UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

SIBÉLE CRISTINA PEREGO

QUESTÕES ABERTAS DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO DE REGISTROS ESCRITOS

LONDRINA
2005

SIBÉLE CRISTINA PEREGO

QUESTÕES ABERTAS DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO DE REGISTROS ESCRITOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Prof. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco.

LONDRINA
2005

FICHA CATALOGRÁFICA
Jeanine S. Barros – CRB9-1362

P487q Perego, Sibéle Cristina
Questões abertas de matemática: um estudo de registros escritos./ Sibéle Cristina Perego.—Londrina , PR: UEL, 2005.
104 f. ; 30 cm

Orientadora: Profª. Drª. Regina Luzia Corio de Buriasco
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina
Bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Resolução de problemas. 3. Avaliação educacional. 4. Compreensão na leitura. 5. Avaliação educacional. I. Buriasco, Regina Luzia Corio. II. Universidade Estadual de Londrina. III. Título.

CDD 21ed. 510.7

SIBÉLE CRISTINA PEREGO

QUESTÕES ABERTAS DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO DE REGISTROS ESCRITOS

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dra. Elsa Maria Pessoa Pulin
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Antonio Vicente Marafiotti Garnica
Universidade Estadual Paulista

Prof. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco
(Orient.)
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, ____ de _____________ de 2005

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida.

A Regina, minha orientadora, pela oportunidade de realizar este trabalho. Por ter me acolhido, compartilhado conhecimentos da academia e da vida, valores e sentimentos que jamais se apagarão do meu coração e das minhas lembranças.

Aos meus pais, por tudo que sou.

Aos colegas e amigos do curso, pelos momentos compartilhados.

A Franciele, irmã e companheira.

Aos professores do curso, pelos conhecimentos compartilhados.

Aos alunos da Licenciatura, pela prontidão e colaboração valiosa para a realização deste trabalho.

A Odete, secretária do Departamento de Matemática e a Regina, Joelma e Vergínia, da secretaria de pós-graduação do Centro de Ciências Exatas, pela disposição e paciência.

Ao Michel, pelo amor e incentivo a todo momento.

Aos professores Vicente e Elsa pela atenção e disposição em participar das bancas de qualificação e defesa.

A Fundação Araucária pela bolsa durante o primeiro ano e ao CNPq pela bolsa durante o segundo ano.

A todos aqueles que de alguma maneira colaboraram para a chegada deste momento.

RESUMO

Este trabalho estuda a produção escrita de alunos da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina-UEL numa prova de questões abertas de Matemática, sem alternativas de respostas a serem assinaladas. Verifica como esses alunos lidam com esse tipo de questão no que diz respeito à escolha da estratégia para resolução, a interpretação e uso das informações contidas nos enunciados, a natureza dos erros cometidos, aos conhecimentos matemáticos que mostram saber quando resolvem as questões propostas. Faz um levantamento das estratégias mais utilizadas e dos erros mais freqüentes na busca de identificar a natureza desses erros. Para a coleta dos registros escritos dos vinte e quatro (24) alunos envolvidos na pesquisa utiliza uma prova escrita contendo seis questões abertas de Matemática e para auxilio da interpretação dos registros utiliza entrevistas. Aponta como pontos mais relevantes que: a maioria dos alunos utiliza-se de estratégias tipo escolares nas resoluções das questões; os alunos lidam bem com os algoritmos envolvidos nas estratégias escolhidas; os erros encontrados nos algoritmos são provindos da falta de atenção dos alunos; a maior dificuldade está relacionada à interpretação dos enunciados e isso aparece fortemente no trabalho; é possível descobrir muito sobre o conhecimento matemático dos alunos por meio do registro escrito. Conclui que os alunos aprendem o que seus professores ensinam na escola e mostram isso nos seus registros e que é preciso trabalhar a interpretação de enunciados com os alunos, pois essa pareceu ser a maior dificuldade sentida por eles.

Palavras-chave: Educação Matemática; Avaliação da aprendizagem em Matemática; Registros escritos; Resolução de problemas.

ABSTRACT

The main intention of this work is to interpret the written/dissertative production given by students of a Math Teachers Preparation Course (University of Londrina – Parana – Brazil) when they're answering an open-question test (i.e. a test in which there are no pre-given set of possible answers to solvers indicate the correct one). In order to get this goal we've focused two major points: which strategies and resources were employed by twenty-four undergraduate students and how these students deal with such strategies when trying to interpret the given data to solve six problems from AVA (the Parana State official assessment system). Our research allows us to understand that: (a) school-based solving strategies were employed by the most part of those twenty-four students (implying that they seem to uncritically repeat the classical approach – school-based form – teachers use in classrooms, trying no other ways to solve problems); (b) the development of algorithms seems to be well done by all of them (errors found in algorithmical treatment were related only to a lack of attention); (c) the main problem detected was students difficult in dealing with data interpretation; and (d) we can detect – and do some important remarks on – a lot of mathematical contents, approaches and strategies when analyzing students written/dissertative registers (which allow us to perceive many possible teaching strategies and how to effectively implement them in real classrooms).

Key-words: assessment process, written registers, problem solving, open-question tests, Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 SOBRE O CONTEXTO

Enquanto aluna, freqüentei a escola até a 8ª. série sempre preocupada em tirar boas notas que para mim eram: nove, nove e meio, dez. Assim como meus pais, eu acreditava que notas altas eram sinônimo de um futuro feliz, de um bom emprego. Assim como meus pais eu acreditava que a escola faria com que eu não precisasse trabalhar em serviços ‘pesados’ ou ganhar ‘pouco’. E, tudo o que eu tinha que fazer era ‘tirar boas notas’. E assim eu fiz.

Lembro bem da minha mãe ‘tomando’ minhas lições antes das provas, ou seja, eu decorava e ela fazia as perguntas para ver se eu sabia. Até que não soubesse tudo de cor, não podia parar de estudar aquele conteúdo, pois era isso que garantiria o sucesso na prova, e o sucesso em todas as provas garantiria o sucesso na vida.

No 2º. Grau, agora chamado Ensino Médio, cursei Magistério. Era com essa modalidade que eu teria garantida uma profissão já nesse nível de escolaridade. Dessa forma terminei minha graduação.

Quando comecei a trabalhar como professora, a sala de aula não era tão bonita e certinha como parecia ser na fala dos professores do curso de Magistério; os alunos não eram estudiosos como eu havia sido e como esperava que fossem. Por conseguinte as preocupações começaram. Misturadas com uma certa indignação por ver que os alunos pareciam não se importar muito com a escola e com a insegurança de estar fazendo tudo errado. Mas eu tinha uma certeza: estava me esforçando para fazer certo.

No ano seguinte ingressei no Ensino Superior, curso de Matemática que dentre as opções que eu tinha, era o que eu mais me identificava. Alguma coisa ali parecia errada. Não entendia por que meus professores consideravam apenas as respostas dos exercícios que usavam nas provas. Não olhavam a resolução que eu fazia, apenas *a resposta*. E aí, se a resposta estivesse incorreta, a nota era zero. Por isso muitas vezes por mais que eu me esforçasse, eu não conseguia tirar ‘boas notas’. Percebi que o que importava para meus professores não era o que eu sabia, mas se eu sabia o que cobravam nas provas.

Só hoje sou capaz de entender que até o Ensino Médio os professores cobraram de mim ‘decorebas’ de textos, fórmulas e regras e modéstia a parte, sempre fui boa em ‘decoreba’. Já na faculdade, decorar não funcionava e não consegui atingir ‘boas notas’, porque fui avaliada durante todo o tempo pela falta, ou seja, não fui avaliada por aquilo que eu sabia, mas por aquilo que eu *ainda* não sabia.

Quando iniciei o Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, tinha a idéia de que poderia, com minha dissertação, resolver qualquer grande problema do ensino de Matemática. Grande engano. Como afirma Santos (2000), citado em Garnica e Fernandes (2002), vivemos um momento de incertezas, complexidades e de caos, um momento em que há mais de uma forma de dominação e opressão. Sendo assim, existe também mais de uma forma de resistência e de agentes que as protagonizam.

O presente estudo faz parte de um programa de investigação que foi pensado como uma forma de articular pesquisas a serem realizadas por alunos do programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática e alunos da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina. O eixo temático da Educação Matemática é a Avaliação em Matemática e o foco dos estudos é a Prova de Questões Abertas de Matemática da AVA 2002.

Acredito que este trabalho, em certa medida, pode ser visto como uma espécie de resistência, uma vez que de certa forma se contrapõe ao discurso predominante ainda em nossas escolas, pois se preocupa com a *educação pela Matemática,* dando atenção especial à avaliação como meio de inclusão dos alunos pela valorização daquilo que mostram saber por meio do registro escrito, sem a preocupação em criar um 'novo' discurso que vá se tornar a 'verdade' vigente, mas com a intenção de contribuir nesse sentido para a prática docente.

Neste trabalho estudamos a produção escrita de alunos de Licenciatura em Matemática, em situação específica de prova com a intenção de verificar como esses alunos lidam com questões abertas[12] de Matemática e avançar no entendimento do que sabem os alunos quando resolvem esse tipo de questão e de que forma mostram o que sabem por meio de registros escritos.

Com a investigação desses registros buscamos responder: quais as estratégias mais utilizadas por eles para resolver as questões? Como trabalham com as estratégias escolhidas? Quais são os erros mais freqüentes? Qual natureza dos erros cometidos? Que conteúdos matemáticos mostram saber os alunos ao resolverem essas questões?

---

[1] Questões que não apresentam alternativas com respostas a serem assinaladas. Não são de múltipla escolha.

2 SOBRE NOSSAS REFERÊNCIAS

2.1 A AVALIAÇÃO ESCOLAR

Avaliar na linguagem cotidiana tem significados como: estimar, calcular, apreciar, avaliar, julgar, atribuir valor a algo. Uma operação bastante comum. Contudo, a avaliação escolar não deve ser a operação de atribuir um valor aos 'conhecimentos' dos alunos, ela deve ser a prática que auxilia o professor na condução de sua prática em sala de aula.

A avaliação é uma prática que está presente no sistema escolar em qualquer nível de ensino e em qualquer modalidade ou especialidade (Sacristán, 1998). Segundo esse autor, conceituar a avaliação como prática significa que "estamos frente a uma atividade que se desenvolve seguindo certos usos, que cumpre múltiplas funções, que se apóia numa série de idéias e formas de realizá-la e que é a resposta a determinados condicionamentos do ensino institucionalizado" (p. 295).

No entanto, o ato de avaliar na escola ainda está fortemente ligado à prova escrita e centrado quase sempre num único propósito, o de decidir a aprovação ou reprovação de alunos. A palavra avaliação lembra freqüentemente e de imediato palavras como: prova escrita, notas, boletim, sucesso/fracasso escolar, aprovação/reprovação. É a prática da avaliação 'pela falta'. Os professores avaliam o que faltou o aluno saber para poder 'acompanhar' o que vem a seguir.

Discutir avaliação escolar é tarefa complexa. Complexa pela pluralidade de significados que a ela são atribuídos por professores, alunos e estudiosos da educação e, mais ainda, pelas muitas funções que pode desempenhar. Muitos autores escrevem sobre avaliação, porém cada um deles o faz com seus objetivos, atribuindo a ela diferentes funções e características.

Luckesi (2002) entende a avaliação “como *um juízo de qualidade* sobre *dados relevantes*, tendo em vista uma tomada de decisão...” (p. 69). Romão (1998) escreve que a avaliação “é um tipo de investigação e é, também, um processo de conscientização sobre a ‘cultura primeira’ do educando, com suas potencialidades, seus limites, seus traços e seus ritmos específicos...” (p. 101). Estes exemplos mostram formas diferentes de os autores abordarem o tema avaliação.

Definir avaliação parece ser ainda mais complexo. Como afirma Hadji (1994), arrisca-se a nunca ter uma definição acabada, porque “[...] se está sempre a avaliar, e se avaliar significa interpretar, nunca se chega a conseguir dizer em que é que consiste a avaliação, a qual nunca se poderá limitar, obviamente, a uma definição ‘exata’” (p. 27).

Mais importante que definir é praticar uma avaliação com a intenção de interferir no processo de ensino e colaborar com a aprendizagem dos alunos.

Segundo Hadji (2001), a função da avaliação define-se pelo papel que ela exerce no processo de ensino. O autor estabelece três momentos em que ela pode ocorrer:

♦ antes da ação de formação com a função de identificar características dos aprendentes, fazendo um balanço de seus pontos fortes e fracos e permitindo um ajuste recíproco aprendiz/programa de estudos;

♦ depois da ação de formação com intenção de fazer um balanço das aquisições no final da formação, com vistas a expedir, ou não, o certificado de formação;

♦ no centro da ação de formação quando sua principal função é contribuir para uma boa regulação da aprendizagem.

Essas funções encontram-se diretamente ligadas aos objetivos do ensino e às intenções que norteiam o professor ao avaliar seus alunos. Esses objetivos, por sua vez, estão atrelados à maneira como o professor vê a educação e à importância que ele atribui a esse processo como um dos formadores de cidadãos capazes de sobreviver com dignidade numa sociedade em constantes transformações.

Ao falarmos do papel da educação como formadora, interessa-nos, por hora, falar da terceira função da avaliação apontada por Hadji: a de auxiliar no processo de ensino e aprendizagem. Concordamos com Vasconcellos (2002) quando escreve que, se “o sentido da Educação é o próprio homem e sua promoção, a avaliação, como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem tem por finalidade a promoção do aluno...” (p. 146).

A avaliação cumpre essa função quando interfere de modo direto na aprendizagem dos alunos, funcionando como um termômetro de qualidade dessa aprendizagem, fornecendo importantes indícios para o professor sobre o ensino e a aprendizagem.

Dessa forma, a avaliação torna-se para o professor um instrumento capaz de ajudá-lo a regular o processo de ensino com base em informações reais, permitindo-lhe interferir na aprendizagem de seus alunos de maneira significativa. Segundo Buriasco,

> [...] Ao ter uma noção o mais precisa possível do que seus alunos sabem e são capazes de fazer, o professor pode, além de tomar decisões adequadas sobre sua prática escolar, contar com seus alunos como interlocutores na compreensão dos caminhos por eles percorridos na busca da resolução da situação. Isso contribui para melhorar a aprendizagem, na medida em que favorece a continuidade da aprendizagem e a progressiva autonomia do aluno (2002, p. 259).

Fica, portanto, evidente a importância da avaliação como parte dos processos de ensino e aprendizagem. Sendo assim, as tarefas que o professor utiliza em sala de aula devem se constituir, também, como tarefas de avaliação, pelas quais o professor pode acompanhar a evolução de seus alunos durante todo o processo de ensino.

A avaliação, assim praticada, é denominada por Hadji (2001) de avaliação formativa, visto trata-se de “levantar informações úteis à regulação do processo ensino/aprendizagem” (p. 19).

Para tanto, o professor pode e deve dispor de vários instrumentos para coletar as informações necessárias. Os diferentes instrumentos de avaliação utilizados pelo professor, sejam eles provas escritas ou orais, trabalhos, observações em sala, entre outros, devem-lhe permitir “examinar aspectos tais como conhecimentos e utilização dos conteúdos, estratégias utilizadas, hipóteses levantadas, recursos escolhidos pelos alunos” (BURIASCO, 2002, p. 261).

Ou seja, esses instrumentos devem permitir ao professor um ‘diálogo’ com a produção dos alunos de modo a obter o maior número possível de informações sobre o que os alunos mostram saber e o que mostram não dominar totalmente. Dessa forma, torna-se importante a exploração tanto dos erros quanto dos acertos, pois a “informação útil é aquela que permitirá compreender o percurso do aluno, e determinar a significação da resposta produzida, quer seja ela verdadeira ou falsa” (HADJI, 1994, p. 123).

A idéia de avaliar assume, assim, um novo papel: deixa de ser instrumento de exclusão, que avalia os alunos pela falta, por respostas e gabaritos prontos, os quais contém a resposta única e correta e passa a ser um instrumento de inclusão, que avalia de forma a valorizar o saber dos alunos num processo de investigação e regulação da aprendizagem. Como afirma Esteban (2002),

> [...] a avaliação não deve ser reduzida a um instrumento de classificação e exclusão dos alunos e alunas, mas deve constituir-se como uma ferramenta para a tomada de decisões em todo o processo ensino/aprendizagem (p. 121).

Nessa perspectiva, torna-se fundamental o papel do professor, que é o de investigador na recolha de informações que possam guiar sua ação no processo de ensino, visto ser papel do professor "o de gerenciar, de facilitar o processo de aprendizagem e, naturalmente, de interagir com o aluno na produção e crítica de novos conhecimentos..." (D'AMBROSIO, 1998, p. 80).

De fato, o professor é, juntamente com o aluno, um protagonista no processo de ensino e aprendizagem e nestes, no processo avaliativo, sua responsabilidade torna-se ainda maior, pois aí pode ser decidida a trajetória escolar do aluno. Segundo o documento de Matemática dos Parâmetros Curriculares Nacionais, a "tarefa do avaliador constitui um permanente exercício de [observação e de] interpretação de sinais, de indícios, a partir dos quais manifesta juízos de valor que lhe permitem reorganizar a atividade pedagógica" (BRASIL, 2001, p.59), ou seja, o professor age como avaliador quando acompanha os alunos em suas experiências diárias e vai indicando acertos e erros no caminho que eles percorrem (LACUEVA, 1997).

Como reguladora dos processos de ensinar e aprender, a avaliação deve fornecer, também, aos alunos, informações sobre sua aprendizagem. Informações que lhes sejam compreensíveis e úteis e não reduzida a um de seus resultados, freqüentemente atrelada a dois significados: sucesso (se for considerada por ele uma ‘boa nota’) ou fracasso (se for considerada uma ‘nota ruim’).

Como afirma D’Ambrosio (1998), do “ponto de vista dos efeitos da avaliação para o aluno, o mais importante é que ele tome consciência do seu progresso...” (p. 77). Portanto, mais do que somente informar sobre o certo e o errado, a avaliação deve fornecer informações que permitam o diálogo a partir do fazer dos alunos, dando-lhes “informações sobre aspectos da sua produção, dignas de confiança, importantes e significativas em relação à aprendizagem que se ajuda a desenvolver e às competências que se ajudam a construir” (BURIASCO, 2000, p. 172).

Os apontamentos avaliativos que o professor faz são, segundo Lacueva (1997), o primeiro passo para a prática de uma ‘avaliação da ajuda’, que pode contribuir para que os alunos detectem seus pontos fortes e fracos.

Para que professores e alunos possam ser informados pela avaliação, o professor precisa ter claro o que pretende saber e como é possível obter indícios disso. As atividades precisam ser planejadas de forma a gerar uma produção avaliável do aluno, na qual ele possa mostrar o que sabe.

“Ao levantar indícios sobre o desempenho dos alunos, o professor deve ter claro o que pretende obter e que uso fará desses indícios...” (BRASIL, 2001, p.59), ou seja, as atividades de avaliação devem ser bem preparadas, de forma que, por meio delas, o professor possa realmente observar aquilo que deseja.

Além disso, e de igual importância, é a disposição com que o avaliador olha para a produção dos avaliados. O professor precisa olhar para essa produção como um investigador, que procura todo e qualquer indício que possa revelar o que quer descobrir.

Do contrário, mesmo a avaliação ocorrendo durante os processos de ensino e aprendizagem, ela pode não cumprir sua função reguladora e tornar-se, como escreve Hadji (2001), uma “troca de questões e respostas” (p.36) e, muitas vezes, caracterizar-se como uma avaliação do rendimento, que valoriza apenas o produto final e não ser utilizada, por exemplo, para a retomada dos conhecimentos que ficaram falhos durante o processo de aprendizagem.

O que se espera, na perspectiva deste trabalho, é uma avaliação da aprendizagem, “tomada aqui como avaliação do e no processo, e, portanto, um dos meios que subsidia a retomada da própria aprendizagem” (BURIASCO, 2002, p. 258).

2.2 O ERRO ESCOLAR

Assim como a avaliação, o erro tem sido objeto de discussão entre os estudiosos e profissionais da educação. Apesar de ouvirmos constantemente a expressão ‘errando também se aprende’, a escola parece não lidar muito bem com os significados desse dito do saber comum.

Segundo Pinto (2000), o que fica mais evidente em seu estudo sobre o erro é a predominância da concepção deste como sinônimo do fracasso, algo que precisa ser apagado da vida escolar, pois é um elemento indesejável. Uma razão disso pode ser uma visão do conhecimento como algo acabado e, por isso, modelo a ser seguido. Dessa forma, o erro, que se caracteriza por uma ação/produto diversa/diverso do modelo, não é visto como uma tentativa de solução, um saber em construção, mas como a expressão de um ‘não saber’.

Num passado não muito distante, o erro na escola estava associado ao castigo físico. Muitos de nós já ouvimos histórias de nossos pais e avós sobre a palmatória, sobre o ajoelhar-se sobre grãos de milho, fazer cópias e cópias de palavras, frases, contas e tabuadas. Tudo isso para corrigir uma resposta considerada inadequada, um erro.

Hoje, a prática desse tipo de castigo já não é permitida, no entanto, o erro, ainda está associado à punição, que por vezes pode ser ainda pior do que o castigo físico. Como afirma Luckesi (1990), sabemos que "outras formas mais sutis de castigar têm sido utilizadas ainda hoje, tais como: a gozação com um aluno que não foi bem; a ridicularização de um erro; a ameaça de reprovação..." (p. 134).

Como conseqüência dessas práticas, os erros nos contextos escolares, são vistos pelos alunos como fonte de péssimas notícias, pois tornam-se associados a notas baixas, castigos, humilhações, reprovações.

Na escola, os erros

> [...] são tomados como um tipo de índice de que o aluno não sabe fazer, não tem estudado e não como um índice de que o aluno sabe alguma coisa parcial, incorreta e que, portanto é preciso trabalhar com ela para, a partir daí, construir um conhecimento correto (BURIASCO, 2000, p.169).

O erro não deve ser visto como um produto final, o término de uma etapa na qual nada mais há para ser feito, pois "tal como o sucesso não é uma garantia absoluta da existência da competência pretendida, o erro não é a prova absoluta da sua ausência" (HADJI, 1994, p.123).

No geral, os professores têm um modelo de estratégias e respostas, que pensam que deve ser seguido por seus alunos. Quando isso não acontece, quando as respostas dos alunos são diferentes do esperado, são caracterizadas como erro. Ou seja, parece que o erro é tudo o que foge do modelo ao qual é comparado. Entretanto, como assinala Esteban (2002), o/a "professor/a precisa apropriar-se da compreensão do/a aluno/a, [...] pois uma resposta diferente da esperada não significa ausência de conhecimento, pode ser uma solução criativa com a utilização das ferramentas e conhecimentos que ele possuía" (p. 133).

Nesta perspectiva, pode-se pensar no erro como fonte de crescimento, de busca pelo conhecimento, como acontece com as 'grandes descobertas' da humanidade, que em sua grande maioria não foram, de fato, descobertas e sim o resultado de muito estudo, de tentativas, muitas vezes frustradas (erro), até se obter o sucesso, isto é, o erro pode ser visto como insucesso e como aprendizado. Por meio dele é possível saber como não se chega ao resultado esperado, um indicativo importante para a próxima tentativa.

Pinto (2000) escreve que é esse o percurso natural de uma ciência, como a Matemática, por exemplo, e afirma que "[...] não há conhecimento matemático que não tenha passado por erros antes de sua consolidação" (p.67).

É importante reconhecer que "não se vai sempre da ignorância ao conhecimento, do confuso ao claro, [...] as certezas podem dar margem a novas dúvidas..." (LACUEVA, 1997, tradução nossa).

Na busca de alternativas para melhorar o ensino da Matemática, essa iforma de interpretar os erros parece estar ganhando espaço e o estudo dos erros cometidos pelos alunos tem se apresentado como uma dessas alternativas.

Além disso, conhecer e entender os erros cometidos pelos alunos nas atividades propostas deve fazer parte do trabalho cotidiano do professor, pois, "[...] quando um aluno comete um erro, ele expressa o caráter incompleto de seu conhecimento" (PINTO, 2000, p.54). Ou seja, por meio do erro, o aluno também mostra o que sabe, o que e como apreendeu determinado conteúdo.

Contudo, quando ao erro é atribuída uma valoração negativa, essa pode ser um obstáculo para que os professores possam incorporar, no processo de avaliação, a compreensão dos alunos (ESTEBAN, 2002).

Neste trabalho, defende-se que o erro é muitas vezes tão importante quanto o acerto na aprendizagem dos alunos. Ele pode servir, ao professor, como fonte de informação sobre a construção do conhecimento de seus alunos. Por conseguinte, é importante conhecê-lo e entendê-lo, investigando sua natureza. “Os erros da aprendizagem [...] servem positivamente de ponto de partida para o avanço, na medida em que são identificados e compreendidos, e <u>sua compreensão é o passo fundamental para sua superação</u>” (LUCKESI, 1990, p. 138, grifo do autor).

Os erros podem ocorrer por diferentes motivos: falta de atenção, não domínio do conteúdo em questão, utilização de uma estratégia inadequada, enfim, diferentes condutas podem levar ao erro, e o professor deve estar atento a isso, pois para cada erro deve haver uma estratégia diferente para superá-lo. Mais do que isso, como afirma Buriasco (2000),

> É, pois, tarefa do professor fazer com que o erro, aos poucos se torne *observável* pelo aluno para que este tome consciência daquele. Essa é uma das contribuições pessoais que o professor pode fazer na busca de diminuir o fracasso escolar (p. 172).

Essa visão do erro como ponto de partida para o aluno continuar aprendendo deve ser levada em conta em todas as atividades desenvolvidas em sala de aula, principalmente nas atividades avaliativas, nas quais o erro tem tido muita relevância como o que define o valor final dado aos ‘conhecimentos’ dos alunos e apenas isso, visto que, “não importa classificar as respostas em certas ou erradas, mas tomá-las como indícios dos caminhos percorridos pelas crianças e dos novos percursos que aparecem como necessidade e possibilidade no processo de construção de conhecimentos” (ESTEBAN, 2002, p. 142).

Contudo, a idéia de aproveitar as informações do erro como guia no processo de ensino requer muito cuidado para que não se perca a qualidade do ensino. O erro não deve ser valorizado em detrimento do acerto, mas como uma etapa a ser vencida pelos alunos com auxílio, ou não, do professor e dos colegas.

No estudo dos caminhos escolhidos pelos alunos para realizarem uma atividade e dos que os levaram aos erros e acertos, o professor pode descobrir quais conhecimentos e estratégias utilizaram para resolver as questões propostas e, com isso, poderá identificar as dificuldades por eles apresentadas.

Investigando suas respostas é possível, ao professor, descobrir o que os alunos sabem e como lidam com aquilo que não dominam ou dominam parcialmente. A partir de uma investigação mais profunda dessas respostas, o professor poderá descobrir como agir e em que e como deve interferir durante o processo de aprendizagem de seus alunos. Ao fazê-lo, estará, também, aprendendo a como ensinar.

Dessa forma, longe de ser uma fonte de castigo, o erro passa, então, a ser fonte de informações que auxiliam no processo de ensino e aprendizagem.

2.3 A Resolução de Problemas

Problema, no contexto escolar, é um termo que precisa ser bem definido, pois pode gerar interpretações diferentes entre as pessoas que ouvem e/ou utilizam esse termo. Segundo Polya (1997),

> [...] Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente, por meios adequados (p.1).

Problema não é, meramente, uma situação na qual quem resolve aplica fórmulas ou procedimentos mecanicamente sem que precise interpretar os dados e condições postas (BRASIL,2001;BUTTS,1997). Concordamos com os termos do Documento de Matemática dos Parâmetros Curriculares Nacionais, quanto a que um problema matemático é uma situação na qual o aluno é levado a "interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada" (BRASIL, 2001, p. 43/44).

No entanto, os 'problemas' têm sido usados em nossas escolas apenas como aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente (BRASIL, 2001, p. 42). No linguajar cotidiano escolar e em muitos livros didáticos o termo problema é utilizado para enunciados de atividades diversas. Funcionam como exercícios de treinamento de conteúdos e estratégias já explicados pelo professor. É o treino dos mesmos por meio de resolução de 'problemas'.

Isso contraria nossa definição de problema, visto que, ao resolver esses problemas em sala de aula, geralmente o aluno sabe o que precisa fazer sem interpretar a questão, pois se baseia na explicação e nos exemplos dados pelo professor ao explicar o conteúdo, e, algumas vezes, em palavras-chave que aprendeu a reconhecer.

A aplicação de algoritmos parece ser uma fase mais tranqüila para os alunos na tarefa de resolver um problema, talvez porque estejam mais treinados para resolver algoritmos e menos preparados para pensar sobre eles.

Essa maneira de trabalhar acaba por deixar os alunos ‘desacostumados’ a pensar nas situações que lhe são apresentadas e, por isso, quando experimentam situações nas quais e para as quais são desafiados a interpretar e pensar, sentem dificuldades.

Os alunos sentem dificuldades quando são obrigados a pensar nas situações propostas e ‘transformar’ a situação descrita em linguagem matemática para, então, resolvê-la.

Este é o primeiro passo para resolver um problema matemático com sucesso, é preciso interpretá-lo, entender a situação que precisa ser resolvida. “Primeiro que tudo, o enunciado verbal do problema precisa ficar bem entendido” (POLYA, 1978, p.4). Mas isso não é tudo.

Polya (1978) estabelece mais três fases de trabalho para a resolução de um problema, além dessa e por ele denomina de *compreensão do problema*. São elas: o estabelecimento de um plano, a execução do plano e a retomada da solução para validá-la. A segunda etapa é, talvez, a principal tarefa na resolução de um problema.

Entendemos a elaboração de um plano como um processo que envolve anteriormente leitura, interpretação, por vezes a discussão com os colegas e professores sobre as informações contidas no enunciado do problema e a escolha da estratégia para resolvê-lo. Esta parece ser a maior dificuldade dos alunos ao se depararem com um problema: a escolha da estratégia.

Por esse motivo, é nessa etapa que talvez seja mais necessária a mediação do professor. Conversar com os alunos a respeito de suas idéias, de como abordam o problema, questioná-los de modo a levá-los a pensar na situação que querem resolver é uma das principais funções do professor na perspectiva da Resolução de Problemas. Ao assim fazê-lo, o professor poderá conhecer, explorar e investigar o que conhecem seus alunos e auxiliá-los a desenvolver cada vez mais a capacidade de resolver problemas.

Quando as crianças experimentam sucesso em atividades de resolução de problemas, “adquirem confiança em fazer matemática e desenvolvem o espírito investigativo, [...] a capacidade de comunicar matematicamente e a capacidade de usar processos cognitivos de alto nível” (N.C.T.M., 1991, p. 29).

Como fase final indicada por Polya (1978), os alunos devem verificar sua resolução, passo a passo, para que não restem dúvidas sobre a validade de suas respostas. Além disso, “se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas” (p. 10).

Temos consciência de que essas fases nem sempre acontecem, que não seguem uma ordem rígida para acontecer e que não são uma receita para a resolução de problemas matemáticos, no entanto, elas podem nos ajudar a investigar os caminhos que podem ser seguidos pelos alunos, ao se depararem com um problema, e também a identificar em quais dessas fases, se for o caso, os alunos sentem mais dificuldades e quais são essas dificuldades.

É fato que nós, professores, queremos que nossos alunos tenham sucesso ao resolver problemas matemáticos e que cada vez mais tenham segurança para fazê-lo. Conhecer os processos pelos quais passam os alunos ao lidarem com as situações parece ser um caminho para a busca de superação das dificuldades por eles encontradas.

Para tanto, é preciso trabalhar com problemas de diferentes níveis de complexidade e diferentes formas de apresentação, pois, para capacitar os alunos para a resolução de problemas, é preciso um ensino planejado com experiências na resolução de tipos variados de problemas.

Não queremos dizer que os problemas devem ser muito complicados ou que devem apresentar sempre grandes dificuldades aos alunos. Como dissemos, os problemas devem apresentar diferentes níveis de complexidade, assim como diferentes formas de apresentação (BUTTS, 1997).

Vale lembrar que a postura do professor frente aos problemas também é importante. De nada vale um ‘bom’ problema que seja ‘mal’ explorado. O trabalho com problemas pode levar os alunos a desenvolverem a capacidade de ler e interpretar as situações que lhe são apresentadas. Trabalhando com vários tipos de problemas, mais que ensinar os alunos a resolverem problemas, estaremos proporcionando o pensar matematicamente nas diferentes situações que se apresentam no dia-a-dia, as quais queremos que eles sejam capazes de enfrentar.

3 DOS PROCEDIMENTOS DESTA INVESTIGAÇÃO

Esta investigação é de cunho qualitativo, na qual procuramos “analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto possível, a forma em que estes foram registrados ou transcritos” (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p.48).

Por se tratar da investigação da produção escrita em Matemática de alunos da Licenciatura em Matemática, consideramos pertinente, para contemplar a riqueza das informações, o tratamento qualitativo, visto que o estudo pretende mostrar a maneira como os alunos lidam com questões abertas e não apenas fazer um levantamento de acertos e erros destes alunos. Ou seja, nosso interesse está na produção dos alunos, respeitando o contexto de realização das provas (BOGDAN, BIKLEN, 1994).

Para a análise e interpretação das informações, seguimos as orientações metodológicas preconizadas por BARDIN (1977). Após leitura exaustiva e repetida dos textos e considerando os objetivos do estudo e as questões teóricas apontadas, ordenamos e classificamos o conteúdo dos textos, o que permitiu a identificação de vários temas, que após cuidadosa análise resultou no elenco final de temas.

O procedimento intermediário que permite a passagem da organização/descrição para a interpretação do conteúdo descrito foi a inferência.

Para BARDIN (1977) o tema é a “unidade de significação que se liberta naturalmente de um texto analisado segundo critérios relativos à teoria que serve de guia à leitura” (p. 105).

A análise desses temas consistiu em descobrir os núcleos de sentido que compõem uma comunicação cuja presença signifique alguma coisa para o objetivo analítico visado (MINAYO, 1996).

Nesta investigação os seguintes momentos da análise foram: a organização/descrição das resoluções apresentadas pelos alunos da Licenciatura em Matemática na prova alvo do estudo; a análise desse material, com destaque para a identificação de unidades de significado, categorização dessas unidades e a interpretação das informações descritas.

A análise realizada permitiu, então, obter informações, tirar conclusões, compreender a realidade, completar ou inferir conhecimentos por meio de exame detalhado de fatos e dados, conforme sugerem Freitas e Janissek (2000).

3.1 A Coleta de Informações

Estivemos em todas as salas do curso de Licenciatura em Matemática da UEL convidando os alunos para resolver uma prova para que pudéssemos prosseguir com nosso estudo. Pretendíamos conseguir seis (6) alunos de cada série, vinte e quatro (24) no total. Na 3ª. série isso não foi possível, somente cinco alunos aceitaram participar, porém conseguimos os vinte e quatro (24) alunos porque na 4ª. série sete alunos aceitaram o convite.

Utilizamos, para a coleta de informações, as provas escritas, entrevistas com esses alunos, um *Questionário Sobre as Impressões Sobre a Prova* e uma *Folha de Identificação*.

O primeiro instrumento utilizado para a coleta de informações foi uma prova escrita, construída com todas as questões das Provas de Questões

Abertas de Matemática da Avaliação Estadual do Rendimento Escolar do Paraná – AVA/2002.

A Avaliação Estadual do Rendimento Escolar do Paraná acontece na população das escolas públicas estaduais, e das municipais por opção, por meio de uma prova escrita na qual os alunos das 4as. e 8as. séries do Ensino Fundamental e das 3as. séries do Ensino Médio resolvem questões de múltipla escolha de Português e Matemática e elaboram uma redação.

No ano de 2002 houve uma novidade: enquanto dois terços dos alunos faziam a prova de redação, parte da prova de Português, um terço fazia uma prova de questões abertas de Matemática.

> A opção por integrar a AVA 2002 uma prova de matemática contendo questões abertas, deve-se ao entendimento de que uma educação matemática comprometida com a melhoria da “competência matemática” dos alunos e correspondente desempenho, passa por uma melhor compreensão dos caminhos que os alunos trilham, por meio das notações que registram, ao tentarem resolver as situações problemas que lhes são apresentadas (BURIASCO; CYRINO; SOARES; 2003, p.3).

Na AVA/2002, apenas a prova da oitava série continha quatro questões, a da quarta e da terceira continham três questões cada uma. No total, são seis questões diferentes, pois havia questões comuns entre as provas, como mostramos no Quadro 1.

Quadro 1: Distribuição das questões por série

4ª.série	Q1	Q2	Q3
8ª. Série	Q2	Q4	Q3,Q5
3ª. Série	Q3	Q5	Q6

A prova que utilizamos para nossa pesquisa continha essas seis questões, sem a identificação da série a que pertenciam como mostramos no Anexo

A.

Escolhemos trabalhar com essas questões, porque são questões já validadas quando da sua utilização para a AVA/2002; foram elaboradas com diferentes níveis de complexidade; são questões que podem gerar uma produção avaliável num teste escrito, com tempo limitado e que permitem observar as estratégias utilizadas pelos alunos (BURIASCO; CYRINO; SOARES, 2003, p.4-5).

A prova foi resolvida por alunos que cursavam Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL e que aceitaram o convite para participar desse estudo. O convite foi feito aos alunos das quatro séries da graduação no dia 12/04/04 e a prova foi realizada no dia 14/04/04, com tempo estipulado de duas horas para sua realização.

Os alunos receberam junto com a prova um *Questionário Sobre as Impressões Sobre a Prova* e uma F*olha de Identificação.* APÊNDICES B e A respectivamente. O questionário continha perguntas relativas ao nível de facilidade da prova. O objetivo desse questionário foi o de colher as informações sobre as impressões da prova, sem a reflexão após conversas com os colegas. No decorrer do trabalho aparecem algumas informações obtidas por meio desse questionário.

A F*olha de Identificação* tinha o objetivo de levantar informações com as quais puséssemos localizar os alunos no caso de precisarmos entrevistá-los mais tarde.

Outro instrumento utilizado para coletar informações foram as entrevistas. Estas foram conduzidas individualmente com o objetivo de obter explicações dos alunos para questões da prova escrita em que não pudemos entender o que o aluno fez ou como pensou ou escolheu determinada estratégia para a resolução ou ainda porque o aluno deixou questões em branco ou sem respostas, ou seja, “para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito” (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p.134).

As entrevistas foram semi-estruturadas, ou seja, havia perguntas prévias, porém se não conseguíamos entender a resposta dada pelo aluno, retomávamos a questão de outra forma. As perguntas prévias não seguiam nenhum roteiro, pois foram diferenciadas e específicas para cada aluno, de acordo com os registros em cada questão. Para facilitar ao aluno lembrar de suas resoluções, ele pôde manusear sua prova.

As entrevistas foram gravadas em áudio e transcritas tal como aconteceram. Os alunos que julgamos necessário entrevistar foram três, que denominamos: A1, A8, A9.

3.2 Nossa Leitura das Informações

No nosso primeiro contato propriamente dito com as provas resolvidas, descrevemos os procedimentos utilizados pelos alunos em cada questão, tentando traduzir o que eles registraram em suas provas. Em seguida, tentamos agrupar as resoluções semelhantes.

A cada modo de resolução atribuímos um código: 2, 1, 0 ou 9. O C*ódigo 2* indica que a resolução do aluno está totalmente correta (desenvolvimento e resposta); o *código 1* indica que a resolução do aluno está parcialmente correta, ou seja, “o aluno respondeu satisfatoriamente parte de uma questão” (pode ter errado alguma coisa no desenvolvimento ou na resposta); o *código 0* indica que o aluno utilizou procedimentos que não resolvem a questão e portanto a resposta está totalmente incorreta; o *código 9* indica que ele não resolveu, nem respondeu (BURIASCO, CYRINO, SOARES, 2004, p.7).

Esse procedimento nos deu uma idéia geral do que as provas continham, como pode ser visto no Apêndice C.

É difícil descrever passo a passo os procedimentos utilizados nesta fase porque foram muitas ‘idas e vindas’, das provas às leituras e vice-versa. Houve até momentos de ‘ida para lugar nenhum’, ou seja, momentos em que a distância do processo se fez necessária para que nossos olhos perdessem um certo vício de olhar as resoluções sempre do mesmo jeito.

Optamos por fazer uma análise das provas vertical e horizontalmente. Inicialmente analisamos questão por questão, para em seguida analisarmos cada prova inteira de modo a não perder de vista o todo da prova de cada aluno. Dessa forma, ao analisar uma questão, procuramos também nas outras do mesmo aluno indícios da possível razão que o levou a responder algo ou mesmo cometer algum tipo de erro.

Ao mesmo tempo em que fazíamos essa análise, procuramos os alunos para as entrevistas.

‘Dialogando’, assim, com os registros dos alunos, com as informações colhidas nas entrevistas e com nossas referências, fomos tecendo nossas observações e considerações a respeito da produção escrita dos alunos participantes da pesquisa. Como afirmam Bogdan e Biklen (1994), o “processo de condução de investigação qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos...” (p. 51).

Nessa análise, procuramos identificar os erros mais freqüentes e discutir e/ou apontar suas possíveis razões, descrever nossa interpretação sobre o que os alunos mostraram saber em seus registros escritos ao resolverem as questões propostas, apontar possíveis encaminhamentos para a regulação do processo de ensino e aprendizagem.

4 SOBRE NOSSO OLHAR

Nossa intenção neste capítulo é compartilhar tudo o que conseguimos apreender, e podemos dizer aprender, durante esse tempo de estudo em que estivemos investigando a produção escrita de alunos da Licenciatura em situação de prova.

Para tanto, tentamos dispor de forma objetiva as informações que obtivemos no decorrer do trabalho, e a leitura que fizemos dessas informações, com base no referencial teórico que apresentamos em *Sobre* N*ossas Referências*.

Apresentamos a seguir as seis questões que os alunos resolveram na prova. Para cada questão apresentamos na seqüência:

♦ uma forma de resolução tipo escolar para cada série avaliada na AVA/2002, mesmo sabendo que nem sempre o aluno de maior escolaridade resolverá utilizando conteúdos próprios do seu nível. Chamamos tipo escolar a resolução usualmente utilizada pelo professor para resolver questões em sala de aula. O sistema de equações do 1º. grau com duas incógnitas é um exemplo do que chamamos de resolução tipo escolar;

♦ a classificação da questão segundo o que entendemos da divisão que faz Butts (1997). O autor divide os enunciados dos problemas matemáticos em cinco subconjuntos: a) exercício de reconhecimento: este tipo de exercício usualmente pede ao resolvedor para reconhecer ou relembrar um fato, uma definição ou enunciado de um teorema; b) exercício algorítmico: são exercícios que podem ser resolvidos com um procedimento passo-a-passo, freqüentemente um algoritmo; c) problemas de aplicação: os problemas tradicionais caem nessa categoria, exigindo na sua resolução uma mudança da linguagem escrita com palavras para uma linguagem matemática de modo que se possa utilizar os algoritmos apropriados; d) problemas de pesquisa aberta: aqueles em cujo enunciado não há pistas da estratégia que pode ser utilizada para resolvê-los; e) situações-problema: neste subconjunto não estão incluídos problemas propriamente ditos, mas situações nas quais uma das etapas decisivas é identificar o(s) problema(s) inerente(s) à situação, cuja solução vai ajudar a 'manejar' as próprias situações;

♦ o número de alunos que acertou a questão por completo, no item *acertos* e o número de alunos que errou parcial, totalmente ou que não resolveu e/ou não respondeu a questão no item *erros*; Vale lembrar que consideramos acerto as resoluções que apresentaram desenvolvimento e resposta corretos, os outros casos foram considerados erros parciais ou totais.

♦ o número de alunos que utilizou um procedimento tipo escolar para resolver a questão.

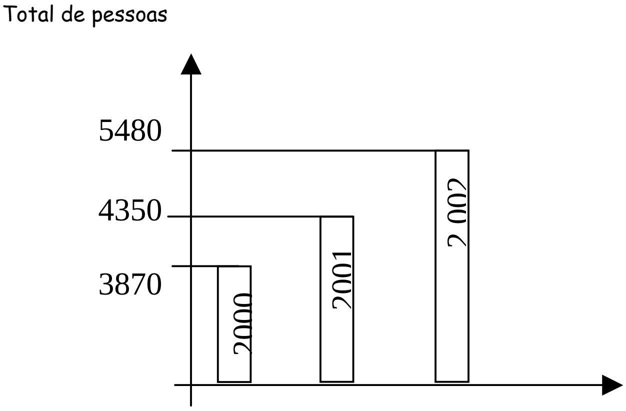
♦ a leitura que fizemos a respeito das resoluções e das informações coletadas nas entrevistas com os olhos do referencial que estudamos.

Para finalizar nossa análise apresentamos um quadro resumo das resoluções de cada questão.

4.1 A QUESTÃO 1 - Q1

Esta questão é parte integrante da prova da AVA/2002 para a 4ª. série do Ensino Fundamental.

1) O gráfico abaixo mostra a quantidade de pessoas, de uma determinada cidade, que viajam de férias. Os dados referem-se aos anos de 2000, 2001 e 2002.



Resolva as questões, usando os dados do gráfico acima.

a) Complete a tabela

Ano	total de pessoas

b) Quantas pessoas viajaram de férias em 2002 a mais que no ano anterior?
c) Quantas pessoas viajarão de férias em 2003 se dobrar o número de pessoas que viajaram de férias em 2000?

No Questionário Sobre as Impressões Sobre a Prova, um dos itens pedia que apontassem a questão que lhes pareceu a mais difícil e também a mais fácil e justificassem sua escolha.

Essa foi considerada a questão mais fácil por dezessete alunos (70,8%) que justificaram escrevendo que a questão não exigia 'muito raciocínio' por envolver operações básicas e interpretação de gráfico simples. Foi considerada a questão mais difícil por dois alunos (8,3%) com a justificativa de dificuldade de interpretação no *item c*.

Observações sobre a resolução dos alunos:

Resposta tipo escolar para a o item a:

Ano	Total de pessoas
2000	3870
2001	4350
2002	5480

Classificação do problema	Acertos		Erros		Uso de resolução tipo escolar	
	N	%	N	%	N	%
Problema de aplicação	24	100	00	00	24	100

No item a dessa questão todos os alunos completaram a tabela corretamente. O que parece mostrar que eles não têm dificuldades na leitura de gráficos simples.

Quadro 2: Resumo das resoluções da questão 1a

Escolhe um procedimento que resolve a questão (24)	Responde corretamente a questão (24)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	24
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Responde Incorretamente a questão (0)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (0)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
Escolhe um procedimento que não resolve a questão (0)	Responde incorretamente a questão (0)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (0)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
Não apresenta registros do procedimento escolhido (0)	Responde a questão (0)		Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (0)			-

Resolução tipo escolar para o item b:
5480 – 4350= 1130.

Classificação do problema	Acertos		Erros		Uso de resolução tipo escolar	
	N	%	N	%	N	%
Problema de aplicação	23	95,8	01	4,2	24	100

No item b, os alunos mostraram lidar bem com a subtração sem recurso, ou seja, a subtração que não precisa de 'empréstimo'. Todos que escolheram esta estratégia acertaram a subtração que efetuaram.

O único erro observado nesse item foi do aluno que retirou incorretamente os dados do gráfico e fez a subtração com os números de pessoas dos anos de 2000 e 2001 em lugar de utilizar os números de pessoas de 2001 e 2002, ou seja, no lugar de $5480 - 4350 = 1130$, o aluno efetuou $4350 - 3870 = 480$. Acreditamos ter sido um erro de distração do aluno.

Com exceção de um aluno, A4, que apenas escreveu a resposta e portanto, não sabemos que procedimento utilizou, todos os outros utilizaram a subtração tipo escolar para resolver a questão.

Quadro 3: Resumo das resoluções da questão 1b

Escolhe um procedimento que resolve a questão (23)	Responde corretamente a questão (23)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	23
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Responde Incorretamente a questão (4)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (0)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
Escolhe um procedimento que não resolve a questão (1)	Responde incorretamente a questão (1)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	1
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (3)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
Não apresenta registros do procedimento escolhido (0)	Responde a questão (1)		Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (0)			-

Resolução tipo escolar para o item c:
Discutir o enunciado do item percebendo que os dados são insuficientes para resolver o item.

Classificação do problema	**Acertos**		**Erros**		**Uso de resolução tipo escolar**	
	N	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**
Problema de aplicação	00	00	24	100	23	95,8

Para resolver o *item c*, a estratégia mais utilizada foi a o dobro, ou seja, a multiplicação do número de pessoas que viajaram em 2000 por dois

$(3870 \times 2 = 7740)$. Dos vinte e quatro (24) alunos, dezessete (17) escolheram esta estratégia. Eles parecem ter interpretado que o número de pessoas que viajaria em 2003 seria o dobro de pessoas que viajaram em 2000. No entanto, o fato de o número de pessoas que viajaram em 2000 dobrar não implica diretamente numa mudança no número de pessoas que viajariam em 2003.

Dois (2) dos dezessete alunos erraram a multiplicação: $(3870 \times 2 = 7640)$. Ambos esqueceram de contar a reserva que resultou da multiplicação de *2* por *7*. Pudemos verificar, no entanto, que não é um problema para esses alunos a multiplicação com reserva, pois nessa mesma multiplicação a outra reserva foi contada. Além disso, buscamos na prova outras situações em que apareceram multiplicações desse tipo e os alunos efetuaram corretamente. Neste caso, atribuímos o erro à falta de atenção dos alunos.

Um aluno optou por dobrar o número de pessoas por meio da adição de parcelas iguais $(3870 + 3870 = 7740)$. Realizou a operação corretamente.

O aluno $\mathbf{A}_4$ não efetuou cálculo algum e apenas respondeu: *5480 pessoas*. Esse aluno parece ter pensado que o fato de dobrar o número de pessoas que viajaram em 2000 não implica na mudança do número de pessoas de 2003 e por isso escreveu como resposta o mesmo número de pessoas de 2000.

Cinco (5) alunos parecem também não terem concordado com a idéia de multiplicar por dois o número de pessoas de 2000. Porém, somente dois responderam a questão, três deles parecem não ter conseguido.

Pelos registros de tentativas de resolução deixados na prova, parece que os três alunos que não responderam tinham consciência de que não era calculando o dobro do número de pessoas de 2000 que chegariam à resposta, mas também não sabiam como chegar a ela de outra forma e ‘abandonaram’ a questão sem responder. Como exemplo, apresentamos e comentamos a resolução de **A**$_{18}$:

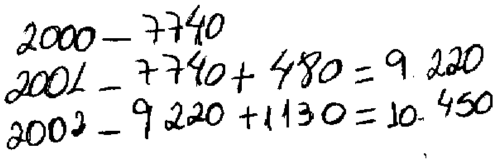


Figura 1: Resolução do aluno **A**$_{18}$ na questão 1c.

Na primeira linha da resolução o aluno indica o dobro do número de pessoas de 2000. Na segunda linha, acrescenta 480 ao valor indicado acima, que é a diferença entre os valores dos anos de 2000 e 2001. **N**a última linha, ele acrescenta, ao valor encontrado na segunda linha, 1130, que é a diferença entre os valores de 2001 e 2002. O aluno pára por aí. Não há outros registros na sua prova. Parece estar buscando uma lei de recorrência.

Um dos alunos que não responderam disse em entrevista que tentou encontrar uma razão aritmética ou geométrica, mas não conseguiu. Pensou então que era impossível estimar o número de pessoas solicitado no enunciado do problema. Perguntamos a ele por que ele não respondeu isso e ele disse que, quando acontece de ele não conseguir responder um problema, pensa que é ele quem está errado e por isso nada responde. A Figura 2 apresenta a resolução desse aluno.

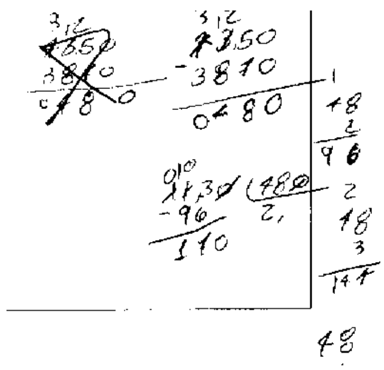


Figura 2: Resolução do aluno **A**$_9$ na questão 1c.

Os dois alunos que responderam a questão foram **A**$_8$ e A$_{24}$. Citamos a resolução de **A**$_8$:

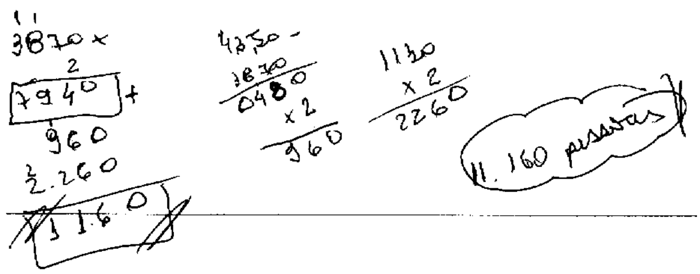


Figura 3: Resolução do aluno **A**$_8$ na questão 1c

Nesse exemplo, o aluno não desprezou por completo a idéia do dobro e em entrevista nos contou que tentou achar uma constante, porque pensou que pudesse ser uma progressão aritmética, mas não conseguiu encontrar nenhuma relação e essa foi sua dificuldade: 'encontrar uma relação para o enunciado'.

Isso mostra que **A**$_8$ entendeu que o enunciado não estava sugerindo o cálculo do dobro do número de passageiros de 2000. Por outro lado, insistiu na resolução, mesmo não tendo se convencido de sua resposta. Talvez porque na escola os alunos não precisam discutir os problemas, uma vez que todos têm uma resposta que quase sempre é única e fácil de ser encontrada . Cabe ao aluno apenas resolvê-los. (BRASIL, 2001, p. 42).

As entrevistas nos fizeram acreditar em nossa hipótese de que os alunos sabiam que para resolver o problema era preciso uma estratégia que não envolvia o cálculo do dobro do número de passageiros de 2000. Mesmo não tendo acertado a questão, esses alunos aproximaram-se muito da resposta e foram capazes de ousar em suas tentativas.

O esperado era que os alunos da Licenciatura discutissem o enunciado dessa questão no sentido de estar apontando que a hipótese levantada no enunciado (se dobrar o número de pessoas de 2000) não remete ao cálculo do dobro para determinar o número de pessoas que viajariam em 2003.

Quadro 4: Resumo das resoluções da questão 1c

Escolhe um procedimento que resolve a questão (0)	Responde corretamente a questão (0)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Responde Incorretamente a questão (4)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (0)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
Escolhe um procedimento que não resolve a questão (23)	Responde incorretamente a questão (20)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	18
			Incorretamente	2
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (3)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	3
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
Não apresenta registros do procedimento escolhido (1)	Responde a questão (1)		Corretamente	1
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (0)			-

4.2 A QUESTÃO 2 - Q2

Esta questão é parte integrante da prova da AVA/2002 para as 4ª. e 8ª. séries do Ensino Fundamental.

Paguei R$ 75,00 por uma saia e uma blusa. A saia foi R$ 23,00 mais barata do que a blusa. Qual o preço da saia?	
Resolução tipo escolar: $75 - 23 = 52$ e $52 \div 2 = 26$ A saia custa R$ 26,00.	**Resolução tipo escolar:** Sendo *x* o preço pago pela blusa e *y* o preço pago pela saia temos que $\left\{\begin{array}{l} x + y = 75 \Rightarrow x + x - 23 = 75 \Rightarrow 2x = 98 \Rightarrow x = 49 \\ y = x - 23 \end{array}\right\}$ $y = 49 - 23 = 26$ A saia custa R$ 26,00.

Classificação do problema	Acertos		Erros		Uso de resolução tipo escolar	
	N	%	N	%	N	%
Problema de aplicação	19	79,2	05	20,8	24	100

Observações sobre a resolução dos alunos:

No Questionário Sobre as Impressões Sobre a Prova, essa foi apontada como a questão mais fácil por nove alunos (37,5%) que utilizaram como justificativa a possibilidade de utilização de sistema de equações para resolvê-la. Entretanto, essa mesma razão foi apontada por dois (2) alunos para justificar a escolha dessa questão como sendo a mais difícil.

É interessante observar que as justificativas apresentadas pelos alunos para a dificuldade ou facilidade dessa questão foram as mesmas. Isso mostra que mesmo os alunos que disseram ser difícil resolver por sistema sabiam que esta era uma estratégia que poderia ser utilizada para resolver essa questão.

Sendo essa uma questão comum à 4ª. e à 8ª. séries, na prova da AVA/2002, a expectativa era que os alunos dessas séries resolvessem a questão de diferentes maneiras, de acordo com o seu nível de escolaridade. A expectativa era de que os alunos de 4ª. série resolveriam a questão utilizando a subtração e a divisão de números naturais, conforme ilustramos acima, e os alunos da 8ª. série resolveriam por meio de um sistema de equações do primeiro grau, já que esses conteúdos são próprios de sua escolaridade.

Nossa expectativa era que os alunos da Licenciatura resolvessem utilizando um sistema de equações do 1º. grau com duas incógnitas, porque seu nível de escolaridade lhes permitia isso.

De fato, essa foi a estratégia mais utilizada. Dos vinte e quatro alunos, vinte (20) optaram por ela. Dos demais, dois (2) escreveram as informações usando apenas uma equação com uma incógnita e dois (2) resolveram utilizando o procedimento ilustrado para a quarta série.

Dos vinte (20) alunos que resolveram utilizando sistema de equações, dois resolveram pelo método da adição e dezoito utilizaram o método da substituição, que é o mais utilizado pelos professores em sala de aula. Desses dezoito, cinco alunos erraram. Um deles errou no procedimento, mas respondeu corretamente a questão. A Figura 4 mostra a resolução do aluno. Como o que nos interessa é o todo e não só as respostas dos alunos, consideramos que esse aluno errou parcialmente e comentaremos sobre a resolução a seguir.

$x \to$ saia

$y \to$ blusa

$(x-23)+y = 75$

$(x-23)+x = 75$

$2x = 98$

$x = 49$

Figura 4: Resolução da questão 2 pelo aluno $\mathbf{A}_{24}$

A$_{24}$ escolheu x para representar o preço da saia e y para representar o preço da blusa. Quando escreve a primeira equação,

$$(x - 23) + y = 75,$$

expressa incorretamente as informações do problema de acordo com as letras escolhidas por ele, pois essa sentença traduz a informação de que o preço da saia diminuído de 23 mais o preço da blusa somam 75.

Na segunda linha, parece que o aluno percebeu que não estava correto e tentou corrigir o erro trocando y por x. Porém a troca por si só não corrige o engano e a equação continua errada, tendo como base as letras escolhidas por ele. Ao terminar a resolução do sistema, o aluno considerou o valor de x encontrado como sendo da blusa e respondeu corretamente que a saia custa R$ 26,00.

A impressão que temos é que ele percebeu o erro na segunda equação e ignorou sua escolha sobre as letras, sabendo exatamente o que estava fazendo, ou seja, tomou o x como sendo a incógnita que representava a blusa e continuou a resolução, que então estaria correta. Arriscamos ainda dizer que o aluno pensou que o que importava era a resposta, como em muitas avaliações que resolve, e portanto não se importou com essa falha no procedimento.

Os dois alunos que escreveram apenas uma equação com uma incógnita:

$$x + (x - 23) = 75,$$

acertaram a resolução e responderam corretamente a questão.

Os dois que resolveram a questão utilizando o procedimento descrito para a 4ª. série,

$$75 - 23 = 52 \text{ e } \frac{52}{2} = 26,$$

também resolveram e responderam corretamente a questão.

Os erros encontrados nessas resoluções estavam na escrita do problema em linguagem matemática (sistema de equações); numa operação de divisão; na escrita da resposta, na qual os alunos trocaram os valores da saia e da blusa entre si.

Na escrita do sistema, dois alunos erraram. $\mathbf{A}_8$ e $\mathbf{A}_{18}$ escreveram

$$x + y = 75 \quad \text{e} \quad x - 23 = y,$$

sendo x o preço da saia e y o preço da blusa, ou seja, a segunda equação não representa corretamente a informação dada pelo problema, pois escrita dessa forma traduz que o valor da blusa é igual ao valor da saia diminuído de 23 reais, o que não está correto, pois é o preço da blusa que diminuído de 23 é igual ao preço da saia.

Vemos duas possibilidades: ou os alunos trocaram as letras na hora de escrever a segunda sentença, ou interpretaram incorretamente o enunciado entendendo que a saia custava menos, o que justifica a escrita da segunda equação. Ficamos com a segunda hipótese, porque, quando terminou a resolução, $\mathbf{A}_8$ escreveu

$$x = 49 \text{ e } y = 26$$

e mais abaixo respondeu que o preço da saia é 49 e da blusa 26, o que pode indicar que não foi uma simples troca das letras, mas que o aluno pode ter se convencido da resposta por ter interpretado incorretamente o sistema. $\mathbf{A}_{18}$ também reforça nossa hipótese quando escreveu a resposta:

"*a saia custou R$ 49,00*".

Na entrevista com o aluno $\mathbf{A}_8$, ele disse que a questão era fácil e trivial. Quando questionado sobre a resolução, ele leu novamente a questão e escreveu num rascunho corretamente o sistema. Quando comparou com a resolução que fez na prova, riu e disse que fez errado na prova.

Nossa hipótese de que o aluno admite como verdade que a saia é mais cara que a blusa talvez esteja errada, pois, ao ler o problema, na entrevista, o aluno 'pensa alto' que a blusa é mais cara que a saia, o contrário do que sua resposta mostra na prova. Por outro lado, talvez tenha sido essa segunda leitura que o tenha feito pensar melhor no problema e ver que escreveu incorretamente o sistema da primeira vez.

O aluno disse, ainda, que não costuma rever as suas resoluções e respostas, o que, a nosso ver, pode ter colaborado para o erro. (POLYA, 1978, p. 10).

O aluno **A**$_{13}$ errou a divisão: $\frac{98}{2}=48$. Escreveu o sistema corretamente, mas ao errar a divisão obteve incorretamente o preço da blusa. Por conseqüência, ao substituir o valor encontrado $(y=48)$ na equação para encontrar o preço da saia, também obteve o valor incorretamente $(x=27)$. Em outras situações da prova em que aparecem divisões, o aluno as efetuou corretamente, o que mostra que ele pode ter errado por distração.

O aluno **A**$_{11}$ escreveu o sistema corretamente. Porém, ao encontrar o valor da blusa, assumiu este como sendo da saia, mesmo tendo registrado o que representavam cada uma das letras escolhidas por ele para escrever o sistema, x representando o preço da saia e y representando o preço da blusa. Atribuímos essa troca à falta de atenção, já que o aluno escreveu o sistema corretamente.

A$_{11}$ e **A**$_{13}$, assim como A$_8$, parecem ter falhado na quarta e última fase apontada por Polya (1978), o *retrospecto*. Os alunos não deixam registro na prova de terem 'testado' os valores encontrados, ou seja, substituir os valores no sistema para confirmar a resposta.

No caso de $\mathbf{A}_{13}$, o erro poderia ser verificado ao testar os valores encontrados, pois a diferença entre os valores por ele encontrados não é 23, como está dito no problema. Já no caso de $\mathbf{A}_{11}$, a diferença é satisfeita, porém não a exigência de que a saia é mais barata do que a blusa. Relendo com atenção o problema, o aluno poderia ter percebido o erro.

Isso pode ser um indício de que os alunos não retomam as questões depois de resolvê-las para verificar a validade de suas respostas, por isso muitas vezes as respostas são incoerentes. Essa estratégia de verificar a validade das respostas deve ser incentivada pelos professores em sala de aula, pois pode evitar muitos erros.

Nenhum aluno mostrou ter problemas em resolver o sistema, mesmo os que erraram a questão não erraram o algoritmo. Isso parece mostrar que sabem lidar bem com ele. As dificuldades parecem estar ligadas à transcrição do problema em linguagem matemática que, por sua vez, está ligada à interpretação do problema, o que nos remete à questão da leitura e também, como já dissemos, à falta de hábito de validar os resultados encontrados.

Em sala de aula, a constatação de qual é a dificuldade, qual é a natureza do erro tem toda a importância na hora de o professor retomar o conteúdo, pois é isso que vai nortear a escolha das estratégias que irá utilizar futuramente. Diferentes erros requerem diferentes estratégias didáticas para sua superação (BURIASCO, 2000).

No caso desta questão que analisamos, por exemplo, o algoritmo não precisaria ser retomado pelo professor em sala de aula com nenhum dos alunos, uma vez que erros ligados à aplicação do algoritmo não foram observados. No entanto, a leitura e interpretação do enunciado e sua transcrição em linguagem matemática deveriam ser retomadas, já que parece ter sido uma das dificuldades encontradas por alguns alunos. Dificuldade que é preocupação dos professores desde as séries primárias e até aqui a encontramos. E aí concordamos com MARTINS (1986) quando diz que a leitura é a “ponte para o processo educacional eficiente, proporcionando a formação integral do indivíduo” (p.25).

Quadro 5 : Resumo das resoluções da questão 2

Escolhe um procedimento que resolve a questão (24)	Responde corretamente a questão (20)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	19
			Incorretamente	1
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Responde Incorretamente a questão (4)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	1
			Incorretamente	3
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (0)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
Escolhe um procedimento que não resolve a questão (0)	Responde incorretamente a questão (0)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (0)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
Não apresenta registros do procedimento escolhido (0)	Responde a questão (0)		Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (0)			-

4.3 A QUESTÃO 3 - Q3

Esta questão é parte integrante da prova da AVA/2002 para as 4ª. e 8ª. séries do Ensino Fundamental e 3ª. série do Ensino Médio.

Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. Quantos telegramas entregou em cada dia?

Resolução tipo escolar:	**Resolução tipo escolar:**	**Resolução tipo escolar:**
1° dia: 2° dia: 7 a mais 3° dia: 7+7 = 14 a mais 4° dia: 7+7+7 =21 a mais 5° dia: 7+7+7+7 = 28 a mais A mais: 7+14+21+28 = 70 100 – 70 = 30:5 = 6 No 1º. dia entregou: 6 telegramas. No 2º. dia entregou: 6+7=13 telegramas. No 3º. dia entregou: 13+7=20 telegramas. No 4º. dia entregou: 20+7=27 telegramas. No 5º. dia entregou: 27+7=34 telegramas.	Considerando x o número de telegramas entregues no primeiro dia temos que: $x+(x+7)+(x+14)+(x+21)$ $+(x+28)=100$ $5x=100-70$ $x=6$ Assim, no 1º dia entregou 6 telegramas. 2º dia entregou 13 telegramas. 3º dia entregou 20 telegramas. 4º dia entregou 27 telegramas. 5º dia entregou 34 telegramas.	Seja $(a_1, a_2, ..., a_5)$ uma progressão aritmética de razão r=7, com número de elementos n=5, e cuja soma dos seus elementos é S_n = 100. Se considerarmos a_1 = x o número de telegramas entregues no primeiro dia, teremos que: $a_n = a_1 + (n-1)r$ $a_5 = x + (5-1)7$ $a_5 = x + 4 \cdot 7$ $a_5 = x + 28$ $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ $100 = \frac{(x + x + 28)5}{2}$ $200 = 10x + 140$ $10x = 60$ $x = 6$ Assim, no 1º dia entregou 6 telegramas. 2º dia entregou 13 telegramas. 3º dia entregou 20 telegramas. 4º dia entregou 27 telegramas. 5º dia entregou 34 telegramas.

Classificação do problema	**Acertos**		**Erros**		**Uso de resolução tipo escolar**	
	N	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**
Problema de aplicação	20	79,2	04	20,8	19	95,8

Observações sobre a resolução dos alunos:

Quatro alunos (16,6%) apontaram a questão três no Questionário, como a mais difícil por sentirem dificuldade em lembrar da fórmula ou de trabalhar com progressões. Nenhum aluno apontou esta questão como a mais fácil.

A maioria dos alunos, dezesseis (16), dos vinte e quatro, resolveu a questão utilizando equação do primeiro grau, que era a resolução que descrevemos para a 8ª. série. Quatro (4) resolveram por tentativa e erro e três (3) utilizaram outras estratégias que não incluem álgebra, cuja nomeação é difícil, mas que comentaremos na seqüência. Apenas um (1) aluno resolveu utilizando progressão aritmética e também por equação, e um (1) aluno não resolveu a questão.

Dos dezesseis alunos que resolveram a questão utilizando equação, treze (13) resolveram corretamente. Nos chamou a atenção a resposta de um deles, **A**$_{13}$, que escreveu como resposta uma seqüência numérica:

$$6+6+7+6+14+6+21+6+28=100.$$

Consideramos essa a resposta, pois a mesma seqüência foi escrita no início da resolução com a incógnita do número de telegramas entregues no primeiro dia:

$$x+x+7+x+14+x+21+x+28=100.$$

Três (3) alunos erraram operações na resolução da equação e não propriamente o algoritmo. Um deles errou uma divisão e dois erraram a adição. Por terem errado as operações, responderam incorretamente a questão.

Um deles, **A**$_{2}$, errou a divisão: $\frac{30}{5}=5$. Encontrando esse resultado como o número de telegramas a ser entregue no primeiro dia, ele respondeu incorretamente a questão. Pelos registros na prova e pela resposta incorreta escrita por ele, parece que o aluno não se preocupou em conferir sua resposta. Confiou completamente no resultado encontrado.

Nas questões cinco e seis, este aluno errou novamente divisões. Estas últimas tinham maior grau de complexidade, pois ambas eram divisões de número inteiro por número inteiro que resultavam em quociente decimal. Arriscamos dizer, porém, pela investigação que fizemos das operações por ele resolvidas, que a dificuldade do aluno é com a 'tabuada'. É possível percebermos que o aluno tem domínio do algoritmo, no entanto parece ter dificuldade com as tabuadas. As operações que ele errou são as seguintes: $\frac{7000}{90} = 72{,}2$ e $\frac{40}{15} = 2{,}33...$.

Os dois alunos que erraram adição efetuaram incorretamente a soma: $7 + 14 + 21 + 28$. **A**$_1$ obtém 80 e **A**$_8$ obtém 60 no lugar de 70. Dessa forma, ambos encontraram incorretamente o número de telegramas a ser entregue no primeiro dia e, conseqüentemente, erraram os números de telegramas de todos os dias. **A**$_1$ parece ter percebido que errou, pois apresenta um cálculo da soma do número de telegramas encontrado na sua resolução, colocou um ponto de interrogação e não respondeu a questão.

Pensamos que, embora ele tenha percebido seu erro, não conseguiu encontrá-lo para poder corrigi-lo. Em entrevista confirmou nossa expectativa. Ele disse que já havia resolvido uma questão muito semelhante, mas que não lembrava e não conseguiu lembrar como. Parece que isso causou nervosismo no aluno e ele não conseguiu pensar em outra estratégia que não fosse lembrar da resolução que já havia feito antes.

O aluno disse ainda que tem dificuldades de pensar toda vez que se sente em situação de avaliação. Em nossa opinião, isso pode ter dificultado a resolução da questão.

A$_8$ respondeu incorretamente a questão e, quando somou o número de telegramas da sua resposta $(8+15+22+29+36)$, errou e obteve 100, confirmando, assim, sua resposta.

Este aluno errou duas vezes a operação de adição nesse exercício. Isso pode indicar que ele possui dificuldades para efetuar cálculo mental, pois as duas operações parecem ter sido feitas assim, visto que não há nenhum registro delas na prova. Nossa análise da prova do aluno nos permitiu verificar que, na última questão, ele efetuou corretamente cálculos que também parecem ter sido feitos mentalmente. Talvez os erros nessa questão se devam ao fato de envolverem muitas parcelas, pois na última questão os cálculos realizados foram: $2.8+5=21$ *e* $2.7+5=19$, ou seja, com número menor de parcelas.

Trabalhando em sala de aula, o professor tem mais condições de observar isso. Ele pode descobrir essa dificuldade conversando com o aluno e pedindo a ele que realize alguns cálculos. Aí está um instrumento poderoso que o professor possui: a possibilidade de diálogo com o aluno sobre os seus fazeres (BURIASCO, 2002; HADJI, 1994).

Nestes últimos casos, de **A**$_1$ e **A**$_8$, a etapa de validação do resultado encontrado foi feita, porém não trouxe grandes benefícios para os alunos. No primeiro caso, como já dissemos, porque o aluno não conseguiu encontrar o errou, e no segundo porque o aluno erra novamente a operação de prova real, validando um resultado incorreto. Ainda assim, insistimos que esta etapa é importante ao resolver problemas.

Os quatro alunos que utilizaram tentativa e erro fizeram isso com sucesso. **A**$_{21}$ mostrou ter 'chutado' suas tentativas, mas não totalmente ao acaso. Dividiu cem por cinco, obteve vinte e daí partiram seus palpites. Ele fez as primeiras tentativas com vinte telegramas no primeiro dia e logo percebeu que teria que diminuir esse número. Fez mais algumas tentativas até conseguir.

Não podemos afirmar que os outros alunos não fizeram suas tentativas também baseados em algum indício, mas não há registros na prova.

$\mathbf{A}_{20}$, $\mathbf{A}_{18}$ e $\mathbf{A}_{4}$ 'fugiram' da álgebra, ou seja, optaram por procedimentos aritméticos. $\mathbf{A}_{4}$ dividiu cem por cinco, obteve vinte e fez a seguinte seqüência:

$$20 - 7 = 13 - 7 = 6\,.$$

Tomou seis como o número de telegramas a ser entregue no primeiro dia, calculou então os valores dos outros dias e respondeu corretamente.

$\mathbf{A}_{20}$ e $\mathbf{A}_{18}$ somaram os números de telegramas a serem entregues 'a mais' a cada dia:

$$7 + 14 + 21 + 28 = 70\,.$$

Em seguida, diminuíram esse valor de cem

$$100 - 70 = 30\,,$$

Depois, dividiram por cinco esse total

$$\frac{30}{5} = 6\,.$$

A partir desse resultado, encontraram os números de telegramas a serem entregues a cada dia.

Apenas um aluno resolveu a questão por meio da fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética (P.A.), procedimento que descrevemos para a 3ª. série do Ensino Médio. Outros, porém, deixaram indícios de também terem pensado nessa estratégia. Exemplo disso é $\mathbf{A}_{5}$, que descreve, na folha da prova, que fez por tentativa e erro porque não lembrou da fórmula.

Vale a pena aproveitarmos essa situação para reforçar uma idéia que colocamos anteriormente e que é de muita importância no processo de avaliação.

No capítulo de número dois, falamos da importância de o professor ter claro o que pretende avaliar e de planejar bem as situações de avaliação para que possa ver aquilo que pretende sobre os conhecimentos dos alunos (BURIASCO,2002; BRASIL,2001). Esta questão, por exemplo, não seria uma questão ideal para o professor verificar se seus alunos lidam bem com as P.A., porque ela pode ser resolvida de outras maneiras.

A questão nos mostrou quantas outras coisas os alunos sabem, como lidam com equações e o que fazem quando reconhecem uma estratégia que pode ser utilizada, mas que não sabem ou da qual não se lembram. Isso nos mostra inclusive que os alunos entendem que há muitas maneiras de se obter um resultado de um problema matemático, não só os ensinados pelos professores.

Um aluno não resolveu nem respondeu a questão. Em entrevista o aluno declarou que neste exercício ele sentiu uma dificuldade que sente com freqüência, transcrever o problema em linguagem matemática. $\mathbf{A}_9$ refere-se a essa dificuldade outras vezes durante a entrevista. No caso desta questão especificamente, ele disse que identificou que o problema poderia ser resolvido por progressão, mas não soube identificar quais seriam a razão, os termos, etc.

Já falamos sobre a questão de que os problemas têm servido somente como treinamento do conteúdo ensinado pelo professor e da necessidade de trabalhar com diferentes formas de apresentação das atividades. O aluno reforça nossa idéia dizendo que quando não tem “a historinha” ou seja, quando é um exercício em que as informações estão explícitas, ele resolve sem dificuldades.

Quando questionado sobre tentar resolver o problema de outra forma, $\mathbf{A}_9$ disse que não lembra direito porque não tentou e que talvez tenha sido pelo tempo. Porém no seu questionário sobre as impressões da prova ele respondeu que o tempo foi suficiente, o que nos leva a acreditar que o motivo real para a não resolução da questão foi a dificuldade apontada por ele. Acreditamos que este aluno não tenha conseguido pensar em outra forma de resolver.

Quadro 6: Resumo das resoluções da questão 3

Escolhe um procedimento que resolve a questão (23)	Responde corretamente a questão (19)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	15
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	4
			Incorretamente	-
	Responde Incorretamente a questão (2)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	2
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (2)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	1
			Incorretamente	1
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
Escolhe um procedimento que não resolve a questão (0)	Responde incorretamente a questão (0)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
Não apresenta registros do procedimento escolhido (1)	Responde a questão (0)		Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (1)			1

4.4 A QUESTÃO 4 - Q4

Esta questão é parte integrante da prova da AVA/2002 para a 8ª. série do Ensino Fundamental e 3ª. série do Ensino Médio.

Um encanador A cobra por cada serviço feito um valor fixo de R$ 60,00 mais R$ 18,00 por hora de trabalho. Um outro encanador B cobra um valor fixo de R$24,00 mais R$36,00 por hora de trabalho. Sendo t o tempo, medido em horas, para quais valores de t o encanador A fica mais barato que o B?

Resolução tipo escolar:

O preço cobrado pelo encanador A pode ser obtido por
$x = 60 + 18t$
O preço cobrado pelo encanador B pode ser obtido por
$y = 24 + 36t$

Logo para que A seja mais barato que B temos
$x < y$

Então
$$60 + 18t < 24 + 36t$$
$$60 - 24 < 36t - 18t$$
$$36 < 18t$$
$$2 < t$$

O encanador A fica mais barato que o encanador B para um tempo de trabalho superior a 2 horas.

Classificação do problema	Acertos		Erros		Uso de resolução tipo escolar	
	N	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**
Problema de aplicação	20	83,3	04	16,7	24	100

Observações sobre as resoluções dos alunos:

No Questionário, essa questão foi apontada por um aluno (4,1%) como a mais fácil, e por nenhum como a mais difícil.

As estratégias utilizadas foram: inequação do primeiro grau (seis alunos); equação do primeiro grau (cinco alunos); funções (nove alunos); gráficos (cinco alunos); sistema de equações do primeiro grau (um aluno). Se somarmos o número de alunos descritos acima, veremos que ultrapassa vinte e quatro (24). Isso porque alguns alunos utilizaram mais de uma estratégia na resolução da questão, o que comentaremos mais adiante.

Os seis (6) alunos, que resolveram a questão utilizando o padrão (inequação do primeiro grau), acertaram a questão. Arriscamos dizer que o fato de o resultado de uma inequação já ser a resposta do problema, por conter a exigência posta por este, pode facilitar o acerto nesse tipo de resolução.

A estratégia mais utilizada foi calcular as funções:

$$f(t) = 60 + 18t \text{ e } f(t) = 24 + 36t,$$

que representam o valor cobrado pelos encanadores A e B, respectivamente, para alguns valores como 1, 2, 3 e 4 horas de trabalho.

Dos nove (9) alunos que utilizaram essa estratégia, seis acertaram a questão. E dos três alunos que erraram, somente **A**$_{13}$ errou o procedimento, os outros erraram ao escreverem a resposta. Ele calculou incorretamente o total cobrado pelos encanadores para os valores de 2, 3 e 4 horas e também respondeu incorretamente "*para valores maiores que* 3".

Há dois fatos a serem considerados no caso de **A**$_{13}$. O primeiro é que, mesmo para os valores encontrados pelo aluno, a resposta está incorreta porque o encanador A é vantajoso *a partir de* três horas, pois, para $t = 3$, o valor cobrado por A já é menor que o cobrado por B.

O segundo fato que merece nosso comentário é que esse aluno teve outros erros em operações nas outras questões. Na questão três, ele errou uma divisão, porém percebeu o erro e corrigiu-o. Isso pode ser um indício de que o aluno tem certas dificuldades com cálculo mental e de que ele não costuma retomar as resoluções para verificar se estão corretas. É a falha no *retrospecto* de Polya. (POLYA, 1978).

Os outros alunos que erraram esta questão, **A_6** e **A_{18}**, não erraram o procedimento, só a resposta. **A_6** calculou os valores para 1, 2 e 3 horas de trabalho dos encanadores corretamente. Ao escrever a resposta, porém, escreveu que o encanador A seria mais barato para *3 horas* de trabalho. A resposta está incompleta, pois para 3 horas de trabalho o encanador A realmente é mais barato que o B, porém não é só para 3 horas, também para 4, 5, 6, ou seja, *a partir de* 3 horas de trabalho.

A resposta '*a partir de 3 horas'* é considerada correta levando-se em conta a possibilidade de os encanadores cobrarem apenas horas cheias de trabalho e também porque no problema não está especificado que o tempo deve ser considerado em horas não inteiras. Dessa forma, o valor cobrado pelos encanadores para 2,5 horas seria o mesmo cobrado por 2 horas e, portanto, somente a partir de 3 horas o encanador A seria mais vantajoso. (Manual para Correção das Provas com Questões Abertas de Matemática. (BURIASCO, CYRINO; SOARES, 2004).

A resposta $t \geq 3$ ou seja, a partir de três horas, deixa a dúvida se o resolvedor pensou ou não na questão das horas cheias. No caso da avaliação da aprendizagem, essa dúvida pode ser esclarecida pelo professor conversando com o aluno a respeito da sua resolução. Isso permite também que o professor possa estar revendo e discutindo essas questões com seus alunos.

A_{18} respondeu $t < 3$ *horas*. Acreditamos que o aluno tenha lido errado o enunciado e tenha respondido os valores para os quais o encanador B é mais barato, pois ele calculou corretamente os valores para até cinco horas de trabalho dos encanadores, o que lhe permitia compará-los. Isso nos remete novamente à questão da leitura. Os alunos parecem ter muita dificuldade em ler e, a partir daí, saber o que fazer nas situações propostas.

Os alunos que resolveram por equação igualaram as duas expressões que representavam o valor cobrado pelos encanadores:

$$60 + 18t = 24 + 36t\,,$$

obtendo, assim, a equação, que resolveram corretamente.

A utilização do gráfico foi escolha de cinco alunos, dos quais, dois utilizaram também outras estratégias já citadas. Um deles foi **A**$_6$ que respondeu incorretamente a questão, escrevendo como resposta "$t = 3\ horas$".

Dos três (3) alunos que utilizaram somente o gráfico para resolver a questão, apenas **A**$_2$ respondeu incorretamente. Não conseguimos entender o gráfico construído por este aluno e não foi possível entrevistá-lo para que ele nos explicasse. A figura 5 mostra o gráfico construído por **A**$_2$.

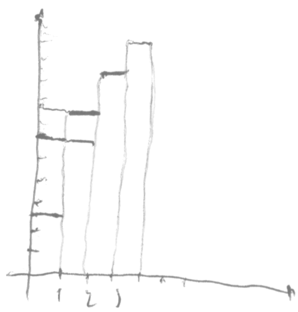


Figura 5: Gráfico construído pelo aluno **A**$_2$ para resolver a questão 4.

O único aluno que resolveu a questão utilizando como estratégia um sistema de equações resolveu corretamente o sistema e respondeu corretamente a questão.

É fácil observar que os poucos erros desta questão dizem respeito à resposta. Observando que a função que representava o valor cobrado pelo encanador B crescia mais rapidamente que a do encanador A, e que, para o tempo de duas horas $(t = 2)$, os dois encanadores cobravam o mesmo valor, o correto seria responder que para *t > 2* o encanador A seria mais vantajoso. A essa resposta, porém, estão associados outros fatores como, por exemplo, a interpretação do resultado encontrado.

Quadro 7: Resumo das resoluções da questão 4

Escolhe um procedimento que resolve a questão (24)	Responde corretamente a questão (20)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	20
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Responde Incorretamente a questão (4)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	2
			Incorretamente	2
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (0)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
Escolhe um procedimento que não resolve a questão (0)	Responde incorretamente a questão (0)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
Não apresenta registros do procedimento escolhido (0)	Responde a questão(0)		Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (0)			-

4.5 A QUESTÃO 5 - Q5

Esta questão é parte integrante da prova da AVA/2002 para 8ª. série do Ensino Fundamental.

Quatro companhias aéreas fazem a ponte aérea São Paulo - Brasília. Segundo pesquisa realizada, 7 000 passageiros diários fazem essa viagem.
O quadro abaixo mostra o preço dos bilhetes, a porcentagem de passageiros e o número de vôos diários dessas companhias.

	Preços dos bilhetes ida e volta	Porcentagem de passageiros	Vôos diários ida e volta
TGK	336 reais	35,5%	32
LDX	336 reais	26,7%	24
PHD	288 reais	22,2%	20
WSQ	193 reais	15,6%	14

De acordo com os dados acima, responda:

a) A empresa mais procurada nessa viagem, quantos passageiros transporta diariamente?
b) Supondo que os aviões dessas companhias tenham a mesma lotação, quantos passageiros são transportados, em média, por dia em cada vôo?
c) Construa um gráfico que relacione o número de passageiros e o preço que pagam para fazer essa viagem.

Observações sobre as resoluções dos alunos:

No Questionário, essa questão foi apontada como a mais difícil por cinco alunos (20,8%), que justificaram suas respostas dizendo que a questão era muito trabalhosa, exigia muito raciocínio e não estava muito claro o que era pedido em cada item, dificultando a interpretação. Nenhum aluno considerou essa questão a mais fácil.

Resolução tipo escolar para o item a: $\frac{7000}{100} \times 35{,}5 = 2485$ A empresa mais procurada transporta diariamente 2485 passageiros.						
Classificação do problema	**Acertos**		**Erros**		**Use resolução tipo escolar**	
	N	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**
Problema de aplicação	23	95,8	01	4,2	23	95,8

Em relação ao *item a*, todas as resoluções apresentadas estavam corretas e resumiram-se a dois procedimentos: 1) os alunos escreveram uma regra de três; 2) os alunos fizeram as operações necessárias para o cálculo da porcentagem sem indicar a regra de três. Um aluno escreveu apenas a resposta incorretamente.

Mesmo sabendo que a idéia envolvida nos dois procedimentos é a mesma, pensamos que é interessante falar um pouco sobre cada um deles.

Dos vinte e quatro (24) alunos, nove (9) indicaram a regra de três:

$$\frac{7000}{x} = \frac{100}{35{,}5},$$

cinco optaram por dividir 7000 por 100 e então multiplicar o resultado por 35,5. Os outros quatro fizeram o contrário, primeiro multiplicaram 7000 por 35,5 e depois dividiram por 100.

A estratégia mais utilizada foi resolver o problema utilizando operações de multiplicação e divisão, sem apresentar a regra de três. Quatorze (14) alunos resolveram assim.

Essas resoluções podem ser agrupadas em 5 grupos: três (3) alunos efetuaram a multiplicação de 7000 por 35,5; seis (6) alunos dividiram 7000 por 100 e em seguida multiplicaram por 35,5; um (1) aluno dividiu 35,5 por 100 e em seguida multiplicou o resultado por 7000; um (1) aluno multiplicou 35,5 por 7; um (1) aluno apenas indicou as operações, porém não é possível verificar em que ordem as realizou; um aluno multiplicou 35,5 e 100 por 10 e em seguida multiplicou por 7000, da seguinte forma: $\frac{35,5}{100}.7000 = \frac{355}{1000}.7000 = 2485$; um (1) aluno escolheu um procedimento semelhante a esse último, porém inverteu a ordem: $7000.\frac{35,5}{100} = 70.\frac{3535}{10} = 2485.$ Todos resolveram e responderam corretamente.

O único erro encontrado foi de um aluno que apenas respondeu incorretamente a questão: "32 passageiros"*.* A investigação na prova do aluno e a resolução apresentada no item b, a princípio, nos levou a pensar que ele interpretou o número de vôos como sendo o número de passageiros, pois no item b, para calcular os passageiros, ele somou os números de vôos e dividiu por oito: $\frac{32+24+20+14}{8} = \frac{90}{8} = 11,2$. A impressão que tivemos foi que esses números representariam, para o aluno, os passageiros. Observando o item c, porém, notamos que o aluno fez o gráfico utilizando os números 32, 24, 20, 14, como sendo os números de vôos e as porcentagens sendo o número de passageiros, o que vem contrariar nossa hipótese. Nesse caso, não entendemos por que o aluno utilizou esses valores para resolver a questão.

Quadro 8: Resumo das resoluções da questão 5a

Escolhe um procedimento que resolve a questão (23)	Responde corretamente a questão (23)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	23
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Responde Incorretamente a questão (0)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	
			Incorretamente	
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (0)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
Escolhe um procedimento que não resolve a questão (0)	Responde incorretamente a questão (0)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
Não apresenta registros do procedimento escolhido (1)	Responde a questão (1)		Corretamente	-
			Incorretamente	1
	Não responde a questão (0)			-

Resolução tipo escolar para o item b:
Se os aviões têm a mesma lotação podemos dividir o total de passageiros que a empresa TGK transporta por dia (2485) pelo total de vôos diários (32), assim teremos aproximadamente 78 passageiros.

Classificação do problema	Acertos		Erros		Uso de resolução tipo escolar	
	N	%	N	%	N	%
Problema de aplicação	14	62,5	10	37,5	24	100

No item b, a estratégia mais utilizada foi uma que resolve a questão, isto é, a divisão do número total de passageiros pelo número total de vôos: $\frac{7000}{90}$.

Foi utilizada por sete alunos, e apenas um errou. Já comentamos sobre esse aluno na questão três. É o aluno $\mathbf{A}_2$.

Em segundo lugar, utilizado por seis (6) alunos, a estratégia foi dividir o número de passageiros encontrado no *item a* e dividir pelo número de vôos dessa empresa $\left(\frac{2485}{32}\right)$. Cinco alunos resolveram corretamente e um incorretamente. O restante dos alunos dividiu-se em mais cinco estratégias, que comentaremos a seguir.

O cálculo da média para todas as empresas também é uma estratégia que resolve a questão e foi utilizada corretamente por três (3) alunos e incorretamente por um. Esses três, embora tenham calculado para cada empresa separadamente, tiveram o cuidado de apontar apenas uma resposta, cumprindo, assim, a exigência do problema que supõe que todos os aviões das companhias tenham a mesma lotação. Isso mostra que esses alunos sabem o que significa calcular a média.

Como já dissemos, apenas um aluno que escolheu essa estratégia errou: $\mathbf{A}_{11}$. Ele apresentou como resposta um número diferente para cada empresa e, além disso, utilizou números que não o levariam à resposta correta. Ele dividiu o número de passageiros de cada empresa pela metade do respectivo número de vôos de cada uma delas. Por exemplo, no lugar da divisão

$$\frac{2485}{32},$$

o aluno efetuou a divisão

$$\frac{2485}{16}.$$

Vale lembrar que este aluno mostrou saber efetuar as divisões envolvidas nas resoluções apresentadas.

Outra estratégia, utilizada por três (3) alunos, foi a divisão do número total de passageiros por quatro: $\frac{7000}{4} = 1750$. Os três (3) resolveram a divisão corretamente, mas essa divisão não leva à resposta correta. Pensamos que essa divisão por quatro deve-se ao fato de serem quatro as companhias aéreas. Se nossa hipótese é verdadeira, voltamos à questão da leitura e falha a primeira etapa colocada por POLYA (1978), a compreensão do problema. Parece que os alunos ignoraram a palavra vôos e por isso dividiram por quatro. Não pensaram na impossibilidade de viajarem 1750 pessoas num avião da ponte aérea São Paulo – Brasília. Como já comentamos, os alunos parecem não ter o hábito de rever suas resoluções.

Um aluno dividiu os números de vôos por dois e, em seguida, dividiu a soma destes por quatro:

$$\frac{16 + 12 + 10 + 7}{4} = 11,25 .$$

Pensamos que este aluno dividiu os números de vôos por dois porque no quadro está escrito "*vôos diários ida e volta*". Talvez ele tenha pensado em usar apenas a metade desses vôos, considerando que a ida e a volta são contados como apenas um vôo. No entanto no enunciado do problema está escrito "*por dia em cada vôo*", o que obriga a usar o número total de vôos. Novamente aqui vemos a importância da interpretação da questão.

Na entrevista, $\mathbf{A}_9$ não lembrou porque dividiu o número de vôos por dois, mas considerou que esse procedimento estava incorreto assim que leu o enunciado e olhou sua resolução. Conversamos muito com o aluno sobre a questão, pois ele leu várias vezes e a cada questionamento nosso retomou a questão e não conseguiu pensar num procedimento para resolvê-la corretamente.

Destacamos novamente aqui a questão da leitura e interpretação dos enunciados dos problemas. Durante nossa conversa, a cada vez que leu o problema, o aluno se convenceu de que o que havia proposto não era correto e justificou o porquê. Isso mostra a importância de trabalhar com problemas enquanto problemas, ou seja, enquanto situação a ser lida, interpretada e então resolvida (BRASIL, 2001; BUTTS, 1997).

A$_{13}$ dividiu o número total de vôos por 8 corretamente, mas essa estratégia escolhida por ele não resolve a questão.

A$_{21}$ utilizou uma regra de três para resolver a questão. Escreveu que, se são quatro companhias aéreas, cada uma transporta 25% dos passageiros. Dessa forma,

$$\frac{7000}{x} = \frac{100\%}{25\%}$$

encontrou como resultado 1750 passageiros. Embora tenha utilizado corretamente a estratégia, essa não resolve questão.

A$_{1}$ dividiu o número total de vôos por 4 corretamente, mas essa estratégia também não resolve a questão. Nesse mesmo item, ele escreveu que achava que deveria ser feito o cálculo para todas as empresas e depois calcular a média. Em entrevista disse que o problema foi a interpretação do enunciado, a palavra ‘média’ deixou-o em dúvida. No entanto, ele mesmo não soube explicar por que resolveu de uma maneira e apontou outra possibilidade. Parece que, na dúvida, optou por uma, mas gostaria que soubéssemos que ele sabia uma segunda maneira.

Talvez esse aluno tenha dificuldade na tomada de decisões, pois na Q3, do carteiro, ele também não conseguiu terminar a questão por não lembrar como tinha resolvido anteriormente. Isso também precisa ser trabalhado na escola. Quando trabalhamos com exercícios que sempre trazem dicas de como devem ser resolvidos, tiramos do aluno a responsabilidade de tomar decisões, daí a importância da exploração de diferentes tipos de problemas (POLYA, 1997; BRASIL, 2001).

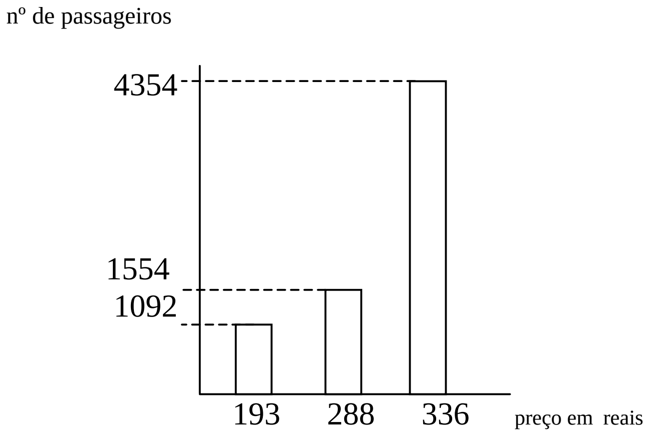
O erro mais comum nesse item está na escolha da estratégia. A maioria dos alunos errou porque escolheu uma estratégia que não resolvia a questão. A estratégia era adequada, a divisão era um procedimento que resolvia a questão, porém os números envolvidos nessas divisões é que não levavam ao resultado correto. Caracterizamos esse procedimento como um que não resolve a questão, pois, mesmo resolvendo a divisão corretamente, não é possível obter a resposta correta.

Quadro 9: Resumo das resoluções da questão 5b

Escolhe um procedimento que resolve a questão (17)	Responde corretamente a questão (14)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	14
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Responde Incorretamente a questão (3)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	3
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (0)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
Escolhe um procedimento que não resolve a questão (7)	Responde incorretamente a questão (7)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	7
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
Não apresenta registros do procedimento escolhido (0)	Responde a questão (0)		Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (0)			-

Resolução tipo escolar para o item c:

c) Como já foi calculado no item a) a empresa TGK transporta 2485 passageiros por dia.
A empresa LDX transporta 26,7% de 7000 passageiros, ou seja, 1869 passageiros por dia.
A empresa PHD transporta 22,2% de 7000 passageiros, ou seja, 1554 passageiros por dia.
A empresa WSQ transporta 15,6% de 7000 passageiros, ou seja, 1092 passageiros por dia.
Assim temos que



Classificação do problema	Acertos		Erros		Uso de resolução tipo escolar	
	N	%	N	%	N	%
Problema de aplicação	02	8,3	22	91,7	23	95,8

O *item c* foi o que os alunos mais erraram. Dos vinte e quatro (24) alunos, apenas dois (2) acertaram totalmente a questão.

O erro mais freqüente foi a construção do gráfico indicando no eixo horizontal o número de passageiros no lugar de indicar o preço dos bilhetes, o que pode ser considerado como *crédito parcial* (BURIASCO; CYRINO;SOARES, 2004).

Outro erro bastante freqüente foi indicar em colunas separadas o número de passageiros das duas empresas, TGK e LDX, que pagavam o mesmo preço pelo bilhete.

Nesse item c, há muitos casos particulares a serem comentados. Vamos falar primeiramente dos casos em que foi possível agrupar um certo número de alunos e, em seguida, trataremos de comentar os casos particulares.

O padrão foi utilizado pelos alunos **A**$_2$ e **A**$_7$, que acertaram a questão.

Cinco (5) alunos construíram corretamente os gráficos, indicando na mesma coluna os passageiros que pagavam o mesmo valor pelo bilhete, porém indicaram o preço dos bilhetes no eixo vertical.

Vale a pena destacar que dois deles, **A**$_{20}$ e **A**$_{17}$, tomaram o cuidado de indicar a proporcionalidade ao marcar os valores $193, 288, 336$ no eixo vertical. Isso indica que, mesmo não tendo indicado as quantidades fixas no eixo horizontal, os alunos têm noção de que é preciso manter a proporcionalidade entre as grandezas ao representá-las no gráfico.

Oito (8) alunos construíram o gráfico indicando separadamente o número de passageiros das empresas que cobravam o mesmo valor pelo bilhete e indicando no eixo horizontal o número de passageiros.

Um aluno construiu o gráfico representando no eixo horizontal a porcentagem de passageiros e no vertical o preço dos bilhetes.

A$_{23}$ indicou no eixo horizontal o preço dos bilhetes, porém errou o gráfico porque indicou na vertical o número de passageiros de cada empresa separadamente. A figura 6 mostra o gráfico.

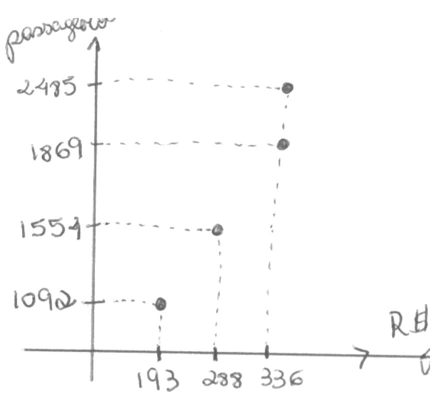


Figura 6: Gráfico construído pelo aluno **A**$_{23}$ para resolver a questão 5c.

Seis alunos construíram gráficos de linhas com interpretações variadas: relacionando a porcentagem de passageiros com o preço pago pelo bilhete; relacionando o número de vôos com o preço do bilhete; relacionando o número de passageiros apenas com o valor do bilhete fornecido pela TGK, como se fosse uma função do tipo $f(x) = 336x$; relacionando o preço pago pelo bilhete com o número de passageiros. Em resumo, os gráficos construídos por esses alunos não correspondiam ao que foi pedido pelo exercício, e o erro parece estar na interpretação do enunciado. Um deles escreveu que não entendeu muito bem a questão. Não sabia se era para fazer de acordo com a tabela ou só com a companhia TGK, e fez de acordo com a tabela. A Figura 7 mostra o gráfico desse aluno.

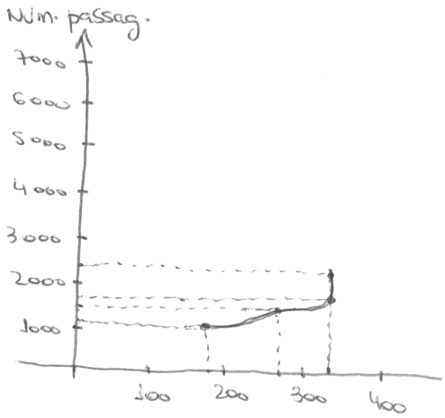


Figura 7: Gráfico construído pelo aluno A_6 na questão 5c.

A_8 deixou a questão em branco. Em entrevista disse que o enunciado não deixa claro o que é para ser feito. Não diz para que empresa, para quantos passageiros, por isso ele deixou a questão em branco.

Quadro 10: Resumo das resoluções da questão 5c

Escolhe um procedimento que resolve a questão (23)	Responde corretamente a questão (2)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	2
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Responde Incorretamente a questão (21)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	21
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (0)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
Escolhe um procedimento que não resolve a questão (0)	Responde incorretamente a questão (0)	Usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
		Não usa resolução tipo escolar	Corretamente	-
			Incorretamente	-
Não apresenta registros do procedimento escolhido (1)	Responde a questão (0)		Corretamente	-
			Incorretamente	-
	Não responde a questão (1)			1

4.6 A Questão 6 - Q6

Esta questão é parte integrante da prova da AVA/2002 para 3ª. série do Ensino Médio.

Pedro e Carla saem do cinema e resolvem pegar juntos um táxi para ficar mais barato, já que Carla mora no caminho da casa de Pedro. Carla mora à 8Km do cinema e Pedro à 15Km. Sabendo-se que o preço P (em reais) cobrado pelo táxi varia com a distância percorrida x (em quilômetros), de acordo com a função P(x) = 2x + 5, quanto cada um deve pagar de modo que seja vantajoso para ambos?

Resolução tipo escolar:

Resolução 1:O preço total a ser pago pela corrida é de $P(15) = 2 \cdot 15 + 5 = 35$.
Até chegar à casa de Carla, ambos devem dividir as despesas, ou seja, cada um deve pagar por 4 Km. Como Pedro tem que percorrer mais 7 Km para chegar à sua casa, deve pagar por 11 Km. Assim o preço y que Carla deve pagar é de

$$\frac{35}{15} = \frac{y}{4} \to y \cong 9{,}33$$

- o preço *z* que Pedro deve pagar é de

$$\frac{35}{15} = \frac{z}{11} \to z \cong 25{,}66$$

Resolução 2: Divide a constante da função por 2, encontrando 2,50. Subtrai $15 - 8 = 7$. Substitui corretamente x por 8 e depois por 7 em $Q(x) = 2x$, obtendo $Q(8) = 16$ e $Q(7) = 14$. Divide 16:2=8. Soma 8 + 2,50 = 10,50 e 14 + 8 + 2,50 = 24,50. Responde que Carla deve pagar 10,50 e Pedro 24,50.

Observação: Se Pedro e Carla fossem sozinhos para casa, Pedro pagaria R$35,00 e Carla R$21,00. Qualquer resposta que garanta que Carla e Pedro paguem menos que esses valores e que a soma dos valores a serem pagos pelos dois não ultrapasse R$ 35,00 (que corresponde ao valor máximo que o táxi percorrerá) é aceitável, desde que a resolução sustente as respostas encontradas.

Classificação do problema	**Acertos**		**Erros**		**Uso de resolução tipo escolar**	
	N	**%**	**N**	**%**	**N**	**%**
Problema de Aplicação	17	70,8	7	29,2	23	95,8

Observações sobre as resoluções dos alunos:

De acordo com o Questionário, essa questão foi considerada a mais difícil por doze alunos (50%) e a mais fácil por um (4,1%) deles. As justificativas apresentadas pelos alunos que consideraram a questão difícil foram de que ela exigiu ‘muito raciocínio’, que foi difícil trabalhar com o raciocínio lógico e o fato de ter mais de uma possibilidade de resposta. O aluno que disse ser essa a questão mais fácil justificou-se pelo fato de a questão envolver função.

Vale a pena ressaltar que, independente da resposta ou da forma como foi conduzida a resolução, todos os alunos que responderam a questão iniciaram por calcular alguns valores da função *f(x) = 2x + 5*, como, por exemplo, para 7, 8 e 15 quilômetros.

Quando dizemos independente da resposta é porque alguns alunos escreveram respostas que de certa forma não foram geradas diretamente pelos cálculos desta função. Por exemplo, quando o aluno calcula *f(8) = 21* e *f(15) = 35* e responde que cada um deve pagar a metade, parece estar mais de acordo com a 'política da boa vizinhança' do que com as operações que fez, pois nos seus cálculos não aparece a proposta de pagarem a metade cada um.

Nesta questão, agrupamos as resoluções em seis grupos, cujas estratégias comentaremos a seguir.

Dos vinte e quatro aluno que resolveram esta questão, cinco (5) resolveram e responderam corretamente a questão utilizando a idéia da *resolução 2* descrita anteriormente. Deste cinco, dois calcularam a função $f(x) = 2x + 5$ para os valores 8 e 15. Dividiram 21 por 2, obtendo R$10,50 e diminuiram este valor de 35, respondendo que Carla deve pagar R$10,50 e Pedro R$24,50.

Um desses alunos mostrou apenas a operação: $35{,}00 - 10{,}50 = 24{,}50$ e respondeu como os anteriores. Outro apenas responde que Carla deve pagar R$10,50 e Pedro R$24,50.

O quinto aluno escreveu as funções:

$$C = x_1 + \frac{5}{2}$$

$$P = \left(x_1 + \frac{5}{2} \right) + 2x_2$$

Calculou a primeira para $x_1 = 8$ e a segunda para $x_1 = 8$ e $x_2 = 7$. Respondeu que Carla deve pagar R$10,50 e Pedro 24,50.

Outros cinco (5) alunos responderam que cada um deveria pagar a metade da distância total, ou seja R$17,50.

Dois (2) alunos calcularam o valor pago por quilômetro rodado dividindo 35 por 15. Percebemos que ele dividiram desta maneira o valor fixo de R$5,00, mas a idéia que utilizam é convincente. Um deles, **A**$_7$, dividiu corretamente, obtendo 2,33. Em seguida, multiplicou esse valor por 8 e diminuiu o resultado de 35 corretamente. Respondeu que Pedro pagaria R$18,64 e Carla R$16,36.

O outro aluno, **A**$_6$, dividiu incorretamente 35 por 15, obtendo 2,44. Efetuou ainda vários cálculos a fim de chegar ao valor que Pedro e Carla deveriam pagar. Obteve alguns valores como *R$ 26,84 e R$ 9,76* (Figura 8). Por fim ele 'arredondou' os valores ao dar a resposta e escreveu que Carla deve pagar *R$ 10,00 e Pedro R$ 25,00*. As duas respostas dadas por estes alunos são consideradas corretas por satisfazerem as duas condições impostas pelo problema, somam R$ 35,00 e é vantajoso para Pedro e Carla.

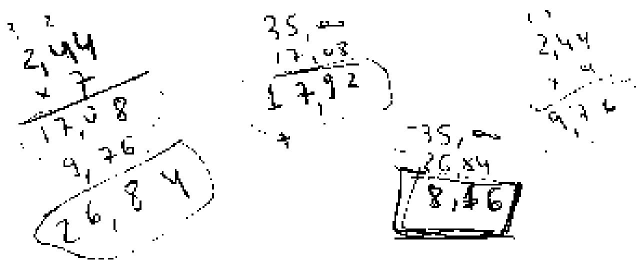


Figura 8: Resolução do aluno **A**$_6$ na questão 6.

Seis (6) alunos procuraram estabelecer relações entre as informações do problema. Parece que eles tentaram encontrar a forma mais justa de dividir o valor da viagem sem que Pedro e Carla saíssem prejudicados. **A**$_{14}$, por exemplo, escreveu: $\frac{23}{8} \quad \frac{35}{x}$ *e* $\frac{23}{15} \quad \frac{35}{x}$. Resolvendo essas multiplicações obteve R$ 12,20 para Carla e R$ 22,80 para Pedro. Acreditamos que o ‘23’ é a soma de 15 com 8, porém o aluno parece não ter percebido que os 8 quilômetros já estavam sendo contados nos 15 e que esse valor sim custa R$35,00. O aluno tentou estabelecer uma relação entre o maior valor a ser pago, que seria de R$35,00 pelos 15 quilômetros até a casa de Pedro, e a maior distância a ser percorrida pelo táxi caso fosse levar um de cada vez pra casa. A resposta do aluno satisfaz as condições postas pelo problema, ou seja, o valor a ser pago por Carla e Pedro é vantajoso para ambos e a soma desses valores não ultrapassa R$ 35,00, porém o uso do ‘23’ não está correto.

Outro aluno também utilizou o ‘23’. Escreveu que Carla deveria pagar $\frac{8}{23} \times 35 \cong R\$12{,}16$ e Pedro $\frac{15}{23} \times 35 \cong R\$22{,}84$. Resposta que também satisfaz a s exigências do problema.

Outro aluno buscou na porcentagem a resposta: $\frac{15}{8} \qquad \frac{100}{x}$. Resolvendo a equação encontrou o valor de *x* igual a 54%. Calculou o valor em reais correspondente a essa porcentagem. Com esse valor fez duas operações: 1) dividiu por dois $(18{,}90 : 2 = 9{,}45)$ e 2) diminuiu de 35 $(35 - 18{,}90 = 16{,}10)$. Respondeu que Carla vai pagar R$9,45 e Pedro R$ 25,55 $(16{,}10 + 9{,}45)$. Também neste caso as exigências do problema são satisfeitas e a resolução segue uma posição que convence.

Na sua resolução, **A**$_2$ calculou quanto Pedro e Carla pagariam, se cada um fosse sozinho para casa, mas não conta a bandeirada. Chega em 16 e 30 reais. Propõe que Carla pague 8 reais (16:2) e Pedro 22 (30-16=14+8). Numa tabela vai anotando esses valores, como mostra a Figura 9.

O aluno fez um cálculo que parece ser a tentativa de dividir o valor da bandeirada proporcionalmente aos quilômetros percorridos por Pedro e Carla. Ele escreveu: $\frac{5}{x}\ \frac{15}{8}$. Dividiu incorretamente 40 por 15, obteve 2,333... Mais abaixo escreveu

$$x = \frac{8}{3}$$
$$x = \frac{4}{3} = 1{,}333$$

O que parece é que, ao resolver a regra de três, o aluno encontrou o valor referente aos 8 primeiros quilômetros percorridos, nos quais Pedro e Carla estavam juntos. Sabendo disso, o aluno dividiu entre os dois essa diferença. E neste momento ele acertou o valor que anteriormente havia errado. Colocou na tabela mais R$1,33 para cada um.

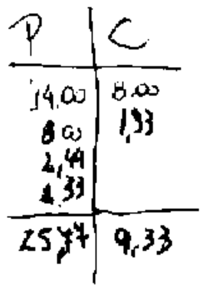


Figura 9: Anotações feitas pelo aluno $\mathbf{A}_2$ na resolução da questão 6.

Na seqüência, $\mathbf{A}_2$ calculou $1{,}33 + 1{,}33 = 2{,}66$. Sendo assim, falta ainda R$2,44 para completar os R$5,00 da bandeirada. E ele colocou na sua planilha esse valor para que Pedro pague. Respondeu de acordo com sua planilha que Pedro deve pagar R$25,77 e Carla R$9,33.

Dessa forma, o aluno tratou o valor fixo como se fosse dependente dos quilômetros percorridos. Mas é interessante perceber que ele não contou o valor duas vezes, como foi o caso de muitos alunos, e a regra que criou de dividir por dois tudo que fosse referente aos 8 quilômetros até a casa de Carla foi respeitada até o fim dos cálculos.

A relação: $\begin{matrix} 15 \rightarrow 35 \\ 8 \rightarrow x \end{matrix}$ foi proposta por **A**$_5$. Ele respondeu que Carla deveria pagar R$18,70 e Pedro o restante. Escreve ainda que se dividirmos R$35,00 por 2, R$17,50 para cada um já seria vantajoso.

O aluno **A**$_3$ escreveu que Carla pagaria *a* reais e Pedro *b* reais, sendo $a + b = 35$ e $\frac{a}{b} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$. E explicou: “Se dividirmos R$35,00 em 8 partes, o valor de *a* representa 3 partes e o valor de *b* representa 5 partes. Assim:

$$a = \frac{3}{8} \times 35 = 13{,}125$$
$$b = \frac{5}{8} \times 35 = 21{,}875$$ "

Concluiu que Carla pagaria aproximadamente R$13,00 e Pedro pagaria aproximadamente R$22,00.

Esses seis alunos parecem ter buscado estabelecer relações que envolvessem alguma proporção. Todos eles chegam a respostas satisfatórias do ponto de vista de duas exigências postas pelo problema: o fato de ser vantajoso para ambos e a soma das quantidades a serem pagas pelos dois não ultrapassar R$35,00. Como nos interessa discutir o todo, vimos que nem sempre as relações estabelecidas obedeceram as informações postas pelo enunciado. Tão importante quanto chegar à resposta satisfatória é compreender o problema e seguir caminhos que estejam dentro das possibilidades abertas pelas informações dadas no enunciado.

Pudemos perceber nessas resoluções que os alunos têm idéia de proporção, porcentagem, regra de três e que reconhecem situações nas quais é possível fazer uso dessas ferramentas.

Os cinco (5) alunos restantes apresentaram resoluções e respostas que não vimos como agrupar.

Um deles, **A**$_{13}$, calculou corretamente $P(8)=21$ e $P(15)=35$. Sem mais nenhum registro de cálculo, respondeu que “Karla deve pagar 25 e Carlos 32”. A nosso ver, esse aluno não entendeu a situação proposta e apenas retirou 3 reais do total que Pedro pagaria sozinho e adicionou 4 ao valor de Carla.

A$_{8}$ calculou *P(8) e P(7)* e respondeu que ambos deveriam pagar a metade R$ 20,00. Isso nos leva a pensar que o aluno somou: $P(8)+P(7)=21+19=40$. Neste caso, o aluno ‘pagou’ duas vezes a taxa fixa de 5 reais.

A$_{10}$ calculou $P(8)$ e $P(15)$ e escreveu que seria vantajoso para ambos se Pedro pagasse $\frac{2}{3}$ do valor total. Pensamos que o aluno escolheu uma maneira de resolver o problema sem muitas complicações, porque, de fato, essa divisão traz vantagem para Pedro e Carla.

A$_{15}$ calculou $P(23)=51$, $P(15)=35$ e $P(8)=21$. Somou 35 com 21 e escreveu que são 5 reais a mais. Estava comparando com o 51. Então sem mais nenhum registro respondeu que Pedro pagaria R$32,50 e Carla R$18,50. O aluno parece não ter entendido bem o propósito da situação, não entendeu que os dois pegando juntos o táxi andariam 15 quilômetros no total e não 23. Então propõe valores que sejam vantajosos para ambos, ou seja, para Pedro menor que 35 e para

Carla menor que 21, mas que somam 52 reais, valor a ser pago por 23 quilômetros.

O aluno **A**$_1$ declarou em entrevista que pensou em calcular o *x* para ver quanto ele percorria, mas sabe que o que fez está errado. A Figura 10 mostra a resolução do aluno.

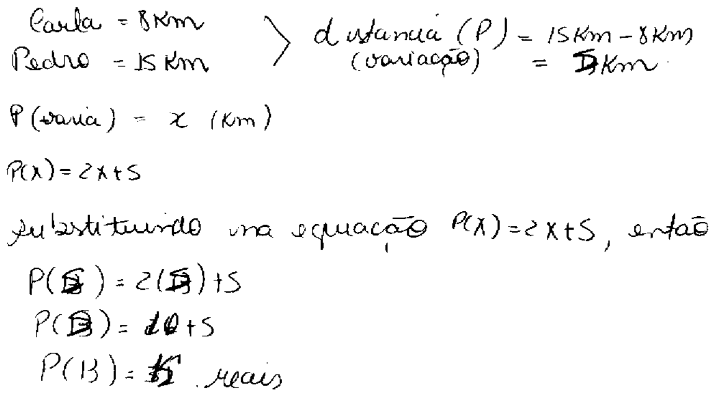


Figura 10: Resolução do aluno **A**1 na questão 6.

Parece-nos claro pela resposta dada pelo aluno na entrevista, que ele não conseguiu entender o que o problema estava propondo. Reconheceu a função, mas não soube o que fazer com ela para solucionar o problema. Este mesmo aluno foi o que disse se sentir pressionado em situações de avaliação. Porém, não é nosso propósito aqui discutir isso.

A$_{18}$ também parece não ter entendido muito bem o problema, pois calculou a função para 8 e 15 quilômetros e respondeu que Carla pagaria R$21,00, valor de P(8) e Pedro pagaria R$35,00, valor de P(15).

Com exceção desses dois últimos alunos, que parecem não ter conseguido interpretar o enunciado, todos os alunos resolveram a situação preocupando-se em cumprir a exigência de que Pedro e Carla tivessem alguma vantagem em dividir o táxi. Alguns se preocuparam a ponto de querer dividir proporcionalmente até a bandeirada, o que não podemos considerar como errado, pois, apesar de a bandeirada ser um valor fixo, que não varia com o total de quilômetros percorridos, o aluno fez essa divisão tentando ser o mais justo possível com Pedro e Carla.

Por ter sido considerada a questão mais difícil, poderíamos ter esperado mais dificuldades por parte dos alunos com essa questão. Provavelmente eles tenham sentido essas dificuldades e por isso apontaram-na como a questão mais difícil. Por outro lado, pensamos que a insegurança quanto ao resultado da questão é que os fez apontá-la como a mais difícil, ou seja, a incerteza do acerto. Como havia mais de uma possibilidade, os alunos se sentiram inseguros quanto à resposta e optaram por dizer que era a mais difícil, porque, se errassem, o erro já estaria justificado.

Quadro 11: Resumo das resoluções da questão 6

<table>
<tr><td rowspan="12">Escolhe um procedimento que resolve a questão (17)</td><td rowspan="4">Responde corretamente a questão (17)</td><td rowspan="2">Usa resolução tipo escolar</td><td>Corretamente</td><td>17</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Não usa resolução tipo escolar</td><td>Corretamente</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Responde Incorretamente a questão (0)</td><td rowspan="2">Usa resolução tipo escolar</td><td>Corretamente</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Não usa resolução tipo escolar</td><td>Corretamente</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Não responde a questão (0)</td><td rowspan="2">Usa resolução tipo escolar</td><td>Corretamente</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Não usa resolução tipo escolar</td><td>Corretamente</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Escolhe um procedimento que não resolve a questão (6)</td><td rowspan="4">Responde incorretamente a questão (6)</td><td rowspan="2">Usa resolução tipo escolar</td><td>Corretamente</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Não usa resolução tipo escolar</td><td>Corretamente</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Não responde a questão (0)</td><td rowspan="2"></td><td>Corretamente</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Corretamente</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Incorretamente</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Não apresenta registros do procedimento escolhido (1)</td><td rowspan="2">Responde a questão (1)</td><td></td><td>Corretamente</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Incorretamente</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Não responde a questão (0)</td><td></td><td></td><td>-</td></tr>
</table>

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao analisarmos a produção dos alunos da Licenciatura nesse estudo confirmamos a importância dessa ferramenta para o professor. Utilizar a avaliação para investigar os saberes dos alunos é uma das maneiras de acompanhar e participar da aprendizagem destes. Neste trabalho utilizamos uma forma de avaliação, a prova escrita, mas a diversificação das formas de avaliação faz com que o professor possa ter uma idéia global do fazer de seus alunos no processo de aprendizagem e contribuir para sua efetivação no sentido de poder auxiliá-los nessa tarefa.

Nosso estudo nos mostrou que os alunos lidam bem com questões abertas, ou seja, as dificuldades mostradas por eles nos registros escritos e nas entrevistas não estão diretamente relacionadas com o fato da questão não apresentar alternativas de respostas a serem assinaladas, mas na interpretação dos enunciados. Essa dificuldade aparece, por exemplo, no *item c* da Questão **5**: "*Construa um gráfico que relacione o número de passageiros e o preço que pagam para fazer essa viagem"*, os registros mostraram muitos gráficos que não respondiam à questão, como o do aluno $\mathbf{A}_{13}$ que relacionou o número de vôos com o número de passageiros. Neste caso, o enunciado sequer menciona que se deva relacionar o total de vôos.

Outra evidência de que os alunos têm dificuldade na interpretação dos enunciados é o *item b* da Questão **5**: "*Supondo que os aviões dessas companhias tenham a mesma lotação, quantos passageiros são transportados, em média, por dia em cada vôo?"* Neste enunciado, a 'pergunta' do problema é também muito clara e se apresenta de forma tradicional, ou seja, no final do enunciado. Ainda assim, muitos alunos deixaram registros na prova de que não entenderam a situação e utilizaram o número de vôos para fazer os cálculos. Assim, eles mostram saber o que é média, mas reforçam nossa consideração sobre a interpretação dos enunciados.

Na entrevista que fizemos com um dos alunos, conversamos muito sobre essa questão. Ao ser instigado a pensar no item, quanto mais lia o enunciado menos tinha certeza do que havia feito na prova e menor era sua noção do que poderia ser feito para resolver o problema. Ele copiou o enunciado e levou para casa para pensar e não tivemos mais contato.

Isso mostra que nós, professores, não temos trabalhado adequadamente a interpretação de enunciados com nossos alunos. Temos trabalhado os enunciados por meio de palavras-chave ou listas de 'problemas' de determinado conteúdo após sua explicação. Nos dois casos os alunos não precisam interpretar, basta procurar a(s) palavra(s)-chave ou 'jogar' com os dados, porque a estratégia usada para resolver uma lista inteira de problemas, muitas vezes, é a mesma, o que acaba tornando os alunos dependentes de 'macetes' e 'desabituados' a pensar sobre cada problema particularmente.

Essa questão das palavras-chave é bastante séria, pois os professores, na intenção de tornar seus alunos bons resolvedores de problemas, acabam por ensinar aos alunos essas chamadas 'dicas'. No entanto, ao contrário do que esperam, fazem com que os alunos não consigam ter sucesso nas resoluções de situações cujo enunciado não contém essas mesmas palavras. Na Questão **1** aconteceu exatamente isso. Dezessete dos vinte e quatro alunos pesquisados (70,8%) não hesitaram em utilizar 'dobro' como estratégia para a resolução do *item c*, apenas porque no enunciado apareceu a palavra dobro.

Uma boa ajuda para sanar essas dificuldades de interpretação pode ser, além de um acompanhamento constante do professor sobre as atividades dos alunos, o trabalho com problemas que possuam enunciados diversificados, que se apresentem de diferentes formas e que não apresentem palavras chaves ou dicas da estratégia a ser utilizada para sua resolução. Isso faz com que os alunos tenham que ler, interpretar e pensar nas estratégias que possam auxiliá-los a resolver a situação proposta.

O trabalho em grupo também é interessante, pois ajuda os alunos a trocarem idéias, argumentar com os colegas sobre suas idéias e/ou ser convencidos por eles, o que os leva a considerar outros pontos de vista e não somente o seu, e assim adquirir confiança na sua capacidade de resolver problemas.

Tão importante quanto interpretar corretamente as situações a serem resolvidas é a utilização correta dos procedimentos. Após a escolha da estratégia adequada é importante que os alunos saibam desenvolver com segurança os procedimentos escolhidos. Isso, porém, não é uma dificuldade para os alunos pesquisados, pois mesmo quando a estratégia escolhida não foi adequada, os algoritmos envolvidos nas resoluções foram efetuados com sucesso. Essa constatação revela que no treinamento da resolução de algoritmos temos feito um bom trabalho em sala de aula, já que os poucos erros na aplicação dos algoritmos relacionam-se especialmente à falta de atenção, como no caso do aluno que, na sua resposta à Questão **6** escreveu Karla no lugar de Carla, e Carlos no lugar de Pedro; outro aluno apresentou falta de atenção na resolução da multiplicação 3870×2, esqueceu-se de contar uma reserva e obteve 7640 enquanto o resultado correto seria 7740. A investigação (horizontal) na prova desse aluno permitiu que fizéssemos essa inferência, pois as outras operações de adição com reserva foram efetuadas corretamente.

Nos algoritmos encontramos ainda erros relacionados à 'tabuada' nas operações de divisão realizadas por um aluno. Nenhum erro no 'passo a passo' dos algoritmos foi encontrado.

Em resumo, podemos dizer que os erros cometidos pelos alunos foram causados especialmente por: falta de atenção no desenvolvimento de algoritmos; pela ausência ou incorreta interpretação dos enunciados e das respostas encontradas; pelo sentimento de nervosismo no momento da realização da prova. Esta última causa pudemos perceber nas entrevistas que fizemos, em especial com o aluno $\mathbf{A}_1$, que expressou com intensidade esse sentimento. Acreditamos que isso possa ter influenciado as resoluções mal sucedidas.

As diferentes naturezas desses erros exigem posturas diferentes do professor. Ele deve buscar encaminhamentos adequados para superação dos mesmos. Uma maneira de lidar com a dificuldade de interpretação dos enunciados, por exemplo, pode começar com a investigação, junto aos alunos, das razões que os levaram a escolher determinada estratégia, pois essa escolha passa pela leitura/interpretação do enunciado e também pelo leque de conhecimentos matemáticos que o aluno dispõe naquele momento. Dessa forma, qualquer que seja a natureza do erro, o aluno sempre será a melhor fonte de informação do professor e pode ser acessada por meio de observações, diálogos, registros escritos.

Assumir uma postura de constante investigação nas avaliações do aluno faz com que o professor tenha uma visão mais abrangente do processo de aprendizagem do aluno. Dessa forma é possível participar ativamente desse processo, agindo realmente como mediador entre o aluno e o conhecimento matemático, procurando a estratégia didática adequada para cada intervenção necessária.

Ainda sobre a escolha das estratégias, os alunos mostraram-se bastante decididos quanto à utilização das estratégias escolhidas, os procedimentos utilizados e as respostas dadas. Queremos dizer que não há registros, nas provas, de que algum aluno tenha utilizado uma estratégia e desistido dela para tentar resolver de outra forma, o mesmo aconteceu com os procedimentos e respostas. Observamos que os alunos parecem não ter o hábito de rever cálculos e questionar resultados e respostas encontradas, o que pode gerar uma falta de consciência de que podem estar fazendo uma interpretação incorreta dos enunciados.

A atitude de não questionar respostas parece revelar uma postura frente à Matemática de que esta é uma ciência exata e que por isso, o resultado do cálculo efetuado na resolução é a resposta correta da situação em estudo, sem necessidade de maiores verificações. O que nem sempre é verdade. No caso da Questão **6** por exemplo, aplicar o algoritmo, ou seja, calcular a função $P(x) = 2x + 5$ para os valores dados em quilômetros não é suficiente para chegar a uma resposta para o problema.

A Questão pode ser resolvida até mesmo com uma dose de 'bom senso' como responderam alguns alunos ao afirmarem que Carla e Pedro deveriam pagar a metade, cada um do valor da viagem. Ou seja, primeiro deram uma resposta ao problema, e só depois, fizeram os cálculos para saber numericamente a solução. Essa atitude, de não rever os procedimentos e respostas encontradas, pode também estar ligada ao fato de que os professores não incentivam seus alunos a fazerem essa validação e também, ao fato de que os alunos acreditam que os algoritmos são infalíveis, o que pode provocar uma falsa segurança e até certo comodismo.

Na Questão **2**, o aluno que resolveu corretamente o sistema e trocou os valores da saia e da blusa entre si poderia ter respondido corretamente se tivesse conferido os valores encontrados com as informações fornecidas pelo problema, ou seja, pelo trecho do enunciado que diz “a saia foi R$ 23,00 mais barato do que a blusa” poderia ter percebido o engano.

Nas séries iniciais os alunos aprendem a tirar a ‘prova real’ das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão e muitas vezes as utilizam para comprovar seus cálculos, mas conforme avançam nas séries os professores não levam isso adiante. O hábito de comprovar os cálculos e validar as respostas é de grande utilidade para evitar enganos e erros, além de despertar nos alunos um senso crítico em relação à resolução de problemas.

Na Questão **5**, no item b, que solicitava o cálculo da média de passageiros por vôo, um aluno chegou ao resultado de 1750 passageiros. A incoerência da resposta dada pelo aluno parece ‘gritar’ e, no entanto, ele não se dá conta dela. Uma leitura mais atenta ao enunciado poderia evidenciar a inadequação da resposta, já que o que foi pedido para calcular era a média por dia em cada vôo.

Questionamentos por parte dos colegas e do professor sobre a leitura e interpretação dos enunciados e sobre a resposta dada, colocando em dúvida o pensamento do aluno, fazem com que o aluno mesmo passe a questionar-se sobre suas decisões, leituras e interpretações de situações diversas, proporcionando maiores chances de sucesso na ‘arte de resolver problemas’.

Nas entrevistas que realizamos percebemos que, conversando com os alunos sobre suas resoluções, ou simplesmente perguntando a eles: “você poderia me explicar como pensou para resolver essa questão?” fizemos com que eles pensassem novamente na questão e reconhecessem o erro cometido. Outras vezes, o aluno sozinho, lendo a questão, já se dava conta de que algo estava incorreto e por si só conseguia perceber sua falha.

Esse tipo de 'diálogo' com os alunos vai propiciando que os erros tornem-se observáveis por eles e, com isso, contribui para sua superação. Por vezes o aluno sozinho não consegue chegar a sanar sua dificuldade e é preciso a intervenção do professor, por isso é importante que o professor esteja sempre atento ao processo de aprendizagem de seus alunos.

Dessa forma, o processo de validação da resolução, ou seja, a verificação dos resultados encontrados à luz do enunciado, o que muitas vezes passa por mais uma interpretação por parte do aluno é tão necessário quanto uma eficaz leitura e interpretação do enunciado, uma escolha de estratégias que resolvam o problema e, uma correta utilização dos procedimentos na sua resolução.

Convém ressaltar também a importância da interpretação, que o professor faz dos registros dos alunos nas provas escritas. Mais do que corrigir, o professor precisa tentar entender o que está por trás desses registros: que conhecimentos matemáticos o aluno mostra saber, quais conhecimentos ainda não sabe; que ferramentas matemáticas ele utiliza para resolver situações em sala de aula; como lida com as informações contidas no problema, enfim, o professor precisa fazer uma verdadeira investigação dos registros que servem como base para conversas sobra a Matemática com os alunos.

Por meio da análise que fizemos dos registros escritos foi possível perceber que os alunos mostram muito dos seus conhecimentos matemáticos quando resolvem as questões abertas, daí a importância de que todos os 'rascunhos' e cálculos feitos pelos alunos cheguem até o professor. Só assim ele pode ter a noção do todo percorrido pelo aluno na resolução de problemas.

Um resumo do que percebemos, no geral, sobre os saberes matemáticos dos alunos desta pesquisa:

►ler e retirar informações de gráficos simples de coluna e de tabelas;

►resolver as quatro operações fundamentais e algoritmos como de equações e sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas pelo método da substituição, calcular o valor da função de primeiro grau para valores dados;

►retirar as informações fornecidas pelos enunciados do problema;

►noções de construção de gráficos e sua utilização como estratégia para resolução de situações problemas;

► lidar com porcentagem, regra de três, idéia de média, dobro;

►escrever adequadamente uma resposta para o problema;

►buscar estratégias para lidar com problemas cuja apresentação se dá de forma não rotineira como a Questão **6**.

O interessante é que não só as dificuldades podem ser avaliadas numa prova escrita, mas também muito do que os alunos sabem e dos conhecimentos que estão em processo de construção.

Dessa forma, esperamos que este trabalho possa trazer contribuições para a prática docente, principalmente no que se refere às atitudes em relação à avaliação. É indispensável que a avaliação seja encarada por professores e alunos como uma constante prática investigativa, como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem, que permite ao professor regular o processo, adequando suas estratégias didáticas na tentativa de 'atingir' o maior número possível de alunos.

Consideramos igualmente importante o trabalho com os erros escolares cometidos pelos alunos. O abandono da aversão pela palavra *erro* deve ser também o abandono dos pré-conceitos e idéias de fracasso que sempre aparecem relacionadas a ela. A expressão do erro não é a do *não sabe*, mas do *ainda não sabe*. O primeiro passo para sua superação é o entendimento dos processos pelos quais passam os alunos ao estarem com a Matemática.

Neste momento chegamos, novamente, ao início de tudo. Um dos meios de conhecer os conhecimentos matemáticos, erros e dificuldades dos alunos é o que apontamos neste trabalho: os registros escritos. Como já dissemos, os registros não são o único meio, mas tentamos mostrar como são um rico material para ser explorado pelos professores. E acreditamos que esse seja uma nossa contribuição, à luz das nossas referências, ao trabalho que o professor realiza em sala de aula.

REFERÊNCIAS

BARDIN, Laurence. ***Análise de Conteúdo***. Luís Antero Neto e Augusto Pinheiro (trad.) Portugal: Edições 70, 1977.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. ***Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª. a 4ª. série)***: matemática. Brasília: MEC/SEF, 2001.

BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari Knoop. ***Investigação Qualitativa em Educação***. Portugal: Porto Editora, 1994.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Algumas Considerações Sobre Avaliação Educacional. **Estudos em Avaliação Educacional**. Fundação Carlos Chagas, n. 22, p. 155-177, jul-dez. 2000.

______. Sobre Avaliação em Matemática: uma reflexão. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n. 36, 255-264, dez. 2002.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de; CYRINO, Márcia Cristina da Costa Trindade; SOARES, Maria Tereza Carneiro. **Manual Para Correção Das Provas Com Questões Abertas De Matemática AVA/2002**. Curitiba: SEED/CAADI, 2004. No Prelo.

BUTTS, Thomas. Formulando Problemas Adequadamente. In: KRULIK, S; REYS, R.E.A. **Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. São Paulo: Atual, 1997. P. 33-48.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: Da teoria à prática. 4.ed. Campinas,S.P.: Papirus, 1998.

ESTEBAN, Maria Teresa. **O que sabe quem erra?** Reflexões sobre avaliação e fracasso escolar. 3.ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

FREITAS, Henrique Mello Rodrigues de; JANISSEK, Raquel. **Análise léxica e análise de conteúdo:**técnicas complementares, seqüenciais e recorrentes para exploração de dados qualitativos. Porto Alegre: Sphinx: Editora Sagra Luzzatto, 2000. p 37-62.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti; FERNANDES, Dea Nunes. **Concepções de Professores Formadores de Professores:** exposição e análise de seu sentido doutrinário. *QUADRANTE*, APM:Lisboa, Portugal, v. 11, n. 2, pp. 75-98, 2002.

HADJI, Charles. **A Avaliação, Regras do Jogo:** Das Intenções aos Instrumentos. 4. ed. Portugal: Porto,1994.

______. **Avaliação desmistificada**. Patrícia C. Ramos (trad.). Porto Alegre: ARTMED, 2001.

LACUEVA, Aurora. La evaluacioón em la escuela: una ayuda para seguir aprendiendo. **Revista da Faculdade de Educação**, São Paulo, v.23, n1-2, Jan./Dez.

1997. Disponível em http://www.scielo.br. Capturado em 05/04/2002.

LUCKESI, Cipriano Carlos. Prática escolar: do erro como fonte de castigo ao erro como fonte de virtude. In: **A construção do projeto de ensino e a avaliação**. Série Idéias,São Paulo: FDE, n. 8, 133-140, 1990.

_______. **Avaliação da aprendizagem escolar:** *estudos e proposições.* 12. ed. São Paulo: Cortez, 2002.

MARTINS, Maria Helena. **O que é leitura?** 7. ed. São Paulo: Editora Brasiliense, 1986.

MINAYO, M.C.S. **O desafio do conhecimento:** *pesquisa qualitativa em saúde*. 4 Ed., São Paulo: Hucitec, 1996.

N.C.T.M. – National Council of Teacher of Mathematics. **Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar. Lisboa:** Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 1991 (tradução portuguesa da edição original de 1989)

PINTO, Neuza Bertoni. **O erro como estratégia didática:** Estudo do erro no ensino da matemática elementar. Campinas, S.P: Papirus, 2000.

POLYA, George. Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. In: KRULIK, S; REYS, R.E.A. **Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. São Paulo: Atual, 1997. p. 1-3.

_____, **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

ROMÃO, José Eustáquio. **Avaliação dialógica:** desafios e perspectivas. São Paulo: Cortez, 1998.

SACRISTÁN, J. Gimeno. A avaliação no ensino. In: Sacristán, J. G; Gómez, A. I. P. **Compreender e transformar o ensino**.4. ed. Porto Alegre-RS: Artmed, 1998. cap. 10, p. 296-351.

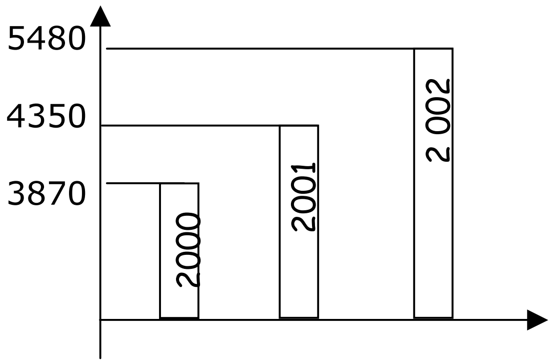
VASCONCELLOS, Maura Maria Morita. **Avaliação e ética.** Londrina: Ed. UEL, 2002.

ANEXOS

ANEXO A - A PROVA

1) O gráfico abaixo mostra a quantidade de pessoas, de uma determinada cidade, que viajam de férias. Os dados referem-se aos anos de 2000, 2001 e 2002.

Total de pessoas



Resolva as questões, usando os dados do gráfico acima.

d) Complete a tabela

Ano	Total de pessoas

e) Quantas pessoas viajaram a mais neste ano em relação ao ano passado?

c) Quantas pessoas viajarão de férias em 2003 se dobrar o número de pessoas que viajaram de férias em 2000?

2. Paguei R$ 75,00 por uma saia e uma blusa. A saia foi R$ 23,00 mais barata do que a blusa. Qual o preço da saia?

3. Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. Quantos telegramas entregou em cada dia?

4. Um encanador A cobra por cada serviço feito um valor fixo de R$60,00 mais R$18,00 por hora de trabalho. Um outro encanador B cobra um valor fixo de R$24,00 mais R$36,00 por hora de trabalho. Sendo t o tempo, medido em horas, para quais valores de t o encanador A fica mais barato que o B?

5. Quatro companhias aéreas fazem a ponte aérea São Paulo – Brasília. Segundo pesquisa realizada, 7000 passageiros diários fazem essa viagem.
O quadro abaixo mostra o preço dos bilhetes, a porcentagem de passageiros e o numero de vôos diários dessas companhias.

	Preços dos bilhetes ida e volta	Porcentagem de passageiros	*Vôos diários ida e volta*
TGK	336 reais	35,5 %	*32*
LDX	336 reais	26,7 %	*24*
PHD	288 reais	22,2 %	*20*
WSQ	*193 reais*	*15, 6 %*	*14*

De acordo com os dados acima, responda:

a) A empresa mais procurada nessa viagem, quantos passageiros transporta diariamente?

b) Supondo que os aviões dessas companhias tenham a mesma lotação, quantos passageiros são transportados, em media, por dia em cada vôo?

c) Construa um gráfico que relacione o numero de passageiros e o preço que pagam para fazer essa viagem.

6. Pedro e Carla saem do cinema e resolvem pegar juntos um táxi para ficar mais barato, já que Carla mora no caminho da casa de Pedro. Carla mora a 8 Km do cinema e Pedro a 15Km. Sabendo-se que o preço P (em reais) cobrado pelo táxi varia com a distancia percorrida x (em quilômetros), de acordo com a função $P(x) = 2x + 5$, quanto cada um deve pagar de modo que seja vantajoso para ambos?

APÊNDICES

APÊNDICE A - FOLHA DE IDENTIFICAÇÃO

Nome...

Idade : ....anos e ....meses　　　　Sexo: □ feminino　□ masculino

Telefone: __________________ e-mail: ___________________________________

Aluno(a) da _____série da Licenciatura em Matemática da UEL

Informações Profissionais:

a) Experiência: *(assinale quantas alternativas forem necessárias)*

Já lecionou para:

	Educação Infantil
	1ª a 4ª series
	5ª a 8ª series
	Ensino Médio
	Cursinho pré- vestibular
	Outros. Qual?

Atualmente trabalha com:

	Educação Infantil
	1ª a 4ª series
	5ª a 8ª series
	Ensino Médio
	Cursinho pré- vestibular
	Outros. Em que ?

CURSOU O 1º. GRAU EM　( ) ESCOLA PÚBLICA
( ) ESCOLA PARTICULAR
( ) PARTE EM ESCOLA PÚBLICA E PARTE EM ESCOLA PARTICULAR

CURSOU O 2º. GRAU EM　( ) ESCOLA PÚBLICA
( ) ESCOLA PARTICULAR
( ) PARTE EM ESCOLA PÚBLICA E PARTE EM ESCOLA PARTICULAR

FAZ O CURSO NA UEL　( ) DESDE O 1º. ANO
( ) VIM TRANSFERIDO DE........................

INSTRUÇÕES

Leia cuidadosamente cada questão.
Use apenas caneta para resolver cada questão.
Resolva todas as questões da prova.
Você deve resolver todas as questões da forma mais completa possível, fazendo cálculos, desenhos, esquemas, ou explicando, com suas palavras o que fez para resolver cada questão.
Não apague os cálculos, os esquemas, os desenhos que utilizar na resolução da questão.
Se perceber que resolveu algo errado, passe um traço por cima e resolva corretamente.
Você pode utilizar o verso da folha se necessário.
Confira as resoluções antes de entregar a prova.

APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO SOBRE AS IMPRESSÕES SOBRE A PROVA

1) O que você achou dessa prova?
(A) Muito fácil.
(B) Fácil.
(C) Mediana.
(D) Difícil.
(E) Muito difícil.

2) O que você achou do tamanho da prova ?
(A) Muito longa.
(B) Longa.
(C) Adequada.
(D) Curta.
(E) Muito curta.

3) Para você, o tempo foi
(A) mais que o necessário para fazer a prova,
(B) suficiente para fazer a prova.
(C) faltou tempo para fazer a prova.

4) A questão que você achou mais fácil foi a
(1ª)
(2ª)
(3ª)
(4ª)
(5ª)
(6ª)
porque

5) A questão que você achou mais difícil foi a
(1ª)
(2ª)
(3ª)
(4ª)
(5ª)
(6ª)
porque

6) Se quiser faça algum comentário

APÊNDICE C – DESCRIÇÃO DAS RESOLUÇÕES DAS QUESTÕES

ALUNOS	CRÉDITO	RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 1 – item a)
A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16, A17, A18, A19, A20, A21, A22, A23, A24, A5, A6, A7, A1, A3, A4, A2		Completa corretamente a tabela. Transcreve corretamente os dados. Completa em ordem crescente.

ALUNOS	CRÉDITO	RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 1 – item b)
A9, A10, A11, A14, A15, A16, A17, A19, A21, A22, A23, A24, A5, A6, A2		Escolhe a subtração e resolve corretamente a operação. Responde corretamente que no ano de 2002 viajaram 1130 pessoas a mais que no ano anterior.
A8, A12, A20, A7		Escolhe a subtração e resolve corretamente a operação. Responde corretamente: "1130 pessoas".
A13		Escolhe e resolve corretamente a subtração 5480-4350. Não escreve nem aponta a resposta.
A18		Escolhe a subtração, porém retira incorretamente os dados do gráfico, utilizando-se dos dados referentes aos anos de 2001 e 2000. Responde incorretamente: 480 pessoas.
A4		Apenas responde 1130 pessoas.

ALUNOS	CRÉDITO	RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 1 – item c)
A11, A15, A16, A17, A20, A21, A23, A5, A6, A7, A3, A2.		Multiplica corretamente 3870 por 2. Responde corretamente: 7740 pessoas.
A10,		Escolhe a multiplicação e resolve corretamente o algoritmo. Responde corretamente: 7740 pessoas. Complementa escrevendo que esta solução caberia se o número de pessoas que viajarão em 2003 fosse o dobro de 2000. Monta uma regra de três, onde o número de pessoas de 2000 equivale a 100% e 480 (diferença entre os anos de 2001 e 2000) equivale a x. Obtém 12,4%. Outra regra de três onde 4350 equivale a 100% e 1130 (diferença entre os anos de 2002 e 2001) equivale a x. Obtém 23,6%. Conclui que esses percentuais são os de aumento de um ano para outro e que "com o novo número de 200, e a média do aumento calcula-se o n.º de 2003".
A8		Faz a multiplicação do total de pessoas de 200 por 2 (3870x2); calcula a diferença entre as pessoas de 2001 e 2000 (4350-3870); pega o resultado já calculado na letra b) que é das pessoas de 2002 e 2001 e multiplica por dois (1130x2). Soma todos os resultados das multiplicações por dois (7940+960+2260) Responde 11160 pessoas.
A9		Resolve as seguintes operações corretamente: 4350-3870; 1130:480; 48x2; 48x3 e não responde a questão.
A12, A22		Escolhe a multiplicação e resolve incorretamente. Responde incorretamente 7640 pessoas.
A13		Escreve corretamente o dobro do número de pessoas dos anos de 2000, 2001, 2002. Faz corretamente uma subtração (4350-3870). Não responde.
A14		Calcula o cobro por meio da multiplicação por dois corretamente. Responde que se o número de viajantes de 2003 for o dobro do número de pessoas de 2000, serão 7740 pessoas.
A18		Calcula o dobro do número de pessoas de 2000 corretamente, obtendo 7740. Adiciona incorretamente a esse resultado a diferença entre o número de pessoas dos anos de 2001 e 2000, calculado no item b), obtendo 9220. Adiciona incorretamente a esse resultado a diferença do número de pessoas entre os anos de 2001 e 2002, obtendo 10450. Não responde.
A19		Escolhe a adição de parcelas iguais. Resolve e responde corretamente.
A24		Calcula corretamente o dobro do número de pessoas dos anos de 2000, 2001 e 2002. Calcula o número de pessoas que viajarão em 2003 calculando corretamente o dobro de 6525, número que foi obtido pela adição correta das parcelas 5480+1045. O número 1045 foi obtido somando 1610 com 480 e depois dividindo por 2. O número 1610 é a diferença entre 5480 e 3870 (os anos de 2002 e 2000), e o número 480 é a diferença entre 4350 e 3870 (os anos de 2001 e 2000). Responde 13050 pessoas.
A1		Calcula as diferenças entre o número de pessoas de 2000 em relação a 2001, de 2001 em relação a 2002 e de 2000 em relação a 2002. Calcula o dobro do número de pessoas de 2000, mostrando as duas maneiras de calcular, pela multiplicação e pela soma de parcelas iguais. Responde que viajarão 7740 pessoas.
A4		Apenas responde incorretamente 5480 pessoas

ALUNOS	CRÉDITO	RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2
A12, A14	2	Escreve um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas que relaciona corretamente os dados do problema. Resolve corretamente por substituição obtendo o valor da saia.
A7	2	Relaciona corretamente as informações do problema usando apenas uma incógnita. Monta e resolve corretamente a equação obtendo o valor da blusa. Diminui 23 desse valor e obtém o valor da saia. Responde corretamente.
A9	2	Escreve um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas que relaciona corretamente os dados do problema. Resolve pelo método da substituição corretamente obtendo o valor da saia. Tira a prova real. Escreve uma resposta corretamente.
A8, A19	2	Escreve um sistema do primeiro grau com duas incógnitas e resolve corretamente pelo método da adição e encontra o valor da blusa. Substitui o valor encontrado numa das equações e encontra o valor da saia. Responde corretamente.
A10, A15, A17, A21, A22, A6, A1, A3, A4	2	Escreve um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas que relaciona os dados do problema e resolve corretamente pelo método da substituição obtendo o valor da blusa. Substitui numa das equações e obtém o valor da saia corretamente. Responde corretamente.
A11	1	Escreve um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas que relaciona corretamente os dados do problema. Resolve pelo método da substituição corretamente obtendo o valor da blusa. Escreve a resposta incorretamente, assumindo o valor encontrado como sendo da saia. Tira a prova real abaixo.
A14	1	Escreve um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas que relaciona corretamente os dados do problema. Resolve pelo método da substituição obtendo o valor incorreto da blusa. Substitui corretamente o valor encontrado obtendo o valor incorreto da saia.
A16	2	Relaciona corretamente as informações do problema usando apenas uma incógnita. Monta e resolve corretamente a equação obtendo o valor da blusa. Substitui corretamente numa das equações e encontra o valor da saia. Tira a prova real e responde corretamente.
A18	1	Escreve um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas que relaciona corretamente os dados do problema. Resolve pelo método da substituição corretamente obtendo o valor da saia. Escreve a resposta incorretamente, assumindo o valor encontrado como sendo da blusa.
A20	2	Subtrai 23 de 75 corretamente obtendo 52. Divide esse valor por 2 corretamente obtendo o valor da saia. Responde corretamente.
A23	2	Escreve um sistema do primeiro grau com duas incógnitas e resolve corretamente pelo método da adição e encontra o valor da saia. Substitui o valor encontrado numa das equações e encontra o valor da blusa. Responde corretamente.
A24	1	Escreve uma equação com duas incógnitas que não representa a situação. Abaixo escreve uma equação com uma incógnita que representa a saia. Resolve corretamente e obtém 49. Diminui 23 desse valor obtendo corretamente 26. Responde corretamente.
A5	2	Não apresenta nenhum cálculo, apenas escreve que subtraindo 23 de 75 obtemos 52 e dividindo esse valor por dois obtemos 26 que é o valor da saia porque somado com 23 dá 49 que é o valor da blusa e que somando 26 com 49, temos os 75.
A2	2	Escreve um sistema do primeiro grau com duas incógnitas e resolve corretamente pelo método da adição e encontra o valor da saia. Responde corretamente.

ALUNOS	CRÉDITO	RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 3
A11, A12,A15, A16, A22, A23, A24, A6, A7, A3	2	Escreve uma equação do primeiro grau que relaciona corretamente os dados do problema. Resolve corretamente a equação obtendo o valor de telegramas a serem entregues no primeiro dia. Responde corretamente.
A19, A21	2	Resolve utilizando tentativa e erro. Compões as seqüências corretamente até encontrar a que satisfaz os dados do problema. Responde corretamente.
A8, A2	1	Escreve uma equação do primeiro grau que relaciona corretamente os dados do problema. Resolve incorretamente. Responde incorretamente.
A9	9	Não resolve.
A10	2	Escreve a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, substitui valores mas abandona. Resolve por tentativa e erro corretamente.
A13	1	Escreve uma equação do primeiro grau que relaciona corretamente os dados do problema. Resolve corretamente a equação obtendo o valor de telegramas a serem entregues no primeiro dia. Escreve a expressão numérica:6+6+7+6+14+6+21+6+27=100. Não responde a questão.
A14	2	Escreve uma equação do primeiro grau que relaciona os dados do problema e resolve corretamente. Responde corretamente. Resolve também utilizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética corretamente. Responde corretamente.
A17	2	Escreve que é uma progressão aritmética de razão sete cuja soma dos cinco primeiros termos é 100. Escreve uma equação do primeiro grau e resolve corretamente. Responde corretamente.
A18, A20	2	Faz a soma das quantidades que serão entregues a mais a cada dia corretamente obtendo 70. Diminui esse valor de 100 corretamente obtendo 30. Divide esse valor por 5 corretamente obtendo 6. Responde corretamente.
A5	2	Escreve que é uma P.A. de razão 7 e soma dos termos 100, mas como não lembra a fórmula, fez por tentativa e erro. Responde corretamente.
A1	1	Escreve uma equação do primeiro grau que relaciona corretamente os dados do problema. Resolve incorretamente. Não responde.
A4	2	Divide 100 por 5 corretamente obtendo 20. Escreve ± 20. Subtrai 7 de 20,obtendo 13, subtrai 7 novamente e obtém 6. Responde corretamente.

ALUNOS	CRÉDITO	RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 4
A15, A25, A27	2	Escreve uma equação que relaciona os valores cobrados pelo encanador A e outra equação para os valores do encanador B. Escreve uma desigualdade entre as duas equações e resolve corretamente, obtendo t>2. Responde t >2.
A8, A14	2	Escreve as funções que representam o valor cobrado pelos encanadores e resolve a igualdade f(A) = f(B) corretamente. Responde corretamente para t>2.
A9	2	Escreve as funções que representam os valores cobrados pelos encanadores. Traça o gráfico das duas funções e responde corretamente.
A10	2	Escreve as funções que representam os calores cobrados pelos encanadores. Calcula o valor para 1, 4 e 3 horas. Responde corretamente.
A11	2	Escreve as funções que representam o valor cobrado pelos encanadores e resolve a igualdade f(A) = f(B) corretamente. Calcula o valor cobrado pelos encanadores para 1,2,3 e 4 horas. Traça o gráfico das duas funções e responde corretamente.
A12, A4	2	Escreve uma equação que relaciona os valores cobrados pelo encanador A e outra equação para os valores do encanador B. Iguala as duas equações e resolve corretamente a igualdade, obtendo t=2. Responde corretamente para t>2.
A13	1	Escreve expressões que representam o valor cobrado pelos encanadores e calcula o valor cobrado pelos encanadores para 1,2, ½, 4 e 3 horas. Erra ao calcular para 2 horas e para 3 horas. Responde incorretamente que A fica mais barato para valores maiores que 3.
A16	2	Escreve uma equação que relaciona os valores cobrados pelo encanador A e outra equação para os valores do encanador B. Escreve uma desigualdade entre as duas equações e resolve corretamente a desigualdade, obtendo t>2. Testa para o valor de 3 horas. Responde t >2.
A17	2	Escreve duas equações que representam o preço cobrado pelos encanadores (60+18t=P e 24+35t=P). Monta um sistema de equações e resolve corretamente. Responde corretamente para t>2.
A18	1	Calcula corretamente os valores cobrados pelos encanadores para 1, 2, 3, 4 e 5 horas de trabalho. Responde incorretamente para t<3h.
A19	2	Escreve as equações que representam os valores cobrados pelos encanadores. Calcula corretamente para 5, 4, 6, 1 e 2 horas. Responde corretamente para t>2.
A20	2	Não apresenta nenhum cálculo. Resolve a questão por meio de gráfico. Responde corretamente para valores acima de 2 horas.
A21	2	Apresenta os cálculos corretos para 1, 2 e 3 horas de trabalho de cada encanador. Responde corretamente t ≥3.
A22	2	Escreve as expressões que relacionam os valores cobrados pelos encanadores. Calcula os valores cobrados para 1, 2 e 3 horas de trabalho corretamente. Responde que a partir de três horas de serviço o encanador A ficará mais barato.
A23	2	Escreve as expressões que representam os valores cobrados pelos encanadores. Resolve a desigualdade entre essas expressões e responde corretamente para t >2. Abaixo, testa para os valores de 1, 2 e 3 horas.
A24	2	Escreve as expressões que relacionam os valores cobrados pelos encanadores. Calcula os valores cobrados para 1, 2 , 3 e 4 horas de trabalho corretamente. Responde que a partir de três horas de serviço ou seja t≥3 o encanador A ficará mais barato.
A6	1	Escreve as expressões que representam os valores cobrados pelos encanadores. Calcula para os valores de 1, 2 e 3 horas corretamente. Traça o gráfico e responde incorretamente para t=3 horas.
A1	2	Escreve as funções de cada encanador. Calcula para 0, 1, 2, 3 e 4 horas detrabalho. Responde que "o encanador A fica mais barato a partir de t>2 ou t ≥3. Quando t=3 ou acima de 3".
A3	2	Escreve as funções dos dois encanadores. Resolve uma desigualdade entre elas corretamente . Responde corretamente t>2. Coloca como exemplo t=3 e calcula.
A2	1	Não apresenta nenhum cálculo. Resolve a questão por meio de gráfico. Responde incorretamente para valores de t>3.

ALUNOS	CRÉDITO	RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 5 – item a)
A12, A14, A16, A18, A20, A21, A22, A5, A6, A2	2	Escreve a porcentagem usando regra de três na qual, o número de passageiros diários equivale a 100% e 35,5% equivale a x. Calcula corretamente e obtém o número de passageiros da empresa em questão.
A8, A9	2	Multiplica o número total de passageiros diários por 35,5 e divide por 100 corretamente, obtendo o número de passageiros da empresa em questão. Responde corretamente.
A10, A24, A7	2	Multiplica 7000 por 35,5 corretamente. Risca os zeros do resultado e coloca a vírgula. Responde corretamente.
A11	2	Representa a divisão de 35,5 por 100 em forma de fração. Multiplica numerador e denominador por 10. Divide 7000 por 1000 e multiplica o resultado por 7 corretamente. Responde corretamente.
A13	0	Apenas responde 32 passageiros.
A15, A17, A23, A1, A3	2	Divide 7000 por 100 e multiplica o resultado por 35,5 corretamente. Responde corretamente.
A19	2	Divide 35,5 por 100 e multiplica o resultado por 7000 corretamente. Responde corretamente.
A4	2	Multiplica 35,5 por 7 corretamente. Responde corretamente.

ALUNOS	CRÉDITO	RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 5 – item b)
A8, A19, A24	0	Divide corretamente o número total de passageiros diários por quatro e responde incorretamente 1750 passageiros.
A12, A16, A22, A5, A27, A3, A2	2	Divide corretamente o número total de passageiros diários pelo número de vôos diários. Responde corretamente.
A10, A14, A17	2	Calcula corretamente o número de passageiros transportados por cada uma das empresas aéreas de acordo com as porcentagens da tabela. Divide corretamente cada resultado encontrado pelo respectivo número de vôos de cada empresa. Responde corretamente.
A9	0	Divide o número de vôos pela metade e somou esses resultados (16+12+10+7) corretamente e divide o resultado por 4. Responde incorretamente 11,25 passageiros.
A11	0	Calcula o número de passageiros de cada empresa. Divide cada valor encontrado pela metade do número de vôos que aparece na tabela. Responde para cada empresa um valor, todos próximos a 155 passageiros.
A13	0	Adiciona corretamente os vôos diários. Divide corretamente o número encontrado por 8. Responde incorretamente 11,2.
A15, A18, A20, A6, A4	2	Divide o número de passageiros da empresa TGK pelo respectivo número de vôos corretamente. Responde corretamente.
A21	0	Escreve que se as 4 companhias têm a mesma lotação, cada uma fará o vôo com 25% dos passageiros. Calcula corretamente uma regra de três na qual 7000 equivale a 100% e 25% equivale a x. Responde incorretamente 1750 passageiros.
A23	0	Divide incorretamente 2485 por 74. Responde incorretamente.
A1	0	Faz a soma do número de vôos diários e divide por 4 corretamente. Escreve: “|Neste exercício acho que tem que somar todos os números de passageiros e fazer a média”.

ALUNOS	CRÉDITO	RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 5 – item c)
A7	2	Constrói um gráfico de pontos com os preços dos bilhetes no eixo horizontal e no vertical o número de passageiros. Soma o número de passageiros das empresas cujo preço do bilhete é o mesmo.
A4, A11, A3	1	Constrói um gráfico de coluna cujo eixo horizontal contém o número de passageiros de cada empresa. No eixo vertical estão os preços dos bilhetes de cada empresa.
A22	1	Constrói um gráfico com pontos, no qual o preço dos bilhetes está marcado no eixo horizontal e o número de passageiros, por empresa, está no eixo vertical.
A8	9	Não resolve e não responde
A9, A16, A21, A22, A1	1	Constrói um gráfico com pontos, no qual o preço dos bilhetes está marcado no eixo vertical e o número de passageiros, por empresa, está no eixo horizontal.
A10, A14, A5	1	Constrói um gráfico com pontos, no qual o preço dos bilhetes está marcado no eixo vertical e o número de passageiros, está no eixo horizontal.
A12	1	Constrói um gráfico de coluna cujo eixo horizontal contém o número de passageiros de cada empresa. No eixo vertical estão os preços dos bilhetes de cada empresa. Marca o número 336 em dois lugares no eixo vertical.
A13	0	Constrói um gráfico de linhas onde estão no eixo horizontal o número de vôos (10, 20, 30) e no eixo vertical a porcentagem de passageiros.
A15	0	Constrói um gráfico de linha onde relaciona o número de passageiros com o gasto para fazer a viagem se o preço do bilhete fosse 336 reais.
A17, A20	1	Constrói um gráfico de colunas relacionando no eixo horizontal o número de passageiros, adicionando os que pagam o mesmo valor pelo bilhete e no eixo vertical o preço dos bilhetes.
A18	0	Constrói um gráfico de linha relacionando no eixo horizontal o número de passageiros de cada empresa e no eixo vertical o preço pago pelos bilhetes.
A19	0	Constrói um gráfico de linha relacionando no eixo horizontal a porcentagem de passageiros de cada empresa e no eixo vertical o preço pago pelos bilhetes.
A24	1	Constrói um gráfico de pontos no qual estão relacionado no eixo horizontal as porcentagens de passageiros de cada empresa e no eixo vertical o preço dos bilhetes.
A6	0	Constrói um gráfico de linha relacionando no eixo horizontal o preço dos bilhetes e no eixo vertical o número de passageiros.
A4	0	Traça um gráfico semelhante a uma reta que se inicia num ponto de ordenada 336 e cuja abscissa não é marcada.
A2	2	Constrói um gráfico de colunas relacionando no eixo horizontal o preço dos bilhetes e no eixo vertical o número de passageiros.

ALUNOS	CRÉDITO	RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 6
A16, A22		Escreve que Carla e Pedro devem dividir o valor correspondente aos 8 quilômetros que andam juntos, e Pedro deve pagar ainda o retante até sua casa. Além disso devem dividir os cinco reais fixos. Responde que Carla deve pagar R$10,50 e Pedro R$24,50
A8		Faz um esqueminha para representar a situação. Calcula a função para 8 e 7. Responde que deve-se aproveitar o caminho para a casa de Pedro e que seria vantajoso que cada um pagasse a metade, R$ 20,00 para cada um.
A9		Faz um esqueminha para representar a situação. Calcula a função para 8 e 15 corretamente. Divide 21 por 2 corretamente. Subtrai 21 de 35 e adiciona 10,5 ao resultado corretamente. Responde corretamente que Carla deve pagar 10,50 e Pedro 24,5
A10		Calcula a fdunçaõ para os valores 8 e 15. Responde que Pedro deveria pagar 2/3 do valor.
A11		Calcula a função para os valores 8 e 15corretamente . Escreve a função novamente como sendo x_1+5/2 e calcula corretamente para o valor 8. Escreve novamente a função como sendo (x_1+5/2) + 2x_2 e calcula corretamente para x_1=8 e x_2=7. Responde que Carla deve pagar 10,5 e Pedro 24,5.
A12		Escreve os valores a serem pagos por Carla e Pedro se fossem sozinhos. Divide 35 por 2 corretmante e responde que se eles dividissem a conta total seria vantajoso para ambos.
A13		Calcula a função para os valores 8 e 15. Responde incorretamente que Karla deve pagar 25 e Carlos 32.
A14		Calcula a função para os valores 8 e 15. Resolve uma regra de três na qual 23/8=35/x. Calcula corretamente. Resolve outra regra de três na qual 23/15=35/x. Responde que seria vantajoso que Pedro pagasse 22,8 e Carla 12,20.
A15		Calcula a função para os valores 23, 8 e 15. Adiciona 35+21 corretamente e escreve 5 reais a mais. Responde que Pedro deveria pagar 32,5 e Carla 18,50.
A17		Calcula a fiunção para 15. Escreve que para que seja vantajoso Carla deve paga 35. 8/23≈12,16 e Pedro 35. 15/23≈22,84, isso porque se o táxi levasse cada um separadamente andaria 23 Km.
A18		Calcula a função para os valores 8 e 15. Responde incorretamente que Carla deveria pagar R$21,00 e Pedro R$35,00.
A19, A21, A23,A24		Calcula a função para os valores 8 e 15. Responde corretamente que cada um deveria pagar R$17,50.
A20		Apenas responde corretamente: Carla R$10,50 e Pedro R$24,50
A5		Escreve que dividindo o valor total por dois, já seria vantajoso. Mas propõe uma proporção: 15/8=35/x. Resolve corretamente. Responde que Carla pagaria 18,66 e Pedro pagaria a diferença, que seria também vantajoso.

A6		Calcula a função para os valores 8 e 15. Divide 35 por 15 incorretamente obtendo 2,44. Faz mais alguns cálculos:2,44x7=17,08; 35-17,08=17,92; 2,44x4=9,76; 17,08+9,76=26,84; 35-26,84=8,16. Responde que Carla deveria pagar R$10,00 e Pedro R$25,00.
A7		Calcula a função para os valores 8 e 15. Divide 35 por 15 corretamente obtendo 2,33. Multiplica 2,33 por 8 corretamente encontrando 18,64. Subtrai 18,64 de 35 corretamente. Responde que Pedro pagaria 18,64 e Carla pagaria 16,36.
A1		Escreve que a diferença entre as distâncias é de 5 Km. Calcula a função para o valor 5 corretamente obtendo 15 reais. Não responde.
A3		Encontra uma proporção: a/b=21/35/3/5, na qual a é o valor que Carla deve pagar e b o valor que Pedro deve pagar. Supõe dividir 35 em 8 partes. Calcula a=3/8x35= 13,125 e b=5/8x35=21,875. Responde que Carla e Pedro devem pagar aproximadamente R$13,00 e R$22,00 respectivamente.
A4		Calcula a função para os valores 8 e 15. Resolve a regra de três: 15/8=100/x, obtendo 54%. Multiplica 54% por35 obtendo corretamente 18,90. Divide esse valor por 2 obtendo 9,45. Responde que Carla deve pagar 9,45 e Pedro 25,55.
A2		Faz alguns cálculos como 15x=40 x=1,33. Responde que Pedro deve pagar R$25,77 e Carla R$9,34.