- ao resolver a questão 04, PA1 mostra que sabe resolver um sistema pela estratégia da adição:

Depois você substituiu x por 18 (valor de cada camiseta) e y por 4 (valor de cada copo de suco) e se você não soubesse esses valores, como você faria para encontrá-los em: $2c + 2s = 44$ $1c + 3s = 30$?	Como não tem um c ou um s negativo para simplificar não consigo.

- no caso de PA1, questão 01, ela mostra que sabe substituir valores em incógnitas

Teste esses valores em: $2c + 2s = 44$ $c + 3s = 30$	$2 . 18 + 2 . 4 = 44$ $36 + 8 = 44$ $44 = 44$ $C + 3s = 30$ $18 + 3 . 4 = 30$ $18 + 12 = 30$ $30 = 30$

É possível, também diagnosticar o que elas ainda precisam aprender:

- no caso de PA1, resolver um s istema de equações com duas incógnitas com a estratégia da substituição;
- no caso de PA4, questão 4, que $P + B + P + B + P + B + 10 desconhecidas + P + B + P + B,\ equivale\ a\ 3P + 3B + 10d + 2P + 2B$.

Em relação a p rognosticar, a p esquisadora sugere por exemplo, na questão 01, que elas representem a situação utilizando letras. Em muitos casos nesta pesquisa, com relação à questão 4, a pesquisadora inventa a resolução de uma pessoa desconhecida e apresenta para que a r esolvedora reflita na sua própria resolução e considere outras possiblidades.

Segundo De Lange (1999), são diversos os princípios para a avaliação. Um deles é que o principal propósito da avaliação escolar é promover a aprendizagem. Esta pesquisa mostrou que, ao desenvolver um diálogo com o aluno, por escrito, a partir de um prova em fases, foi possível o aluno aprender a representar uma situação utilizando a linguagem algébrica, aprender a resolver um sistema, ir em busca da definição de sequência.

Outro princípio é que os estudantes deveriam ter oportunidade de receber retornos a respeito de seus trabalhos. Após cada resolução ou comentário que a participante dava para uma questão, na semana seguinte, ela recebia um retorno com comentários a respeito do que ela tinha feito.

A Prova em Fases pode provocar a mudança na maneira que os professores interpretam e analisam a produção escrita dos alunos. Esta proposta, trabalhar com Prova em Fases, requer muito mais do que olhar apenas para a reposta do aluno. Realizar uma prova em fases exige a elaboração de perguntas que guiem o aluno no processo de ensino e aprendizagem. A tarefa de elaborar as perguntas é uma tarefa que exige reflexão e estudo.

Em muitos casos, a produção escrita do aluno não deixa claro para o p rofessor o q ue ele precisa saber e, nesses casos é necessário ir além, perguntando para o aluno oralmente durante a aula, ou por escrito inclusive, na própria folha da prova, para que ele possa explicar-se. Esse processo de diálogo em que, na própria folha de prova do aluno, o professor faz perguntas por escrito e o aluno responde é uma das características da Prova em Fases.

O processo de analisar as respostas dos alunos para que a pergunta seja feita, tendo como propósito a aprendizagem, pode ser um processo de capacitação para o professor. Uma das recomendações do resultado desta pesquisa, portanto, é que a Prova em Fases pode ser utilizada na formação continuada de professores, seja eles mesmos resolvendo uma prova, seja utilizando-a com seus alunos e levando os resultados para serem discutidos em grupos em capacitação.

As facetas de uma Prova em Fases apresentada na pesquisa vai ao encontro do que Villas Boas (2010) considera a essência de uma avaliação formativa, porque nesse formato o professor analisa o trabalho do estudante a cada momento, enquanto ele ocorre, para fazer as intervenções oportunas.

Autores da RME como Freudenthal (1973), Van den Heuvel-Panhuizen (1996), De Lange (1999), Treffers (1987) defendem que o processo de aprendizagem matemática acontece na sala de aula a partir da exploração de situações que possibilitam aos estudantes "reinventar" a matemática. Mesmo que não se possa reinventar, em sala de aula, todo o corpo de conhecimento matemático desenvolvido pela humanidade, os estudantes deveriam ter a chance de se sentirem "autores" do processo de reinvenção, tendo a oportunidade de lidar com situações nas quais a matemática seja tomada não como algo pronto, acabado, imutável, mas sim como algo sempre em desenvolvimento.

Na reinvenção guiada conduzida neste estudo como estratégia de formação continuada, as participantes desempenharam um papel fundamental como protagonistas da aprendizagem, autoras do que fizeram, uma vez que o processo foi baseado na experiência delas, de forma a buscar que elas conseguissem revisitar o que, supostamente, já haviam aprendido nas aulas de matemática na Educação Básica. As questões da prova foram o ponto de partida para o processo de reinvenção, e nesse processo a pesquisadora/formadora participou como guia, recurso, mediando o processo, por meio das perguntas e considerações a respeito da produção escrita das participantes. Assim, neste estudo, o processo de formação teve origem no "fazer" matemática das participantes, como indicado na perspectiva adotada, seguindo o princípio da "re-invenção guiada" da RME. Por conseguinte, as participantes, em lugar de serem meras receptoras de uma matemática pronta e acabada, desempenharam o papel de agentes do processo de ensino e aprendizagem e, como tal, foram estimuladas a usar sua própria produção no processo denominado de “re-invenção guiada”, uma vez que diferentes estratégias, por vezes, refletindo diferentes níveis, puderam ser provocadas e utilizadas de forma produtiva no processo de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ARMANTO, D. **Teaching multiplication and division realistically in indonesian primary schools:** a prototype of local instructional theory. 2002. Thesis - University of Twente, Enschede, 2002.

BARLOW, M. **Avaliação escolar -** mitos e realidades. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BODGAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Ed., 1994.

BURIASCO, R. L C. de. **Avaliação em matemática**: um estudo das respostas de alunos e professores. 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Marília, 1999.

______. Análise da produção escrita: a busca do conhecimento escondido. In: ROMANOWSKI, J. P.; MARTINS, P. L. O.; JUNQUEIRA, S. A. (Orgs). **Conhecimento local e conhecimento universal:** a aula e os campos do conhecimento. Curitiba: Champagnat, 2004.

______.; CYRINO, M. C. de C. T.; SOARES, M. T. C. **Manual para correção das provas com questões abertas de matemática AVA – 2002**. Curitiba: SEED/CAADI, 2004.

______ ; SOARES, M. T. C. Avaliação de sistemas escolares: da classificação dos alunos à perspectiva de análise de sua produção matemática. In: VALENTE, W. R. **Avaliação em matemática:** história e perspectivas atuais. Campinas: Papirus, p. 101-142, 2008.

______. Introdução à análise da produção escrita: prática de investigação em avaliação In: BATISTA, I. de L.; SALVI, R. F. (Orgs.) **Pós-Graduação em ensino de ciências e educação matemática**: um perfil de pesquisas. Londrina: EDUEL, v.1, p.157-166, 2009.

______ ; FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A. B. Avaliação como prática de investigação (alguns apontamentos). **BOLEMA**, Rio Claro, v.33, p.69 - 95, 2009.

CARNEIRO, Tomás Magalhães. **Diálogos socráticos.** 2012. Disponível em: http://filosofiacritica.wordpress.com/o-que-e-um-dialogo-socratico/. Acesso em 17 dez. 2012.

DALTO, J. O. **A produção escrita em matemática:** análise interpretativa da questão discursiva de matemática comum à 8ª série do ensino fundamental e a 3ª série do ensino médio da AVA/2002. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

FERREIRA, P. E. A. **Análise da produção escrita de professores da educação básica em questões não-rotineiras de matemática**. 2009. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL,A. Contribuição para um repensar... a educação algébrica, **Pro-posições** , Campinas, v. 4, n. 1(10), p.78-91, mar.1993. Disponível em http://mail.fae.unicamp.br/~proposicoes/edicoes/sobre_a_revista.html. Acesso em: 28 set. 2009

FREUDENTAL, H. **Mathematics as an educational task.** Dordrecht, The Netherlands: Reidel, 1973.

______. **Revisiting mathematics education.** Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GARNICA, A. V. M. História oral e educação matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, p. 77-98, 2004.

GRAVEMEIJER, K.; DOORMAN, M. Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. **Educational Studies in Mathematics**, v. 39, n.1, p.111-129, jan. 1999.

HADJI, C. **A avaliação regras do jogo:** das intenções aos instrumentos. 4. ed. Portugal: Porto Ed., 1994.

______. **Avaliação desmistificada.** Porto Alegre: Artmed, 2001.

DE LANGE, J. de. **Framework for classroom assessment in mathematics.** Madison: WCER, 1999. Disponível em <www.fi.uu.nl/catch/products/framework/de_lange_framework. doc>. Acesso em: 10 jun. 2008.

______. **Mathematics, insight and meaning.** Utrecht: OW &OC, 1987.

LOPEZ, Juliana Maira Soares. **Análise interpretativa de questões não rotineiras de matemática.** 2010. 141f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

NUNES, C. C.; PONTE, J. P. **A avaliação como regulação do processo de ensino-aprendizagem da matemática dos alunos do 3° ciclo do ensino básico.** 2004. Disponível em: www.fordis.ese.ips.pt/docs/siem/texto23.doc . Acesso em: 12 fev. 2012.

OECD. **PISA 2009 Assessment framework:** key competencies in reading, mathematics and science. Paris: OECD, 2009.

PEREGO, F. **O que a produção escrita pode revelar? Uma análise de questões de matemática**. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

PEREGO, S. C. **Questões abertas de matemática:** um estudo de registros escritos. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

PSICOLOUCOS. **Método socrático**. 2011. Disponível em: http://www.psicoloucos.com/Socrates/metodo-socratico.html. Acesso em: 17 dez. 2012.

SANTOS, E. R. dos. **Estudo da produção escrita de estudantes do ensino médio em questões discursivas não rotineiras de matemática**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática)- Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

TREFFERS, A. **Three dimensions**: a model of goal and theory description in mathematics instruction – the wiskobas project. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. **Assessment and realistic mathematics education**. Utrecht: CD-ß Press/Freudenthal Institute, Utrecht University, 1996.

______. Realistic Mathematics Education as work in progress. In: LIN, F. L. (Ed.) **Common Sense in Mathematics Education**, p. 1-43. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education, Taipei, Taiwan, 19 – 23 November 2001. Disponível em: <http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/4966.pdf>. Acesso em: 18 nov. 2010

VILLAS BOAS, B. M. de F.. Projeto interventivo e portfólio: construindo a avaliação formativa. In: DALBEN, A. I. L. L. de. **Convergências e tensões no campo da formação e do trabalho docente**. Belo Horizonte: Autêntica, p.63-83, 2010.

VIOLA DOS SANTOS, J.; BURIASCO, R. L. C. de.; FERREIRA, P. E. A. Interpretações de alunos da educação básica para a ideia de recorrência em uma questão aberta de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.12, n.1, p. 143-163, 2010.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Questionário de identificação das participantes

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

Universidade Estadual de Londrina
Departamento de Matemática

OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO
CAPES/INEP

Projeto: EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

Identificação

1) Nome____
2) Data de nascimento: ____
3) Em quais escolas já lecionou? Por quanto tempo? Qual o seu tempo total de trabalho no magistério?
4) Escola(s) em que leciona, há quanto tempo e quantas aulas ministra por semana:
5) Séries nas quais leciona:

Formação

6) Onde fez o Ensino Fundamental? Escola pública ou particular?
7) Onde fez o Ensino Médio? Qual curso? Escola pública ou particular?
8) Fez curso superior? Qual? Onde? Em que ano iniciou e em que ano concluiu?
9) Fez algum curso de especialização ou aperfeiçoamento? Se fez, qual? Quando? Onde?
10) Você já participou de algum outro projeto? Qual? Fale sobre ele.
11) Por que você escolheu ser professora?

Prática em sala de aula

12) Como você desenvolve sua aula?
13) Utiliza algum tipo de recurso nas aulas (além de giz e lousa)? Qual?
14) Como lida com os alunos?
15) Você faz algum planejamento para as aulas? Como?
16) Você prepara as suas aulas? Como?
17) Quanto tempo você dedica para preparação das aulas?
18) Quanto tempo gasta na correção de tarefas e provas?
19) Você adota algum livro didático de Matemática? Qual ou quais?

20) Os alunos trabalham com o livro didático? Costumam utilizá-lo em casa ou apenas em sala de aula?
21) Como você fez para escolher o livro?
22) Você mesma elabora as tarefas que propõe em sala de aula ou seleciona de algum lugar?
23) Quais critérios você utiliza para elaborar/escolher as tarefas que propõe em sala de aula?
24) Para você, quais são as principais dificuldades no ensino de matemática? Por quê?
25) Você tem dificuldade a respeito de algum conteúdo matemático que você leciona? Quais?
26) Há algum conteúdo da matemática que você gosta muito de trabalhar em sala de aula? Qual? Fale sobre isso.
27) Há algum conteúdo da matemática que você já trabalhou e que você considera que os alunos aprenderam satisfatoriamente? Qual? Fale sobre isso.
28) Há alguma experiência em seu trabalho que você considera um sucesso? Qual? Fale sobre ela. O que você aprendeu com essa experiência?
29) Há alguma experiência em seu trabalho que você considera um fracasso? Qual? Fale sobre ela. O que você aprendeu com essa experiência?
30) Para você o que é avaliação? Para que serve? Como você avalia seus alunos? Por quê?

Experiência

31) O que você considera necessário para ser um bom professor de matemática? Você teve algum professor com essas características?
32) Você acha que os cursos que fez lhe deram a formação necessária para ser professora? Por quê?
33) O que você tem feito para continuar a sua formação?
34) Quando você era aluna, qual era a sua relação com a Matemática?
35) E hoje, como professora, você acha que houve mudanças na sua relação com a Matemática? Fale sobre isso.
36) Há alguma coisa que você gostaria de contar e que eu não lhe perguntei?

APÊNDICE B

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Tendo em vista a necessidade de coleta de dados para o desenvolvimento de investigação envolvendo a produção escrita de professores, sob responsabilidade de Magna Natalia Marin Pires, professora lotada no Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, declaro que consinto que a mesma utilize integralmente ou em partes, meus registros escritos nas tarefas realizadas no âmbito do projeto *Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática* (OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO – Edital 2010 - EDITAL Nº 38/2010/CAPES/INEP), para fins de pesquisa, podendo divulgá-los em publicações, congressos e eventos da área, sem restrições de prazo e citações com a condição de que meu nome não seja citado, garantido o anonimato no relato da pesquisa. Declaro ainda, que fui devidamente informada e esclarecida quanto à investigação que será desenvolvida. Abdicando direitos meus e de meus descendentes, subscrevo a presente carta.

Londrina, 05/02/2011.

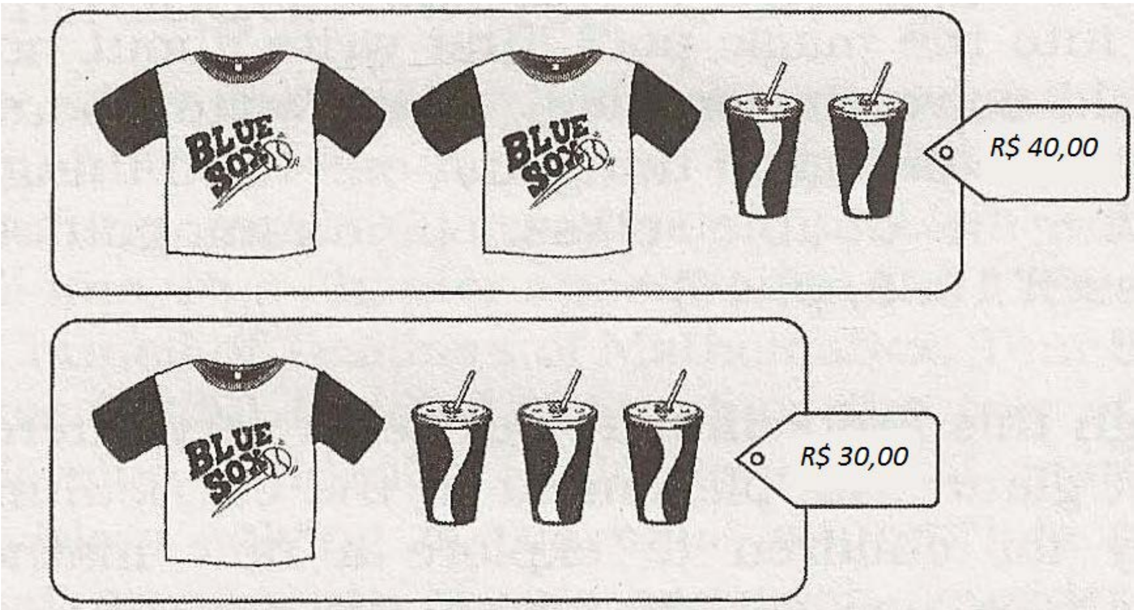
Nome	Assinatura	Nº. do documento
PA1		
PA2		
PA3		
PA4		
PA5		
PA6		
PA7		
PA8		
PA9		

APÊNDICE C

Prova em Fases

NOME:... DATA: ___/____/2011	
PROJETO OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO – APUCARANA	PROVA EM FASES

1) Observe as informações:

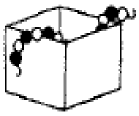


a) Quanto custa a camiseta? Justifique sua resposta.
b) Quanto custa o copo de suco? Justifique sua resposta.

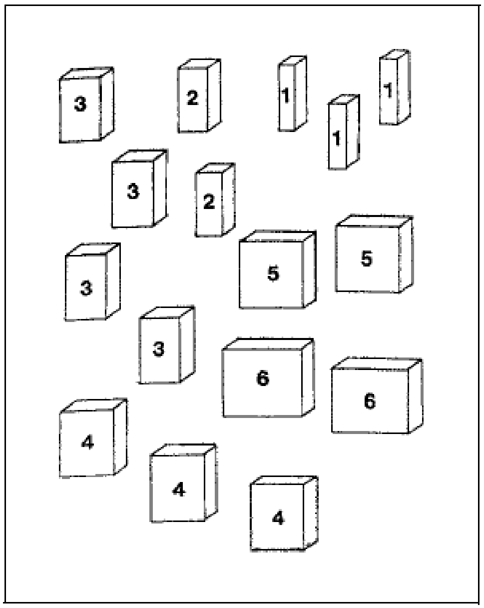
2) Paguei R$ 75,00 por uma saia e uma blusa. A saia foi R$ 23,00 mais barata do que a blusa. Qual o preço da saia?

3) Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. Quantos telegramas entregou em cada dia?

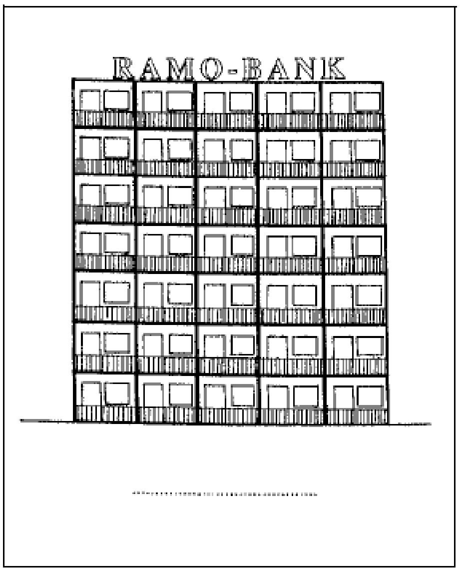
4) A caixinha abaixo possui uma seqüência de 20 contas. Quantas contas brancas estão nesta seqüência? Justifique sua resposta.



5) Em uma loja, as velas foram encaixotadas de diferentes maneiras. Algumas caixas contêm apenas uma vela, outras contêm duas ou três velas. E também há caixas com quatro, cinco ou seis velas. Você quer comprar doze velas e pode escolher em quais caixas. Faça um X fora das caixas que você quer, mas tenha certeza que você vai levar exatamente doze velas.



6) A figura



Mostra o desenho de um edifício com um letreiro no seu topo. Que tamanho você acha que as letras desse letreiro têm? Justifique sua resposta.

7) O quadro a seguir mostra uma "conta" com a resposta. Em seguida mostra mais "contas" similares à primeira. Tente encontrar as respostas para essas "contas" olhando cuidadosamente para a que já está pronta. Você pode fazê-las em qualquer ordem. Especifique os procedimentos que utilizou para dar as respostas.

86+57=143

86 + 56 =

57 + 86 =

860 + 570 =

85 + 57 =

143 - 86 =

86 + 86 + 57 + 57 =

85 + 58 =

8) O quadro a seguir mostra uma série de "contas". Algumas respostas são imediatas e outras nem tanto. Veja se consegue achar as repostas de um "jeito" diferente do usual. Explique o "jeito" diferente que utilizou para encontrar cada resposta.

$70 - 30 =$

$59 - 4 =$

$64 - 20 =$

$50 - 3 =$

$47 - 43 =$

$33 - 25 =$

9) Para a festa de aniversário da escola, Ana, Pedro, Miriam e Fábio levaram juntos 90 docinhos. A professora deles observou que:
   - se Ana tivesse levado 2 docinhos a mais;
   - se Pedro tivesse levado 2 docinhos a menos;
   - se Miriam tivesse levado o dobro;
   - se Fábio tivesse levado a metade;

   os 4 amigos teriam levado todos o mesmo número de docinhos. Quantos docinhos levou cada um dos amigos?

10) Certo dia, numa aula de Matemática, foi medida a altura de todos os alunos. A altura média dos rapazes era de160 cm, e a altura média das moças era de 150 cm. A Alice era a mais alta: media 180 cm. O Zé era o mais baixo: media130 cm.

Naquele dia, tinham faltado dois alunos, mas, no dia seguinte, esses alunos vieram à aula. Então, mediram-se as suas alturas e as médias foram calculadas novamente. Para surpresa geral, nem a altura média das moças nem a dos rapazes mudou.

Quais das conclusões seguintes podemos tirar com base nesta informação? Para cada conclusão, faça um círculo em torno de Sim ou de Não e justifique sua resposta.

		Pode tirar-se esta conclusão?
Conclusão 1	Os dois alunos eram moças.	Sim / Não
Justificativa		
Conclusão 2	Um dos alunos era um rapaz e o outro era uma moças.	Sim / Não
Justificativa		
Conclusão 3	Os dois alunos têm a mesma altura.	Sim / Não
Justificativa		
Conclusão 4	A média das alturas de todos os alunos não mudou.	Sim / Não
Justificativa		
Conclusão 5	O Zé continua a ser o mais baixo.	Sim / Não
Justificativa		

11) Uma doceira foi ao mercado comprar ovos para fazer 43 bolos, todos com a mesma receita, que gasta menos de 9 ovos. O vendedor repara que se tentar embrulhar os ovos que a doceira comprou em grupos de 2 ou de 3 ou de 4 ou de 5 ou de 6 ovos, sempre sobra 1 ovo. Quantos ovos ela usa em cada bolo? Qual o menor número de ovos que a doceira vai gastar para fazer os 43 bolos?