ADRIANA QUIMENTÃO PASSOS

VAN HIELE, EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA E GEPEMA: ALGUMAS APROXIMAÇÕES

Londrina

2015

ADRIANA QUIMENTÃO PASSOS

VAN HIELE, EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA E GEPEMA: ALGUMAS APROXIMAÇÕES

Tese apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Doutora.

Orientadora: Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco
Coorientadora: Profa. Dra. Maria Tereza Carneiro Soares

Londrina

2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

PASSOS, ADRIANA QUIMENTÃO.

VAN HIELE, EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA E GEPEMA: ALGUMAS APROXIMAÇÕES / ADRIANA QUIMENTÃO PASSOS. - Londrina, 2015.

148 f.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.

Coorientador: Maria Tereza Carneiro Soares.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2015.

Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática Realística - Teses. 2. Van Hiele - Teses. 3. Princípios de avaliação - Teses. 4. GEPEMA - Teses. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de . II. Soares, Maria Tereza Carneiro . III. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. IV. Título.

ADRIANA QUIMENTÃO PASSOS

VAN HIELE, EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA E GEPEMA: ALGUMAS APROXIMAÇÕES

Tese apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Doutora.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco
(orientadora)
Universidade Estadual de Londrina

Profa. Dra. Maria Tereza Carneiro Soares
(coorientadora)
Universidade Federal do Paraná

Profa. Dra. Lilian Nasser
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Profa. Dra. Leny Rodrigues Martins Teixeira
Universidade Católica Dom Bosco / UNESP - Presidente Prudente

Prof. Dr. Bruno Rodrigo Teixeira
Universidade Estadual de Londrina

Profa. Dra. Marcele Tavares Mendes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Londrina, 07 de dezembro de 2015.

AGRADECIMENTOS

Ao finalizar mais uma etapa da minha formação acadêmica, chegou o momento de agradecer àqueles que participaram direta ou indiretamente da realização desse sonho.

Em primeiro lugar a Deus e a Nossa Senhora, onde busquei forças para percorrer esta jornada.

A minha família pelo apoio e incentivo que recebi durante toda a minha formação acadêmica, por compreenderem a minha ausência e ouvir as minhas lamentações. Em especial a minha mãe, Adelaide, pelo exemplo de luta e determinação; a minha irmã Andresa pelo ombro amigo nas horas mais difíceis e o apoio incondicional. A minha irmã Rose e ao irmão Rodrigo. Ao meu cunhado, Fernando, pela ajuda recebida. Aos meus sobrinhos, Tiago e Leonardo, por aceitarem as inúmeras vezes em que não pude ficar junto com eles. A tia Lourdes (*in memorian*).

A minha orientadora, Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco, por aceitar me orientar, professora que me ensinou a voar. Com quem aprendi muito desde a graduação. Obrigada pelo desafio e a confiança desenvolver um trabalho teórico. Eu não acreditava que seria capaz de fazê-lo.

A minha coorientadora Profa. Dra. Maria Tereza Carneiro Soares, que me “pegou no colo”, que tem muito a ensinar. Pessoa admirável, de uma sabedoria incrível, que sabe valorizar o melhor de cada ser humano.

Aos membros titulares da banca, Profa. Dra. Lilian Nasser, Profa. Dra. Leny Rodrigues Martins Teixeira, Prof. Dr. Bruno Rodrigo Teixeira, Profa. Dra. Marcele Tavares Mendes, e aos suplentes, Profa. Dra. Edilaine Regina dos Santos e Profa. Dra. Doralice Aparecida Paranzini Gorni, por aceitarem o convite para compor a banca e pelas valiosas contribuições na qualificação.

Aos amigos do GEPEMA pelo companheirismo e o apoio recebido durante esses anos, pelas discussões, desafios, incentivo. Agradeço em particular cada integrante.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

À Secretaria Estadual de Educação do Paraná e à Secretaria Municipal de Educação de Londrina pelas licenças concedidas para a realização deste trabalho.

Aos amigos do CEEP Profª Maria do Rosário Castaldi, onde fiz o magistério, de cujo corpo docente faço parte.

Às amigas da Escola Municipal Reverendo Odilon Gonçalves Nocetti pela acolhida e o apoio, instituição na qual o lema “a diferença nos enriquece... o respeito nos une” é verdadeiramente colocado em prática.

Aos amigos Andréia de Freitas Zômpero, Andreia Büttner Ciani, Afrânio Roberto Romagnoli, Cíntia Correia e Silva, Eliane Maria de Oliveira Araman, Silvana Bonatto por ouvir minhas angústias. A Marie Claire Ribeiro Pola, minha orientadora do mestrado e amiga.

A Ivone pela correção do texto, a Andressa pelo *abstract* e a Eleonora pela valiosa contribuição para a interpretação do material em holandês.

A todos aqueles que participaram desta importante etapa da minha vida e que não foram citados.

Sobreviver não é viver. Só que sobreviver quer dizer viver um pouco. Quem aceita sobreviver, aceita se educar um pouco, saber um pouco, ter um pouco das coisas. Já aquele que tem a memória da vida, esse quer estar no mundo sabendo de tudo, querendo tudo, aprendendo tudo, criando seu próprio saber. E, isso é perigoso porque é criador.

Airton Krenak

PASSOS, Adriana Quimentão. **Van Hiele, Educação Matemática Realística e GEPEMA:** algumas aproximações. 2015. 147 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

RESUMO

Esta tese investiga possíveis relações entre os princípios de avaliação da Educação Matemática Realística e fases do processo de aprendizagem propostas por Dina Van Hiele-Geldof e Pierre Van Hiele, buscando aproximações com os trabalhos do GEPEMA. O problema de pesquisa foi delimitado com base na reflexão a respeito do processo de ensino e de aprendizagem da matemática e de estudos da RME realizados no interior do GEPEMA. O trabalho foi desenvolvido em uma perspectiva de pesquisa de natureza teórica do tipo especulativa. Inicia apresentando o contexto em que a pesquisa foi desenvolvida, destacando a compreensão do GEPEMA de avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem e os pressupostos da RME. Destaca o aspecto didático do trabalho dos Van Hiele, em especial, as fases do processo de aprendizagem: informação, orientação guiada, explicitação, orientação livre e integração. Trata da avaliação de acordo com a abordagem da RME, tendo como fundamento principalmente os trabalhos de De Lange. Finaliza com algumas aproximações entre o trabalho dos Van Hiele, os princípios de avaliação da RME e os trabalhos do GEPEMA. Considera que as fases do processo de aprendizagem dos Van Hiele são mais um elemento auxiliar na elaboração do conhecimento matemático a partir de situações que possam ser matematizadas, desenvolvidas por meio de um processo de reinvenção guiada apoiada em informações coletadas em situações de avaliação.

Palavras-chave: Educação Matemática. Educação Matemática Realística. Van Hiele. Princípios de avaliação. GEPEMA.

PASSOS, Adriana Quimentão. **Van Hiele, Realistic Mathematics Education and GEPEMA:** some approaches. 2015. 147 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

ABSTRACT

This thesis investigates possible relationships between the principles of Realistic mathematics education evaluation and phases of the learning process proposed by Dina van Hiele-Geldof and Pierre van Hiele, seeking approaches with the work of the GEPEMA. The problem of this research was defined based on the reflection about the teaching and learning process of mathematics and studies of RME performed inside the GEPEMA. The work was developed in a perspective of theoretical nature research of the speculative type. The thesis shows the context in which the research was developed, and emphasizes the understanding of evaluation from GEPEMA's view as a research practice and learning opportunity and the assumptions of the RME. It highlights the educational aspect of the work of van Hiele, in particular phases of the learning process: information, guided orientation, explanation, free orientation and integration. This is about assessment according to RME's approach, taking as a basis mainly the works of De Lange. To finish with, it's presented some approaches between the work of van Hiele, RME assessment principles and the work of the GEPEMA. It is considered that the stages of the learning process of the van Hiele approach are more an auxiliary element in the development of the mathematical knowledge from situations that can be mathematized, developed through a process of reinvention tour based on information collected in assessment situations.

Keywords: Mathematics Education. Realistc Mathematics Education. Van Hiele. Assessment Principles. GEPEMA.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

Sumário

1. O GEPEMA E A PESQUISA EM AVALIAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Durante a minha formação acadêmica e trajetória profissional na Educação Básica e no Ensino Superior, questões relacionadas ao processo de ensino e de aprendizagem sempre estiveram presentes. As dificuldades encontradas por estudantes e professores na elaboração do conhecimento matemático e na gestão do trabalho pedagógico impulsionaram uma busca constante por conhecimentos que pudessem dar indícios do que pode ser feito para que o conhecimento matemático faça sentido para o estudante e possa tornar-se mais um elemento que contribua no exercício da cidadania, ou seja, para que o professor de Matemática possa cumprir a função de educar pela Matemática.

A Educação Matemática é o pano de fundo de parte do Curso de Licenciatura em Matemática, da Especialização em Educação Matemática e da área de concentração em Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática ofertados na Universidade Estadual de Londrina, local de toda a minha formação acadêmica até esse momento. Concluí a Licenciatura em Matemática em 1991, fiz as disciplinas do bacharelado em 1992 e nesse mesmo ano fui aluna da primeira turma da Especialização em Educação Matemática. O tema da minha monografia foi a estratégia metodológica da resolução de problemas e o ensino de funções polinomiais. Também fui aluna da primeira turma do Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL, e minha dissertação tratou da utilização de softwares de geometria dinâmica para a introdução de conceitos de geometria analítica. Comecei a participar do GEPEMA em 2008 devido ao Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE – oferecido pela Secretaria Estadual de Educação do Paraná. Durante a minha trajetória profissional, diferentes aspectos que constituem a Educação Matemática estiveram presentes, assim como o desejo de buscar meios para que ela, de fato, fosse efetivada no ambiente escolar. Foi nesse contexto que resolvi cursar o doutorado e o objeto de pesquisa foi sendo delimitado no âmbito do GEPEMA.

O Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação - GEPEMA – completou 10 anos em 2014. No entanto, a história desse Grupo[1] tem mais de 10 anos. De certo modo, ela começa com a dissertação de mestrado da coordenadora profª Drª Regina Luzia Corio de Buriasco e com mais algumas das ações desenvolvidas por ela na

[1] Neste trabalho, para fazer referência ao GEPEMA será utilizada a palavra “Grupo” (com inicial maiúscula).

Universidade Estadual de Londrina tal como o Curso de Especialização em Educação Matemática e o Projeto Pró-Matemática. Atualmente, as pesquisas desenvolvidas no interior do GEPEMA são desencadeadas por todo um histórico que será brevemente relatado.

1.1 Especialização em Educação Matemática e o GEPEMA

Em 1992 teve início o Curso de Especialização em Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina. Ele foi criado para professores da Educação Básica, com a proposta de oferecer aulas de caráter teórico-prático dentro do modelo dinâmico pesquisa, teoria e prática. As disciplinas do curso têm a finalidade de promover reflexão a respeito do conhecimento de conteúdos matemáticos e de como eles se tornam um conteúdo a ser ensinado. Elas são ministradas de acordo com perspectivas da Educação Matemática, como a Resolução de Problemas, as Tarefas de Investigação, a Modelagem Matemática, as Tecnologias de Informação e Comunicação. Segundo o projeto do curso, os objetivos são: contribuir para o desenvolvimento profissional dos professores que atuam na Educação Básica em torno do aprofundamento na área de Matemática e de Educação Matemática e para a reflexão a respeito das próprias práticas; criar um espaço de reflexão, discussão e problematização de temas relevantes da Matemática e da Educação Matemática e das suas implicações pedagógicas; desenvolver a autonomia e a capacidade de trabalhar em colaboração numa perspectiva de formação e desenvolvimento permanentes (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, 2014).

As monografias produzidas no curso têm um caráter teórico-prático. Elas se constituem em relatos de experiências ou propostas de intervenção pedagógica, conforme indicado na proposta do curso. Até 2014, foram produzidas em torno de 220 monografias que trataram de temas relacionados aos conteúdos matemáticos e a estratégias metodológicas. Essas monografias abordaram, por exemplo, a Estratégia Metodológica da Resolução de Problemas, as Tarefas de Investigação, as Tecnologias de Informação e Comunicação, a História da Matemática, as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem e temas relacionados à Geometria, à Álgebra, ao Tratamento da Informação e aos Números e Operações.

Em 2002 foi implantado o Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM) da Universidade Estadual de Londrina e o programa de doutorado teve início em 2007. Os proponentes foram os departamentos de Física e de Matemática, mas também participam do PECEM docentes dos departamentos de Biologia, Geociências, Filosofia e Química. Os docentes do Departamento de Matemática que participaram do grupo que propôs o PECEM também compunham o quadro de docentes do Curso de Especialização em Educação Matemática. A proposta do PECEM é formar professores/pesquisadores na área de Ensino de Ciências e Educação Matemática que, por meio de sua produção intelectual, possam contribuir para o desenvolvimento das áreas de conhecimento vinculadas ao programa. O PECEM tem o objetivo de formar "pesquisadores/docentes na área de Ensino de Ciências e Educação Matemática para atuarem em todos os níveis de ensino e desenvolverem pesquisas que levem a uma maior compreensão sobre a elaboração/construção dos saberes docentes/discentes no processo de ensino-aprendizagem nas áreas de conhecimento pertinentes ao programa" (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, 2013).

Logo após o início do PECEM, o Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação – GEPEMA – foi instituído no Departamento de Matemática da UEL. Ele se constitui em um espaço de estudo e de pesquisa, principalmente por alunos vinculados ao PECEM orientados pela Profª Drª Regina Luzia Corio de Buriasco. As investigações realizadas pelos integrantes do Grupo têm o intuito de apresentar a avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem; conhecer como os estudantes lidam com questões rotineiras e não rotineiras de matemática em situação de avaliação; estudar aspectos relacionados ao pensamento aritmético e ao algébrico; estudar os pressupostos da Educação Matemática Realística (RME[2]) e conhecer abordagens relacionadas ao processo de matematização.

1.2 A pesquisa a respeito da avaliação da aprendizagem no GEPEMA até 2008

Pode-se dizer que o primeiro trabalho do GEPEMA foi a dissertação da coordenadora. Buriasco (1988) buscou elementos para discutir de que modo a matemática de fora da escola pode participar da construção da matemática de dentro da escola de alunos do 1º ano da Educação Básica (antigo 1º Grau) sem nenhuma escolarização anterior. Nesse trabalho, foi "excluída toda avaliação em termos de respostas certas ou não" (BURIASCO, 1988, p. 6), ou seja, foi adotada a ideia da avaliação como um meio de revelar o que o aluno sabe até aquele momento. Em 1999 ela concluiu a tese "Avaliação em Matemática: um estudo das respostas de alunos e professores". Nessa pesquisa, analisou como alunos e professores

[2] Utilizamos a sigla RME da expressão em inglês "Realistic Mathematics Education".

lidaram com questões de matemática da prova da 8ª série do Programa de Avaliação do Sistema Educacional do Paraná – AVA – de 1997. Os "óculos" utilizados para analisar os dados tiveram como foco revelar a relação dos professores com o conteúdo matemático e as práticas pedagógicas, além da forma como os alunos lidaram com o conhecimento matemático.

Os primeiros trabalhos de mestrado orientados pela coordenadora do GEPEMA fundamentaram-se em autores que tratam da Avaliação e da Educação Matemática e discutiram questões pautadas na maneira como os alunos lidam com alguns conceitos matemáticos considerados básicos; os recursos de avaliação da aprendizagem que cumprem, tanto a função de avaliação quanto a função de orientação dos processos de ensino e de aprendizagem; e a compreensão da prática do professor relacionada aos aspectos de avaliação, bem como as estratégias metodológicas que acredita utilizar em sala de aula.

Em um segundo momento, as dissertações elaboradas no interior do GEPEMA analisaram a produção escrita de estudantes e de professores dos diferentes níveis de ensino, mediante a resolução de questões discursivas da Prova de Questões Abertas - AVA 2002. De um modo geral, os trabalhos tomam a avaliação como um dos fios condutores do trabalho do professor e dos alunos. Esses trabalhos tiveram como foco identificar o que os alunos demonstram saber por meio da sua produção escrita. Nos trabalhos interessavam tanto os acertos quanto os erros.

1.3 Os trabalhos do GEPEMA de 2008 até 2014

Em 2008, o GEPEMA iniciou uma nova fase de pesquisa, mantendo alguns aspectos abordados anteriormente. Ao utilizar questões não rotineiras de matemática de provas do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), para realizar a análise da produção escrita de estudantes, desencadearam-se estudos relacionados à Educação Matemática Realística, devido às referências encontradas nos documentos do PISA. As dissertações defendidas em 2009 e 2010 também abordam a análise da produção escrita de questões não rotineiras resolvidas por estudantes ou professores. Com esses trabalhos, iniciam-se estudos teóricos relacionados à Educação Matemática Realística.

Em 2012, foi defendida a primeira tese[3] de um membro do GEPEMA que tomou a Educação Matemática Realística como aporte teórico para realizar uma meta-análise da produção de estudantes apresentada em outros três trabalhos do Grupo, que utilizaram questões não rotineiras do PISA. Até o final de 2014, foram concluídas outras cinco teses relacionadas aos pressupostos teóricos da Educação Matemática Realística que apresentaram: a) um quadro de referência para a análise de enunciados de tarefas matemáticas fundamentado na RME[4]; b) um aporte teórico para a utilização da análise da produção escrita em aulas de matemática como estratégia de ensino na perspectiva da RME, mais especificamente a da reinvenção guiada[5], e c) a prova em fases[6].

Dessas teses, três abordaram a prova em fases na perspectiva da Educação Matemática Realística: uma analisou a prova como um meio de realização da reinvenção guiada[7]; outra tomou as informações coletadas a partir de uma experiência com a prova em fases para repensar a própria prática avaliativa[8]; e outra utiliza a prova em fases como um meio de promover a regulação da aprendizagem[9].

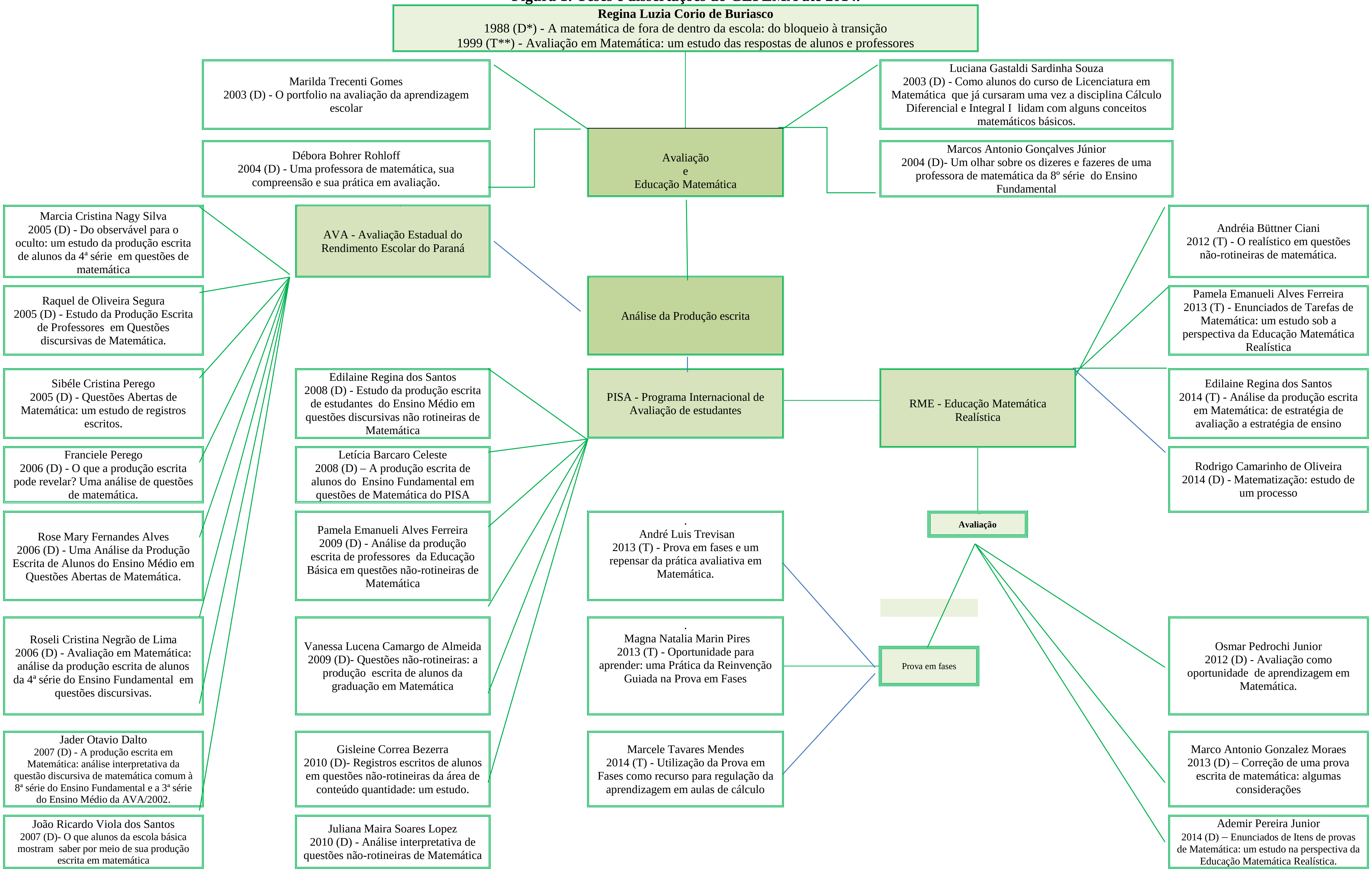
Também foi publicada uma dissertação que apresenta uma investigação teórica a respeito da “matematização”[10]. Outras três dissertações tratam da avaliação: uma delas apresenta um estudo teórico a respeito da avaliação escolar como oportunidade de aprendizagem[11]; outra apresenta um episódio de múltiplas correções de uma prova escrita analisada na perspectiva da RME[12], e a outra classifica itens de provas de acordo com o contexto, com os níveis de competências e com as características de problemas de avaliação[13].

Esses trabalhos compõem núcleos de pesquisa em: a) Avaliação e Educação Matemática, b) análise da produção escrita em questões de provas do sistema de Avaliação Estadual do Rendimento Escolar do Paraná (AVA) e do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) e c) da Educação Matemática Realística (RME) que se inter-relacionam, conforme ilustrado na Figura 1.

---

[3] CIANI, 2012.
[4] FERREIRA, 2013.
[5] SANTOS, 2014.
[6] PIRES, 2013; TREVISAN, 2013; MENDES 2014.
[7] PIRES, 2013.
[8] TREVISAN, 2013.
[9] MENDES, 2014.
[10] OLIVEIRA, 2014.
[11] PEDROCHI JUNIOR, 2012.
[12] MORAES, 2013.
[13] PEREIRA JUNIOR, 2014.

Figura 1: Teses e dissertações do GEPEMA até 2014.



Fonte: autora

Legenda: * D – Dissertação / ** T - Tese

2. GEPEMA: AVALIAÇÃO E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

Com o intuito de contextualizar o cenário que compôs o desencadeamento da formulação do problema e dos objetivos de pesquisa foi desenvolvido um estudo das dissertações e teses que tratam de aspectos considerados relevantes para compreender a avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem defendida pelo GEPEMA até 2014 e também de aspectos da RME que são estudados pelo Grupo.

Há mais de uma década, o GEPEMA desenvolve pesquisa na perspectiva da avaliação formativa (HADJI, 1994; BARLOW, 2006). Para o Grupo, a avaliação tem "como objetivo acompanhar o processo de aprendizagem e pode ser tomada como formativa quando carrega uma ação reflexiva, em que ela mesma deve ser (também) uma oportunidade de aprendizagem" (PEDROCHI JUNIOR, 2012, p. 27).

De acordo com Pedrochi Junior (2012, p. 43), a "avaliação formativa pode ser vista como um processo que faz parte de outro processo: o de ensino e aprendizagem", que merece destaque em uma sala de aula. Todas as outras ações desenvolvidas no ambiente escolar fazem parte dele e têm como meta a aprendizagem dos alunos. Nesse sentido, a avaliação formativa "é uma avaliação que se esforça por fazer um diagnóstico preciso das dificuldades do aluno, a fim de lhe permitir encontrar-se num duplo sentido: compreender os seus erros e, em função disso, tornar-se capaz de os ultrapassar" (HADJI, 1994, p.123).

Os trabalhos do GEPEMA, em uma perspectiva de avaliação formativa, apontam a

> [...] avaliação como instrumento de formação presente no processo educativo tanto como meio de diagnóstico dos processos de ensino e de aprendizagem quanto como instrumento de investigação da prática pedagógica. As análises desenvolvidas [...] são realizadas sob a perspectiva da avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem. (TREVISAN, 2013, p. 62)

A avaliação como prática de investigação[14] e oportunidade de aprendizagem[15] é considerada pelo GEPEMA como uma forma de orientar o professor e os

---

[14] Teses e dissertações desenvolvidas no interior do GEPEMA que apresentam uma referência direta com a avaliação como prática de investigação: GOMES, 2003; NAGY-SILVA, 2005; PEREGO, F., 2006; NEGRÃO DE LIMA, 2006; VIOLA DOS SANTOS, 2007; SANTOS, 2008, 2014; ALMEIDA, 2009; FERREIRA, 2009, 2013; BEZERRA, 2010; LOPEZ, 2010; CIANI, 2012; PEDROCHI JUNIOR, 2012; TREVISAN, 2013; PEREIRA JUNIOR, 2014, MENDES, 2014.

alunos. A avaliação como prática de investigação é um ato intencional que busca revelar os saberes docentes e discentes. É feita pelo professor, a partir da leitura da produção dos alunos, de inferências e interpretações "para obter informações que o auxiliem a conhecer e compreender como os alunos interpretam uma situação, como procedem para resolver uma tarefa, que dificuldades apresentam, quais erros cometem e por que eles ocorrem, o que demonstram saber" (SANTOS, 2014, p. 27).

Nessa perspectiva, o professor analisa a produção escrita com a intenção de fornecer-lhe um *feedback* e orientá-lo na busca de novos saberes. É um momento para o professor tentar "compreender mais os motivos que originaram as respostas do que se elas estão corretas ou incorretas" (PEDROCHI JUNIOR, 2012, p. 50), tendo em vista guiar o aluno durante os processos de ensino e de aprendizagem. Espera-se que, por meio da orientação do professor, o aluno tome consciência do que já sabe e do que pode vir a saber. Essa análise também fornece ao professor uma avaliação da prática pedagógica que pode auxiliá-lo na recondução dos processos de ensino e de aprendizagem.

Ferreira (2009, p. 21) entende que a avaliação como prática de investigação é um

> processo de buscar conhecer ou, pelo menos, obter esclarecimentos, informes sobre o desconhecido por meio de um conjunto de ações previamente projetadas e/ou planejadas que procura seguir os rastros, os vestígios, esquadrinhar, seguir a pista do que é observável, conhecido.

Segundo Ferreira (2013, p. 17), não é comum encontrar na literatura a expressão "avaliação como prática de investigação", no entanto ela reconhece

> [...] características desta perspectiva em alguns trabalhos, tais como: "avaliação reguladora" (ALLAL, 1986); "avaliação didática" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996); "observação formativa" (PERRENOUD, 1998); "avaliação para a aprendizagem" (BLACK et al, 2003); "avaliação autêntica" (MORGAN, 2003); "avaliação formativa alternativa" (FERNANDES, 2005); "ato de comunicação" (BARLOW, 2006).

Para o Grupo, o principal objetivo da avaliação é a "oportunidade de aprendizagem", "tomada como ocasião conveniente ao ato de aprender" (PEDROCHI JUNIOR, 2012, p. 41), ou seja, é oferecer aos estudantes chances reais de elaborar o conhecimento, de modo que possa ser utilizado em diferentes situações e que venha compor uma rede de informações para a sua autonomia.

15 Teses e dissertação desenvolvidas no interior do GEPEMA que apresentam uma referência direta com a avaliação como oportunidade de aprendizagem: DALTO, 2007; SANTOS, 2008; FERREIRA, 2013; CIANI, 2012; PEDROCHI JUNIOR, 2012; TREVISAN, 2013; PEREIRA JUNIOR, 2014, MENDES, 2014.

Esse objetivo vem ao encontro de um dos principais objetivos da RME, o qual espera “que os estudantes se tornem cidadãos capacitados para lidar matematicamente com as diversas situações que vierem a encontrar em suas vidas (PEDROCHI JUNIOR, 2012, p. 40)”.

Santos (2014, p. 12) corrobora essa afirmação, indicando que a

> [...] avaliação da aprendizagem escolar não é tomada pelo grupo [GEPEMA] como um momento à parte dos processos de ensino e de aprendizagem e sim como uma prática de investigação e como uma oportunidade de aprendizagem, o que vai ao encontro do que é proposto pela Educação Matemática Realística, na qual a aprendizagem matemática deve ser originada a partir da matematização da realidade, de situações que os alunos possam imaginar (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996), de forma que possam ter a oportunidade guiada de “reinventar” a matemática (FREUDENTHAL, 1991; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).

Os estudos do GEPEMA a respeito da RME iniciaram com as dissertações de Santos (2008) e Celeste (2008), que tomaram questões consideradas não rotineiras de aferições do PISA para realizar a análise da produção escrita de alunos e professores. Desde então, as teses e dissertações produzidas apresentam parte da história da Educação Matemática Realística e seus principais pressupostos.

Os trabalhos do Grupo fundamentados em autores da RME como De Lange (1987, 1999), Treffers (1987), Van Den Heuvel-Panhuizen (1996), Freudenthal (1973, 1991), entre outros, indicam que ela é uma abordagem de ensino e aprendizagem cujo desenvolvimento foi inspirado, principalmente, pelas ideias e contribuições do matemático alemão Hans Freudenthal (1905-1990). Em 1930, Freudenthal foi convidado a trabalhar na Universidade de Amsterdã como assistente de Brouwer, intuicionista, que exerceu forte influencia sobre as ideias dele. Durante a Segunda Guerra Mundial, Freudenthal ficou afastado de suas funções acadêmicas. Nesse período, entre outras coisas, dedicou-se à literatura. Em 1945, Freudenthal retornou para a academia na Universidade de Utrecht onde trabalhou até a sua aposentadoria em 1975. Freudenthal foi um membro ativo da comunidade de Educação Matemática da época. Ele foi presidente do ICMI (Comissão Internacional de Instrução Matemática), entre 1967 e 1970. Em 1969, organizou o primeiro ICME (Congresso Internacional de Educação Matemática), em Lyon (na França). Hans Freudenthal também foi editor fundador da Educational Studies in Mathematics, um dos fundadores do PME (Grupo Internacional de Psicologia e Educação Matemática) e um dos fundadores e presidente da CIEAEM (Comissão para o Estudo e Melhoria do Ensino de Matemática).

A partir do referencial teórico da RME, estudado pelo Grupo, Ferreira (2013), Trevisan (2013) e Santos (2014) consideram que se pode dizer que a raiz da Educação

Matemática Realística encontra-se no projeto WISKOBAS, projeto do CMLW[16] (Comissão de Modernização Curricular de Matemática), iniciado pelo governo holandês em 1961, com a intenção de modernizar a Educação Matemática das escolas secundárias. Esse projeto teve impulso em 1968, por meio do trabalho de Fred Goffree, Edu Wijdeveld e, mais tarde, de Adrian Treffers. Em 1971, o Instituto IOWO[17] (Instituto para Desenvolvimento de Educação Matemática), dirigido por Freudenthal, favoreceu o movimento da reforma holandesa, impelida pela resistência do seu presidente ao Movimento da Matemática Moderna. Esse projeto gerou outros relacionados ao ensino primário.

O Instituto IOWO, berço da RME, passou por algumas mudanças. Segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (2012), em 1980 o IOWO foi "absorvido" pelo SLO[18] (Instituto Nacional para o Desenvolvimento Curricular). Uma pequena parte do projeto ficou na Universidade de Utrecht sob o nome OW&OC[19] (Centro de Pesquisa em Educação Matemática e Informática Computacional). Em 1991, após a morte de Freudenthal, o instituto passou a ser chamado Instituto Freudenthal. Em 2005, ocorreram outras mudanças. Todas as faculdades de ciências da Universidade de Utrecht fundiram-se na Faculdade de Ciências. Naquele momento, o Instituto Freudenthal se tornou o departamento de matemática da Faculdade de Ciências. Mais uma mudança ocorreu em 2006, quando foram reunidos pesquisadores das áreas de educação em matemática, física, química e biologia no chamado Instituto Freudenthal para Ciência e Educação Matemática. Outras mudanças ocorreram em 2010, quando o Instituto Freudenthal (IF) mudou-se para a Faculdade de Ciências Sociais. Mesmo diante de tantas mudanças, o trabalho de Freudenthal continua sob a orientação de membros do IF, como a pesquisadora Van Den Heuvel-Panhuizen.

Segundo Ciani (2012), Ferreira (2013) e Santos (2014), fundamentadas no referencial teórico da RME, o principal objetivo da RME foi a contraposição à abordagem mecanicista, que prevalecia no final da década de 60 do século XX. Nesse período, a Holanda não seguiu a abordagem empirista, que era predominante na Inglaterra, nem a estruturalista, que levou os EUA ao Movimento da Matemática Moderna (MMM). Devido à influência de Freudenthal, a RME seguiu o intuicionismo. Contrapôs-se especialmente ao MMM, resultado da agitação criada pelo lançamento do Sputnik que motivou uma discussão a respeito de como o ensino da matemática era praticado. Nessa época, os defensores da modernização do ensino

---

[16] Mathematics Curriculum Modernization Committee
[17] Institut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs
[18] National Institute for Curriculum Development
[19] Research of Mathematics Education and Educational Computer Center

consideravam que havia “atrasos” em relação ao ensino da matemática escolar. Para superar os possíveis “atrasos”, os defensores do MMM sugeriram uma antecipação. Definiram que os conceitos mais avançados deveriam ser ensinados desde os anos iniciais, mesmo por professores que não dominassem certos conceitos. Essa antecipação trouxe prejuízos para uma geração de estudantes.

Ferreira (2013), fundamentada em trabalhos de Freudenthal (1968, 1983, 1991), indica que a insatisfação com as abordagens de ensino que prevaleciam na época levou o pesquisador a fomentar uma discussão em relação à Educação Matemática a respeito:

> - da matemática como Atividade Humana;
> - do ensino e aprendizagem como Princípio de Reinvenção;
> - da aprendizagem Matemática por meio da Matematização;
> - da reinvenção de ferramentas matemáticas por meio da Matematização Progressiva. (FERREIRA, 2013, p. 29 e 30)

Para Santos (2014, p. 29), a partir do referencial teórico da RME, essas discussões tornaram-se as bases da RME, inspiradas no intuicionismo que se preocupa “em tornar algo ‘real’ na mente do aluno”.

Os estudos que o GEPEMA têm realizado a respeito dessa abordagem de ensino indicam que esse real não está diretamente relacionado ao “mundo real”, mas ao que é possível imaginar, ao que pode se tornar “real” na mente, e provém da tradução do verbo holandês *zich REALISE-ren*, que significa “imaginar” (FERREIRA, 2009, 2013; TREVISAN, 2013; SANTOS 2014).

Santos (2014, p. 29), fundamentada em Freudenthal (1979), indica que as bases para essa abordagem de ensino e aprendizagem foram

> [...] lançadas a partir do ponto de vista de Hans Freudenthal acerca da matemática, qual seja a de que ela “é uma actividade humana simultaneamente natural e social, tal como a palavra, o desenho e a escrita” (FREUDENTHAL, 1979, p. 321). Sob essa perspectiva, a matemática não é vista como algo de natureza divina ou como um assunto a ser transmitido, e sim como uma atividade de natureza humana, um constructo derivado da ação humana.

Oliveira (2014), fundamentado em Freudenthal (1991), indica que compreender a matemática como uma atividade humana significa considerá-la como uma atividade de resolução e seleção de problemas, bem como de organização que pode ser de uma questão da realidade, que, para ser resolvida, necessita ser organizada seguindo um padrão matemático. Também pode ser uma atividade de levantamento de questões da própria matemática, recentes ou não, particulares ou não, que precisam ser organizadas para melhor compreensão, em outro contexto ou por um enfoque axiomático. Tomar a matemática como uma atividade humana, na perspectiva de Freudenthal (1973, 1991), significa reconhecê-la como uma atividade da natureza humana. Para ele, a matemática é de valor humano quando ela está conectada a situações que podem tornar-se reais, quando ela tem significado e é relevante para a sociedade.

Na RME, a matematização é compreendida como um processo de organização, esquematização e processamento matemático. Conforme Oliveira[20] (2014, p. 54), a partir do referencial teórico da RME, matematizar, “no sentido mais amplo da palavra, significa aprender matemática numa perspectiva em que a matemática não é apenas um conjunto de conhecimentos, mas inclui o próprio processo de aprendizagem”.

Na perspectiva da RME, a matemática é o produto final da matematização, atividade principal dos matemáticos. Segundo Ciani (2012, p. 36), fundamentada em De Lange (1987), a matematização é

> [...] uma atividade de organização e estruturação pela qual conhecimentos são adquiridos e competências são utilizadas para descobrir regularidades, relações e estruturas desconhecidas” (DE LANGE, 1987, p. 43) (tradução nossa). Nessa perspectiva, matematização é um processo que se inicia na realidade e que continua enquanto essa mesma realidade está se modificando, de forma a ir além dela, num movimento de ampliar-se e aprofundar-se sob uma variedade de influências, incluindo a da própria matemática.

Do ponto de vista didático, o processo de matematização foi separado por Treffers (1987) nas componentes horizontal e vertical, que são indissociáveis, pois não é possível determinar com precisão quando uma termina e a outra começa. Segundo Oliveira (2014), com base em Freudenthal (1991), a matematização horizontal pode ser identificada como o movimento de ir do mundo real para o dos símbolos e a matematização vertical está relacionada ao processo de lidar com a matemática dentro do mundo dos símbolos. Conforme Oliveira (2014), fundamentado em Gravemeijer e Doorman (1999), o processo de matematização progressiva envolve tanto a matematização horizontal quanto a matematização vertical. É nesse processo que o aluno constrói matemática.

Segundo Oliveira (2014, p. 54), em uma perspectiva de “fazer mais matemática”, De Lange (1987) acrescentou um novo conceito relacionado a matematização. Para o autor, “à medida que se lida com uma situação real por meio da matematização e esse lidar gera conhecimento novo para determinado sujeito” ocorre o processo de matematização

---

[20] Em sua dissertação de mestrado, Oliveira (2014) investigou na perspectiva da RME o sentido/significado da expressão matematização.

conceitual, no qual o “sujeito elaborou algum conhecimento novo, e não simplesmente aprofundou seu conhecimento matemático já existente” (OLIVEIRA, 2014, p. 39).

Os estudos do GEPEMA a respeito da RME, entre eles Freudenthal (1991), indicam que um dos princípios da Educação Matemática Realística é a reinvenção guiada[21] por meio da matematização progressiva, conforme pode ser encontrado em Oliveira (2014, p. 3). As ideias de Freudenthal do ensino da matemática como reinvenção guiada e da matemática como atividade humana “constituem o ponto de partida para o desenvolvimento das aulas de matemática” (CIANI, 2012, p. 34), nas quais o processo de matematização deve oportunizar aos “estudantes experimentar algo similar ao processo de desenvolvimento da própria matemática” (TREVISAN, 2013, p. 68), em oposição à inversão antididática na qual “o produto final da atividade dos matemáticos é tomado como ponto de partida para o ensino e a aprendizagem da matemática” (SANTOS, 2014, p. 34).

Para Freudenthal (1991), ao se desenvolver uma estratégia metodológica na perspectiva da RME, é necessário que o professor procure um equilíbrio, mesmo que sutil, entre a arte de criar e a força de guiar conforme foi citado nas teses de Ciani (2012), Pires (2013) e Santos (2014).

Segundo Pires (2013, p. 13), fundamentada em Freudenthal (1991), a reinvenção guiada é como uma “ação de intervenção organizada”, na qual o conhecimento deve ser elaborado pelo aluno por meio de situações realísticas que criem a oportunidade de matematização semelhante ao que foi vivenciado por matemáticos profissionais. Para Freudenthal (1991), as “invenções” fazem parte do processo de aprendizagem. Sendo assim, o professor deve oferecer aos estudantes a oportunidade guiada de (re)inventar parte do conhecimento matemático acumulado pela humanidade, não exatamente como foi inventado, mas por meio de situações que, de certo modo, possam reproduzir parte do processo de elaboração do saber.

Ferreira (2013, p. 33), considerando os trabalhos de Freudenthal (1968, 1971, 1983, 1991), De Lange (1987), Treffers (1987), Van Den Heuvel-Panhuizen (1996) e Drijvers (2003), sistematiza que, na reinvenção guiada,

- os alunos têm um papel fundamental e são considerados: (a) protagonistas da aprendizagem; (b) reinventores de ferramentas, procedimentos, conceitos matemáticos; (c) autores do que fazem.

---

[21] Mais informações podem ser obtidas em: Santos (2014, p. 12), que investigou “a utilização da análise da produção escrita em aulas de matemática sob a luz da reinvenção guiada, para além da perspectiva de estratégia de avaliação” e Ciani (2012) e Pires (2013), que utilizaram a análise da produção escrita na reinvenção guiada na perspectiva da RME.

- o professor serve de guia, interventor, orientador, recurso, mediador do processo de aprendizagem.
- as tarefas são motes, pontos de partida, para o processo de reinvenção; devem ser propícias às possíveis matematizações.
- a matemática é uma atividade humana.
- a aprendizagem é baseada na experiência do aluno, na qual a construção de conceitos matemáticos é feita de forma que ele consiga reconstruir o que aprendeu.

A partir dos trabalhos de Van Den Heuvel-Panhuizen (1996, 2000, 2002), Santos (2014, p. 70) indica que a reinvenção guiada é um método de ensino "para conduzir o trabalho com alunos, visando que eles possam matematizar e desenvolver ferramentas matemáticas".

Na perspectiva da reinvenção guiada:

- O trabalho em sala de aula tem início com a proposição de uma situação realística que possibilita diferentes níveis de matematização.
- Após resolverem a situação, os alunos podem interagir uns com os outros e terem a oportunidade de analisar e discutir estratégias e procedimentos que utilizaram.
- Durante e após o trabalho dos alunos, o professor pode fazer questionamentos para explorar as resoluções que apresentaram bem como as diferenças existentes entre elas, e discutir aspectos matemáticos subjacente a essas resoluções encorajando-os a se interessar por esses aspectos (SANTOS, 2014, p. 38).

Freudenthal (1983) denominou o trabalho do professor de apresentar a realidade por meio de contextos ricos como didatização que "é própria das tarefas do professor como uma *atividade* de organizar fenômenos suscetíveis à matematização. Nesta perspectiva, Freudenthal (1983) explora o conceito de fenomenologia didática" (FERREIRA, 2013, p. 37).

A concepção de fenomenologia didática foi apresentada por Freudenthal (1983) em contraposição ao que ele denominou inversão antididática, conforme consta nos trabalhos de Oliveira (2014) e Mendes (2014), na qual o professor começa a ensinar um assunto a partir dos axiomas. Essa é a forma mais comum de ensinar o conhecimento matemático em sala de aula, porém é o caminho inverso ao percorrido pelos matemáticos ao elaborar conceitos. Trevisan (2013, p. 69) indica que a RME propõe "olhar para aplicações em que se possam encontrar fenômenos a serem organizados por conceitos, procedimentos e ferramentas matemáticas", partindo do pressuposto de que a matemática resulta da resolução de problemas práticos que englobam fenômenos a serem organizados. Dessa forma, "devem ser analisadas aplicações diárias objetivando encontrar pontos de partida para elaborar uma proposta de *rota de reinvenção* (TREVISAN, 2013, p. 69)". De acordo com a investigação desenvolvida por Ferreira (2013, p. 37), para Freudenthal (1983), a “fenomenologia didática se mostra como uma maneira de o professor oportunizar aos alunos os “lugares” ou “situações” pelas quais podem reinventar “suas” matemáticas, matematizar”.

Na perspectiva da fenomenologia didática de Freudenthal (1983), fenômeno é o resultado de uma experiência com algo que também pode resultar de uma experiência com os meios de organização da própria matemática. Dessa forma, uma investigação fenomenológica ocorre a partir de situações problemáticas que evocam padrões para a matematização. A busca por fenômenos que possam ser matematizados pode suscitar a compreensão da invenção do conhecimento matemático (CIANI, 2012).

A fenomenologia didática, proposta por Freudenthal (1983), não está relacionada à fenomenologia encontrada nos trabalhos de Hegel, Husserl[22] e Heidegger. O trabalho de Freudenthal está fundamentado nas ideias de noúmenos e fenômenos. Os noúmenos se referem aos objetos matemáticos e os fenômenos, ao trabalho com os noúmenos, conforme foi citado por Oliveira (2014) e Santos (2014).

Ferreira (2013, p. 37) elaborou um Quadro (Quadro 1) para resumir os princípios que caracterizam a Educação Matemática Realística “fundamentados nos níveis de Van Hiele, na fenomenologia didática de Freudenthal, e na Reinvenção Guiada por meio da matematização progressiva”.

Quadro 1 – Resumo dos Princípios da RME[23]

Princípios[24]	Características
(1) Da *Atividade*	- refere-se à interpretação da matemática como atividade humana (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - aprender é uma atividade construtiva (NES, 2009); - as produções dos estudantes são utilizadas para a construção de conceitos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000)
(2) Da *Realidade*	- a RME tem a função de tornar os alunos capazes de aplicar matemática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010);

[22] De acordo com Abbagnano (2007, p. 437-438), fenomenologia é a “descrição daquilo que aparece ou ciência que tem como objetivo ou projeto essa descrição”. A fenomenologia de Husserl pode ser resumida como: “o reconhecimento do caráter *intencional da consciência*, em virtude do qual a consciência é um movimento de *transcendência* em direção ao objeto e o objeto se dá ou se apresenta à consciência "em carne e osso" ou "pessoalmente"; evidência da visão (intuição) do objeto devida à presença efetiva do objeto; generalização da noção de objeto, que compreende não somente as coisas materiais, mas também as formas de categorias, as essências e os "objetos ideais" em geral; caráter privilegiado da "percepção imanente", ou seja, da consciência que o eu tem das suas próprias experiências, porquanto nessa percepção aparecer e ser coincidem perfeitamente, ao passo que não coincidem na intuição do objeto externo, que nunca se identifica com suas aparições à consciência, mas permanece além delas”.
[23] Ferreira (2013) construiu esse Quadro com base nas descrições de Streefland (1991), Treffers (1987), Van den Heuvel-Panhuizen (2000, 2001, 2010), Widjaja e Heck (2003), Nes (2009).
[24] Segundo Ferreira (2013), apenas Van den Heuvel-Panhuizen (2000, 2010) apresenta o sexto princípio.

	- o processo de matematização ocorre a partir da exploração de contextos ricos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - fenômenos da realidade devem ser organizados por meio da matemática (NES, 2009); - é importante o uso de contextos reais que sejam significativos e naturais ao aluno como ponto de partida para a sua aprendizagem (WIDJAJA; HECK, 2003).
(3) De *Níveis*	- os alunos passam vários níveis de compreensão (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - começam de seus procedimentos informais e por meio da matematização progressiva e esquematizações avançam para a construção de modelos mais formais (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - os modelos têm de mudar de “modelo de” ao “modelo para” (STREEFLAND, 1991).
(4) Do *Entrelaçamento*	- domínios matemáticos, como geometria, número, medição e manipulação de dados não são considerados capítulos curriculares isolados, mas fortemente integrados (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - os alunos devem desenvolver uma visão integrada da matemática, bem como flexibilidade para se conectar a diferentes subdomínios e / ou a outras disciplinas (WIDJAJA; HECK, 2003); - a resolução de problemas de contexto ricos significa muitas vezes que se tem de aplicar uma ampla gama de ferramentas matemáticas e entendimentos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000); - a força do princípio do entrelaçamento é que traz coerência para o currículo. Este princípio refere-se não só aos diferentes domínios de matemática, mas também podem ser encontradas dentro deles (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).
(5) Da *Interatividade*	- a aprendizagem matemática não é apenas uma atividade pessoal, mas também uma atividade social (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - os alunos devem ter oportunidades para compartilhar suas estratégias e invenções com outros alunos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - a interação entre alunos e professores é uma parte essencial na RME porque a discussão e colaboração oportunizam a reflexão sobre o trabalho (WIDJAJA; HECK, 2003).
(6) De *Orientação*	- os estudantes devem contar com uma oportunidade “guiada” para “reinventar” a matemática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - o ensino e os programas devem basear-se num conjunto coerente de trajetória de ensino-aprendizagem a longo prazo (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - os alunos precisam de espaço para construir conhecimentos matemáticos e ferramentas por si só. Para alcançar isso, os professores têm de proporcionar aos alunos um ambiente de aprendizagem em que este processo de construção possa surgir (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).

Fonte: FERREIRA, 2013, p. 37 e 38.

Ferreira (2013), a partir de trabalhos como os de Freudenthal (1973), indica que, na perspectiva da RME, o processo de aprendizagem é estruturado por níveis, ideia fundamentada nos níveis de Van Hiele, em que, em um nível, “determinado conceito pode ser o objeto da matematização, que, em outros níveis, pode ser ferramenta útil para organização de outros assuntos, na busca de matematizar e sistematizar outros objetos” (FERREIRA, 2013, p. 34).

A intenção com este capítulo é apresentar os fundamentos desta pesquisa que irá tratar dos princípios de avaliação da Educação Matemática Realística. Devido à pesquisa ter sido construída no interior do GEPEMA, inicia-se apresentando a compreensão do Grupo a respeito da avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem. O Grupo toma a avaliação na perspectiva formativa. Considera que a avaliação acompanha o processo de aprendizagem. Entende que avaliar é um ato intencional que procura revelar os saberes dos professores e dos alunos. Compreende que a análise da produção escrita dos alunos pode revelar o que eles já sabem e, a partir dessas informações, cabe ao professor direcionar o seu trabalho.

Considerando que o GEPEMA toma a avaliação como parte dos processos de ensino e de aprendizagem, reconhecemos que a proposta da RME poderia fundamentar os estudos do Grupo, pois a RME considera que a aprendizagem matemática se origina da matematização de situações reais que permitam ao aluno “reinventar” a matemática mediante a orientação guiada pelo professor. Para a RME, a matemática é o produto final da matematização, ela é o resultado de um processo de organização, esquematização e processamento matemático. Segundo a RME, no ambiente escolar, a matematização é fruto de uma intervenção organizada; ela consiste na reinvenção guiada pelo professor que incide no ponto de partida para o desenvolvimento das aulas de matemática. Essa compreensão desencadeou a concepção de fenomenologia didática de Freudenthal (1983) que trata da forma de o professor oferecer aos estudantes a oportunidade de reinventar conhecimentos matemáticos.

Essas ideias têm norteado os trabalhos do GEPEMA relacionados à avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem, e os pontos fundamentais da Educação Matemática Realística têm sido a base teórica das dissertações e teses defendidas pelos membros do Grupo desde 2008. Tendo em vista esse cenário, o próximo capítulo apresenta o problema de pesquisa e os objetivos da presente tese.

3. A PESQUISA REALIZADA

O problema e os objetivos da pesquisa foram delimitados a partir de reflexões realizadas a respeito do processo de ensino e de aprendizagem da matemática e dos estudos realizados no interior do GEPEMA. Eles foram formulados tendo em vista que, no âmbito do Grupo, faz-se necessário buscar aportes teóricos que possam dar suporte à avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem, dando continuidade à sua trajetória de estudo e pesquisa que vem "se apropriando de lentes de aumento"[25] (CIANI, 2012) para "avançar o estudo no que diz respeito à compreensão das formas como os alunos lidam" (FERREIRA, 2013) com o conhecimento matemático. Buscando examinar um dos aspectos identificados por tais "lentes de aumento", inicia-se o estudo a partir das teses de Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957).

Os indícios da relação entre o trabalho de Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957) e a Educação Matemática Realística podem ser encontrados em: Freudenthal (1973, 1991), Treffers e Goffree (1985), Treffers (1987), Van Den Heuvel-Panhuizen (1996). Um dos primeiros momentos em que a atenção se voltou para as ideias deles foi o estudo realizado no interior do GEPEMA, no final de 2011, do livro "Assessment and Realistic Mathematics Education". Nesse livro, Van den Heuvel-Panhuizen (1996) afirma que

> [...] a matematização pode ocorrer em diferentes níveis. Estes níveis de matematização estão ligados aos vários níveis de compreensão por meio do qual os alunos podem passar [...]. **A essência desse nível teórico, que Freudenthal (1973) empresta das observações e ideias dos Van Hieles**, é que a atividade de matematização em um menor nível pode mais tarde se tornar o objeto de análise em um nível superior. [...] A condição para se chegar ao próximo nível é a capacidade de refletir a respeito das atividades realizadas [...] (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 13, grifo nosso) (tradução nossa)[26]

Alguns indícios da relação entre os trabalhos de Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957) e a RME são encontrados em Freudenthal (1991, p. 96) o

> [...] que importa no processo de aprendizagem são as descontinuidades – citando a mim mesmo – ou, outra palavra que tenho utilizado frequentemente: os saltos. Eu devo a concepção da estrutura de níveis do

[25] Lentes que são compostas pelas pesquisas que revelam cada vez mais detalhes do processo de ensino e de aprendizagem e da avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem.

[26] (…) mathematization can occur on different levels. These levels of mathematization are connected to the various levels of understanding through which students can pass (…)The essence of this level theory, which Freudenthal (1973) borrowed from the observations and ideas of the Van Hieles, is that the mathematizing activity on a lower level can later become the object of analysis on a higher level. (…)The condition for arriving at the next level is the ability to reflect on the activities conducted. (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 13)

> processo de aprendizagem a minha colaboração com os Van Hiele, um casal que incorporou, por assim dizer, o casamento perfeito de teoria e prática. (tradução nossa[27])

São também encontrados em Treffers e Goffree (1985), ao afirmarem que se pode

> [...] considerar a teoria dos níveis de Van Hiele como o primeiro exemplo de um quadro teórico para ensino específico da matemática realística (Van Hiele - Geldof e Van Hiele, 1985). A necessidade didática de exploração fenomenológica básica é estipular, o que deve preceder as operações matemáticas formais no primeiro e segundo níveis. Certas fases do ensino são necessárias para atingir níveis mais elevados (Treffers e Goffree, 1985, p. 116) (tradução nossa[28]).

Foi no contexto dos estudos realizados no interior do GEPEMA, particularmante os relacionados aos princípios de avaliação da Educação Matemática Realística, que se delimitou o problema de pesquisa que consiste em investigar as possíveis relações entre os princípios de avaliação da Educação Matemática Realística e as fases do processo de aprendizagem propostas por Dina Van Hiele-Geldof (1957) e Pierre Van Hiele (1957, 1986) buscando aproximações com os trabalhos do GEPEMA.

Para responder a essa questão, foram definidos os objetivos da pesquisa:

- Objetivo geral
    - Reconhecer e explicitar aproximações entre as fases do processo de aprendizagem em matemática dos Van Hiele e trabalhos do GEPEMA que utilizaram os princípios da avaliação na Educação Matemática Realística.
- Objetivos específicos
    - Descrever as fases do processo de aprendizagem em matemática dos Van Hiele;
    - Apresentar aspectos característicos dos princípios de avaliação da Educação Matemática Realística, mais precisamente os propostos por De Lange;

---

[27] What matters in learning processes are the discontinuities - quoting myself - or, another word that I have frequently used: the jumps. I owe the conception of the level structure of learning processes to my collaboration with the Van Hieles, a couple who embodied, as it were, the marriage of theory and practice (FREUDENTHAL, 1991, p. 96).

[28] One might consider Van Hiele's level theory as the first example of a specific instruction theoretic framework of realistic mathematics instruction (Van Hiele-Geldof and Van Hiele, 1985). There the didactical necessity of phenomenological exploration at the ground level is stipulate, where it should precede the formal operations on the first and second level. Certain instrucional phases are required to attains higher levels (Treffers e Goffree, 1985, p. 116).

- Identificar aproximações entre o trabalho dos Van Hiele, e os trabalhos do GEPEMA que tomaram os princípios de avaliação da RME.

Para responder aos problemas de pesquisa e atingir os objetivos propostos, optou-se por uma pesquisa de caráter qualitativo, pois reconhecem-se no trabalho a ser desenvolvido:

> (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, se vale de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configurados; (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos prévios, estáticos e generalistas. (GARNICA, 2004, p. 86)

Considera-se que esta é uma pesquisa teórica de natureza qualitativa de cunho especulativo na qual a interpretação do pesquisador está diretamente relacionada a suas perspectivas e vivências anteriores. Essa interpretação também pode ser (re)configurada a partir de novos elementos que são incorporados ao referencial teórico e não é possível estabelecer procedimentos prévios sistematizados.

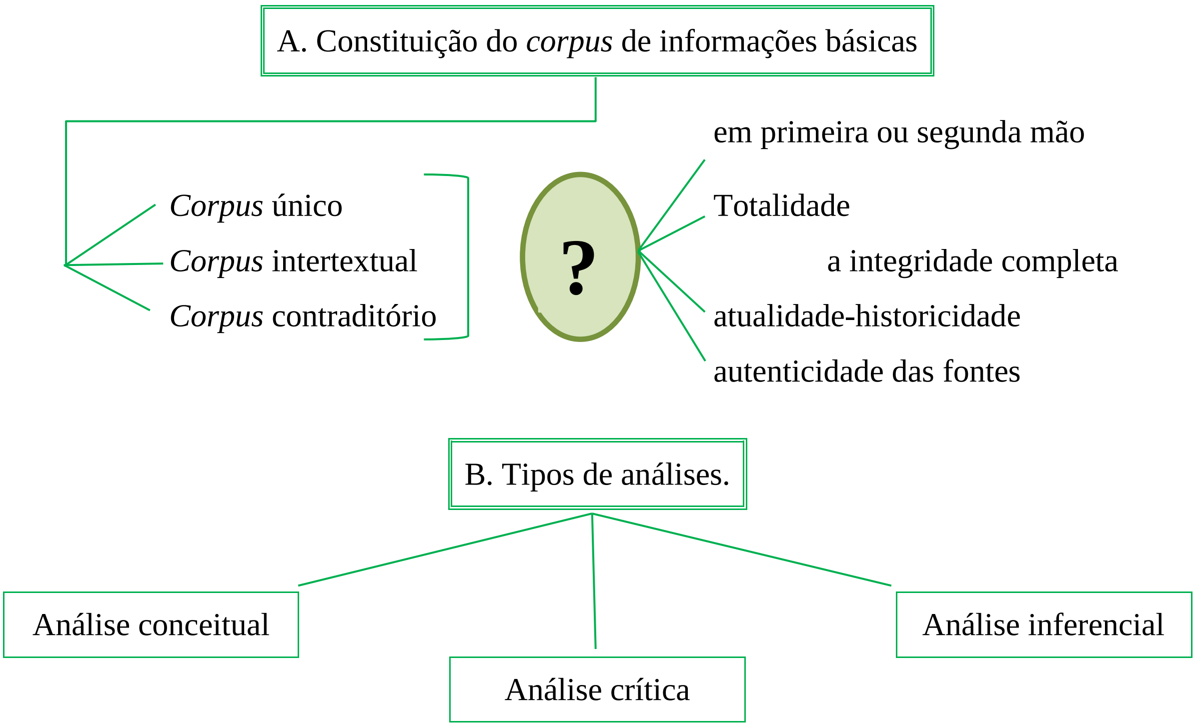
A presente tese foi realizada na perspectiva dos aspectos metodológicos do eixo de pesquisa de natureza teórica e especulativa em educação (VAN DER MAREN, 1996; MARTINEAU, SIMARD, GAUTHIER, 2001). A pesquisa especulativa é definida como uma obra da produção de enunciados teóricos sobre outros enunciados teóricos (VAN DER MAREN, 1996). É um tipo de pesquisa que se resume em três eixos fundamentais: 1) a interpretação, 2) a argumentação e 3) o recontar (MARTINEAU, SIMARD, GAUTHIER, 2001).

De acordo com Martineau, Simard e Gauthier (2001), em uma pesquisa de natureza teórica especulativa, o pesquisador confronta textos de diferentes autores escritos a respeito de um mesmo tema ou textos do mesmo autor a respeito de um tema escrito em diferentes épocas. A partir da interpretação dos textos, estabelece-se o referencial teórico, e o pesquisador escreve o seu próprio texto, que deverá apresentar uma visão geral do campo investigado. A leitura do referencial bibliográfico é um exercício de interpretação, um trabalho hermenêutico e de análise conceitual.

Nessa perspectiva metodológica, o pesquisador não pode apenas interpretar os textos produzidos a respeito de um assunto. Ele deverá também ser capaz de escrever um texto original que pode ser elaborado utilizando a retórica. Nesse tipo de pesquisa, a interpretação e a discussão não são suficientes. Elas devem ser complementadas pelo recontar. A narrativa é um fator de coerência discursiva. Uma das questões centrais de uma pesquisa narrativa especulativa é a capacidade de produzir uma nova questão, de propor uma nova análise a partir da interpretação dos textos anteriores e argumentos rigorosos. De certa forma é uma maneira de contar uma história a respeito do tema pesquisado.

De acordo com Van der Maren (1996), a pesquisa teórica especulativa pode ser dividida em dois momentos: a) a constituição do *corpus* de informações de base e b) o tipo de análise (Figura 2).

Figura 2: A pesquisa especulativa



Fonte: (VAN DER MAREN, 1996, p. 134) (tradução nossa)

A credibilidade de uma pesquisa depende tanto do tipo de corpus quanto da qualidade e da validade dele. Van der Maren (1996) apresenta quatro critérios para definir a credibilidade: o acesso às fontes, a totalidade, a atualidade e a autenticidade. Aconselha, ainda, a utilizar fontes primárias, pois uma bibliografia inchada pode implicar na perda do valor e da confiabilidade da pesquisa. É importante que os trechos selecionados mantenham a totalidade da informação. É recomendável, também, que o pesquisador recorte extratos completos, e os trechos selecionados precisam indicar a integridade da citação. Os extratos coletados devem representar o estado atual do discurso, porém, quando os extratos correspondem ao passado, é fundamental observar a autenticidade das fontes.

De acordo com Van der Maren (1996), a primeira fase de uma pesquisa especulativa é a constituição do *corpus* de informações básicas que pode ser feito por meio da captura de todos os escritos a partir do qual a pesquisa será realizada.

Segundo Van der Maren (1996), a constituição do *corpus* de pesquisa depende do objeto de especulação, que pode ser: único, intertextual ou contraditório. Ele é único quando o objeto de especulação está relacionado à interpretação de informações a respeito de questões teóricas de um determinado conceito, a partir, por exemplo, de um único autor. Quando o pesquisador conta com mais de um discurso, o *corpus* de pesquisa é denominado intertextual e é constituído na interação das informações que resulta em uma informação comum, convergente, e contribui com a constituição do núcleo teórico. Por outro lado, quando o *corpus* de pesquisa ajuda a identificar as diferenças, ele é denominado contraditório, as informações são divergentes. A escolha do tipo de *corpus* da pesquisa depende da perspectiva que o pesquisador irá tomar. Por isso é importante explicitar a escolha feita.

O *corpus* de informações básicas da presente pesquisa foi constituído pela captura de informações a partir da produção dos Van Hiele, em especial às teses de doutorado de Dina Van Hiele - Geldof (1957) e de Pierre Van Hiele (1957), os artigos e livros relacionados a RME (FREUDENTHAL 1968, 1973, 1979, 1983, 1991; TREFFERS, 1987; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, 2005, 2012), principalmente os que tratam dos princípios de avaliação da RME (DE LANGE 1987, 1992, 1995, 1996, 1999, 1999 a, 2002, 2003; DEKKER e QUERELLE, 2002) e as dissertações e teses produzidas no interior do GEPEMA. Assim, nesta pesquisa tem-se um *corpus* de pesquisa intertextual, por meio do qual se pretende identificar e discutir as relações presentes nos diferentes *corpus* de informação.

Após selecionar o *corpus* de pesquisa, cabe ao pesquisador definir o tipo de análise que será feita. Van Der Maren (1996) indica três tipos de análises: a conceitual, a crítica e a inferencial.

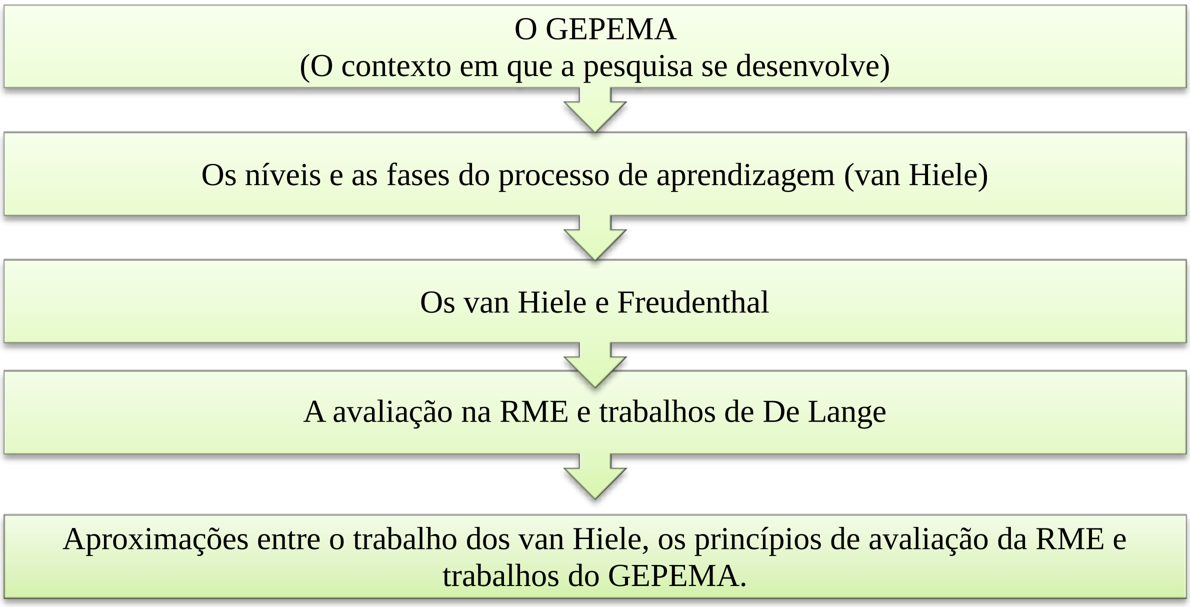
Na análise conceitual, por meio de diferentes comparações, o pesquisador procura identificar a intenção ou a compreensão de um conceito e sua expansão ou extensão. Ela ajuda a compreender o significado de um conceito, a identificar as questões que podem ser aplicadas e a empreender o significado dessas aplicações. Nesse tipo de análise, as comparações devem ser feitas em diferentes perspectivas: histórica, evolutiva, no nível do discurso teórico, em relação à operacionalização. Inicialmente, o pesquisador registra a história do conceito em estudo e, após isso, analisa as relações entre as diferentes ocorrências do conceito teórico feitas por diferentes autores ou contextos na organização da finalidade conceitual do termo em estudo. Com isso, o pesquisador poderá observar claramente o conceito analisado e elaborar uma representação da intenção e do alcance dele.

O objetivo da análise crítica é julgar afirmações teóricas com a intenção de destacar suas falhas, contradições, paradoxos, condições, pressupostos, implicações, consequências e, especialmente, o que não foi dito pelos primeiros autores. Regularmente, a intenção da análise crítica é condenar uma teoria para substituí-la por outra ou sugerir melhorias. Depois de escolhida a teoria que será analisada, o pesquisador identifica os conceitos mais ingênuos, aponta os problemas encontrados para, então, propor novos conceitos mais consistentes teoricamente, que substituirão os já enfraquecidos.

A finalidade da análise inferencial é o desenvolvimento ou a ampliação de uma teoria. O desenvolvimento dessa teoria é feito por meio da transferência dela para outro campo, a partir de uma analogia, percebida entre diferentes domínios. A ampliação ocorre devido à adição de elementos teóricos e à redução de suas especificações. No caso do desenvolvimento de uma nova teoria, o pesquisador descobre, em uma teoria A, obras de outros pesquisadores de uma teoria B e percebe a possibilidade de transferir o domínio B para o domínio A. A validação da nova teoria A deve seguir os mesmos caminhos da validação de uma nova teoria. Quando se trata da ampliação interna de uma teoria, a análise inferencial ocorre por meio do exame do significado da sequência das implicações e consequências de conceitos. Sua operacionalização e relevância é um procedimento semelhante à análise crítica, porém a perspectiva é de desenvolvimento ao invés de sua condenação e substituição. Essa ampliação pode ser feita por meio da: a) análise das relações com outros conceitos; b) análise da correspondência com os requisitos essenciais dos preceitos da teoria em inferir um modelo padrão; c) julgamento da equivalência com as aplicações de uma teoria do domínio antes de uma extensão mais ampla; d) análise dos pressupostos, implicações ou consequências da teoria e sua operacionalização deduzindo o que permaneceu implícito e identificando as consequências desse esclarecimento na ampliação ou limitação do alcance da teoria. Esse procedimento também permite que o pesquisador estabeleça outras afirmações teóricas e fortaleça uma cadeia de declarações (VAN DER MAREN, 1996).

A presente pesquisa consiste em um trabalho de cunho teórico que tem a intenção de investigar as possíveis relações entre os princípios de avaliação da Educação Matemática Realística e as fases do processo de aprendizagem propostas por Dina Van Hiele-Geldof (1957) e Pierre Van Hiele (1957, 1986), buscando aproximações com os trabalhos do GEPEMA. Na Figura 3, sintetiza-se a composição dos capítulos desta tese.

Figura 3: Composição desta tese



Fonte: A autora

No primeiro capítulo desta pesquisa, apresenta-se um breve histórico do GEPEMA, com a intenção de expor o contexto em que ela é produzida. No segundo capítulo, com a mesma intenção, são discutidos os principais temas abordados nas teses e dissertações produzidas no interior do Grupo. Primeiramente, trata-se da avaliação, em seguida, dos aspectos gerais da RME que constam nos trabalhos do GEPEMA. Para escrever esse capítulo, foram elaborados quadros de palavras com cada um dos temas que se pretendia abordar, quais sejam: a avaliação formativa, a avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem, o histórico da RME, a matemática como atividade humana, os princípios da RME, a reinvenção guiada, a fenomenologia didática, a didatização. Esses quadros foram compostos por recortes de teses e dissertações produzidas por membros do GEPEMA.

Depois de apresentar o cenário no qual a pesquisa se desenvolveu, o terceiro capítulo apresenta o problema de pesquisa, os objetivos e os procedimentos metodológicos que utilizados.

O quarto capítulo trata dos trabalhos dos Van Hiele relacionados às fases do processo de aprendizagem fundamentado principalmente em: Van Hiele-Geldof (1957), Van Hiele (1957, 1986) e La Bastide-Van Gemert (2006). O material selecionado para a produção desse capítulo partiu das referências de autores da RME ao trabalho de Dina e Pierre Van Hiele e de referências que foram acrescentadas após a leitura dos materiais iniciais.

Inicialmente apresentam-se os principais aspectos da tese de Van Hiele-Geldof (1957), que se considera pertinente a alguns pressupostos da avaliação da RME, na sequência é feita abordagem similar à tese de Pierre M. Van Hiele (1957) e ao livro “Structure and insight: a theory of Mathematics Education” (VAN HIELE, 1986) destacando em especial os aspectos que dizem respeito as fases do processo de aprendizagem. Encerra-se o capítulo estabelecendo semelhanças entre o trabalho de Dina e Pierre Van Hiele e a abordagem da RME, mais especificamente a relação deles com Freudenthal, com fundamentos principalmente em La Bastide-Van Gemert (2006).

O quinto capítulo trata dos princípios de avaliação na RME por meio do trabalho de De Lange a partir de referenciais como: De Lange (1987, 1992, 1995, 1996, 1999, 1999 a, 2002, 2003), De Lange e Verhage (1987), Verhage e De Lange (1987) e Dekker e Querelle (2002). Inicialmente, o material selecionado para a produção desse capítulo partiu das referências ao trabalho de De Lange, nas dissertações e teses produzidas no interior de GEPEMA. Esse material foi complementado a partir da necessidade de se buscar mais informações nas referências do material inicial. O primeiro assunto tratado na seção é a tese de De Lange (1987), que descreve o projeto HEWET e a constituição da concepção de avaliação que foi sendo desenvolvida ao longo do projeto. Na sequência apresenta outros trabalhos do autor que, aliados aos resultados de sua tese e também à contribuição de Dekker, resultaram na elaboração dos princípios de avaliação da RME e na proposição da “Pirâmide de Avaliação”.

O sexto capítulo “GEPEMA, avaliação na Educação Matemática Realística e Van Hiele” busca aproximações entre o trabalho dos Van Hiele, a RME e os princípios de avaliação da RME. Também comenta trabalhos do GEPEMA que trataram dos princípios de avalição da RME, da “Pirâmide de Avaliação”, de aspectos relacionados a RME, do uso dos contextos e da prova em fases. A intenção é trazer novos elementos para as pesquisas do Grupo a respeito da avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem na perspectiva da Educação Matemática Realística à luz das pesquisas dos Van Hiele. Finaliza-se o capítulo apresentando uma leitura de trabalhos do Grupo na perspectiva dos processos de aprendizagem de Dina e Pierre Van Hiele e da avaliação na perspectiva da RME a partir do trabalho de De Lange.

4. VAN HIELE, FREUDENTHAL E ALGUMAS APROXIMAÇÕES COM A RME

O objetivo deste capítulo é descrever as fases do processo de aprendizagem em matemática dos Van Hiele. Inicia-se expondo uma breve biografia e estabelecendo a relação entre os Van Hiele, seus trabalhos e Freudenthal. Na sequência, são apresentados aspectos das teses de Dina Van Hiele-Geldof (1957) e Pierre Marie Van Hiele (1957) e do livro "Structure and insight: a theory of Mathematics Education" de Pierre M. Van Hiele (1986), que mostram o desenvolvimento do trabalho deles, que resultou na proposição dos níveis de pensamento e das fases do processo de aprendizagem. Pretende-se buscar aproximações entre o trabalho dos Van Hiele, a RME e, mais especificamente, os princípios de avaliação da RME.

4.1 O casal Van Hiele

Pierre Marie Van Hiele (1909-2010) nasceu em Amsterdan. Em 1933 concluiu a graduação em Matemática e Ciências Naturais na Universidade de Amsterdan. De 1939 a 1951, trabalhou como professor de Matemática e Ciências Naturais no "Departamento Montessori del Liceo Kennemer". A partir de 1951, tornou-se professor do "El Nuevo Liceo de Bilthoven", onde exerceu a função de orientador individual[29], o que exigiu dele profundo conhecimento em didática da matemática. Para isso, procurou conexões com alguns didatas, em especial com o grupo W.V.O (Work Group on Renewal Education) do qual Freudenthal foi diretor. Em 1940, Pierre M. Van Hiele casou-se com Dina (Dieke) Van Hiele-Geldof (1911-1958). Depois da 2ª Guerra Mundial, 1939-1945, escreveram livros didáticos para o ensino secundário. Em 04 de julho de 1957 concluíram suas respectivas teses de doutorado. Pierre M. Van Hiele defendeu a tese "De Problematiek van het inzicht. Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof" (O problema do insight. Uma conexão com a compreensão dos estudantes na aprendizagem da geometria). Essa foi a primeira tese relacionada ao ensino de matemática que Freudenthal orientou. Dina Van Hiele-Geldof defendeu a tese "De didaktick Van de Meetkunde in de eerste klass van het V.H.M.O[30]" (A

[29] Segundo van Hiele (1957, p. 141) sua "función era la orientación individual en la escuela y era necesario introducirse profundamente en la didáctica de las Matemáticas".
[30] Voorbereidend Hoger en Middelbaar Onderwijs (Ensino Superior e Secundário Preparatório)

didática da geometria na classe inicial do ensino secundário) orientada por Langeveld[31]. Ela faleceu um ano após a defesa da sua tese. Pierre M. Van Hiele deu sequência ao trabalho deles. Ele faleceu com 101 anos (VAN HIELE, 1957; FUYS, 1984; LA BASTIDE-VAN GEMERT, 2006; BROEKMAN, H.; VERHOEF, N. C, 2012).

No princípio, os trabalhos de Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957) tiveram uma divulgação relativamente lenta. Na primeira metade da década de 60 do século XX, apenas a União Soviética tomou o Modelo de Van Hiele[32] para desenvolver o novo currículo de Matemática (CROWLEY, 1987; PASTOR, 1993). Esse modelo também foi utilizado na Holanda, durante o desenvolvimento do projeto WISKOBAS (PASTOR, 1993). Segundo Crowley (1987) o Modelo de Van Hiele tornou-se conhecido na América do Norte apenas no início da década de 70 do século passado por meio do livro “Mathematics as an Educational Task” de Hans Freudenthal (1973) e da publicação da conferência de Wirszup em 1976. Depois disso, o modelo se expandiu para os outros países ocidentais (PASTOR, 1993).

Segundo Pastor (1993), três projetos desenvolvidos nos Estados Unidos no final da década de 1970 e início da década de 1980 foram fundamentais para o impulso dado às pesquisas a respeito do modelo dos Van Hiele: o projeto do Brooklyn, desenvolvido por Fuys, Geddes e Tischer (1985); o projeto de Chicago, desenvolvido por Usiskin (1982), e o projeto de Oregón desenvolvido por Burger e Shaughnessy (1986). Os projetos de Usiskin (1986), Burger e Shaughnessy (1986) investigaram as habilidades geométricas de estudantes da educação básica, em função dos níveis de Van Hiele, por meio de testes escritos e de protocolos de entrevista, desenvolvidos por membros dos projetos que, posteriormente, ficaram conhecidos como testes de Van Hiele. O projeto desenvolvido por Fuys, Geddes e

---

[31] Martinus Jan Langeveld (1905-1989) formou-se em filosofia e pedagogia na Universidade Municipal de Amsterdan. Em 1934 conclui o doutorado em linguística na Kohnstamm com a tese “Linguagem e pensamento: uma contribuição teórica e didática ao ensino secundário na língua materna, e em especial a de gramática”. Cinco anos depois foi nomeado professor de pedagogia, didática e psicologia do desenvolvimento em Utrecht. Ele foi responsável pela introdução da fenomenologia das ciências humanas em Utrecht. Em sua pedagogia ele tomou a antropologia da criança que foi localizada como ponto de partida. Para ele a capacidade de verbalização, a autonomia, o raciocínio, a argumentação, a formação da consciência e a responsabilidade eram fundamentais. Depois da II Guerra Mundial Langeveld foi a figura dominante na pedagogia da Holanda. Ele fez com que a pedagogia recebesse o reconhecimento como uma área científica. Langeveld foi membro da Escola de Utrecht de 1945 até 1960 participando de um grupo de estudiosos orientados para o humanismo cristão e a psicologia orientada fenomenologicamente. Cabe a Langeveld a psicologia fenomenológica (LA BASTIDE-VAN GEMERT, 2006).

[32] De acordo com Crowley (1987) o Modelo de van Hiele consiste em cinco níveis de pensamento denominados: "visualização", "análise", "dedução informal", "dedução formal," e "rigor". Esses níveis descrevem características do processo de pensamento. Segundo esse modelo a partir da orientação didática o aluno se move sequencialmente do nível inicial (visualização) para o nível mais alto (rigor). No entanto, poucos estudantes conseguem alcançar o último nível.

Tischler (1985) investigou o efeito das instruções em relação a mudanças dos alunos de um nível de Van Hiele para o próximo nível.

A partir dos trabalhos de Fuys, Geddes e Tischer (1985), Usiskin (1982) e Burger e Shaughnessy (1986), muitas pesquisas a respeito dos níveis de Van Hiele vêm sendo desenvolvidas, principalmente relacionadas ao pensamento geométrico, mas também existem pesquisas que tratam da álgebra booleana, da linguagem sobre as funções, trigonometria, função exponencial e logaritmos, sequências e séries (DE VILLIERS, 2010).

Conforme Pastor (1993), na Espanha, os estudos relacionados ao Modelo de Van Hiele começaram uma década depois. Gutiérrez (2012), pesquisador espanhol, declara que seu primeiro contato com o Modelo de Van Hiele foi por meio do relatório de Usiskin (1982). Segundo o pesquisador espanhol, a partir desse relatório planejou-se uma pesquisa que replicou os testes utilizados por Usiskin (1982) com as devidas adaptações às diferenças entre os currículos de geometria da Espanha e dos Estados Unidos.

Entre os pesquisadores brasileiros, o primeiro trabalho relacionado à teoria de Van Hiele foi a tese de doutorado de Nasser (1992) desenvolvida na Universidade de Londres. A pesquisadora publicou artigos[33], livros[34], trabalhos em eventos[35] e participou de bancas de trabalho de conclusão de doutorado, mestrado e graduação, além de projeto de pesquisa e extensão e assessorias que abordaram o assunto (NASSER, 2015).

Na presente tese interessa a relação entre o trabalho de Van Hiele-Geldof (1957) e os de Van Hiele (1957, 1986) relacionados às fases do processo de aprendizagem e princípios de avaliação da Educação Matemática Realística, e serão abordados exclusivamente as teses deles e o livro “Structure and insight” de Pierre M. Van Hiele (1986). Serão utilizados a tradução da tese de Dina Van Hiele-Geldof (1957) para o inglês feita pelos

---

[33] NASSER, Lilian. **Usando a Teoria de van Hiele para melhorar o ensino secundário de Geometria no Brasil**: Eventos (INEP), nº 4, 2ª parte . Eventos, INEP, MEC, DF, v. 4, n.2, 1994.
NASSER, Lilian. **Níveis de van Hiele**: uma explicação definitiva para as dificuldades em geometria?. Boletim GEPEM (USU), Rio de Janeiro, v. 29, p. 3338, 1992.
[34] Como: “NASSER, Lilian ; SANT'ANNA, Neide da Fonseca Parracho. **Geometria segundo a Teoria de van Hiele**. 4ª. ed. Rio de Janeiro: Projeto Fundão/IMUFRJ, 1997. v. 1. 78p.” que possui referência a van Hiele no título.
[35] NASSER, Lilian. **A Teoria de Van Hiele para o Ensino de Geometria**: pesquisa e aplicação: Atas do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro (1995);. In: 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1995, Rio de Janeiro. Atas do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ, 1995.
NASSER, Lilian. **Aplicação da Teoria de van Hiele ao Ensino de Geometria do 1º Grau**: Livro de Resumos do II CIBEM, pp.90/91.
NASSER, Lilian; SANTÁNNA, Neide da Fonseca Parracho. **Long term effects of a geometry course based on the van Hiele theory**. In: 19th Conference of Psychology of mathematics Education, 1995, RecifePE. Atas do PME19. RecifePE: UFPE, 1995. v. 1. p. 213-213.
In: I Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, 1994, Blumenau SC. Livro de Resumos. Blumenau SC: FURB, 1994. p. 9091.

pesquisadores do Brooklyn College (FUYS et al. 1984), a tradução da tese de Pierre M. Van Hiele (1957) para o espanhol feita por membros do "Concurso Nacional de Proyectos de Investigación Educativa del C.I.D.E (1989-91)" dirigido por Gutiérrez e o livro "Structure and insight: a theory of Mathematics Education" de Pierre M. Van Hiele publicado em 1986.

Segundo La Bastide Van Gemert (2006), o trabalho de Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957) a respeito da compreensão no contexto do ensino e da aprendizagem da geometria foi algo inovador, até então não havia trabalhos na área do ensino de Matemática. As duas teses se complementam, a tese de Dina Van Hiele-Geldof (1957) tem um caráter mais prático e a de Pierre Van Hiele (1957), um caráter mais teórico. As teses consistem no desenvolvimento de um modelo teórico envolvendo cinco níveis de compreensão de desenvolvimento do pensamento geométrico. Os trabalhos focam o papel da instrução no ensino de geometria e também o papel da instrução para ajudar os estudantes a mudar de um nível para o próximo (FUYS et al. 1984).

4.1.1 Dina Van Hiele-Geldof

A discussão feita na tese de Van Hiele-Geldof (1957) foi baseada em dados coletados por meio de um experimento de ensino [36] desenvolvido em duas turmas de primeiro ano da escola secundária (alunos de 12 anos) que teve como objetivo investigar se:

> 1. É possível utilizar a didática como uma forma de apresentação do material, de modo que o pensamento visual de uma criança avance para um pensamento abstrato num processo contínuo? Este pensamento abstrato é requisito para o pensamento lógico em geometria.
> 2. Existe a necessidade de uma criança no primeiro ano da escola secundária raciocinar logicamente sobre problemas geométricos e até que ponto essa necessidade pode ser conhecida?
> 3. Qual o papel da linguagem na transição do pensamento visual para o lógico? (VAN HIELE-GELDOF, 1957, p. 8) (tradução nossa[37])

[36] A autora discute a especificidade de um experimento de ensino. Ela observa que em geral os dados coletados em um experimento provêm de uma situação na qual é possível isolar a variável em estudo que pode ser de natureza qualitativa ou quantitativa. Por outro lado, em um experimento de ensino, não é possível isolar uma única variável. Os dados coletados são subjetivos. Para van Hiele-Geldof (1957), o objetivo de um experimento de ensino é investigar a melhoria da aprendizagem por meio de uma mudança no método de ensino.

[37] 1. Is it possible to use didactics as a way of presenting material, so that the visual thinking of a child is developed into abstract thinking in a continuous process? This abstract thinking is requisite for logical thinking in geometry.
2. Is there a need for a child in the first class of the secondary school to reason logically about geometric problems and to what extent can this need be met?
3. What role does language play in the transition from visual to logical thinking?

O caráter inovador da tese de Van Hiele-Geldof (1957), para as pesquisas da época, foi o fato de ela não utilizar protocolos como os da pesquisa experimental. Na tese, ela trata de dados que foram coletados a partir de situações reais em sala de aula. A análise é feita sobre a sua própria prática letiva. Segundo a autora, as informações foram coletadas por meio de um experimento de ensino que consiste atualmente em uma modalidade de pesquisa qualitativa, na qual os dados são essencialmente descritivos e existe maior preocupação com o processo do que com o produto. Outra questão relevante apontada pela autora é a necessidade de cooperação entre os pesquisadores da psicologia do desenvolvimento, dos didatas e dos professores para que a didática não seja uma ciência meramente descritiva e para que a psicologia de fato ofereça suporte às tarefas diárias do professor.

Segundo o relato de Van Hiele-Geldof (1957), da introdução de conteúdos geométricos, a primeira aula consistiu no estudo da representação de um cubo construído em cartolina colorida. Esse estudo desencadeou uma série de aulas que tratou: da construção das outras quatro formas geométricas espaciais regulares; da simetria axial, utilizando espelhos; aproximações do π; das propriedades do losango e de outras formas geométricas planas; do significado concreto da linguagem matemática; da medida de ângulos; da reflexão; de estratégias para recuperar o ponto central de um círculo. Todas as aulas desenvolvidas pela pesquisadora utilizaram amplamente material manipulável e a problematização das situações apresentadas. Segundo a autora, os problemas foram "criados para que as crianças possam compreendê-los e de tal forma que desde o início seja possível **guiá-los** em direção a bons 'padrões de pensamento'" (VAN HIELE-GELDOF, 1957, p. 19) (grifo nosso, tradução nossa[38]).

Segundo a autora, durante a fase inicial do ensino da geometria, "a atividade individual do aluno é fundamental. A pergunta 'como devo fazer alguma coisa?' é um passo importante. Isso permite que a cabeça e a mão permaneçam envolvidas simultaneamente no processo de aprendizagem" (VAN HIELE-GELDOF, 1957, p. 26) (tradução nossa[39]). Para ela, "do ponto de vista didático certamente seria apropriado se concentrar mais na estrutura geométrica visual do campo de percepção" (VAN HIELE-GELDOF, 1957, p. 37) (tradução nossa[40]). Isso implica em oferecer oportunidades para o aluno entrar em contato direto com

---

[38] set up so that the children can comprehend them and in such a way that it will be possible to guide them toward good "patterns of thinking" from the very beginning.

[39] the individual activity of the pupil is central. The question "How shall I make something?" is an important one. This allows the head and the hand to be engaged simultaneously in the learning process.

[40] From the didactic point of view it would certainly be appropriate to focus more on the visual geometric structure of the field of perception.

conjuntos de figuras geométricas que estão a nossa volta e que ele tenha diferentes oportunidades de manipular formas geométricas. Segundo ela, isso é o que Langeveld (1954[41]), seu orientador, denomina o segundo ponto, que consiste em encontrar relações entre os valores observados, de modo que o primeiro nível, ou seja, o nível de análise, seja alcançado pelo aluno, à medida que ele se torna capaz de utilizar as propriedades com as quais está familiarizado.

A autora também aponta que, para Van Hiele (1957),

> o processo de aprendizagem de uma criança que está estudando geometria **segue claramente um curso descontínuo.** O professor terá que ter em conta variações de ritmo, a fim de trazer o maior número de alunos possível para o segundo nível de pensamento. Este nível é atingido quando é capaz de manipular as relações geométricas operacionalmente. (VAN HIELE-GELDOF, 1957, p. 37) (grifo nosso, tradução nossa[42]).

Para que isso ocorra, o professor deverá utilizar material manipulável que possa ajudar boa parte dos alunos a atingir o segundo nível, de dedução informal. Deve ficar claro para os alunos que se trata de uma tarefa matemática e que tem como objetivo lidar com objetos matemáticos, nesse caso, objetos geométricos.

Conforme Van Hiele-Geldof (1957), o segundo nível inicia-se a partir de fenômenos que podem ser ordenados espontaneamente. A partir do momento em que o aluno começa a perceber que um determinado esquema pode ser aplicado em outras situações, o conteúdo geométrico pode ser definido. O pensamento matemático passa a ser central, entretanto ainda não é o momento de se estabelecer conceitos geométricos, a partir de uma estrutura lógica.

Van Hiele-Geldof (1957) observa que, quando a linguagem matemática é utilizada pelo professor antes que os alunos possam compreendê-la, eles não desenvolvem a intuição matemática. Eles passam a trabalhar por analogia, por meio de uma espécie de “sensação” e procuram adivinhar a resposta esperada sem compreender o contexto lógico envolvido na situação estudada. Segundo a autora, a linguagem matemática só fará sentido para o aluno, se for proveniente de uma experiência significativa, levada a um nível consciente, acompanhado de uma estrutura de linguagem adequada, fornecida pelo professor.

A autora orienta que o professor proporcione aos alunos experiências que resultem na necessidade de ordenação e de raciocínio lógico. Durante o desenvolvimento das

---

[41] M.J. LANGEVELD. Inleiding tot de studie der paedagogische psychologie van de middelbareschoolleeftijd. Groningen 1954.

[42] the learning process in a child who is studying geometry clearly follows a discontinuous course. The teacher then will have to allow for variations in pace in order to bring as many pupils as possible to the second level of thinking. This level is reached when the pupil is able to manipulate geometric relations operationally.

primeiras tarefas, o pensamento das crianças é muito diferente do raciocínio lógico matemático. As demonstrações das crianças são primárias, por isso não é possível exigir delas uma maneira lógica de raciocinar. Cabe ao professor ensiná-las a raciocinar logicamente. Porém, segundo a autora, isso não acontece simplesmente expondo o aluno a um sistema dedutivo, estruturado logicamente. O professor deve ser paciente, pois a ordenação lógica se desenvolve espontaneamente. Segundo a autora, para Freudenthal, a qualidade pedagógica mais importante é a paciência. O professor deve aguardar que o aluno faça as suas próprias descobertas. Segundo ele, "o segredo da geometria é a palavra 'porquê'" (VAN HIELE-GELDOF, 1957, p. 48) (tradução nossa[43]).

> Assim, é importante que o professor pergunte como desenvolver a motivação dos alunos com a ajuda do assunto. Levantar esta pergunta nos leva ao domínio conjunto da pedagogia e da psicologia. Como uma maneira de conseguir isso eu recomendo: comece com a fala cotidiana e, lentamente, avance para a linguagem matemática; consulte situações que são conhecidas pela criança. Em geometria, o último significado refere-se a observações de figuras relacionando-as a um modo geométrico de vê-las. (VAN HIELE-GELDOF, 1957, p. 48) (tradução nossa[44]).

Segundo Van Hiele-Geldof (1957), a didática deve estar de acordo com os objetivos de ensino e, no caso da geometria, fundamentada em Freudenthal, ela observa que "é consenso geral que a aprendizagem de geometria é um meio de deixar as crianças experimentarem o poder da mente humana, ou seja, de sua própria mente." (VAN HIELE-GELDOF, 1957, p. 58) (tradução nossa[45]). Para a autora, as tarefas elaboradas pelo professor devem levar em consideração a idade e o nível mental das crianças, pois a capacidade de análise delas aumenta com a idade. Além disso, é necessário tempo para que ocorra uma formação correta de associações. Um conteúdo novo não deve ser iniciado antes que o anterior tenha sido compreendido.

Segundo a autora, o contexto das tarefas é essencial para a elaboração de conceitos. Para ela, a relevância de um contexto depende do observador. Por exemplo, o piso de uma sala é visto de formas totalmente diferentes por um casal de bailarinos, por um arquiteto e por um matemático. Em situações de ensino e de aprendizagem, o próprio estabelecimento de um contexto já provoca uma estruturação de conceitos.

---

[43] The secret of geometry is the word "why".

[44] Thus it is important for the teacher to ask how to develop pupil motivation with the help of the subject matter. Posing this question leads us to the joint domain of pedagogy and psychology. As a way of achieving this I recommend: Start with everyday speech and slowly proceed to mathematical language; refer to situations that are known to the child. In geometry, the latter means referring to observations of figures and relating these observations to a geometric way of viewing them.

[45] it is the general consensus that learning geometry is a means of letting children experience the power of the human mind, i.e. of their own mind. The goal of teaching geometry is focused upon exact thinking.

Quanto ao conhecimento matemático, Van Hiele-Geldof (1957) utiliza a descrição de Berghuys (1952)[46]. Para esse autor o conhecimento matemático não é empírico. Embora a matemática resulte de uma esquematização de dados empíricos, como ciência ela é o estudo dessa esquematização. O conhecimento matemático é diferente do conhecimento empírico. Pode-se dizer que a matemática é um conhecimento da mente, assim como do mundo, não um conhecimento de um simples tipo *a priori*, mas do nosso entorno empírico. Isso pode ser tomado como um ponto de tangência entre o empírico e o intelectual, ou seja, para a compreensão da matemática como uma atividade humana.

Segundo a autora, essa compreensão do conhecimento matemático pode orientar a ação do professor. A ação orientada é um recurso para fazer o aluno evoluir. A elaboração do conhecimento, a partir de ações que já foram adquiridas, pode favorecer:

> 1) uma estruturação mais refinada da estrutura percebida;
> 2) uma visualização da estrutura percebida como uma estrutura componente de outra estrutura;
> 3) a capacidade para expandir a estrutura percebida;
> 4) a capacidade de reconhecer o isomorfismo da estrutura percebida com uma estrutura já conhecida (VAN HIELE-GELDOF, 1957, p. 67) (tradução nossa[47]).

Do ponto de vista didático, o professor deve apontar para que os seus alunos possam:

> 1) construir estruturas de percepção em um sentido geométrico;
> 2) diagnosticar essas estruturas como estruturas que compõem outras mais complexas;
> 3) ampliar essas estruturas à medida que o contexto o permita;
> 4) reconhecer os elementos correspondentes nas estruturas isomórficas. (VAN HIELE-GELDOF, 1957, p. 68) (tradução nossa[48]).

Van Hiele-Geldof (1957) diferencia três tipos de estruturas para os objetos: a global, a geométrica visual e as estruturações mais abstratas. Segundo a autora, a estrutura global está presente nas coisas ao nosso redor, antecede a análise no sentido geométrico e não precisa ser igual para todos. A estrutura geométrica visual é obtida por meio da análise de objetos em um contexto geométrico, a partir de verdades empíricas, e as estruturações mais

---

[46] J.J.W. Berghuys, S.J.I. Grondslagen van de Ganschouwelijke meetkunde. Groningen 1952.
[47] 1) a more refined structuring of the perceived structure;
2) a viewing of the perceived structure as a component structure of another structure;
3) the ability to expand the perceived structure;
4) the ability to recognize the isomorphism of the perceived structure with an already known structure.

[48] 1) that his pupils can build perception structures in a geometric sense;
2) that they will diagnose these structures as component structures of more complex ones;
3) that they will expand these structures in so far as the context permits;
4) that they learn to recognize corresponding elements in isomorphic structures.

abstratas do pensamento, propriedades de figuras, são estabelecidas pelos alunos a partir da estrutura geométrica visual. Os alunos demonstram que compreenderam a estrutura geométrica quando se tornam capazes de compreender uma figura como um todo.

O professor pode promover a estruturação do pensamento a partir de contextos adequados, como a ligação lógica das propriedades, nos quais as estruturas visuais evoluem para a estruturação do pensamento. Conforme Van Hiele-Geldof (1957) é muito importante que os alunos tenham um entendimento correto do contexto estabelecido pelo professor, do contrário uma estruturação espontânea pode deixar de acontecer.

A construção, o diagnóstico, a ampliação e o reconhecimento de estruturas são um meio para o professor elevar o nível de pensamento de seus alunos. Cabe ao professor estabelecer o conteúdo que deve ser aprendido. A transição de um nível de pensamento para o seguinte só pode ocorrer após a formulação de uma quantidade significativa de associações (VAN HIELE-GELDOF, 1957).

Segundo Van Hiele-Geldof (1957), para que o professor obtenha êxito na formação dessas associações, independentemente da estratégia metodológica escolhida por ele, é necessário que o aluno forme novas estruturas por meio da análise das que já são conhecidas e que foram colocadas pelo professor em um contexto, no caso do trabalho de Dina Van Hiele-Geldof (1957), do contexto geométrico. A autora também observa que, durante o processo de formação das estruturas mais abstratas, o aluno aprende uma nova linguagem, uma linguagem técnica.

Dina Van Hiele-Geldof (1957) trata das estruturas que servem como ponto de partida para a criança começar a trabalhar com o conhecimento geométrico a partir de Van Hiele (1957). Ele considera que o *insight* na aprendizagem "é apresentado como uma organização sensível do campo mental e de percepção, como uma nova geração de estruturas mentais e perceptivas" (Van Hiele 1957, p. 14) (tradução nossa[49]). As estruturas mentais são estabelecidas a partir de relações que podem ser acompanhadas de outras relações que o aluno pode procurar a partir de relações anteriores, fazendo uso operacional delas.

Cabe ao professor a organização de situações que favoreçam ao estabelecimento de relações, ou seja, do processo de ensino e de aprendizagem. Segundo Van Hiele-Geldof (1957), o processo de ensino e o processo de aprendizagem do professor não podem ser confundidos. A autora observa que, quando o professor coloca seus alunos diante de uma situação de aprendizagem, tanto o professor como os alunos se encontram em um

[49] está presentado como una organización sensata del campo mental y perceptivo, como una generación de nuevas estructuras mentales y perceptivas.

processo de aprendizagem. A aprendizagem do professor está relacionada ao processo de ensino. É um processo de didatização. Segundo a autora, “a mudança na ‘noção de educação’ exige uma relação totalmente diferente entre professor e aluno” (VAN HIELE-GELDOF, 1957, p. 178) (tradução nossa[50]).

Para Van Hiele-Geldof (1957), apenas o conhecimento da pedagogia não fornece suporte suficiente para obter bons resultados no ensino da matemática, na didática da matemática. A didatização investiga como o professor ensina, como ele proporciona ao aluno formas de pensar matematicamente. Essa investigação não pode ser feita apenas por meio da observação de momentos estanques. O suporte necessário para que o processo de aprendizagem ocorra deve ser buscado em diferentes meios, como: a psicologia da aprendizagem, a pedagogia, a didática geral, a psicologia infantil e a própria matemática, além de conhecimentos de semântica.

Um dos principais objetos do processo de aprendizagem do professor é o processo de aprendizagem individual dos alunos. É na explicação do professor que esse objeto toma uma estrutura diferenciada relacionada ao ensino. Ensinar é uma ação intencional que abrange um momento de pensar. É um momento teórico-prático. Quando essa ação ocorre de modo reflexivo, ela se torna diferenciada. Ela adquire estruturas de explicação que têm um aspecto de ensino na forma de pensamento prático-prático[51].

Se o pensamento teórico-prático for dirigido apenas para a ação do professor, ele levará em conta apenas um aspecto didático, a transferência do assunto. Por outro lado, se toma a situação de ensino como uma ação recíproca, “o pensamento teórico-prático conduz a elaboração de estruturas que pertencem à essência do ensino. Então a didática está sendo colocada em linha com as humanidades” (VAN HIELE-GELDOF, 1957, p. 193) (tradução nossa[52]), ou seja, ela leva em consideração o ensino e a aprendizagem. Existem porém outros fatores que influenciam no processo de ensino e não estão relacionados ao assunto a ser ensinado como, por exemplo, o pensamento dos alunos. Para tomar decisões que considerem o pensamento dos alunos, o professor terá que observar, teorizar, experimentar. O pensamento dos alunos é um fator que deve ser identificado na situação de ensino. Tem que ser sentido e percebido no contexto educacional.

---

[50] the change in the "notion of education" requires a totally different relationship between teacher and pupil.

[51] Segundo Dina van Hiele Geldof (1957) fundamentada em Langeveld é quando a ação é o objeto de estudo: "como faço para lidar com o martelo?" (...) "o aspecto da didática" está na fase em que ele diz: "Eu faço isso para um lado e eu faço desse jeito e ele funciona muito bem."

[52] the theoretico-practical thinking leads to a formation of structures that belong to the essence of teaching. Then didactics is being placed in line with the humanities.

Segundo Van Hiele-Geldof (1957, p. 194), o pensamento dos alunos só se torna um meio de organização da ação didática, quando o professor se direciona “para as características da gênese do pensamento e para os níveis de pensamento. Dessa forma, o professor toca a essência de um princípio organizador importante: a ordenação do assunto, de acordo com os níveis de pensamento” (tradução nossa[53]). Em outras palavras é quando o professor guia a ação do aluno, tendo em vista os níveis de pensamento e o conteúdo.

No resumo de sua tese, Van Hiele-Geldof (1957) apresenta uma lista de princípios. Entre eles, os que interessam a este trabalho são:

1. Para que ocorra a aprendizagem é desejável verificar se mais de um nível de pensamento está envolvido no estudo do tema; que níveis devem ser alcançados para atingir o objetivo do estudo; como a concretização dos níveis de pensamento pode ser abordada de forma didática.
2. Para a formação de conceitos, é importante utilizar os esquemas que pertencem à estrutura de pensamento formado durante o período de estruturação no processo de aprendizagem.
3. A didatização é capaz de investigar profundamente a gênese do pensamento e analisar os processos de aprendizagem na escola.
4. Só tem sentido perguntar “o que você vê?” quando se tem certeza de que o aluno compreende o contexto da resposta.
5. É desejável analisar metodologias na perspectiva matemática, psicológica e didática, para se determinar em que medida elas diferem da didática da matemática.

A descrição do trabalho desenvolvido por Dina Van Hiele-Geldof (1957) mostra a reflexão da autora com relação ao papel do professor na transição dos alunos de um nível de pensamento para o subsequente, que posteriormente resultou na proposição por Van Hiele (1986) das fases do processo de aprendizagem e da teoria dos níveis (Modelo de Van Hiele).

Nessa descrição também encontram-se indícios de aspectos relevantes da Educação Matemática Realística: o papel dos contextos na elaboração do conhecimento

---

[53] towards the characteristics of the genesis of the thinking and towards the levels of thinking. In this way, the teacher touches upon the essence of an important organizing principle: the ordering of the subject matter according to the levels of thinking.

matemático; o processo de aprendizagem do professor com relação ao ato de ensinar, que Freudenthal posteriormente define como didatização; a descontinuidade no processo de aprendizagem; o papel da linguagem para a elaboração do conhecimento; a relevância dos contextos para a elaboração de conceitos; a unidade dos processos de ensino e de aprendizagem.

4.1.2 Pierre Van Hiele

Pierre Marie Van Hiele foi orientado por Hans Freudenthal. Na tese, "De Problematiek van het inzicht. Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof" (O problema do *insight.* Uma conexão com a compreensão dos estudantes na aprendizagem da geometria), ele apresenta um estudo a respeito do *insight*[54] no campo da didática e, mais especificamente, no ensino da geometria. O autor observa, porém, que os resultados obtidos indicam que não existem diferenças essenciais entre o "*insight* em geometria" e o "*insight* na matemática em geral". Para o autor, pode-se dizer que existem também muitos pontos em comum entre o "*insight* na matemática em geral" e o "*insight* em conteúdos não matemáticos". Na tese, ele analisa o *insight* em um contexto didático[55] destacando o papel do professor. Conforme o autor, um modo de implementar as ideias apresentadas por ele pode ser encontrado no estudo de Van Hiele-Geldof (1957), trabalho ao qual ele se refere repetidamente ao longo do seu estudo (VAN HIELE, 1957).

Segundo Van Hiele (1957, p. 1), "diz-se que uma criança tem *insight* em um determinado campo da geometria quando, a partir dos dados e relações geométricas que são fornecidos, é capaz de chegar a uma conclusão em uma situação que nunca tinha enfrentado antes" (tradução nossa[56]). Para o autor, de modo geral, o *insight* "é reconhecido como tal quando o sujeito atua correta e intencionalmente frente a uma situação nova" (tradução nossa[57]).

---

[54] Na tradução para o espanhol a palavra "inzicht", em inglês "insight", foi traduzida como "compreensão", pois não tem uma tradução aceita por unanimidade em espanhol, assim como não existe uma tradução para o português. Devido à especificidade dessa palavra decidiu-se manter a palavra em inglês *insight*.

[55] Para o autor, a didática pertence ao mundo das experiências, ele acredita que o estudo do *insight* deve ser baseado em experiências objetivas, em experiências acessíveis a qualquer investigador sério. A tese dele foi elaborada mediante experiências objetivas.

[56] Se dice que un niño tiene comprensión en un determinado campo de la geometría cuando, a partir de los datos y relaciones geométricas que se le suministran, es capaz de llegar a una conclusión en una situación con la que nunca se había enfrentado antes.

[57] se reconoce como tal cuando el sujeto actúa adecuada e intencionadamente ante una nueva situación.

Ele também observa que o *insight* e as situações de aprendizagem estão muito próximos. Depois de certo tempo em situação de aprendizagem, a pessoa torna-se capaz de atuar de maneira adequada, frente a situações que não surgiram durante o processo de aprendizagem. Pode-se dizer que aprender implica em adquirir *insight*. Sendo assim, durante as situações de ensino, é indispensável que o professor atue de maneira adequada para que haja *insight*.

O modo como o *insight* se manifesta é muito importante para o ensino. Quando encontramos nas escolas alunos que se contentam em aprender fatos e métodos sem compreensão, estamos diante de um problema, pois frequentemente o homem procura atuar adequadamente em situações novas e, quando isso não acontece, indica que algo não está certo. Nesse caso, é necessário investigar o que não está adequado e buscar meios para resolver o problema. Pode-se dizer que os trabalhos de Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957) são uma tentativa de buscar respostas para as dificuldades encontradas por alunos e professores durante o processo de ensino e de aprendizagem da matemática em geral e na da geometria em particular.

Identificar os problemas encontrados pelos estudantes não é uma tarefa simples, pois em situações de ensino e de aprendizagem nem sempre uma resposta certa indica aprendizagem. A principal dificuldade para reconhecer a intenção do aluno é o professor conseguir olhar para a ação dele sem a influência de seu próprio olhar. A dificuldade de emitir um juízo de valor, com relação à resposta do aluno, acaba limitando os elementos apresentados a ele de modo que se reduz a quantidade de respostas corretas. Por isso, os problemas apresentados pelos professores se reduzem frequentemente à aplicação de regras conhecidas, em casos reconhecíveis, por meio de problemas que não têm o aspecto de novidade e podem ser resolvidos em um baixo nível de compreensão.

Segundo Van Hiele (1957), o *insight* é um dos objetivos do ensino da matemática. Por isso o professor precisa criar condições nas quais o *insight* possa acontecer. A relação entre o professor e o aluno deve ser de confiança, pois o *insight* ocorre por meio das informações dadas pelo professor que resultam na sistematização do assunto. É o professor que guia o processo de aprendizagem, a partir das respostas dos alunos.

Van Hiele (1957) também destaca a autonomia no processo de aprendizagem, abordado na tese de Van Parreren (1951)[58] a respeito das contradições e da

---

[58] C.F. VAN PARREREN. Intentie en autonomie in het leerproces. Amsterdam 1951.
— De stratiformiteit van het denken I. Ned Ts. v. d. Ps. VII.
— Idem II. Ned. Ts. v. d. Ps. VIII.

colaboração entre o pensamento intencional e autônomo, ou seja, proposital e independente. Ele cita que, para o autor, a autonomia é um processo sem relação de subordinação direta com a intenção. Quando esse processo for perturbado por um processo de neutralização, tem-se uma interferência. Esta só se justifica se a autonomia estiver conduzindo ações inadequadas.

Para Van Parreren (1951), a aprendizagem é um processo que ocorre em diferentes estratos, ou seja, em camadas. Os processos em execução no estrato básico são autônomos, enquanto o processo de execução no estrato superior ocorre por meio de intenções racionais. Na aprendizagem inicial, por exemplo, dos números, a criança recita livremente as palavras um, dois, três e mostra os supostos objetos de contagem sem uma relação de ordem, por isso "conta" os objetos mais de uma vez e repete palavras. À medida que vai elaborando o conceito de número, ela compreende a necessidade de utilizar relações de ordem, inclusão e biunívoca. A criança passa, então, a ordenar os objetos mentalmente e relaciona-os à palavra que representa a quantidade correspondente. O *insight*, na aprendizagem, desenvolve-se sob a influência do estrato racional, por meio do qual se modifica a estrutura material da ação, e isso resulta no processo de aprendizagem. Na tese, o autor também utiliza as considerações de Selz (1913, 1922)[59], um dos pioneiros da psicologia cognitiva, que discute as fases existentes em um processo mental racional[60].

Van Hiele (1957) observa que várias abordagens da psicologia da aprendizagem têm encontrado adeptos entre os matemáticos. Também é possível afirmar que quase todo enfoque didático da matemática está relacionado a alguma abordagem da psicologia da aprendizagem. Com isso, pode-se dizer que a didática da matemática tem-se desenvolvido a partir de elementos teóricos de outras áreas do saber; mas que nem todas as teorias da psicologia são coerentes com os processos de ensino e de aprendizagem, como, por exemplo, alguns pressupostos da psicologia evolutiva, especialmente a ideia da maturação biológica. Conforme o autor, para a formação pedagógica, é importante ter uma visão precisa da colaboração entre psicólogos e professores. Segundo ele, alguns estudos precisam avançar para justificar a continuação da experimentação por parte dos professores.

— A Viewpoint in Theory and Experimentation on Human Learning and Thinking. Acta Psych. X, n° 4.

[59] O. SELZ. Über die Gesetze des geordneten Denkverlaufs I. Stuttgart 1913.

— Zur Psychologie des produktiven Denkens und des Irrtums. Bonn 1922.

— Die Aufbauprinzipien der phenomenalen Welt. Acta Psych. V, 4.

— Von der Systematik der Raumphänomene zur Gestalttheorie. Arch für die ges. Psych. Tomo 77, Parte 3/4.

[60] Segundo van Hiele (1957), a psicologia do pensamento de Selz (1913, 1922) consiste em uma abordagem que favorece a aprendizagem com compreensão. Para Selz, parte do pensamento é desenvolvida por meio de antecipações esquemáticas inconscientes. É uma teoria que precisa de uma base experimental.

Na tese, após comentar a relação entre a psicologia e a didática, Van Hiele (1957) aborda o surgimento do *insight* na geometria. Nela as estruturas criadas se transformam em um ponto de partida da nova estruturação. No processo de elaboração da compreensão em geometria, no primeiro produz-se uma estruturação do campo perceptivo; no segundo, a estruturação do campo perceptivo une-se a diferentes palavras; no terceiro, a estruturação perceptiva vai se convertendo paulatinamente em estruturação linguística e, no quarto, cria-se certa autonomia na estruturação linguística. Quando os três primeiros momentos estão contemplados, pode-se dizer que houve *insight*. No quarto momento, chega-se a uma estruturação maior, a um *insight* maior. As palavras que se converteram em bem comum, e podem servir de ponto de partida. À medida que as palavras passam a evocar um raciocínio lógico o raciocínio, vai perdendo gradualmente a carga linguística e a linguagem vai sendo substituída cada vez mais por símbolos para os quais o significado está fixo de um modo mais exato que a própria palavra. No final, o raciocínio é substituído em grande parte por operações com símbolos. Segundo Van Hiele (1957), na prática, a formação do *insight* em geometria ocorre por meio do interesse por um determinado tema, da oportunidade de recapitulação, da prática com o material didático, do contato pessoal com os outros e do mecanismo de controle.

Com relação ao processo de aprendizagem da matemática, Van Hiele (1957) distingue dois tipos de *insight*: um, baseado na estruturação do campo perceptivo e o outro, nos elementos dos algoritmos, denominados, respectivamente, aluno do “tipo estruturante”, aquele que compreende a estrutura do pensamento, e do “tipo algorítmico”, o que compreende o desenvolvimento dos algoritmos. Para um aluno algorítmico apreender rapidamente um determinado assunto, basta conhecer as regras básicas do algoritmo. Frequentemente esse tipo de aluno utiliza definições próprias e trabalha com algoritmos próprios. Por outro lado, os alunos do tipo estruturante não dominam muito bem os algoritmos. Não são muito bons em cálculos e, em alguns casos, são mais rigorosos com os resultados de um problema do que o próprio problema pede. Os alunos do tipo algoritmo lidam bem com as convenções obrigatórias da matemática enquanto os estruturantes se envolvem com as regras, quando não é necessário, eles são capazes de solucionar um problema a partir da sua estrutura, mas tem dificuldade para desenvolver o algoritmo associado à resolução do problema, por exemplo, sabem identificar que duas retas são perpendiculares, mas apresentam dificuldades para lidar com o algoritmo que comprova a perpendicularidade.

Na tese, Van Hiele (1957) discute como se forma o *insight*. Segundo o autor, a formação do *insight* pode ocorrer da seguinte forma: inicialmente o aluno age de maneira totalmente aberta no campo perceptual correspondente, depois começa a desenhar livremente o problema determinado; no segundo nível, a criança começa a se concentrar na resolução; no terceiro tem-se o *insight* e o campo perceptivo toma nova estrutura, com base nas percepções do primeiro nível; no quarto nível, o aluno faz testes de controle. Ele tenta utilizar a compreensão adquirida nas situações criadas com variação dos dados originais. Segundo o autor, essa análise da formação de *insight* está de acordo com Langeveld (1954)[61], que acredita que obter um *insight*, ou seja, aprender determinado conceito, não é um processo repentino.

Para Van Hiele (1957), o *insight* é vital para a aprendizagem, por isso também é necessário refletir a respeito da organização do ensino. Quais são as condições para se desenvolver o *insight*? A forma como o ensino está organizado permite que tanto os alunos estruturantes quanto os algorítmicos tenham um bom histórico acadêmico? Para colaborar com a reflexão a respeito do desenvolvimento do *insight* e de boas habilidades matemáticas, o autor distingue três tipos de alunos: 1) que dispõem das condições necessárias e têm habilidades que permitem alcançar uma boa compreensão matemática; 2) que têm um campo perceptivo bem estruturado de modo a adquirir uma compreensão suficiente da matemática, mas têm pouco interesse pelos algoritmos; 3) que não possuem o campo perceptivo nem pensamento bem estruturado, mas são capazes de utilizar algumas regras de cálculo em situações indicadas. Para esses alunos, o professor precisa oferecer diferentes "métodos de pensamento". O autor observa, ainda, que todas as classificações dos tipos de pensamento dos alunos, feitas por ele na tese, têm uma justificativa psicológica para descrever uma variedade de elementos que permitem estudar os elementos relacionados ao fenômeno para o qual foram idealizados.

Nesse caso, o fenômeno estudado é a organização didática. "Um ensino focado na rápida assimilação de algoritmos elimina os alunos do segundo tipo e mantém por um longo tempo os do terceiro tipo. Um ensino que enfatiza a estruturação do campo perceptivo envolve os do segundo tipo, porém depressa elimina os do terceiro" (VAN HIELE, 1957, p. 80, tradução nossa[62]). Isso ocorre porque os alunos do segundo tipo compreendem a estrutura lógica do assunto, mas não lidam bem com os algoritmos, enquanto os alunos do terceiro tipo precisam ter acesso a diferentes algoritmos. Segundo o autor, é muito delicado

---

[61] M.J. LANGEVELD. Inleiding tot de studie der paedagogische psychologie van de middelbareschoolleeftijd. Groningen 1954.

[62] Una didáctica enfocada a la rápida asimilación de algoritmos elimina los alumnos del segundo tipo y mantiene durante mucho tiempo a los del tercer tipo. Una didáctica que pone el énfasis en la estructuración del campo perceptivo implicará a los del segundo tipo pero eliminará pronto a los del tercero.

decidir o enfoque que será dado ao ensino, pois, regularmente, as classes são heterogêneas e só é possível reconhecer a categoria de cada aluno ao longo do curso. Sendo assim, a prática de ensino pode ser contrária à personalidade do aluno. Por isso encontram-se estudantes sobrecarregados com a quantidade de algoritmos que precisam estudar.

Segundo o autor, uma organização do ensino focado na criação de tipos algorítmicos tem efeito prejudicial para o desenvolvimento da compreensão dos alunos e pode acarretar na formação de pessoas extremamente vinculadas aos métodos de cálculo. Isso pode ser observado a partir da falta de visão que alguns matemáticos têm da coesão entre a geometria e o espaço, além da falta de interesse na forma com que a matemática se manifesta em outras ciências. Para atender aos alunos do primeiro e do segundo tipo, é importante receber um ensino focado no tipo estruturante. Lamentavelmente, porém, as circunstâncias encontradas nas escolas oferecem possibilidades limitadas para desenvolver um ensino que atenda simultaneamente aos três tipos de alunos.

De acordo com Van Hiele (1957), para que a didática contribua para um bom funcionamento do *insight*, existe a necessidade da participação efetiva do aluno nas situações de ensino e de aprendizagem. É importante o professor contar com mecanismos de avaliação que permitam identificar os progressos e o *insight* de maneira que possa ajudá-los a superarem as dificuldades identificadas. Ele observa que o instrumento de avaliação "prova escrita" é restrito, pois não fornece elementos suficientes para concluir se existe uma compreensão total dos aspectos avaliados. Uma alternativa para identificar os obstáculos encontrados pelos alunos é a conversa oral, individual, porém esse é um método que tem algumas restrições devido ao tempo necessário para desenvolvê-lo.

Com relação à prática diária em sala de aula, ele sugere que os professores apliquem a teoria de Selz (1913, 1922)[63], ou seja, oferecer ao aluno oportunidades ricas para formar estruturas que podem ser utilizadas em situações-problemas, conforme foi explorado na tese de Dina Van Hiele-Geldof (1957). Para isso ocorrer, a primeira coisa a ser feita pelo professor é verificar os conceitos que os alunos têm do objeto matemático em questão e dos elementos que o compõem. Então, a situação de ensino e de aprendizagem se desenvolve buscando a equivalência entre o mundo das experiências e o mundo da matemática, de modo que o aluno perceba que o último mundo provém do primeiro.

Van Hiele (1957) observa que o conceito de níveis de pensamento é um fator importante para a organização da situação didática. Segundo o autor, existem dois

[63] O. SELZ. Über die Gesetze des geordneten Denkverlaufs I. Stuttgart 1913.
______. Zur Psychologie des produktiven Denkens und des Irrtums. Bonn 1922.

aspectos que tornam esse conceito relevante: o primeiro é relativo ao caráter do *insight*, que é uma nova estrutura mental, e o segundo diz respeito à ordenação mental, ou seja, um aluno que se encontra no primeiro nível não consegue acompanhar estudos em outros níveis de conhecimento. Ele afirma que a concretização dos níveis constitui a garantia de que o processo de aprendizagem será duradouro. Os professores, porém, que não entendem o verdadeiro caráter da dificuldade dos alunos buscam meios de evitar erros, sem levar em consideração as ações necessárias para a mudança de um nível para o próximo. Observa-se que pode ocorrer que uma técnica esteja baseada em um nível de pensamento, e este tenha muitas compreensões gerais e, talvez, muitas técnicas. Em geral, é mais difícil perder os níveis de pensamento e mais fácil perder as técnicas, ou seja, é mais fácil esquecer procedimentos passo a passo do que conhecimentos elaborados pelo sujeito.

A aquisição de um nível de pensamento é um processo mais trabalhoso do que a aquisição de *insight*. Para adquirir *insight* é necessário obter determinada coesão, uma estruturação diante dos métodos de pensamento conhecidos. Para alcançar um nível, o aluno deve passar para novas formas de pensamento que são alcançadas, após um processo individual de reflexão a respeito do conhecimento em pauta. O professor não pode oferecer muita ajuda nessa transição. Cabe ao professor começar a utilizar a linguagem do próximo nível, de modo que o aluno se sinta desafiado a entendê-lo. Isso pode levá-lo a superar obstáculos. Para evitar desânimos, o professor pode eventualmente retomar problemas de um nível mais baixo. Ao retomar o problema, porém, deverá utilizar explicações do nível superior.

Para tratar do lugar que ocupa a compreensão no pensamento racional, Van Hiele (1957) retoma o conceito de atuar com *insight* e diz que ele pode ser traduzido, por atuar com base em uma estrutura adquirida. Segundo Van Hiele (1957), pode-se dizer que a matemática se ocupa das estruturas em si, depois de se desvincular dos objetos, no entanto, é impossível livrar a matemática de estruturas que tenham se convertido em objetos de pensamento, que, por sua vez, tenham se fundido em estruturas superiores. Esse é um processo interminável, visto que os matemáticos desejam cada vez mais *insights* que seguirão elegendo estruturas como objetos e que resultarão em uma estrutura superior. O ensino da matemática deverá se ocupar da análise dos objetos e da busca por estruturas derivadas dessas análises.

Para Van Hiele (1957), o conceito de *insight* em estruturas implica na possibilidade de um *insight* geral, que aborda cada vez mais um *insight* em algo específico. Para ele, o *insight* em matemática refere-se a um conceito muito complexo. Seria possível dizer que alguém tem um *insight* em matemática, se dispõe de muitas estruturas que são importantes para a matemática. Ele indica que, em matemática, pode-se ver assuntos como fração, superfície, congruência e multiplicação serem baseados em estruturas coincidentes. Do ponto de vista didático, isso quer dizer que se tem de buscar materiais de apoio que resultem na formação de estruturas e ajudem a reestruturar o campo complexo. Além disso, encontram-se estruturas comuns em diferentes conteúdos, que também têm em comum as estruturas baseadas nas mesmas operações estruturantes. Sendo assim, ele observa que a inteligência está em grande parte determinada pela destreza de estruturar, que se baseia na arte de analisar. Para o autor, a geometria é o melhor conteúdo de matemática para descobrir a equivalência entre *insight* e pensamento estruturante.

Esse foi um dos motivos que o levou a desenvolver sua tese a respeito do *insight* dos alunos em geometria. Outro motivo que pode ter levado o autor a discorrer a respeito do tema foi a observação de que a geometria estava sendo subestimada, sob a justificativa de ter pouca utilidade para os alunos. Para ele, essa subestimação não tinha sentido. Ele diz que, antes de suprimir a geometria, deveria ter sido feito um estudo para verificar se as orientações para a prática pedagógica não necessitavam de uma reorganização dos conteúdos. Além disso, ele indica que nenhum outro conteúdo de matemática atribui tanta atenção ao encadeamento de teoremas. Nenhum outro atribui tanta importância para a universalidade das demonstrações. Ele considera que, se se quer convencer os alunos de que um método tem sentido, tem-se de mostrar exemplos. Os alunos só irão adotar um método matemático a partir do momento que estiverem convencidos do seu sentido. Os conteúdos de geometria são uma forma de convencer os alunos da validade dos métodos matemáticos.

Na tese de Pierre Van Hiele (1957), encontra-se uma discussão a respeito da formação de *insight*. A reflexão do autor ocorre com base nos dados coletados por Van Hiele-Geldof (1957). A descrição desse trabalho mostra que o autor compreende que o *insight* pode ser reconhecido quando o aluno é capaz de chegar a uma conclusão em uma situação que não havia visto antes. Ele destaca o papel da linguagem para a elaboração do conhecimento. A reflexão do autor a respeito dos níveis de pensamento e do papel do professor na transição entre os níveis resultou no que pode ser encontrado de forma sistematizada no livro "Sructure and insight: a theory of Mathematics Education" a respeito dos níveis de pensamento e das fases do processo de aprendizagem. O autor também trata da orientação guiada, da descontinuidade no processo de aprendizagem, da didatização e da necessidade de adequação dos instrumentos de avaliação escolar.

4.2 “Structure and insight: a theory of Mathematics Education”

Após encerrar a tese Pierre Marie Van Hiele continuou estudando as estruturas de pensamento e o *insight* no processo de ensino e de aprendizagem da geometria em especial e da matemática em geral. Em 1986 foi publicado o livro “Structure and *insight*: a theory of Mathematics Education”. O objetivo do livro é contribuir com a melhoria do ensino. Ele trata da “teoria de níveis de pensamento de Van Hiele”. Segundo o autor, para compreender como os níveis podem ser utilizados na prática, é necessário uma compreensão da teoria por trás deles. Nele, o autor retoma aspectos que foram abordados na sua tese de 1957.

Uma questão essencial explorada pelo autor nesse livro é a sua compreensão de estrutura. Para ele uma estrutura é reconhecida pelo rigor[64]. A propriedade mais importante de uma estrutura é a possibilidade de ser estendida em função da sua composição. Outra propriedade é ter objetividade. Diferentes pessoas podem continuar uma estrutura da mesma maneira, por exemplo, podem completar a construção de uma forma geométrica espacial ou dar continuidade a uma sequência numérica. Ela é um fenômeno que permite que tanto os homens quanto os animais atuem em uma situação que não é exatamente a mesma que eles tinham encontrado antes, eliminando a necessidade de efetuar uma quantidade interminável de tentativas e erros. Elas permitem que as pessoas compreendam umas às outras, aqueles que veem a mesma estrutura podem se comunicar e continuar a estrutura da mesma maneira. O autor afirma que, quando “uma pessoa que age com intenção não age de forma aleatória, ela age de acordo com a estrutura que percebe, o que corresponde à sua estrutura mental, a estrutura de sua expectativa” (Van Hiele, 1986, p. 24) (tradução nossa[65]).

Van Hiele (1986) observa que a linguagem é essencial para a elaboração de estruturas de pensamento, sem ela não é possível pensar, não existe o desenvolvimento das ciências. Sua função não é apenas a comunicação, ela também permite aos indivíduos pensar independentemente. A transferência de estrutura em diferentes meios é facilitada pela linguagem.

O interesse de Van Hiele nas questões relacionadas às estruturas de pensamento e ao papel da linguagem na elaboração do conhecimento matemático iniciou-se com o seu ingresso no magistério. No começo da carreira, incomodava-o a dificuldade de

[64] Segundo van Hiele (1986, p. 23) “we have seen structures recognizable because of their rigidity”.
[65] A person who acts with intention does not act at random, he acts according to the structure he perceives, corresponding to his mental structure, the structure of his expectation.

comunicação com os alunos. Segundo o autor existiam conteúdos de matemática, em especial os relacionados à geometria, que, por mais que ele explicasse, os alunos não conseguiam compreender. Com o passar dos anos, ele mudou a estratégia diversas vezes, mas não obteve sucesso. Em um determinado momento veio-lhe a ideia dos diferentes níveis de pensamento.

Segundo Van Hiele (1986), a propriedade mais importante dos níveis de pensamento é a descontinuidade, a incoerência entre as suas estruturas. Para demonstrar a existência de incoerências entre os níveis de pensamento, é necessário mostrar as descontinuidades entre um nível e o subsequente. A transição entre níveis não é um processo de maturação, um processo natural, mas sim o resultado de um programa de ensino e de aprendizagem. Ela só é possível mediante a aprendizagem de uma nova linguagem. O raciocínio em um nível lida com as estruturas do nível anterior, com a rede de conexões existente entre os níveis. Existe uma disposição hierárquica entre os níveis. Não é possível pensar em um nível sem o pensamento do nível anterior. Segundo o autor, um nível mais elevado deriva de um nível anterior.

O autor justifica que utiliza a palavra "estrutura" por duas razões: em primeiro lugar, porque muitas estruturas são visuais, é possível vê-las em muitos lugares e também ter conhecimentos em vários domínios; em segundo lugar, porque muitas estruturas visuais correspondem a estruturas de pensamento e toda estrutura de observação é adicionada a algum *insight*. No entanto, existem exemplos de *insight* que não podem ser lidos a partir de estruturas de um campo visual, mas, por meio de esquemas, elas podem tornar-se visíveis. Segundo Van Hiele (1986), esse é um motivo que justifica o fato de problemas geométricos serem utilizados frequentemente para estudar o *insight*.

Por vezes, em situações de ensino e de aprendizagem, parece que a linguagem utilizada pelo professor não é compreendida pelo aluno. É como se eles estivessem utilizando linguagens diferentes, em níveis de pensamento diferentes. A aprendizagem não ocorre. A dificuldade provém da falta de habilidade do aluno de ver as ligações existentes entre as redes de relações. Neste caso cabe ao professor guiar o aluno para o novo domínio de estudo a partir dos velhos domínios.

Para a matemática, Van Hiele (1986) lista cinco níveis de pensamento:

- ✓ primeiro nível: o nível visual;
- ✓ segundo nível: o nível descritivo;
- ✓ terceiro nível: o nível teórico, com relações lógicas, no caso da geometria geradas a partir de Euclides;
- ✓ quarto nível: a lógica formal, o estudo das leis da lógica; e

- ✓ quinto nível: a natureza das leis lógicas.

Segundo o autor, essa classificação é adequada para uma estrutura matemática; para o processo de aprendizagem, ele ainda acrescenta cinco fases:

- ✓ na primeira fase, das informações, os alunos se familiarizam com o domínio do trabalho;
- ✓ na segunda fase, da orientação guiada, os alunos são guiados por tarefas em diferentes relações da rede que deve ser formada;
- ✓ na terceira fase, da explicitação, os alunos se tornam conscientes das relações e procuram expressá-las por meio de palavras, aprendem a linguagem técnica relacionada ao assunto;
- ✓ na quarta fase, da orientação livre, os alunos aprendem tarefas gerais e encontram seu próprio caminho na rede de relações;
- ✓ na quinta fase, da integração, os alunos constroem uma visão geral a respeito de tudo o que aprenderam, da nova rede de relações.

Após explicitar os níveis de pensamento, o autor apresenta uma abordagem psicológica do assunto. Uma das questões destacadas por ele é o papel dos contextos. Segundo Van Hiele (1986, p. 59), para “compreender claramente um assunto novo, o seu contexto deve ser totalmente evidente” (tradução nossa[66]). Suas observações mostraram que a falta de uma exposição evidente do contexto de uma determinada matéria é uma das maiores carências do ensino. Raramente, no início de um estudo, é dada aos alunos uma exposição nítida do contexto. Algumas vezes existe a intenção de informar o contexto da explicação, porém isso não é suficiente, os alunos têm que aprender fazendo.

Diante de um contexto de nível visual, um tópico pode tornar-se claro para a análise representativa da matéria. Com essas análises podem surgir símbolos. Muitos símbolos são formados a partir da observação das propriedades e da relação temporariamente projetada das imagens. Entretanto, após a explicitação das propriedades e relações por uma análise ou discussão, os símbolos deixam o caráter de imagem e adquirem um contexto verbal e se tornam mais úteis para as operações de pensamento. A comparação dos símbolos em um dado contexto e a descoberta das relações entre eles enriquece os conteúdos e suas aparências são continuamente diferenciadas. Os símbolos estão relacionados ao contexto. Um símbolo pode pertencer a vários contextos e, em geral, tem diferentes conteúdos em cada contexto (Van Hiele, 1986).

---

[66] (…) understand clearly a new subject, its context must be totally clear.

Segundo Van Hiele (1986, p. 61),

> [...] antes de estudar um fenômeno, é aconselhável primeiro determinar, por meio de uma análise, em que contexto o fenômeno aparece como um símbolo. Vou chamar essa análise uma análise fenomenal, mas isso tem pouco a ver com a fenomenologia de Husserl[67] (tradução nossa[68]).

Para ele, o primeiro objetivo do desenvolvimento didático de certo tópico na formação de símbolos pertence ao contexto do tópico envolvido. Posteriormente, esses símbolos serão desenvolvidos em uma rede de relações que definem o segundo nível do tópico.

Depois de algum tempo, os símbolos irão determinar uma direção de pensamento no tópico e na sequência, será possível estabelecer uma orientação para o tópico. Para Van Hiele (1986), quando um símbolo influencia na orientação de um pensamento, o símbolo passa a atuar como um signo. Os signos não existem no início da aprendizagem, não no momento em que os símbolos são formados; os símbolos apenas atuam como uma totalidade de propriedades. Os símbolos obtêm uma característica de signo por meio de um processo de aprendizagem, que pode ser acidental, mas a formação dos signos pode ser favorecida pelo professor mediante orientação. Os alunos devem estar conscientes da orientação e os objetivos de estudos devem estar explícitos. O professor deve guiar o processo de aprendizagem, dar aos alunos a oportunidade de discutir suas orientações e encontrar o seu próprio campo de pensamento.

Van Hiele (1986) observa que, na prática letiva, não é dada muita atenção para os níveis de pensamento. Regularmente os professores iniciam um conceito a partir de um nível de pensamento que ainda não foi atingido por todos os alunos. Essa é uma das principais causas das dificuldades de aprendizagem em matemática. Quando o professor inicia de um nível que os alunos ainda não dominam, estes tornam-se obrigados a imitar a estrutura da ação do professor. Com isso, eles aprendem a reproduzir algoritmos. Aparentemente ele conseguiu compreender, mas em longo prazo o aluno torna-se capaz apenas de reproduzir algoritmos e não consegue aplicar seus conhecimentos em uma nova situação concreta.

Para o autor é fundamental o desenvolvimento de estruturas esquematizadas a partir de estruturas visuais concretas devido ao significado simbólico especial da linguagem.

---

[67] Segundo Husserl (1990, p. 46) fenomenologia "designa uma ciência, uma conexão de disciplinas científicas; mas, ao mesmo tempo e acima de tudo, 'fenomenologia' designa um método e uma atitude intelectual: *a atitude intelectual* especificamente *filosófica*, o *método* especificamente *filosófico"*.

[68] Before studying a phenomenon it is wise first to determine by analysis in what context the phenomenon appears as a symbol. I will call such an analysis a phenomenal analysis, but this has a little to do with Husserl's phenomenology.

Para muitas coisas que não podem ser expressas em palavras, a imagem e o símbolo serão expressos em palavras após a esquematização. Quando as estruturas abstratas são desenvolvidas por meio de estruturas visuais, as imagens são essenciais para a estruturação de contextos ricos. Regularmente as estruturas abstratas formadas têm um conteúdo muito mais rico do que a sua representação verbal.

Van Hiele (1986) observa que, na formação inicial em matemática, os alunos precisam desenvolver ações que promovam a formação de estruturas de pensamento que levam ao desenvolvimento de símbolos que possam orientá-los. As estruturas visuais originais devem gradualmente se transformar em estruturas abstratas que permitam que o aluno resolva uma nova situação-problema, ou seja, as estruturas devem ser reestruturadas. Isso pode acontecer quando certas ações ainda não integradas a uma estrutura simples podem ser executadas; ações sem mutua conexão são executadas sucessivamente; ações são executadas em uma sequência não significativa e também quando temos um problema a resolver, mas não conhecemos as estruturas que pertencem à solução do problema.

Com relação ao papel da linguagem na formação das estruturas, Van Hiele (1986) indica que ela pode ser útil na interação entre o indivíduo e a realidade, no reconhecimento de subestruturas e superestruturas. Segundo o autor, a linguagem está imbuída de uma noção de tempo. De certo modo, o tempo na maioria das vezes é constituído pela linguagem. Ela colabora com a comunicação das estruturas. Estruturas são ampliadas por meio da linguagem. Por exemplo, as pessoas compreendem expressões como "uma ação sádica" ou "Don Juan" sem estar familiarizada com a origem dessas expressões, regularmente a origem é compreendida a partir de histórias mais recentes.

O processo de aprendizagem de uma estrutura ocorre por meio do contato direto com a realidade. Esse contato advém da linguagem que permite a troca de pontos de vista entre as pessoas. Van Hiele (1986) denomina essa fase do processo de aprendizagem como "explicitação". Para o autor, essa fase mostra se o aluno compreendeu a estrutura e sabe trabalhar com ela. Regularmente no início da explicitação são utilizadas estruturas relacionadas à vida diária e ao analisar essas estruturas gradualmente a linguagem técnica passa a ser discutida. A linguagem permite falar a respeito das estruturas e descrever as superestruturas para, posteriormente, obter um nível mais elevado de pensamento. O autor descreve a formação de conceitos a partir de representações e símbolos visuais, segundo ele, diferente de Piaget que desenvolveu investigações relacionadas à psicologia do desenvolvimento. "Todos os estágios de Piaget pertencem a um período, que conduz de um nível de pensamento para o próximo" (VAN HIELE, 1986, p. 100) (tradução nossa[69]). De acordo com Nasser (1993, p. 31), uma questão relevante da Teoria de Van Hiele "é o fato de ela ter se originado em sala de aula, aliando os aspectos cognitivo e pedagógico do ensino de Geometria". Para essa teoria, o "processo de elevação de nível é um processo de aprendizagem, e não depende apenas de maturação". De acordo com essa teoria, "o progresso a um nível mais elevado depende mais de instrução adequada do que de idade ou maturidade" (NASSER, 1993, p. 35).

Quanto às estruturas nos diferentes níveis no ensino da matemática, o autor indica que no primeiro nível, o visual, a linguagem é utilizada para a comunicação e também para auxiliar o pensamento mais preciso sobre a estrutura. Nele o resultado é visível e a linguagem permite falar de observações visuais. O segundo nível, o descritivo, proporciona o pensamento a respeito das estruturas do primeiro nível, em que os símbolos do primeiro nível estão associados com propriedades, e a discussão no primeiro nível ajudará a visualização dessas propriedades. Ao se utilizar a linguagem do segundo nível, nascem novas estruturas, que não eram possíveis antes do desenvolvimento da linguagem do segundo nível. No terceiro nível, o teórico, a linguagem tem um caráter abstrato por estar envolvida com diferentes relações da estrutura. Segundo Van Hiele (1986), os matemáticos também fazem uso de estruturas reduzidas quando eles fazem trabalhos de rotina. Regularmente, quando eles encontram obstáculos inesperados, eles são capazes de retomar a estrutura do terceiro nível.

Para o autor, as estruturas de pensamento são muito importantes. Ele observa que a mudança de uma estrutura para a outra pode trazer um desgaste mental, principalmente quando estruturas que vêm sendo estudadas durante anos são ampliadas e tornam-se parte de uma estrutura mais inclusiva. Durante o período de reestruturação, as estruturas existentes não podem ser eliminadas, pois, enquanto a nova estrutura ainda não está clara, pode haver a necessidade de voltar à antiga estrutura.

Segundo Van Hiele (1986), a essência do conceito de nível de pensamento de um objeto é que cada nível representa algo diferente, para qualquer ciência. Sendo assim, pessoas que estão em níveis diferentes muitas vezes não estabelecem comunicação, elas falam em diferentes contextos. Os símbolos e as palavras em um contexto podem ter significados diferentes para pessoas que não estão no mesmo nível. Em função disso, o autor discorda da opinião daqueles que defendem que o aluno primeiro tem que saber a ordem interna de um campo de conhecimento antes de ser capaz de iniciar os estudos dos temas desse campo. Ele

[69] The stages of Piaget all belong to one period, leading from one level of thinking to the next.

sugere uma inversão de ordem, ou seja, iniciar estudando os assuntos relacionados ao conteúdo para posteriormente efetuar ligação interna. O autor acredita que a situação de ensino deve começar da matemática de alguma forma para depois desenvolver uma análise cuidadosa da estrutura lógica das conexões internas da matemática, ou seja, ele sugere uma inversão didática. A ideia é iniciar de uma situação problema que pode ser matematizada para posteriormente estudar as estruturas matemáticas. Segundo Van Hiele (1986), essa diferença de níveis pode ocorrer em diferentes campos da matemática e também em outras ciências. Em alguns casos, porém, a distinção entre os níveis não é tão simples devido à relação entre diferentes assuntos.

Quanto às fases do processo de aprendizagem para o desenvolvimento de um nível de pensamento, Van Hiele (1986) observa que o assunto a ser estudado é definido a partir do contexto no qual os símbolos da linguagem deverão ser desenvolvidos. Cabe ao professor auxiliar o aluno a desenvolver esses símbolos da linguagem no contexto do assunto que pretende trabalhar.

A primeira fase do processo de aprendizagem sempre começa com a informação. Orienta-se que a conversa inicie a partir da linguagem e de símbolos bem conhecidos, que tornem claro o contexto a ser utilizado. Na segunda fase, da orientação, o professor tem um papel importante, pois cabe a ele auxiliar os alunos a encontrar as relações existentes entre a linguagem simbólica e a estrutura total. Para isso é importante escolher cuidadosamente as tarefas que os alunos irão executar, de modo que ela se torne uma base adequada sobre um nível superior de pensamento. A terceira fase, da explicitação das estruturas envolvidas na atividade, é gerada a partir de discussões em classe. Mediante a orientação do professor, os alunos apresentam as regularidades que encontram. Também cabe ao professor verificar o uso correto da linguagem técnica. Na quarta fase, da orientação livre, eles já conhecem o assunto, suas relações e os símbolos linguísticos adequados. Os alunos deverão sentir-se seguros da sua compreensão e, em tarefas abertas, deverão saber definir as estratégias de resolução. Gradativamente os símbolos irão perder o contexto visual e será estabelecida uma rede de relações do que foi formado. Essa rede de relações tem semelhanças com a rede que se origina a partir das tarefas do primeiro nível que exploram aspectos visuais. Nessa fase, porém, os alunos já serão capazes de fazer uso dessa rede de relações.

Para o autor, o raciocínio depende de uma rede de relações. Essa rede de relações vai sendo formada durante o processo de aprendizagem. Para a teoria de Van Hiele (1986), uma pessoa que não tem uma rede de relações de um determinado assunto à sua disposição está no primeiro nível de pensamento no assunto. É no segundo nível de pensamento que essa rede de relações começa a ser formada. Em situações escolares, a diferença entre o nível de pensamento do professor e o dos alunos pode ser claramente observada quando: 1) o aluno não consegue seguir o raciocínio do professor, ele não compreende a linguagem utilizada e, se é convidado a raciocinar, fica evidente que lhe falta compreensão; 2) o professor se sente impotente, os argumentos utilizados por ele parecem ser inúteis; 3) após um aluno apresentar um nível de desenvolvimento, raramente ocorre retrocesso. Segundo o autor, teorias são construções da mente, elas resultam de um processo mental que não pode ser mensurado, os alunos têm liberdade para escolher suas próprias soluções.

Para Van Hiele (1986), a compreensão, ou seja, o *insight* pode: ser observado quando ocorre uma ação adequada em uma situação nova; ser verificado quando ocorre uma ação sobre uma estrutura estabelecida e novas questões podem ser lidas. Ele também observa que os melhores exemplos de *insight* ocorrem subitamente, eles não provêm necessariamente de situações planejadas.

Para o professor avaliar se houve *insight*, Van Hiele (1986) sugere que ele se certifique se a situação apresentada para o aluno é realmente nova. Para que isso ocorra, é necessária uma boa relação entre o professor e o aluno, pois cabe ao aluno informar ao professor se o *insight* ocorreu ou não. Na prática, porém, regularmente o aluno tenta esconder a falta de *insight* decorando as respostas às perguntas que podem ser feitas. Em função disso, cabe ao professor fazer perguntas que o aluno não espera e que são características do *insight* a ser determinado. A avaliação do *insight* também pode ser prejudicada se: o professor tem uma solução inadequada em vista; se tanto o professor quanto o aluno têm uma solução adequada em vista, mas o primeiro não reconhece a solução do segundo; se o professor gosta mais da sua própria solução. Para, de fato, certificar-se se houve ou não *insight* e minimizar as dificuldades encontradas durante o processo de avaliação, o professor pode apresentar um novo problema com a mesma estrutura, mas com uma forma diferente, com a intenção de verificar se o aluno consegue aplicar o conhecimento adquirido em uma situação nova.

O autor reforça que alguns alunos apresentam dificuldades relacionadas a prova escrita, muitas vezes pode-se ouvir alunos comentando que conseguiram encontrar a solução de uma questão após a realização da prova. Esse é um dos motivos que algumas pessoas utilizam para defender que provas escritas não são apropriadas para avaliar o *insight*, ou seja, para testar a aprendizagem.

Van Hiele (1986, p. 176) considera que a "aprendizagem é a aquisição de novas competências, sob a influência de uma intenção de aprender" (tradução nossa[70]). Segundo ele, essa definição de aprendizagem é uma sugestão de Langeveld (1949)[71], o orientador da tese de doutorado de Van Hiele-Geldof (1957), um pedagogo que exerceu certa influencia no trabalho de Van Hiele (1957). A partir dessa definição, o autor diferencia os processos de desenvolvimento e de aprendizagem. Segundo ele, um processo de aprendizagem se caracteriza pela intenção de aprender um assunto específico, enquanto um processo de desenvolvimento resulta no aumento de um conhecimento ou na aquisição de novas habilidades independentemente da intenção de aprender algo novo. Ele observa que existe obtenção de novas propriedades de comportamento do homem na idade adulta. Nela também existe diferença entre as mudanças intencionais e não intencionais. Segundo o autor, no primeiro caso pode-se denominar aprendizagem e no segundo, amadurecimento, ou seja, às vezes os adultos têm *insights* e também têm ideias que amadurecem.

Segundo o autor, durante o processo de aprendizagem, o aluno muda de um nível de conhecimento para o subsequente, e essa mudança é permeada pelas cinco fases do processo de aprendizagem: informação, orientação guiada, explicitação, orientação livre e integração. De acordo com essas fases, o professor pode orientar o processo de aprendizagem:

- ✓ na primeira fase, oferecendo aos alunos material para clarificar o contexto;
- ✓ na segunda fase, fornecendo material por meio do qual os alunos aprendem as principais ligações no campo de pensamento;
- ✓ na terceira fase, oportunizando discussões em classe que irão resultar no uso correto da linguagem;
- ✓ na quarta fase, a partir da oferta de materiais, com diferentes possibilidades de uso e de instruções que favoreçam várias performances;
- ✓ na quinta fase, o professor convida os alunos a refletirem a respeito de suas ações, a partir de regras compostas e memorizadas.

Van Hiele (1986) observa que a memorização só aparece na última fase. Segundo o autor, a explicação do professor só acontece após um campo ordenado de pensamentos terem sido formulados e a obscuridade esclarecida a partir de conexões já

---

[70] Learning is the acquisition of new skills, under the influence of an intention to learn.
[71] LANGEVELD, M. J. Inleiding tot de studie der paedagogische psychologie van de middelbare-scholleeftijd. Groningen: J. B. Wolters.

existentes. Em “um processo de aprendizagem guiada, a ajuda do professor é principalmente indireta. Ele cria uma situação efetuando um desenvolvimento acelerado” (p. 177) (tradução nossa[72]).

O autor também observa que, quando um aluno adquire certa habilidade a partir do conhecimento e não da ação automática, ele será capaz de utilizar essa habilidade em situações diferentes. Mesmo depois de muitos anos, ele conseguirá manter a capacidade de aplicar o conhecimento. Por outro lado, se o aluno perder o comportamento automático adquirido, ele deverá aprender tudo novamente, ele irá esquecer tudo o que aprendeu.

Segundo Van Hiele (1986), para que o aluno possa manter a capacidade de aplicar o conhecimento podem ser utilizados problemas que são um meio para o processo de ensino, na medida em que eles estão integrados ao ensino e pertencem à teoria. Um problema pode ser proposto de modo que ele se torne funcionalmente significativo. Em diferentes fases do processo de aprendizagem, os problemas assumem diferentes funções:

- ✓ na fase da informação, os problemas ajudam a descobrir o campo de conhecimento;
- ✓ na fase da orientação guiada, os problemas são utilizados para descobrir as conexões entre os sistemas de relações;
- ✓ na fase da orientação livre, os problemas ajudam a encontrar o caminho no sistema de relações;
- ✓ os problemas também podem ser utilizados para testar se a integração ocorreu.

Segundo Van Hiele (1986) de acordo com essas funções os problemas são tomados como uma ferramenta do processo de aprendizagem, mas eles também podem ser utilizados com a intenção de avaliar o processo de aprendizagem. Nesse caso, os problemas teriam como função identificar:

- ✓ o quanto o aluno progrediu no processo de aprendizagem;
- ✓ se o aluno é capaz de continuar seus estudos.

Para que os problemas cumpram a função definida pelo professor, é importante que ele saiba fazer uso dos problemas:

- ✓ de informação, que são úteis quando o professor faz uma introdução, promove a discussão em classe e orienta as tarefas;

---

[72] in a guided learning process the aid of the teacher is principally indirect. He creates a situation effecting an accelerated development.

- ✓ destinados a orientação guiada, que funcionam bem quando ocorre a discussão em classe, e a maior parte desse tipo de problema pode ser trabalhada pelos alunos, independentemente da ajuda direta do professor; podem ser feitos em casa, e em sala, eles favorecem uma discussão extensa e facilitam a criação de um sistema de relações;
- ✓ os problemas de integração devem ser trabalhados oralmente em sala de aula;
- ✓ enquanto os alunos trabalham com os problemas, o professor deve acompanhar e apresentar perguntas informativas;
- ✓ no entanto a interferência do professor pode comprometer o processo de aprendizagem se o aluno trabalha em problemas que têm como objetivo testar a capacidade de estudo do aluno.

Segundo Van Hiele (1986), durante o processo de aprendizagem, seja por meio da resolução de problemas ou de outra forma de ensino, faz-se necessária certa quantidade de conhecimento pronto. Conforme o autor, conhecimento pronto não se restringe a aprendizagem específica, mas precisam satisfazer determinadas condições:

- ✓ ele deve ser resultado de um ensino integrado e não consistir em regras apenas mecânicas;
- ✓ tem que ter uma função clara no processo de aprendizagem;
- ✓ ser útil, em qualquer caso, logo após a memorização;
- ✓ não pode ser calculado facilmente de forma a tornar a memorização supérflua;
- ✓ pode ser formado em termos compreensíveis;
- ✓ memorizar este conhecimento deve facilitar a exclusão de erros.

Para Van Hiele (1986), conhecimento pronto consiste em: termos técnicos necessários para a compreensão de estruturas linguísticas; propriedades como a comutatividade, a associatividade, a distributividade; relações entre as operações; propriedades de frações; regras de sinais; propriedades de equações e sistemas de equações; a fórmula para as raízes de uma equação quadrática entre outros.

De acordo com Van Hiele (1986), os problemas podem ser utilizados para compor testes que investiguem a aprendizagem dos alunos. É importante observar que para um teste cumprir a função de investigar a compreensão dos alunos, ele precisa ser suficientemente novo para eles. Segundo o autor, os testes podem ser aplicados com o objetivo de investigar: a capacidade de o aluno continuar os estudos; o andamento do processo de aprendizagem; a integração; o funcionamento do método de ensino; se o método de ensino é adequado para o aluno.

No entanto, os problemas não são o único meio para tais investigações. Essas investigações também podem ocorrer a partir da observação dos alunos durante as aulas, ou fora delas, por testes psicotécnicos, e pela análise de documentos escritos pelo aluno. Mediante os objetivos do teste, o professor define o tipo de problema que irá utilizar: conjunto de problemas para a sala de aula não baseados na preparação; problemas a serem trabalhados no quadro negro; problemas para trabalhar em casa.

Os testes precisam estar adequados aos objetivos e ao tipo de instrução. Se a intenção é investigar se o aluno é capaz de continuar os estudos, é preciso saber até que ponto ele está familiarizado com os problemas do teste ou com aquele tipo de problema de teste. Se o objetivo é investigar o processo de aprendizagem, é necessário um método de ensino fortemente relacionado à metodologia de ensino. Se pretender investigar a integração, é necessário verificar se as regras têm sido memorizadas conscientemente. Se o foco é a percepção, é necessário verificar se o teste é suficientemente novo para o aluno. O desempenho do professor e do material didático só pode ser investigado se os objetivos da instrução são conhecidos.

Durante o processo de aprendizagem, após a compreensão das ideias fundamentais é possível elaborar uma linguagem das relações fundamentais que estão conectadas e estabelecer uma base objetiva para as relações que constituem o tema envolvido. Com o desenvolvimento da linguagem é possível buscar explicações para as conexões e um nível mais alto de abstração pode ser atingido.

Do ponto de vista fenomenológico[73], Van Hiele (1986) observa que, em primeiro lugar, ocorrem a sistematização do assunto e o desenvolvimento dos termos técnicos para falar ou para escrever o mais claro possível. Uma abordagem fenomenológica nem sempre precisa ser utilizada como um meio para estabelecer relações em um nível mais elevado de pensamento. No entanto, se um nível mais elevado de pensamento já tiver sido atingido, será possível utilizar símbolos e conceitos que já tenham significado. A fixação de

[73] Para van Hiele (1986) o ponto de vista fenomenológico trata da compreensão do fenômeno. Segundo o autor "a abordagem fenomenologica não tenta encontrar respostas para questões como: como são as coisas? Qual é a natureza? O que é verdade? De acordo com essa maneira de pensamento essas questões não são significativas. O que ela faz é perguntar: como é possível compreender um fenômeno? Como podemos compreender um ao outro pela descrição de um fenômeno? Sobre que respostas para a questão somos capazes de concordar? A questão a respeito da causa de um fenômeno observado frequentemente não é significativa, porque em muitos contextos a causa não pode ser descrita fenomenologicamente. Então nos não estamos restritos a questões a respeito da ocorrência de fenômenos regulares" (VAN HIELE, 1986, p. 224) (tradução nossa).

conceitos de um nível mais alto de pensamento deve ser feita com o auxílio dos símbolos da linguagem que ganhou o seu significado correto. Esse novo significado só pode ser examinado a partir da discussão. Segundo o autor, o caráter construtivo de uma ciência se torna evidente mediante o desenvolvimento da linguagem para atendê-la. Alguns símbolos da linguagem são tão sugestivos que apenas eles são capazes de invocar construções completas de pensamento, por outro lado, a ausência desses símbolos pode tornar a discussão muito difícil.

Com relação ao conhecimento pronto, Van Hiele (1986) observa que, na perspectiva da teoria de níveis, não existe a necessidade deles. O autor discorda dos materialistas, pois eles supõem que na natureza as leis estão para serem descobertas. Os matemáticos e lógicos também esperam que em seus tópicos as leis estejam para serem descobertas em nossas mentes. Elas constituem um conhecimento *a priori*. Nesse caso, quando eles ensinam, costumam começar do conhecimento expresso por axiomas e, a partir deles, todos os tópicos são desenvolvidos. No geral, na sala de aula, esse é o ponto de partida. Nesse caso, não existe a necessidade de discutir, a elaboração do conhecimento tem início a partir dos axiomas.

Na teoria de níveis de pensamento, essa ordem é invertida. No primeiro nível, o visual, as teses podem ser vistas. Depois elas podem ser aplicadas e o segundo nível, o descritivo, é alcançado. O nível descritivo tem uma estrutura própria que, após discussão, as suas leis tornam-se explícitas. Essas leis possuem uma estrutura que, após serem examinadas e discutidas, permitirão encontrar os axiomas. Isso ocorre, no mínimo, no terceiro nível de pensamento. O autor entende que os axiomas não devem ser emitidos a partir de um conhecimento *a priori*, mas eles podem ser discutidos e até mesmo rejeitados.

Segundo Van Hiele (1986), a discussão é uma fase indispensável na constituição de níveis mais elevados. As estruturas mais altas são formadas a partir das leis que governam estruturas de nível inferior.

No livro, Van Hiele (1986) explicita o que ele compreende pelos níveis e também descreve, em diferentes momentos, a função e como utilizar as fases do processo de aprendizagem. O autor também trata do processo de avaliação. Para ele, a avaliação deve estar de acordo com os procedimentos metodológicos. Ele também retoma questões tratadas na sua tese e na tese de Van Hiele-Geldof (1957) que estão relacionadas à RME, como: o papel da linguagem na elaboração do conhecimento, a orientação guiada, as descontinuidades entre os níveis de conhecimento, o papel dos contextos na elaboração e na avaliação do conhecimento, a fenomenologia didática na mesma perspectiva tratada por Freudenthal, a inversão didática.

4.2.1 Van Hiele: uma síntese

Os aspectos essenciais do trabalho dos Van Hiele podem ser resumidos a partir de Nasser (1993). Segundo a autora, o Modelo de Van Hiele “sugere que os alunos progridem através de uma sequência hierárquica de níveis de compreensão enquanto aprendem Geometria, e que a linguagem, o *insight* e o tipo de experiências vivenciadas desempenham papéis especiais nesse desenvolvimento” (NASSER 1993, p. 29). Por meio do Quadro 2, a autora apresenta exemplos que caracterizam cada um dos níveis de Van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio em geometria.

Quadro 2 – Os Níveis de Van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio em geometria

Nível de Van Hiele	Características	Exemplo
Básico: reconhecimento	Identificação, comparação e nomenclatura de figuras geométricas, com base em sua aparência global.	Classificação de quadriláteros (recortes) em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.
Nível 1: análise	Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas.	Descrição de um quadrado através de suas propriedades: 4 lados, 4 ângulos retos, lados iguais, lados opostos paralelos.
Nível 2: síntese	Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra; argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.	Descrição do quadrado pelas propriedades mínimas: 4 lados iguais e 4 ângulos retos. O retângulo é um paralelogramo, pois também tem os lados opostos paralelos.
Nível 3: dedução	Domínio do processo dedutivo e de demonstrações; reconhecimento de condições necessárias e suficientes.	Demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando congruência de triângulos.
Nível 4: rigor	Estabelecimento e comparação de axiomas e teoremas em diversos sistemas.	Estabelecimento e demonstração de teoremas em uma Geometria finita.

Fonte: Nasser (1993, p. 30)

Segundo Nasser (1993), o que caracteriza os níveis são as diferenças nos objetos de pensamento. No nível básico, os objetos de pensamento são figuras isoladas; no nível 1, os objetos de pensamento são classes de figuras; no nível 2, as propriedades tornam-se os objetos de pensamento; no nível 3, os objetos de pensamento são as relações de ordem e, no nível 4, os objetos de pensamento são os fundamentos dessas relações de ordem.

Segundo a autora, para compreender esses níveis, é importante considerar que:

> 1. Os níveis formam uma hierarquia, no sentido de que não é possível atingir um nível sem dominar todos os níveis inferiores.
> 2. O que está implícito num nível torna-se explícito no nível seguinte.
> 3. Cada nível tem símbolos linguísticos próprios, e um conjunto de relações característico interligando-os.
> 4. Duas pessoas raciocinando em níveis distintos não podem compreender uma à outra. Este desnível ocorre quando o professor tenta se comunicar com seus alunos em seu próprio nível.
> 5. O progresso de um nível para o seguinte depende mais da experiência de atividades adequadas do que da idade ou da maturação. (NASSER, 1993, p. 31)

Conforme a autora, o processo de mudança de um nível para o outro é resultado de um processo de aprendizagem que deve ser planejada pelo professor e organizada em cinco fases: informação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração. De acordo com Nasser (1993, p. 33), as pesquisas a respeito do Modelo de Van Hiele indicam que ele "é útil para descrever o desempenho dos alunos e, portanto, para orientar os professores na ordenação de atividades a serem propostas", ou seja, para orientar o professor no processo de ensino e de aprendizagem.

Segundo Nasser (1993), "Van Hiele não menciona como identificar os níveis alcançados pelos alunos" como pode ser constatado na descrição dos trabalhos feita na presente tese. Possivelmente por não ser tão simples identificar o nível atingido por cada aluno. Os testes de Van Hiele foram elaborados por pesquisadores como Usiskin (1982) que testou mais de mil alunos americanos. Nasser (1992) adaptou esse teste para alunos de quatro escolas públicas do Rio de Janeiro.

Com relação à continuidade dos níveis, Nasser (1993) indica que "Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) arguem que os níveis de Van Hiele não são discretos, e sim, contínuos, significando que a aquisição de um nível não se dá instantaneamente, mas pode levar vários meses". A pesquisa desenvolvida por Gutierrez, Jaime e Fortuny (1991) indicou que existe a possibilidade de um aluno desenvolver dois níveis consecutivos de pensamento concomitantemente. Nesse caso, em geral, a aquisição do nível mais baixo é mais completa do que a do nível superior. Eles observaram que alguns estudantes utilizaram mais de um nível ao mesmo tempo, possivelmente devido à dificuldade do problema. Segundo os autores, isso não significa que a estrutura hierárquica dos níveis deve ser rejeitada, mas sim que é necessário adaptar a teoria de Van Hiele à complexidade dos processos de raciocínio humano, pois as pessoas não se comportam de uma maneira simples, linear, que permite a atribuição de um único nível de pensamento.

Segundo Gutiérrez (2012), a compreensão da Teoria de Níveis de Van Hiele levou a reflexão a respeito de pesquisas anteriores com relação os níveis de pensamento. Com isso abandonaram a tradição de aplicação de maneira restrita às características dos níveis de forma hierárquica e descontínua para adotar uma perspectiva mais aberta e realista. Ele e seus colaboradores passaram a assumir um caráter sequencial dos níveis dotados de uma hierarquia parcial, a qual permite considerar que um estudante começa a aquisição de um nível de raciocínio sem ter adquirido completamente o nível anterior. Dessa forma, a transição de um nível para o próximo tem um caráter contínuo e pausado, ela não ocorre abruptamente, é necessário muito tempo, meses, às vezes anos, para a transição de um nível para o subsequente.

O caráter reflexivo do processo de pesquisa levou Gutiérrez (2012) e seus colaboradores a evoluir em suas concepções e pontos de vista implicando na readaptação de objetivos e estratégias metodológicas. Ele relata que, ao longo de suas pesquisas, também passou a considerar a relevância das fases de aprendizagem para a organização das atividades didáticas. Em pesquisas mais recentes, as sequências didáticas são elaboradas tendo em vista: i) os níveis de Van Hiele que auxiliam a decidir os conteúdos matemáticos, os objetivos e a metodologia de ensino adequada para cada curso; ii) as fases de aprendizagem de Van Hiele que ajudam a organizar as atividades de acordo com os conteúdos e os objetivos de aprendizagem e iii) o conhecimento a respeito das estratégia e erros típicos dos estudantes.

4.3 Van Hiele e Freudenthal

Além da descrição dos trabalhos de Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957, 1986) é possível destacar elementos que irão auxiliar no reconhecimento e explicitação de aproximações entre as fases do processo de aprendizagem em matemática dos Van Hiele e os princípios da avaliação na Educação Matemática Realística em trabalhos do GEPEMA.

Considera-se que as aproximações entre o trabalho dos Van Hiele e a avaliação na Educação Matemática Realista inicia-se a partir do reconhecimento da relação entre Freudenthal e os Van Hiele. As pesquisas desenvolvidas para a execução deste trabalho (Van Hiele 1957, 1986; Van Hiele-Geldof 1957; Freudenthal, 1991; Treffers e Goffree, 1985;

Van den Heuvel-Panhuizen, 1996; La Bastide-Van Gemert, 2006) dão indícios de que a participação de Freudenthal como orientador de Van Hiele (1957) e a sua influência na elaboração da tese de Van Hiele-Geldof (1957) sugerem certa conexão entre o trabalho dos Van Hiele e a RME. Para Freudenthal, o trabalho deles era inseparável, ela fez uma análise da própria prática no ensino de geometria inicial e ele desenvolveu a teoria que embasava o trabalho dela. No momento da defesa, Freudenthal declarou que qualquer pesquisa na área de didática da matemática deveria levar em conta o trabalho dos Van Hiele (LA BASTIDE-VAN GEMERT, 2006). Para Freudenthal (1991, p. 96), o "casal incorporou, por assim dizer, o casamento entre teoria e prática" (tradução nossa[74]). As teses de Van Hiele-Geldof (1957) e de Van Hiele (1957) tiveram um impacto significativo no trabalho de Freudenthal (LA BASTIDE-VAN GEMERT, 2006).

A relação entre Freudenthal e os Van Hiele é anterior à produção das teses. A partir de registros nas teses de Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957) e em trabalhos a respeito de Freudenthal, como o de Goffree (1993), pode-se afirmar que eles tiveram contato antes do período de desenvolvimento da pesquisa. Tanto Freudenthal quanto Dina e Pierre Van Hiele participavam dos encontros de um grupo de professores que se reuniam para discutir a respeito da essência do ensino da matemática na escola secundária holandesa, o Mathematics Study Group of the W.V.O., que foi fundado em abril de 1936 (GOFFREE, 1993).

A concepção da abordagem da Educação Matemática Realística por Hans Freudenthal (1973, 1983, 1991) foi influenciada por ideias intuicionistas, ou mais especificamente pelo trabalho de Brouwer. Na abordagem da Educação Matemática Realística, essas ideias ficam evidenciadas por meio da concepção de Freudenthal da matemática como uma atividade humana. Dina Van Hiele-Geldof (1957) também dá indícios de que compreende a matemática como uma atividade humana ao indicar que a intuição do aluno é estimulada quando ele tem a possibilidade de experimentar. Segundo a autora, diante de um sistema dedutivo logicamente construído, a intuição do aluno ficará ociosa.

Pode-se inferir que o trabalho de Van Hiele-Geldof (1957) é a raiz de um dos princípios da RME que posteriormente Freudenthal denominou "reinvenção guiada" e Dina e Pierre Van Hiele, fases do processo de aprendizagem. Com relação à RME, conforme membros do GEPEMA (CIANI, 2012; TREVISAN, 2013) já apontaram, a compreensão de Freudenthal (1991) da matemática como uma atividade humana e da reinvenção guiada é para

---

[74] couple who embodied, as it were, the marriage of theory and practice.

a Educação Matemática Realística o ponto de partida para as aulas de matemática por meio de um processo de matematização, ou seja, pelo “fazer matemática”. Dina Van Hiele-Geldof (1957) dá indícios da ideia de matematização ao discorrer a respeito da ordenação de relações para a formação de novas estruturas de pensamento e também ao citar que a atividade matemática consiste em esquematizar dados empíricos.

Segundo La Bastide-Van Gemert (2006), Freudenthal declarou que os Van Hiele foram os primeiros a se ocuparem do estudo do processo de matematização, mais especificamente na geometria. Embora eles não tenham utilizado os termos matematização e reinvenção, Freudenthal identificou na descrição dos níveis o elemento mais importante para a sua própria aprendizagem da didática da matemática. Das teses, ele também destacou a ênfase atribuída ao trabalho do aluno e a descoberta das regularidades geométricas por meio de material manipulável.

De acordo com La Bastide-Van Gemert (2006), mesmo diante da admiração de Freudenthal pelo trabalho da Van Hiele-Geldof (1957), um documento educacional único e valioso foi o estudo de Van Hiele (1957), em especial a teoria de níveis que influenciou diretamente o trabalho de Freudenthal. Segundo Freudenthal, a análise do *insight* na matemática tem um papel fundamental no desenvolvimento da didática. Na época da defesa das duas teses, Freudenthal declarou que o desenvolvimento do aluno pode ocorrer em uma sequência de períodos alternados. Para atingir certo nível, o aluno precisa adquirir certas habilidades, que se tornarão rotineiras, que, agregadas a outras habilidades, fornecerão suporte para outro nível.

Segundo La Bastide-Van Gemert (2006), a teoria desenvolvida por Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957) foi a primeira que Freudenthal abraçou completa e abertamente, elogiou e posteriormente integrou ao seu próprio modo de pensar. Nos anos quarenta e cinquenta do século passado, Freudenthal já havia demonstrado claramente que a ordem lógica da matemática não deveria ser decisiva para o ensino da matemática. Ele discordava do ensino da geometria por meio da dedução pura. O autor acreditava em uma abordagem mais intuitiva, mais prática. Freudenthal já havia demonstrado que era contra o ensino da aritmética para aprender a pensar. Ele já apontava para o valor formativo do ensino da matemática para além do raciocínio computacional. A questão, porém, era onde e como seria possível efetivar uma abordagem didática tendo em vista o valor formativo do conhecimento matemático. A resposta a essa questão veio com o trabalho desenvolvido em sala de aula e teorizado por Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957).

Freudenthal interpretou o trabalho de Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957) como uma mudança sutil, mas essencial, na prática pedagógica. Na proposta deles não seria no conhecimento ou na sequência lógica da estrutura ou do material de ensino que o professor deveria estruturar a situação de aprendizagem, mas sim no conhecimento das relações lógicas entre os níveis com que os alunos se deparam durante a aprendizagem. Aos olhos de Freudenthal, essa proposta metodológica trata da axiomatização de temas da matemática. O pensamento matemático resulta na organização de um assunto, ou seja, na axiomatização. Os sistemas matemáticos surgem a partir da organização do assunto pelo próprio sujeito. Freudenthal interpretou a teoria de níveis como um paralelo marcante na matemática, semelhante aos saltos entre os níveis dentro do processo educativo (LA BASTIDE-VAN GEMERT, 2006).

Segundo La Bastide-Van Gemert (2006), o que Freudenthal pensava a respeito do processo de ensino e de aprendizagem às vezes parecia consciente, às vezes inconsciente, e foi finalmente formulado nos artigos 'Logical analysis and critical survey' de 1962 e 'Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques?' de 1963, nos quais Freudenthal desenvolveu as ideias de dois importantes pilares de sua filosofia: a reinvenção guiada e a inversão antididática. Para Freudenthal (1991), uma habilidade aprendida por meio da reinvenção é melhor compreendida e preservada mais facilmente do que a adquirida por uma forma menos ativa. Sendo assim, segundo o autor, se a reinvenção tem que ser realizada durante o processo de aprendizagem guiada pelo professor é uma questão que deve ser investigada pela psicologia da aprendizagem, mas da experiência do trabalho dos matemáticos adultos ele observa que a maneira mais fácil de entender um documento matemático é reinventando os seus resultados. Por isso ele acredita que a parte mais importante do processo de aprendizagem é a reinvenção. Consequentemente a elaboração de um método de ensino nessa perspectiva tem que se ocupar com o processo de inventar o assunto ao invés do assunto em si, ou seja, com a "reinvenção guiada".

Com relação ao termo "inversão antididática", La Bastide-Van Gemert (2006) indica que ela apareceu pela primeira vez no artigo 'Enseignement', no qual Freudenthal apresenta um exemplo de inversão antididática em que definições são impostas aos alunos antes mesmo que eles tenham capacidade de ter experiência com a definição a ser formulada. Segundo o autor, o método tradicional oferece definições em um momento em que os alunos ainda não têm experiência e ainda não conseguem compreender a razão das definições formais. Esse é um método muito contraditório a criação da própria matemática.

Segundo ele é impossível elaborar definições em uma área que ainda não foi explorada, mas essa inversão antididática era encontrada regularmente nos programas de ensino de geometria axiomática. O termo "inversão antididática" também é um princípio importante da concepção de que os alunos devem reinventar a matemática.

No livro "Revisiting Mathematics Education", Freudenthal (1991) trata da ideia de níveis. Para o autor, o que caracteriza os níveis hierárquicos de pensamento, de modo geral, são as operações técnicas que, em um determinado nível, tornam-se base para o pensamento em um próximo nível. A essência da mudança de um nível para o próximo se encontra na palavra reflexão, ou seja, é por meio da reflexão que um assunto de um nível mais baixo se transforma em um nível superior. Freudenthal considerou a reflexão como um motor de descoberta da matemática, como um princípio essencial para o ensino da matemática na perspectiva da reinvenção (LA BASTIDE-VAN GEMERT, 2006).

La Bastide-Van Gemert (2006) conclui que a teoria de níveis desapareceu das publicações de Freudenthal. Essa teoria serviu como base principalmente para a criação de ideias como "inversão antididática" e "reinvenção guiada". Com o passar do tempo, Freudenthal passou a citar o trabalho dos Van Hiele apenas superficialmente, ele passou a considerar o trabalho dos Van Hiele apenas no aspecto básico, ou seja, construiu a sua própria teoria e não se referiu mais a eles. O trabalho de Freudenthal passou a se concentrar na luta contra o movimento da matemática moderna.

5 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA: PRINCÍPIOS DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

A abordagem de ensino idealizada por Freudenthal desencadeou pesquisas que foram compondo o corpo teórico da RME, construídas a partir do resultado de projetos, como WISKOBAS e HEWET, desenvolvidos por membros do atual Instituto Freudenthal. Essas pesquisas têm uma forte interação teoria e prática, assim como foi feito por Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957) em suas respectivas pesquisas de doutorado.

O projeto WISKOBAS, por exemplo, contou com a participação de Treffers e de membros do IOWO (Instituto para Desenvolvimento de Educação Matemática), e o projeto HEWET, por membros do IF incluindo De Lange, que utilizou dados do projeto para sua tese de doutorado e, posteriormente, desenvolveu a ideia de níveis de competência cognitiva e, por conseguinte, os princípios de avaliação e a "Pirâmide de Avaliação". Os dois projetos foram fortemente influenciados pelas ideias de Hans Freudenthal. Eles utilizaram princípios da RME, como a concepção da matemática como uma atividade humana, a matematização, a didatização, a fenomenologia didática, os contextos, o princípio de níveis, a unidade do processo de ensino e de aprendizagem, a avaliação didática.

Os estudos desenvolvidos pelo GEPEMA a respeito da Educação Matemática Realística destacam especialmente a avaliação didática. Este capítulo apresenta alguns aspectos da avaliação na perspectiva da RME a partir do trabalho de De Lange. Selecionou-se o trabalho deste autor por ele ter sido utilizado em trabalhos do Grupo: Almeida (2009), Ferreira (2009, 2013), Bezerra (2010), Lopez (2010), Ciani (2012), Pedrochi Junior (2012), Pires (2013), Trevisan (2013), Oliveira (2014), Santos (2014), Pereira Junior (2014) e Mendes (2014). Neste capítulo o objetivo é apresentar aspectos característicos dos princípios de avaliação da Educação Matemática Realística propostos por De Lange (1987, 1995, 1996, 1999, 2002, 2003). Considera-se que as teses e dissertações do GEPEMA exploraram o trabalho de De Lange em diferentes perspectivas. Com a presente tese, pretende-se ampliar o olhar para a avaliação didática da RME a partir dos óculos dos Van Hiele.

Com a intenção de contextualizar o desenvolvimento dos princípios de avaliação da RME, apresentam-se o projeto HEWET e alguns elementos do projeto WISKOBAS. No projeto HEWET, interessam a avaliação, os princípios de avaliação, os níveis de competência cognitiva, a “Pirâmide de Avaliação” e algumas questões relacionadas ao PISA.

5.1 HEWET e WISKOBAS

De certo modo, o projeto HEWET é uma das consequências da recomendação final do Seminário de Royaumont, de 1959, realizado pela Organization for European Economic Cooperation, que apresentou como principal objetivo para a Educação Matemática oferecer uma melhor preparação para os estudos universitários e ferramentas matemáticas para a vida diária. As sugestões desse seminário tiveram efeito generalizado por toda a Europa e, em muitos casos, geraram currículos completamente novos. Um dos movimentos gerados foi a abordagem estruturalista do grupo Bourbarki, que recebeu fortes críticas. Essas críticas e a evolução das pesquisas em Educação Matemática levaram ao desenvolvimento, entre outras, da abordagem da Educação Matemática Realística que fundamenta os projetos HEWET e WISKOBAS. O projeto WISKOBAS tratou da escola primária e o projeto HEWET, da escola secundária.

Na Holanda, uma das implicações do seminário Royaumont foi a criação da “Commission on the Modernization of the Mathematics Curriculum” (CMLW). Essa comissão assinou o compromisso de estudar a modernização da instrução matemática e, particularmente, informar a respeito das matérias que deveriam ser testadas em aulas experimentais de certas instituições e as modificações que elas acarretariam nos programas e exames; as medidas que iriam possibilitar aos professores da escola secundária melhores informações a respeito do recente desenvolvimento da matemática e os problemas do programa para aqueles que mostram dons extraordinários para a matemática (DE LANGE, 1987).

Cinco anos após o Seminário de Royaumont, o CMLW publicou um relatório com recomendações para o currículo de matemática para ser iniciado em 1968. A principal mudança relatada por De Lange (1987) foi a divisão da matemática em: Matemática A, para estudantes que fariam cursos universitários em humanidades e ciências sociais, e a Matemática B, para estudantes que se preparavam para as ciências naturais, medicina e tecnologia. O currículo da Matemática A deveria abordar matérias relevantes para uso na sociedade. Ele era composto por probabilidade e estatística, álgebra linear aplicada, cálculo aplicado e processamento de dados. O currículo da Matemática B era composto por cálculo, probabilidade, estatística, vetores e álgebra. As universidades, porém, insistiam que os estudantes de ciências sociais e econômicas também estudassem as matérias do currículo da Matemática B. Sendo assim, muitos estudantes cumpriam os dois currículos. Em 1973, o CMLW voltou a discutir o currículo da escola secundária. Nesse período, o IOWO, criado em 1971 sob a direção do professor Dr. Hans Freudenthal, aceitou o convite do Ministério da Educação da Holanda para desenvolver os novos currículos da Matemática A e B e, em 1975, iniciou o trabalho em duas escolas experimentais. O IOWO também realizou uma pesquisa entre escolas secundárias a respeito da opção pelo currículo da Matemática B e desenvolveu material para os estudantes na perspectiva da filosofia do IOWO, que mais tarde ficou conhecida como abordagem realística.

No início de 1981, o projeto HEWET recebeu a aprovação do Ministério da Educação holandês para iniciar o trabalho, que teve como base dois pilares: experimentos escolares e formação de professores em serviço. A partir de então, o projeto foi conduzido por membros do "Research Group on Mathematics Education and Educational Computer Centre" (OW & OC), estabelecido na Universidade de Utrecht, pois, por questões políticas, o IOWO cessou suas atividades em dezembro de 1980. A equipe de trabalho do projeto HEWET foi composta, durante a maior parte do período, por M. Kindt, H. Verhage, E. Hanepen e De Lange. A ideia da tese de De Lange surgiu durante o desenvolvimento do projeto, sob as ideias e as sugestões que recebeu de seu orientador F. Van Der Blij e seu co-orientador A. Treffers.

Conforme Verhage e De Lange (1987), o período de desenvolvimento, teste e implantação do currículo da Matemática A durou cinco anos. Em 1981, duas escolas utilizaram o material elaborado por pesquisadores do OW&OC, que acompanharam a implementação do projeto e fizeram ajustes no material a partir de discussões com alunos e professores. Depois de dois anos, o experimento se expandiu para outras 10 escolas e, no ano seguinte, para mais 40 escolas. Em 1985 todas as escolas estavam utilizando o novo currículo da Matemática A e, em 1987, houve a primeira avaliação em larga escala em todo o país. Nos primeiros anos, os pesquisadores acompanharam os professores em um processo de formação constante. À medida que o número de escolas aumentou, tornou-se inviável o atendimento individual para cada escola. Nos últimos anos, a formação continuada de professores passou a ser feita por meio de cursos dirigidos por membros do projeto HEWET e por professores das 12 escolas que participaram das primeiras fases do projeto, que atuaram como formadores de professores. A elaboração do currículo e do material e a implementação nas escolas foram realizadas por membros do Instituto Freudenthal, isso permitiu que o material fosse adaptado à realidade educacional holandesa e os professores tiveram a oportunidade de receber orientações dos idealizadores do currículo.

De Lange (1987) destaca que, segundo o relatório do projeto HEWET, o programa de Matemática A deveria ser inspirado pela via da aplicação. O material experimental, elaborado para o projeto para turmas do 10º, 11º e 12º anos, foi distribuído em quatro eixos: probabilidade e estatística, cálculo, álgebra linear e o uso de computadores. A esses eixos também foi acrescentado o eixo de geometria devido às conexões estabelecidas com alguns conteúdos. Segundo o relato desse autor, os livretos de cada um dos conteúdos foram elaborados a partir de situações do mundo real[75]. "Este mundo real não é restrito ao mundo físico e social. A realidade 'interior' da matemática ou o mundo real da imaginação dos estudantes também proporciona fontes para o desenvolvimento de conceitos matemáticos" (DE LANGE, 1987, p. 37) (tradução nossa)[76]. Um dos exemplos apresentados pelo autor é o problema "Caminhando em Manhattan" (Figura 4), que aborda conteúdos de probabilidade e estatística descritiva.

Figura 4 – "Caminhando em Manhattan"

Randy Walker caminha todos os dias a partir da 56ª rua até a esquina da 5ª Avenida e a 59ª rua. (Veja cruzamento). Ele toma todos os dias um caminho diferente, mas sempre um caminho mais curto.

O problema de Randy é: quantas rotas diferentes existem (fig 8 a, 8 b.)?

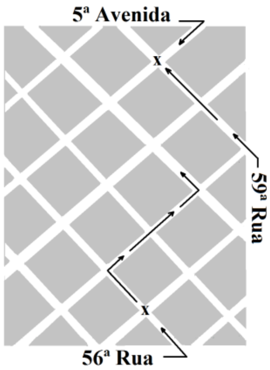


fig. 8 a.

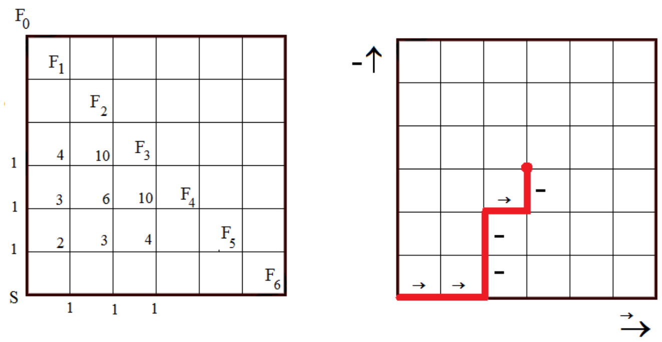


fig. 8 b.

Fonte: (DE LANGE, 1987, p.33) (Tradução nossa)[77]

---

[75] Conforme já foi explorado por membros do GEPEMA, tais como: Ferreira (2009, 2013), Trevisan (2013), Santos (2014).

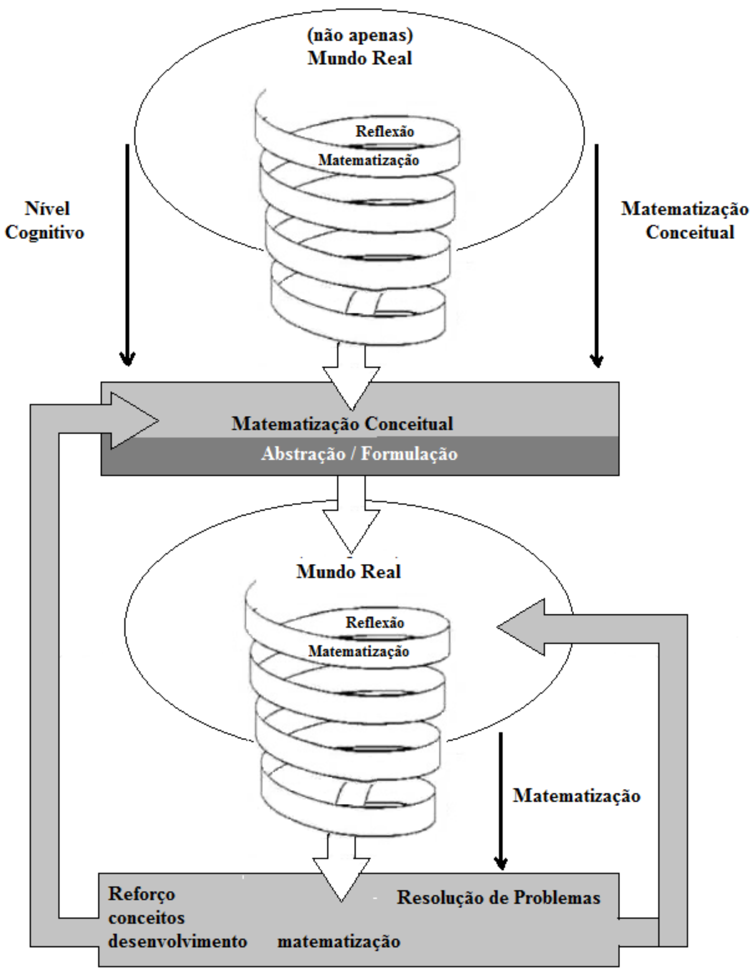
[76] This real world is not restricted to the physical and social world. The "inner" reality of mathematics or the real world of the students imagination as well provides sources for developing mathematical concepts.

[77] Randy Walker walks every day from the 56th street to the corner of 5th avenue and 59th street. (See crosses). He takes every day another route, but always a shortest one.

Ao realizar uma análise do currículo da Matemática A, De Lange (1987) discute assuntos que os membros do GEPEMA exploraram em suas dissertações e teses fundamentados na RME, como: a matematização, o papel dos contextos e formas de desenvolver uma atitude crítica por meio do conhecimento matemático. Essas questões serão retomadas, na perspectiva de De Lange (1987), tendo em vista acrescentar novos elementos aos trabalhos já desenvolvidos por membros do Grupo.

Um esquema geral das atividades do currículo experimental da Matemática A foi representado por De Lange (Figura 5). O principal aspecto desse esquema é o processo de matematização, em que o autor procurou mostrar as ideias que estão por trás da matematização e como elas podem ocorrer na Matemática A.

Figura 5 – Esquema global das atividades do currículo experimental da Matemática A.



Fonte: De Lange (1987, p. 39) (tradução nossa)

Randy's problem is: how many different routes are there (fig. II 7, II. 8)? (DE LANGE, 1987, p.33, 34)

No currículo da Matemática A destacava-se o processo de matematização conceitual. Conforme foi esquematizado por De Lange (1987) (Figura 5), a ideia era iniciar o trabalho com os conteúdos de matemática a partir de uma situação problema realística. Essa situação deveria desencadear desequilíbrios cognitivos e a matematização conceitual. Os conteúdos/conceitos abstraídos ou formulados pelos estudantes seriam analisados no contexto do mundo real antes de finalizar o processo da matematização e sistematização do assunto.

Segundo De Lange (1987), pode-se dizer que a ideia de matematização da ciência iniciou-se no século XVII com Newton, na sua grande obra “Mathematical Principles of Natural Philosophy” de 1687, quando afirmou que a sua intenção era traçar a quantidade e as propriedades de um grupo de fenômenos e aplicar, de uma maneira matemática, o que foi descoberto para um caso que pode ser ampliado a outros. Infere-se que a teoria do movimento planetário de Newton foi uma das primeiras concepções de um modelo matemático como resultado de um processo de matematização.

Para o autor, regularmente, o modelo matemático, gerado por meio de um processo de matematização, é um conjunto completo e consistente de equações matemáticas ou estruturas que correspondem a um fenômeno. Em geral, os modelos são construídos para obter respostas a respeito de um acontecimento do mundo físico, influenciar futuras observações ou experimentações, auxiliar na axiomatização de uma situação física, criar compreensão e progresso conceitual e também promover a matemática e a criação de modelos matemáticos, isto é, resulta em um processo de matematização conceitual.

Segundo Freudenthal (1973), assim como a ciência logo supera o mero procedimento de coleta de dados e organização das experiências criando um modelo que represente o fenômeno estudado na própria matemática, também existem situações que podem ser organizadas aritmeticamente ou geometricamente, e essa “**organização da realidade com meios matemáticos é** atualmente **chamada matematização**” (FREUDENTHAL, 1973, p. 44) (grifo nosso, tradução nossa[78]).

Em La Bastide-Van Gemert (2006) encontrou-se que Freudenthal considera que os Van Hiele foram os primeiros a discutirem o processo de matematização. Van Hiele (1957) utiliza o termo matematização do ponto de vista didático ao tratar da atitude do matemático que, ao tornar-se professor, precisa analisar os conceitos dos conteúdos que serão abordados com seus alunos para encontrar a melhor maneira de apresentá-lo para que os alunos possam, de certa forma, reconstruí-los. Segundo o autor é importante que, do ponto de

[78] Organizing the reality with mathematical means is today called mathematizing.

vista didático, o professor busque a formação da estruturação matemática, que tenha como objetivo impulsionar o desenvolvimento de algoritmos para resolver problemas.

Segundo De Lange (1987), para Freudenthal a matematização da própria Matemática é a principal tarefa dos matemáticos. No entanto, Freudenthal opõe-se à ideia de restringir a matematização como um privilégio exclusivo dos matemáticos. Para ele, não existe dúvida de que deveria ser dada aos alunos a oportunidade de matematizar, em um nível mais baixo e por meio de situações não matemáticas que garantam sua aplicabilidade e que, posteriormente, seja transposta para um próximo nível no qual o conteúdo matemático possa ser organizado, pelo menos localmente.

Além da compreensão geral do processo de matematização no currículo da Matemática A, os pesquisadores levaram em consideração o processo de matematização conceitual, no qual os problemas do mundo real podem e devem ser utilizados em um contexto de aprendizagem. De Lange (1987, p. 43) adotou a concepção de Treffers e Goffree (1985) de matematizar "como uma atividade de organização na qual o conhecimento e as competências adquiridas são utilizados para descobrir regularidades desconhecidas, relações e estruturas" (tradução nossa[79]).

Segundo Treffers (1987), a matematização está relacionada à essência da atividade matemática. No ambiente escolar, ela se refere à elaboração de conhecimentos, à aprendizagem de conceitos e ao desenvolvimento de competências para organizar problemas de contextos matemáticos e extramatemáticos. A atividade de matematização pode ser reconhecida por meio de ações, como a percepção de semelhanças e diferenças, o uso de símbolos, a generalização, a percepção de um problema de diferentes maneiras, a definição de conceitos, o uso de diferentes modelos, a elaboração de regras, o reconhecimento do isomorfismo entre dois problemas, a descoberta de regularidades, o uso de princípios da matemática, como a indução, a transformação de um problema em um modelo familiar, o uso de fórmulas.

A matematização é um processo dinâmico que pode ocorrer em diferentes níveis. A matematização em um nível inferior pode ser utilizada em um nível posterior como algoritmo para atingir um nível mais elevado. Do ponto de vista didático, pode-se identificar o componente horizontal da matematização quando se refere à atividade de transformar um problema realístico em um problema matemático, e o componente vertical da atividade matemática, quando realizado por meio da formação de modelos, da esquematização e da

---

[79] as an organizing activity according to which acquired knowledge and skills are used to discover unknown regularities, relations and structures.

elaboração de "atalhos". Separar esses dois componentes, porém, é uma atividade artificial, pois, na perspectiva da Educação Matemática Realística, eles são complementares. Não é possível delimitar claramente onde um termina e o outro começa, assim como quando e quantas vezes ocorre a mudança do componente horizontal para o vertical e vice e versa (TREFFERS e GOFFREE, 1985; DE LANGE, 1987).

Segundo De Lange (1987), no esquema de atividade da Matemática A (Figura 5), a matematização sempre caminhou junto com a reflexão, com o *insight*. Nela os estudantes podem refletir a respeito de seu processo pessoal de matematização, discutir os resultados com outros colegas, avaliar o produto de sua matematização e interpretar os resultados. Nesse processo, os componentes horizontal e vertical da matematização estão presentes por meio da ação dos estudantes e a reflexão a respeito de suas ações.

Com relação ao processo de matematização no ambiente escolar, De Lange (1987) indica que ele é individual; existem diferentes tipos de combinação entre a matematização horizontal e vertical; sem reflexão não há matematização; a interação social é essencial; o conflito conceitual pode exercer um papel de motivação; o processo de resolução de problemas pode melhorar a compreensão e o desenvolvimento de conceitos; a matematização pode levar a uma adequação e a uma percepção do mundo real. Segundo o autor, a matematização conceitual, ou seja, a "matematização que visa desenvolver conceitos matemáticos" (DE LANGE, 1987, p. 63) (tradução nossa)[80], também é um aspecto essencial do processo de ensino e de aprendizagem da matemática.

Com relação às considerações teóricas que fundamentam a compreensão do processo de matematização conceitual e, consequentemente, o desenvolvimento dos projetos WISKOBAS e HEWET, De Lange (1987, p. 74) informa que os "conceitos teóricos foram visíveis apenas durante os projetos por paradigmas da unidade ensino e aprendizagem. Aos poucos, os conceitos tornaram-se claros ao se observarem os materiais em ação, por meio da discussão e após reflexão" (tradução nossa)[81].

Com relação ao projeto HEWET, De Lange (1987) cita a teoria de níveis de Van Hiele, apesar de o autor informar que essa teoria praticamente não exerceu papel importante nos projetos WISKOBAS e HEWET. Por outro lado, Treffers (1987, p. 242) afirma que, somente

[80] 'mathematizing aimed at developing mathematical concepts'.
[81] The theoretical concepts were only visible during the projects by paradigms of teaching/learning units. Gradually the concepts became clear by observing the materials in action, by discussion and on reflection.

> [...] quando o trabalho terminou, um quadro teórico pode ser construído, no qual os bem conhecidos níveis de Van Hiele podem ser adaptados e reinterpretados. Pode-se mesmo afirmar que, até recentemente, a teoria de nível em nossa interpretação não tinha desempenhado um papel explícito para a equipe. A característica do andamento dos trabalhos do WISKOBAS em três fases reflete exatamente o processo de aprendizagem em três níveis, como descrito por Van Hiele. (tradução nossa[82])

De certa forma, De Lange (1987) e Treffers (1987) reconheceram nos projetos a influência da teoria de nível dos Van Hiele, especialmente do ponto de vista da compreensão da unidade do processo de ensino e de aprendizagem, ou seja, reconhecem que esses dois processos são complementares.

Conforme De Lange (1987), na perspectiva de Van Hiele, o processo de aprendizagem ocorre em três níveis.

> 1. Um aluno alcança o primeiro nível de pensamento logo que ele pode manipular as características conhecidas de um padrão que é familiar para ele.
> 2. Assim que ele aprender a manipular a inter-relação das características terá alcançado o segundo nível.
> 3. Ele vai chegar ao terceiro nível de pensamento, quando começar a manipular as características intrínsecas das relações. (DE LANGE, 1987, p. 74) (tradução nossa[83])

Para De Lange (1987), com certa frequência, a instrução tradicional inicia-se do segundo ou do terceiro nível, o que não ocorre no currículo da Matemática A. Neste último, o nível final é obtido durante o processo de aprendizagem iniciado a partir de uma situação que o aluno pode tornar real. A proposta é iniciar com uma exploração fenomenológica de um conceito matemático, de aparência real, estruturado no primeiro nível e que vai lentamente sendo processado para operações mais formais até alcançar o segundo ou até mesmo o terceiro nível.

Segundo De Lange (1987), para Treffers (1987), o quadro teórico desenvolvido por Van Hiele não é suficiente para responder a duas questões: a) como deve ser concretizada a exploração fenomenológica? e b) quais ações didáticas são necessárias para ajudar os estudantes a mudarem de um nível para o seguinte?

---

[82] as the work went on could a theoretic framework be constructed, into which the well-known Van Hiele levels could be fitted in and reinterpreted. One may even assert that, until recently, the level theory in our interpretation had not played an explicit role for the group. By this feature the progress of the Wiskobas work in three phases reflects exactly the learning process on three levels such as described by Van Hiele.

[83] 1. A pupil reaches the first level of thinking as soon as he can manipulate the known characteristics of a pattern that is familiar to him.
2. As soon as he learn to manipulate the interrelatedness of the characterístics he will have reached the second level.
3. He will reach the third level of thinking when he starts manipulating the intrinsic characteristics of relations.

Para De Lange (1987), a fenomenologia didática de Freudenthal pode ajudar a responder a essas questões. Segundo ele, a orientação de Freudenthal, de utilizar a realidade como fonte de matematização junto com os três níveis de Van Hiele, ajuda a responder à primeira questão. Para responder à segunda, é necessário levar em consideração a compreensão do processo de matematização. Também se deve considerar que Freudenthal não distingue níveis do processo de aprendizagem como fez Van Hiele. Além disso, nos conteúdos da Matemática A, os níveis de Van Hiele são pouco visíveis, existindo, no entanto, uma progressão restrita, segundo os microníveis delimitada apenas relativamente. Para Treffers (1987), esse é o processo de "matematização progressiva".

Segundo Treffers (1987), do ponto de vista didático, o currículo do programa WISKOBAS é caracterizado globalmente pela ênfase na matematização progressiva, tanto horizontal quanto vertical, e, mais especificamente, por cinco princípios.

> 1. A parte dominante, por problemas de contexto, tanto como uma fonte de formação de conceito como uma área para a aplicação.
> 2. Esse significado amplo atribuído ao desenvolvimento de modelos de contexto, esquemas, diagramas e símbolos.
> 3. A considerável contribuição decisiva dos alunos para o caráter e a forma do currículo real, que se expressa pela sua própria construção da solução, bem como por suas próprias produções de problemas, e que visa transformar sua atividade intuitiva e informal em uma reflexiva e mais formal.
> 4. O caráter interativo do processo de ensino / aprendizagem.
> 5. O entrelaçamento e estruturação da totalidade das vertentes de aprendizagem (TREFFERS, 1987, p. 223) (tradução nossa[84]).

Segundo De Lange (1987), esses cinco princípios educacionais estão relacionados com o ponto inicial da teoria de níveis e a fenomenologia didática. Com relação a eles, o autor destaca: 1) a exploração fenomenológica em um contexto real, 2) a elaboração de modelos como um meio para promover a mudança de níveis, 3) a construção do conhecimento pelo aluno, 4) o papel da interação na elaboração do conhecimento e 5) o entrelaçamento de cadeias de aprendizagens.

---

[84] 1. The dominating part by context problems, both as a source of concept formation and as an area for application.
2. This broad significance attributed to the development of context models, schemas, diagrams and symbols.
3. The considerable, even decisive contribution of the pupils to the character and form of the actual curriculum, which is expressed by their own construction of solution as well as by their own productions of problems, and which aims at transforming their intuitive and informal activity into a reflective and more formal one.
4. The interactive character of the teaching/learning process.
5. The intertwining and structuring of the totality of learning strands.

Tendo em vista acrescentar elementos à discussão, a respeito da elaboração do conhecimento além dos princípios educacionais descritos anteriormente, De Lange (1987, 1995) também destaca o papel dominante ocupado pelos problemas de contexto, tanto como fonte para a matematização conceitual quanto como campo para a aplicação dos conceitos matemáticos, pois, na RME, “o mundo real é utilizado como um ponto de partida para desenvolver conceitos e ideias matemáticas” (DE LANGE, 1995, p. 14) (tradução nossa[85]).

De acordo com Treffers e Goffree (1985), na Educação Matemática Realística, as funções dos problemas de contexto são:

> - formação de conceitos: na primeira fase do percurso que permitem aos alunos um acesso natural e motivador para a matemática,
> - formação de modelos: eles fornecem um firme apego para aprender as operações formais, procedimentos, notações, regras, e fazem isso em conjunto com outros modelos palpáveis e visuais tendo uma função importante como suporte para pensamento,
> - aplicabilidade: eles descobrem a realidade como fonte e domínio de aplicação,
> - exercício de habilidades aritméticas em situações específicas aplicadas. (TREFFERS e GOFFREE, 1985, p. 111) (tradução nossa[86])

Segundo De Lange (1995), dessas funções, a que melhor caracteriza a abordagem da Educação Matemática Realística é o uso dos contextos para a formação de conceitos, ou seja, para o processo de matematização conceitual.

Os problemas de contexto favorecem ações relacionadas aos processos de matematização vertical e horizontal. Podem tanto tornar os conhecimentos e habilidades aplicáveis quanto atribuir sentido ao funcionamento formal e evitar que se torne formalista. A questão é criar possibilidades para tornar um sistema formal significativo e com riqueza de contexto. Procedimentos algorítmicos padrão, que remetam os alunos a situações significativas, podem ser tomados como problemas de contexto (TREFFERS e GOFFREE, 1985).

De Lange (1987) discriminou três diferentes usos dos contextos. Para o autor, a mais significativa característica do processo de matematização conceitual é o uso de contextos para introduzir e desenvolver conceitos ou modelos matemáticos, esse tipo chamou-

---

[85] the real world is used as a starting point to develop mathematical concepts and ideas.

[86]- concept forming: in the first phase of the course they allow the pupils a natural and motivating access to mathematics,
- model forming: they supply a firm hold for learning the formal operations, procedures, notations, rules, and they do so together with other palpable and visual models which have an important function as supports for thinking,
- applicability: they uncover reality as source and domain of application,
- exercise of specific arithmetical abilities in applied situations.

o de contexto de terceira ordem. Contextos do mundo real, para os quais a matemática é uma ferramenta para organizar a realidade, o autor denominou contextos de segunda ordem. E as operações matemáticas embaladas em contextos que podem ser resolvidos por meio de uma simples transição para um problema matemático nomeou contexto de primeira ordem. Dentre os trabalhos do GEPEMA, em especial, a dissertação e a tese de Ferreira (2008, 2013) destacam essa classificação. A autora acrescenta também o contexto de ordem zero que é encontrado em De Lange (1999). Segundo o autor, deve-se evitar contextos que são utilizados apenas para dar um aspecto de problema do mundo real, denominados contextos falsos, de camuflagem ou de ordem zero.

Durante o projeto HEWET, De Lange (1987) verificou a relevância dos problemas de contexto para o processo de matematização conceitual. Segundo o autor, alguns professores e alunos aprendem muito devido a ele. Com certa regularidade, levam a conflitos conceituais, ou seja, conflitos que o aluno enfrenta ao lidar com diferentes soluções para um problema. Também pode ocorrer conflito sociocognitivo, mediante discussões interindividuais, entre alunos ou entre alunos e professor. Segundo Van den Heuvel-Panhuizen (2005, p. 3), os "contextos desempenham um papel importante no cumprimento da exigência de ter problemas de avaliação significativos e informativos" (tradução nossa[87]).

Segundo Verhage e De Lange (1997), à medida que o uso da matemática em problemas de contextos torna-se uma meta da Educação Matemática, esse tipo de problema deve estar presente tanto na avaliação da aprendizagem quanto no dia a dia do ambiente escolar. Isso implica em mais trabalho, pois os professores precisam ter sua própria coleção de problemas de contexto. É necessário desenvolver um olhar para situações e materiais apropriados e selecionar tudo o que pode ser útil para as aulas.

Outra questão discutida pelo autor é o desenvolvimento de atitude crítica. De acordo com o relatório do projeto HEWET, isso significa que os alunos devem habituar-se à linguagem matemática, acostumar-se a falar em fórmulas, conviver com diferentes tipos de representação gráfica, utilizar modelos matemáticos e julgar a sua pertinência. As oportunidades de matematização presentes no material desenvolvido para o projeto tiveram como intenção desenvolver a atitude crítica dos alunos (DE LANGE, 1987).

[87] Contexts play an important role in fulfilling the requirement of having meaningful and informative assessment problems.

5.2 Avaliação na Educação Matemática Realística: HEWET, RME e PISA

Durante o desenvolvimento do projeto HEWET, os professores sentiram dificuldade em avaliar o desenvolvimento da atitude crítica, o processo de matematização e o uso de contexto por meio de testes escritos em tempo restrito. Essa dificuldade motivou o grupo a desenvolver outros instrumentos de avaliação, como a prova em duas fases, o teste ensaio, a prova de levar para casa e o teste oral. A intenção era proporcionar aos estudantes oportunidades de mostrar o que sabem a partir de tarefas alternativas. Para De Lange (1999), o objetivo da avaliação deve ser o de produzir informações que ajudem no processo de ensino e de aprendizagem e na tomada de decisões, ou seja, a avaliação tem uma função didática.

Os primeiros resultados do projeto HEWET, avaliados por meio de exames, não foram satisfatórios. De Lange (1987) indica que alguns fatores que podem ter contribuído para as falhas encontradas foram: o exame era excessivo, exercícios difíceis e não claros o suficiente, itens com partes que eram muito formais para os estudantes da Matemática A e falta de tempo para realizar o exame. Também persistiram questões relacionadas aos objetivos de uma avaliação, tais como a interpretação, a reflexão e a criatividade, omitidas dos exames e substituídas por questões rotineiras, como "calcule" e similares. Diante do problema evidenciado, foram discutidas alternativas de avaliações que pudessem revelar o conhecimento dos estudantes. A tensão evidenciada entre os objetivos educacionais e a preparação para os exames tornou-se um tema de interesse dos envolvidos no projeto.

O problema que a equipe do projeto HEWET teve que enfrentar foi encontrar instrumentos de avaliação que contemplassem as especificidades da Matemática A, como oferecer oportunidades de matematização, reflexão, inventividade e criatividade, essenciais segundo o currículo que estava sendo proposto e que não podem ser avaliadas por meio de provas escritas em tempo restrito. Para solucionar o problema, foram criadas e testadas pelas 12 primeiras escolas tarefas alternativas desenvolvidas de acordo com cinco princípios definidos pela equipe do projeto HEWET.

> 1. Provas devem melhorar a aprendizagem.
> 2. Provas devem permitir que o candidato mostre o que sabe (prova positiva).
> 3. Provas devem operacionalizar os objetivos do currículo da Matemática A.
> 4 Provas com qualidade não são, em primeiro lugar, mensuradas pela acessibilidade para pontuar objetivamente.

> 5. Provas devem ser inseridas na prática escolar habitual. (DE LANGE, 1987, p. 183) (tradução nossa[88])

A intenção da equipe do projeto HEWET com o primeiro princípio era melhorar a aprendizagem. As tarefas não foram planejadas apenas para motivá-los a responder, mas também de modo que fosse possível fornecer aos estudantes *feedbacks* adequados, relacionados a sua aprendizagem. Nos testes escritos em tempo restrito, os estudantes têm apenas a oportunidade de mostrar o que não sabem. Conforme o segundo princípio de avaliação, as questões deveriam ser elaboradas de modo que pudessem mostrar o que já sabem, ou seja, que houvesse a oportunidade de resolverem as questões de diferentes maneiras. A intenção do terceiro princípio era operacionalizar os objetivos da Matemática A, e para isso era necessário oferecer-lhes liberdade para criar, organizar, integrar, expressar e produzir sínteses e ideias. Dessa forma, o objetivo da avaliação deixou de ser o produto final, o resultado, para tornar-se o processo de resolução. O quarto princípio define que boas questões de avaliação não são medidas pela facilidade de acerto, pois um aluno pode acertar uma questão sem saber justificar a resposta. Segundo o quinto princípio, as tarefas de avaliação devem ser incluídas na prática da sala de aula de modo a não atribuírem tarefas desproporcionais aos professores e aos estudantes (DE LANGE, 1987).

Segundo De Lange (1987), a tarefa em duas fases foi inspirada nas ideias de Van der Blij, que é um teste com questões abertas e de ensaio. A primeira fase é conduzida como um teste escrito tradicional, com tempo limitado. Espera-se que os estudantes respondam às questões possíveis em um dado momento e com tempo limitado. No início, eles ficam livres para responder às questões durante um tempo determinado. Regularmente, na primeira metade do teste, eles respondem a questões abertas e, na segunda, são incluídas questões de ensaio[89]. Depois de o teste ter sido corrigido pelo professor em casa, ele volta para os estudantes, quando são divulgados as notas e alguns problemas. Na segunda fase, provido dessas informações, o estudante repete o trabalho em casa sem restrições e completamente livre para escolher qual questão resolver primeiro, a maneira mais fácil e a combinação delas. Depois de aproximadamente três semanas, os estudantes devolvem o trabalho para uma nova correção.

---

[88] 1. Tests should improve learning.
2. Tests should allow the candidate to show they know (positive testing).
3. Tests should operationalize the goals of the Math A curriculum.
4. Test-quality is not in the first place measured by the accessibility to objective scoring.
5. Test should fit into the usual school practice.

[89] Consiste na interpretação de uma situação problema conforme será exemplificado na sequência.

No âmbito do projeto HEWET, além da tarefa em duas fases, que foi utilizada por membros do GEPEMA, os pesquisadores também trabalharam com a tarefa de levar para casa, a tarefa ensaio e a tarefa oral. A tarefa de levar para casa, elaborada pela equipe do projeto HEWET, era semelhante ao segundo estágio da tarefa em duas fases. Consistia em um teste do tipo ensaio (DE LANGE, 1987). A questão proposta nessa tarefa tinha um nível de complexidade superior ao encontrado no livro texto. A intenção era confrontar os estudantes com tarefas de alto nível como possivelmente encontrariam ao continuar seus estudos no nível universitário. O trabalho foi desenvolvido individualmente ou em duplas. Uma das tarefas de levar para a casa proposta aos estudantes foi:

> O problema da alimentação de um gavião.
> Simplificando, este problema refere-se à quantidade de folhas necessárias para alimentar um gavião durante um ano, nas seguintes condições:
> - Um gavião come um pardal por dia;
> - Um pardal come dez lagartas por dia;
> - Uma lagarta come 0,5 g de folhas por dia. (DE LANGE, 1987, p. 224) (tradução nossa)[90]

A tarefa ensaio, utilizada pelo projeto HEWET, consistia na interpretação de uma situação problema. Esse tipo de tarefa foi projetado principalmente para abordar questões relacionadas à estatística descritiva. Segundo De Lange (1987), a representação gráfica é um assunto complexo para ser testado, sobretudo se o objetivo é verificar como olhar criticamente para a representação de informações estatísticas e como usar a representação gráfica de maneira correta.

Como um exemplo de tarefa ensaio, De Lange (1987) apresenta o problema da Migração, que partiu de um artigo de jornal, a respeito da superpopulação da República da Indonésia. No artigo apresentado aos estudantes existiam informações numéricas que não estavam representadas graficamente. Então lhes foi proposto reescrever o artigo, a respeito da migração na Indonésia, fazendo um bom uso da representação gráfica. O autor comenta que, para resolver o problema, os alunos checaram as informações contidas no artigo.

Com relação à tarefa oral, De Lange (1987) observa que esse é um antigo instrumento de avaliação e foi utilizado por muito tempo na Holanda, porém, por questões econômicas e burocráticas, o uso de testes orais foi reduzido. No âmbito do projeto HEWET, os testes orais foram utilizados como: testes orais a respeito de determinados conceitos

---

[90] The food problem of a sparrow-hawk
Simply stated, this problem concerns the amount of leaves needed to feed one sparrow-hawk during one year under the following conditions:
- a sparrow-hawk eats a sparrow per day;
- a sparrow eats ten caterpillars per day;
- one caterpillar eats 0,5 g de leaves per day.

conhecidos pelos estudantes; discussão oral a respeito de um artigo que foi dado para os estudantes vinte minutos antes da discussão e argumentação a respeito de tarefas de levar para casa, ou similar, depois de completadas pelos estudantes e corrigidas pelo professor.

De Lange (1987) indica que os estudos desenvolvidos no projeto HEWET mostraram o potencial das tarefas alternativas na prática da sala de aula. Segundo o autor, os "alunos parecem gostar da ideia de produzir algo - não só mentalmente - como parte do processo de matematização conceitual. Eles aprendem por meio da produção que os obriga a refletir a respeito do seu próprio processo de aprendizagem" (DE LANGE, 1987, p. 261) (tradução nossa[91]). Para ele, o ensino deveria ter como objetivo a aprendizagem, e os testes e tarefas deveriam ser parte desse processo e não somente uma forma de obter notas. A avaliação deve ter o objetivo de produzir informações que ajudem a melhorar a aprendizagem e a tomada de decisões educacionais por todos os envolvidos no processo (DE LANGE, 1999).

Conforme De Lange (1999), o projeto HEWET e, mais especificamente, sua tese de doutoramento (DE LANGE, 1987) implicaram na discussão de aspectos relacionados à avaliação na Educação Matemática Realística e implicaram no desenvolvimento da ideia de níveis de competência cognitiva que foram sintetizados na "Pirâmide de Avaliação". Segundo o autor, essa ideia foi desenvolvida ao longo de mais de dez anos "e tem a sua origem no final dos anos oitenta (De Lange, 1987), tornando-se mais explícita no início dos anos noventa (De Lange, 1992, 1994, 1995) e tem sido representada visualmente em uma pirâmide a partir de então, com a ajuda de Dekker" (DE LANGE, 1999, fl. 72) (tradução nossa[92]). Para ele, uma abordagem de ensino e de aprendizagem "só pode ser avaliada por procedimentos de avaliação derivados do mesmo princípio" (DE LANGE, 1995, p. 3).

Segundo De Lange (1992), após anos de experimentações e da implantação do novo currículo da Matemática A, na Holanda foram descritos os objetivos realistas para o currículo esperado, pois não "é sensato estabelecer metas antes de o currículo desejado provar suas qualidades em experimentos de campo abrangentes" (DE LANGE, 1992, p. 204) (tradução nossa[93]). Em 1989, ele elaborou metas para a Educação Matemática secundária para guiar os desenvolvedores de testes por meio de um esquema a ser utilizado "para listar ideias

---

[91] Students seem to like the idea of producing something - no only mentally - as part of the process of conceptual mathematization. They learn by producing; it forces them to reflect on their own learning process.

[92] These levels have been developed over the last decade and find their origin at the end of the Eighties (de Lange, 1987), were made more explicit in the early Nineties (de Lange, 1992, 1994, 1995) and hav e been represented visually in a pyramid from then on with help from Dekker (DE LANGE, 1999, fl. 72).

[93] It is unwise to develop goals before the desired curriculum has proved its qualities in wide-ranging field experiments.

matemáticas fundamentais a serem operacionalizadas: (i) objetivos gerais, (ii) descrição global, (iii) objetivos concretos, e (iv) habilidades específicas (DE LANGE, 1992, p. 201) (tradução nossa[94]).

Conforme De Lange (1992), as habilidades específicas são fáceis de avaliar e de descrever. Referem-se às técnicas e ferramentas básicas que não são objetivos em si, mas essenciais para desenvolver objetivos concretos e dar condições para os objetivos gerais. Elas têm um caráter puramente matemático, como verificar se o aluno é capaz de adicionar e multiplicar matrizes ou desenhar diferentes tipos de gráficos. Os objetivos concretos dizem respeito a áreas específicas e se inter-relacionam, atribuindo significado às áreas do conhecimento a partir dos níveis mais baixos. Regularmente são atividades dirigidas para objetivos concretos, como descrever o significado da soma, do produto e das potencialidades das matrizes em um problema de contexto; ler, interpretar e analisar informações e representá-las graficamente. A descrição global das áreas temáticas apresenta um esboço do domínio, colabora com a elaboração de objetivos concretos, conecta-os com os objetivos gerais e dá indícios da inter-relação entre as áreas. Os objetivos gerais da matemática estão relacionados a qualidades permanentes, habilidades, capacidades, modos de pensar, e não estão restritos a uma única área específica da matemática. De modo geral, pretende-se observar se o aluno demonstra capacidade de resolver problemas com ferramentas matemáticas, descrevê-los matematicamente e comunicar aos outros, ou seja, se o estudante é capaz de: formular e visualizar um problema de diferentes maneiras; validar e julgar o uso da matemática em diferentes campos; estabelecer conexões entre problemas e conceitos matemáticos, relações e estruturas; usar pesquisas e estratégias.

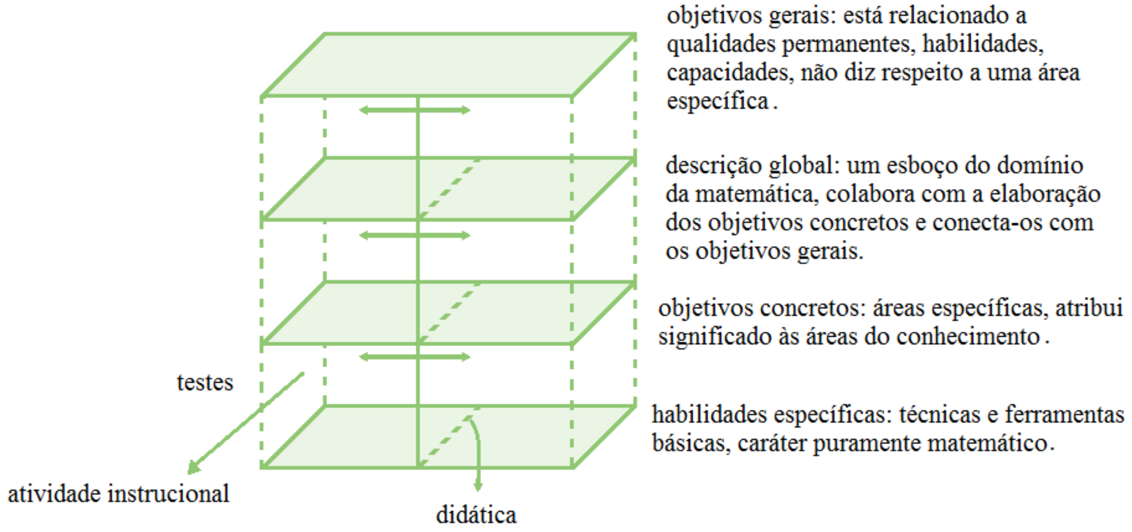
Segundo o autor, o mais alto nível dos objetivos descritos é também o mais negligenciado em relação à avaliação, mas deveria ser diferente, pois ajuda os alunos a adquirirem conhecimentos, habilidades e *insights* referentes aos objetivos relacionados anteriormente. De Lange (1992) sugere que, para desenvolver uma boa atitude com o trabalho matemático, deve ser dada ao aluno a oportunidade de ser criativo ao sugerir soluções, utilizar conhecimentos e habilidades de maneira flexível, generalizar e estimar resultados, desenvolver autoconfiança e utilizar diferentes meios de comunicação para resolver problemas.

Esse modelo de descrição dos objetivos foi representado graficamente, (Figura 8) acrescido de componentes, como a didática, as atividades de instrução e os testes

[94] to list key mathematical ideas to be operationalized: (i) general goals, (ii) global description, (iii) concrete goals, and (iv) specific abilities.

que servem como conectores entre os diferentes níveis. Ele inicia nos objetivos de nível mais baixo, ou seja, nas habilidades específicas e é ampliado por meio da ação didática, das atividades instrucionais e dos testes a exigência cognitiva.

Figura 6 – Descrição de objetivos e componentes adicionais



Fonte: adaptado De Lange (1992, p. 204) (tradução nossa)

Supõe-se que os objetivos realistas para o currículo da Matemática A, depois de ser experimentado no sistema escolar holandês, é a raiz da representação geométrica tridimensional da "Pirâmide de Avaliação".

Em 1999, De Lange escreveu o "Framework for Classroom Assessment in Mathematics", resultado de mais de 20 anos de pesquisas, a respeito da prática de avaliação em sala de aula. No Framework, De Lange (1999) explicita a composição da "Pirâmide de Avaliação" em decorrência do seu trabalho e da colaboração de pesquisadores do Instituto Freudenthal, em especial de Dekker e Querelle (2002). No mesmo ano, o autor presidiu a equipe de especialistas de matemática da OCDE, declarando que escolheu deliberadamente relacionar o "Framework" com "Framework da OCDE (DE LANGE, 1999 a)", projetado para o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), pois, além de refletir bem a filosofia adotada pelo autor, também conecta quadros teóricos de avaliação interna e externa (DE LANGE, 1999).

Nesta tese, inicialmente, pretende-se tratar da composição da "Pirâmide de Avaliação", e na sequência, apresentar, brevemente, o quadro teórico que foi utilizado para a composição das provas do PISA como um exemplo da aplicação do quadro teórico da avaliação na perspectiva da RME em uma avaliação de larga escala e também porque os estudos do GEPEMA relacionados à Educação Matemática Realística começaram por meio de questões não rotineiras que compõem as provas do PISA.

A exploração da "Pirâmide de Avaliação" será iniciada retomando os princípios de avaliação, elaborados por De Lange. Na sua tese de doutorado, em 1987, o autor apresentou cinco princípios para a avaliação. Em 1999, a partir da reflexão a respeito dos trabalhos publicados anteriormente (DE LANGE, 1987, 1992, 1994 e 1995), ele acrescentou os princípios 2, 4, 6 e 8 e substituiu o 5º princípio da primeira lista pelo 9º. Segundo De Lange (1999), esses princípios, listados a seguir, podem ser tomados como um *checklist* para os professores que levam a sério a avaliação em sala de aula.

1. A principal finalidade da avaliação é melhorar a aprendizagem.
2. A matemática deve ser incorporada a problemas que façam parte do mundo real dos alunos (problemas realísticos).
3. Os métodos de avaliação devem permitir que os alunos revelem o que sabem.
4. Um plano de avaliação equilibrado deve incluir diferentes oportunidades para os alunos demonstrarem e documentarem o que sabem.
5. As tarefas de avaliação devem operacionalizar todos os objetivos do currículo.
6. Os critérios de avaliação devem ser públicos.
7. O processo de avaliação, incluindo a pontuação e a classificação, deve ser esclarecido para os estudantes.
8. Os alunos devem ter a oportunidade de receber *feedback* a respeito do seu trabalho.
9. Uma tarefa de avaliação de qualidade deve ser autêntica, justa e, na medida do possível, atender aos critérios anteriores.

Segundo De Lange (1999), essa lista reflete o principal objetivo para a Educação Matemática, que é capacitar os estudantes para lidar com a matemática, envolvida em problemas do mundo real, isto é, formar estudantes que se tornem matematicamente letrados e que possam lidar com a matemática abarcada em problemas do mundo real e não somente com as necessidades futuras de sua vida particular e ocupacional, além de compreender e apreciar a matemática como uma disciplina científica.

Para De Lange (1999 a), o primeiro aspecto importante relacionado ao letramento em matemática é a competência matemática. Ao elaborar o quadro de referência para o PISA, o autor organizou uma lista (Quadro 2), sem hierarquia, de habilidades gerais de matemática que são relevantes e pertinentes para todos os níveis de ensino.

Quadro 3 – Habilidades gerais de matemática

Habilidade	Descrição
Pensamento Matemático	É a habilidade de lidar com questões características do universo matemático (“Existe...?”, “Se sim, quantos?”, “Como podemos encontrar?”); distinguir diferentes tipos de declarações como: definições, teoremas, conjecturas, hipóteses, exemplos e afirmações condicionadas; lidar com conceitos matemáticos.
Argumentação matemática	É a habilidade de saber como são as provas matemáticas e como elas se distinguem de outros tipos de raciocínio matemático; acompanhar e avaliar cadeias de diferentes tipos de raciocínio matemático; utilizar a heurística; criar argumentos matemáticos.
Modelagem	É a habilidade de traduzir da “realidade” para as estruturas matemáticas (matematização); interpretar os modelos matemáticos em situações da realidade (de-matematização); trabalhar com um modelo matemático; lidar com um modelo matemático; comunicar um modelo e seus resultados; monitorar e controlar o processo de modelagem.
Problematização e resolução de problemas	É a habilidade de levantar, formular e definir diferentes tipos de problemas matemáticos; solucionar diferentes tipos de problemas matemáticos de diferentes formas.
Representação	É a habilidade de decodificar, interpretar e distinguir diferentes formas de representação de objetos e situações matemáticas e a inter-relação entre as representações; lidar adequadamente com diferentes formas de reprodução.
Simbólica, formal e técnica	É a habilidade de decodificar e interpretar a linguagem simbólica e formal e relacioná-la com a linguagem natural; traduzir da linguagem natural para a linguagem simbólica ou

	formal; manipular declarações e expressões compostas por símbolos e fórmulas.
Comunicação	É a habilidade de expressar-se e de compreender diferentes formas de expressão matemática por escrito ou oralmente.
Ajudas e instrumentos	É a habilidade de utilizar diferentes tipos de ajuda e instrumentos, inclusive ferramentas da tecnologia de informação, e saber as limitações desses diferentes tipos de ajudas e instrumentos.

Fonte: DE LANGE (1999 a)

Segundo o autor, quando se considera a matemática real, é necessário projetar simultaneamente mais de uma habilidade. Com a intenção de operacionalizar a avaliação de competências matemáticas, De Lange organizou as habilidades matemáticas em três níveis de competências[95]. "Elas foram operacionalizados com sucesso na opção Nacional do TIMSS Holandês (Boertien e De Lange, 1994; Kuiper, Bos, e Plomp, 1997), no estudo longitudinal em curso sobre os efeitos de um currículo de Ensino Médio e também foram adaptados para o estudo da OCDE" (De Lange, 1999, fl. 14). Esses níveis são: nível 1 - **reprodução**, definição, computação; nível 2 – **conexão** e integração para resolver problemas e nível 3 – **matematização**, pensamento matemático, generalização e *insight*.

No **nível 1,** os alunos lidam principalmente com habilidades como conhecer fatos e representações, reconhecer equivalências, recordar objetos e propriedades matemáticas, realizar procedimentos de rotina, aplicar algoritmos padrão e desenvolver habilidades técnicas. Também utilizam operações com afirmações e expressões que possuem símbolos e fórmulas padrão. Regularmente, as tarefas que mobilizam competências do primeiro nível de conhecimento são testes de múltipla escolha, preenchimento de lacunas, questões de correspondência e questões de formato fechado (DE LANGE, 1999).

No **nível 2,** iniciam-se as conexões entre diferentes padrões e domínios da matemática e informações para resolução de problemas em que os estudantes têm de escolher as estratégias e as ferramentas matemáticas a serem utilizadas. Por meio de problemas não

[95] Segundo de Lange (1999, p. 72), esses níveis têm origem no final da década de 1980 com o livro "**Mathematics, Insight and Meaning"** (de Lange, 1987) e continuaram a ser desenvolvido durante a década de 1990, tornando-se mais explícitos no início dos anos de 1990 (de Lange, 1992, 1994, 1995), e foram representados visualmente em uma pirâmide com a ajuda de Dekker (Verhage e de Lange, 1997; Shafer e Foster, 1997).

rotineiros, requer-se do estudante alguma matematização e espera-se que, dentro de um contexto, eles se engajem e tomem decisões matemáticas. Nesse nível, devem decodificar e interpretar a linguagem formal e simbólica, formular e explicar problemas e situações, desenvolver estratégias, resolver, predizer e verificar. Tarefas que abordam o segundo nível de competência geralmente são projetadas a partir de contextos que envolvem os estudantes na tomada de decisões matemáticas (DE LANGE, 1999).

"**Nível 3**, aquele que vai para o coração da matemática e da alfabetização matemática" (De Lange, 1999, fl. 16) (grifo nosso, tradução nossa[96]). Nesse nível de competência, são oferecidas aos estudantes oportunidades de matematização, devendo analisar, interpretar, desenvolver seus próprios modelos e estratégias e elaborar argumentos, incluindo provas e generalizações. Nesse nível, os alunos são aptos tanto para resolver quanto para propor problemas, e também apresentam habilidades de comunicação. Os problemas do nível de competência de conexão, regularmente, podem ser resolvidos em diferentes níveis, com diferentes estratégias e conteúdos matemáticos. Nos problemas do terceiro nível de competência, em geral, os alunos precisam compreender o problema, tomar decisões, comunicar suas conclusões oralmente ou por escrito, utilizar diferentes ferramentas matemáticas, organizar o seu trabalho, lidar com mais de uma resposta correta, transferir o problema para o mundo real, enfim, problemas do mais alto nível exigem habilidades de pensamento do mais alto nível (DE LANGE, 1995). Além disso, nos problemas de nível 3, nem sempre é fácil identificar o que é do campo numérico, geométrico, algébrico ou de medidas (DEKKER e QUERELLE, 2002).

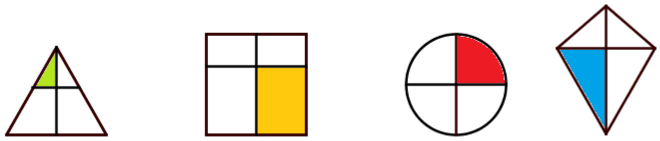
De Lange (1999) adverte que não existe uma distinção clara entre os níveis. Tanto altas quanto baixas habilidades frequentemente são utilizadas em diferentes níveis. Dekker e Querelle (2002) observam que a classificação de uma questão, segundo os níveis de competência, depende do que foi ensinado anteriormente, pois uma tarefa rotulada como de nível 1 para uma faixa etária, pode ser classificada como de nível 2 para outra. Uma mesma tarefa pode ser classificada em diferentes níveis, dependendo do período do ano. Em uma classe, uma tarefa pode ser classificada em níveis diferentes para cada grupo de alunos. Segundo as autoras, a classificação não depende apenas do formato e do conteúdo, mas, também, da forma que o aluno lidou com a tarefa antes.

Conforme De Lange (1995), **problemas do nível 1** ou do nível de competência de reprodução são os mais comuns e compõem a maioria do material

[96] Level 3, which goes to the heart of mathematics and mathematical literacy (…)

instrucional de todos os níveis de ensino, bem como os testes tradicionais. São questões como:

1. Qual figura mostra $\frac{1}{4}$?



2. Escreva 69% na forma de fração.

3. Desenhe uma figura com os lados paralelos.

De Lange (1995) observa que muitos problemas da vida real resolvidos passo a passo são do mais baixo nível, porque os livros textos tratam esse tipo de problema de forma padronizada, o que não tem significado real.

Problemas como:

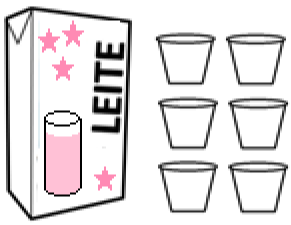
1. Cristiane emprestou de uma financiadora R$ 5000,00. Ela vai pagar 5% de juros ao mês. Quanto ela irá pagar no final de um ano? (Adaptado de De Lange 1995)

2. Você dirigiu seu carro por 200 km e usou 21 litros de gasolina. Quantos quilômetros você dirigiu com 1 litro de gasolina? (Adaptado de De Lange 1995)

De Lange (1995) observa que podem ser classificados como do nível de competência de reprodução ou de conexão. A classificação dependerá das instruções dadas pelo professor, do livro didático utilizado, dos problemas feitos anteriormente e da idade dos estudantes. Se eles forem apenas problemas rotineiros, de desenvolvimento do algoritmo, serão classificados como problemas do nível 1, ou de reprodução. Se for, porém, um problema que oferece ao aluno alguma possibilidade de matematização, será classificado como problema do nível 2, ou de conexão.

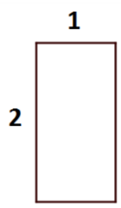
Segundo De Lange (1995), **problemas do nível 2** podem ser caracterizados por palavras-chave como “fazer conexões”, “integração” e “resolução de problemas”. Poucos testes utilizam problemas desse nível. Alguns exemplos do nível 2 ou do nível de competência de conexão apresentados pelo autor são:

1. Observe a figura:

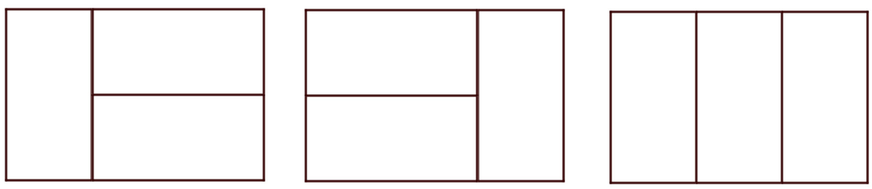


Quantas caixas são necessárias para servir 81 crianças? (Adaptado de De Lange, 1995)

2. Você tem um retângulo de 2×1 como este:



Você pode usar esses retângulos para fazer outros retângulos que têm duas unidades de profundidade para qualquer largura que você escolher. Por exemplo, existem alguns retângulos 2×3:



- Descreva quantos retângulos 2 × n é possível fazer com um retângulo 2 × 1 (onde n é um número natural). Justifique sua conclusão.

- Estenda sua solução para descrever quantos retângulos 3 × 4 podem ser feitos com um retângulo 3 × 1.

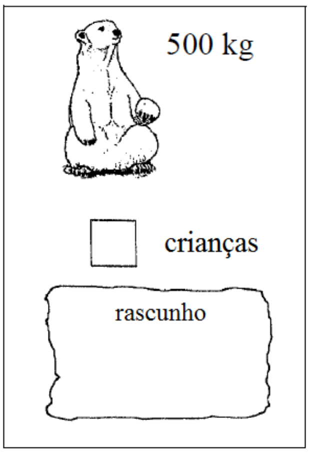
- Estenda sua solução para descrever quantos retângulos m × n podem ser feitos de um retângulo m × 1 (onde m é n são números naturais).

De Lange (1995) reforça que os níveis são arbitrários e que se pode discutir se os exemplos apresentados são ou não de diferentes níveis. Os exemplos apresentados por ele foram retirados de testes reais e, segundo o autor, mostram aspectos que não pertencem ao nível mais baixo, pois, para resolvê-los, não basta apenas reproduzir um conhecimento adquirido.

Com relação aos **problemas do nível 3** ou do nível de competência de matematização (reflexão/análise), De Lange (1995) observa que descrever problemas do mais alto nível é mais difícil do que descrever problemas de nível médio. Isto se deve ao fato de lidar com questões complexas como: pensamento e raciocínio matemático, comunicação, atitude crítica, interpretação, reflexão, criatividade, generalização e matematização.

O autor apresenta alguns exemplos de problemas que foram trabalhados com crianças do Ensino Fundamental I, como o problema do urso polar (Figura 9), que também consta em Van den Heuvel-Panhuizen (1996).

Figura 7: O problema do urso polar



Instrução para ser lida em voz alta:
"Um urso polar pesa 500 kg. Quantas crianças juntas pesam tanto quanto um urso polar? Escreva a sua resposta na caixa vazia. Se quiser, você pode usar o rascunho." (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN (1996, p. 95) (tradução nossa) [97].

Fonte: Van den Heuvel-Panhuizen (1996)

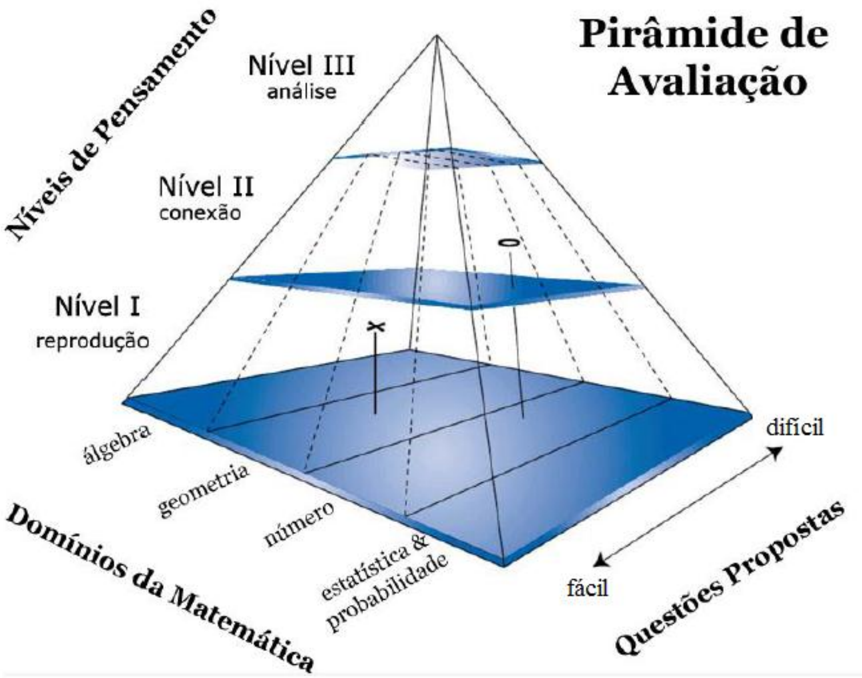
De Lange (1995) comenta que, para resolver esse problema, as crianças precisam conhecer medidas. É dado apenas o peso do urso polar. Uma das formas de resolvê-lo é determinando o peso médio de uma criança, outra é utilizar o peso real de algumas crianças. Essas são decisões que o resolvedor precisa tomar, preferencialmente sozinho ou

[97] Instructions to be read aloud:
"A polar bear weighs 500 kilograms. How many children together weigh as much as one polar bear? Write your answer in the empty box. If you like, you may use the scratch paper."

com o apoio de outros alunos. Esse é um problema classificado, para alunos do Ensino Fundamental I, como de nível 3, principalmente por exigir uma tomada de decisão.

Segundo o autor, os três níveis podem ser representados na forma de uma pirâmide com três dimensões ou aspectos: a) o conteúdo ou domínio da matemática, b) os três níveis de pensamento e compreensão matemática e c) o nível de dificuldade das questões. Utilizou-se a figura de uma pirâmide (Figura 10) devido às diferentes características das questões em cada um dos níveis. Itens que pertencem ao primeiro nível podem ser resolvidos mais rápido. Quanto maior o nível da questão, mais tempo é necessário para a resolução dos problemas.

Figura 8: "Pirâmide de Avaliação" (1999)



Fonte: Adaptado[98] de Ferreira (2013)

Os domínios da matemática que compõem a "Pirâmide de Avaliação" podem ser relacionados aos três eixos ou temas estruturadores que constam nos PCN+ (BRASIL, 1999) para o Ensino Médio, ou seja: 1) álgebra: números e funções; 2) geometria e medidas e 3) análise de dados. O primeiro eixo conglomera os domínios de álgebra e número da "Pirâmide de Avaliação"; o segundo eixo, o domínio da geometria e o terceiro, o domínio da estatística e probabilidade. Para o Ensino Fundamental, de acordo com os PCN (BRASIL, 1998), os conteúdos são organizados nos blocos: números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas, tratamento da informação, que podem ser comparados com os temas da

98 Decidiu-se manter a tradução: easy – fácil e difficult – difícil

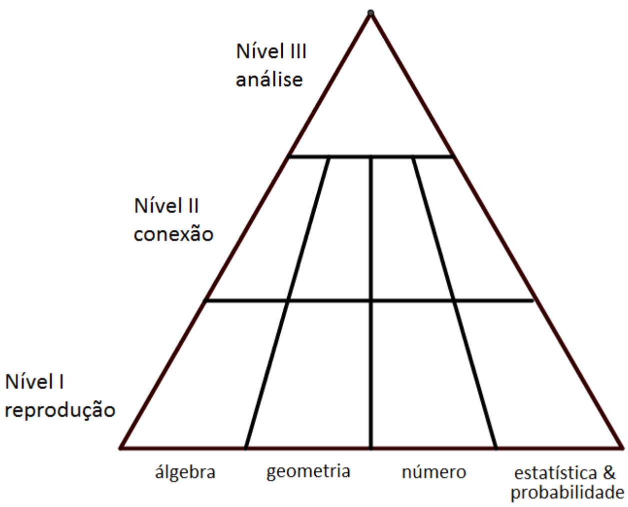
“Pirâmide de Avaliação” da seguinte forma: números e operações com número; espaço e forma com geometria; estatística e probabilidade com tratamento da informação e grandezas e medidas com álgebra e números.

Shafer e Foster (1997) observam que toda questão de avaliação pode ser localizada na pirâmide segundo o nível de pensamento, o domínio do conteúdo e o grau de dificuldade. Na Figura 8, por exemplo, o “**X”** corresponde a uma questão de geometria, do nível I, que tem um grau de dificuldade médio, enquanto o “**O”** corresponde a uma questão de número, do nível II, que tem um grau de dificuldade um pouco mais difícil.

Segundo Van den Heuvel-Panhuizen (1996), a “Pirâmide de Avaliação” pode servir como uma orientação para elaborar uma prova. Conforme a autora, esse modelo pode ser utilizado para mostrar como os problemas em uma determinada prova foram distribuídos ao longo dos vários temas, níveis e graus de dificuldade.

O modelo proposto por De Lange passou por adaptações. Inicialmente foi representado por um triângulo (Figura 9) (DEKKER e QUERELLE, 2002). Segundo Dekker (2014), a forma triangular começou a ser utilizada na concepção do estudo holandês para a Opção Nacional e o Estudo TIMSS de 1995, em conjunto com o instituto de avaliação holandês denominado Cito. A equipe de organização desses testes utilizou a forma triangular para melhorar as ideias a respeito do equilíbrio dos conteúdos em um teste, que mais tarde foi denominado “nível de perguntas”. Essa representação foi aplicada primeiramente em uma publicação interna da Universidade de Twente[99].

Figura 9: Triângulo de avaliação proposto por De Lange



Fonte: Adaptado de Dekker e Querelle (2002)

---

[99] De Lange, J. & Boertien, H. (1994) Model voor wiskundetoets nationale optie TIMSS 1995. Enschede: University of Twente, OCTO (internal note).

No eixo horizontal desse modelo, foram indicados os eixos curriculares: estatística e probabilidade, número, geometria e álgebra e verticalmente os níveis de competência que um aluno deve ter para resolver corretamente um problema. A forma triangular foi escolhida para indicar a quantidade de problemas e perguntas de cada nível de uma prova equilibrada ou balanceada, tanto em avaliações na prática escolar quanto em avaliações em larga escala. Essa forma também representa a distribuição da pontuação nos diferentes níveis. Segundo esse modelo, para uma prova equilibrada, deve-se destinar uma quantidade maior de tempo e pontuação para as perguntas de nível I e uma menor quantidade para as perguntas de nível II e III. Os problemas de nível I, que avaliam habilidades básicas, são mais fáceis de resolver enquanto os de nível II e III são mais difíceis (DEKKER e QUERELLE, 2002).

Dekker e Querelle (2002), ao utilizar esse modelo e discuti-lo com professores, observaram que a forma triangular não era suficiente. Alguns professores acreditavam que um problema difícil deveria ser classificado como um de nível de competência superior, porém isso não é necessariamente verdadeiro. Com isso, o triângulo se transformou em uma pirâmide, conforme mostrado na Figura 8. A terceira dimensão foi acrescida para distinguir um problema fácil de um difícil dentro do mesmo nível de competência.

Por exemplo, um problema que solicita o cálculo de 75% de uma expressão como: $\dfrac{\sin^2 30^\circ - \left(\frac{1}{2}\right)^2 .(0{,}8)^{-1} + \sqrt{2{,}25}}{\frac{11}{20} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 .(\cos 60^\circ + \tan 45^\circ)^2}$ (DE LANGE, 1995; VERHAGE, H. DE LANGE, 1997), é um exemplo de questão difícil, sem contexto que exige competências do mais baixo nível e é resolvido por meio de um procedimento padrão.

Nas avaliações do PISA de 2000, 2003, 2006 e 2009, as competências matemáticas foram avaliadas por meio de itens que ajudam a organizar as habilidades em três grandes classes de competência: reprodução, conexão e reflexão (OCDE, 1999, 2003, 2006 e 2009), pois De Lange presidiu o Grupo de Especialistas de Matemática[100]. Na edição de 2012, o Grupo de Especialistas de Matemática do PISA foi presidido por Kaye Stacey, da Universidade de Melbourne. A competência de reprodução envolve conhecimentos praticados em sala de aula. A competência de conexão inclui a aplicação da resolução de problemas não

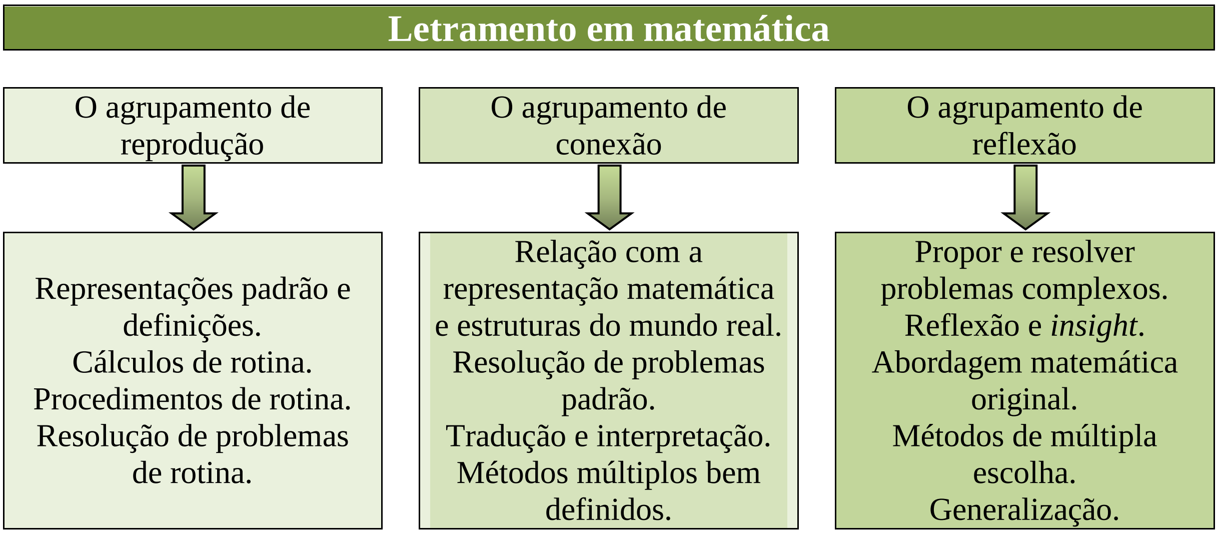
[100] Chairman of the Mathematics Expert Group of the OECD/PISA.

rotineiros e envolvem situações familiares ou quase familiares. A competência de reflexão envolve processos, conhecimentos e habilidades matemáticas que incluem um elemento de reflexão por parte dos estudantes a respeito do processo necessário para se resolver problemas. Estão relacionados às habilidades dos estudantes em planejar estratégias de resolução e implementar soluções para problemas que contêm mais elementos e podem ser originais, ou seja, menos familiares do que os da competência de conexão (OECD, 2009). Conforme já foi descrito ao explicitar os três níveis de competências, no PISA, as questões estavam a serviço de avaliar o letramento matemático definido como uma

> (…) capacidade individual para identificar e compreender o papel que a matemática desempenha no mundo, para fazer julgamentos bem fundamentados e para usar o engajamento com a matemática da maneira que encontra para atender as necessidades da vida individual como um cidadão construtivo, preocupado e reflexivo (OCDE, 2009, p. 14) (tradução nossa) [101].

A distinção entre os agrupamentos de reprodução, conexão e reflexão relacionados ao letramento em matemática é sintetizada pela OCDE (2009) (Figura 12).

Figura 10: Resumo da distinção entre os agrupamentos das competências



Fonte: Adaptado de OCDE, 2009.

A composição da prova do PISA é um exemplo do uso da "Pirâmide de Avaliação". O uso da Pirâmide e de todos os demais princípios de avaliação da RME

[101] (…) individual's capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded judgements and to use and engage with mathematics in ways that meet the needs of that individual's life as a constructive, concerned and reflective citizen.

apresentados, utilizados nas provas do PISA, é devido à influência de De Lange como presidente do grupo de especialistas em matemática da OCDE nas aferições de 2000 até 2009.

5.3 Princípios de avaliação da RME

A intenção com este capítulo foi apresentar aspectos característicos dos princípios de avaliação da Educação Matemática Realística, especialmente os propostos por De Lange (1987, 1995, 1996, 1999, 2002, 2003). Para atingir tal objetivo, partiu-se da tese de De Lange (1987), mais especificamente do projeto HEWET devido à relação desse projeto com a abordagem da RME. Conforme a declaração de Treffers (1987) e De Lange (1987), o quadro teórico dos projetos só foi construído no final, mas durante a concepção e a execução eles estavam envolvidos com a concepção de Freudenthal de matemática como uma atividade humana, e todas as demais questões que derivam dessa compreensão.

O projeto HEWET é um dos resultados das mudanças que ocorreram na educação escolar holandesa liderada pela "Commission on the Modernization of the Mathematics Curriculum" (CMLW). O programa de Matemática A, elaborado para o projeto, priorizava a aplicação. As atividades desse currículo privilegiavam o processo de matematização. A ideia era partir de atividades envolvendo situações realísticas que provocassem desequilíbrios cognitivos gerando reflexão e um processo de matematização conceitual, resultado da abstração/formulação de problemas de contexto realístico. Considera-se que a matematização é um processo dinâmico no qual o produto de um nível inferior pode ser utilizado para atingir um nível posterior.

De acordo com Verhage e De Lange (1997), a partir do momento em que o uso das situações de contexto torna-se uma meta da Educação Matemática, esse tipo de situação deve ser utilizada tanto no dia a dia do ambiente escolar quanto na avaliação. A equipe do projeto HEWET sentiu dificuldade de avaliar a atitude reflexiva dos alunos por meio de instrumentos de avaliação clássicos. Além disso, para De Lange (1999), a avaliação deve ter como objetivo produzir informações que auxiliem no processo de ensino e de aprendizagem. Nessa perspectiva desenvolveram instrumentos de avaliação alternativos que pudessem mostrar o conhecimento dos estudantes.

Foi nesse âmbito que De Lange (1987) formulou os primeiros princípios de avaliação para a RME. Eles consideram que os instrumentos de avaliação devem melhorar a aprendizagem, permitir que os alunos mostrem o que sabem; operacionalizar os objetivos do currículo; ser flexíveis e estar inseridos no cotidiano escolar. Posteriormente De Lange (1999) acrescentou outros princípios que indicam que a matemática deve ser incorporada a problemas realísticos, é necessário oferecer diferentes oportunidades para os alunos demonstrarem o que sabem, os critérios e o processo de avaliação devem ser públicos, uma avaliação de qualidade deve oferecer ao aluno a oportunidade de receber *feedback* a respeito da sua produção. Para o autor, o objetivo do ensino é a aprendizagem, por isso a avaliação deve estar inserida no processo ao invés de ser apenas uma maneira de obter notas. Conforme De Lange (1999), esses princípios mostram o principal objetivo para a Educação Matemática, ou seja, tornar os alunos matematicamente letrados.

Para que a avaliação, em uma perspectiva didática, seja efetivada, é necessário estabelecer objetivos que atendam às ideias fundamentais a serem operacionalizadas, desde habilidades específicas até os objetivos mais gerais. As habilidades específicas referem-se aos procedimentos básicos que podem ou não ser abordados por meio de situações de contextos, enquanto os objetivos gerais estão relacionados à matemática escolar como um todo, na qual os problemas de contexto exercem um papel relevante na elaboração deles e nas possibilidades de aplicação dos ramos da matemática. Os princípios que norteiam uma avaliação didática orientam a ação do professor para a avaliação das habilidades gerais da matemática que podem ser representadas por meio de níveis de competência baixa, média e difícil, tratadas por questões com diferentes níveis de complexidade. De Lange (1987) reconhece diferentes níveis que, para ele, se referem aos níveis de exigência cognitiva de uma questão.

Esses diferentes níveis de exigência cognitiva foram organizados por De Lange (1999) nas classes de competência de reprodução, conexão e matematização e representados por meio da "Pirâmide de Avaliação" que, de acordo com Van den Heuvel-Panhuizen (1996), pode servir como uma orientação para elaborar uma prova. Tanto os princípios de avaliação quanto a "Pirâmide de Avaliação" refletem o resultado de mais de 20 anos de pesquisa em sala de aula. Eles provêm da reflexão a respeito de situações reais de ensino e de aprendizagem. Estudos de De Lange (1987, 1995, 1996, 1999, 2002, 2003) compuseram a fundamentação teórica de trabalhos do GEPEMA.

6. GEPEMA, AVALIAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA E VAN HIELE

Com o presente capítulo pretende-se identificar aproximações entre o trabalho dos Van Hiele, os princípios de avaliação da RME e trabalhos do GEPEMA. Buscam-se indícios das fases do processo de aprendizagem descrito por Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957, 1986) a partir de trabalhos do GEPEMA que utilizaram a perspectiva da avaliação didática fundamentados em De Lange (1987, 1992, 1995, 1996, 1999, 1999 a, 2002, 2003).

Encontram-se indícios da aproximação entre os trabalhos de Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957, 1986) e a abordagem da Educação Matemática Realística idealizada por Freudenthal (1968, 1973, 1983, 1991) desde a participação deles no Mathematics Study Group of the W.V.O (GOFFREE, 1993), pois, em geral, pessoas que participam de um mesmo grupo de estudos partilham ideias que possuem alguma justaposição. Além disso, Freudenthal orientou a tese de Van Hiele (1957) e, de alguma forma, participou da elaboração da tese de Van Hiele-Geldof (1957). Para Freudenthal (1991), eles conseguiram estabelecer o casamento entre teoria e prática. Segundo ele, o trabalho de Van Hiele-Geldof (1957) era um documento educacional único e valioso.

As teses de Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957) tiveram um caráter inovador para a época. Elas trataram do ensino da Matemática. Van Hiele-Geldof (1957) fez um experimento do ensino. Ela investigou as possíveis contribuições da didática para a elaboração do conhecimento e também o papel da linguagem na transição do pensamento visual para o lógico. Segundo a autora, a linguagem matemática só terá significado para o aluno se decorrer de uma experiência significativa e for acompanhada de uma estrutura de linguagem adequada. Recomenda-se que o professor inicie da fala cotidiana e, durante o processo de ensino e de aprendizagem, apresente a linguagem matemática. Tanto para Freudenthal (1973, 1991) quanto para Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957, 1986), a linguagem exerce um papel fundamental no processo de elaboração do conhecimento.

Outro ponto de conexão entre Van Hiele-Geldof (1957), Van Hiele (1957, 1986) e a abordagem da RME é a compreensão de como ocorre a aprendizagem. Segundo Freudenthal (1991), ela é um processo descontínuo. Dina Van Hiele-Geldof (1957) e Pierre Van Hiele (1957, 1959 e 1986) compartilham dessa afirmação. Conforme Van Hiele (1957), o processo de aprendizagem segue claramente um curso descontínuo. Cabe ao professor compreender a variação de ritmos e buscar meios para favorecer a mudança de um nível para um superior. Para Freudenthal (1991), os saltos revelam a presença de níveis. A descontinuidade é a propriedade mais importante da teoria de níveis. Durante a elaboração do conhecimento, chega um momento no qual o processo parece parar e, na sequência, ele continua como se o aluno tivesse amadurecido. O professor não consegue explicar o assunto. É como se falasse uma linguagem incompreensível. Conforme Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957), o professor deveria estruturar a situação de aprendizagem no conhecimento das relações lógicas entre os níveis em que os alunos se encontram durante a aprendizagem. Quando o aluno atinge um novo nível, ele passa a compreender a linguagem do professor.

Segundo Van Hiele (1986), por vezes, o aluno não compreende a linguagem utilizada pelo professor. É como se eles estivessem em mundos diferentes. Nesse caso, a aprendizagem não ocorre, pois o aluno não consegue estabelecer uma rede de relações. Nessas situações cabe ao professor guiar o aluno para um nível superior. Para Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957, 1959 e 1986), a transição de um nível para o outro pode ser auxiliada pelo professor por meio da orientação guiada. Freudenthal (1991) também tratou da orientação guiada utilizando o termo “reinvenção guiada”, que foi escolhido para explicar como imaginava que a matemática deveria ser aprendida. Para o autor, no contexto do ensino, o que ocorre é uma “invenção” do conteúdo matemático, por envolver tanto o conteúdo quanto a forma do conhecimento matemático. Ele compreende as invenções como fases do processo de aprendizagem, por isso foi adicionado o prefixo “re” de reinvenção, que, mediante o ambiente de instrução do processo de aprendizagem, é acompanhado do adjetivo “guiado”.

Freudenthal (1991) indica que Treffers, em 1987, foi capaz de sintetizar, em cinco princípios, o que significa “reinvenção guiada”, a saber: a) a escolha de situações de aprendizagem a partir da realidade do aluno apropriadas para a matematização horizontal, b) a oferta de ferramentas para a matematização vertical, c) a instrução interativa entre os alunos e entre o professor e os alunos, d) a produção do próprio aluno e, finalmente, e) o entrelaçamento da aprendizagem. Freudenthal (1991) reforça que nesse processo o professor deve provocar o pensamento reflexivo visto que ele é um motor forte da invenção matemática, sendo assim, é natural utilizá-lo em um projeto educativo.

Por outro lado, Van Hiele (1986) distingue cinco fases na transição de um nível de conhecimento para o seguinte, que consistem: a) na informação, na qual os alunos se familiarizam com o conhecimento; b) na orientação guiada, em que os alunos são orientados a realizar diferentes tarefas relacionadas à rede de relações que deve ser formada; c) na explicitação, em que os alunos tomam consciência das relações e procuram expressá-las verbalmente; d) na orientação livre, na qual os alunos aprendem tarefas gerais e e) na integração, ou seja, na construção de uma visão geral a respeito de tudo que aprenderam.

Tanto as fases estabelecidas por Treffers (1987) para a “reinvenção guiada” quanto as estabelecidas por Van Hiele (1986) têm a intenção de provocar a reflexão, ou seja, desencadear *insight* que, na perspectiva de Van Hiele, ocorre quando o aluno atua correta e intencionalmente em uma situação nova. Para esse autor, o *insight* e as situações de aprendizagem estão muito próximos. Após certo tempo em aprendizagem, a pessoa se torna capaz de agir adequadamente diante das situações que surgirem durante o processo de aprendizagem.

A proposta da RME de guiar a ação do aluno por meio da reinvenção guiada provém da ideia da matemática como uma atividade humana, que, na perspectiva de Freudenthal (1973, 1991), significa reconhecê-la como uma atividade da natureza humana. Essa concepção também pode ser reconhecida em Van Hiele-Geldof (1957) ao indicar que a matemática é um conhecimento da mente assim como do mundo. Ela pode ser vista como um ponto de tangência entre o empírico e o intelectual. Nessa perspectiva, o processo de aprendizagem da matemática ocorre por meio da matematização.

Conforme La Bastide-Van Gemert (2006), Freudenthal reconheceu que os Van Hiele foram os primeiros a tratarem do processo de matematização, apesar de eles não terem utilizado explicitamente o termo. Esse é um processo que pode ocorrer em diferentes níveis. O real processo de matematização, de produção do conhecimento matemático, ocorre quando o aluno tem a oportunidade de analisar, interpretar, desenvolver seus próprios modelos e estratégias e elaborar argumentos, incluindo provas e generalizações. Esse nível exige habilidades de níveis superiores de pensamento.

A concepção de matematização permeia os projetos desenvolvidos na perspectiva da RME. Por exemplo, no projeto HEWET, desenvolvido por De Lange (1987), a matematização caminha junto com a reflexão. Para o autor não existe matematização sem reflexão, sem *insight*. Ele propõe iniciar a partir da exploração fenomenológica de um conceito matemático estruturado no primeiro nível que será processado por meio da reinvenção guiada até que se alcancem níveis mais elevados, ou seja, um processo de matematização conceitual que é desencadeado a partir de problemas de contexto.

Assim como Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957) já haviam apontado, De Lange (1987) também indica que os diferentes tipos de contexto interferem no possível processo de matematização e que não é possível avaliar problemas de todos os contextos por meio de instrumentos como a prova escrita em tempo restrito. Existe a necessidade de concepção de diferentes instrumentos de avaliação que permitam ao professor obter informações que possam apoiar o processo de ensino e de aprendizagem, segundo a concepção da RME. Além disso, também é necessário estabelecer a proporção de questões de cada nível em função do tempo que deve ser destinado a cada tipo de problema.

Um aspecto relevante do trabalho dos Van Hiele presente nos projetos WISKOBAS e HEWET é o didático. Nas teses de Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957) e também no livro "Structure and *insight*: a theory of Mathematics Education" Van Hiele (1986), os autores sugerem que, antes de estudar um fenômeno, seja feita uma análise do contexto em que esse fenômeno aparece como um símbolo. A perspectiva didática fenomenológica do trabalho deles recebeu forte influência De Langeveld, orientador dela. Dina Van Hiele-Geldof (1957) já indicava que, quando o professor proporciona um contexto apropriado, as crianças podem fazer descobertas.

Outro ponto a ser destacado nos projetos WISKOBAS e HEWET, assim como nas teses dos Van Hiele, é o casamento entre teoria e prática. As pesquisas de Treffers (1987), De Lange (1987), Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957) partiram do pressuposto da unidade do processo de ensino e de aprendizagem no sentido de considerar que são processos distintos, mas que se complementam, um amálgama. A compreensão da unidade do processo de ensino e de aprendizagem está de acordo com a concepção da RME da matemática como uma atividade humana e da avaliação didática, assim como da avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem.

Os conceitos teóricos que embasaram os projetos WISKOBAS e HEWET só foram identificados durante a execução (DE LANGE, 1987), somente nesse momento os pesquisadores conseguiram constatar a relação do trabalho que desenvolviam com a teoria de níveis de Van Hiele. Segundo Treffers (1987), o trabalho do WISKOBAS em três fases reflete claramente o processo de aprendizagem em três níveis conforme a teoria de níveis de Van Hiele (1986). Conforme De Lange (1987), na perspectiva de Van Hiele (1986), o primeiro nível de pensamento é alcançado quando o aluno consegue manipular as características de um padrão familiar; no segundo nível, o aluno é capaz de manipular as características alcançadas no segundo nível e, no terceiro, o aluno começa a manipular as características intrínsecas das relações. No entanto Treffers (1987) não reconheceu no trabalho de Van Hiele (1986) como o autor caracteriza a exploração fenomenológica e também as ações que podem ajudar os alunos a mudarem de um nível para o seguinte. Para Van Hiele (1986), do ponto de vista fenomenológico, inicialmente ocorrem a fixação do contexto do tema e a elaboração da linguagem técnica. A fixação de conceitos de um nível mais alto de pensamento deve ser feita a partir dos símbolos dessa linguagem. Segundo ele, o caráter construtivo de uma ciência fica evidente mediante o desenvolvimento da linguagem. As ações que podem ajudar um aluno a mudar de um nível para o seguinte são denominadas por Van Hiele (1986) como fases do processo de aprendizagem: informação, orientação guiada, explicitação, orientação livre e integração.

Tendo em vista a perspectiva da avaliação didática, De Lange (1987) partilha da ideia de Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957) de que o processo de avaliação deve ser coerente com a perspectiva metodológica utilizada em sala de aula, ou seja, não é possível avaliar o *insight* em matemática, o processo de matematização, a partir de instrumentos de avaliação que retratam apenas um momento, como as provas escritas. Para De Lange (1999), o ensino deve ter como objetivo a aprendizagem, e os testes e tarefas devem fazer parte desse processo. O objetivo da avaliação deve ser produzir informações que auxiliem o processo de aprendizagem e a tomada de decisões. Para atingir esse objetivo, a equipe do projeto HEWET desenvolveu instrumentos de avaliação: a prova em duas fases, o teste ensaio, a prova de levar para casa e o teste oral.

Esses instrumentos foram testados pelos membros do projeto HEWET tendo em vista cinco princípios para a avaliação. De acordo com esses princípios, as provas devem melhorar a aprendizagem, devem permitir que o aluno mostre o que sabe, devem operacionalizar os objetivos curriculares, não devem ser mensuradas pela facilidade de acerto e devem ser inseridas na prática escolar habitual (DE LANGE, 1987). A intenção com esses princípios é oferecer aos estudantes *feedbacks* adequados, permitir que eles mostrem o que sabem, favorecer o processo de resolução, dar oportunidade para o estudante explicar o processo de resolução e tomar a avaliação como mais um componente da ação didática. Posteriormente De Lange (1999) acrescentou outros princípios a essa lista: a matemática deve ser incorporada a problemas realísticos; os alunos devem ter diferentes oportunidades para documentarem o que sabem, os critérios de avaliação devem ser públicos, os alunos têm o direito de receber *feedback* a respeito do seu trabalho e uma tarefa de avaliação de qualidade deve ser autêntica e justa. Segundo o autor, esses princípios podem ser tomados como um *checklist* para os professores que levam a sério a avaliação em sala de aula. Conforme o autor, eles explicitam o principal objetivo da Educação Matemática que é tornar os estudantes matematicamente letrados.

Esses princípios foram levados em consideração por De Lange (1999) para explicitar as competências cognitivas que revelam o letramento matemático. De Lange (1999) sintetizou as competências em três níveis: reprodução, conexão e reflexão. No nível 1 (reprodução), espera-se que o aluno desenvolva tarefas rotineiras. No nível 2 (conexão), espera-se que o aluno comece a fazer relações entre os domínios da matemática para a resolução de problemas. No nível 3 (reflexão), o aluno tem a oportunidade de fazer matemática.

Esses três níveis foram representados por De Lange (1999) na "Pirâmide de Avaliação" que contempla o conteúdo ou domínio da matemática, os níveis de competência cognitiva e o grau de dificuldade das questões. Foi escolhida a forma de uma pirâmide para abarcar as diferentes características de questões de cada um dos níveis de competência, pois questões de reprodução são resolvidas rapidamente, questões de conexão exigem um pouco mais de tempo e questões de reflexão exigem mais tempo.

Desde 2009, os trabalhos de De Lange (1987, 1995, 1996, 1999, 2002, 2003) e de Dekker e Querelle (2002), que, entre outros assuntos, tratam da "Pirâmide de Avaliação", vêm compondo o referencial teórico das teses e dissertações desenvolvidas no interior do GEPEMA. As pesquisas dos membros do Grupo utilizaram diferentes aspectos do trabalho de De Lange, conforme consta no Apêndice.

Os aspectos do trabalho de De Lange (1987, 1995, 1996, 1999, 2002, 2003), explorados pelo GEPEMA, abordam, em especial, a "Pirâmide de Avaliação"; os níveis de competências cognitivas; os instrumentos de avaliação, mais especificamente, a prova em duas fases; a natureza didática da avaliação; os princípios de avaliação; o conceito de letramento matemático; a matematização; o papel do contexto em tarefas do cotidiano escolar; além de questões gerais da RME, que já foram apresentadas no segundo capítulo deste trabalho.

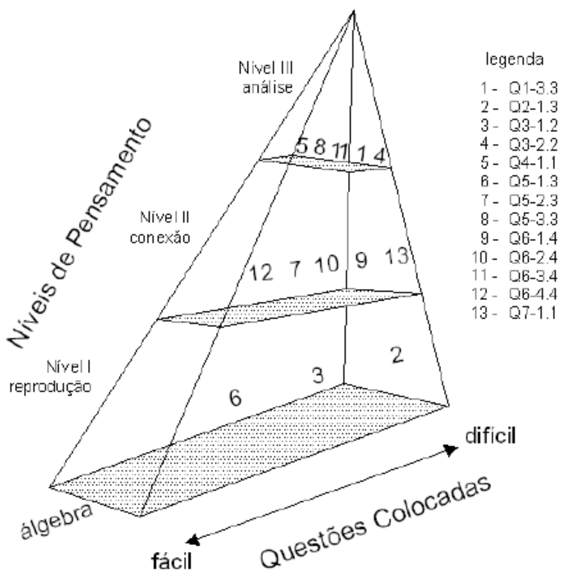
O primeiro trabalho desenvolvido no interior do GEPEMA que fez referência a De Lange foi Almeida (2009), que trata da "Pirâmide de Avaliação" a partir do trabalho de Dekker e Querelle (2002). Ela empregou a "Pirâmide de Avaliação" por estar relacionada à classificação de problemas, segundo os níveis de competências do PISA, Programa Internacional de Avaliação, do qual ela tomou questões não rotineiras para analisar a produção escrita de graduandos de Matemática.

De modo geral, os trabalhos de Almeida (2009), Bezerra (2010), Lopez (2010), Ciani (2012), Pedrochi Junior (2012), Ferreira (2013), Trevisan (2013), Pereira Junior

(2014) e Mendes (2014) tratam de princípios de avaliação da RME e apresentam a “Pirâmide de Avaliação” como uma imagem visual da quantidade de tarefas necessárias para representar o desempenho dos estudantes (DE LANGE, 1999).

Trabalhos desenvolvidos no interior do GEPEMA produziram diferentes recortes para o modelo de avaliação da “Pirâmide de Avaliação” à luz dos princípios de avaliação. O primeiro recorte da pirâmide foi feito por Lopez (2010, p. 13), que investigou “a produção escrita dos alunos paranaenses que participaram da aferição do PISA/2006, em questões não-rotineiras de matemática relacionadas com a ideia estruturadora de Mudanças e Relações, buscando compreender como lidaram com tais questões e o que mostram saber por meio delas.” Conforme a autora, esperava-se que as tarefas avaliadas, ou seja, que algumas questões da prova do PISA/2006, atendessem aos nove princípios de avaliação de De Lange (1999) e que as questões investigadas estivessem adequadamente distribuídas na parte da “Pirâmide de Avaliação” relacionadas à ideia estruturadora Mudanças e Relações, que, conforme as especificações do PISA, apresentam uma estreita ligação com a álgebra, permitindo dispor as questões na pirâmide. Para isso, a autora tomou a secção da pirâmide, relativa à álgebra, sem fazer distinção dentro do próprio nível e determinando a “dificuldade” da questão a partir da porcentagem de erros dos alunos, obtendo a Figura 11.

Figura 11: Secção da “Pirâmide de Avaliação” relacionada à álgebra no PISA/2006.



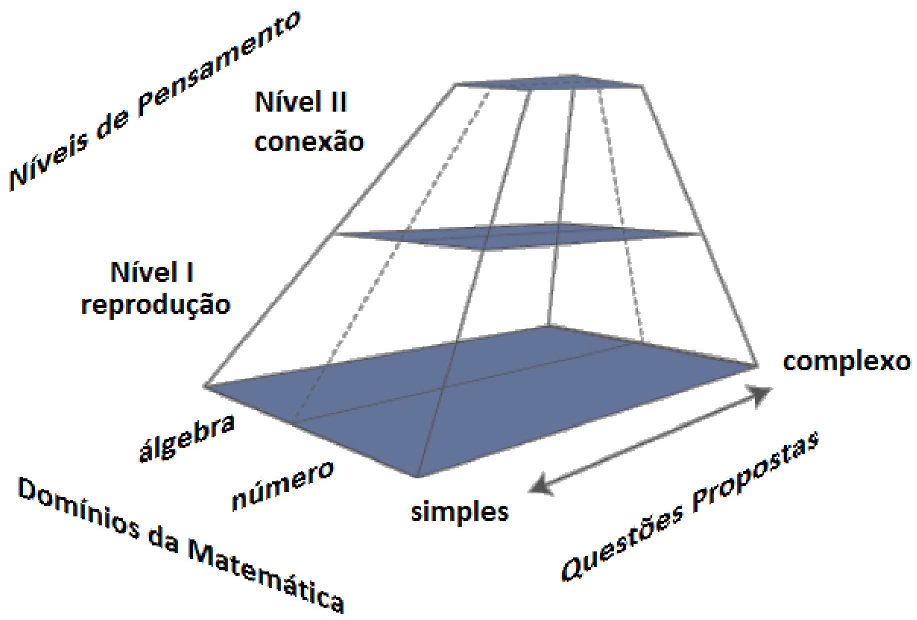
Fonte: Lopez (2010)

Lopez (2010) concluiu que da prova do PISA/2006 relacionados à álgebra, analisados no trabalho, contemplaram um dos quesitos para uma avaliação equilibrada, ou seja, cobriram todos os níveis de compreensão com diferentes níveis de dificuldade. A autora observou que o "preenchimento da pirâmide com itens que exigem diferentes níveis de compreensão e dificuldade é um ponto positivo em relação à qualidade da avaliação, porém não é suficiente" (LOPEZ, 2010, p. 134). Fundamentada em Van den Heuvel-Panhuizen (1996) e De Lange (1999), ela destaca a relevância dos itens que irão compor a pirâmide, que devem ser informativos e que possibilitem aos alunos mostrar o que sabem em relação ao conteúdo da questão e ao professor/avaliador visualizar informações a respeito do conhecimento do aluno. Assim como também foi indicado por Van Hiele (1957), para o autor é necessário que o professor conte com mecanismos de avaliação que favoreçam reconhecer os progressos dos alunos e o *insight* de forma que possam ajudá-los a ultrapassar as dificuldades. Além disso, é importante que as questões sejam acessíveis e flexíveis ao aluno, possibilitando-lhes o envolvimento na questão, garantindo ao menos a oportunidade de tentar responder à questão de acordo com o nível de compreensão em que se encontra.

Outra utilização da "Pirâmide de Avaliação" foi feita por Pereira Junior (2014), ao "analisar enunciados de itens de provas de Matemática do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, com a intenção de identificar os tipos que compõem as provas de Matemática, suas classificações e características segundo De Lange (1987,1999) e Van den Heuvel-Panhuizen (1996) (PEREIRA JUNIOR, 2014, p. 43)". O autor analisou 81 questões de uma coleta de 13 provas cedidas por professores que trabalham em escolas do Núcleo Regional de Educação da cidade de Maringá (interior do Paraná). Essas questões foram classificadas, no interior do GEPEMA, segundo De Lange (1987, 1999), e, na sequência, o autor fez a análise das questões de uma das provas recolhidas na perspectiva de De Lange (1987, 1995, 1999) e Van den Heuvel-Panhuizen (1996).

Pereira Junior (2014, p. 39) constatou que as "questões da prova escolhida para análise contemplam apenas os dois primeiros níveis de competência da pirâmide proposta por De Lange (1999)". Dessa forma, ela foi representada por um tronco da pirâmide relacionado apenas ao domínio dos números (Figura 15).

Figura 12: Tronco de Pirâmide baseado na “Pirâmide de Avaliação” (1999) que representa a prova analisada por Pereira Junior (2014).



Fonte: Pereira Junior (2014)

O autor observou que, de acordo com De Lange (1987, 1995, 1999), o ideal é que uma prova contenha questões dos níveis de conexão e de reflexão, para que seja possível oportunizar um processo de matematização. O autor também ressaltou que questões de reflexão devem permear a prática do professor nas aulas de matemática, para que o aluno tenha a oportunidade de matematizar na busca de elaboração do conhecimento. Segundo Van Hiele-Geldof (1957), a atividade matemática consiste em esquematizar dados empíricos, matematizar. Van Hiele (1986) sugere iniciar o processo de ensino e de aprendizagem por meio de situações-problema que possam ser matematizadas para posteriormente estudar as estruturas matemáticas.

Com relação às 81 questões que constam nas 13 provas analisadas, Pereira Junior (2014, p. 41) indicou que a maioria dos enunciados “instigam o aluno a lembrar de regras, critérios, efetuar algoritmos, traduzir informações do enunciado para uma linguagem matemática”. Para o autor, essa constatação parece mostrar que a prática dos professores que cederam as provas é a de enfatizar a operacionalização de técnicas nas aulas e que, para eles, “aprender significa exercitar técnicas, reproduzir procedimentos, reconhecer propriedades”

(PEREIRA JUNIOR, 2014, p. 43), diferente da abordagem de ensino da matemática proposta pela RME.

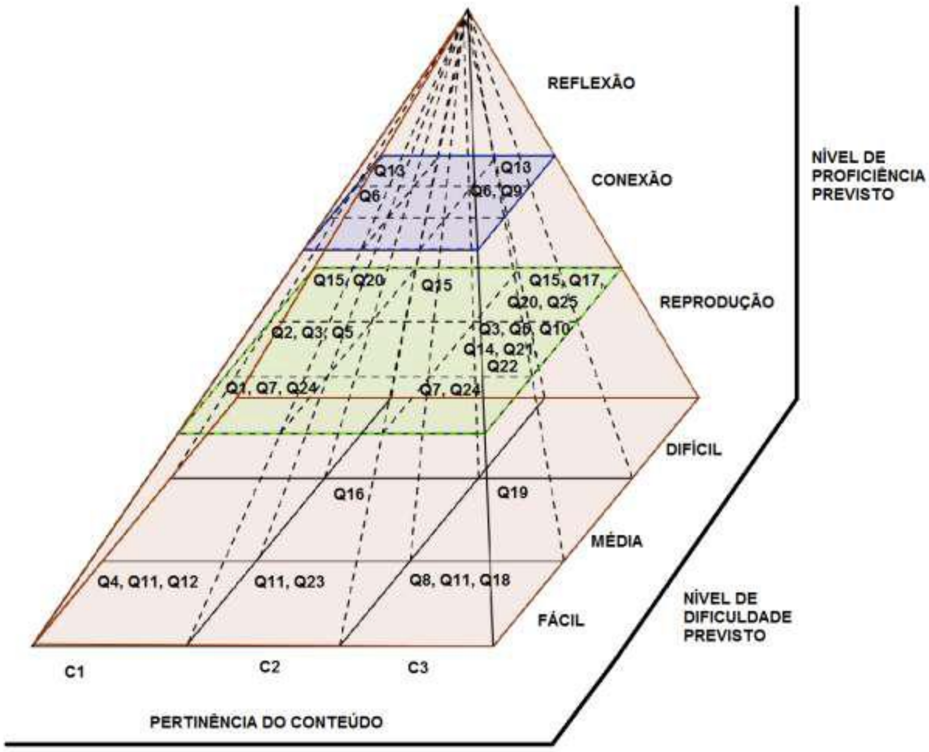
O mais recente trabalho desenvolvido no interior do GEPEMA que apresenta um recorte da "Pirâmide de Avaliação" é a tese de Mendes (2014), que teve como objetivo "investigar a utilização da Prova em Fases como recurso para a regulação da aprendizagem" (MENDES, 2014, p. 19). Mais especificamente, ela investigou a utilização da análise da produção escrita como: recurso de ensino, propulsor da regulação da aprendizagem, meio de repensar a prática letiva e forma de discutir as características de "boas" questões para uma prova. O trabalho foi desenvolvido com alunos do 1º semestre da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do curso de Engenharia de Materiais. Assim como o trabalho de Van Hiele-Goldof (1957), analisou situações de sala de aula.

Os dados analisados na tese foram coletados por meio de uma prova em fases composta por vinte e cinco (25) questões de matemática que foram selecionadas tendo em vista "as expectativas sobre o aluno que vai ser formado pelo curso de Cálculo Diferencial e Integral I, o conhecimento de conceitos básicos de matemática exigidos em cada questão, as competências apresentadas nos PCN+ e os níveis de proficiência discutidos por De Lange" (MENDES, 2014, p. 61 e 62).

Mendes (2014) procurou construir um instrumento de avaliação para oportunizar a aprendizagem. Para isso, ela tomou como base o modelo da "Pirâmide de Avaliação" (1999) com algumas adaptações. Da pirâmide original foram mantidos o nível de proficiência, o nível de dificuldade e o conteúdo abordado, que, nesse caso, era relacionado a: C1) Sistematização dos Conjuntos; C2) Sistema Cartesiano Ortogonal e C3) Relações e Funções no Espaço Real Bidimensional, que compunham os três primeiros blocos do programa da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

A Prova em Fases elaborada por Mendes (2014) foi representada na "Pirâmide de Avaliação" (1999) (Figura 16). A autora justificou a utilização de um número maior de questões do agrupamento de conexão, por considerá-las mais adequadas ao objetivo do trabalho e também por considerar que a prova foi composta por conteúdos do Ensino Médio, que era esperado que os alunos conhecessem.

Figura 13 – As questões da Prova em Fases de Mendes (2014) na “Pirâmide de Avaliação”.



Fonte: Mendes (2014)

Segundo Mendes (2014), a “Pirâmide de Avaliação” indica a necessidade de reflexão a respeito dos itens que uma prova deve abordar como um todo. A autora observa que esse modelo ganhou dinamismo na Prova em Fases desenvolvida durante a pesquisa. Segundo a autora, De Lange (1999) sugere que a escolha das questões para uma prova de acordo com o nível de competência respeite a proporção da “Pirâmide de Avaliação” (Figura 10). Porém essa proporção não foi respeitada durante a elaboração da prova e, além disso, as intervenções da professora/pesquisadora modificaram as competências necessárias para cada questão, pois, “como eram intervenções individuais, ao final das dez fases havia um sólido diferente, não necessariamente convexo, mas um sólido coerente com a produção escrita do aluno e das competências apresentadas por ele” (MENDES, 2014, p. 185).

Conforme a autora, a concentração das questões em relação aos níveis de competência (reprodução, conexão e reflexão) foi diferente para cada aluno. O nível de competência de cada questão ficou diretamente relacionado à interação escrita entre cada um dos alunos e a professora. Por exemplo, uma questão a respeito do cálculo do mínimo múltiplo comum de 2, 3 e 5, relacionada ao nível de proficiência de reprodução, tornou-se uma questão do nível de competência de reflexão, a partir da interação escrita entre a professora e o aluno ao refletir e ao discorrer a respeito dos conceitos envolvidos no procedimento de cálculo do mínimo múltiplo comum. A autora também relatou que, a partir das intervenções escritas, houve ao menos uma questão que, do nível de competência de reflexão, passou para o nível de competência de reprodução. De certo modo, a intervenção escrita realizada por Mendes (2014) atendeu às fases do processo de aprendizagem (VAN HIELE, 1986).

Outro aspecto do modelo da "Pirâmide de Avaliação" abordado por Mendes (2014) foi a pertinência do conteúdo. Segundo a autora, "Van den Heuvel-Panhuizen (1996) considera que os problemas de avaliação devem provocar o conhecimento a ser avaliado, ou seja, envolver o que se pretende avaliar e expressar o máximo possível o quanto os alunos integraram esse conhecimento e podem aplicá-lo em outras situações" (MENDES, 2014, p. 186). Esses problemas permitem que os alunos construam uma visão geral a respeito do que aprenderam - a fase da integração (VAN HIELE, 1986). Na prova em fases, desenvolvida pela autora, "as intervenções escritas da professora ao longo das fases serviram como carreadores do conhecimento a ser avaliado e de sua evolução nas produções escritas" (MENDES, 2014, p. 186).

Até 2014, no interior do GEPEMA, foram produzidas três teses que trataram da prova em fases. Essas teses expandiram a proposta original de De Lange (1987). Nelas, os autores discorreram a respeito de uma prova em fases e ampliaram a proposta original de duas para várias fases. Na tese de Mendes (2014), a prova em fases foi um "instrumento de ensino, de aprendizagem e de avaliação" (MENDES, 2014, p. 58). Ela foi utilizada como um meio para promover a regulação da aprendizagem.

O trabalho de Trevisan (2013) consiste em uma reflexão a respeito do desenvolvimento de uma prova em fases com uma turma do 2º ano de um curso Técnico Integrado ao Ensino Médio. Essa foi uma experiência que oportunizou ao professor/pesquisador refletir acerca de sua própria prática e das maneiras de como efetivar a avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem. Ao refletir nas questões escolhidas para a prova, ele sugere que algumas questões poderiam ser reformuladas de modo a incluir itens "que tenham mais de uma resposta e envolvam habilidades presentes nos três níveis da pirâmide de De Lange (1999)" (TREVISAN, 2013, p. 119). Essa foi outra tese do GEPEMA que tratou de situações de sala de aula, assim como fez Van Hiele-Geldof (1957).

O trabalho de Pires (2013) foi uma das ações do projeto "Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática" proposta pelo PECEM. O objetivo de

Pires (2013, p. 13) foi investigar a "análise da produção escrita como ação de intervenção organizada (reinvenção guiada) de modo que os participantes desenvolvam sua capacidade" de matematizar. Pautada em De Lange (1999), Pires indica que a prova em fases foi um instrumento que atendeu ao principal propósito da avaliação escolar, ou seja, promover a aprendizagem, conforme foi feito por Van Hiele-Geldof (1957) ao criar problemas que permitiam guiar os estudantes em direção de bons "padrões de pensamento".

A prova em fases é um instrumento de avaliação que explicita a natureza didática da avaliação (DE LANGE, 1987; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996). É um instrumento que serve à avaliação formativa, pois permite que o professor tome as informações recolhidas por meio do instrumento de avaliação para regular o seu próprio trabalho e do aluno na gestão da aprendizagem. Ela também atende aos princípios de avaliação desenvolvidos por De Lange (1987). Segundo Mendes (2014), a prova em fases, desenvolvida em sua pesquisa, contemplou os cinco princípios de avaliação de De Lange (1987). Anos depois, esses princípios de avaliação foram ampliados pelo autor. Trevisan (2013) lista os nove princípios elaborados por De Lange (1999) para nortear o trabalho de professores que têm compromisso com a avaliação. Esses princípios foram considerados pelos autores do GEPEMA durante a elaboração de instrumentos de coleta de informações e também na análise dos dados. Ciani (2012, p. 52) informa que, de acordo com "De Lange (1999), os princípios para a avaliação escolar foram elaborados com o objetivo de habilitar indivíduos para lidarem com a matemática envolvida nos problemas do mundo real". De Lange (1999) ainda afirma que os princípios são essenciais ao letramento em matemática e à habilidade de matematizar.

Desde as primeiras teses e dissertações, o aspecto didático da avaliação permeia os trabalhos do GEPEMA. O Grupo pesquisa a avaliação formativa, tomando a avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem, como um meio de orientar o trabalho do professor e dos alunos para se tornarem sujeitos matematicamente letrados. Essa também é a concepção de avaliação da RME. Essa abordagem de ensino considera a matemática como uma atividade humana, na qual se faz matemática por meio de situações realísticas mediadas pelo professor, ou seja, pela reinvenção guiada na qual a avaliação formativa exerce o papel de orientação do trabalho do professor e do aluno. Nesse contexto, Santos (2014) aponta a reinvenção guiada como um método de ensino que favorece o processo de matematização e, consequentemente, o desenvolvimento de ferramentas matemáticas.

A reinvenção guiada é um dos pilares da RME. Segundo La Bastide-Van Gemert (2006), ela surgiu da teoria dos níveis de Van Hiele. A partir da observação do trabalho dos matemáticos adultos, Freudenthal indica que a forma mais fácil de entender um documento matemático é reinventando seus resultados. Esse é um dos motivos que levou o autor a defender a ideia de que o mais importante no processo de aprendizagem é a reinvenção. Para ele um método de ensino baseado na reinvenção deve se preocupar com o processo de reinventar.

Essa é a perspectiva que Santos (2014) toma em sua tese. A autora afirma que a reinvenção guiada é um método de ensino. Ela observa que Treffers e Gofree (1985) indicam que a maneira que os alunos resolvem um problema pode tornar-se uma alavanca para o professor conduzir a situação de aprendizagem para níveis de pensamento mais elevados. Dessa forma, as produções dos alunos podem vir a ser o começo do processo de matematização. A partir do referencial da RME, utilizado pela autora, ela sintetizou as considerações a respeito de uma aula na perspectiva da reinvenção guiada, conforme foi apresentado no Capítulo II desta tese. O Quadro 4 apresenta uma síntese dos aspectos que já haviam sido abordados por Dina Van Hiele-Geldof (1957).

Quadro 4 – Alguns aspectos da dinâmica da aula sob a perspectiva da reinvenção guiada para Santos (2014) e Van Hiele-Geldof (1957)

Aspectos da reinvenção guiada para Santos (2014, p. 38)	**Aspectos da reinvenção guiada para Van Hiele-Geldof (1957)**
O trabalho em sala de aula tem início com a proposição de uma situação realística que possibilita diferentes níveis de matematização.	O professor deve proporcionar aos alunos experiências a partir das quais pode surgir a necessidade de ordenação do raciocínio lógico (matematização).
Após resolverem a situação, os alunos podem interagir uns com os outros e terem a oportunidade de analisar e discutir estratégias e procedimentos que utilizaram.	A discussão em classe é uma parte essencial (interação). A partir dela o professor pode certificar se as ideias individuais são partilhadas pela classe.
Durante e após o trabalho dos alunos, o professor pode fazer questionamentos para explorar as resoluções que apresentaram bem como as diferenças existentes entre elas, e discutir aspectos matemáticos subjacente a essas resoluções encorajando-os a se interessar por esses aspectos.	O segredo do ensino é a pergunta: por quê? Cabe ao professor estimular descobertas.

Os aspectos da reinvenção guiada listados por Santos (2014) provêm da sua leitura do referencial teórico da RME e, de certo modo, também das discussões teóricas no interior do GEPEMA. Vale observar algumas semelhanças entre o que foi listado por ela e o que se pode listar a partir da tese de Van Hiele-Geldof (1957). Esse último trabalho foi publicado há mais de meio século e ainda aborda questões atuais. Tanto Van Hiele-Geldof (1958) quanto Santos (2014) destacam o uso de situações realísticas e a matematização, reflexo da influência de Langeveld, orientador de Van Hiele-Geldof, e também de Freudenthal, que colaborou com a tese dela e é o idealizador da Educação Matemática Realística que vem sendo estudada pelo GEPEMA. As duas autoras também destacam a relevância da interação entre os alunos e dos questionamentos para a elaboração do conhecimento matemático. Ou seja, ainda é possível encontrar resquícios do trabalho dos Van Hiele na leitura de pressupostos da RME, possivelmente pela participação de Freudenthal na elaboração das teses e também da participação dos três em grupos de estudos comuns que tratavam do ensino da matemática por volta de 1940.

Mendes (2014) finaliza o trabalho indicando que "a prática avaliativa é um elemento da prática pedagógica, realizada permanentemente, com tarefas que não se diferenciam das tarefas de sala de aula (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996; BARLOW; 2006 apud MENDES, 2014, p. 207)". Essa é a perspectiva adotada pelo GEPEMA e também nesta tese, ou seja, de uma avaliação formativa que não pode ser dissociada das situações de ensino e de aprendizagem. Nesse sentido deve ser dado aos alunos oportunidade de vivenciar um processo progressivo de matematização por meio das tarefas de sala de aula. A autora propõe que as tarefas sejam como "pontos de ancoragem" para os alunos reinventarem a matemática.

Considerando que cabe ao professor organizar a situação didática, que, na perspectiva da RME, é feita por meio da "reinvenção guiada", que tem suas origens no trabalho de Dina Van Hiele-Geldof (1957), espera-se que as tarefas escolhidas atendam aos princípios da avaliação e, na medida do possível, contemplem a "Pirâmide de avaliação".

É na ação didática que se encontram aproximações com trabalho dos Van Hiele. É nela que o professor, durante o processo de "reinvenção guiada" proporciona situações de: informação, orientação guiada, explicitação, orientação livre e interação; em que cada aluno irá responder de uma forma e gradativamente vai mudando de um nível para o seguinte, por meio de "saltos" conforme colocado por Freudenthal, a partir de situações que preferencialmente proporcionem matematização. Segundo De Lange (1999), o verdadeiro processo de matematização ocorre mediante contextos de terceira ordem no nível de análise (terceiro nível). Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957) também destacam o papel do contexto para a elaboração do conhecimento matemático. Conforme representado na "Pirâmide de Avaliação" e também na descrição que o autor faz dos níveis, quanto maior a exigência cognitiva mais se reduz a diferença entre os domínios da matemática e o grau de dificuldade. Isso contempla o princípio do entrelaçamento, conforme sintetizado por Ferreira (2013) (Quadro 1), ao citar Van Den Heuvel-Panhuizen (1996), que indica que domínios como a geometria, os números, as medidas e a manipulação são elementos curriculares fortemente integrados. Além disso, esse entrelaçamento traz coerência para o currículo.

Com relação ao princípio dos níveis, Ferreira (2013) indica que, para Van Den Heuvel-Panhuizen (1996), os alunos passam por vários níveis de compreensão. Esses vários níveis ficam bem representados na "Pirâmide de Avaliação", na qual a forma tridimensional, apesar de estabelecer três regiões, permite imaginar as questões dispostas dentro dessas regiões. Os níveis de competência cognitiva estabelecidos por De Lange (1999) e representados na Pirâmide dizem respeito ao tipo de tarefa, ao contexto e à possibilidade de matematização. Por outro lado, os níveis estabelecidos por Van Hiele (1957, 1986) estão relacionados às habilidades do aluno em cada um dos níveis. Esses autores olham de modo diferente para os níveis.

A distribuição na "Pirâmide de Avaliação", baseada em De Lange, que Mendes (2014) apresentou para as questões que compuseram a prova em fases (Figura 16), utilizada por ela como instrumento de coleta de dados, permite visualizar uma "foto" dessa prova, pois ela reflete o que a autora pretendia com cada uma das questões no instante em que elaborou a prova. Quando os alunos receberam a prova, porém, a leitura que cada um fez de cada uma das questões possivelmente foi diferente do que havia sido idealizado, e a localização de cada um dos pontos (questões da prova) no espaço da Pirâmide pode ter tomado coordenadas diferentes.

As 25 questões examinadas por Mendes (2014) mostram como foi conduzida a ação didática. As análises dessa autora fornecem elementos para buscar aproximações entre o trabalho de Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957, 1986), os princípios de avaliação da RME (DE LANGE, 1987, 1999) e trabalhos do GEPEMA. Neste trabalho foram comentados três episódios da tese de Mendes (2014) que mostram uma transição entre os níveis de competência cognitiva.

A questão 12 do trabalho de Mendes (2014) (Anexo I) trata do mínimo múltiplo comum entre 2, 3 e 5. É uma questão rotineira de sala de aula, sem contexto, mas a interação entre o aluno e a professora/pesquisadora proporcionou um processo de matematização. Essa questão leva a refletir no que consiste o contexto da questão. Pode-se dizer que tanto a questão inicial (Escreva um número que seja, simultaneamente, múltiplo de 2, 3 e 5.) quanto as demais questões elaboradas pela pesquisadora (Q1 - O que significa dizer que 2, 3, 5 são primos? Q2 - Qual é a relevância disso [serem primos] para se determinar um valor múltiplo entre eles? Q3 - Apenas o número 30 é múltiplo de 2, 3, 5 simultaneamente? Q4 - O que significa dizer que 30 é múltiplo de 3? Q5 - Posso dizer que 6 é múltiplo de 1,5? Q6 - Na sua resposta anterior, você dizia que, para ser múltiplo, precisa estar na tabuada, agora que, mesmo não estando, pode ser múltiplo. Investigue uma condição para definir múltiplo de um número.) têm um contexto puramente matemático e que, tomadas separadamente, poderiam ser classificadas como questões sem contexto, porém, nessa situação específica, as questões podem ser classificadas como questões do contexto de 3ª ordem, pois propiciaram um processo de matematização. Segundo Treffers e Goffree (1985), procedimentos algorítmicos padrão que proporcionem aos alunos situações significativas podem ser tomados como problemas de contexto.

Ao elaborar a prova, Mendes (2014) considerou que essa era uma questão do nível de proficiência de reprodução e considerada como uma questão de nível fácil de dificuldade em relação ao conteúdo. Porém, após a análise da interação escrita com esse aluno, ela afirma que, ao solicitar que o aluno refletisse e discorresse a respeito de cada conceito envolvido no procedimento, ela se tornou uma questão no nível de competência de reflexão, pois houve a necessidade de argumentar, abstrair e generalizar conceitos matemáticos.

Segundo Mendes (2014, p. 132), um

> [...] movimento dos níveis das competências ao lidar com a questão, a partir das intervenções da professora, é evidenciado em R, RQ4 e RQ6. Em R, o aluno demonstrou uma competência de reprodução ao executar um procedimento de rotina para determinar um múltiplo. Em RQ4, o aluno trouxe a tabuada para sua resposta, evidenciando alguma ampliação do que havia apresentado em R, mais do que a execução de um procedimento de rotina. Por fim, em RQ6, o aluno articulou as respostas anteriores e apresentou uma abstração e generalização para o conceito de múltiplo, revelando competências de reflexão e uma regulação da aprendizagem.

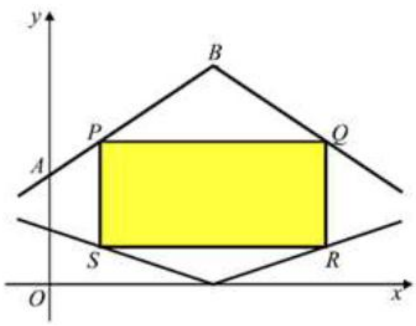
Essa transposição do nível de competência de reprodução para o nível de competência de reflexão ilustra a mudança de níveis ou a movimentação na “Pirâmide de Avaliação” por meio de um processo de reinvenção guiada conduzido pela professora, o que permite identificar aspectos do processo de aprendizagem listados por Van Hiele (1957, 1986).

Devido à especificidade da prova em fases, que foi o instrumento de coleta de dados utilizado pela autora, pode-se dizer que nessa questão as fases de informação e orientação guiada ocorreram concomitantemente. As perguntas elaboradas pela professora/pesquisadora traziam informações e ao mesmo tempo orientavam o aluno. Por exemplo, ao questionar: o que significa dizer que 2, 3, 5 são primos?, ela reafirma a informação utilizada pelo aluno na resposta e também provoca uma reflexão. A explicitação aconteceu mediante as respostas apresentadas pelo aluno. Pode-se observar que nem todas as questões foram respondidas em uma fase subsequente. A linguagem utilizada pelo aluno para responder à 6ª questão indica que ele pode ter feito uma pesquisa antes de respondê-la. O que dá indícios de uma orientação livre. A integração pode ser observada a partir das conclusões obtidas pelo aluno e da sistematização do conceito de mínimo múltiplo comum.

Mendes (2014) classificou a Questão 13 de sua tese (Quadro 5 e Anexo II) como do nível de proficiência de reflexão, pois ela requer o desenvolvimento de um modelo e de sua validação. Ela é considerada de nível difícil de dificuldade em relação ao conteúdo e aborda mais de um assunto estabelecido pela pesquisadora para a composição da prova.

Quadro 5 – Questão 13 da tese de Mendes (2014)

Na figura abaixo estão os gráficos das funções f e g, de domínio $\Re$, definidas, respectivamente, por $f(x) = -\frac{2}{3}|x-6|+8$ e $g(x) = \frac{1}{3}|x-6|$.



Os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f:

- A é o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas;
- B é o ponto do gráfico que tem maior ordenada.

Seja P um ponto que se desloca sobre $\overline{AB}$, nunca coincidindo com o ponto B.
Para cada posição do ponto P, considere:

- o ponto Q, sobre o gráfico da função f, de modo que a reta que contém $\overline{PQ}$ seja paralela ao eixo das abscissas;
- os pontos R e S, sobre o gráfico da função g, de modo que $PQRS$ seja um retângulo.

Seja x a abscissa do ponto P e seja h a função que, a cada valor de x, faz corresponder a área do retângulo $PQRS$.

a) Qual é o domínio da função h?
b) Mostre que $h(x) = 24 + 8x - 2x^2$.
c) Determine as dimensões do retângulo que tem maior área.

Conforme a análise de Mendes (2014), a produção escrita do aluno, ao obter o domínio da função (item **a),** revelou que ele lidou com ela por meio da competência de conexão, pois interpretou e fez relações entre uma linguagem simbólica e a linguagem natural para determinar o domínio da função. Ao determinar as dimensões do retângulo com maior área (item **c),** ele utilizou o nível de competência de reprodução, pois apenas executou um procedimento de rotina para definir as dimensões da área máxima do retângulo.

Mendes (2014) procurou mobilizar conhecimentos do nível de proficiência de reflexão ao solicitar que o aluno explicasse como obteve as dimensões do retângulo que tem maior área, mas ele não respondeu à solicitação. Para ela, a indicação de que o aluno deveria observar as hipóteses do enunciado da questão seria uma informação suficiente para mobilizar uma atitude autorreflexiva, mas isso não ocorreu. Possivelmente a informação dada pela professora não foi suficiente para desencadear o processo de aprendizagem na perspectiva dos Van Hiele. Como o aluno não respondeu à informação, a professora não pôde desencadear a orientação guiada. Existe a possibilidade de inferir que tanto a linguagem utilizada no enunciado da questão quanto na pergunta elaborada pela professora/pesquisadora estavam em um nível superior ao que o aluno se encontrava.

Devido à dinâmica estabelecida para a coleta de dados do trabalho de Mendes (2014) não foi possível que a professora/pesquisadora procurasse adequar a sua linguagem à do aluno. Porém, em situações de sala de aula, nas quais a interação professor e aluno ocorre por meio da comunicação oral, o professor pôde adequar a sua linguagem à proficiência do aluno naquele momento.

Os procedimentos adotados pelo aluno para resolver essa questão são um exemplo de tarefa que foi elaborada com a intenção de mobilizar conhecimentos do nível de competência de reflexão, mas provavelmente a linguagem utilizada reduziu a tarefa para níveis mais baixos de competência cognitiva. Shafer e Foster (1997) observam que tarefas projetadas para os níveis mais altos de proficiência podem ser respondidas no nível de competência de reprodução.

A Questão 16 da prova em fases utilizada por Mendes (2014) (Quadro 6 e Anexo III) foi classificada pela autora como uma questão do nível de proficiência de reprodução, pois ela exige apenas realizar operações rotineiras, como fatorar um polinômio e determinar suas raízes. É uma questão que abrange apenas um dos eixos avaliados pela autora, relações e funções no espaço real bidimensional, em um nível médio de dificuldade.

Quadro 6 – Questão 16 da tese de Mendes (2014)

Usando as propriedades de divisão, determine:

a) o polinômio $p(x)$ de grau 5, tal que $p(-2) = p(-1) = p(0) = p(1) = p(2) = 0$

b) O(s) valor(es) de n, tal que -8 é o resto da divisão de $x^2 + 5x - 2$ por $x + n$.

c) O valor de a para que $x + 6$ divida $x^4 + 4x^3 - 21x^2 + ax + 108$.

Porém a análise da produção escrita de um dos alunos para Q2 (Qual é a diferença entre polinômio e equação?) revelou que ele mobilizou competências cognitivas do nível de conexão, ao relacionar as raízes de um polinômio e seus coeficientes, e do nível de reflexão, ao responder que a diferença entre polinômio e equação é "um polinômio é uma função e uma equação não é uma função por conta da igualdade". Pois, ele apresentou uma definição para polinômio e outra para equação e, a partir dessas definições, elaborou a resposta para Q2 por meio de um argumento matemático generalizado.

Com a questão Q1 (Como você comprova que $p(x)$ é ou não é escrito por meio destes coeficientes? Onde $p(x) = -2x^5 - x^4 + x^2 + 2 = 0$ conforme a resposta dada pelo aluno para o item (a)) a professora/pesquisadora não apontou erros ou acertos, mas orientou-o a rever seus procedimentos, ou seja, seguiu a fase da orientação guiada. A partir de então, o aluno pôde explicitar seus conhecimentos e guiar os procedimentos que resolveriam a questão proposta, propiciando, posteriormente, a interação do conhecimento.

Segundo a autora, as intervenções entre as fases possivelmente proporcionou um processo de elaboração do conhecimento matemático. Para ela, a Prova em Fases oportunizou que esse aluno revisitasse definições e observasse suas necessidades.

As análises das 25 questões feitas por Mendes (2014) e também as que foram retomadas nesta tese permitem observar o papel do professor na evolução do pensamento orientado ao buscar situações que auxiliem o aluno a construir estruturas de percepção que possam ser expandidas à medida que o contexto permitir. Conforme foi ilustrado por meio das discussões entre a professora/pesquisadora e o aluno, na resolução da questão do m.m.c., a partir de boas questões, um contexto de 1ª ordem, ou até mesmo uma questão sem contexto, pode tornar-se uma questão de contexto de 3ª ordem que favoreça a matematização. Essas análises também ilustram a posição de Freudenthal (1991) e Van Hiele-Geldof(1957) de que a aprendizagem é um processo descontínuo. Os saltos revelam a presença dos níveis. A qualidade pedagógica mais importante é a paciência. O segredo do processo de ensino e de aprendizagem da matemática é a palavra 'por quê?'.

Os dados coletados por Mendes (2014) ofereceram oportunidades de analisar detalhadamente a ação didática, pois ela ocorreu essencialmente por meio de registros escritos, mas esse tipo de intervenção didática tem suas limitações. A partir de todo o referencial teórico que o GEPEMA possui chegou o momento de investigar mais de perto situações reais de sala de aula, analisar os "saltos" ou a mudança de nível que ocorre durante intervenções compostas por comunicação oral e escrita.

Espera-se que a presente tese possa colaborar com as pesquisas do GEPEMA a respeito da avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem na perspectiva da Educação Matemática Realística e das fases do processo de ensino e de aprendizagem dos Van Hiele. De acordo com De La Torre Gómez (2003), Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957, 1959 e 1986) trazem em seus trabalhos a diferença entre a matemática como um sistema formal e essa ciência como uma atividade mental realizada por seres humanos no mesmo sentido que Freudenthal (1991) defende, que a matemática é uma atividade humana. Van Hiele (1986) enfatiza o desenvolvimento cognitivo do aprendiz.

O GEPEMA pode utilizar como "lentes de aumento" as fases do processo de aprendizagem descritas pelos Van Hiele para pesquisas em sala de aula na perspectiva da "reinvenção guiada", além de considerar os níveis de pensamento para encontrar o ponto de partida para iniciar um processo de ensino e de aprendizagem.

7. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Na presente pesquisa foram investigadas as possíveis relações entre os princípios de avaliação da Educação Matemática Realística e as fases do processo de aprendizagem propostas por Dina Van Hiele-Geldof (1957) e Pierre Van Hiele (1957, 1986) buscando aproximações com os trabalhos do GEPEMA.

O objetivo geral foi reconhecer e explicitar aproximações entre as fases do processo de aprendizagem em matemática dos Van Hiele e trabalhos do GEPEMA que utilizaram os princípios da avaliação na Educação Matemática Realistica. Os objetivos específicos foram: descrever as fases do processo de aprendizagem em matemática dos Van Hiele; apresentar aspectos característicos dos princípios de avaliação da Educação Matemática Realística, mais precisamente os propostos por De Lange; identificar aproximações entre o trabalho dos Van Hiele, e os trabalhos do GEPEMA que tomaram os princípios de avaliação da RME.

O problema de pesquisa e os objetivos foram delimitados no interior do GEPEMA. Devido aos estudos desenvolvidos relacionados à RME interessou buscar informações a respeito dos primeiros trabalhos publicados de acordo com o que atualmente se conhece como Educação Matemática Realística. Nos trabalhos dos Van Hiele, foram encontrados indícios de princípios da RME, pois a tese de Van Hiele (1957) foi o primeiro trabalho orientado por Freudenthal na área de ensino de matemática. Ele também contribuiu na elaboração da tese de Van Hiele-Geldof (1957). Nessas teses encontram-se indícios de aspectos marcantes da RME, como a compreensão da matemática como uma atividade humana, o papel do contexto para a elaboração do conhecimento matemático, o processo de matematização, a reinvenção guiada, a unidade do processo de ensino e de aprendizagem, a interação professor e aluno, a ideia da matemática como uma atividade humana, a necessidade de instrumentos de avaliação adequados para coletar informações que possam colaborar com o processo de ensino e de aprendizagem.

Além disso, para Freudenthal (1968, 1983, 1991), o ponto de partida para o desenvolvimento das aulas de matemática é a ideia da matemática como atividade humana e a reinvenção guiada. Das teses dos Van Hiele e do livro "Structure and *insight*: a theory of Mathematics Education" (VAN HIELE, 1986), destacam-se as fases do processo de aprendizagem: informação, orientação guiada, explicitação, orientação livre e integração.

Essas fases tratam do aspecto didático da transição entre os níveis de pensamento e colaboram com a concepção do ensino da matemática por meio da reinvenção guiada.

O recorte efetuado para esta tese foi o olhar para os trabalhos do GEPEMA que utilizaram os princípios de avaliação (DE LANGE 1987, 1999) e aproximações com as fases do processo de aprendizagem (VAN HIELE-GELDOF, 1957; VAN HIELE 1957, 1986). Os estudos se iniciaram a partir da concepção dos princípios de avaliação que começaram a ser formulados durante o desenvolvimento do projeto HEWET, que foi fundamentado em princípios da RME. Nesse projeto evidenciou-se a matematização como um meio de elaborar o conhecimento matemático a partir de situações realísticas, ou seja, por meio de problemas de contexto que favoreçam o processo de matematização. Nessa perspectiva, instrumentos de avaliação, como a prova escrita, não fornecem informações suficientes para o desenvolvimento do processo de ensino e de aprendizagem, para a reinvenção guiada. Por isso houve a necessidade de conceber outros instrumentos de avaliação, como a prova em fases, a prova de levar para a casa, o teste oral e a prova ensaio.

Instrumentos como esses atendem a princípios da avaliação, como: oportunizar a aprendizagem; permitir que o aluno mostre o que sabe; operacionalizar os objetivos curriculares; não ser mensurado pela facilidade de acerto; estar inserido na prática escolar habitual; incorporar a matemática a problemas realísticos; oferecer diferentes oportunidades para os alunos documentarem o que sabem; ter critérios públicos; fornecer *feedback* a respeito do trabalho do aluno e ter tarefas autênticas e justas. Os princípios de avaliação da RME foram considerados nos trabalhos do GEPEMA como critérios para verificar a validade de um instrumento de avaliação. Nesses trabalhos também destacam-se a ideia de matematização, a compreensão do processo de aprendizagem por meio de saltos, a estratégia da reinvenção guiada e as fases do processo de aprendizagem que podem ser observados durante a interação professor e aluno no trabalho de Mendes (2014).

Porém os trabalhos do GEPEMA desenvolvidos até 2014 não utilizaram os óculos das fases do processo de aprendizagem dos Van Hiele, pois não era o objeto de estudo do Grupo. A partir da presente tese, esse pode ser mais um elemento de pesquisa. O Grupo pode vir a utilizar os problemas de contexto e as fases do processo de aprendizagem na perspectiva da avaliação didática.

Novas pesquisas poderiam levar em consideração a observação de Van Hiele-Geldof (1957) e Van Hiele (1957) de que o professor deveria estruturar a situação de aprendizagem no conhecimento das relações lógicas entre os níveis em que os alunos se encontram durante a aprendizagem. Quando o aluno atinge um novo nível, ele passa a compreender a linguagem do professor, assim como indicado por Freudenthal (1991).

Uma investigação do GEPEMA poderia tratar do papel dos problemas de contexto (DE LANGE, 1999) em cada uma das fases do processo de aprendizagem (VAN HIELE-GELDOF, 1957; VAN HIELE 1957, 1986) por meio da reinvenção guiada.

Também considera-se pertinente investigar "raízes mais fundas" da RME, como:

- a participação de Hans Freudenthal no Grupo Coletivo de Matemáticas para a Renovação do Ensino e da Educação (W.V.O)[102]. Qual era a constituição desse grupo? Ele exerceu influências sobre as pesquisas de Freudenthal e dos Van Hiele?

- qual é o papel do intuicionismo na constituição da abordagem da Educação Matemática Realística?

- existe relação entre a concepção da fenomenologia didática de Freudenthal e o trabalho De Langenveld? Por que tanto Freudenthal (1983) quanto Van Hiele (1986) declaram que o aspecto fenomenológico abordado nos seus trabalho não está relacionado à fenomenologia de Husserl? Qual é a diferença?

Tomar a avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem implica em considerá-la como uma ação didática que deve estar incorporada a todo o processo de ensino e de aprendizagem de acordo com a perspectiva metodológica adotada pelo professor. Na abordagem da Educação Matemática Realística, destaca-se o processo de matematização como um meio de favorecer a elaboração do conhecimento matemático que pode ser conduzido pelo professor por meio da reinvenção guiada. A avaliação, do ponto de vista didático, pode fornecer as informações necessárias para o professor desenvolver as aulas considerando as fases do processo de aprendizagem diante das descontinuidades ou dos "saltos" que permeiam a formação de conceitos.

Essas são apenas algumas considerações a respeito da presente tese, pois regularmente uma investigação não se encerra em si mesma.

[102] O the mathematics work-group of the W.V.O. (Work group on renewal education)

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, V. L. C. de. **Questões não-rotineiras**: a produção escrita de alunos da graduação em Matemática. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

ALVES, R. M. F. **Uma análise da produção escrita de alunos do ensino médio em questões abertas de matemática**. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

BARLOW, M. **Avaliação escolar**: mitos e realidades. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BEZERRA, G. C. **Registros escritos de alunos em questões não-rotineiras da área de conteúdo quantidade**: um estudo. 2010. 183 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 10 set. 2015.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio: ciências da natureza matemática e suas tecnologias. Brasília, 1999. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 11 ago. 2008.

BROEKMAN, H.; VERHOEF, N. C. Een leven lang wiskundig denken: Pierre Marie Van Hiele 4 mei 1909-1 november 2010. **Nieuw Archief Voor Wiskunde**, Enschede, v. 13, n. 2, p. 121-124, 2012.

BURGER, W. F.; SHAUGHNESSY, J. M. Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, p. 31-48, 1986.

BURIASCO, R. L. C. **Avaliação em matemática**: um estudo das respostas de alunos e professores. 1999. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual Paulista, Marília, 1999.

______. **Matemática de fora e de dentro da escola**: do bloqueio à transição. 1988. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1988.

CELESTE, L. B. **A produção escrita de alunos do ensino fundamental em questões de matemática do PISA**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

CIANI, A. B. **O realístico em questões não-rotineiras de matemática**. 2012. 166 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

CROWLEY, M. L. The Van Hiele model of the development of geomemc thought. In: LINDQUIST, M. M. (Ed.). **Learning and teaching geometry, K-12**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1987. p. 1-16. Yearbook.

DALTO, J. O. **A produção escrita em matemática: análise interpretativa da questão discursiva de matemática comum à 8ª série do ensino fundamental e à 3ª série do ensino médio da AVA/2002**. 2007. 100 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

DE LA TORRE GÓMEZ, A. El método socrático y el modelo de Van Hiele. **Lecturas Matemáticas**, Bogotá, v. 24, n. 2, p. 99-121, 2003.

DE LANGE, J. Assessing mathematical skills, understanding, and thinking. In: LESH, R.; LAMON, S. J. (Ed.). **Assessment of authentic performance in school mathematics**. Washington: American Association for the Advancement of Science, 1992. p. 195-214. Disponível em: <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED352262.pdf>. Acesso em: 22 ago. 2014.

DE LANGE, J. Assessment: no change without problems. In: ROMBERG, T. (Ed.). **Reform in school mathematics and authentic assessment**. Albany: SUNY Press, 1995. p. 87- 172. Disponível em: <http://math.aauj.edu/math/ar/31/1/eBooks/delange_assessement.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2014.

DE LANGE, J. **Curriculum vitae Prof. Dr. Jan De Lange**. Utrecht, The Hague, Katwijk. May 2011. Disponível em: <http://www.fi.uu.nl/publicaties/docincludes/cv/CV2011_delange.pdf> Acesso em: 30 set. 2014.

DE LANGE, J. **Framework for classroom assessment in mathematics**. 1999. Disponível em: <http://www.fi.uu.nl/catch/products/framework/de_lange_frameworkfinal.pdf> Acesso em: 12 jan. 2009.

DE LANGE, J. Mathematical literacy. In: ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVOLOPMENT – OECD. **Measuring student knowledge and skills**: a new framework for assessment. Paris: OECD Publications, 1999a. p. 41-56. Disponível em: <http://www.oecd.org/edu/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/33693997.pdf>. Acesso em: 13 ago. 2014.

DE LANGE, J. Mathematics for literacy. In: MADISON, B. L.; STEEN, L.A. (Ed.). **Quantitative literacy**: why numeracy matters for schools and colleges. Princeton: The National Council on Education and the Disciplines, 2003. p. 75 – 89. Disponível em: <http://www.maa.org/external_archive/QL/pgs75_89.pdf>. Acesso em: 31 jul. 2014.

DE LANGE, J. **Mathematics, insight and meaning**. Utrecht: Ed. OW and OC, 1987.

DE LANGE, J. The meaning of PISA for teachers of mathematics. In: AUSTRALIAN COUNCIL FOR EDUCATIONAL RESEARCH (ACER): "Providing World-Class School Education: research conference. **Concurrent papers...** Camberwell: ACER, 2002. p. 33- 36. Disponível em: <http://research.acer.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1000&context=research_conference_2002>. Acesso em: 30 jul. 2014

DE LANGE, J. Using and applying mathematics in education. In: BISHOP, A. J. et al. **International handbook of mathematics education**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 49-98.

DE LANGE, J.; VERHAGE, H. B. Math a and its achievement testing. In: BERGERON, J. C. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, **Proceedings of the eleventh International Conference on the Psychology of Mathematics Education**. Montreal: Eric, 1987. v. 3, p. 243-248.

DE VILLIERS, M. **Some reflections on the Van Hiele theory**. 2010. Disponível em: <http://frink.machighway.com/~dynamicm/vanhiele-reflection.pdf>. Acesso em: 31 jul. 2014.

DEKKER, T. **Vraag over piramide assessment I** [mensagem pessoal]. Mensagem recebida por <adrianaqpassos@gmail.com> em 18 out. 2014.

DEKKER, T., QUERELLE, N. **Great assessment problems**. 2002. Disponível em: <http://www.fi.uu.nl/catch/products/GAP_book/intro.html> Acesso em: 14 ago. 2014.

FENOMENOLOGIA. In: ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. 5. ed. São Paulo: M. Fontes, 2007. p. 416.

FERREIRA, P. E. A. **Análise da produção escrita de professores da educação básica em questões não-rotineiras de matemática**. 2009. 166 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

______. **Enunciados de tarefas de matemática**: um estudo sob a perspectiva da educação matemática realística. 2013. 121 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Dordrecht: D. Reidel Publishing, 1983.

______. Matemática nova ou educação nova? **Perspectivas**, Portugal, v. 9, n. 3, p. 317 – 328, 1979. Disponível em: <http://unesdoc.unesco.org/images/0003/000346/034654poro.pdf>. Acesso em: 3 set. 2012.

______. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: D. Reidel Publishing, 1973.

______. **Revisiting mathematics education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

______. Why to teach mathematics so as to be useful. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 1, n. 1-2, p. 3-8, 1968.

FUYS, D. et al. **English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele**. 1984. Disponível em: <http://eric.ed.gov/?id=ED287697>. Acesso em: 14 ago. 2014.

FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. An investigation of the Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. New York: Brooklyn College, CUNY School of Education, 1985.

GARNICA, A. V. M. História oral e educação matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 77-98.

GOFFREE, F. HF: working on mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 25, n. 1-2, p. 21-49, 1993.

GOMES, M. T. **O portfólio na avaliação da aprendizagem escola**r. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2003.

GONÇALVES JÚNIOR, M. A. **Um olhar sobre os dizeres e fazeres de uma professora de matemática da 8º série do ensino fundamental**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

GRAVEMEIJER, K. **Developing realistic mathematics education**. Utrecht: Utrecht University, 1994.

GUTIÉRREZ, A. Investigar es evolucionar: un ejemplo de investigaión en procesos de razonamiento. In: PLANAS, N. (Coord.). **Teoría, crítica y práctiva de la educación matemática**. Barcelona: Graó, 2012. p. 43-59. (Crítica y fundamentos, 41).

GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A.; FORTUNY, J. M. An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, p. 237-251, 1991.

HADJI, C. **A avaliação regras do jogo**: das intenções aos instrumentos. 4. ed. Porto: Ed. Porto, 1994.

HOUAISS, A. **Dicionário eletrônico da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. CD-ROM.

HUSSERL, E. **A ideia da fenomenologia**. Tradução de Artur Morão. Lisboa: Ed. 70, 1990.

LA BASTIDE-VAN GEMERT, S. **“Elke positieve actie begint met critiek"**: Hans Freudenthal en de didactiek van de wiskunde. Hilversum: Uitgeverij Verloren, 2006.

LOPEZ, J. M. S. **Análise interpretativa não-rotineiras de matemática**. 2010. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

MARTINEAU, S.; SIMARD, D.; GAUTHIER, C. Recherches théoriques et spéculatives: considérations méthodologiques et épistémologiques. **Recherches Qualitatives**, Montreal, v. 22, n. 3, p. 32, 2001.

MENDES, M. T. **Utilização da prova em fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. 275 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

MORAES, M. A. G. **Correção de uma prova escrita de matemática**: algumas considerações. 2013. 91 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

NASSER, L. A teoria de Van Hiele para o ensino de geometria: pesquisa e aplicação. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 1993, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: UFRJ, 1993. p. 29.

______. **Lilian Nasser.** Disponível em: <http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4727082Y7.>. Acesso em: 13 jul. 2015.

______. **Using the Van Hiele theory to improve secondary school geometry in Brasil** (Usando a teoria de Van Hiele para melhorar o ensino secundário de geometria no Brazil). London, 1992.

NEGRÃO DE LIMA, R. C. **Avaliação em matemática**: análise da produção escrita de alunos da 4ª série do ensino fundamental em questões discursivas. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT – OECD. **The PISA 2003**: assessment framework: mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills. Paris, 2003. Disponível em: <http://www.oecd.org/dataoecd/46/14/33694881.pdf >. Acesso em: 21 jun. 2012.

______. **PISA 2006**: competências em ciências para o mundo de amanhã: análise. São Paulo: Moderna, 2008. v. 1.

______. **PISA 2009 Assessment framework**: key competencies in reading, mathematics and science. 2009. Disponível em: <http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/44455820.pdf> Acesso em: 14 ago. 2014.

______. **PISA 2012**: assessment and analytical framework: mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy. 2013. Disponível em: <http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/PISA%202012%20framework%20e-book_final.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2014.

OLIVEIRA, R. C. de. **Matematização**: estudo de um processo. 2014. 62 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PASTOR, A. J. **Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele**: la enseñanza de las isometrias del plano. La evoluación del nível de razonamiento. 1993. Tese (Doctoral en Didàctica de la Matemática) – Universitat de Valência, Valência, 1993.

PEDROCHI JUNIOR, O. **Avaliação como oportunidade de aprendizagem em matemática**. 2012. 56 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

PEREGO, F. **O que a produção escrita pode revelar? Uma análise de questões de matemática.** 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

PEREGO, S. C. **Questões abertas de matemática:** um estudo de registros escritos. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

PEREIRA JUNIOR, A. **Enunciados de itens de provas de matemática**: um estudo na perspectiva da educação matemática realística. 2014. 65 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PIRES, M. N. M. Oportunidade para aprender: uma prática da reinvenção guiada na prova em fases. 2013. 122f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

ROHLOFF, D. B. **Uma professora de matemática, sua prática e sua compreensão em avaliação**. 2004. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

SANTOS, E. R. **Análise da produção escrita em matemática**: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

______. Estudo da produção escrita de estudantes do ensino médio em questões discursivas não rotineiras de matemática. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

SCHLEICHER, A. Measuring student knowledge and skills: a new framework for assessment. Paris: Organisation for Economic Co-Operation and Development, 1999. Web site: www. oecd. org., 1999.

SEGURA, R. O. **Estudo da produção escrita de professores em questões discursivas de matemática**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

SHAFER, M. C.; FOSTER, S. The changing face of assessment. **Principled Practice in Mathematics & Science Education**, Madison, v. 1, n. 2, p. 1-8, 1997. Disponível em: <http://ncisla.wceruw.org/publications/newsletters/fall97.pdf>. Acesso em: 22 ago. 2014.

SILVA, M. C. N. **Do observável para o oculto**: um estudo da produção escrita de alunos da 4a. série em questões de matemática. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

TREFFERS, A. **Three dimensions**: a model of goal and theory description in mathematics instruction: the Wiskobas project. Dordrecht: D. Reidel Publishing, 1987.

TREFFERS, A.; GOFFREE, F. Rational analysis of realistic mathematics education. In: STREEFLAND, L. (Ed.). **Proceedings of the ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Utrecht: University of Utrecht, 1985. v. 2, p. 97-123.

TREVISAN, A. L. **Prova em fases e um repensar da prática avaliativa em matemática**. 2013. 168 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA - UEL. **Especialização em educação matemática**. 2014. Disponível em: <http://www.uel.br/pos/educacaomatematica/?content=principal.html>. Acesso em: 4 jun. 2014.

______. **Programa de Pós-Graduação em ensino de ciências e educação matemática**. 2013. Disponível em: <http://www.uel.br/pos/mecem/index.htm>. Acesso em: 4 jun. 2014

USISKIN, Z. **Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry**. CDASSG Project. 1982.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Assessment and realistic mathematics education**. Utrecht: Ed. CD-ß Press, Freudenthal Institute, Utrecht University, 1996.

______. Freudenthal’s work continues. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION PROGRAM, 12., 2012, Seoul. **Proceedings...** Seoul: ICME, 2012. Disponível em: <http://www.icme12.org/upload/submission/2048_F.pdf>. Acesso em: 9 jun. 2014.

______. **Mathematics education in the Netherlands**: a guided tour: Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University, 2000. Disponível em: <www.fisme.science.uu.nl/staff/marjah>. Acesso em: 28 fev. 2012.

______. Realistic mathematics education: work in progress. In: LIN, F. L. (Ed.). **Common sense in mathematics education**: proceedings of the Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education. Taipei: National Taiwan Normal University, 2002. p. 1–42. Disponível em: <http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/4966.pdf>. Acesso em: 28 fev. 2012.

______. The role of contexts in assessment problems in mathematics. **For the Learning Mathematics**, Montreal, v. 25, n. 2, p. 2-9, 2005.

VAN DER MAREN, J.-M. **Méthodes de recherche pour l'éducation**. Bruxelles: De Boeck and Larcier, 1996.

VAN HIELE-GELDOF, D. The didactics of geometry in the lowest class of secondary school. 206 p. Tesis (Doctoral) - Universidad de Utrecht: Utrecht. Traducción al inglés en Fuys, 1957.

VAN HIELE, P. M. **El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)**. 1957. Tese (Doctoral) - Universidad de Utrecht, Utrecht. Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991. No publicada.

______. **Structure and insight**: a theory of mathematics education. New York: Academic Press, 1986.

______. The child’s thought and geometry. In: CARPENTER, T. P.; DOSSEY, J. A.; KOEHLER, J. L. (Ed.). **Classics in mathematics education research**. 4th ed. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2004.

VERHAGE, H., DE LANGE, J. Mathematics education and assessment. **Pythagoras,** Durbanville, v. 42, p. 14-20, Apr. 1997. Disponível em: <http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/1872.pdf>. Acesso em: 22 ago. 2014.

VERHAGE, H. B.; DE LANGE, J. The HEWET project. In: BERGERON, J. C. (Ed.). **Proceedings of the eleventh International Conference on the Psychology of Mathematics Education**. Montreal: Eric, 1987. v. 3, p. 249-254.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. **O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

APÊNDICE

Quadro – Aspectos do trabalho de De Lange abordados nas pesquisas do GEPEMA.

Autor / ano	Aspectos do trabalho de De Lange abordados na pesquisa
ALMEIDA (2009)	- "Pirâmide de Avaliação". - Níveis de competências: reprodução, conexão e reflexão.
FERREIRA (2009)	- Questões gerais da RME[103]. - A influência dos contextos na maneira que os estudantes resolvem tarefas matemáticas. - Contextos de primeira, segunda e terceira ordem e o processo de matematização.
BEZERRA (2010)	- Questões gerais da RME. - Matematização horizontal e vertical no contexto educacional. - Contextos como um veículo para avaliar a compreensão matemática dos estudantes. - Contextos de primeira, segunda e terceira ordem e o processo de matematização. - Funcionalidade dos contextos. Problema: sem contexto, com contextos utilizados para "camuflar" os problemas matemáticos e contextos como uma parte relevante e essencial do problema. - A natureza didática da avaliação. - Os cinco[104] princípios de avaliação elaborados por De Lange. - A "Pirâmide de Avaliação".
LOPEZ (2010)	- Questões gerais da RME. - Letramento matemático - A natureza didática da avaliação. - Os nove[105] princípios de avaliação elaborados por De Lange. - O papel do *feedback* como uma informação necessária e suficiente para que o aluno possa identificar a qualidade da sua produção. - Contrato de avaliação. - Instrumentos de avaliação (observação). - A "Pirâmide de Avaliação" e os componentes de avaliação do PISA. - Avaliação equilibrada.
CIANI (2012)	- Questões gerais da RME. - Contextos. - Exploração fenomenológica dos contextos. - Matematização como atividade de estruturação e organização matemática de uma situação problema. - Matematização conceitual. - Entrelaçamento de vários conteúdos. - A "Pirâmide de Avalição" (De Lange).

[103] As questões gerais da RME se referem à concepção da matemática como uma atividade humana, à matematização, à reinvenção guiada, à fenomenologia didática, ao histórico do desenvolvimento dessa abordagem de ensino entre outros aspectos da RME.
[104] Os cinco princípios de avaliação, para elaboração de provas, foram desenvolvidos por de Lange (1987) no âmbito do projeto HEWET.
[105] Os nove princípios para avaliação constam em de Lange (1999).

	- Níveis de competências: reprodução, conexão e reflexão. - A natureza didática da avaliação. - Letramento matemático. - Os princípios de avaliação elaborados por De Lange. - Instrumentos de avaliação (observação). - Contrato de avaliação. - O papel do *feedback* como uma informação necessária e suficiente para que o aluno possa identificar a qualidade da sua produção.
PEDROCHI JUNIOR (2012)	- A natureza didática da avaliação. - Matematização horizontal e vertical. - O papel do *feedback* no processo de ensino e de aprendizagem. - A "Pirâmide de Avaliação". - Letramento matemático.
FERREIRA (2013)	- Questões gerais da RME. - Diferentes "usos/utilidades/fins/objetivos (*uses*) dos contextos" (p. 44): contextos de ordem zero e contextos de primeira, segunda e terceira ordem. - A matematização conceitual, ou seja, o uso dos contextos para formação de conceitos. - Papéis do contexto no ensino e aprendizagem da matemática. - Agrupamento de situações/contextos "de problemas práticos que surgem em situações da vida real" (p. 47): pessoal ou uso privado, público, ocupacional ou profissional, educacional e científico. - Letramento matemático. - A "Pirâmide de Avaliação". - Níveis de competências: reprodução, conexão e reflexão. - A "possibilidade de matematizar parece estar fortemente associada ao papel" do contexto. (p. 107)
PIRES (2013)	- Matematização. - Matematização horizontal e vertical. - Letramento matemático. - A natureza didática da avaliação. - A prova em fases. - Os princípios de avaliação elaborados por De Lange.
TREVISAN (2013)	- Questões gerais da RME. - A prova em fases. - Matematização. - Instrumentos de avaliação. - Os nove princípios de avaliação elaborados por De Lange. - Letramento matemático. - Níveis de competências: reprodução, conexão e reflexão. - A "Pirâmide de Avaliação".
OLIVEIRA (2014)	- Questões gerais da RME. - Matematização como atividade de estruturação e organização matemática de uma situação problema. - Matematização horizontal e vertical. - Matematização conceitual. - Não ensino como contraposição ao que é usualmente tomado por ensino. - Instrução interativa.

SANTOS (2014)	- Questões gerais da RME.
PEREIRA JUNIOR (2014)	- Questões gerais da RME. - Matematização horizontal e vertical. - A natureza didática da avaliação. - Níveis de competências: reprodução, conexão e reflexão. - A "Pirâmide de Avaliação". - Contextos de ordem zero e contextos de primeira, segunda e terceira ordem. - Contextos realísticos, artificiais e virtuais. - O papel dos contextos no desenvolvimento de tarefas do cotidiano escolar.
MENDES (2014)	- Questões gerais da RME. - A "Pirâmide de Avaliação". - Níveis de competências: reprodução, conexão e reflexão. - Matematização como atividade de estruturação e organização matemática de uma situação problema. - Matematização horizontal e vertical. - Letramento matemático. - Situações de contexto sociocultural, escolar, familiar, pessoal, entre outros. - A prova em fases. - Instrumentos de avaliação. - Os nove princípios de avaliação elaborados por De Lange. - Os cinco princípios para elaboração de provas de De Lange. - A natureza didática da avaliação. - O papel do *feedback* no processo de ensino e de aprendizagem.

Fonte: a autora.

ANEXO I

Questão 12 da tese de Mendes (2014)

Escreva um número que seja, simultaneamente, múltiplo de 2, 3 e 5.

Fase 1
Resposta do aluno: Como 2, 3, 5 são primos, o único que é múltiplo dos três é 30. 2.3.5=30 *Comentário de Mendes (2014) - O aluno apresenta uma resposta à questão, mas ao elaborá-la faz menção ao fato de os números serem primos e apresenta a resposta 30 como o único múltiplo entre eles.*
Fase 2
Comentário de Mendes (2014) - Na expectativa de fazê-lo refletir acerca dos conceitos apresentados em sua resposta, questiono: **Pergunta de Mendes (2014): Q1 – O que significa dizer que 2, 3, 5 são primos?** **Resposta do aluno a Q1:** Dizer que os números são primos significa que eles são divisíveis por eles mesmos e por 1. **Pergunta de Mendes (2014): Q2 – Qual é a relevância disso [serem primos] para se determinar um valor múltiplo entre eles?** **Resposta do aluno a Q2:** Quando os números são primos e queremos achar um número que seja múltiplo dos três simultaneamente aplicamos o método do m.m.c (mínimo múltiplo comum) então multiplicamos $2 \times 3 \times 5$ para achar o menor múltiplo entre eles. É como fazermos separadamente a tabuada de cada um e olharmos o primeiro que coincide na tabuada dos três números. **Pergunta de Mendes (2014): Q3 – Apenas o número 30 é múltiplo de 2, 3, 5 simultaneamente?** **Resposta do aluno a Q3:** Não é apenas o número 30 que é múltiplo dos 3 números ao mesmo tempo. Ele é o menor número que aparece primeiro.
Fase 4
Comentário de Mendes (2014) - Com vistas a fazê-lo apresentar o que entende por múltiplo e refletir a respeito, questiono: **Pergunta de Mendes (2014): Q4 - O que significa dizer que 30 é múltiplo de 3?** **Resposta do aluno a Q4:** Significa que ele aparece na tabuada do 3 ou seja o número ‘3’ multiplicará um número que nesse caso é 10 e resultará em 30.

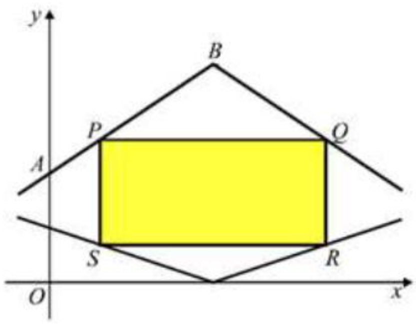
Comentário de Mendes (2014) - Sua resposta está atrelada à tabuada e não à definição de múltiplo de números inteiros.
Fase 6
Comentário de Mendes (2014) - Com o propósito de ampliar o seu conceito de múltiplo, questiono: **Pergunta de Mendes (2014): Q5 - Posso dizer que 6 é múltiplo de 1,5?** **Resposta do aluno a Q5:** Pode dizer que 6 é múltiplo de 1,5 porém 1,5 é um número que não é natural e positivo e não aparece na tabuada. *Comentário de Mendes (2014) - Nesta resposta o aluno afirma que 6 pode ser múltiplo com uma ressalva que contradiz respostas anteriores.*
Fase 8
Comentário de Mendes (2014) - Para fazê-lo confrontar suas respostas e investigar o conceito de múltiplo, solicito: **Pergunta de Mendes (2014): Q6 - Na sua resposta anterior dizia que, para ser múltiplo, precisa estar na tabuada, agora que, mesmo não estando pode ser múltiplo. Investigue uma condição para definir múltiplo de um número.** **Resposta do aluno a Q6:** Tem que ser os inteiros, por isso na tabuada só tem números naturais. $\frac{C}{A} = B \Rightarrow C$ (se for inteiro) será múltiplo de A (inteiro), pois contém A multiplicando B (inteiro) vezes. *Comentário de Mendes (2014) - O aluno apresenta uma definição de múltiplo independente da tabuada, de forma generalizada e abstrata.*

Fonte: Adaptado de Mendes (2014)

ANEXO II

Questão 13 da tese de Mendes (2014)

Na figura abaixo estão os gráficos das funções f e g, de domínio $\Re$, definidas, respectivamente, por $f(x) = -\frac{2}{3}|x-6|+8$ e $g(x) = \frac{1}{3}|x-6|$.



Os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f:

- A é o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas;
- B é o ponto do gráfico que tem maior ordenada.

Seja P um ponto que se desloca sobre $\overline{AB}$, nunca coincidindo com o ponto B.
Para cada posição do ponto P, considere:

- o ponto Q, sobre o gráfico da função f, de modo que a reta que contém $\overline{PQ}$ seja paralela ao eixo das abscissas;
- os pontos R e S, sobre o gráfico da função g, de modo que $PQRS$ seja um retângulo.

Seja x a abscissa do ponto P e seja h a função que, a cada valor de x, faz corresponder a área do retângulo $PQRS$.

a) Qual é o domínio da função h?
b) Mostre que $h(x) = 24 + 8x - 2x^2$.
c) Determine as dimensões do retângulo que tem maior área.

Fase 1

Resposta do aluno:

a) $-\frac{2}{3}|x-6|+8 = \frac{1}{3}|x-6|$

Caso $x \geq 0$

$-\frac{2}{3}(x-6)+8 = \frac{x-6}{3}$

$-2(x-6)+24 = x-6$

$-2x+12+24 = x-6$

$42 = 3x$

$x = 14$

Caso $x < 0$

$-\frac{2}{3}(6-x)+8 = \frac{1}{3}(6-x)$

$$-2(6-x)+24=6-x$$
$$-12+2x+24=6-x$$
$$3x=6-12$$
$$x=-2$$
$$D=\{x\in\Re/-2<x<6\ e\ 6<x<14\}$$

c)
$$24+8x-2x^2$$
$$h(x)=-2x^2+8x+24$$
$$h'(x)=-4x+8$$
$$-4x+8=0$$
$$x=2$$

Quando for x igual a 2, o retângulo terá a maior área possível.

Comentário de Mendes (2014) - O aluno determina as intersecções entre as funções f e g e faz uso desses pontos para restringir o domínio da função h, entretanto não respeita a hipótese de P pertencer ao interior de $\overline{AB}$.
O aluno não desenvolve o modelo que representa a situação, com isso, não mostra a equivalência sugerida na letra b. Sem justificar as razões, utiliza a função derivada para determinar a resposta da letra c a partir do modelo apresentado na alternativa b.

Fase 3

Comentário de Mendes (2014) - Para fazê-lo reler as hipóteses do enunciado da questão e corrigir o domínio da função h, sugiro:

Pergunta de Mendes (2014): Q1 - Verifique se o domínio apresentado para a função h respeita as hipóteses do enunciado da questão.

Resposta do aluno a Q1:
Não respeita, precisa ser $D=\{x\in\Re/0<x<6\}$.

Comentário de Mendes (2014) – Para investigar a interpretação que faz do conceito de máximo e de mínimo a partir da função derivada, solicito:

Pergunta de Mendes (2014): Q2 - Explique o procedimento utilizado para obter a resposta $x=2$ e apresente razões que garantem que esse ponto é de máximo.

Comentário de Mendes (2014) – O aluno não apresenta uma explicação.

Fonte: Adaptado de Mendes (2014)

ANEXO III

Questão 16 da tese de Mendes (2014)

Usando as propriedades de divisão, determine:

d) o polinômio $p(x)$ de grau 5, tal que $p(-2) = p(-1) = p(0) = p(1) = p(2) = 0$

e) O(s) valor(es) de n, tal que -8 é o resto da divisão de $x^2 + 5x - 2$ por $x + n$.

f) O valor de a para que $x + 6$ divida $x^4 + 4x^3 - 21x^2 + ax + 108$.

Fase 1

Resposta do aluno:

$(c) \quad x + 6 \quad e \quad x^4 + 4x^3 - 21x^2 + ax + 108$

$x = -6$

Substituindo no polinômio:

$(-6)^4 + 4(-6)^3 - 21(-6)^2 + a(-6) + 108$

$1296 + (-864) - 21(36) + a(-6) + 108$

$-6a = 216$

$a = \frac{-216}{6}$

$a = -36$

$\therefore$ Para que $x + 6$ divida $x^4 + 4x^3 - 21x^2 + ax + 108$, a tem que possuir valor - 36.

Comentário de Mendes (2014) – O aluno reconhece que se $x + 6$ divide o polinômio, então -6 é raiz do polinômio.

Fase 3

Resposta do aluno:

(a) Por $p(-2) = p(-1) = p(0) = p(1) = p(2) = 0$, pode-se afirmar que $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ tem o termo sem a (incógnita) variável x com valor igual a 0.

Pode ser que o polinômio seja:

$-2x^5 - x^4 + x^2 + 2 = 0$

$$
\begin{array}{l|l}
(b) \quad x^2 + 5x - 2 & \underline{x + n} \\
\underline{-x^2 + nx} & x + 5(x + n) \\
\quad 5(x + n) - 2 & \\
\underline{-[5(x + n)] \quad .} & \\
\quad\quad -2 &
\end{array}
$$

Comentário de Mendes (2014) - A resolução da alternativa <u>a</u> mostra que o aluno fez uma relação de igualdade entre os coeficientes do polinômio procurado e as raizes dadas no enunciado. O aluno apresenta como resposta a alternativa a, uma equação em vez de um polinômio.

O aluno identifica um procedimento para dividir polinômios, entretanto apresenta um erro no *desenvolvimento e não mostra em sua resolução qual é a sua intenção em usar esse procedimento.*

Fase 5

Comentário de Mendes (2014) – Buscando compreender a relação realizada na resposta anterior e fazê-lo reconhecer que não foi uma estratégia adequada, questiono:

Pergunta de Mendes (2014): Q1 – Como você comprova que $p(x)$ é ou não é escrito por meio destes coeficientes?

Comentário de Mendes (2014) – Na expectativa de fazê-lo reconhecer as diferenças entre equação e polinômio e ainda se atentar ao que foi solicitado no item, questiono:

Pergunta de Mendes (2014): Q2 – Qual é a diferença entre polinômio e equação?

Resposta do aluno:

$$
\begin{array}{ll}
(b)\quad x^2+5x-2 & |\ \underline{x+n} \\
\underline{-x^2-nx} & \quad x+(5-n) \\
\qquad x(5-n)-2 & \\
\qquad \underline{-x(5-n)-n(5-n).} & \\
\qquad\quad n^2-5n-2 &
\end{array}
$$

$$n^2-5n-2=-8$$
$$n^2-5n-2+8=0$$
$$n^2-5n+6=0$$
$$\Delta=25-24$$
$$n=\frac{5\pm1}{2}$$
$$n'=\frac{5+1}{2}=3$$
$$n''=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Comentário de Mendes (2014) – O aluno corrige o procedimento de divisão e encaminha a resolução do item b de forma coerente. Apesar de evidente, não formaliza uma resposta para o item.

Fase 8

Resposta do aluno a Q2:

<u>Definição de polinômio</u>: um polinômio pode ser composto por várias expressões algébricas, desde que essas expressões envolvam apenas números, e até apresentem diversas letras, potências e coeficientes.
Um polinômio é uma função.

<u>Definição de uma equação</u>: uma equação é uma expressão algébrica com igualdade, onde a igualdade é satisfeita pelos seus valores de domínio.
*Podendo-se concluir que um polinômio é uma função e uma equação não é uma função por conta da igualdade.

Comentário de Mendes (2014) – O aluno apresenta uma reflexão a respeito de polinômio e equação a partir de definições apresentadas por ele[106].
Fase 9
Resposta do aluno a Q1: Resolvendo o exercício para responder a pergunta: $p(x)$ É um polinômio de 5 grau $p(-2) = p(-1) = p(0) = p(1) = p(2) = 0$ $(x-2)(x-1)(x)(x+1)(x+2) = 0$ $(x^2-3x+2)(x)(x+1)(x+2) = 0$ $(x^3-3x^2+2x)(x+1)(x+2) = 0$ $(x^4-2x^3-x^2+4x)(x+2) = 0$ $\therefore x^5-5x^3+2x^2+8x = p(x)$ * O polinômio $p(x)$ é igual a $x^5-5x^3+2x^2+8x$ *Comentário de Mendes (2014) – O aluno apresenta a fatoração linear do polinômio a partir das raizes dadas e a desenvolve para obter sua forma reduzida.*

Fonte: Adaptado de Mendes (2014)

[106] Segundo Mendes (2014, p. 146) “Em situações em que o aluno apresentou conceitos e definições incorretos, a professora solicitou novas buscas e comparações em outras fases ou, ainda, em momentos oportunos inseriu o conceito ou definição em discussões de situações desenvolvidas em sala de aula, sem destacar que se tratava de um “erro” reconhecido na produção de alunos na Prova em Fases. Ressalta-se que essa intervenção podia ou não ser percebida e interpretada pelo aluno, uma vez que o professor não agia diretamente com o aluno, mas no contexto da discussão de uma situação/tarefa”.