



**UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA**

FRANCIELE PEREGO

O QUE A PRODUÇÃO ESCRITA PODE REVELAR?

Uma análise de questões de matemática

Londrina

2006

FRANCIELE PEREGO

O QUE A PRODUÇÃO ESCRITA PODE REVELAR?

Uma análise de questões de matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Prof. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco.

LONDRINA

2006

**CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO ELABORADA PELA DIVISÃO DE PROCESSOS TÉCNICOS
DA BIBLIOTECA CENTRAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA.**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

P435q Perego, Franciele.

O que a produção escrita pode revelar ? : uma análise de questões de matemática / Franciele Perego. – Londrina, 2006.

126f. : il.

Orientadora: Regina Luzia Corio de Buriasco.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2006.

Bibliografia: f.103-105.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2 Matemática – Problemas, exercícios, etc. – Teses. 3. Matemática – Avaliação – Teses. 4. Matemática – Produção escrita – Teses. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de. II. Universidade Estadual de Londrina. III. Título.

FRANCIELE PEREGO

O QUE A PRODUÇÃO ESCRITA PODE REVELAR?

Uma análise de questões de matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.
Orientadora: Prof. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dra. Helena Noronha Cury
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

Prof. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco (Orient.)
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, de de 2006

MEUS AGRADECIMENTOS

A Deus, que ilumina meu caminho a todo o instante.

Aos meus pais pela educação e pelo incentivo.

A Regina, muito mais que minha orientadora, uma pessoa especial que muito me ensinou e mais do que isso, me ajudou a alcançar este sonho.

A Sibéle, minha irmã, que esteve sempre ao meu lado, me ajudando.

Ao Diogo, pela compreensão e paciência que sempre teve comigo.

A Adriana Malgarezzi, Secretária Municipal de Educação de Medianeira – PR, que permitiu minha ausência no trabalho para que eu pudesse cursar as aulas do Mestrado.

A Rosimeri de Moraes, então Diretora da Escola Municipal João Guimarães Rosa, pelo auxílio e incentivo.

Às colegas Aparecida Machado, Marlúcia Modrak, Nair Camilo e Sandra de Abreu, que me ajudaram muito a crescer profissionalmente;

Às professoras da minha banca de qualificação e à professora Tiemi Matsuo por todas as contribuições que deram a este trabalho;

A todas as pessoas com quem convivo ou convivi e que sei que torceram pela minha vitória.

RESUMO

Este trabalho mostra um estudo da produção escrita em Matemática contida em uma amostra de 53 Provas de Questões Abertas da Avaliação Estadual do Rendimento Escolar do Paraná – AVA/2002, resolvidas por alunos da 8ª série do Ensino Fundamental. Esta investigação de cunho predominantemente qualitativo procura, com base na interpretação do que foi registrado, analisar não apenas o acerto e o erro, mas principalmente os caminhos percorridos por eles, a estratégia escolhida para resolver cada questão. Apresenta os diferentes procedimentos adotados pelos alunos na resolução das quatro questões da prova, a pouca presença de erros nos algoritmos das operações. Dentre outros, o estudo aponta como relevante que a dificuldade maior parece estar na interpretação dos enunciados que gera a escolha de uma estratégia capaz de resolver e responder a questão. Conclui que os resultados apresentados pelos alunos podem ser reflexo do trabalho que vem sendo desenvolvido nas salas de aula, ou seja, eles parecem não estar acostumados com questões que exigem mais do que um simples cálculo com a utilização de algum algoritmo.

Palavras-chave: Educação Matemática; produção escrita em matemática; avaliação escolar em matemática; acertos e erros.

ABSTRACT

This work discusses the results of a study on the Math written production of 8th graders (Middle School) in a sample of 53 tests with open questions as part of the Paraná State School Performance Assessment – AVA/22002. The objective of this qualitative investigation was to analyze, based on the interpretation of the data, not only the number of correct and incorrect answers, but also, and most importantly, the quality of their written production, the processes used, and the strategies chosen for the solution of the problems. It presents the different strategies used by the participants in solving four test questions, and the presence of few mistakes in the operations algorithms. Among other things, this study points out as relevant the students' difficulties in interpreting the instructions which could help them choose some correct strategy to solve the problems. Results show that this difficulty may reflect the type of teaching that has been carried out in the classroom, i. e., they are not used to dealing with questions which demand more than a simple calculation with some algorithm.

Key-words: Mathematics Education; Math written registers; Math school assessment; correct and incorrect answers.

LISTA DE QUADROS

Tabela 1- Quantidade de Provas que compõe a amostra por meso região	30
Tabela 2- Classificação das resoluções da Questão 1 quanto ao desempenho ...	33
Quadro Resumo 1 – Provas que não apresentam o cálculo do custo dos encanadores para $t > 1$	34
Quadro resumo 2 – Provas em que há registro da resposta sem desenvolvimento de alguma estratégia	37
Quadro Resumo 3 – Provas em que há resolução de uma ou mais subtrações com os dados do enunciado	38
Quadro Resumo 4 – Provas em que há registro do cálculo dos custos dos encanadores, no máximo até a terceira hora	39
Quadro Resumo 5 – Provas em que há registro de funções para calcular os custos dos encanadores	42
Quadro Resumo 6 – Provas em que há registro do cálculo dos custos dos encanadores, no máximo até a sexta hora	43
Tabela 3- Classificação das resoluções da questão 2 quanto ao desempenho	46
Quadro Resumo 7- Provas em que a resolução inicia-se pelo cálculo $75 - 23$	47
Quadro Resumo 8- Provas em que a resolução inicia-se pelo cálculo $75 : 2$	50
Tabela 4- Classificação das resoluções da Questão 3 quanto ao desempenho ...	56
Quadro Resumo 9- Provas que apresentam a divisão $100 : 5$ na resolução da Questão 3	57
Quadro Resumo 10- Provas em que o registro mostra resolução por tentativa e erro	59
Quadro Resumo 11- Provas em que há registro da montagem e resolução de uma equação	63
Quadro Resumo 12- Provas em que não há registro de estratégias de resolução, apenas a resposta	65
Tabela 5- Classificação das resoluções do item ‘a’ quanto ao desempenho	69
Quadro Resumo 13- Provas que, na resolução do item ‘a’, apresentam apenas a resposta	69
Quadro Resumo 14- Provas em que, para resolver o item ‘a’, utilizou-se o cálculo $7000 \times 35,5$ ou $70 \times 35,5$	71
Quadro Resumo 15- Provas que apresentaram a resolução por meio de uma regra de três	72
Quadro Resumo 16- Provas que apresentaram a resolução por meio de uma multiplicação	74
Tabela 6- Classificação das resoluções do item ‘b’ quanto ao desempenho	77
Quadro Resumo 17- Alunos que não apresentam cálculos no item ‘b’, apenas a resposta	77

Quadro Resumo 18- Provas em que há registro de uma divisão para encontrar a resposta do item 'b'	79
Quadro Resumo 19- Alunos que efetuam: $7000 : 4$ para encontrar a resposta do item 'b'	80
Quadro Resumo 20- Provas em que são utilizadas a resposta do item anterior para encontrar a resposta do item 'b'	81
Tabela 7- Classificação das resoluções do item 'c' quanto ao desempenho	83
Quadro Resumo 21- Provas em que não há esboço de gráficos na resolução do item 'c'	83
Quadro Resumo 22- Provas em que há esboço de gráficos utilizando dados incorretos	85
Quadro Resumo 23- Provas em que há registros do desenvolvimento de estratégia para encontrar a quantidade de passageiros transportados por cada empresa e em seguida um gráfico	87
Quadro Resumo 24- Provas com o registro apenas de um gráfico	89
Quadro Resumo 25- Provas que apresentam estratégias inadequadas para a construção do gráfico e o esboço de um gráfico	91

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Gênero dos alunos que resolveram a Prova	31
Figura 2- Período em que estudam os alunos que resolveram a Prova	31
Figura 3- Impressões dos alunos sobre a Prova.....	31
Figura 4- Questão mais fácil segundo os alunos.....	32
Figura 5- Questão mais difícil segundo os alunos	32
Figura 6- Tempo destinado à resolução da Prova	32
Figura 7- Resolução presente na Prova A27	34
Figura 8- Resolução presente na Prova A23	36
Figura 9- Resolução presente na Prova A46	37
Figura 10- Resolução presente na Prova A3	38
Figura 11- Resolução presente na Prova A17	39
Figura 12- Resolução presente na Prova A15	40
Figura 13- Resolução presente na Prova A42	40
Figura 14- Resolução presente na Prova A38	43
Figura 15- Resolução presente na Prova A37	45
Figura 16- Resolução presente na Prova A10	45
Figura 17- Resolução presente na Prova A47	49
Figura 18- Resolução presente na Prova A13.....	49
Figura 19- Resolução de algoritmos incorretos presentes nas Provas A12 e A43 respectivamente	51
Figura 20- Resolução presente na Prova A28	53
Figura 21- Resolução presente na Prova A10	54
Figura 22- Resolução presente na Prova A12	57
Figura 23- Resolução presente na Prova A15	58
Figura 24- Resolução presente na Prova A10	59
Figura 25- Resolução presente na Prova A3	60
Figura 26- Resolução presente na Prova A37	61
Figura 27- Resolução presente na Prova A43	62
Figura 28- Resolução presente na Prova A53	63
Figura 29- Resolução presente na Prova A4	54
Figura 30- Resolução presente na Prova A21	66
Figura 31- Resolução presente na Prova A47	66
Figura 32- Resolução presente na Prova A28	71
Figura 33- Resolução presente na Prova A30	74
Figura 34- Resolução presente na Prova A23	75
Figura 35- Resolução presente na Prova A5	75
Figura 36- Resolução presente na Prova A8	75
Figura 37- Resolução presente na Prova A3	76
Figura 38- Resolução presente na Prova A32	76
Figura 39- Cálculo da divisão presente na Prova A14	80
Figura 40- Resolução presente na Prova A8	84
Figura 41- Resolução presente na Prova A52	85
Figura 42- Resolução presente na Prova A46	86
Figura 43- Resolução presente na Prova A24	87
Figura 44- Resolução presente na Prova A17	89
Figura 45- Resolução presente respectivamente nas Provas A16, A6 e A40	90
Figura 46- Resolução presente na Prova A48	91
Figura 47- Resolução presente na Prova A13	92

SUMÁRIO

1	Sobre o Contexto	10
2	Alguma Literatura	13
2.1	A Avaliação	13
2.2	Estudo do Erro	19
3	Sobre a Investigação	25
3.1	Procedimentos Metodológicos	25
3.2	Das Provas	27
4	Descrição e Análise da Produção Escrita	33
4.1	Questão 1	33
4.2	Questão 2	46
4.3	Questão 3	56
4.4	Questão 4	68
5	Algumas Considerações a guisa de conclusão	94
6	Referências	103
	Apêndice	106
	Apêndice A – Descrição das Resoluções das Questões	107
	Anexos	117
	Anexo A – Texto: Análise da Produção Escrita de Alunos e Professores nas Provas de Questões Abertas de Matemática.....	118
	Anexo B – Cópia da Prova de Questões Abertas de Matemática - AVA/2002	121

1 SOBRE O CONTEXTO

Minha vida escolar teve início no Maternal I em um Colégio Particular Católico no município de Medianeira, no qual o importante parecia ser a disciplina.

A partir da 1ª série, sempre estudei em escolas públicas, e, da 1ª à 8ª série, fui muito disciplinada dentro e fora de sala de aula. Tinha a preocupação de estudar, me comportar e tirar notas altas, até porque minha família sempre me cobrou isso. Acho que meu esforço, principalmente até a 4ª série, deve-se mais ao medo da cobrança familiar do que a qualquer outra coisa. Tirava notas altas, nem que fosse à base da ‘decoreba’.

Ingressei no Ensino Médio, fiz o curso de Magistério, porque era o único curso diurno, não porque pretendesse ser professora. Durante esses 4 anos, minha relação com as notas modificou-se um pouco. Preocupava-me sim com elas, mas agora por outra razão - queria aprender - até porque, a partir do 2º ano, fui me apaixonando pela profissão do magistério. Participava das aulas e gostava de ter a oportunidade de discutir a respeito de educação.

Formei-me e fui aprovada num concurso público municipal para Professor do Ensino Fundamental e, ao mesmo tempo, no vestibular para o curso de Licenciatura em Matemática, em uma universidade pública. Comecei a cursar a faculdade e a dar aula e posso dizer que cada vez menos pensei em fazer outra coisa na vida.

Durante o 3º grau, foi surgindo uma vontade silenciosa e mansinha de ir além. Tudo o que aprendia nas aulas e que eu poderia colocar em prática, eu tentava. É impressionante como a gente tem esse anseio de mudar, de melhorar e não consegue continuar mais naquela vidinha profissional “sem sal”. Ainda bem!

Concluí a Licenciatura no início de 2003 e, na semana seguinte ingressei num curso de Especialização em Ensino de Matemática para Séries Iniciais, afinal estava no ‘meu chão’ já que trabalhava com 1ª a 4ª séries do Ensino Fundamental.

Durante aquele ano, vi o sonho de fazer Mestrado mais perto de mim, já que minha irmã o estava cursando. Então, em dezembro do mesmo ano, encorajada por ela, prestei a seleção do Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática na UEL.

A expectativa com relação a tudo o que eu poderia aprender era grande, mas foi tomada, a partir das primeiras aulas, por outro sentimento que até agora não consegui definir. Era como se eu tivesse encontrado um outro mundo, um mundo de conhecimento que abria as portas para mim. Cada aula era uma realização. Foi nesse momento que comecei a perceber quão pequeno é o mundinho em que a gente vive e o quanto ainda temos que avançar em nossas salas de aula para termos uma educação diferente.

Hoje sinto-me feliz por ter a oportunidade de, juntamente com minha orientadora, desenvolver este trabalho. Mas continuo com aquele pensamento de que ainda há muito que conhecer, estudar e fazer. E posso dizer que agora entendo a frase: “Tudo o que sei, é que nada sei”.

No início de 2004, acreditei na proposta de minha orientadora, a de desenvolver uma investigação sobre a produção escrita em matemática, porque vai ao encontro daquilo em que nós duas acreditamos: o trabalho desenvolvido na instituição escolar tem papel fundamental na formação do cidadão.

Para nós, uma das funções da escola é auxiliar o aluno a aprimorar aquilo que sabe, a construir novos conhecimentos que poderão oportunizar a ele uma vivência melhor e mais participativa na sociedade em que vive. A Matemática escolar, por sua vez, precisa ter sua parcela de contribuição na formação desse cidadão, tornando-se uma aliada do professor, pois pensar...

[...] em uma concepção de ensino de Matemática que seja instrumentador para a vida, significa pensar nos aspectos cognitivos e ideológicos presentes na produção do conhecimento matemático e nos aspectos histórico-sociais que envolvem esta produção. O ensino da matemática tem, portanto, que desempenhar um papel onde esteja presente o desejo de uma sociedade mais justa e humana. Este papel está vinculado ao resgate da Matemática presente em qualquer codificação da realidade, vivenciada pelos alunos e pelo professor, e à análise dos diferentes significados e das diferentes formas de ordenar as idéias na apropriação desse conhecimento (BURIASCO, 1999, p.2).

Acreditamos que as aulas de Matemática necessitam oportunizar aos alunos mais do que a utilização e memorização de algoritmos, precisam auxiliá-los a pensar, refletir, argumentar, desenvolver o raciocínio, conjecturar, levantar estratégias para resolver uma situação, reconhecer e formular problemas, auxiliá-los a ultrapassar seus medos.

O caminho que escolhemos para investigar como compreender melhor e poder auxiliar no processo de aprendizagem, foi analisar a produção

escrita de alunos e, buscar por meio dela, conhecer como expressam aquilo que sabem.

É importante ressaltar que esta investigação é apenas parte de um estudo mais amplo desenvolvido por um grupo¹ do qual fazemos parte.

Nesse contexto, esta investigação compõe-se de cinco partes, anexos e apêndice:

- a primeira *Alguma literatura* constitui-se no ‘pano de fundo’ do estudo e nela estão a *Avaliação* e o *Estudo dos Erros*;
- a segunda parte apresenta os procedimentos metodológicos;
- na terceira, encontram-se as descrições e análises das quatro questões presentes nas 53 Provas de Questões Abertas de Matemática - AVA/2002², que foram estudadas e,
- na quarta parte, são apresentadas algumas considerações que consideramos importantes sobre o trabalho realizado.

¹ Maiores informações a respeito deste grupo de pesquisa encontram-se no Anexo A

² Uma cópia da Prova de Questões Abertas de Matemática - AVA/2002 encontra-se no Anexo B.

2 ALGUMA LITERATURA

2.1 A Avaliação

A avaliação não é algo restrito ao ambiente escolar, ela está presente em quase todos os momentos de nosso cotidiano, e constitui-se como uma atividade comum do ser humano, embora, muitas vezes, este processo aconteça de forma tão natural, que passa despercebido. Assim, ela pode ser entendida e praticada de várias maneiras, dependendo da função que assume naquele momento ou de quem a pratica.

A avaliação parece um termo amplo e nada fácil de definir. Hadji (1993) muito bem coloca que dela não se pode ter uma definição única e exata. Com esse termo é possível definir uma ação, ou um conjunto de ações importantes e até mesmo decisivas para os envolvidos.

Sendo assim, a definição de avaliação dependerá do entendimento que cada indivíduo possui, da responsabilidade e comprometimento com o qual ele a utiliza, do meio em que vive, das suas concepções, das experiências vividas e, ainda, da importância que ela assume na sua vida ou no seu trabalho.

A avaliação que acontece no dia-a-dia, por exemplo, tem o objetivo de informar, julgar, classificar, indicar, decidir se o que está sendo avaliado serve ou não para determinado fim. Já no caso do ambiente escolar, a avaliação deve consistir em um processo mais elaborado que permita a interpretação da situação de aprendizagem em que se encontram os alunos, para que então ocorra uma tomada de decisão visando à melhoria ou a mudança da situação revelada na avaliação, no que diz respeito principalmente à ocorrência da aprendizagem dos alunos.

Este é apenas parte de um entendimento do processo de avaliar, pois faz-se necessário ressaltar que, mesmo restringindo a avaliação ao ambiente escolar, ainda assim, é difícil caracterizar o todo em que ela se constitui.

As formas de conceber e praticar a avaliação têm a ver com: a evolução das funções que a instituição educativa cumpre na sociedade e no mercado de trabalho; as posições que se adotam sobre a validade do conhecimento que se transmite; as concepções que se tenham da natureza dos alunos/as e da aprendizagem; a estruturação do sistema escolar, já que serve à sua organização; [...] a forma de entender a autoridade e a manutenção da disciplina... (SACRISTÁN, 1998, p.298)

Ainda segundo Sacristán (1998), a avaliação sofre várias influências, que nem sempre podem ser desconsideradas e, pelo contrário, fazem o processo de avaliar ficar com uma ou outra ‘aparência’, assumindo determinadas funções, de acordo com o tipo de influência que está sobre ela e sobre os profissionais que dela se utilizam.

“A avaliação como parte integrante das atividades escolares possui várias funções. Uma delas tem sido pouco evidenciada – a avaliação como reguladora do processo de ensino e aprendizagem” (BURIASCO, 2002, p.259). Neste sentido, a avaliação precisa fazer com que a realidade seja enxergada e principalmente modificada, com o intuito de buscar maneiras de ensinar, as quais possam auxiliar os alunos quanto às suas aprendizagens.

Nessa perspectiva, Hadji afirma que

[...] o ato de avaliação, é um ato de “leitura” de uma realidade observável, que aqui se realiza com uma grelha predeterminada, e leva a procurar, no seio dessa realidade, os sinais que dão o testemunho da presença dos traços desejados (1993, p.31).

Para poder avaliar, o professor precisa de certo arcabouço teórico que permita a ele sustentar a sua prática avaliativa, ou seja, saber o que pretende avaliar e qual é a melhor maneira para fazê-lo. Necessita ainda perceber quais encaminhamentos podem ser adotados em sala de aula, conseguir interpretar o que está registrado, já que avaliar é também interpretar e este é também um momento difícil no processo de avaliação.

Embora o entendimento que se tem do processo de avaliação esteja mudando, é difícil entender “a razão pela qual determinadas formas de avaliar, que não se aconselham há muito tempo, continuam sendo praticadas tão massivamente” (SACRISTÁN, 1998, p.296). Isso mostra também como as mudanças relacionadas ao ensino e a avaliação acontecem de maneira lenta, pois percebe-se que a

atual prática da avaliação escolar estipulou como função do ato de avaliar a classificação e não o diagnóstico, como deveria ser constitutivamente. Ou seja, o julgamento de valor, que teria a função de possibilitar uma nova tomada de decisão sobre o objeto avaliado, passa a ter a função estática de classificar um objeto ou um ser humano histórico num padrão definitivamente determinado. Do ponto de vista da aprendizagem escolar, poderá ser definitivamente classificado como inferior, médio ou superior (LUCKESI, 1996, p.34).

A avaliação de aprendizagem deve ser entendida não como um julgamento que leva em conta apenas as notas atribuídas a uma ou duas aferições

bimestrais, ela deve ser considerada um processo único e contínuo que se inicia no primeiro dia de aula e só termina no último, e, que visa auxiliar os processos e progressos da construção do conhecimento por parte do aluno e do professor, ocorridos durante todo o ano letivo.

Avaliar, como tarefa docente, mobiliza corações e mentes, afeto e razão, desejos e possibilidades. É uma tarefa que dá identidade à professora, normatiza sua ação, define etapas e procedimentos escolares, media relações, determina continuidades e rupturas, orienta a prática pedagógica (ESTEBAN, 2003, p.14).

Como afirma Esteban (2003), a avaliação vai muito além de uma tarefa simples. Ela exige do professor uma postura profissional comprometida, que busca, por meio dos erros e acertos dos alunos, reformular suas ações pedagógicas para que aqueles alunos possam não apenas acertar as questões, mas compreender aquilo que vêem e fazem.

A avaliação, parte do processo de ensino e aprendizagem, também pode revelar ao professor se a forma como o trabalho vem sendo desenvolvido está ou não satisfatória e, ao aluno, como ele está no processo. Os Parâmetros Curriculares Nacionais reforçam esta idéia

[...] cabe à avaliação fornecer aos professores as informações sobre como está ocorrendo a aprendizagem: os conhecimentos adquiridos, os raciocínios desenvolvidos, as crenças, hábitos e valores incorporados, o domínio de certas estratégias, para que ele possa propor revisões e reelaborações de conceitos e procedimentos ainda parcialmente consolidados (BRASIL, 1998, p.54).

Neste sentido, o professor, ao avaliar, precisa estar comprometido com o desenvolvimento do aluno e com a evolução deste no processo de construção do conhecimento. Desta forma, é importante a maneira como o educador olha para as produções de seus alunos também nas situações de avaliação, já que, segundo Hadji, a “avaliação precisa estar a serviço da aprendizagem” (2002, p.2).

Sendo assim, os encaminhamentos a serem escolhidos para avaliar os alunos precisam estar diretamente ligados às intenções que se tem com a avaliação. Não importa qual seja o instrumento escolhido para que se processe a avaliação escolar, importa que os professores tenham claro o que determinado instrumento é capaz de revelar e, mais ainda, de que maneira a avaliação necessita acontecer para contribuir com a melhoria do ensino ou da aprendizagem dos conhecimentos trabalhados na escola.

Acredita-se que um ponto essencial que a avaliação deve ter, como coloca Hadji, é

[...] uma dimensão prognóstica, no sentido de que conduz – ou deveria conduzir – a um melhor ajuste ensino/aprendizagem. Poderia – deveria – tratar-se de adaptar melhor o conteúdo e as formas de ensino às características dos alunos reveladas pela avaliação [...] (2001, p.20).

No entanto, a avaliação escolar, em muitos casos, tem deixado de se preocupar com a tomada de decisões, com a investigação a respeito dos conhecimentos já construídos/apropriados pelos alunos, pela busca da melhoria do processo ensino e aprendizagem. A avaliação que tem sido praticada hoje, num grande número de escolas, parece estar mais voltada ao cumprimento de normas burocráticas, classificação, ou à punição dos alunos.

A prática da avaliação, que pretende medir o conhecimento para classificar os(as) estudantes, apresenta-se como uma dinâmica que isola os sujeitos, dificulta o diálogo, reduz os espaços de solidariedade e de cooperação e estimula a competição. Essa prática exclui do processo ações indispensáveis para um contexto pedagógico favorável à aprendizagem de todos, portanto é insuficiente para a professora que deseja ensinar a todos os seus alunos e alunas (ESTEBAN, 2003, p.18).

Como é possível perceber, a avaliação utilizada como instrumento de classificação ou punição, não contribui com a aprendizagem nem mesmo para a mudança de postura do professor frente ao fracasso de seus alunos, já que não serve para redimensionar o trabalho pedagógico realizado em sala de aula. Uma avaliação realizada com este intuito gera um processo de ensino e aprendizagem insatisfatório, até porque uma das funções do espaço escolar é o de assegurar a construção de conhecimento.

Quando se faz uso da avaliação, é necessário distinguir os três enfoques com que ela pode ocorrer: de diagnóstico; de controle; de classificação. A avaliação, ao ser utilizada como diagnóstico, verifica o presente com o intuito de programar o futuro. Avalia a prática para perceber quais são as alterações necessárias para que a realidade possa ser construída numa direção desejada. A avaliação como controle está ligada à eficiência. Verifica se algo foi realizado como deveria. A avaliação como classificação não se preocupa com o futuro, serve para, como o próprio nome diz, classificar segundo o grupo a qual pertence (GANDIM, 1995).

Como não poderia deixar de ser, espera-se que o resultado a ser encontrado pelo ato de avaliar dependa do significado essencial presente no ato de ensinar (HADJI, 2001). Ou seja, a forma de avaliar está diretamente relacionada ao ato de ensinar. Estes dois processos parecem ser indissociáveis.

Deixando de lado o controle e a classificação que pode ser gerada pela avaliação e, continuando a pensar em uma avaliação que possa contribuir para o êxito do ensino, ou seja, para o sucesso da aprendizagem dos alunos, encontramos a avaliação formativa. Esta é uma avaliação que está no centro da ação de formação, e tem como função principal mostrar aos envolvidos no processo, informações úteis referentes à maneira como encontra-se o ensino/aprendizagem, contribuindo assim para a sua regulação (HADJI, 2001).

Esta avaliação traz contribuições também para o aluno, pois possibilita a ele saber em que ponto se encontra, que ações precisam ser revistas, quais são seus erros a fim de poder ultrapassá-los.

Mesmo considerando a avaliação como sendo própria de um ser capaz de julgar e perceber o que é necessário mudar, como também de um ser incapaz de conhecer a realidade com exatidão (HADJI, 1993), ainda assim, a busca pela compreensão³ daquilo que está registrado pelo aluno é, sem dúvida, uma das partes mais complexas do processo de avaliar. Ela é também uma das partes essenciais da avaliação, pois é neste momento que se tem a oportunidade de desvendar o que o registro dos alunos mostra a respeito da aprendizagem e conseqüentemente do ensino.

Reconhecida a importância da avaliação formativa, espera-se mais. Deseja-se uma avaliação que possa ir além dessa. Uma que seja capaz de auxiliar o professor na sua investigação, pois pode ela mesma ser um processo de investigação. Investigação a respeito da forma como os alunos organizam seu pensamento no momento da resolução de uma situação, dos conteúdos que já estão construídos/apropriados, dos tipos de erros que são cometidos com maior freqüência e do que pode ser o responsável por esses erros.

É este o olhar lançado na análise da produção escrita dos alunos presentes nas Provas de Questões Abertas de Matemática da Avaliação Estadual de Rendimento Escolar do Paraná – AVA/2002. Pretende-se, por meio desta análise, mostrar que a avaliação pode trazer ao professor muitas informações relevantes a respeito da aprendizagem dos alunos. No entanto, para que isso aconteça é necessário que este processo seja entendido não como um cumprimento de normas ou uma arma de punição, mas como um processo de investigação, que visa auxiliar todos os envolvidos no processo da avaliação.

³ Compreensão aqui considerada como um processo mental que se baseia nas atividades realizadas pelo indivíduo, pois durante a realização de determinadas atividades ocorrem e integram-se vários processos mentais. ROHLOFF, Débora Bohrer (2004).

Pensando no que foi mostrado pelo aluno na prova ou em qualquer outro instrumento utilizado pelo professor para processar a avaliação, muito bem coloca Sacristán, a “informação obtida requer uma elaboração, ponderando alguns aspectos sobre outros, selecionando o que se considera relevante e significativo, relacionando-a com outros conhecimentos sobre o sujeito avaliado” (1998, p.308).

Isso sugere que a avaliação seja vista como um constante repensar, que nela se busque a compreensão de tudo o que o aluno fez e faz. Que em lugar do aluno ser rotulado como “fraco” ou que “não assimilou porque não acertou a questão”, o professor possa perceber o que realmente ele sabe, o que determinada resolução é capaz de revelar.

Duas idéias em relação à avaliação parecem ficar bem presentes. A primeira diz respeito à importância de ter um objetivo claro no momento em que se avalia, ou seja, o porquê da utilização de determinado instrumento, o que se deseja saber com aquilo. E, a segunda, refere-se ao que se faz com o que foi desvelado no processo; a importância da interpretação e da utilização do que ficou visível na avaliação.

A prova escrita ainda é um dos instrumentos mais utilizados nas escolas para avaliar os alunos, no entanto, a produção escrita que os alunos registram nestas provas, parece estar sendo pouco utilizada pelos professores que perdem, assim, uma importante fonte de investigação.

Sabe-se que o aluno acertou ou errou determinada questão, no entanto, muito pouco se sabe sobre o que pode ter causado determinado erro ou a adoção de determinada estratégia. É por isso que se reforça a idéia de adotar uma nova postura frente à produção escrita dos alunos. Uma postura de investigação. Investigação a respeito do que os alunos conhecem ou desconhecem, das estratégias utilizadas por eles para resolver as situações e, ainda, a respeito dos encaminhamentos adotados em sala de aula, no sentido de descobrir se o que apareceu na prova está relacionado a estes encaminhamentos adotados pelo professor. Investigado isso, o professor terá a chance de modificar algumas ações, se necessário.

Assumir a avaliação como um ato de investigação exige do professor uma atenção muito maior durante os processos de ensino e aprendizagem.

No início, ele precisa estar consciente de suas intenções para que possa então encontrar os instrumentos adequados para ‘ver’ o que deseja. Em seguida, com os resultados em mãos, a investigação começa a tomar mais espaço. É nesse momento que o professor passa a investigar as informações que possui, para

depois relacioná-las ao ensino, à maneira como o conhecimento do aluno está sendo construído, que relações consegue estabelecer entre sua prática de sala de aula e o que ficou visível na avaliação. Então, é possível que o professor comece a projetar melhorias, novas situações didáticas e tudo mais que puder desenvolver para auxiliar os alunos quanto à aprendizagem. Lembrando que aprendizagem segundo D'Ambrosio, é “[...] a capacidade de explicar, de aprender e compreender, de enfrentar, criticamente, situações novas. Aprender não é um mero domínio de técnicas, de habilidades, nem a memorização de algumas explicações ou teorias” (2001, p. 119).

Como coloca Esteban (2002), a aprendizagem mecânica, que geralmente garante respostas corretas, não favorece, em momento algum, a organização do conhecimento nem a constituição de um conhecimento crítico e criativo.

Como é possível perceber, a aprendizagem constitui algo bastante abrangente, que por sua vez necessita de ações coerentes em sala de aula, capazes de proporcionar os mecanismos necessários para que ela aconteça.

No sentido em que a avaliação tem sido discutida e defendida neste trabalho, em que os erros e a produção escrita dos alunos passam a ser observados ‘com outros olhos’, acredita-se que poderá existir uma mudança importante, na busca de contribuir para que os processos de ensino e aprendizagem se distanciem cada vez mais do que hoje se constitui quase determinante – o fracasso escolar.

2.2 Estudo do Erro

Seja numa prova ou em outro instrumento de avaliação, o erro cometido pelo aluno pode ser visto ou utilizado de diferentes maneiras. Porém o que aparece mais freqüente nas escolas é, sem dúvida, a visão do acerto e do erro como determinantes do sucesso ou do fracasso dos alunos. O erro tem sido encarado como algo capaz de mostrar apenas o que o aluno não sabe fazer, ou que ele não estudou. “A ausência de questionamento dos múltiplos fios que tecem uma resposta e sua interpretação como acerto ou como erro faz com que haja uma leitura superficial do processo [de avaliação]” (ESTEBAN, 2002, p.139).

Historicamente, o estudo dos erros cometidos pelos alunos tem interessado a pesquisadores, como Radatz (1980), Borasi (1987), Rico (1995), Pinto

(2000), Cury (2004), Buriasco (2004) que buscaram em seus trabalhos abordar este tema de modo a mostrar os benefícios de se utilizar erros como estratégia didática.

Embora as primeiras pesquisas registradas tenham acontecido por volta da primeira metade do século XX, época em que os erros determinavam a recompensa ou a punição dos alunos, percebe-se que ainda há muito para ser pesquisado nesta área, já que atualmente na maioria das escolas existe um 'conhecimento' ou uma 'resposta padrão' que deve ser alcançada por todos os alunos. Este 'padrão' reforça uma visão de erro como algo totalmente negativo e que precisa ser exterminado a qualquer custo para que, assim, o aluno 'possua' os conhecimentos da forma como foram estipulados pela escola.

O/a professor/a avalia e classifica cada aluno/a sem considerar o processo global do indivíduo e da sua turma, tendo como base modelos de aprendizagem e desenvolvimento idealizados que não aportam fundamentos teóricos que permitam uma reflexão profunda sobre os fatos observados (ESTEBAN, 2002, p.25).

O erro, em muitos casos, parece ser visto como algo totalmente isolado do contexto de ensino e aprendizagem, servindo apenas para julgar o aluno. A visão de erro como uma oportunidade de investigação e de processo de construção do conhecimento do aluno é ainda pouco presente nas escolas.

Assim, é importante que seja incorporada e praticada uma concepção de avaliação e de erro, que mostre justamente o contrário, ou seja, que a importância está em não apenas classificar respostas certas ou erradas, mas sim olhá-las no sentido de descobrir os caminhos percorridos pelos alunos, a ponto de saber as atuais necessidades destes no que diz respeito à construção de seu conhecimento (ESTEBAN, 2002).

Contudo, a escola parece estar mais preocupada com os resultados finais de cada aluno do que com o processo de aprendizagem. Os erros, nessa visão, apenas são assinalados sem nenhuma discussão. Também não se discutem nem se reformulam metodologias, mesmo diante do fracasso da maioria dos alunos (BURIASCO, 2000).

Por conseguinte, como coloca Cury (2004), se os erros servem apenas para diagnosticar um sucesso ou um fracasso, que por sua vez é recompensado ou punido, não existe a possibilidade de ser utilizado de outra forma como, por exemplo, como uma fonte de informação sobre a aprendizagem do aluno, nem mesmo sobre o trabalho desenvolvido pelo professor.

Hoje ainda é muito restrita a visão de que o erro do aluno é capaz de auxiliar no processo de ensino e aprendizagem. Enfatizam-se mais os resultados

do que os processos. Isso faz com que seja desperdiçada, neste processo, uma importante ferramenta, pois o erro deixa de ser problematizado e investigado.

Alguns pesquisadores como Hadji (1993), Pinto (2000), Buriasco (2000), Cury (2002), Esteban (2002), consideram que o erro deveria deixar de ser visto como algo negativo, e sim, como algo que, ao ser investigado, permite conhecer e acompanhar melhor o aluno, a influência do trabalho do professor sobre o que foi mostrado e a possibilidade de um novo direcionamento em sala de aula.

[...] o essencial, mais uma vez, é ter vontade de compreender. Compreender os erros para criar as condições de sua superação. Exceto para pesquisadores, a análise dos erros não é um fim em si. É um meio oferecido para tornar a avaliação mais informativa e imaginar melhor as condições didáticas e/ou pedagógicas adequadas para a superação do obstáculo revelado pelo erro (HADJI, 2001, p.101).

A possibilidade de analisar o erro dentro de uma perspectiva de conhecer “onde o aluno está” para então auxiliá-lo a avançar, é uma visão que já estava presente no construtivismo da década de 70, que propunha a aceitação do erro como ferramenta para a aprendizagem ou como um construtor do conhecimento. No entanto, uma interpretação equivocada de alguns professores fez com que se criasse a visão de que se o erro fosse aceito, conseqüentemente o aluno estaria sendo aprovado sem ter os conhecimentos necessários (CURY, 2004).

É possível que a influência deste pensamento esteja presente ainda hoje na prática de alguns professores que continuam a não valorizar o erro, que não o interpretam para poder compreender o que o aluno quis mostrar e, menos ainda, utilizam os erros dos alunos como estratégia didática, o que se constituiria numa oportunidade para melhor trabalhar alguns conceitos.

O contato entre o aluno e seus próprios erros pode gerar uma situação de aprendizagem, uma vez que permite que ele analise suas ações, reflita e questione para compreender os equívocos cometidos, podendo, então, construir novos conceitos que o auxiliarão a construir mais conhecimentos.

A análise dos erros pode ser praticada em sala de aula independentemente do instrumento de avaliação proposto pelo professor. No entanto, além das avaliações praticadas atualmente nas escolas serem pouco diversificadas, tem-se utilizado muitas vezes de um único instrumento: a prova escrita. Ainda, o que chama a atenção é a forma como os resultados destas provas tem sido utilizados.

A prática da correção das questões como certas ou erradas para que em seguida se possa atribuir uma nota, é uma prática muito comum. Mas esta

prática pouco se preocupa com a análise dos erros apresentados pelos alunos. Praticamente não se questiona o motivo que pode ter levado o aluno a cometer determinado erro; muito pouco se analisa a natureza dos erros observados nas provas e sua utilização em sala de aula é quase inexistente.

O que afirma BURIASCO, (2002), é o que raramente tem acontecido: a “[...]avaliação da aprendizagem matemática deve ser vista como um processo de investigação” (p.259). A visão de avaliação e de erro como fonte de investigação sugere uma postura diferente do professor, pois a avaliação deixa de ser um momento de assinalar erros e acertos e passa a ser vista como uma fonte de informações, aparentemente ocultas na produção dos alunos, em que se faz necessário perceber que existe uma rica oportunidade de enxergar o que o aluno articulou no momento de responder determinada questão.

A avaliação como prática de investigação não se limita à distinção entre saber e não-saber, que reduz a dimensão processual da construção de conhecimentos, investe na busca do ainda não-saber, que trabalha com a ampliação do conhecimento, movimento permanente em que há sempre conhecimentos e desconhecimentos (ESTEBAN, 2002, p.166).

A avaliação mostra-se como uma ferramenta que pode auxiliar professores e alunos. Professores no processo de ensino e alunos no processo de aprendizagem. Os professores podem realizar a avaliação como prática investigativa, no sentido de descobrir o que os alunos sabem e o que ainda não sabem, organizando assim o processo de ensino, com vistas a garantir o processo da aprendizagem.

Os erros vistos pelo professor parecem mais valorizados no momento da avaliação, pois é nela que os erros e acertos cometidos pelos alunos se tornam mais evidentes, mais visíveis e mais importantes para o professor. Pode-se dizer que a visão de erro que se tem está relacionada à compreensão do que é a avaliação. Sendo assim, os erros podem ser determinantes de sucessos e fracassos, dependendo da maneira como uma prova é elaborada e como os erros surgidos são analisados (CURY, 2004). Numa avaliação classificatória, por exemplo, o professor está com a atenção mais voltada para o acerto dos alunos. Assim o erro é utilizado apenas para diminuir a pontuação do aluno, a nota.

Como já temos colocado, da forma como o erro e a avaliação são considerados, usualmente opta-se por uma avaliação que assinala acertos e erros para que então seja atribuída uma nota. Nesta perspectiva, o aluno não “deve” errar, pois o erro é sinônimo apenas da falta de conhecimento e serve para a nota

ficar com um valor menor. No entanto, perguntar

[...] por que uns/umas alunos/as aprendem e outros não, deixa de ser suficiente; há que se indagar a dinâmica que favorece a aprendizagem de cada um/a e os mecanismos utilizados para responder às questões postas. O/a professor/a precisa apropriar-se da compreensão do/a aluno/a, eixo do processo de avaliação, pois uma resposta diferente da esperada não significa ausência de conhecimento, pode ser uma solução criativa com a utilização das ferramentas e conhecimentos que ele possuía (ESTEBAN, 2002, p.133).

Considerar o erro como indicador de progresso escolar não parece ser uma tarefa muito simples, tendo em vista o sentido que lhe é atribuído por grande parte dos professores. Mesmo assim, a necessidade de atribuir um novo sentido para o erro, parece urgente. Um sentido capaz de ser incorporado ou elaborado pelo próprio professor e que, ao estar presente, permita que o erro seja útil em sala de aula, de modo a poder contribuir no processo de ensino e aprendizagem.

Cury (2004) considera que sempre é possível fazer uso da análise dos erros, mas que, para isso, necessita-se respeitar o aluno, discutindo com ele os resultados alcançados na avaliação; planejar estratégias de trabalho variadas, sempre que possível, nos aspectos em que houve maior índice de erros; fazer uma análise crítica dos erros que aparecem em qualquer que seja a situação, oportunizando aos alunos uma reflexão a respeito do que erraram, auxiliando-os na construção dos conceitos. No entanto, é preciso cautela na utilização dos erros em sala de aula, pois o simples fato de proporcionar uma série de exercícios repetitivos, semelhantes aos que o aluno errou, não garante a construção do conhecimento envolvido nem mesmo a superação daquele erro.

Tendo clara a importância do erro, Hadji afirma que “[...]o erro não seria uma falta a ser reprimida, mas uma fonte de informação, e isso tanto para o professor – cujo dever é analisar a produção e, por meio dela, a situação do aluno – como para o aluno, que precisa compreender seu erro para não mais cometê-lo, e progredir” (2001, p.10). Enfatiza ainda, uma perspectiva de considerar que o erro remete a uma reflexão no sentido de analisar, não apenas a maneira como o professor avalia e se utiliza dos erros, mas também a existência ou não de um trabalho em torno do erro do aluno, que seja capaz de fazê-lo “enxergar” seu próprio erro, compreendendo-o, percebendo assim, a razão de ter errado.

A respeito da análise de erros, Borasi (1987) sugere algumas alternativas e, dentre elas, a idéia do erro, na perspectiva do processo de

aprendizagem, ser visto como “[...] projeção dos mecanismos com os quais a mente opera. Pode constituir-se em instrumento para compreender melhor os processos cognitivos e o próprio desenvolvimento” (p.380). Além disso, sugere também que os erros, quando estudados, podem revelar algo a respeito de suas causas, a respeito da estratégia de ensino escolhida, dos objetivos formulados, permitindo então que surjam reflexões a respeito do trabalho desenvolvido e alternativas diversificadas para o trabalho em sala de aula.

Um trabalho com questões abertas⁴, poderá facilitar a interpretação dos erros dos alunos, pois, à medida em que se solicita que as tentativas de resolução, os cálculos, as descrições devam fazer parte do registro apresentado, o professor tem a oportunidade de observar o caminho percorrido, a maneira utilizada para resolver o que lhe foi proposto, com base na interpretação que fez da questão. Por conseguinte, encontra-se uma chance de o professor utilizar o erro como estratégia didática para auxiliar na construção dos conceitos, que pôde perceber, estão falhos ou incompletos.

Embora, neste trabalho seja defendida a idéia de que os erros podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem, não se pode afirmar que “a análise dos erros é uma panacéia universal, que vá trazer resultados imediatos e duradouros. No entanto, a cada exercício de análise, crescemos um pouco, alunos e professores, no conhecimento de nossas dificuldades e potencialidades” (Cury, 2004, p.9).

⁴ Uma característica importante desse tipo de questão é permitir que o aluno demonstre suas habilidades por meio da forma pela qual aborda a questão e do procedimento que utiliza para resolvê-la. Esse tipo de questão não requer apenas que o aluno assinale uma resposta, mas que encontre a resposta e mostre os caminhos que foram seguidos para chegar a ela. BURIASCO, Regina Luzia Corio de; CYRINO, Maria Cristina de Costa Trindade; COARES, Maria Tereza Carneiro, 2003.

3 SOBRE A INVESTIGAÇÃO

3.1 Dos Procedimentos Metodológicos

Por meio desta investigação busca-se estudar a produção escrita em Matemática de alunos de 8ª série na Provas de Questões Abertas de Matemática da Avaliação Estadual de Rendimento Escolar do Paraná – AVA/2002, tendo como intenção, compreender a maneira como os alunos lidam com as informações presentes nos enunciados das questões, quais procedimentos mais utilizam, que tipo de erros são mais freqüentes e as possíveis causas destes erros.

Por se tratar de uma investigação que pretende mostrar uma maneira de estudar e interpretar as respostas dos alunos e, com isto, perceber a compreensão que eles têm de determinadas situações, é que se optou pela realização de uma investigação predominantemente qualitativa, já que, como afirmam Bogdan e Biklen,

[a] abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a idéia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo (1994, p.49).

Por conseguinte, busca-se interpretar as informações presentes na produção dos alunos, procurando assim, compreender da melhor maneira possível o seu registro e, com isso tem-se a implicação do pesquisador sobre o objeto a ser investigado, ficando por conta disso, contaminado por sua objetividade.

A realização deste trabalho implica em observação, interpretação, inferência e principalmente muitas idas e vindas aos registros escritos dos alunos e à fundamentação teórica. Esta é outra característica que justifica a escolha da metodologia qualitativa, pois tal como afirma Godoy,

[...] considerando que a abordagem qualitativa, enquanto exercício de pesquisa, não se apresenta como uma proposta rigidamente estruturada, ela permite que a imaginação e a criatividade levem os investigadores a propor trabalhos que explorem novos enfoques (1995, p.4).

A pesquisa tem como objetivo geral:

- estudar a produção escrita de alunos de 8ª série do Ensino Fundamental na Prova de Questões Abertas de Matemática da Avaliação Estadual do Rendimento Escolar do Paraná – AVA/2002.

E como objetivos específicos:

- compreender de que maneira os alunos lidam com as informações contidas nos enunciados das questões e a utilização que fazem delas;
- inventariar e analisar os acertos e erros mais freqüentes e sua natureza;
- identificar as estratégias/procedimentos mais utilizados.

Face à opção metodológica adotada, foi realizado um estudo interpretativo e para tanto recorreu-se às técnicas de Análise de Conteúdo, visto o interesse nos sentidos dos textos produzidos pelos alunos ao resolverem uma prova.

Embora para alguns esta estratégia possa parecer algo novo, este método já era utilizado na década de 70 (FRANCO, 1994 p.52).

A análise de conteúdo aparece como um conjunto de técnicas de análise das comunicações, que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens. [...] A intenção da análise de conteúdo é a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção (ou, eventualmente, de recepção), relativamente a "outras coisas" (BARDIN, 1977, p.38) (grifo do autor).

Pode-se dizer que a Análise de Conteúdo é um conjunto de técnicas que permitem a exploração e análise das informações de uma pesquisa. É por meio da Análise de Conteúdo que é possível retirar informações contidas num texto, interpretá-las podendo assim relacioná-las ao contexto em que se deu determinada produção. Esta forma de análise leva o pesquisador, depois de muito estudo, a criar categorias, agrupando unidades de análise semelhantes, fazendo inferências sempre que necessário e possível.

No sentido da maneira como a interpretação das informações serão utilizadas numa pesquisa, Bardin, (1977) lembra que, o interesse da pesquisa não consiste apenas em descrever os conteúdos presentes nos dados, mas também em como os dados, após serem tratados, podem contribuir para a construção do conhecimento.

Esse método exige do pesquisador a busca constante de conhecimentos. Ele necessita de uma fundamentação teórica que sustente a investigação. Contudo, essa fundamentação não está pronta e acabada quando a pesquisa é iniciada. Ela se constrói antes e durante o trabalho, de acordo com a necessidade.

Trabalhar com Análise de Conteúdo requer um olhar atento para desvendar o que está visível e principalmente o que está oculto no material estudado. É este olhar que indica a necessidade da busca de novos estudos, os

quais permitirão a aquisição de novos conhecimentos que, por sua vez, possibilitarão a melhor interpretação dos dados.

“O objetivo de toda análise de conteúdo é o de *assinalar e classificar de maneira exaustiva e objetiva todas as unidades de registro existentes no texto*” (QUEIROZ, p.6) (grifo do autor). E isso é o que se pretende fazer nesta investigação, ‘enxergar’ todas as informações possíveis registradas pelo aluno, a respeito dos conhecimentos que ele já construiu, dos que não construiu.

Para que a investigação possa acontecer desta forma, serão necessárias, muitas idas e vindas tanto aos registros presentes nas Provas, quanto à fundamentação teórica, sempre que surgirem dificuldades em visualizar as entrelinhas.

Como coloca Buriasco (2002), existe uma imagem de que a matemática ensinada nas escolas parece ser algo incompreensível e quase inacessível. E, segundo ela,

[...] a mudança dessa imagem depende também de uma mudança na concepção e nas práticas de avaliação, e a reflexão nesse campo deveria procurar despertar para a importância de se considerar que a avaliação também deva dar oportunidade para os alunos demonstrarem o que podem e sabem fazer, e não apenas evidenciar o que eles não sabem (p.257).

É com este olhar que as Provas serão observadas, estudadas e interpretadas, buscando perceber o que os alunos tentaram mostrar a respeito do que sabem e do que ainda não sabem. Isso será feito não como forma de julgamento, mas como forma de evidenciar a importância do estudo da produção escrita dos alunos para a busca de implementar estratégias de aprendizagem.

3.2 Das Provas

O estudo dos registros escritos presentes nas resoluções das questões foi desenvolvido em vários momentos. O primeiro momento consistiu em olhar cada Prova inteira, observando a forma como os alunos procuraram resolver as questões, se dominavam ou não os algoritmos utilizados por eles, se os dados da questão foram retirados adequadamente.

A partir daí, num segundo momento, iniciou-se o estudo da questão 1 de todas as Provas. O registro de cada resolução era observado e, em seguida,

registrado brevemente num quadro⁵. O mesmo procedimento foi efetuado com as 4 questões da Prova.

Num terceiro momento, foi feita a descrição e análise da produção escrita, as questões foram estudadas uma a uma. Por exemplo, estudaram-se todas as resoluções da Questão 1, e assim sucessivamente, comparando com a primeira descrição que já havia sido feita.

Em seguida, olhando mais atentamente o início das resoluções, foi possível agrupar as resoluções de acordo com a semelhança na escolha do primeiro procedimento.

Cada agrupamento formado foi chamado de “Grupo”. Assim, foi possível formar, em cada questão, de 4 a 6 grupos. No entanto, há resoluções que não foram enquadradas em grupo algum, já que não tinham critérios muito comuns às demais, e assim foram analisadas de forma particular.

É importante deixar claro que a análise das Provas foi feita de maneira ‘horizontal’ e ‘vertical’. A análise ‘horizontal’ consistiu em estudar a Questão 1 de todas as Provas, por exemplo. E, na análise ‘vertical’, as Provas eram estudadas individualmente como um todo, ou seja, todas as questões de uma mesma Prova, com o objetivo de saber um pouco mais a respeito de quais aspectos já eram dominados por determinado aluno, se as situações equivocadas que ele apresentou na resolução de uma questão estavam também presentes em outra; se havia alguma forma de saber se esses equívocos eram causadas, por exemplo, por alguma dificuldade que ele possuía ou por distração.

Para realizar esse estudo sobre a produção escrita de alunos de 8ª série na Prova de Questões Abertas de Matemática da Avaliação Estadual de Rendimento Escolar do Paraná – AVA/2002, foi formada uma amostra com base nas provas que foram aplicadas em turmas de 8ª série.

No dia da aferição estadual, em cada sala de aula, no momento em que os alunos entregavam a Prova resolvida, sempre a quinta Prova era separada das demais e encaminhada para a SEED⁶.

A partir daí, o Paraná foi dividido em 10 meso-regiões geográficas, para que então, do montante das Provas encaminhadas para a SEED fosse retirada uma amostra significativa de 422 Provas de 8ª Série. No entanto, considerado o tempo que se tinha para realizar este estudo, não seria possível fazê-lo utilizando esta amostra inteira. Isso fez com que se utilizassem na pesquisa uma parte dela.

⁵ A breve descrição das resoluções dos alunos referentes a cada questão, encontram-se no Apêndice A.

⁶ Secretaria de Estado da Educação do Paraná.

Para que se tivesse algum conhecimento sobre o que havia de registros escritos nas Provas, antes de se iniciar o processo de seleção da amostra com a qual seria desenvolvida esta investigação, as 422 Provas foram corrigidas, utilizando-se para isso o Manual para Correção das Provas com Questões Abertas de Matemática – AVA/2002⁷.

As questões totalmente corretas receberam o crédito completo representado pelo **código 2**. O título “**crédito parcial**”, representado pelo **código 1**, foi “... utilizado para codificar procedimentos/respostas em que o aluno respondeu satisfatoriamente parte da questão, mesmo que a outra parte esteja completamente errada” (BURIASCO, CYRINO, SOARES, 2003) (grifo do autor). “ **O código 0 (zero)** foi utilizado para respostas em que há evidência de que o aluno realizou uma tentativa, ainda que mal sucedida, para responder à questão” (BURIASCO, CYRINO, SOARES, 2003) (grifo do autor). Caso houvesse alguma questão em branco, esta recebia o **código 9**. Cada Prova recebeu uma identificação formada pela letra inicial do local onde ela foi corrigida (C de Curitiba ou L de Londrina), o código da mesoregião e o número segundo a ordem em que ela se encontrava (001,002...). Por exemplo, na Prova 8C01009 - 8 indicando a 8ª série, C indicando que foi corrigida em Curitiba, 01 porque pertence a meso-região 01 e 009 porque foi a nona Prova corrigida nesta meso-região.

A quantidade selecionada para estudo consiste então em uma outra amostra, feita por conveniência, selecionada a partir das 422 Provas.

Conjeturou-se que se teria tempo e condições para estudar em torno de 50 Provas. Assim, uma planilha foi organizada com o intuito de visualizar melhor as informações contidas nas 422 provas que formam a amostra da SEED, para que então se pudesse selecionar uma amostra menor com a qual trabalhar para realizar este estudo.

Com a ajuda da consultora de Estatística desta pesquisa⁸, decidiu-se que não seria estudada a produção escrita de alunos da 8ª série que não estivessem com a relação idade/série adequada, pois é possível que sua produção e sua forma de resolver as questões possam ter sofrido influência pela questão da repetência. Assim todas as Provas que foram estudadas são de alunos com a relação idade/série adequada.

⁷ Este manual foi elaborado pelas consultoras da AVA para a área de Matemática, professoras Regina Luzia Corio de Buriasco (UEL - PR), Maria Tereza Carneiro Soares (UFPR) e Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino (UEL - PR) a partir da correção de aproximadamente 1100 Provas, que se deu em dois momentos: um em Curitiba e outro em Londrina, da qual participaram um total de aproximadamente 180 professores de Matemática de escolas estaduais paranaenses.

⁸ Professora Dra. Tiemi Matsuo, docente do Departamento de Estatística e Matemática Aplicada da UEL.

Desta forma foram excluídas 178 Provas. Observando as 244 Provas que restaram, percebeu-se que havia poucas Provas, apenas 7, que apresentavam na Questão 4 (que era dividida em 3 itens) uma resolução correta em mais de 1 item. Sendo assim, decidiu-se por selecionar estas 7 Provas, para que houvesse uma garantia de que este tipo de produção escrita da Questão 4 também pudesse ser estudada.

Das 237 Provas restantes, retiraram-se todas as que tinham ao menos um código 9, ou seja, Provas em que os alunos deixaram uma ou mais questões totalmente em branco, num total de 99 Provas.

Como se havia optado por estudar aproximadamente 50 Provas, utilizou-se o programa computacional Excel, para realizar uma Amostragem Sistemática⁹ com constante de amostragem $K=3$, em que o número sorteado aleatoriamente entre 1 e 3 foi o 1. Assim, das 138 Provas restaram apenas um terço delas.

Este cálculo permitiu a escolha de 46 Provas, que somadas às 7 retiradas anteriormente por conveniência (de ter a Questão 4 com 2 itens corretos), formaram a amostra de 53 Provas, contemplando as 10 meso-regiões do estado, tal como mostra a tabela 1:

Tabela 1 – Quantidade de Provas que compõe a amostra estudada por meso-região

Meso-Região		Quantidade de Provas
Código	Nome	
01	Norte Pioneiro	4
02	Sudeste	1
03	Metropolitana	12
04	Oeste	8
05	Norte Central	11
06	Centro Oriental	4
07	Sudoeste	3
08	Noroeste	5
09	Centro Ocidental	2
10	Centro Sul	3
TOTAL		53

As informações contidas na folha de rosto das 53 Provas foram registradas nos gráficos a seguir:

⁹ Trata-se de uma variação da amostragem aleatória simples, conveniente quando a população está ordenada segundo algum critério. FONSECA, Jairo Simon da; MARTINS, Gilberto de Andrade (1996)

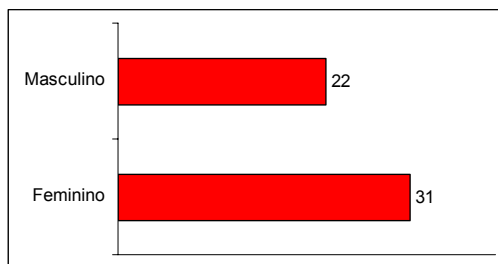


Figura 1- Gênero dos alunos que resolveram a Prova

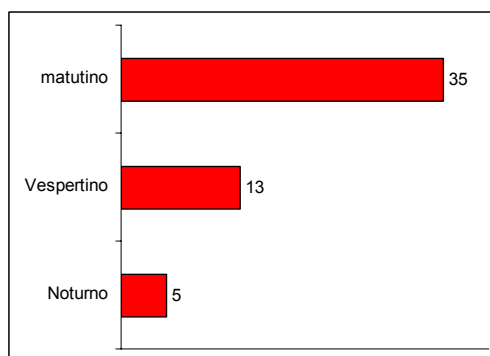


Figura 2 – Período em que estudam os alunos que resolveram a Prova

Por meio das figuras, observa-se que a maioria dos alunos que resolveu a Prova, 58,5% são do sexo feminino e que 66,0% do total estuda em período matutino, lembrando ainda que a idade destes alunos varia entre 13 e 14 anos, critério de seleção da amostra.

Os alunos tiveram a oportunidade de registrar ainda, na última folha, as impressões que tiveram ao resolver a Prova, em que se destacam:

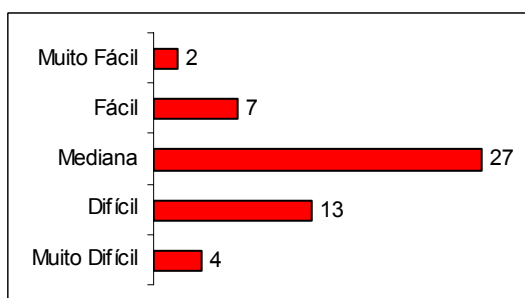


Figura 3 – Impressões dos alunos sobre a Prova

Por meio da Figura 3, observa-se que a maioria dos alunos, 50,9%, julgou a dificuldade das questões da Prova como mediana e, apenas 17% responderam que a Prova estava entre 'fácil' e 'muito fácil'.

Por meio da Figura 4 constata-se que a maioria dos alunos, 68%

julhou as Questões 1 e 2 como as mais fáceis.

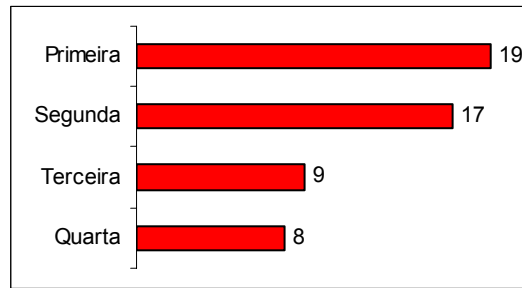


Figura 4 – Questão mais fácil segundo os alunos

A Figura 5 mostra que 50,9% dos alunos apontam a Questão 4 como a mais difícil.

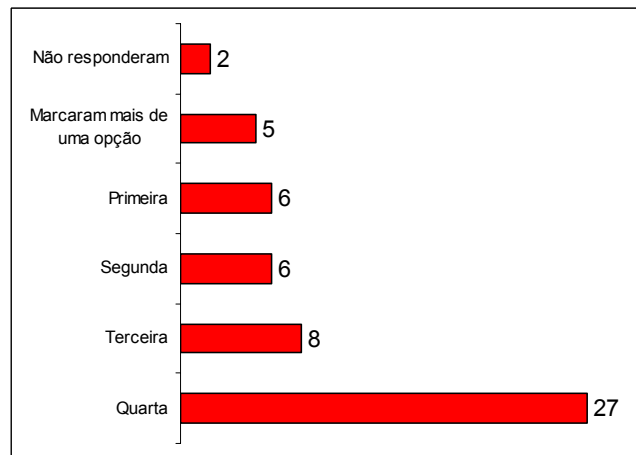


Figura 5 – Questão mais difícil segundo os alunos

A respeito do tempo que os alunos dispunham para resolver a Prova, ele parece ter sido suficiente, como mostra a Figura 6.

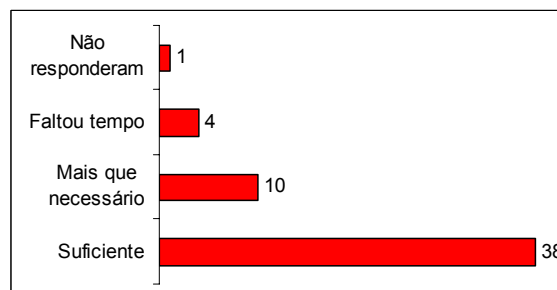


Figura 6 – Tempo destinado à resolução da Prova

4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA

4.1 Questão 1

A Questão 1 presente na Prova de Questões Abertas de Matemática – AVA/2002 da 8ª série é a seguinte:

Um encanador A cobra por cada serviço feito um valor fixo de R\$60,00 mais R\$18,00 por hora de trabalho. Um outro encanador B cobra um valor fixo de R\$24,00 mais R\$36,00 por hora de trabalho. Sendo t o tempo, medido em horas, para quais valores de t o encanador A fica mais barato que o B?

Além da Prova da 8ª série, esta questão encontra-se na Prova da 3ª série do Ensino Médio. Os alunos, ao resolverem esta questão, poderiam utilizar diferentes estratégias e conteúdos. Poderiam empregar desde o método da tentativa e erro até a montagem de funções que representariam os custos.

Observando-se as 53 Provas que compõem a amostra em estudo, foi possível montar a tabela abaixo, que mostra o desempenho dos alunos nesta questão:

Tabela 2 - Classificação das resoluções da Questão 1 quanto ao desempenho

RESOLUÇÃO	NÚMERO DE ALUNOS	%
Totalmente correta	6	11,3
Parcialmente correta	10	18,9
Incorreta	37	69,8
TOTAL	53	100,0

Como era esperado, foram encontradas, na produção registrada nas provas, encaminhamentos diferentes na resolução da Questão 1. Para facilitar a apresentação dessa descrição e análise do registro escrito dos alunos, as resoluções semelhantes foram agrupadas. No total há 6 grupos que serão apresentados a seguir.

Grupo 1

Foram encontradas 14 Provas nas quais, para resolver a Questão 1, os alunos não calcularam o custo dos encanadores para um tempo maior que uma hora.

Quadro Resumo 1 – Provas que não apresentam o cálculo do custo dos encanadores para $t > 1$

16 provas apresentam registro do custo dos dois encanadores apenas para $t=1$	10 provas não apresentam outros procedimentos	Todas as provas apresentam resolução incorreta
	6 provas apresentam outros procedimentos	5 provas apresentam resolução incorreta
		1 prova apresenta resolução parcialmente correta

Por meio deste quadro resumo observa-se que dos alunos que não calcularam os custos dos encanadores A e B para tempos superiores a 1 hora, apenas um acertou parcialmente a questão.

Os 10 alunos que não utilizaram outro procedimento, além de encontrar o custo dos dois encanadores para a primeira hora, parecem não ter percebido que não bastava calcular apenas os valores para $t=1$. Por exemplo:

$$\begin{array}{r}
 60,00 \\
 + 18,00 \\
 \hline
 78,00
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 36,00 \\
 24,00 \\
 \hline
 60,00
 \end{array}$$

O encanador A ficou 18,00 mais barato

Figura 7 – Resolução presente na Prova A27

Esse registro, entre outros, mostra que os alunos não tentaram outros procedimentos, provavelmente por não perceber o que poderia acontecer com os preços cobrados com o passar das horas. Talvez não tenham prestado atenção aos valores cobrados por cada profissional, pois, como o encanador B cobrava um valor fixo baixo em relação ao encanador A, e seu preço por hora era o dobro do outro, com o passar das horas, seu serviço se tornaria mais caro que o cobrado pelo encanador A.

Dentre essas 10 Provas, há o registro de uma única resolução incorreta de um algoritmo. Ao encontrar o valor cobrado pelo encanador B para a primeira hora de trabalho, o aluno soma $24 + 36 = 59$, ou seja, ele soma incorretamente $4 + 6 = 9$, o que faz com que erre a operação.

Observando a prova inteira deste aluno, percebe-se que ele realiza

sem dificuldade os demais cálculos durante a resolução da Prova, o que leva a pensar que ele pode ter errado esta operação por distração, não por falta de domínio do processo do algoritmo.

Entre as 6 Provas que apresentaram o registro de outros procedimentos além do cálculo do custo dos dois encanadores para a primeira hora, encontramos 2 resoluções em que os alunos efetuaram corretamente uma operação de subtração, encontrando a diferença entre o custo dos encanadores A e B, ou seja, $78 - 60 = 18$.

Após a operação, os alunos registram na resposta que o encanador A fica R\$18,00 mais barato que o B. Mas, na verdade para a primeira hora de trabalho, é o encanador B que cobra um valor menor.

As respostas encontradas nestas duas Provas parecem mostrar que, além dos alunos não terem percebido que o comportamento dos dois custos poderia mudar com o passar das horas, ainda cometeram um erro no sentido de não observar que o encanador A era mais caro que o B por uma hora de serviço.

Numa terceira e quarta Prova dos alunos que apresentaram outros procedimentos, observa-se que, após o cálculo do custo dos dois encanadores para a primeira hora, o procedimento adotado nas duas resoluções foi também uma operação de subtração. Mas neste caso, os alunos utilizam os valores cobrados pelos encanadores em cada hora de serviço, assim: $36 - 18 = 18$. Estes dois alunos também respondem que o encanador A fica R\$18,00 mais barato que o B.

Na outra Prova em que o aluno não acerta a questão, após calcular o valor que cada encanador cobra por uma hora de trabalho, este aluno encontra o valor que cada encanador cobra por minuto. Em seguida, ele registra ao lado das operações que efetuou, os números 4680 e 3600, o que parece ser o resultado das operações 78×60 e 60×60 respectivamente. Há ainda o registro de outra operação $4680 - 3600 = 1080$. Não há registro de resposta nesta resolução.

Este caso parece mostrar que talvez este aluno não soubesse resolver esta questão, pois, além de resolver operações que não o auxiliariam a resolver corretamente o que o enunciado estava propondo, ainda o fato dele não apresentar resposta pode indicar que ele não costuma escrever respostas das questões que resolve, tenha esquecido de colocar a resposta ou, ainda, poderia não estar satisfeito com sua resolução e ter desistido de tentar resolver esta questão, por isso não escreve a resposta.

O aluno deste grupo que acerta parcialmente a questão apresenta

uma resolução um pouco confusa (Figura 8). Para a primeira hora de trabalho ele parece entender o que acontece, mas não registra esse resultado de maneira clara.

Quando ele efetua $78 + 60 = 138$, adota um procedimento desnecessário para a resolução desta questão. E, o procedimento indicado por C, parece incorreto, pois R\$36,00 não era o valor fixo, era o valor cobrado por hora pelo encanador B. O resultado 72 pode ser obtido por meio da multiplicação $24 \times 3 = 72$, no entanto, 24 correspondia ao valor fixo e não ao preço cobrado por hora. E a segunda indicação da operação pode ser interpretada como $18 \times 3 = 54 + 36 = 90$ ao contrário de 92, como foi registrado pelo aluno.

Nas duas operações indicadas no procedimento C, percebe-se que o aluno relaciona os valores do enunciado de maneira incorreta, mas, mesmo assim, consegue responder à questão de maneira correta, pois, de fato, a partir de 3 horas de trabalho o encanador A fica mais barato.

Encanador A $\begin{array}{r} 60,00 \\ + 18,00 \\ \hline 78,00 \end{array}$
 Preço R\$ 78,00

Encanador B $\begin{array}{r} 24,00 \\ + 36,00 \\ \hline 60,00 \end{array}$
 Preço R\$ 60,00

Encanador B fica mais barato 78,00 por apenas 38,00 mais do que o encanador A.
 $\begin{array}{r} 78,00 \\ - 60,00 \\ \hline 18,00 \end{array}$

$\begin{array}{r} + 78,00 \\ + 60,00 \\ \hline 138,00 \end{array}$
 a partir de 3 horas é mais ele vai ser que trabalho.

$36,00 + 3 \text{ horas} = 72$
 $54,00 + 3 \text{ horas} = 92$

Depois de 3 horas ele fica mais barato.

C

Figura 8 – Resolução presente na Prova A23

Grupo 2

Este grupo é formado por 6 Provas em que os alunos não desenvolvem nenhum cálculo ou estratégia de resolução, mas escrevem uma resposta para a questão.

Quadro Resumo 2 – Provas em que há registro da resposta sem desenvolvimento de alguma estratégia

6 provas não apresentam registros de resolução, apenas a resposta	2 provas apresentam, além da resposta, a indicação dos custos dos dois encanadores, retirados do enunciado, sem cálculos ou resultados	Todas as provas apresentam resposta incorreta
	4 provas apresentam apenas o registro da resposta	

Nessas 6 Provas não há registros de que os alunos realizaram algum tipo de procedimento para resolver a questão, nem mesmo apresentam marcas de algum procedimento que possa ter sido apagado. O que dá a impressão é que eles não compreenderam o enunciado da questão e, com isso, não apresentam procedimento algum de resolução.

Ao olhar a prova toda desses alunos, percebe-se que um deles faz a mesma coisa em todas as questões, ou seja, não apresenta procedimentos ou registros de operações, apenas a resposta. Os demais, mesmo que incorretamente, utilizam alguma estratégia para tentar encontrar a resposta das questões.

Há duas dessas respostas que chamam mais atenção. Em uma, (Figura 9), parece que o aluno conseguiu interpretar o significado dos dados do enunciado, no entanto, poderia não saber como resolver a questão, ou realmente não compreendeu o solicitado. Fica difícil entender o motivo que o levou a escrever que o encanador A faz o serviço mais rápido.

Por que o encanador A cobra mais caro pela trabalho fixo e menor pela mão-de-obra e faz mais rapido o serviço

Figura 9 – Resolução presente na Prova A46

Quanto à próxima resposta, mesmo não efetuando cálculos na prova e respondendo incorretamente a questão, este aluno consegue perceber que, devido ao preço cobrado por hora pelo encanador A ser bem menor que o encanador B, conforme as horas vão passando, o preço do encanador A se torna menor, o que mostra que ele compreendeu a questão. No entanto, ele não registra qual é o momento em que isso acontece, ou seja, a partir de quantas horas o encanador B

se torna mais barato.

Daria mais barato quanto maior for o tempo trabalhado

Figura 10 – Resolução presente na Prova A3

Grupo 3

Há quatro resoluções em que os alunos efetuam uma ou mais operações de subtração utilizando os dados presentes no enunciado da questão.

Quadro Resumo 3 – Provas em que há resolução de uma ou mais subtrações com os dados do enunciado

4 provas apresentam resolução de uma ou mais subtrações	3 provas apresentam apenas o registro da operação $36 - 18 = 18$ e uma resposta incorreta
	1 prova apresenta os registros das operações $60 - 24 = 36$ e $36 - 18 = 18$ e não escreve resposta

Nas 3 Provas em que há apenas a operação $36 - 18 = 18$, os alunos respondem que o encanador A fica R\$18,00 mais barato. E o outro aluno registra e resolve apenas duas operações $60 - 24 = 36$ e $36 - 18 = 18$ sem registrar resposta.

Novamente, parece que eles não compreenderam exatamente o que pedia a questão, e mais, não utilizaram adequadamente as informações de que dispunham, pois na operação que resolvem é possível apenas encontrar a diferença cobrada pelos encanadores por hora de serviço.

No caso do aluno que efetua duas subtrações, ele parece ainda ter abandonado a resolução da questão, pois em sua prova há sinais de muitas tentativas realizadas que foram apagadas.

Grupo 4

Nestas provas encontra-se a resolução por meio de operações de adição e multiplicação em que os alunos calcularam os custos dos encanadores para até, no máximo, três horas de serviço.

Quadro Resumo 4 – Provas em que há registro do cálculo dos custos dos encanadores, no máximo até a terceira hora

10 provas há registro dos custos dos dois encanadores até no máximo a terceira hora de trabalho	2 provas apresentam resolução totalmente correta
	5 provas apresentam resolução parcialmente correta
	3 provas apresentam resolução incorreta

Entre as 2 Provas que apresentaram resolução totalmente correta, observa-se em uma, o seguinte registro:

$$\begin{array}{l}
 \text{Uma hora} \\
 \left. \begin{array}{l} A = 60,00 + 18,00 \cdot 1 \\ A = 60,00 + 18,00 \cdot 1 \\ A = 60,00 + 18,00 \\ A = 78,00 \text{ reais} // \end{array} \right\} \begin{array}{l} B = 24,00 + 36,00 \cdot 1 \\ B = 24,00 + 36,00 \cdot 1 \\ B = 24,00 + 36,00 \\ B = 60,00 \text{ reais} // \end{array} \\
 \hline
 \text{Duas horas} \\
 \left. \begin{array}{l} A = 60,00 + 18,00 \cdot 2 \\ A = 60,00 + 36,00 \\ A = 96,00 \text{ reais} // \end{array} \right\} \begin{array}{l} B = 24,00 + 36,00 \cdot 2 \\ B = 24,00 + 72,00 \\ B = 96,00 \text{ reais} // \end{array} \\
 \hline
 \text{3 horas} \\
 \left. \begin{array}{l} A = 60,00 + 18,00 \cdot 3 \\ A = 60,00 + 54,00 \\ A = 114,00 \text{ reais} // \end{array} \right\} \begin{array}{l} B = 24,00 + 36,00 \cdot 3 \\ B = 24,00 + 108,00 \\ B = 132,00 \text{ reais} // \end{array}
 \end{array}$$

R = A fica mais barato quando t é igual ou maior que 3 horas.

Figura 11 – Resolução presente na Prova A17

A Figura 11 mostra que o aluno utiliza-se do cálculo de multiplicação e adição para encontrar o custo dos dois encanadores para as três primeiras horas. Neste caso, parece que o aluno pretendia observar o comportamento daquela situação, por isso fez os cálculos um a um, para ver qual seria o momento em que um se tornaria mais barato que o outro.

É possível inferir que esse aluno compreendeu e interpretou corretamente a questão. Sua resolução é organizada, e bem definida, ou seja, ele parecia saber o que estava fazendo.

Na outra Prova com resolução correta, o aluno calcula apenas o custo para a terceira hora. É possível que o aluno já tenha estimado um tempo, nem muito curto nem muito longo em que fosse possível ver o que acontecia com os custos e, ainda, talvez ele tenha feito mentalmente o cálculo da primeira hora, para então calcular a terceira.

Nas 5 Provas que apresentam resolução parcialmente correta, há registro de todos os cálculos corretos. Os alunos encontram os custos dos dois encanadores para as três primeiras horas. No entanto, não elaboram uma resposta capaz de satisfazer o enunciado da questão. Exemplo disso é a resolução apresentada na Figura 12.

O encanador A cobrará
 o v.f. (R\$60,00) + o valor por
 3 horas (R\$ ~~18,00~~^{54,00}) e terá cobrado um total R\$ 114,00
 O cobrador B, apesar do v.f ser baixo terá cobrado
 muito pelas 3 horas e no total vai sair por R\$ 132,00.

Figura 12 – Resolução presente na Prova A15

O aluno encontra uma estratégia capaz de resolver a questão e efetua corretamente todos os cálculos. Mostra, pela resposta dada, que parece compreender o que aconteceu na situação, no entanto, aquilo que escreve, não era o que a questão estava pedindo.

No registro apresentado a seguir, o aluno mostra que compreendeu o enunciado da questão, escolhe um procedimento adequado para resolvê-la e ainda, parece chegar a uma conclusão. No entanto, ele não elabora uma resposta que satisfaz ao enunciado.

<p>Encanador A</p> <p>R\$ 60,00</p> <p>1h + R\$ 18,00</p> <p>1h + R\$ 18,00</p> <hr/> <p>2h = R\$ 96,00</p> <p>1h = R\$ 18,00</p> <hr/> <p>3h = R\$ 114,00</p>	<p>Encanador B</p> <p>R\$ 24,00</p> <p>1h + R\$ 36,00</p> <p>1h + R\$ 36,00</p> <hr/> <p>2h = R\$ 96,00</p> <p>+ 1h = R\$ 36,00</p> <hr/> <p>3h = R\$ 132,00</p>
---	--

Primeiro remei duas horas de cada encanador para ver qual deles sairia mais barato. No fim da primeira conta os dois cobraram quantias iguais, aí fiz mais 1h para ver qual sairia mais barato após 3 horas.

Figura 13 – Resolução presente na Prova A42

É importante ressaltar que ele utiliza uma estratégia muito importante, a de descrever sua resolução. Em uma prova bimestral, por exemplo, o professor, por meio da descrição do aluno, teria condições de perceber a compreensão que este teve da questão, e mais, se a estratégia utilizada por ele faria ou não sentido. Daí a importância do registro dos alunos, não somente nas provas, mas nas atividades desenvolvidas em sala, pois é neste momento também que o professor tem a oportunidade de observar como o aluno está construindo seus conhecimentos.

Nas 3 Provas que apresentaram resolução incorreta, há erros na resolução dos algoritmos para encontrar os custos dos encanadores.

Um dos alunos erra uma adição encontrando R\$90,00 para o custo da primeira hora do encanador B em lugar de R\$60,00.

Observando seu algoritmo, dá a impressão de que ele sabe resolver uma operação de adição. Nas demais operações registradas em sua prova, não são encontrados erros. Ele errou apenas por distração e não por algum erro conceitual.

O outro aluno comete um erro similar, encontra R\$58,00 para o custo do encanador B, ao contrário de R\$60,00 também no que se refere à primeira hora. Como ele utiliza adições sucessivas, esse erro faz com que o resultado final do custo também fique incorreto. E, no último caso, o aluno multiplica incorretamente $18 \times 3 = 44$.

Nos três casos, analisando as demais operações resolvidas no decorrer da prova de cada aluno, infere-se que esses erros tenham sido causados por nervosismo por estar numa situação de “cobrança” ou provavelmente, por distração e não por falta de domínio dos procedimentos da resolução dos algoritmos.

É importante ressaltar que, mesmo os alunos não tendo cometido erros relativos à utilização dos algoritmos, é bem possível que eles não tivessem acertado totalmente a questão, pois suas respostas não estão elaboradas de maneira a satisfazer o enunciado.

Grupo 5

Fazem parte deste grupo as Provas em que, para resolver a questão, os alunos escrevem funções que representam os custos dos dois encanadores.

Quadro Resumo 5 – Provas em que há registro de funções para calcular os custos dos encanadores

5 provas apresentam funções que representam os custos dos dois encanadores	2 provas apresentam resolução correta
	3 provas apresentam resolução parcialmente correta

Nas 5 Provas, os alunos escrevem corretamente as funções que representam os custos dos dois encanadores e mais, não apresentam registro algum de algoritmos incorretos.

Nas Provas em que há registro da resposta correta, um aluno substitui os valores de 't' até a quinta hora para então responder corretamente a questão. Em sua prova, ele registra todos os cálculos de adição e multiplicação efetuados. O outro aluno substitui os valores de 't' até a terceira hora.

Nestes dois casos os alunos demonstraram saber que, embora o valor cobrado pelo encanador A a princípio fosse mais caro, era necessário observar o comportamento das duas funções para que fosse possível chegar a alguma conclusão.

Os três alunos que acertaram parcialmente a questão, após escrever a função que representa o custo de cada encanador, adotam procedimentos diferentes.

O primeiro apresenta apenas o custo da primeira hora para ambos os encanadores e responde incorretamente que 'O encanador B fica mais barato'.

O segundo apresenta apenas o custo da segunda hora de trabalho para os dois encanadores e responde incorretamente 'Em nada os dois cobram o mesmo preço'.

Nesses dois registros, por meio dos procedimentos adotados, pode-se inferir que esses dois alunos não haviam previsto que, com o passar do tempo, o comportamento daquela situação poderia ser modificado, talvez por isso não tenham efetuado os cálculos para mais horas de trabalho.

Já, o último aluno parece ter compreendido bem o enunciado da questão, como também encontra uma estratégia de resolução coerente com o enunciado, mas, soube como lidar com essa estratégia apenas até certo ponto:

$$\begin{array}{l}
 A: 60,00 + t \cdot 18,00 = 78,00 \quad (1h) \\
 60,00 + 2 \cdot 18,00 = \\
 60,00 + 36,00 = 96,00 \quad (2h) \\
 60,00 + 3 \cdot 18,00 = \\
 60,00 + 54,00 = 114,00 \quad (3h) \\
 \\
 B: 24,00 + t \cdot 36,00 = 36,00 \quad (1h) \\
 24,00 + t \cdot 36,00 = \\
 24,00 + 2 \cdot 36,00 = \\
 24,00 + 72,00 = 96,00 \quad (2h) \\
 24,00 + 3 \cdot 36,00 = \\
 24,00 + 108,00 = 132,00 \quad (3h) \\
 \\
 \begin{array}{r}
 60,00 + 18,00t - (24,00 + 36,00t) \\
 60,00 + 18,00t - 24,00 - 36,00t = \\
 \cancel{36,00} - \cancel{24,00} \\
 36,00 - 18,00t = \\
 18,00t = 36,00 \\
 t = \frac{36,00}{18,00} \\
 \boxed{t = 2h}
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 14 – Resolução presente na Prova A38

Neste caso o aluno atribui valores de 1 a 3 nas funções para encontrar os custos dos dois encanadores até a terceira hora. Em seguida, ele iguala as funções procurando o valor de 't'. Até este momento o aluno utilizou adequadamente sua estratégia. Mas, ao encontrar 't=2', ele não interpreta o que isso significava. Seus cálculos permitiram que ele encontrasse em que momento os custos dos dois encanadores eram iguais e não o momento em que o encanador A ficaria mais barato que B. Sendo assim, acerta parcialmente a questão.

Grupo 6

Neste grupo estão as Provas em que há registro do cálculo dos custos dos encanadores para até 6 horas de trabalho.

Quadro Resumo 6 – Provas em que há registro do cálculo dos custos dos encanadores, no máximo até a sexta hora

5 provas há registro dos custos dos dois encanadores até no máximo a sexta hora de trabalho	2 provas apresentam resolução totalmente correta
	3 provas apresentam resolução incorreta

Das 2 Provas em que os alunos respondem corretamente a questão, em uma delas há registro dos custos até a quinta hora e outra até a sexta hora.

Esses dois alunos mostram que sabiam que era necessário observar o comportamento da situação apresentada, ou seja, eles pareciam compreender o que aqueles dados significavam. Perceberam que, como o valor fixo de A era alto e seu custo por cada hora de trabalho era baixo em relação ao encanador B, com o passar do tempo o comportamento destes custos poderia mudar. O preço cobrado pelo encanador A, com o passar do tempo, se tornaria mais barato, restava então perceber quando isso aconteceria. Por isso eles calculam os custos dos encanadores hora a hora, até encontrar o momento que B se tornaria mais caro que A.

É importante ressaltar que, ao encontrar o custo da terceira hora, eles devem ter percebido que o encanador A já era mais barato, mas, continuaram a calcular para ter certeza de que isso continuaria assim.

Entre os que erraram a questão, um calcula apenas o valor cobrado pelos encanadores para 6 horas de trabalho e responde incorretamente. Outro aluno calcula os valores para a quinta hora e em seguida faz a diferença entre esses dois custos e utiliza este valor para elaborar incorretamente uma resposta. E, no último caso, o aluno utiliza-se de valores equivocados para efetuar os cálculos dos valores cobrados pelo serviço. Em alguns momentos, ele utiliza o valor fixo para multiplicar pela quantidade de horas trabalhadas. Assim, os valores que registra para os custos são incorretos. Desta forma, ele responde incorretamente a questão. Neste caso, por meio da resposta registrada, observa-se que, caso ele não tivesse se enganado ao utilizar os valores para encontrar os custos, é bem provável que ele saberia como responder corretamente a questão.

Além das Provas já comentadas, restam ainda 7 em que foram utilizados procedimentos diferentes entre si. O que há de comum entre as resoluções é o fato de que, em nenhuma das Provas, há estratégias capazes de resolver a questão. Os alunos utilizam cálculos diversos, os quais não permitem a resolução correta da questão. Em todos os casos os alunos mostram dificuldades para encontrar uma estratégia eficiente de resolução, talvez por não terem compreendido o enunciado da questão. Desses, há 3 alunos que, para encontrar os custos utilizam-se apenas dos valores cobrados por hora, esquecem-se de somar o valor fixo. Assim, respondem incorretamente.

Há um aluno que apresenta, sem cálculos, apenas uma resposta que nada mais é do que a descrição de como calcular 2 horas de trabalho para os dois encanadores. Um outro aluno monta incorretamente uma regra de três, utilizando os quatro valores do enunciado, sem incógnita. Efetua cálculos e responde incorretamente a questão.

A figura abaixo mostra a resolução de ainda outro aluno em que ele utiliza os valores cobrados por hora por cada encanador para fazer uma divisão e, mais, utiliza o valor do resultado da operação para escrever a resposta.

$$\frac{hA}{hB} = t \quad \frac{36}{18} = \boxed{2}$$

~~Encanador A fica mais barato, por l. h.~~
 Encanador A fica mais barato, por l. h.

Figura 15 – Resolução presente na Prova A37

E, no caso da Figura 16, apresenta-se a resolução da última Prova analisada. O aluno que a resolveu mostra ter dificuldades, pois em toda a sua prova, além de escolher procedimentos que não resolvem a questão, as resoluções das operações sempre estão incorretas, o que mostra que não domina os algoritmos das operações. Neste caso, ele efetua uma multiplicação associando valores que, por sua vez, não podem ser relacionados dessa maneira. E mais, ao terminar seu cálculo, ele não percebe que, multiplicando aqueles valores, o valor encontrado deveria ser muito maior e não menor do que um dos valores multiplicados.

$$\begin{array}{r} 60,00 \\ 24,00 \quad 14 \text{ reais} \\ \hline \times 0000 \\ 0000 + \\ 0000 + \\ 14,000 + \\ \hline 14000 \\ \hline 14 \\ \hline 14 \end{array}$$

Figura 16 – Resolução presente na Prova A10

A respeito das respostas que os alunos registraram na última folha da Prova, observa-se que 6 deles indicaram esta como a questão mais difícil da Prova, e 19 como a questão mais fácil.

Entre os alunos que registraram esta questão como a mais fácil, 4 erraram e 2 acertaram parcialmente. Este caso pode mostrar que o fato dos alunos não terem compreendido o significado real da questão pode fazer com que eles a

julguem fácil. É possível que eles não tenham encontrado dificuldades em resolver a questão, mas terem interpretado o enunciado de modo equivocado.

Dos 19 alunos que a julgaram como a mais difícil, apenas 1 responde corretamente e 5 acertam parcialmente. Embora esses alunos tenham pensado que esta questão era difícil, pode-se dizer que esses 6 conseguiram encontrar alguma estratégia de resolução que permitiu a eles alguma forma de acerto na questão.

Essas informações mostram que nem sempre o que o aluno considera fácil é aquilo que ele acerta e, o fato dele considerar uma questão difícil pode fazê-lo ‘pensar’ um pouco mais para buscar uma estratégia que lhe permita resolver a questão.

4.2 Questão 2

A Questão 2 presente na Prova de Questões Abertas de Matemática – AVA/2002 da 8ª série é a seguinte:

Paguei R\$75,00 por uma saia e uma blusa. A saia foi R\$23,00 mais barata do que a blusa. Qual o preço da saia?

Além da Prova da 8ª série, esta questão, encontra-se Prova da 4ª série do Ensino Fundamental. Ela poderia ser resolvida de mais de uma maneira, utilizando-se diferentes encaminhamentos e conteúdos, desde operações simples de subtração, adição e divisão, até equações ou sistemas de equações.

Das 53 Provas que compõem a amostra em estudo, observamos na produção registrada o seguinte desempenho:

Tabela 3- Classificação das resoluções da questão 2 quanto ao desempenho

RESOLUÇÃO	NÚMERO DE ALUNOS	%
Totalmente correta	20	37,7
Parcialmente correta	0	0,0
Incorreta	33	62,3
TOTAL	53	100,0

No estudo da Questão 2, não houve resolução alguma que fosse considerada ‘parcialmente correta’. Isto se deve ao fato de que, mesmo nas Provas em que havia registro de uma operação, $75 - 23$, por exemplo, que seria um

procedimento que, se fosse continuado corretamente poderia conduzir à resposta certa, ainda assim percebe-se que os cálculos estavam sem ‘direcionamento’. Davam a impressão de que foram retirados dois números do enunciado para ver o que poderia ser feito, por isso não são consideradas parcialmente corretas.

Das 53 Provas analisadas, como já era esperado, encontraram-se formas diversificadas de resolução, no que se refere a esta questão. No entanto, as resoluções semelhantes foram agrupadas. Desta forma, foi possível formar 4 grupos de Provas em que as resoluções tinham algum procedimento em comum, principalmente no início das resoluções.

Grupo 1

A estratégia mais utilizada no início das resoluções da Questão 2 é a de efetuar $75 - 23$.

Quadro Resumo 7 – Provas em que a resolução inicia-se pelo cálculo $75 - 23$

32 provas iniciam a resolução efetuando $75 - 23$	8 provas apresentam resolução totalmente correta	Todas as provas apresentam outras estratégias de resolução além da operação $75 - 23$
	24 provas apresentam resolução incorreta	7 provas apresentam outras estratégias de resolução além da operação $75 - 23$
		17 provas não apresentam outras estratégias de resolução além da operação $75 - 23$

Entre as 8 Provas com registro da resolução correta, todas apresentam a mesma estratégia, após a operação correta $75 - 23 = 52$, há o registro da divisão $52 : 2 = 26$.

O que diferencia as produções entre si é o fato de que 5 alunos fazem a validação da resposta que colocaram, ou seja, utilizam os valores encontrados e testam no enunciado da questão para certificar-se de que a resposta encontrada está correta.

Entre as 24 Provas com resposta incorreta, há 7 que apresentam registro de outros procedimentos além da operação $75 - 23 = 52$. No entanto as tentativas de resolução são incorretas. Os alunos parecem ter interpretado o enunciado equivocadamente.

Dentre as 7 Provas com registro de outros cálculos para resolver a questão, 4 apresentam o registro de outra subtração: $52 - 23 = 29$ e dão como resposta da questão o resultado desta diferença. Estes alunos parecem não ter percebido que a diferença entre as peças já tinha sido encontrada no primeiro cálculo. E que, com o procedimento que utilizaram, eles acabaram encontrando que a saia era 46 reais mais barata do que a blusa e não 23 reais como estava exposto no enunciado.

Dos demais 3 alunos, 1 deles efetua $52 + 23 = 75$, ou seja, o inverso do que acabou de calcular e responde que a saia custa R\$23,00. Neste caso, ele não percebe que, de acordo com sua resposta, a blusa não teve custo algum. Ele parece ter prestado atenção apenas na informação de que a saia era mais barata que a blusa.

Um aluno resolve $23 + 49 = 75$ e responde que a saia é mais barata R\$23,00. O que pode mostrar que este aluno também teve dificuldade em interpretar o enunciado, pois afinal, ele responde o que já estava escrito no enunciado.

Encontramos ainda, entre as resoluções corretas, uma em que o aluno parece compreender a questão e, por isso, encontra uma estratégia eficiente de resolução. E em seguida, algo importante, ele justifica como procedeu sua resolução.

O procedimento de descrição daquilo que foi feito, é talvez um procedimento pouco utilizado, mas que pode auxiliar o aluno a estruturar seu pensamento, a pensar sobre o que acaba de desenvolver e, mais ainda, possibilita uma segunda reflexão, que, por sua vez, pode permitir a correção de algum erro que por ventura possa ter cometido e que venha a perceber neste momento.

$R\$ x = 26,00$
 $R\$ x + 23,00$
 $75,00$
 $23,00$
 $\hline 52,00$
 $12,00$
 $0,00$
 $x 26,00$
 $26 + 23 = 49 + 26 = 75$
 ↓ ↓
 Blusa saia
 Blusa = 49 R\$
 saia = 26

EU cheguei a esta resolução assim: eu tirei os 23,00 reais dos 75,00 reais e sobrou 52,00 que foi dividido por dois, a blusa como era mais cara foi somado a metade de 52 com os 23,00 reais que era o valor mais barato da saia.

Figura 17 – Resolução presente na Prova A47

E, ainda numa última Prova deste grupo, o aluno não percebe que se o valor total foi dividido, a diferença estava inclusa no valor total e, por isso, deveria ser também dividida. Embora todos os seus cálculos estejam corretos, ele não conseguiu perceber este fato, como mostra a figura a seguir:

Paguei R\$75,00.
 $\begin{array}{r} 75,00 \\ - 23,00 \\ \hline 52,00 \end{array}$

a blusa, custou R\$7,50 e a saia custou R\$14,50 e mais os R\$23,00 reais, de que a saia é mais barata do que a blusa então:

$\begin{array}{r} R\$ 37,50 \\ + 14,50 \\ + 23,00 \\ \hline 75,00 \end{array}$

$\begin{array}{r} 75 \overline{) 7512} \\ \underline{6} \\ 15 \\ \underline{14} \\ 10 \\ \underline{10} \\ 0 \end{array}$

Figura 18 – Resolução presente na prova A13

Nas 17 Provas em que não há outro registro além da subtração $75 - 23 = 52$, 13 apresentam o valor 52 como o preço da saia, 3 apresentam o valor 23 e 1 não apresenta resposta, somente o cálculo.

Percebe-se que, entre os 24 alunos que erraram a questão, após terem encontrado os preços das peças de roupa, não houve a preocupação em

somar os valores encontrados, para verificar se, ao relacioná-los com a questão, determinados preços faziam ou não sentido. Caso houvesse essa preocupação, eles poderiam ter percebido que sua resolução estava errada ou incompleta, pois não atendia à situação.

Esse fato parece nos mostrar que talvez os alunos não tenham a prática de validar as respostas para certificar-se de que os valores que foram encontrados nos cálculos de fato podem resolver a situação, como também parecem não ter o hábito de fazer estimativas pensando sobre o problema antes de resolvê-lo. Estimativas no sentido de, após ter lido o problema, pensar a respeito dele antes de começar a resolvê-lo, elaborando uma idéia a respeito de aproximar quais valores seriam possíveis de ser encontrados no problema que acabaram de ler. Isso os auxiliaria a desenvolver o raciocínio e a perceber mais facilmente, se a resposta encontrada é coerente com o problema.

Nestas 32 resoluções há apenas um erro presente nos algoritmos. O aluno faz a adição incorreta: $23 + 49 = 75$. Nas demais operações registradas pelos alunos, embora algumas não resolvam a questão, todas estão calculadas de maneira correta.

Ao estudar a Prova inteira resolvida por este aluno, não são encontrados outros erros no que diz respeito à resolução das 4 operações. O que torna possível inferir que ele errou a soma por distração. Ele parece dominar os cálculos efetuados, mas, mostra não ter total domínio do cálculo de porcentagens, já que apresentou algumas dificuldades na resolução da Questão 4.

Grupo 2

Outra forma bastante utilizada para iniciar a resolução é a divisão $75 : 2$. São 9 Provas que apresentam esse registro.

Quadro Resumo 8 – Provas em que a resolução inicia-se pelo cálculo $75 : 2$

9 provas iniciam a resolução efetuando $75 : 2$	Todas apresentam outras estratégias de resolução além da operação $75 : 2$	4 provas apresentam resolução totalmente correta
		5 provas apresentam resolução incorreta

Entre as Provas que apresentam resolução correta, apenas em uma há registro da validação da resposta. O aluno, após efetuar seus cálculos, verifica se os valores que encontrou satisfazem as exigências da questão. E, entre as Provas com resposta incorreta, nenhuma apresenta qualquer indício de validação da

resposta, o que permitiria aos alunos a possibilidade de perceberem seus erros e encontrar outra estratégia de resolução.

Os alunos que erraram a questão parecem ter encontrado dificuldades na compreensão das informações presentes no enunciado. Não perceberam que, se o valor total da compra foi dividido em duas partes, a diferença entre os preços dos dois produtos também deveria ser dividida.

Nestas 9 Provas, encontram-se 2 algoritmos resolvidos incorretamente, como mostra a figura:

$\begin{array}{r} 75 \\ -6 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \overline{) 1} \\ \hline 0,5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 75 \overline{) 2} \\ 6 \quad 37 \\ \hline 15 \\ \hline 14 \\ \hline 1 \end{array}$
--	--

Figura 19 – Resolução de algoritmos incorretos presentes nas Provas A12 e A43 respectivamente.

Sobre estas operações incorretas, pode-se pensar que talvez os alunos não tenham sido capazes de interpretar o significado dos valores envolvidos no cálculo. Não perceberam que estavam trabalhando com dinheiro e que, por isso, o valor 1 representava R\$1,00, e, portanto poderia ser dividido, ou seja, não prestaram atenção ao sentido que aquele 1, restante na divisão, fazia na situação que estavam resolvendo. Ressalta-se que, do ponto de vista do algoritmo da divisão, sem olhar o contexto da situação e os sentidos dos valores, a operação estaria correta.

Isso gera a hipótese de que, em sala de aula, talvez a prioridade seja resolver algoritmos, sem relacioná-los ao contexto da questão. Há casos ainda em que o professor elabora anteriormente os valores que serão colocados num problema ou atividade, pensando na operação que será resolvida com aqueles números, de modo que esta operação não seja “complicada” para os alunos. Assim eles acabam dominando apenas aquele cálculo de algoritmos com os quais estão acostumados a resolver.

Grupo 3

Continuando o estudo da produção escrita presente na Questão 2 das Provas que compõem a amostra em estudo, foram encontradas ainda algumas resoluções diferentes das já apresentadas.

No que diz respeito aos sistemas de equações com duas incógnitas, eles foram utilizados adequadamente por 3 alunos, que optaram por montar um sistema, resolvendo, assim, corretamente o problema. No momento da resolução do sistema montado por eles, 1 aluno utiliza o método da substituição e 2 o método da adição.

Neste caso, não é possível fazer nenhuma inferência a respeito da resolução de sistemas de equações mais trabalhada em sala de aula, já que o número de alunos que os utilizaram foi muito pequeno. Talvez seja justamente porque poucos tenham reconhecido na questão a possibilidade de utilizarem sistemas de equações.

Grupo 4

Assim como no caso dos sistemas de equações, as equações de primeiro grau com duas incógnitas que, por sua vez traduzem as informações contidas na questão, são utilizadas apenas por 3 alunos. Eles encontram o valor correto para a saia. O que diferencia as 3 resoluções entre si é que 2 alunos montam a equação de modo a encontrar primeiro o valor da blusa, e o outro faz ao contrário.

Além destas 47 resoluções apresentadas, encontram-se ainda 6 que não puderam ser incluídas nos grupos de 1 a 4, pois não possuíam semelhança com os demais registros escritos. Nestas questões, os alunos adotaram procedimentos diferentes dos apresentados nesses grupos.

Destas, 1 aluno apresenta apenas uma resposta incorreta, o valor 23. Ele sequer tentou resolver a questão, pois não há registro algum de tentativa, nem mesmo marcas no papel de algo que tenha sido apagado.

Observa-se que, no caso de 2 Provas com resposta correta, em uma há registro das operações: $75 - 52$, $23 + 26$ e $49 - 26$ e, em outra, o registro apenas da resposta com uma verificação: $26 + 49 = 75$, o que mostra que este aluno pode ter resolvido a questão utilizando cálculo mental, já que não há outro tipo de produção registrada, nem marcas de que algo foi apagado.

Há outra Prova com resposta incorreta, em que o aluno efetua corretamente $75 + 75 = 150$ e $75 - 23 = 52$, respondendo com o valor da última operação realizada. O que mostra mais uma vez a dificuldade destes alunos em refletir melhor a respeito do que resolvem, pois não percebem que o valor encontrado não fazia sentido, pois pela sua forma de resolução, a blusa não teria valor algum.

No caso apresentado a seguir, o aluno, embora não faça o algoritmo da divisão, comete o primeiro equívoco: toma a metade de 75 incorretamente como sendo 35,50. Em seguida, já que ele toma a metade do total das peças de roupa, precisa trabalhar também com a metade da diferença entre as peças, pois a diferença de 23 reais está inclusa no valor total das mesmas. Cometendo esses dois erros, responde incorretamente a questão.

R- Peguei a metade. tirei o tanto a menos da saia o que sobrou foi o preço da ~~saia~~ saia, e a metade mais o tanto a menos é o preço da blusa.

$$\begin{array}{r} 35,5 \\ - 23,0 \\ \hline 12,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35,5 \\ + 23,0 \\ \hline 58,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32,5 \\ + 58,5 \\ \hline 91,0 \end{array}$$

Figura 20 – Resolução presente na Prova A28

No entanto, não se pode deixar de observar a importância da explicação, como já foi comentado, apresentada na Figura 17, em que o aluno coloca a respeito daquilo que faz.

E ainda, das 53 Provas, a última também apresenta resolução incorreta para a situação. O aluno parece relacionar as informações de que dispõe de maneira inadequada. Ao multiplicar o valor total das peças de roupa pela diferença de preço entre elas, ele não chega a lugar algum, pois o resultado desta operação não mostra aquilo que a questão está pedindo, nem mesmo outra informação importante.

Além disso, como mostra a Figura 21, a multiplicação que resolve está incorreta. Observando-a, é possível inferir que este aluno apresenta dificuldades na compreensão do Sistema de Numeração Decimal, e no domínio dos algoritmos das operações.

Esta inferência pode ser feita, pois ao estudar a Prova inteira resolvida por ele, constatou-se que todas as operações que resolve estão incorretas (como por exemplo a Figura 16), e os erros cometidos por ele não demonstram ser erros causados por distração, mas sim conceituais.

Valor 1 ~~23~~ $\frac{15}{23}$ 8 reais e 25 centavos

$$\begin{array}{r}
 225 \\
 50+ \\
 \hline
 8.25 \\
 000 \\
 \hline
 8.25 = 8.25
 \end{array}$$

Figura 21 – Resolução presente na Prova A10

Nesta operação, observa-se também que o aluno parece não ter percebido que, pelos valores multiplicados por ele, o resultado da operação deveria ser bem maior do que o encontrado, o que pode reforçar, mais uma vez, a falta de domínio do aluno sobre a operação efetuada.

Percebe-se que ele sabe que convencionalmente se multiplica primeiro o algarismo da unidade e em seguida o da dezena, para então poder somar os valores. E que, para multiplicar o algarismo da dezena, é necessário deixar ‘a casa’ da unidade sem nenhum valor. Ele também sabe somar. Parece não dominar, entretanto, a posição correta dos numerais numa operação, de acordo com a ordem a que pertencem.

Outro fato relevante que pôde ser observado no estudo desta questão, além dos que já foram comentados, é que poucos alunos apresentaram verificação dos valores encontrados. Nesta questão especificamente, uma simples verificação poderia mostrar se os valores adotados como resposta fariam ou não sentido. E, caso não fizessem, os alunos poderiam encontrar outra maneira para resolvê-la.

Esta situação gera duas hipóteses: ou os alunos não estão habituados a verificar se os valores encontrados nas respostas estão adequados à situação resolvida, ou eles confiam na estratégia utilizada por eles e nos cálculos que efetuam.

Verificou-se que havia apenas quatro registros de algoritmos incorretos na resolução desta questão, e isso leva a crer que os alunos estão dominando a resolução de operações e, mais, esta informação conduz a uma hipótese importante. Ela diz respeito à frequência com que os algoritmos são praticados na escola. Os alunos demonstram estar “treinados” para resolver operações. No entanto, estas parecem descontextualizadas. Pois, embora praticamente todas as operações estejam resolvidas corretamente, a questão não se mostra clara ou “bem interpretada” pelos alunos, já que eles parecem não atribuir

sentido às operações que realizam.

Pretende-se ainda chamar a atenção neste momento para as observações feitas a partir do questionário a respeito das impressões sobre a Prova, em que foi possível observar as relações entre a opinião dos alunos e seus erros e acertos, já que os alunos tiveram a oportunidade de colocar quais das questões presentes na Prova eram, para eles, as mais fáceis e as mais difíceis de resolver.

Dos 20 alunos que resolveram essa questão corretamente, 5 responderam no questionário que esta era a mais fácil, e 2, que era a mais difícil. No entanto observando a produção destes 2 alunos, percebe-se que eles a resolvem sem apresentar várias tentativas, utilizam apenas 2 operações: $75 - 23 = 52$ e $52 : 2 = 26$, o que mostra que eles haviam compreendido a questão.

E, dos 33 alunos que resolveram a questão de maneira incorreta, 12 a apontam como a questão mais fácil, e 4 como a mais difícil. Observando o registro destes 12 alunos, percebe-se que 8 deles apresentam uma resolução simples, sem muitas tentativas, na maioria dos casos apenas uma operação.

Uma inferência possível é que os 12 alunos que apontaram, na última folha da Prova, esta questão como a mais fácil, e que no entanto a erraram, tenham lido o enunciado e a tenham interpretado incorretamente. Assim, resolveram-na com facilidade, acreditando na estratégia que adotaram para a resolução.

Entre os 4 alunos que apontam esta como sendo a questão mais difícil e que a erram, observa-se que em 2 casos os alunos realmente parecem estar com dificuldades na resolução. Tentam, utilizando mais de uma operação, buscar uma maneira de encontrar a resposta correta. Um deles, inclusive, faz cálculos mas não apresenta resposta, o que pode representar a dificuldade por ele encontrada em saber que estratégia utilizar, ou mesmo de não ter 'acreditado' no que havia acabado de resolver.

Estas informações permitem dizer que o fato de um aluno ter julgado uma questão como fácil, nem sempre quer dizer que a questão foi resolvida corretamente, mas sim, ela pode ter sido interpretada equivocadamente e, por isso, ter sido 'simples' de resolver.

E ainda, ao julgar uma questão como difícil, faz com que este aluno tenha que refletir um pouco mais sobre ela e que não, necessariamente, ele a resolva incorretamente.

4.3 Questão 3

A Questão 3 presente na Prova de Questões Abertas de Matemática - AVA/2002 da 8ª série é a seguinte:

Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. Quantos telegramas entregou em cada dia?

O fato desta questão também estar presente nas Provas da 4ª série do Ensino Fundamental e na da 3ª série do Ensino Médio, mostra que ela pode ser resolvida utilizando-se diferentes estratégias, pois é possível que alunos de diferentes idades e séries, ao se depararem com a questão, utilizem diferentes conhecimentos, conteúdos e estratégias para resolvê-la.

De acordo com a amostra de 8ª série utilizada nesta pesquisa, das 53 Provas estudadas, há registro de 42 resoluções diferentes desta questão, ou seja, a produção escrita dos alunos é bem diversificada, o que enriquece este estudo.

Nas Provas que compõem a amostra, antes de estudar mais detalhadamente a produção escrita dos alunos, pode-se constatar o seguinte desempenho no que se refere à Questão 3:

Tabela 4- Classificação das resoluções da Questão 3 quanto ao desempenho

RESOLUÇÃO	NÚMERO DE ALUNOS	%
Totalmente correta	14	26,4
Parcialmente correta	4	7,6
Incorreta	35	66,0
TOTAL	53	100,0

Pode-se dizer que das 14 questões resolvidas corretamente, há 11 maneiras utilizadas pelos alunos para resolver a questão que apresentam alguma diferença. Há 4 resoluções diferentes entre as 4 resoluções parcialmente corretas e, das provas com resoluções incorretas, há 27 diferentes.

No estudo da produção registrada nesta questão, as resoluções semelhantes foram agrupadas em 4 grupos de Provas nos quais as resoluções apresentavam algum procedimento em comum.

Grupo 1

O quadro abaixo permite uma visão geral do procedimento mais utilizado pelos alunos, na resolução dessa questão.

Quadro Resumo 9 – Provas que apresentam a divisão $100 : 5$ na resolução da Questão 3

23 provas apresentam registro da divisão $100 : 5$	3 provas apresentam resolução totalmente correta	2 provas apresentam também outro procedimento
		1 prova não apresenta outro procedimento
	20 provas apresentam resolução incorreta	7 provas não apresentam outro procedimento
		13 provas apresentam também outro procedimento

No total, 23 Provas continham esta operação no início da resolução desta questão, sendo que algumas delas utilizaram, em seguida, outros procedimentos. No entanto, apenas 3 apresentam resolução correta. Neste caso, os alunos souberam utilizar-se dos dados e informações que dispunham, conseguindo, assim, acertar a questão.

A respeito da análise da interpretação do enunciado e do uso que os alunos fizeram desta informação, percebe-se que entre os 20 alunos que optaram por iniciar a resolução utilizando a divisão $100 : 5$, e que erraram a questão, 7 deles não levaram em consideração a informação presente no enunciado “A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior”. Isto pôde ser percebido analisando suas resoluções nas quais observa-se que eles não adotam nenhum outro procedimento além da divisão e, ainda, colocam como resposta da questão o resultado desta operação, ou seja, respondem que foram entregues 20 telegramas em cada dia, como mostra, por exemplo, a figura abaixo:

$$\begin{array}{r} 100/5 \\ -20/20 \\ \hline 00 \end{array}$$

R= Ele entregou 20 telegramas por dia, assim, ficando 10 telegramas.

Figura 22 – Resolução presente na Prova A12

Percebe-se no caso deste e dos demais 6 alunos que responderam que são entregues 20 telegramas por dia, que não houve nenhuma tentativa no

sentido de tentar satisfazer a outra informação “A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior”. Eles se preocuparam apenas com o fato de que a soma dos telegramas entregues nos 5 dias fosse igual a 100.

Falando ainda destas 23 Provas, observa-se que nas demais 13, após os alunos terem calculado $100:5$, eles buscam fazer uso da informação “A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior”. Tentam utilizar-se de outras operações, na maioria dos casos, de adição e multiplicação para encontrar o resultado correto.

O caso mais comum é a adição $20+7$ utilizando este valor como resposta. Na verdade estes alunos parecem não lidar ao mesmo tempo com as informações de que dispõem, pois as operações utilizadas por eles, mesmo resolvidas corretamente, não são capazes de resolver a questão, já que não expressam as informações contidas no enunciado, o que faz com que os alunos respondam incorretamente, como é o caso da resolução apresentada a seguir:

$$\begin{array}{l}
 \text{100 telegramas em 5 dias} \\
 \text{20 telegramas por dia (supondo)} \\
 \begin{array}{r}
 100 \overline{) 100} \\
 \underline{000} \\
 000 \\
 20
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 100 \overline{) 100} \\
 \underline{30} \\
 70 \\
 \underline{14} \\
 56 \\
 \underline{44} \\
 100
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 100 \\
 - 20 \quad (7 \times 4 \text{ dias}) \\
 \hline
 80
 \end{array}$$

O carteiro entregou no 1º dia 37 cartas

$$\begin{array}{r}
 \text{no } 2^\circ \text{ dia } 07 \quad \cdot 1) \\
 \text{no } 3^\circ \text{ dia } 07 \quad \cdot 1) \\
 \text{no } 4^\circ \text{ dia } 07 \quad \cdot 1) \\
 \text{e no } 5^\circ \text{ dia } 07 \quad \cdot 1) \\
 \hline
 100
 \end{array}$$

Figura 23 – Resolução presente na Prova A15

Este aluno, assim como outros, mostrou estar tentando utilizar a informação “A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior”, embora não a tenha utilizado adequadamente. Ele também mostra dominar a resolução dos algoritmos que utilizou, já que resolve todas as operações corretamente.

Na produção registrada na Questão 3, uma dificuldade parece ter surgido para esses 20 alunos que iniciaram com a divisão $100:5$ e não conseguiram respondê-la corretamente. Para alguns foi o fato de não ter percebido que, após dividir $100:5=20$, ainda havia a informação presente na questão que deveria ser levada em consideração: “A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a

mais que no dia anterior”. Para outros, mesmo tendo tentado fazer uso desta informação, eles parecem não ter encontrado uma estratégia que fosse capaz de contemplá-la, e, por isso, erram a questão.

Este fato mostra que a dificuldade maior destes alunos parece estar na compreensão do enunciado e no momento de encontrar uma estratégia que contemple de maneira adequada as informações da questão.

No que se refere às operações de divisão, os alunos mostraram dominar o procedimento da resolução do algoritmo. Houve apenas 1 aluno que não acertou este cálculo. Encontrou como resultado da divisão o número 2. A princípio, o erro cometido por este aluno parece ter sido causado por distração, ele esquece de “baixar” o último zero, já que, até então, resolveu corretamente este algoritmo, como mostra a Figura 24:

$$\begin{array}{r} 100 \text{ L\$} \\ 10 \\ \hline 000 \end{array} \div 2. \text{ f} = 14 \quad 14 \text{ telegramas em cada dia}$$

$$2. \text{ f} = (14)$$

Figura 24 – Resolução presente na Prova A10

No entanto, ao estudar a Prova inteira resolvida por este aluno, observa-se que o erro cometido na divisão é mesmo conceitual pois todas as operações resolvidas por ele nas resoluções das demais questões, estão incorretas (por exemplo, Figura 21) e, além disso, apresentam indícios de que os erros não são causados por distração; este aluno realmente parece não dominar o processo do cálculo nos algoritmos das operações.

Grupo 2

Outra estratégia de resolução bastante utilizado pelos alunos, como mostra o quadro, é a da tentativa e erro que, de certo modo esteve presente em algumas resoluções já comentadas, como mostra o quadro a seguir:

Quadro Resumo 10 – Provas em que o registro mostra resolução por tentativa e erro

17 provas apresentam resolução por tentativa e erro	4 provas apresentam resolução totalmente correta
	2 provas apresentam resolução parcialmente correta
	11 provas apresentam resolução incorreta

No estudo da produção registrada nestas 13 Provas, percebe-se que entre as 4 que apresentam resolução correta, em 3 delas há registro de justificativas, ou seja, os alunos descrevem a maneira como pensaram e desenvolveram os procedimentos para resolver a questão. Acredita-se que este é um procedimento bastante importante, pois, após resolver a questão, os alunos precisam elaborar mentalmente a estratégia que desenvolveram passo a passo, para então descrevê-la. Neste momento, eles têm a oportunidade de pensar novamente a respeito daquilo que fizeram e ainda podem perceber equívocos que por ventura tenham cometido.

1-dia - 6	Eu fiz a tabuada do 7
2-dia - 13	até 5 cinco, mas
3-dia - 20	somando dava 105, depois
4-dia - 27	eu diminui 1 em
5-dia - 34	cada número.

Figura 25 – Resolução presente na Prova A3

Esta figura mostra um dos casos citados, em que a resolução é semelhante a resolução presente em outras 2 Provas que acertaram a questão. O aluno, para chegar na resposta, utiliza-se de procedimentos simples dominados por ele. Interpretando a questão, percebe que pode utilizar a tabuada. Ele sabia que deveria fazer a tabuada do 7 até o 5 porque sabia que os telegramas foram entregues em 5 dias.

Ao somar os valores encontrados, percebe que o valor ultrapassa a quantidade total de telegramas que foram entregues, apenas por 5 unidades. Ele então percebe que, como são 5 parcelas, basta diminuir o valor 1 em cada parcela para encontrar o resultado.

A estratégia de resolução por tentativa e erro, em muitos casos, é pouco valorizada. No entanto, o caso apresentado na Figura 25 mostra que o aluno que a desenvolveu compreendeu muito bem as informações contidas no enunciado da questão e soube lidar com elas. O raciocínio desenvolvido por ele é algo bem elaborado. Ele mostra saber o que estava fazendo.

A resolução presente na Prova A3 mostra que esta estratégia de resolução precisa ser mais valorizada.

Outra resolução interessante do aluno que acertou a questão é a exposta a seguir. O aluno utiliza operações, iniciando por uma subtração seguida

de uma divisão e faz vários cálculos até satisfazer todas as informações presentes na questão. Percebe-se que este aluno, ao somar valores, iniciando por 13, encontra a quantidade de telegramas muito superior a 100, então adota valores menores em cada parcela. No entanto, difere da maioria das resoluções, pois não vai diminuindo os valores de cada parcela de 1 em 1 e sim já parte de um valor bem menor que o anterior. Inicia pelos valores da tabuada do 7, e ainda justifica sua resolução:

$$\begin{array}{r}
 100 = 5 \\
 - 35 \\
 \hline
 65 \quad \cancel{7} \\
 15 \quad 13 \\
 \hline
 1^\circ \quad 13 \\
 2^\circ \quad 20 \\
 3^\circ \quad 27 \\
 4^\circ \quad 34 \\
 5^\circ \quad 41 \\
 \hline
 5
 \end{array}$$

No 1º: 6 ele entregou.
 " 2º: 13 " " "
 " 3º: 20 " " "
 " 4º: 27 " " "
 " 5º: 34 " " "

$$\begin{array}{r}
 20 \quad 35 \\
 \cancel{7} \\
 14 \\
 21 \\
 28 \\
 35 \\
 \hline
 105
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 25 \\
 19 \\
 26 \\
 33 \\
 \hline
 95 \\
 26 \\
 13 \\
 20 \\
 27 \\
 34 \\
 \hline
 100
 \end{array}$$

Cheguei a essa conclusão:

Os meus cálculos não batiam, os resultados eram altos; fiz 1º com o 7, subtraí 5 ne, então tentei o 6 e deu certo!

Figura 26 – Resolução presente na Prova A37

Outro ponto importante nessa resolução é a forma como este aluno chega no número 13, que por sua vez é a primeira parcela da operação de adição. Ele parece ter pensado que, multiplicando $5 \cdot 7 = 35$, encontraria o total de telegramas que foram entregues a mais durante os 5 dias. Assim, retirando 35 do total de telegramas e dividindo este total por 7 ele encontraria o número de telegramas entregues no primeiro dia.

Nas 2 Provas que registram respostas parcialmente corretas, observa-se em uma prova a presença de 8 operações de adição em que o aluno vai somando valores mantendo sempre a diferença de 7 entre as parcelas. De uma adição para outra, ele diminui 1 no valor de cada parcela, buscando que a soma seja 100 telegramas.

No entanto, na última operação registrada, ao diminuir 1 nos valores da adição, ele esquece de diminuir esse valor na última parcela da operação, mas registra o total 100, que seria o valor encontrado se ele não tivesse cometido

este erro.

Neste caso, o erro parece ter sido por distração, pois ao encontrar 105 na operação anterior ele “parecia saber” que, como haviam 5 parcelas na adição, bastava diminuir 1 no valor de cada uma. Por isso mesmo ele já coloca o valor correto da soma.

O outro aluno registra uma soma com as quantidades corretas de telegramas entregues em cada dia, somando 100, mas responde a questão com a frase: “ O carteiro entregou 100 telegramas”.

Os demais alunos, embora não tenham acertado a questão, também tentaram de várias maneiras concluí-la, na maioria dos casos resolvendo algoritmos corretamente, mesmo que determinadas operações não representem a situação apresentada e, por isso, não constituam um procedimento adequado para resolver a questão.

O que também chama a atenção são casos como os apresentados a seguir, em que são encontrados valores que de maneira nenhuma podem satisfazer as informações presentes no enunciado da questão.

$$100 \div 7 = 14$$

$$100 \div 5 = 20 + 14 + 14 + 14 + 14 = 76$$

Entregou 76 telegramas em cada dia

Figura 27 – Resolução presente na Prova A43

Neste caso, em nenhum momento fica registrado a preocupação com as informações presentes no enunciado, pois a soma dos telegramas entregues não é igual a 100 e, nem mesmo entre a quantidade entregue a cada dia, há diferença de 7 telegramas.

No caso a seguir, talvez o aluno tenha interpretado a questão de maneira incorreta, pensando que no 5º dia o carteiro tivesse entregado 100 telegramas. A diferença entre a quantidade entregue a cada dia, neste caso, foi levada em consideração.

No 1º dia o carteiro entregou 72 telegramas.
 No 2º dia ele entregou 79 telegramas.
 No 3º dia ele entregou 86 telegramas.
 No 4º dia o carteiro entregou 93 telegramas.
 E no 5º dia de entregas, ele entregou 100 telegramas.

$$\begin{array}{r}
 4 \quad \cancel{100} \quad 72 \quad 79 \quad 86 \quad 93 \\
 \times 7 \quad - 28 \quad + 7 \quad + 7 \quad + 7 \quad + 7 \\
 \hline
 28 \quad 72 \quad 79 \quad 86 \quad 93 \quad 100
 \end{array}$$

Figura 28 – Resolução presente na Prova A53

Esse tipo de resolução mais uma vez reforça a idéia de que a dificuldade maior dos alunos está na compreensão/interpretação e utilização das informações presentes no enunciado das questões do que propriamente nos cálculos. E ainda, a falta de validação das respostas. Caso eles tivessem, com a resposta encontrada, tentado interpretar novamente a questão, teriam percebido que a resposta encontrada não faria sentido.

Grupo 3

Quanto às equações, há pelo menos 6 alunos que reconhecem no enunciado a possibilidade de sua utilização para resolver a questão. Entretanto, o fato de apenas 6 alunos terem resolvido a questão utilizando esta estratégia, não quer dizer que os demais alunos também não saibam resolver equações ou que não tenham reconhecido que a questão poderia ser resolvida montando-se uma, já que o enunciado da questão permitia que fossem utilizadas diferentes estratégias.

A hipótese que pode ser levantada é a de que, mesmo reconhecendo a possibilidade de resolução por meio de equações, talvez alguns alunos não a utilizam por encontrar outra maneira que, para eles, poderia ser mais simples de resolver ou mais fácil, no caso de, talvez, não dominarem o processo de resolução de uma equação.

Quadro Resumo 11 – Provas em que há registro da montagem e resolução de uma equação

6 provas apresentam montagem e resolução de uma equação	3 provas apresentam resolução totalmente correta
	2 provas apresentam resolução parcialmente correta
	1 prova apresenta resolução incorreta

A adoção desta estratégia de resolução mostra que, de modo geral,

os 6 alunos parecem dominar os conceitos básicos necessários para a resolução de uma situação utilizando uma equação.

Nas Provas que apresentam resposta totalmente correta ou parcialmente correta, a resolução não apresenta rasuras nem marcas de tentativas ou cálculos que possam ter sido apagados, o que parece garantir que os 5 alunos resolveram facilmente a questão.

O registro presente nas 2 Provas que apresentam resposta parcialmente correta mostram que esses alunos encontram o valor $x=6$ e não prosseguem a resolução. Não utilizam o valor encontrado para calcular quantos telegramas foram entregues em cada dia.

Ao montar a equação, os alunos pareciam saber qual era o significado do 'x' que utilizaram. Sendo assim, parece que, por distração, os alunos tenham concluído a questão ao encontrar $x=6$ telegramas. Sem fazer a validação, não perceberam que o resultado que encontraram não respondia a questão.

Ou ainda, pode-se pensar que estes alunos estejam acostumados a resolver problemas, exercícios ou questões em que se deve apenas fazer cálculos e a resposta caracteriza-se sempre como o valor encontrado em seus cálculos. Basta resolver cálculos, encontrar um valor e pronto. A atividade está concluída. Eles parecem não ter o hábito de parar para pensar a respeito dela, para verificar se ainda há algo para ser feito.

Na Prova que apresenta resposta incorreta, há um registro de resolução bastante curioso.

Handwritten work showing the student's attempt to solve the problem using an equation. The work includes several equations, some of which are crossed out and corrected. The final result is $x=6$, which is noted as the number of telegrams delivered in 5 days. The student concludes that they used logic and a guess to solve the problem.

$$7x + 14x + 21x + 28x + 35x = 100$$

~~5 12 19 26 33~~

$$6x + 13x + 20x + 27x + 34x = 100$$

$$6x + 13x + 20x + 27x + 34x = 100$$

$$100x = 100$$

~~100~~ ~~100~~ $x=6$

$x = n^{\circ}$ de telegramas entregues em 5 dias.

Eu utilizei da lógica e conta de cabeça para resolver este problema.

Figura 29 – Resolução presente na Prova A4

Este aluno reconhece que a questão pode ser resolvida utilizando-se uma equação e escreve uma que não resolve a questão:

$6x + 13x + 20x + 27x + 34x = 100$. Seu registro parece mostrar que o aluno ‘força’ o aparecimento desta equação para ‘confirmar’ que sabe utilizar os instrumentos matemáticos ensinados na escola, pois parte da resposta já encontrada (possivelmente por cálculo mental) para montar tal ‘equação’.

Em resumo, tem-se a impressão de que ele sabe resolver a questão mas se preocupa em encontrar uma forma de registro ‘escolar’, pois muitas vezes os professores não aceitam a utilização do cálculo mental na resolução de questões de uma prova escrita. Uma resposta, advinda de cálculo mental é, em geral, interpretada como resultado de ‘cola’.

Se esta hipótese for verdadeira, talvez o registro deste aluno mostre que em sala de aula, as atividades só são válidas se houver cálculos que as comprovem. Cálculo mental apenas, não basta.

Grupo 4

Continuando o estudo, observa-se a presença de 5 Provas em que não há tipo algum de cálculo escrito ou verificação, nem mesmo justificativas. Apenas a resposta.

Quadro Resumo 12 – Provas em que não há registro de estratégias de resolução, apenas a resposta

5 provas apresentam resposta, sem a presença de nenhuma outra forma de registro	3 provas apresentam resposta totalmente correta
	2 provas apresentam resposta incorreta

Acredita-se que os alunos que acertaram a questão possam tê-la resolvido mentalmente ou utilizado um rascunho, embora a recomendação fosse de registrar todas as tentativas e procedimentos na prova, justamente para que fosse possível fazer a análise da produção registrada.

As 2 Provas com resposta incorreta apresentam um registro que dá a impressão de que os alunos não sabiam como resolver a questão e foram jogando qualquer valor, pois não há coerência entre os valores e o enunciado, como mostra a figura abaixo:

$$\begin{array}{l}
 1^{\circ} \text{DIA} = 1817 \\
 2^{\circ} \text{DIA} = 32 \\
 3^{\circ} \text{DIA} = 49 \\
 4^{\circ} \text{DIA} = 56 \\
 5^{\circ} \text{DIA} = 0
 \end{array}$$

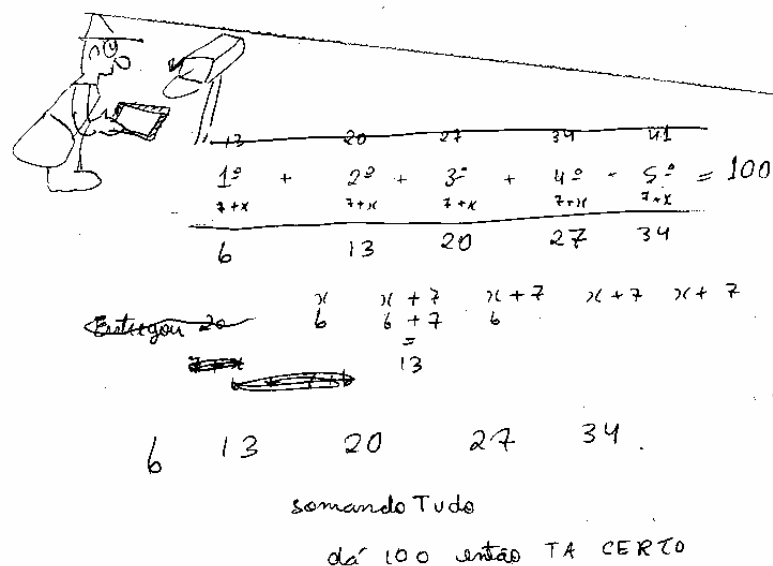
Figura 30 – Resolução presente na Prova A21

Percebe-se que este aluno nem mesmo concluiu a resposta, provavelmente por não ter conseguido encontrar uma estratégia de resolução, já que ele respondeu na última folha que o tempo foi suficiente para resolver a Prova.

Das 53 Provas que compõem a amostra em estudo, restam apenas 2, que ainda não foram discutidas, pois apresentam procedimentos de resolução diferentes das demais. Uma prova apresenta resolução correta e outra incorreta.

O aluno que resolve a questão incorretamente, registra corretamente a montagem de uma equação. Ao resolvê-la, este decide substituir alguns valores e resolve a equação, então, de maneira incorreta. Não satisfeito com o que fez, risca tudo e não apresenta outra tentativa de resolução.

A última Prova apresenta uma resposta correta em que o aluno resolve de um modo diferente dos demais. Ele parece ter reconhecido que a questão poderia ser resolvida por uma equação. E a resolve de modo menos “escolar”, sem tanta formalização. Ele parece ir resolvendo mentalmente registrando apenas o necessário para completar a sua resolução, como mostra a figura abaixo:



The figure shows a student's handwritten work. On the left, there is a simple drawing of a person sitting at a desk with a computer monitor. To the right, the student has written a math problem and a solution strategy.

The problem is written as:

$$\begin{array}{r}
 1^{\circ} + 2^{\circ} + 3^{\circ} + 4^{\circ} + 5^{\circ} = 100 \\
 3+x \quad 7+x \quad 7+x \quad 7+x \quad 7+x
 \end{array}$$

Below this, the student has written the values 6, 13, 20, 27, 34, which correspond to the terms of the arithmetic sequence.

The student then writes a strategy:

~~Estreou 20~~

$$\begin{array}{r}
 x \quad x+7 \quad x+7 \quad x+7 \quad x+7 \\
 6 \quad 6+7 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \\
 = \\
 13
 \end{array}$$

The student has crossed out the word "Estreou" and the number "20".

Below this, the student has written the values 6, 13, 20, 27, 34 again.

Finally, the student writes:

somando Tudo
da 100 então TA CERTO

Figura 31 – Resolução presente na Prova A47

Neste registro é possível perceber que o aluno tem algumas idéias a respeito do que é uma seqüência. Ele reconhece a lei de formação da seqüência que traduz a situação apresentada na questão, embora ainda não domine totalmente a linguagem algébrica.

Observa-se que primeiramente ele considera 'x' como a quantidade de cartas entregues no dia anterior, pois registra 'x+7', 'x+7', respectivamente, para o segundo e o terceiro dia, em lugar de 'x+7' e '(x+7)+7'

Ao encontrar 6 como a quantidade de telegramas entregues no primeiro dia, ele calcula os telegramas entregues no segundo dia. Mas, ao calcular o número de telegramas do terceiro dia representado por 'x+7' ele parece perceber que não é correto fazer $6+7$ mas sim, $13+7$. Deste modo infere-se que ele não possuía o domínio da linguagem algébrica, por isso sabia como calcular, mas não como representar. O fato dele ter registrado a frase 'Somando tudo dá 100 então tá certo' mostra que ele sabia que os valores encontrados estavam corretos.

De modo geral, percebe-se que a dificuldade maior dos alunos nesta resolução está em compreender e interpretar as informações presentes e saber utilizar-se delas, pois, observando os registros, infere-se que a dificuldade centrava-se em conseguir encontrar uma maneira de resolver a questão de forma a satisfazer as duas informações ao mesmo tempo. Há alunos que, embora tenham levado em consideração a informação de que era necessário haver a diferença de 7 telegramas em cada dia, deixaram de pensar na outra que mostrava que a soma dos telegramas entregues nos 5 dias deveria ser 100.

Isso pode ser dito pelo fato de que, embora dos 53 alunos a maioria tenha tentado utilizar-se destas informações, poucos alunos conseguiram fazê-lo. Grande parte, em suas respostas, conseguiu satisfazer apenas a uma delas e, por isso, não acertaram a questão.

A respeito das respostas colocadas pelos alunos na última folha, registrando a impressão que tiveram da Prova, percebe-se que 4 alunos assinalam a falta de tempo para resolver as questões. No entanto, observando a produção destes alunos e todas as questões, encontra-se apenas 1 Prova que dá a impressão de que realmente o aluno não teve tempo para resolvê-las. Nas demais 3 Provas, há vários indícios de cálculos e resoluções aparentemente completas.

Há 9 alunos que apontam a Questão 3 como a mais fácil. Destes, apenas 1 acertou completamente a questão. E, dos 8 alunos que julgaram esta questão como a mais difícil, 6 erraram a resolução, 1 acertou parcialmente e 1 totalmente.

Os 6 alunos que erraram a resolução mostraram em seus registros apenas a utilização de uma operação que sozinha não resolve a questão e apresentaram uma resposta. Em nenhuma delas há marcas de outras tentativas que possam ter feito. Talvez por tê-la julgado difícil, apresentaram um registro para não deixá-la em branco ou por realmente não saberem que outra estratégia utilizar.

A respeito destas informações, podem ser feitas inferências semelhantes às colocadas na Questão 2, ou seja, os alunos, ao atribuir a uma questão o conceito de fácil, não garante que a acertarem a questão. Eles podem tê-la interpretado de maneira equivocada, levando-os a errar a resolução. E no caso da questão ser difícil para o aluno, ele pode fazer várias tentativas até encontrar uma resolução que pensa ser a correta.

4.4 Questão 4

A Questão 4 presente na Prova de Questões Abertas de Matemática - AVA/2002 da 8ª série é a seguinte:

Quatro companhias aéreas fazem a ponte aérea São Paulo – Brasília. Segundo pesquisa realizada, 7000 passageiros diários fazem essa viagem. O quadro abaixo mostra o preço dos bilhetes, a porcentagem de passageiros e o número de vôos diários dessas companhias.

	Preços dos bilhetes ida e volta	Porcentagem de passageiros	Vôos diários ida e volta
TGK	336 reais	35,5 %	32
LDX	336 reais	26,7 %	24
PHD	288 reais	22,2 %	20
WSQ	193 reais	15,6 %	14

De acordo com os dados acima, responda:

- A empresa mais procurada nessa viagem, quantos passageiros transporta diariamente?
- Supondo que os aviões dessas companhias tenham a mesma lotação, quantos passageiros são transportados, em média, por dia em cada vôo?
- Construa um gráfico que relacione o número de passageiros e o preço que pagam para fazer essa viagem.

Esta questão fazia parte apenas da Prova de 8ª série. Estudando a produção das 53 Provas que compõem a amostra, percebe-se que, assim como nas demais questões, as resoluções presentes são variadas. Como esta questão apresenta 3 itens, o seu estudo será dividido, respectivamente, em três partes.

Análise do item 'a'.

Observando as resoluções encontradas nas Provas, pode-se encontrar o seguinte desempenho no item 'a', como mostra a tabela:

Tabela 5- Classificação das resoluções do item 'a' quanto ao desempenho

RESOLUÇÃO	NÚMERO DE ALUNOS	%
Totalmente correta	17	32,1
Parcialmente correta	4	7,5
Incorreta	32	60,4
Total	53	100,0

Embora a produção registrada na resolução desta questão seja diversificada, foi possível agrupá-las de acordo com as semelhanças encontradas. Sendo assim, serão apresentados 4 grupos de resoluções.

Grupo 1

Ao estudar a produção registrada pelos alunos na resolução deste item da Questão 4, percebe-se que entre os 53 alunos, 25 não apresentam tipo algum de registro além da resposta. Eles apenas respondem a questão, da seguinte maneira:

Quadro Resumo 13 – Provas que, na resolução do item “a”, apresentam apenas a resposta.

25 provas apresentam apenas resposta	1 prova apresenta resolução totalmente correta	apresenta resposta correta.
	24 provas apresentam resolução incorreta	12 provas apresentam resposta utilizando o valor 35,5% presente na tabela do enunciado
		6 provas apresentam resposta utilizando outros números presentes no enunciado
		6 provas apresentam resposta utilizando valores que não se encontram no enunciado da questão

Das 25 respostas, apenas 1 está correta. Para que isso acontecesse,

já que nesta prova também não há sinais de tentativas de cálculos, pode-se levantar 3 hipóteses: o aluno pode ter calculado mentalmente, ter “colado” de algum colega ou ter utilizado rascunho.

Ao refletir sobre estas hipóteses, pode-se pensar que, a hipótese do aluno ter “colado” é facilmente descartada, pois nas salas de aula em que os alunos fizeram esta Prova, ao redor de cada aluno que resolvia a prova de Matemática, havia vários alunos resolvendo a prova de Redação, já que apenas 1/3 dos alunos de cada sala resolveram a Prova de Questões Abertas de Matemática, enquanto os outros 2/3 fizeram a Redação. Quanto à possibilidade do aluno ter resolvido a questão mentalmente, ela existe, no entanto devido ao cálculo necessário para aquela resolução não ser tão simples de ser efetuado mentalmente, esta hipótese se torna muito remota. Sendo assim, a resposta correta registrada nesta Prova leva a pensar que este aluno tenha feito seus cálculos em algum outro lugar que não seja a prova (rascunho, carteira), embora a recomendação era de que os alunos não utilizassem rascunho, justamente para que fosse possível perceber toda e qualquer tentativa de resolução escrita.

Das demais 24 respostas, 12 alunos respondem incorretamente que a empresa TKG transporta 35,5% dos passageiros. O fato de não haver nenhum indício escrito de tentativa de cálculo ou de estratégia de resolução leva a pensar que os alunos “sabiam” o que estavam fazendo e acreditavam naquilo. Eles parecem ter encarado a questão com facilidade, já que não havia nas Provas nem mesmo marcas de cálculos ou tentativas que poderiam ter sido apagadas.

Talvez estes alunos estejam acostumados a ler e em seguida ter que responder questões muito óbvias e por isso imediatamente tenham ido até a tabela para retirar a resposta da questão. Ou ainda, não estejam habituados a interpretar informações de uma tabela ou gráfico e em seguida ter que utilizá-las, já que não perceberam que o solicitado era a quantidade de passageiros transportados diariamente e não a porcentagem correspondente destes passageiros. Isso mostra que a dificuldade destes alunos estava mais na interpretação do que pedia a questão e menos na leitura da tabela, pois eles foram até ela para retirar o que pensavam precisar.

E, ainda as 25 Provas que não contêm alguma resolução e apresentam apenas a resposta, há 6 Provas em que, na resposta, os alunos não utilizam o valor 35,5%, mas sim algum outro número presente na tabela ou no enunciado da questão. Destes 6 alunos, 2 deles colocam apenas que são transportados 7000 passageiros como consta no enunciado da questão, e 4

respondem observando a tabela, colocando que são transportados 32 passageiros.

a) 32 Obs= e' so olhar a tabela

Figura 32 – Resolução presente na Prova A28

Esta resposta é de um aluno que está entre os 4 alunos sobre os quais acabamos de comentar. De acordo com a hipótese que havíamos levantado, esta resposta nos leva a pensar que realmente ao responder o item 'a', os alunos acreditavam saber o que estavam fazendo. Para eles parecia muito simples, ou seja, ler o que estava pedindo e retirar a resposta da tabela.

Encontramos, ainda neste bloco de 25 Provas, 6 respostas contendo números isolados que aparentemente não se relacionam à questão. Números que parecem ter sido colocados apenas para apresentar uma resposta.

Grupo 2

Continuando o estudo da produção escrita deste item, encontramos as Provas em que as resoluções mostram a tentativa de utilizar alguma estratégia de resolução antes de apresentar a resposta. Encontramos 6 que apresentaram o registro do cálculo de $7000 \times 35,5$ ou $70 \times 35,5$.

Quadro Resumo 14 – Provas em que, para resolver o item 'a', utilizou-se o cálculo $7000 \times 35,5$ ou $70 \times 35,5$.

13 provas apresentam o cálculo $7000 \times 35,5$ ou $70 \times 35,5$.	12 provas apresentam resolução totalmente correta
	1 prova apresenta resolução parcialmente correta.

O fato dos 13 alunos terem acertado a operação de multiplicação mostra que os alunos demonstram saber o processo de resolução das operações de multiplicação com números inteiros, pois desenvolvem o processo do algoritmo corretamente. No entanto, mostra também que não dominam a multiplicação envolvendo números decimais, já que, ao concluir a multiplicação, eles não sabem qual a posição correta da vírgula e parecem não saber o que fazer com os zeros que aparecem no resultado da operação.

Esta estratégia, adotada por 13 alunos, leva 1 aluno a acertar

parcialmente a questão devido ao fato de ter encontrado uma estratégia que fosse capaz de resolver a questão e ainda de ter efetuado corretamente a multiplicação, até encontrar o valor 2.485.000 mas não ter prosseguido. Ele pode ter pensado que apenas efetuar corretamente a operação de multiplicação fosse suficiente, ou ainda, como acabamos de colocar, ele pode não dominar integralmente um cálculo de porcentagem. Além disso, o aluno não percebe que o valor encontrado era muito alto para a situação apresentada na questão, o que mostra que é bem possível que, ao concluir a multiplicação, ele não tenha parado para pensar a respeito do resultado que encontrou em relação à questão proposta.

O fato deste aluno não ter apresentado resposta, leva à hipótese de que o comum nas aulas de Matemática seja encontrar uma operação que possa resolver o problema, sem muito analisar se o que foi encontrado tem ou não coerência com o problema, ou seja, sem validar a solução encontrada.

Os 12 alunos que acertaram a questão parecem também tê-la resolvido facilmente, pois em suas provas não havia sinais de que o cálculo tivesse sido feito várias vezes. O registro estava organizado e “limpo”. Desta forma pode-se inferir que os alunos apresentam o cálculo correto da multiplicação e interpretam o resultado encontrado, respondendo assim a questão corretamente.

Grupo 3

Na resolução deste item, há também 6 Provas que apresentam a resolução utilizando uma regra de três, em que encontramos:

Quadro Resumo 15 – Provas que apresentaram a resolução por meio de uma regra de três.

6 provas apresentam uma regra de três	2 provas apresentam resolução totalmente correta.
	2 provas apresentam resolução parcialmente correta.
	2 provas apresentam resolução incorreta

As 2 Provas que apresentaram resolução totalmente correta, os alunos souberam retirar os dados do enunciado para então montar e resolver corretamente uma regra de três.

Nas 2 Provas em que a estratégia de resolução consiste numa regra de três e que a questão está parcialmente correta, percebe-se: há uma utilização correta dos dados fornecidos pela questão. Assim a regra de três que foi montada é

capaz de resolver o que estava sendo pedido.

No caso destas 2 Provas, percebe-se que os alunos que as resolveram, tinham entendimento da aplicação de uma regra de três e ainda dominavam o processo de resolução desta estratégia. No entanto, eles também parecem mostrar que não dominam operações com números decimais, já que erram as operações, encontrando os seguintes valores: 248,5 e 248, ao contrário de 2485 passageiros.

A respeito dos 2 alunos que erraram a questão, constata-se que eles não utilizaram corretamente os dados que dispunham, pois montaram regras de três que, mesmo resolvidas corretamente, não expressavam a situação apresentada e por isso não levariam a uma resposta correta do problema.

Destes 2 alunos, um deles, ao contrário de utilizar a porcentagem para calcular a quantidade de passageiros transportados pela empresa TGK, utiliza o número de vôos diários para montar a regra de três. Ele sabe que 7000 correspondem ao total de passageiros representado por 100%. Mas para representar os passageiros transportados pela empresa mais procurada, não utiliza o valor 35,5% presente na tabela, e sim o valor 32. Sendo assim, a montagem desta regra de três é considerada incorreta, pois relaciona valores de natureza distinta: porcentagem e número de passageiros.

Mesmo errando a questão, este aluno resolveu corretamente os cálculos necessários para concluir a regra de três; isto mostra que ele domina a resolução da estratégia escolhida.

O outro aluno que erra a questão, parece apresentar um erro por distração. A montagem da regra de três estaria correta se, ao contrário de utilizar 7100 como o total de passageiros, ele tivesse utilizado 7000 como constava no enunciado da questão.

Neste caso, embora o aluno não tenha registrado seus cálculos, é possível perceber erros na resolução das operações necessárias para o desenvolvimento de uma regra de três, já que a resposta apresentada por ele não resulta da regra de três que registrou.

Analisando a Prova toda deste aluno, percebe-se que ele acerta a resolução de todas as operações. Talvez o erro presente na resolução da regra de três seja próprio do não domínio desta estratégia ou mesmo uma distração.

Grupo 4

Observou-se também no registro do item 'a' que 7 Provas contêm

uma outra multiplicação como estratégia de resolução.

Quadro resumo 16 – Provas que apresentaram a resolução por meio de uma multiplicação.

3 provas apresentam a resolução de uma multiplicação	Todas as provas apresentam resolução incorreta	1 prova apresenta o cálculo 7000×35
		1 prova indica a multiplicação $70.00 \times 35,5$
		1 prova apresenta a multiplicação 7000×32

Esses 3 alunos que erraram a questão efetuaram multiplicações com dados retirados do enunciado e que não expressavam o que pedia a questão. São multiplicações que, mesmo resolvidas corretamente, não levam o aluno a encontrar a resposta correta do que se pedia.

No caso do aluno que registra a multiplicação 7000×35 , talvez tenha sido apenas uma distração ao retirar os dados da tabela, ou ainda pode-se levantar a hipótese de que ele não dominasse o cálculo de multiplicação com decimais e por isso tenha ignorado os 0,5 restante.

O aluno que multiplica 7000×32 parece ter interpretado incorretamente a questão, pois utilizou-se de dados inadequados, sem perceber que era necessário utilizar a porcentagem para descobrir o número de passageiros transportados pela empresa e não o número de vôos.

No caso do registro abaixo, em que o aluno encontra o valor 24.85 em sua multiplicação, ele parece ter se confundido por não dominar o conceito e o cálculo com o uso de porcentagem. Seu registro mostra que ele não domina também as operações com decimais. Em sua prova há apenas o seguinte registro:

$$70.00 \times 35,5\% = 24.85$$

Figura 33 – Resolução presente na Prova A30

Das 53 questões analisadas, restam ainda 6, em que os alunos apresentam resoluções diferentes das demais já descritas, por isso não foram colocadas em grupo algum. Destes 6, 4 alunos escolhem procedimentos que não resolvem a questão e respondem incorretamente, ou seja, as operações que eles utilizam apresentam-se equivocadas e, além de não resolverem a questão, ainda não são capazes de mostrar nenhuma outra relação que por ventura possam ter

interpretado, como mostram as figuras abaixo:

a) ~~bilhetes~~ de transporte diariamente 35,5%
 RGK
$$\begin{array}{r} 35,5\% \\ 336 \\ \hline 891 \end{array}$$

Figura 34 – Resolução presente na Prova A23

A Prova A23 contém o cálculo de uma adição resolvida incorretamente, em que o aluno adiciona quantidades de natureza diferentes, soma a porcentagem de passageiros transportados pela empresa com o valor cobrado pelos bilhetes. E mais, ele utiliza em sua operação números inteiros e decimais de maneira incorreta. É possível que este aluno não tenha prestado atenção a esta informação tão importante no momento da montagem e resolução do algoritmo. As demais resoluções de algoritmos resolvidas por ele no decorrer da Prova não apresentam este tipo de erro.

a)
$$\begin{array}{r} 35,5 \text{ Ligo} \\ 550 \\ \hline 3550 \\ 500 \\ \hline 500 \end{array}$$
 Transporta 3.550 passageiros diariamente.

Figura 35 – Resolução presente na Prova A5

A resolução presente na Prova A5 mostra que este aluno tem algumas noções a respeito dos conceitos envolvidos no cálculo de porcentagem, mas mostra também que não os domina. A respeito das operações que resolve no decorrer da Prova, este aluno mostra dificuldade em resolver algoritmos que envolvam números decimais.

Preço dos Bilhetes	nº de Passageiros
336 reais	2.500
336 reais	2.000
288 reais	1.500
193 reais	1.000

a) A empresa mais procurada nessa viagem, quantos passageiros transporta diariamente? 1.500 passag

Figura 36 – Resolução presente na Prova A8

O único registro presente nesta Prova, no que se refere aos itens 'a', 'b', e 'c' consiste nesta tabela. O aluno que a resolveu parece ter utilizado algumas noções de proporção para encontrar a quantidade de passageiros transportados por cada empresa. Talvez tenha feito isso justamente por não ter visto na questão a possibilidade de utilização do cálculo de porcentagem, provavelmente por não dominar os conceitos envolvidos.

$$\textcircled{a} \text{ tirando de cem } 39,5\% \text{ fica } 69,32 = 2.485$$

Figura 37 – Resolução presente na Prova A3

Esta resolução parece confusa. O resultado final apresentado pelo aluno está correto mas não condiz com o procedimento escolhido por ele.

Os restantes 2 alunos respondem corretamente a este item. Um deles nos chama a atenção, pois o resolve utilizando uma estratégia interessante e pouco comum:

$$\textcircled{a} \text{ é a TGH, ela transporta } \cancel{35} 2485 \text{ passageiros por dia}$$

1% = 70p
0,5% = 35p
10% = 700p
20% = 1400p
5% = 350p
20% + 10% + 5% +
0,5% =
1400 + 700 + 350 +
35
2100 + 350 + 35
2485

Figura 38 – Resolução presente na Prova A32

Este aluno parece mostrar que se utiliza de cálculo mental e dominar muito bem os conceitos relacionados a porcentagem, à proporção e, o que é melhor, parece não estar preso à formalização de algoritmos. Ao contrário da maioria dos alunos, ele traça uma estratégia diferente de resolução, descarta o uso de operações registradas e parece compreender as informações contidas no enunciado. Não procura encontrar dois valores e uma operação para relacioná-los, parece ter pensado no que realmente os valores estavam representando.

Acredita-se que esta forma de produção esteja sendo pouco estimulada no ensino de matemática presente nas escolas. A interpretação, o

raciocínio lógico, a possibilidade de discussões a respeito das situações apresentadas pelo professor e a atribuição de significados parecem ser questões pouco presentes nas aulas de matemática.

Análise do item 'b'.

Ao observar a produção escrita relativa ao item 'b' contida nas Provas, percebe-se o seguinte desempenho:

Tabela 6- Classificação das resoluções do item 'b' quanto ao desempenho

RESOLUÇÃO	NÚMERO DE ALUNOS	%
Totalmente correta	3	5,7
Parcialmente correta	2	3,8
Incorreta	48	90,5
Total	53	100,0

O estudo da produção escrita presente na resolução deste item será apresentado em 4 grupos.

Grupo 1

Entre as 53 Provas que compõem a amostra em estudo, uma quantidade considerável, 19 alunos, não apresenta registro de estratégias que possam ter utilizado para resolver a questão. Não há sinais de cálculos ou qualquer tentativa para encontrar a resposta e que tenha sido apagada. No entanto, todos eles respondem a questão incorretamente, como mostra o quadro abaixo.

Quadro Resumo 17 – Alunos que não apresentam cálculos no item “b”, apenas a resposta.

19 provas apresentaram apenas a resposta	Todas as provas apresentam resposta incorreta	1 prova apresenta resposta utilizando o resultado de uma operação que faz com números presentes no enunciado
		2 provas apresentam resposta utilizando números presentes no enunciado
		16 provas apresentam resposta utilizando valores que não se encontram no enunciado da questão

Analisando estas 19 respostas, observa-se que nas respostas que os 16 alunos registram, eles utilizam números bem variados para indicar a quantidade de passageiros que são transportados por dia em cada voo. Números estes que não

estão claramente expostos no enunciado da questão e que, por sua vez, não dão pistas para descobrir de onde foram retirados. Os alunos que resolveram estas Provas parecem ter “jogado” estes números arbitrariamente, talvez por não terem compreendido a questão e por isso não conseguirem elaborar estratégias de resolução desta questão.

Destes 16 alunos, apenas 2 respondem a questão da mesma maneira, indicando que são transportados 2000 passageiros.

Entre as demais 3 respostas, percebe-se que os alunos colocam quantidades de passageiros bem elevadas, como 2500 passageiros em cada voo. E ainda que eles parecem não perceber que suas respostas indicam valores muito além dos dados presentes na questão, ou seja, ao responder, não analisam se a resposta condiz com a situação apresentada.

Os 2 alunos que respondem utilizando dados presentes no enunciado parecem ter encarado a questão de maneira simples ou fácil. Leram a questão e foram buscar a informação que acreditavam ser necessária para responder o proposto, assim como fizeram no item ‘a’. Isso gera a hipótese de que talvez este seja um procedimento comum nas atividades de sala de aula. O professor trabalha com problemas ou exercícios em que os alunos precisam apenas buscar um número no enunciado, e formular a resposta daquela atividade utilizando aquele número.

Fica claro perceber que a validação da resposta não é um procedimento comum entre os alunos, já que praticamente nenhum deles o utiliza.

E, há uma Prova na qual é possível perceber que o aluno faz uma operação, para então responder a questão. Embora não a registre, percebe-se que ele retira da tabela a quantidade de voos diários de cada empresa e faz uma adição, encontrando 90 voos.

Ao adotar esta estratégia, não percebe, porém, que esta não é a quantidade de passageiros, mas sim, de voos diários. Aqui, pode-se levantar outra hipótese: a de que o aluno busca números no enunciado para que possa fazer uma operação, mesmo que esta operação não traduza as informações necessárias para resolvê-la. Talvez a escola tenha enfatizado muito esse tipo de procedimento.

Grupo 2

Uma outra estratégia utilizada por 5 alunos é a de efetuar a divisão $7000 : 90$ para encontrar a resposta da questão.

Quadro Resumo 18 – Provas em que há registro de uma divisão para encontrar a resposta do item ‘b’.

5 provas apresentam a divisão 7000 : 90	2 provas apresentam resolução totalmente correta
	2 provas apresentam resolução parcialmente correta
	1 prova apresenta resolução incorreta

Os 2 alunos que respondem corretamente a questão, efetuando a divisão $7000 : 90$, conseguem atribuir significado para o número que encontram no resultado da divisão. Percebe-se que eles compreenderam a questão e sabiam que a resposta não poderia ser exatamente o resultado da divisão: $77,7$ já que se tratavam de pessoas. Estes alunos parecem analisar o resultado encontrado na operação para então perceber se ele é coerente ou não com a situação.

Ao contrário, os 2 alunos que acertam parcialmente a questão, parecem não considerar este fato. Respondem utilizando exatamente o valor encontrado na operação de divisão, sem considerar que não há como obter $0,7$ de uma pessoa. Estes alunos poderiam estar distraídos ao resolver a questão e por isso não tenham prestado atenção a este fato, ou, ainda, podem ter o hábito de sempre responder os problemas utilizando o valor encontrado nas operações, sem buscar o significado do que acabaram de resolver, sem ter hábito de fazer a validação da resposta. Caso tivessem feito esta análise do resultado encontrado, poderiam ter acertado totalmente a questão.

Errando ou acertando a questão, esses 4 alunos mostram que sabem resolver operações de divisão, já que as resolvem corretamente e sem apresentar rasuras.

Já o aluno que não acerta a questão, resolve incorretamente a divisão. No entanto, seu erro parece ser causado por uma distração no momento em que efetua a subtração $700 - 630$, pois seu algoritmo dá a impressão de não mostrar nenhum indício de erro conceitual como no caso de subtrair sempre o número menor do número maior, por exemplo.

Os outros algoritmos resolvidos nas demais questões apresentam-se corretos, inclusive as multiplicações e divisões que envolviam o cálculo de porcentagem nesta questão. Esta informação reforça a idéia de que este aluno não acertou o algoritmo por distração.

$$\begin{array}{r} 7000 \overline{) 630} \\ \underline{630} \\ 0 \end{array}$$

Figura 39 – Cálculo da divisão presente na Prova A14

Grupo 3

A estratégia de resolução encontrada em 11 Provas é a divisão de 7000 por 4.

Quadro Resumo 19 – Alunos que efetuam: $7000 : 4$ para encontrar a resposta do item 'b'.

11 provas apresentaram a divisão $7000 : 4$	Todas as provas apresentaram resolução incorreta	1 prova há utilização de outro procedimento além da divisão
		10 provas não há utilização de outro procedimento além da divisão

Ao observar as operações de divisão resolvidas pelos alunos, percebemos que dos 11, apenas 1 não acerta o cálculo. No entanto, o erro deste aluno dá a impressão de ser causado por falta de atenção e não pelo não domínio do processo do algoritmo já que ele parece ter “esquecido de baixar o último zero”, já que as demais divisões que resolve durante a Prova, todas, estão corretas.

Estes 11 alunos pensaram em dividir a quantidade de passageiros que fazem a ponte aérea São Paulo – Brasília pelas 4 empresas. No entanto, não percebem que isso forneceria a eles a quantidade de passageiros que viajariam em cada empresa se todas transportassem a mesma quantidade de passageiros, e não a quantidade de passageiros que são transportados por voo. Houve, por parte dos alunos, uma dificuldade na interpretação das informações contidas no enunciado e no que realmente a pergunta estava propondo.

O único aluno que busca outra estratégia após encontrar o resultado da divisão: $7000 : 4$, também não consegue chegar à resposta correta deste item, já que ele escolhe um procedimento inadequado para a questão, pois utiliza em outra divisão o valor já encontrado 1750 por 90, que é a soma dos voos diários de ida e volta. Este aluno, embora mostre dominar o processo do cálculo da divisão, mostra também a dificuldade em compreender e relacionar as informações contidas no enunciado.

Grupo 4

Outra estratégia encontrada em 5 Provas é a de utilizar o resultado encontrado na resolução do item 'a', para então encontrar o que estava sendo pedido no item 'b'.

Quadro Resumo 20 – Provas em que são utilizadas a resposta do item anterior para encontrar a resposta do item 'b'.

5 provas há utilização da resposta encontrada no item anterior	4 provas apresentam uma operação dividindo o valor encontrado no item 'a' pelo número 32	1 prova apresenta resolução totalmente correta
		3 provas apresentam resolução incorreta
	1 prova apresenta uma operação multiplicando o valor encontrado no item 'a' pelo número 32	1 prova apresenta resolução totalmente correta

Estes 5 alunos que resolveram estas Provas, de certa forma, interpretam corretamente a questão presente no item 'b', pois sabiam que, após encontrar a quantidade de passageiros transportados pela empresa TGK (no item 'a'), faltaria apenas relacionar esta quantidade ao número de vôos diários.

Contudo, dos 4 alunos que utilizaram uma divisão para resolver a questão, apenas 1 responde corretamente. Isto se deve ao fato de que os 3 alunos que erraram a questão, utilizaram a resposta encontrada no item anterior que, por sua vez, estava incorreta. Nestes 3 casos, mesmo resolvendo corretamente a operação de divisão, não seria possível encontrar o resultado correto, pois os alunos estavam trabalhando com valores inadequados.

Mas, caso estes 3 alunos tivessem acertado o item 'a', teriam acertado também o 'b', pois, além de mostrarem dominar o cálculo da divisão, o procedimento que escolheram era adequado para resolver a questão.

Já o caso do aluno que calcula corretamente a multiplicação 2485×32 , que é o resultado do item 'a' multiplicado pela quantidade de vôos da empresa TGK, observou-se que ele não relacionou corretamente os valores. Embora tivesse respondido corretamente ao item 'a', ele utiliza incorretamente, uma operação de multiplicação para resolver a questão. Mesmo que ele a tenha resolvido corretamente, não consegue encontrar quantos passageiros são transportados por dia em cada vôo. E ainda, ao encontrar o valor 79520 como resultado da operação de multiplicação, ele parece não ter procurado relacionar a resposta encontrada ao

que estava proposto na questão. Se tivesse adotado este procedimento, teria percebido que o valor encontrado era incoerente com a situação e então poderia ter procurado outras alternativas de resolução. É mais uma vez a ausência da validação da resposta.

Nestes 5 casos, os alunos parecem estar dominando o cálculo das operações, mas talvez estejam apenas calculando para encontrar uma resposta sem, muitas vezes, analisar melhor a situação que se apresenta.

Nas resoluções dos alunos, encontramos ainda 13 Provas com procedimentos diferentes das demais. Em duas delas, aparecem uma soma correta da porcentagem de passageiros presente na tabela encontrando 100% e uma resposta da questão com a utilização deste valor.

Percebe-se que nestes 2 casos ocorre uma interpretação equivocada da questão, pois os alunos retiram e operam com dados que não são capazes de fornecer os resultados propostos.

Além destas 2 Provas, encontramos ainda outras 2 em que, para encontrar a resposta, os alunos fazem a divisão: $7000 : 100$, buscando a quantidade de passageiros que viajam diariamente em cada voo. Estes alunos parecem ter utilizado a informação que os outros 2, os quais acabamos de citar, encontraram. Para fazer a divisão, eles somam a porcentagem de voos e não a quantidade de voos diários. Isso fez com que eles encontrassem um número equivocado para esta situação.

Nestes 4 últimos casos, a dificuldade dos alunos encontra-se em interpretar o que se pede na questão e conseguir relacionar as informações de que dispõem.

Das 53 questões estudadas, restam ainda 9, em que os alunos apresentam resoluções variadas. Utilizam-se de cálculos do tipo: $35,5 + 32$; 7000×14 ; $90 : 4$; 336×32 ; que não relacionam adequadamente as informações do problema e que, por isso, são consideradas incorretas.

Nestes casos os alunos também apresentaram dificuldades em interpretar o significado dos dados presentes no enunciado como, também, em relacioná-los entre si.

Análise do item 'c'.

Ao observar a produção escrita do item 'c', contida nas Provas, percebe-se o seguinte desempenho

Tabela 7- Classificação das resoluções do item 'c' quanto ao desempenho

RESOLUÇÃO	NÚMERO DE ALUNOS	%
Totalmente correta	5	9,4
Parcialmente correta	7	13,2
Incorreta	41	77,4
Total	53	100,0

O estudo da produção escrita registrada pelos alunos na resolução deste item será apresentado em 5 grupos :

Grupo 1

Iniciando o estudo no que se refere ao item 'c' da Questão 4, das 53 Provas que compõem a amostra, foram encontrados 9 Provas em que não havia registro algum de gráfico ou mesmo de seu esboço. Em algumas destas Provas haviam apenas tabelas.

Quadro Resumo 21 – Provas em que não há esboço de gráficos na resolução do item 'c'.

9 provas não há esboço de gráfico	1 prova apresenta resolução parcialmente correta	1 prova há esboço correto de uma tabela
	8 provas apresenta resolução incorreta	3 provas não há esboço de uma tabela
		5 provas há esboço de uma tabela

Entre as Provas que não apresentam esboço de gráficos na resolução do item 'c', em 5 delas há esboço de tabelas, na maioria dos casos, contendo alguns dados presentes no enunciado da questão.

Entre estas 5, percebe-se, em 1 Prova, que o aluno que a resolveu inicia mas não chega a concluir uma tabela. Faz linhas, colunas e apenas completa uma das linhas com “número” e “preço”, deixando o restante em branco, como se ele não tivesse chegado a uma conclusão do que deveria ser feito para poder prosseguir na montagem da tabela, já que, de acordo com sua resposta a respeito das impressões da Prova, o tempo foi suficiente para a resolução das questões.

Outro aluno já citado na Figura 26 monta uma tabela com 2 colunas: uma com o “preço dos bilhetes” e outra com “número de passageiros”. No entanto este aluno parece não considerar exatamente a porcentagem de passageiros transportados pelas duas empresas tal como consta no enunciado da questão. Talvez ele não soubesse como relacionar os 7000 passageiros com a porcentagem que cada empresa transportava ou ainda, pode não ter percebido a relação entre

estas informações.

Desta forma, ele encontra o número de passageiros transportados pelas empresas de uma maneira curiosa.

Preço dos Bilhetes	nº de Passageiros
336 reais	2.500
336 reais	2.000
288 reais	1.500
193 reais	1.000

Figura 40 – Resolução presente na Prova A8

Este aluno distribui os passageiros entre as empresas de modo que a diferença entre a quantidade transportada pelas duas empresas, individualmente seja a mesma: 500 passageiros. Percebe-se que ele atribui uma quantidade menor de passageiros à empresa que possuía uma porcentagem menor indicada na tabela. Embora talvez ele não soubesse como calcular o número de passageiros a que correspondia cada porcentagem, utilizem outra estratégia de resolução, trabalhando, assim, de certa forma, uma ‘idéia’ de proporcionalidade.

Falando ainda das 5 Provas em que há registro de tabelas, há 2 alunos que as montam sem se preocupar com a quantidade de passageiros. Eles utilizam apenas os dados que já estão prontos no enunciado da questão. Isto talvez seja reflexo de falta de compreensão ou ainda devido a algum hábito que tenham de que, ao resolver um “problema” os dados necessários para esta resolução estão sempre visíveis, basta apenas utilizá-los. Mas neste caso, eles necessitavam operar alguns dados para só então conseguir resolver o que a questão pedia.

Já na resolução dos outros 2 alunos que montaram uma tabela, percebe-se que eles buscaram estratégias para encontrar a quantidade de passageiros que cada empresa aérea transportava. O aluno A37 calcula corretamente as porcentagens utilizando operações de multiplicação e, em seguida, preenche a tabela que construiu, acertando parcialmente a questão, já que não esboça o gráfico. No caso do aluno A33, ele não utiliza adequadamente as porcentagens, pois despreza os decimais e por isso encontra quantidades de passageiros equivocadas, para cada empresa.

Nas 2 Provas em que os alunos não constroem tabelas, nem esboçam gráficos, há apenas registros de operações que não traduzem as

informações necessárias para que esta questão seja resolvida, como por exemplo a divisão $7000 : 4$.

E ainda há uma resolução curiosa; o aluno que monta uma tabela com dados que não foram retirados da questão:

	PREÇO DOS BILHETES	% DE PASSAGEIROS	VIOS IDA VOLTA
TAM	400 JUZUS	49,9 %	39
VARIG	420 JUZUS	50,1 %	40

Figura 41 – Resolução presente na Prova A52

O registro presente nestas 9 Provas parece mostrar que realmente a grande dificuldade dos alunos está em compreender o que se pede e, mais ainda, relacionar as informações de que dispõem para então encontrar uma estratégia que resolva o problema.

Grupo 2

Outra forma de resolução bastante utilizada no item 'c' foi o esboço do gráfico em que os alunos relacionaram o preço dos bilhetes à porcentagem de passageiros transportados pelas empresas.

Quadro Resumo 22 – Provas em que há esboço de gráficos utilizando dados incorretos.

14 provas apresentam esboço de um gráfico utilizando informações incorretas à situação	Todas as provas apresentam resolução incorreta
--	--

Nestas 14 Provas, há esboço de gráficos. No entanto, os alunos não identificam quais informações deveriam ser utilizadas na resolução. Eles não percebem que a quantidade de passageiros não é a mesma coisa do que a porcentagem de passageiros expressa na tabela do enunciado. Talvez por isso todos eles tenham utilizado a porcentagem e em nenhum momento se preocuparam ou mesmo perceberam que deveriam encontrar a quantidade de passageiros que determinada porcentagem representava.

Comparando a resolução deste item com a resolução do item 'a', percebe-se que, entre estes 14 alunos, apenas 3 procuram encontrar a quantidade

de passageiros pedida. Destes 3, apenas 1 responde corretamente. Os demais respondem o item 'a' utilizando também a porcentagem. Isso quer dizer que ao menos os 3 alunos que calculam a quantidade de passageiros no item 'a', deveriam também ter calculado as quantidades de passageiros para então esboçar o gráfico. Afinal, eles interpretaram a questão anterior, que, por sua vez, exigia informações semelhantes a esta, presente no item 'c'.

Dos 14 alunos que esboçaram gráficos incorretos, encontramos 10 que relacionam o “preço dos bilhetes” à “porcentagem de passageiros”. Destes, 8 esboçam gráficos de barras, 1 apresenta apenas os dois eixos: ordenada e abscissa e então marca os pontos sob o eixo das ordenadas, e outro constrói um gráfico curioso:

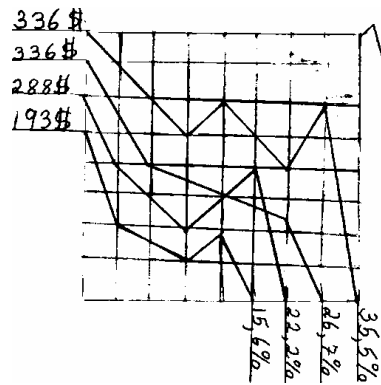


Figura 42 – Resolução presente na Prova A46

Este aluno parece ter a noção de como construir um gráfico, mas parece também não ter claro o que este tipo de gráfico representa e para quais situações ele é mais indicado, pois na situação apresentada não há oscilações de preços dos bilhetes e quantidades de passageiros. Logo, este gráfico não representa esta situação. Talvez o aluno esteja acostumado a ver este tipo de gráfico na mídia, em situações de inflação, pesquisa eleitoral.

Os demais 4 alunos, além de relacionarem o “preço dos bilhetes” e a “porcentagem de passageiros”, indicam as empresas aéreas a que se referem os valores. Destes, 3 apresentam gráficos de barras e 1 apresenta um gráfico um pouco diferente:

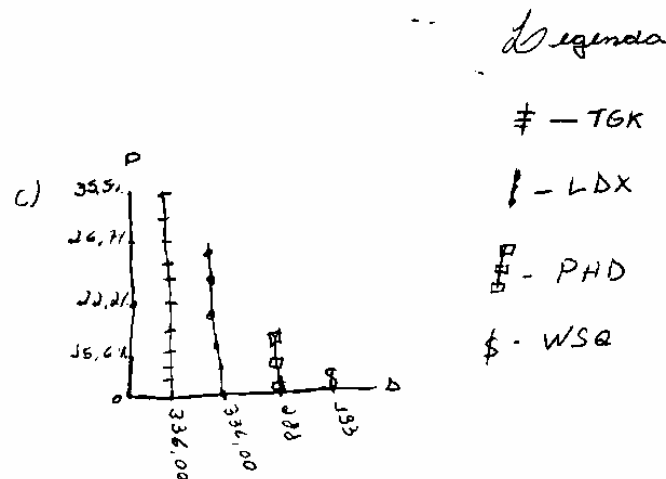


Figura 43 – Resolução presente na Prova A24

Analisando a produção já descrita destes 23 alunos percebe-se que a prática da análise e construção de gráficos em sala de aula parece estar ainda, muito pouco presente nas aulas. Esta hipótese surge ao percebermos a dificuldade destes alunos em relacionar as informações necessárias de uma situação que lhes é apresentada, para a construção de um gráfico. Além da construção, eles parecem ter pouco contato com a exploração de tabelas e gráficos, uma vez que não utilizam nem mesmo as noções mais elementares.

Grupo 3

Encontramos também vários alunos que interpretam corretamente a questão e procuram estratégias para encontrar a quantidade de passageiros que cada porcentagem representa para, então, esboçar o gráfico.

Quadro Resumo 23 – Provas em que há registros do desenvolvimento de estratégia para encontrar a quantidade de passageiros transportados por cada empresa e em seguida um gráfico.

9 provas apresentam registro do desenvolvimento de estratégias para encontrar a quantidade de passageiros transportados por cada empresa e um gráfico	6 provas apresentam multiplicação de 7000 com a porcentagem de passageiros transportados por cada empresa e esboçam um gráfico	3 provas apresentam esboço correto do gráfico
		3 provas apresentam esboços parcialmente corretos do gráfico
	3 provas apresentam cálculos de regra de três e o esboço de um gráfico	1 prova apresenta esboço correto do gráfico
		1 prova apresenta esboço parcialmente correto do gráfico
		1 prova apresenta esboço incorreto do gráfico.

Entre as 9 Provas em que, além do esboço do gráfico há registro de estratégias utilizadas para encontrar a quantidade de passageiros transportados diariamente por cada empresa, encontram-se diferentes procedimentos.

Há 6 Provas com registros de multiplicação entre a quantidade total de passageiros e a respectiva porcentagem de passageiros transportados por cada empresa. Neste caso, percebe-se que os 6 alunos dominam o algoritmo da multiplicação e os procedimentos necessários para o cálculo de porcentagem.

Destas 6 Provas, apenas 1 apresenta um cálculo incorreto. O aluno, ao encontrar a quantidade de passageiros da empresa TKG, utiliza o valor já encontrado no item 'a', que por sua vez estava incorreto. No entanto, este erro parece estar ligado à distração deste aluno, já que ele utiliza pra o cálculo a porcentagem de 35% e não de 35,5%, o que faz com que ele esboce o gráfico incorretamente.

A hipótese levantada sobre o fato de este erro estar ligado à distração se apóia no fato de que a porcentagem das demais empresas, embora também envolvam números decimais, ter sido calculada corretamente.

No entanto, o bom desempenho destes 6 alunos em seus cálculos não foram garantia da construção correta do gráfico, pois apenas 3 o fazem. Os outros 3 esboçam gráficos incorretos e incompletos. Dois deles, ao contrário de utilizar juntamente com a quantidade de passageiros o preço dos bilhetes, utilizam apenas o nome da empresa. E, o outro, esboça um gráfico totalmente incompleto, sem escrita alguma.

Dos três alunos que utilizam a regra de três para encontrar a quantidade de passageiros transportados diariamente por cada empresa, 2 deles resolvem a regra de três corretamente. No entanto, um dos alunos, ao esboçar o gráfico, utiliza corretamente as informações mas esboça um gráfico linear, que é inadequado para representar a situação. O que pode mostrar que ele não distingue entre os tipos de gráfico, qual é mais adequado para cada situação. Mas, sabe relacionar as informações necessárias para a construção de um gráfico.

A outra Prova em que aparecem os cálculos corretos das regras de três, há o esboço correto de um gráfico. Inclusive, das 53 Provas, este gráfico da Prova A17, apresentado a seguir, é o gráfico mais completo e melhor construído no que se refere à quantidade de informações e a apresentação.

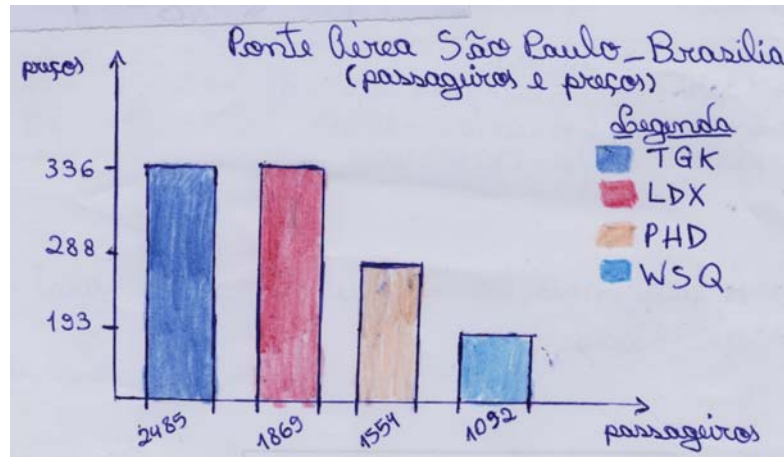


Figura 44 – Resolução presente na Prova A17

Dos 3 alunos, resta 1, que utiliza o total de passageiros como sendo 100%, mas monta as regras de três utilizando a quantidade de vôos e não a porcentagem de passageiros transportados por cada empresa. Este aluno parece não dominar aos conceitos envolvidos na montagem de uma regra de três, pois na resolução do item 'a', para encontrar a quantidade de passageiros transportados pela empresa TGK, ele comete o mesmo erro, o qual já foi comentado.

Grupo 4

Continuando o estudo da produção escrita do item 'c' presente na amostra, encontramos 18 Provas que não apresentam registro algum de tentativa de cálculos ou estratégias, apenas o esboço de um gráfico.

Quadro Resumo 24 – Provas com o registro apenas de um gráfico.

18 provas não apresentam registro algum além do esboço de um gráfico	1 prova apresenta o esboço correto do gráfico
	3 provas apresentam esboços parcialmente corretos do gráfico
	14 provas Apresentam esboços incorretos do gráfico

A Prova que apresenta o esboço do gráfico corretamente faz com que seja levantada a hipótese de que o aluno que resolveu esta prova tenha utilizado outro local para fazer seus cálculos, já que estes não eram tão simples para serem efetuados mentalmente e, ainda, percebe-se que, no item 'a', este aluno calcula corretamente a questão utilizando-se de uma operação de multiplicação; isto mostra que ele dominava os conceitos exigidos pela questão.

Nas 3 Provas em que os gráficos apresentam-se parcialmente

corretos, os registros da quantidade de passageiros transportados pelas empresas estão corretos. No entanto, os alunos não organizam estas informações corretamente em seus gráficos. Talvez isso seja apenas uma falta de concentração.

Dois alunos colocam, no gráfico de barras, tamanhos diferentes para preços de bilhetes iguais. E 1 não utiliza no gráfico os valores que encontrou, relacionando apenas a porcentagem de passageiros que cada empresa transporta ao nome da empresa. Este caso é atípico, pois o aluno interpreta quais informações irá precisar já que calcula corretamente a quantidade de passageiros que cada empresa transporta, no entanto não se utiliza destas informações, esboçando um gráfico incorreto e incompleto.

As demais 14 Provas apresentam esboços muito elementares, utilizando para isso, na sua maioria, os dados presentes na tabela que compõe o enunciado da questão.

Serão apresentados agora alguns destes casos:

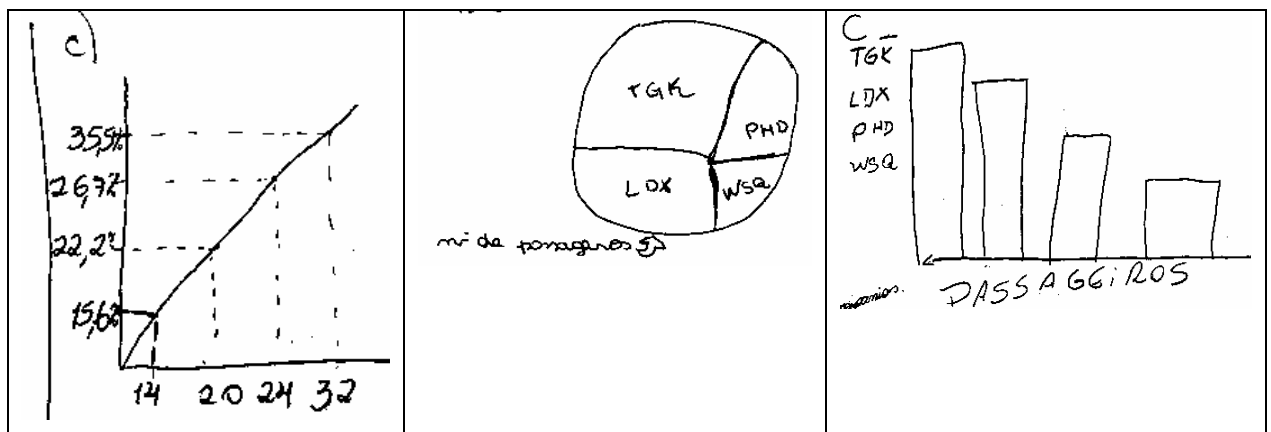


Figura 45 – Resolução presente respectivamente nas Provas A16, A6 e A40

Os alunos que resolveram estas 14 Provas parecem estar com dificuldades em interpretar e compreender o enunciado e também em dominar algumas noções simples no que se refere ao esboço de um gráfico, pois o que registraram foi um esboço muito incompleto e incorreto.

Quadro resumo 25 – Provas que apresentam estratégias inadequadas para a construção do gráfico e o esboço de um gráfico

3 provas apresentam cálculos que não auxiliam na construção do gráfico e em seguida o esboço de um gráfico	Todas apresentam esboço incorreto de um gráfico
--	---

Estas 3 Provas apresentam cálculos que em nada contribuem para a construção do gráfico.

O primeiro registro consiste em somar corretamente as porcentagens de passageiros transportados por cada empresa, chegando a 100%. O esboço deste gráfico consiste em 4 barras sem identificação alguma, apenas com as porcentagens que aparecem na tabela do enunciado. Sendo uma porcentagem sob cada barra.

No segundo registro, o aluno parece ter interpretado de maneira incorreta a tabela presente no enunciado. Ele calcula o custo das passagens cobrados por cada uma das empresas, somando duas vezes os valores que aparecem na tabela, como se, por exemplo, no caso da empresa TGK o valor R\$336,00 fosse apenas custo de ida da passagem. Ao encontrar estes valores o aluno esboça o gráfico:

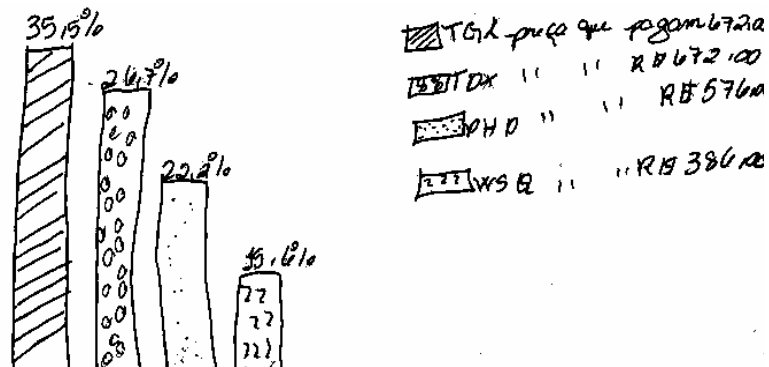


Figura 46 – Resolução presente na Prova A48

Ele parece ter dado atenção apenas ao preço dos bilhetes e, ainda, de maneira incorreta. Parece não ter compreendido o que se pedia, pois não percebe que precisava encontrar a quantidade de passageiros e não utilizar a porcentagem presente na tabela.

O último aluno da amostra apresenta a seguinte resolução

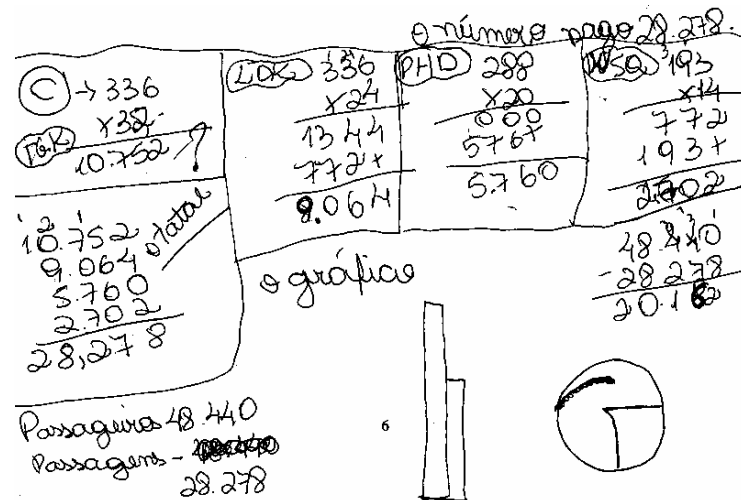


Figura 47 – Resolução presente na Prova A13

Este aluno, embora tenha efetuado todos os cálculos corretamente, parece ter pensado de maneira equivocada que relacionar o preço dos bilhetes à quantidade de passageiros que cada empresa transporta, consistia em multiplicar o preço dos bilhetes à quantidade de vôos diários de cada empresa. Assim ele faz estas multiplicações corretas mas indevidas para esta situação.

De maneira geral, as dificuldades mais acentuadas destes 53 alunos na resolução deste item parecem poder ser resumidas em 3. A primeira diz respeito à interpretação e compreensão do que a questão solicita. A segunda em saber utilizar os dados de que dispõem para poder responder àquilo que se pede. E a terceira, a falta de domínio das noções básicas necessárias para a construção de um gráfico.

A resolução de algoritmos, por sua vez, eles parecem estar dominando consideravelmente, já que poucos erraram operações.

Estas considerações fazem com que seja levantada a hipótese de que talvez as aulas de matemática se baseiem em resoluções de técnicas e algoritmos, e são oferecidas pouquíssimas oportunidades para compreensão, interpretação, elaboração de hipóteses, de estratégias.

A respeito das impressões sobre a Prova, observamos que 8 alunos responderam que, dentre todas as questões, a 4 era a mais fácil. Destes 8 alunos, há 1 que acerta totalmente 1 dos itens desta questão, 1 que acertou parcialmente 1 item, e ainda 2 alunos que acertaram 1 item parcialmente e um totalmente.

De acordo com a produção destes 8 alunos no item 'a', observa-se que, entre os que erraram, 3 não apresentam forma alguma de resolução, apenas a resposta incorreta. Dois alunos fazem apenas uma tentativa de um cálculo que não

resolve a questão e respondem incorretamente.

Analisando o item 'b', observa-se que entre os 8 alunos citados, 3 deles não apresentam estratégia alguma de resolução, apenas a resposta. Os demais escolhem procedimentos que não são capazes de resolver a questão.

No item 'c', observa-se que, entre os alunos que julgaram a questão fácil mas que a erraram, nenhum apresenta registro dos cálculos necessários para a construção do gráfico. Eles utilizam apenas informações prontas no enunciado para resolver este item.

Há ainda 27 alunos que apontam esta como a questão mais difícil. Destes, 5 alunos acertam totalmente 1 item da questão, 1 aluno acerta totalmente 2 itens, 7 alunos acertam parcialmente 1 item, 1 aluno acerta parcialmente 2 itens e, ainda, 1 aluno acerta totalmente 2 itens e parcialmente 1 item.

Neste caso, percebe-se que 15 dos alunos que julgaram esta questão como a mais difícil, conseguiram acertar parcialmente ou totalmente ao menos 1 item da questão. No caso dos alunos que não acertaram item algum, de modo geral, a maioria dos registros apresentados por eles mostra dificuldades na compreensão do que os itens estavam pedindo para então encontrar uma estratégia de resolução.

5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES A GUISA DE CONCLUSÃO

Pode-se dizer que o foco principal desta pesquisa consistiu em observar, analisar e estudar a produção escrita de alunos de 8ª série em questões abertas de Matemática. Este estudo permitiu uma visão geral do que estes alunos sabiam, do que ainda não sabiam e mais, permitiu verificar alguns aspectos que estão aqui discutidos.

Perego coloca em seu trabalho que, “utilizar a avaliação para investigar os saberes dos alunos é uma das maneiras de acompanhar e participar da aprendizagem destes” (2005, p.78). Para isso, o professor em sala de aula pode, sempre que possível, além de aplicar provas, buscar a interpretação dos registros escritos feitos pelos alunos nas atividades diárias. Esta ação lhe permitirá saber como estão seus alunos no processo de aprendizagem. Com isso, ele tem a oportunidade de perceber quais as maiores dificuldades, no que diz respeito a este processo, e assim, redirecionar suas aulas com o intuito de auxiliá-los na construção/apropriação de conhecimentos. Daí a importância do estudo dos registros escritos.

Fazendo um apanhado geral das 53 Provas estudadas, percebeu-se que os alunos não apresentam dificuldades em resolver operações, exceto poucos casos. Eles parecem estar dominando bem o processo de utilização dos algoritmos.

Entre todas as operações resolvidas nas quatro questões, foram encontradas algumas operações com algum erro na resolução dos algoritmos entre elas há 7 adições, 6 multiplicações, 6 divisões e, a única subtração errada aparece dentro de uma divisão. Ressalta-se aqui que, aproximadamente a metade dos erros encontrados nas operações de multiplicação e divisão, está presente nos cálculos envolvendo números decimais. Uma provável causa pode ser alguma dificuldade na utilização da vírgula.

Acredita-se que os erros encontrados nos registros escritos das operações possam ter duas causas. Uma delas diz respeito à distração, ou seja, à falta de atenção no momento da resolução que faz com que os alunos cometam erros simples, como por exemplo, o aluno A30 que soma incorretamente $9 + 3 = 15$. Observando a prova toda deste aluno, percebe-se ele resolveu corretamente outras adições e, sendo assim, este erro não quer dizer que o aluno não saiba resolver tal operação.

A outra causa dos erros cometidos nas operações parece ser conceitual, aconteceram realmente por falta de domínio do processo de resolução dos algoritmos, talvez também, associados à falta de compreensão do Sistema de Numeração Decimal, como é o caso do aluno A10 que mostrou ter dificuldades no processo de resolução dos algoritmos registrados por ele (Figura 16, Figura 21, Figura 24).

Por meio desta quantidade de erros, considerada pequena em relação à grande quantidade de cálculos registrada nas provas, é possível inferir que em sala de aula são resolvidas muitas operações, pois os alunos parecem dominar os algoritmos das operações básicas, exceto em alguns poucos casos.

No entanto, analisando no geral, os registros escritos dos alunos parece plausível inferir que talvez as aulas sejam estruturadas seguindo os passos de – explicação oral, apresentação de fórmulas e/ou exemplos e em seguida, resolução de vários exercícios semelhantes entre si. Ou seja, a estimulação do pensar sobre, da inferência, da descoberta, do raciocínio talvez esteja pouco presente.

É fato que os alunos precisam dominar os algoritmos das operações, compreender e diferenciar as idéias de cada operação, porém mais do que isso, é necessário que estas operações estejam contextualizadas de modo a proporcionar ao aluno ir além de apenas resolver estes cálculos, e atribuir significado a estas operações e ao resultado encontrado.

Parece fundamental que os alunos tenham contato com situações que lhes permitam conhecer as diferentes idéias de cada operação e que possam estar discutindo os conceitos envolvidos e as diferentes formas de resolução de cada situação. Nagy-Silva, coloca que a

compreensão das diferentes idéias presentes nas operações fundamentais é essencial para a construção do conhecimento matemático e também para o estabelecimento de relações entre estas operações e situações do cotidiano. Desse modo, para que os alunos utilizem as operações entendendo-as, e com desenvoltura, é importante que eles tenham contato com diferentes situações-problema nas quais as idéias presentes nas operações envolvidas sejam exploradas (2005, p.98).

No entanto, existe ainda, nas aulas de matemática, a insistência em destacar, no enunciado de uma situação, as “palavras-chave” com o intuito de ‘ajudar’ os alunos na resolução correta dos problemas. Ao trabalhar com “palavras-chave”, que por sua vez parecem estar associadas a alguma operação, os alunos

perdem a oportunidade de compreender e de interpretar problemas, e, apenas utilizem-se deste mecanismo de resolução, que, nem sempre funciona.

Sabe-se que, “[...] ao resolver problemas passamos por um processo de elaboração de modos de resolução e são esses processos que nos permitem ‘lidar’ com os enunciados” (NAGY-SILVA, 2005).

Contudo, se o aluno se ‘acostuma’ a buscar “palavras-chave”, ele deixa de ler atentamente o enunciado para buscar compreender e interpretar a questão, e passa apenas a procurar tais palavras para então, fazer algum cálculo. Desta forma ele pouco reflete a respeito da questão, não formula hipóteses, não faz inferências, apenas, usa um artifício memorizado. E, caso não encontre uma destas palavras, sente dificuldade em elaborar uma estratégia de resolução, já que o primeiro passo para resolver corretamente um problema é ler, compreender e interpretar seu enunciado. Isso pode ter acontecido com alguns alunos na resolução da prova da AVA/2002.

Segundo Buriasco (2004) apenas a compreensão do enunciado não garante que o aluno saiba agir, ou seja, resolver o problema. Ele entende o que aconteceu na ‘situação’, no entanto, não é capaz, naquele momento, de encontrar ou elaborar uma estratégia de ação para sua resolução. Além de compreender, o aluno precisa interpretar o enunciado para conseguir buscar uma estratégia para resolvê-la, uma vez que a interpretação está diretamente ligada à ação. Dessa forma, o aluno além de compreender, sabe o que deve fazer para encontrar uma solução para o problema.

A respeito das informações presentes no enunciado das questões, percebeu-se que os alunos não ‘aproveitam’ todas as informações de que dispõem. Eles mostram, por meio dos registros, terem facilidade em retirar os dados numéricos presentes nos enunciados, mas no que se refere a outras informações importantes para a resolução das questões, parecem ter dificuldades em associá-las aos dados numéricos, ou seja, a dificuldade está mais na interpretação do enunciado como um todo. Por vezes mesmo a compreensão do enunciado parece comprometida, pois parecem compreender as informações uma a uma, isoladamente, sem estabelecer relações entre elas. Talvez por isso, em muitos casos eles apenas fazem operações sem levar em consideração todas as informações, o que gera uma resposta incorreta para tal questão.

Exemplo disso é a resolução apresentada para a questão 3, 23 alunos levaram em conta apenas a informação de que em 5 dias foram distribuídos 100 telegramas e, com isso, apresentaram como resposta o resultado de $100 : 5$. Não

consideraram a informação que garantia não só que os telegramas não haviam sido distribuídos igualmente, como apresentava qual a 'regra' da distribuição.

É justamente neste aspecto que se observa os tipos mais freqüentes de erros. Eles dizem respeito à falta de compreensão e/ou interpretação das questões e, por conseguinte, a equivocada utilização das informações contidas nos enunciados. Acredita-se que uma das causas desses erros seja a falta de familiaridade dos alunos com a resolução de problemas de fato, ou seja, com 'montar' estratégias, fazer inferências, discutir hipóteses, pois ainda em grande parte das aulas de matemática os alunos são treinados a apenas resolver operações seguindo modelos e fórmulas, ou problemas-tipo.

Na última folha da Prova na qual os alunos puderam colocar suas impressões a respeito da Prova, observa-se que em relação à Questão 3, por exemplo, 9 alunos julgaram-na como sendo a questão mais fácil e 8 como sendo a mais difícil. Ressalta-se, porém que, julgar uma questão fácil não implica em saber resolvê-la corretamente, pois entre esses 9 alunos, apenas 1 acertou totalmente a questão. É possível que os demais alunos tenham resolvido a questão acreditando que a estratégia que adotaram estava correta, por isso julgaram-na como fácil.

Observando a resolução apresentada pelos 8 alunos que apontaram a Questão 3 como sendo a mais difícil, percebe-se, por meio das estratégias escolhidas, que 2 deles mostraram melhor compreensão da questão. Os demais, não demonstram em seus registros ter tentado resolver a questão de várias maneiras, ou mesmo não buscaram efetuar nada mais do que uma única operação, ou no máximo duas, para então escrever uma resposta. Talvez eles tenham apontado esta questão como sendo a mais difícil, justamente por isso, tinham consciência de que não haviam conseguido encontrar uma estratégia que pudesse levá-los à resposta correta. É possível que a dificuldade deles pudesse estar em relacionar de maneira correta, todas as informações importantes para esta resolução que por sua vez faziam parte do enunciado.

Uma das escolhas que o professor pode fazer em sala de aula ao perceber que há alunos que julgam as questões como sendo fáceis, mas não conseguem acertá-las, é fazer um trabalho 'lado a lado' com estes alunos, procurando acompanhar as resoluções e estratégias de resolução que utilizam para saber quais são as dificuldades que os impedem de resolver corretamente as situações problemas. Apenas dar várias atividades semelhantes para esses alunos resolverem não basta, pois isso fará com que eles continuem utilizando os mesmos procedimentos e apresentando as mesmas dificuldades. A resolução de situações

com diferentes formas de apresentação oportuniza ao aluno pensar em cada uma delas como algo novo, independente de ‘macetes’.

Feitas continuamente análise da produção dos alunos, há que se discutir com eles os motivos das escolhas de determinados procedimentos. Fazendo essa discussão, refletindo sobre o que fizeram, é possível que os alunos passem além de compreender as questões a interpretá-las corretamente.

A respeito destas dificuldades que os alunos possam apresentar, PEREGO (2005) sugere que uma

boa ajuda para sanar essas dificuldades de interpretação pode ser, além de um acompanhamento constante do professor sobre as atividades dos alunos, o trabalho com problemas que possuam enunciados diversificados, que se apresentem de diferentes formas e que não apresentem palavras chaves ou dicas da estratégia a ser utilizada para sua resolução. Isso faz com que os alunos tenham que ler, interpretar e pensar nas estratégias que possam auxiliá-los a resolver a situação proposta (p.79).

Outra opção importante, por parte do professor, é criar o hábito nos alunos, de descrever o que acabam de fazer, ou seja, após os alunos terem resolvido uma situação, é muito interessante que eles registrem, mesmo que de início superficialmente, os caminhos percorridos durante tal resolução. Este procedimento auxilia o professor a perceber como o aluno foi pensando para resolver a questão, quais conceitos ainda precisam ser retomados, além do que, ao descrever o que fez, é possível que o próprio aluno identifique ações incorretas, ao conferir suas estratégias, e pensar novamente a respeito da questão.

Este procedimento ficou pouco visível nos registros das provas investigadas nesta pesquisa. Foram encontradas poucas resoluções acompanhadas de descrição. As provas que continham esse tipo de registro permitiram que a análise fosse mais apurada, pois, por meio da descrição foi possível perceber com mais segurança os conceitos que os alunos dominavam ou não.

Uma estratégia que pode auxiliar os alunos a resolverem corretamente as questões, em sala de aula e, também, poderia ter ajudado especificamente nestas provas da AVA, mas que foi muito pouco utilizada, é a validação da resposta. Validar no sentido de, após encontrar uma resposta, observar se ela faz sentido ou não para a situação apresentada. Não é sempre necessário desenvolver cálculos para validar uma resposta, em alguns casos a simples interpretação dos valores encontrados é suficiente para descobrir se a resposta formulada está coerente com a pergunta.

A impressão que se tem é que os alunos não têm o hábito de utilizarem-se deste recurso. No momento em que um aluno faz a validação da resposta, é possível que ele faça uma análise das estratégias que utilizou para resolver a questão. Observando o resultado, ele deve procurar a coerência deste com o enunciado da questão, ou seja, observar se há algum sentido em apresentar determinada resposta e, caso perceba que não, tem então, uma nova oportunidade de buscar outras estratégias que possam ser mais eficientes do que a que foi utilizada inicialmente.

Em sala de aula, este hábito de validar as respostas, pode e precisa ser desenvolvido para que os alunos pensem mais a respeito daquilo que estão fazendo e não apenas busquem resolver um cálculo que ‘acham’ que pode solucionar a situação problema. E mais, é preciso que percebam que nem sempre o resultado encontrado na resolução de um algoritmo é a resposta correta para a questão.

A respeito dos procedimentos mais utilizados nas resoluções, observa-se que, na questão 1, há 16 Provas em que os alunos apresentaram, por meio de operações de adição, o cálculo dos encanadores A e B para apenas 1 hora de trabalho. Além de mostrar que eles dominam o algoritmo da adição, mostra que esses 16 alunos encontraram uma estratégia que poderia tê-los conduzido a resposta correta, caso tivessem continuado, encontrando os custos dos encanadores para mais algumas horas.

Adotando este procedimento seria possível perceber o que aconteceria com os valores com o passar do tempo. No entanto, é possível que esses alunos não se deram conta de que o preço cobrado pelos encanadores se modificaria continuamente em relação ao tempo, o que vem mostrar, que os alunos compreenderam o problema mas tiveram dificuldade na sua interpretação.

Além disso, por meio dos registros, é possível inferir que os alunos que perceberam que, com o passar das horas, o comportamento da situação mudaria, esses calcularam o preço de cada encanador para mais de uma hora de trabalho para ‘ver’ o que acontecia. Isso pode ser indício de que conseguiram interpretar a questão e também, que possuem alguma idéia de função, além de utilizarem a linguagem algébrica, embora alguns ainda não a utilizem com rigor.

Há ainda aqueles que perceberam que a questão poderia ser resolvida por meio de equações e que deixam registrado que sabem como resolvê-las.

Na Questão 2, encontram-se 32 Provas que iniciam a resolução efetuando $75 - 23$. Os 17 alunos que apresentam apenas esta operação como estratégia de resolução, parecem ter resolvido a questão utilizando um procedimento quase que ‘sugerido’ pela questão quando esta era mal compreendida pelo aluno. Ou seja, no enunciado, a expressão “A saia foi R\$23,00 mais barata do que a blusa” parece indicar uma operação de subtração, no entanto, devido a dificuldades na compreensão e interpretação do enunciado os alunos não perceberam que só isso não bastava para responder corretamente a questão. Mas, esses 17 alunos mostraram alguma compreensão do enunciado, e mais, mostraram saber resolver a operação de subtração.

Os demais 15 alunos pareceram compreender e interpretar melhor a questão, pois buscaram outras estratégias após terem realizado corretamente a subtração $75 - 23$. Eles sabiam que somente esse cálculo da subtração não seria suficiente para resolver a questão.

Os 8 alunos que calcularam $52 : 2 = 26$ parecem mostrar que sabiam o que estavam fazendo e mais, que dominam também a operação de divisão. Os outros 7 alunos, embora soubessem que deveriam adotar outro procedimento, não escolheram procedimentos corretos para a resolução. Mas, por meio dos procedimentos deles, mostram que sabem resolver adição e divisão.

Na Questão 3, a estratégia mais utilizada no início das resoluções é o cálculo da divisão $100 : 5$, registrada em 23 Provas. Esses alunos mostraram que sabiam o algoritmo da divisão, e, iniciaram a resolução corretamente. Desses, 8 alunos não utilizaram outro procedimento, o que mostra a dificuldade deles em interpretar a questão. Os 15 que tentaram adotar outro procedimento, assim como na questão anterior, mostraram saber que somente o cálculo daquela divisão não era suficiente para encontrar a resposta da questão. Eles mostraram que sabem ainda calcular subtrações e adições.

No geral, nesta questão, observou-se que alguns alunos sabem resolver algoritmos da adição, subtração e divisão e ainda, noções de estimativa, de proporcionalidade, procuraram relacionar as informações, além dos dados numéricos, presentes no enunciado tentando encontrar estratégias que as contemplassem.

A Questão 4 possuía em seu enunciado, uma tabela. Por meio da produção escrita encontrada na resolução do item ‘a’ e ‘b’ percebeu-se que além de ter dificuldade em escolher uma estratégia que lhes permitisse resolver corretamente esses itens, 34 alunos no item ‘a’ e 30 no item ‘b’ não compreenderam

o enunciado para retirar adequadamente os dados da tabela. Em alguns casos foi justamente a retirada de dados de forma incorreta que fez com que os alunos errassem a questão.

A Questão 4 parece ser a que mais revelou a dificuldade que os alunos têm na compreensão e interpretação do enunciado verbal, pois foi nela que aparecem muitos registros que mostram essas dificuldades. Nestes registros observa-se ainda a falta de domínio na leitura de tabelas e construção de gráficos, como por exemplo, na resolução do item 'a', em que ao contrário de utilizar a porcentagem, utilizaram o número de vôos para descobrir a quantidade de passageiros transportados pela empresa TGK e, ainda, na montagem do gráfico, utilizaram dados que não expressavam a situação solicitada.

No item 'a' da Questão 4, 25 alunos não adotaram estratégia de resolução e apenas escreveram uma resposta incorreta utilizando alguns dados retirados do enunciado. A impressão que se tem é que, os alunos, em muitos casos, estão habituados a ler o enunciado da questão e em seguida já apresentar uma resposta que lhes parece ser óbvia.

Entre os 28 alunos que desenvolvem alguma estratégia de resolução, a mais utilizada é o cálculo de $7000 \times 35,5$ ou $70 \times 35,5$ presente em 13 provas. No geral, pela resolução deste item, percebe-se que os alunos possuem domínio do cálculo de porcentagem, sabem retirar informações presentes em tabelas entendendo o significado dos valores, sabem quando utilizar e resolver uma regra de três, e ainda, um aluno (Figura 38) mostra claramente o domínio do conceito de porcentagem e divisibilidade.

Assim como no item 'a' da Questão 4, na resolução do item 'b' desta mesma questão, 19 Provas apresentaram apenas a resposta incorreta.

Outra estratégia bastante utilizada na resolução deste item, é a divisão $7000 : 4$. Este registro está presente em 11 Provas.

De modo geral, neste item, aproximadamente 9 alunos mostram saber relacionar as informações contidas no enunciado embora, nem todos procedessem corretamente a ponto de encontrar a resposta correta.

Conforme apresentado na análise da Questão 4, percebe-se que, embora no geral, nas quatro questões da Prova, os alunos demonstram saber resolver operações, nesta questão em particular, dos alunos que efetuaram algum cálculo envolvendo porcentagem, encontramos 16 registros que mostram a dificuldade em efetuar esse tipo de cálculo. Talvez porque cálculos utilizando porcentagem estejam sendo pouco explorados em sala de aula.

No item 'c' da Questão 4, em que os alunos deveriam esboçar um gráfico, percebeu-se, na maioria das Provas, que eles não dominam conceitos básicos necessários para a construção de um gráfico. Considerando que esses alunos já freqüentaram por volta de oito anos a escola e que, como já foi dito, os gráficos e tabelas têm sido um recurso muito utilizado em jornais e revistas para ilustrar e divulgar opiniões, pesquisas, informações, acredita-se que esses alunos já deveriam ter maior familiaridade com estes recursos.

Há poucos alunos que, por meio de seu registro, demonstraram familiaridade com a construção de gráficos. A maioria deles, embora tenha esboçado um gráfico incompleto, sabe que são utilizados dois eixos, que cada eixo se refere a um tipo de informação referente ao que se pretende mostrar, e alguns ainda sabem que para a situação em questão, o gráfico de barras seria o mais indicado.

É possível que alguns alunos tenham também dificuldades quanto à leitura de gráficos, já que os esboços deles eram bem elementares, ou seja, não relacionam valores, não há presença de título para identificar o gráfico, os 'tamanhos' das barras não são proporcionais entre si, não há identificação dos valores nos eixos.

Esta discussão sugere que, a leitura e interpretação de gráficos e tabelas pode não ser uma prática de sala de aula. Os professores têm perdido com isso, rica oportunidade de discussão a respeito de assuntos sociais relevantes, afinal, as aulas de matemática também precisam contribuir para a formação de pessoas bem informadas e com poder de argumentação sobre o que acontece na atualidade.

A partir do momento em que, cada vez mais, professores e alunos tiverem a oportunidade de lidar com situações contextualizadas, situações-problema nas quais não saibam de imediato o que fazer, que exijam criatividade, compreensão e interpretação, mais ricos serão os processos de ensino e aprendizagem. Para que isso aconteça, professor e alunos devem estar numa mesma 'sintonia'. O professor precisa conhecer os caminhos que seus alunos percorrem nas tentativas de que lançam mão para solucionar as situações que lhes são propostas.

Fazer isso significa, segundo Buriasco (2004), tornar-se parceiro dos alunos na busca de aprender matemática na escola, considerando que educar pela matemática é um ato de opção, compromisso e solidariedade.

6 REFERÊNCIAS

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Luís Antero Neto e Augusto Pinheiro (trad.) Portugal: Edições 70, 1977.

BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari Knoop. **Investigação Qualitativa em Educação**. Portugal: Porto Editora, 1994.

BORASI, Raffaella. Exploring Mathematics through the analysis of errors. **For the Learning of Mathematics**. 7,3 (Novembro, 1987). Montreal: FML Publishing Association, 1987. (Trad.: Jader Otávio Dalto).

BURIASCO, Regina Luzia Corio de **Avaliação em Matemática: um estudo das respostas de alunos e professores**. Marília, 1999. Tese de Doutorado. Orient. Prof. Dr. Cosme Damião Bastos Massi – Universidade Estadual Paulista – UNESP. p.97

_____. Algumas considerações sobre avaliação educacional. **Estudos em Avaliação Educacional**. Fundação Carlos Chagas, São Paulo, n.22, p.155-177, jul-dez. 2000.

_____. Sobre avaliação em Matemática: uma reflexão. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n.36, p.255-264, dez.2002.

_____. **Notas de aula da disciplina Tópicos de Educação Matemática**, do programa de Mestrado em Ensino de Ciências Educação Matemática. UEL, 2004.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; SOARES, Maria Tereza Carneiro. **Manual para correção das provas com questões abertas de Matemática: AVA/2002**. Curitiba: SEED/CAADI, 2003 (no prelo).

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª série): matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CURY, Helena Noronha. *Concepções sobre matemática e suas relações com os procedimentos avaliativos*. In: **III Encontro Regional de Educação Matemática**. Ijuí, 2002. Anais. Ijuí: Editora Unijuí, 2002. p.39-48.

_____. *Análise de erros em Educação Matemática*. **Veritati**, Salvador, v.3, n.4, p.95-107, jun. 2004.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: Da Teoria à Prática**. 8 ed. São Paulo: Papirus, 2001.

ESTEBAN, Maria Teresa. **O que Sabe quem Erra? Reflexões sobre Avaliação e Fracasso Escolar**. 3 ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

_____. **Escola, currículo e avaliação**. São Paulo: Cortez, 2003.

FONSECA, Jairo Simon da; MARTINS, Gilberto de Andrade. **Curso de Estatística**. 6.ed. São Paulo – Editora Atlas AS, 1996

FRANCO, Maria Laura P. B. *O que é análise de conteúdo*. In: **Ensino Médio: Desafios e Reflexões**. São Paulo: Papirus, 1994. p.47-70.

GANDIM, Danilo. *Algumas idéias sobre a avaliação escolar*. In: **Revista da Educação da AEC**. Brasília, 24(97): 48-55, out/dez, 1995.

GODOY, Arilda Schmidt. *Pesquisa Qualitativa: Tipos Fundamentais*. **Revista de Administração de Empresas**. São Paulo, v.35, n.3, p.20-29, mai/jun.1995.

HADJI, Charles. **A Avaliação, Regras do Jogo**. Das Intenções aos Instrumentos. 4. ed. Portugal: Porto, 1993.

_____. **Avaliação Desmistificada**. Porto Alegre: ARTMED, 2001.

_____. **Na Hora de Avaliar, Deixe os Preconceitos de Lado**. Disponível em: <http://www.uol.com.br/novaescola/>. Acesso em:18/05/2002

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e posições**. 3.ed. São Paulo: Cortez, 1996.

NAGY-SILVA, M. C. **Do observável para o oculto: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª. série em questões de matemática**. 2005. 114p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina/UEL, Londrina, PR.

PEREGO, Sibéle Cristina. **Questões Abertas de Matemática: um estudo de registros escritos**. 2005. 104 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina/UEL, Londrina, PR.

PINTO, Neuza Bertoni. **O erro como estratégia didática: Estudo do erro no ensino da matemática elementar**. Campinas, S.P: Papirus, 2000.

QUEIROZ, Ana Albuquerque. **Análise de Conteúdo**. Disponível em: < <http://www.anaqueiroz.com>. Acesso em:15/01/2005

RADATZ, Hendrik. Students' erros in mathematical learning process: a survey. **For the Learning of Mathematics**. 1,1 (July, 1980). Montreal: FML Publishing Association, 1980. (Trad.: João Ricardo Viola dos Santos).

RICO, Luis. *Errores em el aprendizaje de las matemáticas*. In: KILPATRICK S; GOMES, P; RICO, L. **Educacion Metemática**. Colômbia: Grupo Editorial Iberoamérica, pp.69-108, 1995.

ROHLOFF, Débora Bohrer. **Uma professora de matemática, sua compreensão e sua prática em avaliação**. 2004.135p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SACRISTÁN, J. Gimeno. A avaliação no ensino. In: Sacristán, J. G; A.I.P. **Comprender e transformar o ensino**. 4. ed. Porto Alegre-RS: Artmed, 1998. cap.10, p.295-351.

APÊNDICE

APÊNDICE A
 Descrição das Resoluções das Questões

QUESTÃO 1

ALUNOS	CÓDIGO	FORMA DE RESOLUÇÃO APRESENTADA
A1	0	Calcula corretamente o custo da primeira hora para o encanador A e incorretamente para o encanador B. Calcula corretamente o custo da segunda hora para ambos encanadores. Responde incorretamente.
A2	2	Calcula corretamente o custo da terceira hora para ambos encanadores e responde corretamente.
A3	0	Escreve corretamente o preço cobrado pelos encanadores A e B por hora de serviço e responde que se o encanador A e o B fizerem quatro horas de serviço o encanador A ficará sempre mais barato por hora.
A4,A5, A49	0	Subtrai corretamente 18 de 36 e responde incorretamente a questão.
A6,A21, A43,A46	0	Não efetua cálculo algum. Responde incorretamente.
A7, A11, A12,A13,A 25,A26,A27 ,A34, A39,A40	0	Calcula corretamente o custo da primeira hora para ambos encanadores. Responde incorretamente.
A8, A19	0	Calcula corretamente o custo da primeira hora para ambos encanadores. Calcula a diferença entre os dois custos e responde incorretamente.
A14	2	Escreve corretamente as duas funções que representam os custos dos encanadores A e B, comparando as funções até a quinta hora. Responde corretamente.
A15	1	Calcula corretamente os custos dos dois encanadores para três horas de trabalho. Responde incorretamente.
A16	0	Apresenta os custos dos dois encanadores para duas horas de trabalho. Responde incorretamente.
A17	2	Escreve corretamente as funções que representam os custos dos encanadores A e B, comparando as funções até a terceira hora. Responde corretamente.
A18	0	Calcula corretamente os custos do encanador A para as três primeiras horas de trabalho e incorretamente para o encanador B. encontra a diferença entre os dois custos para a terceira hora. Responde incorretamente.
A41	1	Calcula corretamente o custo das três primeiras horas de trabalho. Encontra a diferença entre os dois custos e responde incorretamente.
A20,A42	1	Calcula corretamente os custos das três primeiras horas para ambos encanadores. Apresenta resposta incorreta.
A22	1	Calcula corretamente os custos dos encanadores para a primeira e terceira hora. Responde incorretamente.
A23	1	Calcula corretamente os custos dos encanadores A e B apenas para a primeira hora. Efetua corretamente e incorretamente operações que não resolvem a questão e responde incorretamente.
A24	0	Calcula corretamente os custos dos encanadores A e B apenas para a quinta hora. Encontra corretamente a diferença entre esses valores e responde incorretamente com o resultado desta diferença.
A28	0	Calcula corretamente o custo do encanador A para duas, quatro, seis e sete horas de trabalho. Utiliza dados incorretos para fazer cálculos corretos dos custos do encanador B para duas, quatro, seis e sete horas de trabalho. Responde incorretamente.
A29	0	Indica o valor cobrado por cada encanador, apenas retirando os dados da questão. Responde incorretamente que será mais barato quanto maior for o tempo trabalhado.
A30	0	Calcula corretamente o custo dos dois encanadores para a primeira hora de trabalho. Efetua cálculos corretos que não resolvem a

		questão e não apresenta resposta.
A32	1	Escreve corretamente as funções que representam os custos de ambos encanadores. Testa para a primeira hora de trabalho e responde incorretamente.
A33	0	Monta uma regra de três, inicia a resolução mas não conclui. Responde incorretamente.
A35	0	Soma corretamente $18 + 18 = 36$. responde incorretamente.
A36	2	Calcula corretamente o custo de ambos encanadores para as cinco primeiras horas. Responde corretamente.
A9,A10, A37	0	Calcula corretamente uma ou mais operações que não resolve a questão. Responde incorretamente.
A38	1	Escreve corretamente as funções que representam os custos dos encanadores A e B e testa os valores corretamente para as três primeiras horas de trabalho. Igual a as funções corretamente para encontrar o valor de "t". Responde incorretamente.
A44	1	Escreve corretamente as funções que representam os custos dos encanadores A e B, encontrando os preços dos encanadores para a segunda hora. Responde incorretamente.
A45	0	Calcula corretamente o custo do encanador A para a primeira e segunda hora e incorretamente para a terceira hora. Calcula corretamente o custo do encanador B para a primeira, segunda e terceira hora. Responde incorretamente.
A47	2	Calcula corretamente os custos dos encanadores A e B da primeira até a sexta hora de trabalho. Responde corretamente.
A48	0	Calcula corretamente os custos dos encanadores A e B apenas para a sexta hora de trabalho. Responde incorretamente.
A31,A50	0	Calcula corretamente os custos dos encanadores A e B para a primeira hora de trabalho. Efetua corretamente $36 - 18 = 18$. Responde incorretamente.
A51	2	Calcula corretamente os custos dos encanadores A e B para a primeira, segunda e terceira hora. Responde corretamente.
A52	1	Calcula corretamente os custos do encanador A para a primeira e segunda hora de trabalho e os custos do encanador B para a primeira, segunda e terceira hora de trabalho. Responde incorretamente a questão.
A53	0	Calcula apenas o custo por hora de ambos encanadores, sem utilizar o valor fixo cobrado por cada encanador. Responde incorretamente.

QUESTÃO 2

ALUNOS	CÓDIGO	FORMA DE RESOLUÇÃO APRESENTADA
A1,A16, A42	2	Divide corretamente 75 por 2 obtendo 37,50 e 23 por 2 obtendo 11,50. Efetua corretamente $37,50 - 11,50$ obtendo 26,00 e apresenta resposta correta.
A2,	2	Escreve " $75,00 : 2 = 37,50$ ". Em seguida " $37,50 + 11,50 = 49,00 \rightarrow$ blusa" e ainda escreve " $37,50 - 11,50 = 26,00 \rightarrow$ saia". Apresenta resposta correta.
A3	0	Subtrai corretamente: $75 - 23$ e $52 - 23$. Responde incorretamente utilizando o resultado da segunda subtração.
A4	2	Monta um sistema de equações com duas incógnitas que resolve a questão. Resolve o sistema corretamente utilizando o método da substituição. Responde corretamente.
A5, A14, A19,A20 A25,A26, A27,A29,A31, A34,A35, A39	0	Resolve corretamente a subtração $75 - 23$ e responde incorretamente utilizando o valor encontrado nesta operação, ou seja, que a saia custa 52,00.
A6	2	Escreve uma equação que relaciona corretamente os dados do problema ($x + x - 23 = 75$) e a resolve encontrando $x = 49$. Soma $49 + 26 = 75$. Responde corretamente.

A7	2	Efetua corretamente as operações: $75 - 52 = 23$, $23 + 26 = 49$ $49 - 26 = 23$. Responde corretamente.
A8, A32,	0	Divide corretamente $75 : 2 = 37,50$. Efetua corretamente $37,50 - 23,00 = 14,50$ e $37,50 + 23,00 = 60,50$. Responde incorretamente que a saia custa 14,50.
A9, A40	0	Efetua corretamente $75 - 23 = 52$ e $52 - 23 = 29$. Responde incorretamente que a saia custa 29,00.
A10	0	Multiplica incorretamente 75 por 23. Responde incorretamente utilizando o valor encontrado na multiplicação, 8,25.
A11	0	Efetua corretamente $75 - 23 = 52$, $75 - 52 = 23$ e $52 - 23 = 29$. Responde incorretamente que a saia custa 29,00.
A12	0	Calcula incorretamente $75 : 2$, obtendo 38. Efetua corretamente $38 - 23 = 15$. Responde incorretamente que a saia custa 15,00.
A13	0	Calcula corretamente $75 - 23 = 52$, $75 : 2 = 37,50$ e $37,50 - 23,00 = 14,50$. Responde incorretamente que a saia custa 14,50. Apresenta ainda uma operação de verificação: $37,50 + 14,50 + 23,00 = 75,00$.
A15,A49,A52	0	Calcula corretamente $75 - 23 = 52$. Responde incorretamente que a saia custa 23,00.
A17,A51	2	Monta um sistema de equações com duas incógnitas que resolve a questão. Resolve o sistema corretamente utilizando o método da adição. Responde corretamente.
A18	0	Divide incorretamente $72 : 2$ obtendo 36. Efetua corretamente $36 - 23 = 13$. Não apresenta resposta.
A21	0	Não apresenta nenhum cálculo. Responde incorretamente que a saia custa 23,00.
A22, A23	2	Calcula corretamente $75 - 23 = 52$ e $52 : 2 = 26$. Responde corretamente.
A24,A33 A37,A41 A44	2	Calcula corretamente $75 - 23 = 52$ e $52 : 2 = 26$. Apresenta verificação e responde corretamente.
A28	0	Efetua corretamente $35,50 - 23,00 = 12,50$, $35,50 + 23,00 = 58,50$ e $12,50 + 58,50 = 75,00$. Responde incorretamente que o preço da saia é 12,50.
A30	0	Calcula corretamente $75 - 23 = 52$ e incorretamente: $23 + 49 = 75$. Responde incorretamente que a saia custa 23,00.
A36	2	Escreve uma equação que relaciona corretamente os dados do problema ($x + x + 23 = 75$) e a resolve encontrando $x = 26$. Apresenta verificação e responde corretamente.
A38	2	Escreve uma equação que relaciona corretamente os dados do problema ($x + x - 23 = 75$) e a resolve incorretamente encontrando $x = 26$. Soma corretamente $26 + 23 = 49$ e $49 + 26 = 75$. Responde corretamente.
A43	0	Divide incorretamente $72 : 2$ obtendo 37. Efetua corretamente $37 - 23 = 14$. Apresenta resposta incorreta.
A45	0	Resolve corretamente a subtração $75 - 23 = 52$ e responde incorretamente que a blusa custa 52,00.
A46	0	Subtrai corretamente $75 - 23 = 52$. Não apresenta resposta.
A47	2	Coloca que a blusa custa $x + 23$. Efetua corretamente $75 - 23 = 52$ e em seguida $52 : 2 = 26$. Responde corretamente a questão.
A48	0	Efetua corretamente $75 + 75 = 150$ e $75 - 23 = 52$. Responde incorretamente que a saia custa 52,00.
A50	0	Resolve corretamente a subtração $75 - 23 = 52$ e $52 + 23 = 75$. Responde incorretamente que a saia custa 52,00.
A53	2	Responde corretamente que a saia custa 26,00 e efetua corretamente a verificação $26 + 49 = 75$.

QUESTÃO 3

ALUNOS	CÓDIGO	RESOLUÇÃO APRESENTADA
A1,A38	2	Escreve e resolve corretamente a equação que resolve a questão: $x + x + 7 + x + 14 + x + 21 + x + 28 = 100$. Apresenta resposta correta.
A2	2	Divide corretamente: $100 : 5 = 20$ e apresenta resposta correta.
A3	2	Não apresenta cálculos. Escreve somente a resposta correta, com a seguinte justificativa: “Eu fiz a tabuada do 7 até o 5, mas somando dava 105, depois eu diminui 1 em cada número.
A4	0	Monta uma equação incorreta que não resolve a questão: $6x + 13x + 20x + 27x + 34x = 100$. Resolve a equação corretamente. Não apresenta resposta.
A5,A12, A20,A39, A51	0	Divide corretamente: $100 : 5 = 20$ e responde incorretamente que o carteiro entregou 20 cartas por dia.
A6	1	Resolve por tentativas, efetuando corretamente os cálculos. Inicia pela operação: $10 + 17 + 24 + 31 + 38 = 110$. A partir daí, efetua operações de adição diminuindo sempre um número no valor de cada parcela. Ao efetuar a última operação, o aluno não diminui 1 no valor de última parcela, resolve incorretamente: $3 + 13 + 20 + 27 + 35 = 100$. Responde incorretamente com os valores das parcelas desta última operação.
A7	0	Divide corretamente: $100 : 5 = 20$ e responde incorretamente que o carteiro entregou as seguintes quantidades de cartas: dia a= 27, dia b=13, dia c= 20, dia d= 20, dia e= 20.
A8	2	Divide corretamente: $100 : 5 = 20$. Em seguida, resolve por tentativas, efetuando corretamente adições. Inicia pela operação: $10 + 17 + 24 + 31 + 38 = 110$. A partir daí, efetua operações de adição diminuindo sempre um número no valor de cada parcela até obter: $6 + 13 + 20 + 27 + 34 = 100$. Responde corretamente.
A9	0	Divide corretamente: $100 : 5 = 20$. Em seguida, calcula corretamente: $20 + 7 = 27$, $27.7 = 189$ e $27.5 = 135$. Responde incorretamente que o carteiro entregou 27 cartas por dia.
A10	0	Divide incorretamente 100 por 5 obtendo 2. Multiplica corretamente: $2.7 = 14$. Responde incorretamente que são entregues 14 telegramas por dia.
A11	1	Monta e resolve corretamente uma equação utilizando os dados do problema. Responde incorretamente que o carteiro entregou 6 telegramas.
A13	0	Divide corretamente: $100 : 5 = 20$. Escreve que são 28 no total a partir do primeiro dia e são 20 por dia. Calcula corretamente $80 + 28 = 108$ e $108 : 4 = 27$. Apresenta resposta incorreta: No primeiro dia ele entregou 20 telegramas e nos outros quatro dias ele entregou 27 por dia.
A14,A50, A52	2	Não apresenta cálculos nem justificativas. Responde corretamente a questão.
A15	0	Divide corretamente: $100 : 5 = 20$ e $100 : 7 = 14$. Multiplica corretamente $7.4 = 28$ e faz a subtração correta $100 - 28 = 72$. Responde incorretamente que no primeiro dia foram entregues 72 cartas e nos outros dias 7 cartas em cada dia.

A16	0	Divide corretamente: $100 : 5 = 20$ e efetua corretamente $20 + 7 = 27$. Não apresenta resposta.
A17	0	Monta uma equação que poderia resolver a questão. Risca valores substituindo-os de maneira que a equação não mais resolve a questão. Continua resolvendo a equação mas não a conclui. Risca tudo por cima e não responde.
A18	0	Efetua corretamente as subtrações sucessivas: $100 - 7 = 93 - 7 = 86$ e incorretamente a primeira e corretamente a segunda operação: $86 - 7 = 72 - 7 = 65$. Subtrai corretamente $100 - 65 = 35$. Divide corretamente $100 : 5 = 20$ e não conclui a divisão de 100 por 7. Não apresenta resposta.
A19	0	Efetua corretamente: $5 + 7 = 12$. Responde que foram entregues 12 telegramas por dia.
A21	0	Não apresenta cálculos nem justificativas. Responde incorretamente a questão: No primeiro dia 17, no segundo 32, no terceiro 49, no quarto 56, e para o quinto dia não há nenhum valor.
A22	2	Resolve por tentativas. Efetua corretamente as adições sucessivas: $7 + 14 + 21 + 28 + 35 = 105$ e $6 + 13 + 20 + 27 + 34 = 100$. Responde corretamente a questão.
A23	1	Efetua corretamente a adição: $6 + 13 + 20 + 27 + 34 = 100$. Responde incorretamente que o carteiro entregou 100 telegramas.
A24	2	Calcula corretamente: $100 : 5 = 20$ e $20 - 14 = 6$. Responde corretamente: Primeiro dia= 6 telegramas; segundo dia= $6 + 7 = 13$ telegramas; terceiro dia= $13 + 7 = 20$ telegramas; quarto dia= $20 + 7 = 27$ telegramas; quinto dia= $27 + 7 = 34$ telegramas.
A25	0	Divide corretamente: $100 : 5 = 20$, $700 : 5 = 140$ e $140 : 5 = 28$. Justifica: “pegar os telegramas vezes os dias e depois dividir”. Responde incorretamente que foram entregues 28 telegramas por dia.
A26	0	Efetua corretamente a adição: $100 + 7 = 107$. Responde incorretamente; “ele entregou 7 telegramas a mais”.
A27	0	Divide incorretamente 95 por 7 obtendo 13 e resto 0. Responde incorretamente que foram entregues 13 telegramas por dia.
A28	0	Efetua corretamente a subtração: $100 - 28 = 72$. Monta uma tabela com o número de dias mas não a conclui. Não responde a questão.
A29	0	Divide corretamente: $100 : 5 = 20$ e responde incorretamente que o carteiro entregou 27 telegramas por dia.
A30,A33 A34,A48, A49	0	Divide corretamente: $100 : 5 = 20$ e efetua corretamente $20 + 7 = 27$. Responde incorretamente que foram entregues 27 telegramas em cada dia.
A31	0	Divide incorretamente 100 por 7 obtendo 14,211... Efetua corretamente as adições $15 + 7 = 22$, $22 + 7 = 29$, $29 + 7 = 36$, $36 + 7 = 43$, $43 + 7 = 50$. Responde incorretamente que: “Dividindo 100 por 7 e somar ao mesmo número (7) o número do resultado mais aproximado (15) chega-se ao número”.
A32	0	Efetua incorretamente a adição: $7 + 14 + 21 + 28 + 35$ obtendo 105. Responde incorretamente que foram entregues no primeiro dia 7 cartas, no segundo 14, no terceiro 21, no quarto 28 e no quinto dia 30 cartas.
A35	0	Divide corretamente: $100 : 5 = 20$ e faz a verificação: $20 \cdot 5 = 100$. Responde incorretamente que o carteiro entregou 20 telegramas por dia.
A36	2	Escreve e resolve corretamente a equação: $5x = 7 + 14 + 21 + 28 = 100$. Encontra o valor $x = 6$ e responde corretamente a questão.
A37	2	Efetua corretamente: $100 - 35 = 65$. Inicia a divisão $65 : 7$ mas não a conclui. Faz adições sucessivas corretas: $7 + 14 + 21 + 28 + 35 = 105$, $5 + 12 + 19 + 26 + 33 = 95$ e

		$6 + 13 + 20 + 27 + 34 = 100$. Responde corretamente a questão.
A40	0	Não efetua cálculos nem apresenta justificativas. Responde incorretamente que foram entregues 13 telegramas por dia.
A41	0	Calcula corretamente: $7.5 = 35$, $100 - 35 = 65$, $65 : 5 = 13$, $13 + 7 = 20$, $20.5 = 100$. Responde incorretamente que foram entregues 13 telegramas em cada dia.
A42	0	Calcula corretamente a adição: $8 + 15 + 22 + 29 + 36 = 110$. Responde incorretamente utilizando o valor de cada parcela da operação como sendo o número de telegramas entregues em cada dia.
A43	0	Divide incorretamente 100 por 7 obtendo 14 e divide corretamente: $100 : 5 = 20$. Efetua corretamente: $20 + 14 + 14 + 14 + 14 = 76$. Responde incorretamente que foram entregues 76 telegramas em cada dia.
A44	1	Monta e resolve corretamente uma equação utilizando os dados do problema. Apresenta como resposta $x = 6$ telegramas.
A45	0	Divide corretamente: $100 : 5 = 20$. Em seguida, resolve por tentativas, efetuando incorretamente adições. Inicia pela operação: $9 + 16 + 22 + 28 + 35$ obtendo 101; $6 + 13 + 19 + 26 + 33$ obtendo 94 e $7 + 14 + 20 + 27 + 34$ obtendo 95. E efetua a adição corretamente: $8 + 15 + 21 + 28 + 35 = 107$. Apresenta duas respostas incorretas: que foram entregues no primeiro dia 9, no segundo 15, no terceiro 22, no quarto 29 e no quinto dia 35 cartas. A outra resposta: que foram entregues no primeiro dia 8, no segundo 16, no terceiro 22, no quarto 29 e no quinto dia 35 cartas.
A47	2	Indica que em cada dia serão entregues $x + 7$ telegramas. Não utiliza esta indicação e apresenta resposta correta.
A50	2	Apresenta a indicação da adição: $6 + 13 + 20 + 37 + 34$ e uma adição correta $40 + 27 + 13 + 20 = 100$. Responde corretamente.
A53	0	Calcula corretamente: $4.7 = 28$, $100 - 28 = 72$, $72 + 7 = 79$, $79 + 7 = 86$, $96 + 7 = 93$, $93 + 7 = 100$. Responde incorretamente que foram entregues no primeiro dia 72, no segundo 79, no terceiro 86, no quarto 93, e no quinto dia 100 telegramas.

QUESTÃO 4 – ITEM A

ALUNO	CODIGO	RESOLUÇÃO APRESENTADA
A1,A17	2	Escreve e resolve uma regra de três corretamente. Responde corretamente a questão.
A2	1	Escreve uma regra de três incorretamente, pois retira dados incorretos do enunciado. Resolve a regra de três corretamente. Responde incorretamente utilizando o resultado encontrado nos cálculos efetuados.
A3	0	Explica que subtraindo 35,5 de 100 restam 64,5 que multiplicados com 32 equivalem a 2485 (multiplicação incorreta).
A20	2	Não apresenta cálculos. Responde corretamente a questão.
A5	0	Divide incorretamente: $35,5 : 100$, obtendo 3550. Responde incorretamente a questão utilizando o valor 3550.
A6,A7, A10,A11, A13,A18, A21,A27, A28,A34, A40,A48	0	Não apresenta cálculos. Responde incorretamente a questão com valores presentes na tabela ou com outros números.
A8	0	Monta uma tabela com o preço dos bilhetes e o número de passageiros de maneira que a quantidade de passageiros vai de 1000 até 2500, variando sempre 500 entre uma empresa e outra. Responde incorretamente que são transportados 2500 passageiros.

A15,A50,	2	Multiplica corretamente: $35,5 \cdot 70 = 2485$. Responde corretamente a questão.
A16	0	Multiplica corretamente: $7000 \cdot 32 = 224000$. Responde incorretamente utilizando o resultado desta operação.
A22,A36, A37,A41, A43,A44, A51,	2	Indica a multiplicação ou monta e resolve esta multiplicação corretamente: $7000 \times 35,5 = 2485$. Responde corretamente a questão.
A23	0	Efetua corretamente a adição: $35,5 + 336$ obtendo 691. Responde incorretamente com este resultado.
A9,A12, A19,A24, A25,A26, A29,A35, A39,A49, A52,A53	0	Não apresenta cálculos. Responde incorretamente que a empresa TGK transporta 35,5% dos passageiros.
A30	0	Indica a multiplicação: $70 \cdot 0,355 = 24,85$ e apresenta este resultado como resposta.
A4,A31	1	Escreve uma regra de três corretamente. Ao resolvê-la, faz cálculos incorretos. Responde incorretamente utilizando o valor encontrado.
A32	2	Apresenta cálculos corretos da seguinte forma: $0,5 = 35$, $10\% = 700$, $20\% = 1400$, $5\% = 350$. Em seguida, efetua corretamente: $20\% + 10\% + 5\% + 0,5\% = 1400 + 700 + 350 + 35 = 2485$. Responde corretamente.
A42	0	Multiplica corretamente: $7000 \cdot 35$ obtendo 245000. Responde incorretamente que são transportados 2450 passageiros por dia.
A45	0	Escreve e resolve incorretamente uma regra de três. Responde incorretamente.
A46	1	Multiplica corretamente: $7000 \cdot 35,5 = 2485000$. Não responde a questão.
A47	2	Apresenta vários cálculos envolvendo divisão e porcentagens. Responde corretamente.
A14,A33, A38,	2	Divide corretamente 7000 por 100. Multiplica corretamente 70 por 35,5. Responde corretamente.

QUESTÃO 4 – ITEM B

ALUNO	CODIGO	RESOLUÇÃO APRESENTADA
A1, A50	1	Resolve corretamente $7000 : 90 = 77,7$. Responde incorretamente que 77,7 passageiros são transportados diariamente.
A2,A29,	2	Resolve corretamente $7000 : 90$ obtendo 77 com resto 70. Responde corretamente são transportados aproximadamente 77 passageiros.
A3	0	Responde incorretamente justificando que $100 - 35,5 = 64,5\%$ e, incorretamente coloca que $64,5 \cdot 32 = 2485$ passageiros.
A4	0	Responde incorretamente com 7,7474 justificando que o valor foi encontrado dividindo 248 (resultado encontrado no item a) por 32.
A5	0	Divide incorretamente $3550 : 32$ obtendo 1103. Responde incorretamente com o valor encontrado na operação. (O número 3550 é o resultado encontrado na resolução do item a).

A6,A8, A10,A18, A19,A20, A21,A24, A25,A26, A27,A30, A34,A35, A40,A45, A49,A52, A53	0	Não resolve. Responde incorretamente.
A7,A31, A36,A38, A43,A44, A47,A51,	0	Resolve corretamente $7000 : 4 = 1750$. Responde utilizando o valor encontrado na operação.
A9	0	Resolve incorretamente $35,5 + 26,7 + 22,2 + 15,6$ obtendo 1000. Divide corretamente $1000 : 4 = 25$. Responde incorretamente “cada voo 25%”.
A11	0	Apresenta vários cálculos desordenados. Não responde a questão.
A12	0	Soma corretamente $7000 + 7000 + 7000 + 7000 = 2800$. Responde utilizando este valor.
A13	0	Resolve corretamente $32.33,5 = 11360$. Em seguida multiplica incorretamente 11360.4 obtendo 48440. Responde incorretamente utilizando o valor 48440.
A14	0	Divide incorretamente $7000 : 90$ obtendo 710. Responde incorretamente com o valor encontrado na operação.
A15	0	Multiplica corretamente $26,7.70 = 1869$; $22,2.70 = 1554$; $15,6.70 = 1092$. Efetua corretamente a adição dos resultados destas três operações com 2485 (resultado encontrado no item a). Responde incorretamente que são transportados 15 passageiros diariamente.
A16	0	Multiplica corretamente $7000.14 = 98000$. Não apresenta resposta.
A17,A22,	0	Divide corretamente $7000 : 100 = 70$. Responde incorretamente com o resultado desta operação.
A23	0	Soma incorretamente $35,5 + 32$ obtendo 387. Responde incorretamente utilizando o resultado desta operação.
A28	0	Soma corretamente $32 + 24 + 20 + 14 = 90$. Divide corretamente $90 : 4 = 22,5$. Não apresenta resposta.
A32	0	Apresenta a simplificação: $\frac{7000}{4} = \frac{3500}{2} = 1750$. Responde incorretamente utilizando o valor 1750.
A33	0	Multiplica corretamente $2485.32 = 79520$. Responde incorretamente utilizando o valor encontrado nesta operação.
A37	2	Divide corretamente $2485 : 32 = 77$. Responde corretamente a questão.
A39	0	Soma corretamente $35,5 + 26,7 + 22,2 + 15,6 = 100$. Responde incorretamente que são transportados 100% de passageiros.
A41	0	Resolve corretamente $7000 : 4 = 1750$. Divide incorretamente $1750 : 90$ obtendo 19,66... Responde incorretamente que são transportados 1750 passageiros por dia, aproximadamente 190 passageiros por voo.
A42	0	Divide corretamente $245 : 32 = 7$, com resto 21. Responde incorretamente que são transportados 7 passageiros por viagem.

A46	0	Indica a divisão: 7000 : 90. Não resolve e não apresenta resposta.
A48	0	Resolve incorretamente $7000 : 4$ obtendo 175. Responde utilizando este resultado encontrado na operação.

QUESTÃO 4 – ITEM C

ALUNO	CODIGO	RESOLUÇÃO APRESENTADA
A1	1	Calcula corretamente a quantidade de passageiros transportados por cada empresa. Esboça um gráfico linear e incompleto.
A2	0	Utiliza dados incorretos para construir o gráfico. Relaciona a quantidade incorreta de passageiros com as empresas aéreas e não com o preço que pagam pela viagem.
A3,A5,A6 A11,A12, A15,A16, A18,A19, A20,A21, A23,A24, A25,A26, A28,A29, A31,A32, A35,A39, A40,A43, A45,A46, A48,A49, A50, A53	0	Constrói um gráfico incorreto e incompleto sem apresentar cálculos auxiliares.
A4	0	Calcula incorretamente a porcentagem de passageiros que viajam utilizando a empresa TGK. Constrói um gráfico incompleto e incorreto utilizando apenas este valor.
A7	0	Não constrói gráfico. Escreve apenas: “TGK R\$ 336 Pss=1750; LDX R\$ 336 Pss=1750; PHD R\$ 288 Pss= 2250; WSQ R\$ 193 Pss= 2250.
A8	0	Não apresenta cálculos auxiliares. Constrói uma tabela relacionando o preço dos bilhetes ao número de passageiros. No entanto o número de passageiros transportados pelas empresas apresenta-se incorreto.
A9	0	Soma corretamente os preços dos bilhetes das quatro empresas e divide este valor por quatro obtendo 288. Soma corretamente os vôos diários das quatro empresas e divide este valor por 4 obtendo 22,5. Soma corretamente a porcentagem de passageiros transportados pelas quatro empresas e divide por quatro obtendo 25%. Constrói uma tabela relacionando as quatro empresas com o preço dos bilhetes (288), porcentagem de passageiros (288) e os vôos diários (22,5%). Não constrói gráfico.
A10	0	Não apresenta cálculos auxiliares. Constrói uma tabela relacionando as quatro empresas com o preço dos bilhetes (155), a porcentagem de passageiros (15,5%) e os vôos diários (14). Não constrói gráfico.
A13	0	Multiplica corretamente $336.32 = 10752$; $288.20 = 5760$; $193.14 = 2702$; e incorretamente 336.24 obtendo 9064. Soma corretamente os resultados destas operações obtendo 28278. Esboça um gráfico sem nenhum valor (apenas duas barras).
A17,A22, A38,A44,	2	Constrói um gráfico corretamente.

A47, A27	0	Não apresenta cálculos. Inicia o esboço de uma tabela mas não conclui.
A30	0	Soma a porcentagem de passageiros das quatro empresas obtendo 100. Esboça um gráfico em que coloca no topo de cada barra apenas a porcentagem de passageiros de cada empresa, sem identificar as empresas.
A14,A36, A41,A42, A51	1	Esboça um gráfico, não totalmente correto.
A33	0	Esboça uma tabela relacionando a quantidade de passageiros transportados pelas quatro empresas e o preço dos bilhetes. No entanto a quantidade de passageiros transportados por cada empresa não está correta.
A37	1	Esboça uma tabela corretamente relacionando a quantidade de passageiros transportados pelas quatro empresas e o preço dos bilhetes.
A34	0	Soma incorretamente os preços dos bilhetes das quatro empresas obtendo 1123. Soma a porcentagem de passageiros transportados pelas quatro empresas obtendo 100%. Não constrói o gráfico. Responde que “ o número de passageiros é de 100% e o preço é 1123.
A52	0	Não apresenta cálculos. Constrói uma tabela utilizando empresas e valores não citados na questão

ANEXOS

ANEXO A

ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA DE ALUNOS E PROFESSORES NAS PROVAS DE QUESTÕES ABERTAS DE MATEMÁTICA¹⁰

*Regina Luzia Corio de Buriasco
coordenadora do projeto*

O projeto é constituído de investigações a serem realizadas por alunos dos programas de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, de Educação, e, alunos da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina, articuladas em torno do eixo temático da Avaliação em Matemática tendo como foco dos estudos a Prova de Questões Abertas de Matemática da AVA 2002.

Pretende-se desenvolver um estudo qualitativo envolvendo a produção escrita de alunos e professores que ensinam matemática na resolução da Prova de Questões Abertas de Matemática da Avaliação Estadual do Rendimento Escolar do Paraná – AVA/2002.

Os registros que os alunos fazem ao resolver as questões dão valiosas informações sobre o modo como compreenderam e registraram suas idéias a respeito da situação apresentada. Tais informações fornecem rico material para o professor incorporar ao seu repertório no planejamento das aulas e para orientar suas escolhas didáticas, servindo como referência para conversar sobre matemática com o aluno.

Ao analisar uma produção escrita, mantém-se um diálogo com as respostas dadas, indaga-se sua configuração, procura-se encontrar quais as relações que as constituem. O erro, então, não é considerado como algo negativo e sim como um indício importante sobre os conhecimentos, processos de relação das informações, valores, presentes na relação do sujeito com o objeto do conhecimento, quase sempre invisíveis e ignorados na prática educativa escolar.

Pretende-se estudar tanto erros como acertos, pois “tal como o sucesso não é garantia absoluta da existência da competência pretendida, o erro não é a prova absoluta da sua ausência” (HADJI, 1994, p.123), por conseguinte neste estudo todas as respostas e as estratégias utilizadas por quem as obtém serão fontes de investigação.

No caso deste estudo, não se pretende apresentar ‘receitas’ sobre avaliação ou correção de provas escritas, mas sim conhecer mais e melhor como alunos e professores lidam com questões abertas de matemática. Dessa forma, buscará subsidiar a realização de uma das tarefas do professor que é a de fazer com que o erro, aos poucos se torne *observável* ao aluno para que este tome consciência

¹⁰ Projeto financiado pela Fundação Araucária, sob protocolo no. 5998 do PROGRAMA DE APOIO À PESQUISA BÁSICA E APLICADA – Chamada de Projetos 06/2003. Modalidade B.

daquele. Essa é uma das contribuições possíveis do presente projeto na tentativa de diminuir o fracasso escolar.

Objetivos Gerais

- Analisar a produção escrita de alunos e professores em questões abertas de matemática.
- Aprofundar o conhecimento dos processos de aprender e ensinar matemática, mediante um estudo da produção escrita de alunos e professores.

Material e Participantes

Para o desenvolvimento deste estudo serão utilizadas:

a) uma amostra retirada do universo das provas de Matemática realizadas pelos alunos de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio das escolas públicas que participaram da AVA-2002, atendendo ao sistema de referência estatístico definido para este estudo, de modo a que seja representativa do universo dos participantes da AVA- 2002. Por conseguinte, será levado em conta o total de alunos, séries, dependência administrativa (pública), a amostra aleatória previamente selecionada e turno em que os alunos estavam matriculados. O sistema de referência será estruturado tendo como base as 10 meso-regiões em função da localização geográfica dos municípios. Deste modo, serão selecionadas, por sorteio aleatório, dentro da cota de participação de cada meso-região, sendo 400 provas de 4ª série e 422 provas da 8ª série do Ensino Fundamental e 327 provas da 3ª série do Ensino Médio;

b) uma prova composta por todas as questões da prova estadual de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio a qual será resolvida por professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, da rede pública do estado do Paraná, e, por alunos do curso de Licenciatura em Matemática.

O presente estudo terá, então, como participantes alunos de escolas públicas paranaenses que realizaram a AVA/2002; alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL; alunos que cursaram, em 2002, a 4ª. série do Ensino Fundamental numa escola municipal de Cambé; professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental e Médio em escolas públicas na região de Londrina.

Indicadores previstos para a análise

Reafirmando que um dos propósitos principais é o de estimar a proficiência matemática examinando, atentamente, toda produção escrita na busca de indícios dos modos e estratégias utilizados na resolução de cada questão, e, devido à natureza da prova, os registros escritos dos alunos e professores serão separados inicialmente em três blocos - “resolve adequadamente a questão” (crédito completo), “resolve parcialmente a questão”(crédito parcial) e “não resolve a questão” (nenhum crédito).

Há duas razões para isto: levar em consideração o grau de compreensão demonstrado pelo aluno/professor na interpretação do enunciado da questão e em sua resolução, sempre, tendo como objetivo identificar o que ele já sabe e o que está a caminho de saber, para que, posteriormente, possa se esclarecer aos

professores a existência de respostas que podem receber “crédito completo” mesmo não sendo aquelas ‘perfeitas’ de acordo com o modelo por eles conhecido.

Relevância Estimada do Projeto

Com relação a esta investigação espera-se que:

- a tradução das descobertas geradas possa contribuir nos programas de formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática, bem como para a área de estudos sobre avaliação em matemática;
- seus resultados e as informações inventariadas possam se converter em subsídios para instrumentalizar a prática pedagógica do professor que ensina matemática;
- possa servir de mote para outros estudos, para a elaboração de material que subsidie a prática pedagógica do professor na busca de superar os obstáculos didáticos por eles encontrados.

Têm-se, ainda, como meta e indício de sua relevância que o presente estudo incorpore e gere produções acadêmicas, especificamente: dissertações de mestrado; trabalhos de iniciação científica; publicações de artigos e apresentações em eventos das áreas de Educação Matemática e de Educação em geral, por exemplo, em eventos como o ENEM, SIPEM, ANPED; ENDIPE e outros similares, nacionais e internacionais.

Até o momento, estão concluídas as seguintes dissertações:

PEREGO, Sibéle Cristina. *Questões Abertas de Matemática: um estudo de registros escritos*. [produção de alunos da Licenciatura em Matemática] 2005. Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Depto. de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina – Paraná. Orientadora: Regina Luzia Corio de Buriasco.

NAGY-SILVA, Marcia Cristina. *Do observável para o oculto: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª. série em questões de matemática*. 2005. Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Depto. de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina – Paraná. Orientadora: Regina Luzia Corio de Buriasco.

SEGURA, Raquel de Oliveira. *Estudo da Produção Escrita de Professores em Questões Discursivas de Matemática*. 2005. Programa de Mestrado em Educação, Depto. de Educação, Universidade Estadual de Londrina, Londrina – Paraná. Orientadora: Regina Luzia Corio de Buriasco.

ANEXO B

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE AVALIAÇÃO DO RENDIMENTO ESCOLAR - 2002

Nome.....	
Idade :anos emeses	Sexo: <input type="checkbox"/> feminino <input type="checkbox"/> masculino
8ª. Série do Turno:	<input type="checkbox"/> matutino <input type="checkbox"/> vespertino <input type="checkbox"/> intermediário <input type="checkbox"/> noturno
Escola	
Município:	
<input type="checkbox"/> Escola Municipal	<input type="checkbox"/> Escola Estadual

INSTRUÇÕES PARA O ALUNO

Leia cuidadosamente cada questão.
Use apenas caneta para resolver cada questão.
Resolva todas as questões da prova.
Você deve resolver todas as questões da forma mais completa possível, fazendo cálculos, desenhos, esquemas, ou explicando, com suas palavras o que fez para resolver cada questão.
Não apague os cálculos, os esquemas, os desenhos que utilizar na resolução da questão.
Se perceber que resolveu algo errado, passe um traço por cima e resolva corretamente.
Você pode utilizar o verso da folha se necessário.
Confira as resoluções antes de entregar a prova.

1. Um encanador A cobra por cada serviço feito um valor fixo de R\$ 60,00 mais R\$ 18,00 por hora de trabalho. Um outro encanador B cobra um valor fixo de R\$24,00 mais R\$ 36,00 por hora de trabalho. Sendo t o tempo, medido em horas, para quais valores de t o encanador A fica mais barato que o B?

2. Paguei R\$ 75,00 por uma saia e uma blusa. A saia foi R\$ 23,00 mais barata do que a blusa. Qual o preço da saia ?

3. Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. Quantos telegramas entregou em cada dia?

4. Quatro companhias aéreas fazem a ponte aérea São Paulo - Brasília. Segundo pesquisa realizada, 7 000 passageiros diários fazem essa viagem.

O quadro abaixo mostra o preço dos bilhetes, a porcentagem de passageiros e o número de vôos diários dessas companhias.

	Preços dos bilhetes ida e volta	Porcentagem de passageiros	Vôos diários ida e volta
TGK	336 reais	35,5 %	32
LDX	336 reais	26,7%	24
PHD	288 reais	22,2%	20
WSQ	193 reais	15,6 %	14

De acordo com os dados acima, responda:

- A empresa mais procurada nessa viagem, quantos passageiros transporta diariamente?
- Supondo que os aviões dessas companhias tenham a mesma lotação, quantos passageiros são transportados, em média, por dia em cada vôo?
- Construa um gráfico que relacione o número de passageiros e o preço que pagam para fazer essa viagem.

O que você achou dessa prova?

- (A) Muito fácil.
- (B) Fácil.
- (C) Mediana.
- (D) Difícil.
- (E) Muito difícil.

O que você achou do tamanho da prova ?

- (A) Muito longa.
- (B) Longa.
- (C) Adequada.
- (D) Curta.
- (E) Muito curta.

Para você, o tempo foi

- (A) mais que o necessário para fazer a prova,
- (B) Suficiente para fazer a prova.
- (C) Faltou tempo para fazer a prova.

A questão que você achou mais fácil foi a

- (1ª)
- (2ª)
- (3ª)

A questão que você achou mais difícil foi a

- (1ª)
- (2ª)
- (3ª)