



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

ANIE CAROLINE GONÇALVES PAIXÃO

**UMA PROVA EM FASES DE MATEMÁTICA:**  
da análise da produção escrita ao princípio de orientação

ANIE CAROLINE GONÇALVES PAIXÃO

**UMA PROVA EM FASES DE MATEMÁTICA:**  
da análise da produção escrita ao princípio de orientação

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Regina Luzia Corio de Buriasco

Londrina  
2016

ANIE CAROLINE GONÇALVES PAIXÃO

**UMA PROVA EM FASES DE MATEMÁTICA:**  
da análise da produção escrita ao princípio de orientação

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco  
(orientadora)  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Profa. Dra. Leny Rodrigues Martins Teixeira  
Universidade Estadual Paulista Júlio de  
Mesquita Filho – UNESP

---

Profa. Dra. Pamela Emanuelli Alves Ferreira  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_.

*Dedico este trabalho para o  
Marcelo Gonçalves dos Anjos,  
que me ensinou que tudo o que  
fica na vida são a beleza de se  
ter amigos.*

## AGRADECIMENTOS

A Deus por me conduzir em todo tempo.

A minha orientadora Regina pelo carinho, cuidado, constante acolhida e por me ensinar muito além da teoria; um exemplo de comprometimento com os estudantes e com o estudo.

A Magna que, como co-orientadora, me ensinou muito, foi parceira e amiga, acompanhando-me durante o mestrado, por vezes deixando de estar com sua família para me ajudar a terminar esse trabalho; um presente que a vida me deu e que me mostrou que “no final tudo vai dar certo”.

Ao amigos do GEPEMA, pelas constantes contribuições ao meu desenvolvimento desejando que a amizade seja para a vida inteira.

Para minha mãe Maria Rita e meu pai Ubiratan pelo carinho, incentivo e amor sempre presentes.

Ao meu irmão Michel, à minha cunhada Glaucia e sua filhota Quézia por sempre estarem presentes nessa trajetória e me incentivarem.

Ao meu querido marido Josuel, por suportar minhas ausências, me apoiar em tudo, sempre me acolher em seus braços e vislumbrar comigo novos sonhos.

Aos meus familiares, Lourdes e Mauricio, que me incentivaram constantemente e por fazer esse sonho mais doce a cada passo.

Às minhas amigas, Rebeca, Milene, Marta, Márcia, Mara e Marilda por serem sempre maravilhosas, entenderem as ausências e orarem por mim.

Ao Charles, Maria Carolina e Tales, por me acolherem em sua casa com tanto carinho.

Às professoras Dra. Leny Rodrigues Martins Teixeira e Dra. Pamela Emanuelli Alves Ferreira que compuseram a banca, pelas contribuições a este trabalho e por toda dedicação empregada para que esse sonho pudesse ser concluído.

À professora Ivone Alves de IIMA pela paciência de corrigir a redação deste texto.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização desse sonho.

À CAPES, pela bolsa concedida.

Educar é um ato de opção, compromisso e solidariedade.  
Regina Buriasco

PAIXÃO, Anie Caroline Gonçalves. **UMA PROVA EM FASES DE MATEMÁTICA:** da análise da produção escrita ao princípio de orientação. 2016. 103f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

## **RESUMO**

Para conhecer como professores que ensinam matemática na Educação Básica lidaram com uma prova em fases, buscou-se descrever e analisar a produção escrita realizada durante o desenvolvimento de uma Oficina de Análise da Produção Escrita em Tarefas de Matemática, parte do Projeto Universal 483266/2012-4. A investigação de natureza qualitativa pautou-se pela avaliação didática, defendida por autores da RME, e pela avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem proposta pelo GEPEMA. Os professores, em lugar de apenas resolverem uma prova, foram orientados a utilizar sua própria produção como mote para protagonizar uma ação formativa sob a ótica do Princípio da Orientação da RME. Desse modo tiveram a oportunidade de tomar outros pontos de vista uma vez que diferentes estratégias, por vezes refletindo diferentes níveis, puderam ser provocadas e utilizadas de forma produtiva no processo de aprendizagem.

**Palavras-chave:** Educação Matemática Realística. Avaliação da Aprendizagem Escolar. Oportunidade de Aprendizagem. Prática de Investigação. Prova em Fases.

Paixão, Anie Caroline Gonçalves. **Stage Test in Mathematics**: the writing production analysis to the guiding principle. 2016.104f. Dissertation of Master's degree (PostGraduation Program on the Teaching of Sciences and Mathematics Education) –State University of Londrina, Londrina, 2016.

### **ABSTRACT**

To know how teachers who teach mathematics in Basic Education dealt with a Stage Test, it sought to describe and analyze the participant's written production during the development of a Workshop of Written Production Analysis in Mathematics Tasks, part of Universal Project 483266 / 2012-4. This study of qualitative nature was guided by the didactical assessment, defended by RME authors, and also by assessment as a research practical and learning opportunity adopted by GEPEMA. Teachers, rather than just solve a test, were encouraged to use their own production as a mot to play a formative action under the perspective of the Guidance Principle from RME. Thus they had the opportunity to take other points of view, since different strategies, sometimes reflecting different levels, could be brought and used productively in the learning process.

Keywords: Realistic Mathematics Education. Assessment of School Learning. Learning opportunity. Assessment as a Research practical. Stage Test.



## Sumário

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>10</b>
<b>2 APONTAMENTOS TEÓRICOS</b> .....	<b>13</b>
<b>3 ENCAMINHAMENTO DO ESTUDO</b> .....	<b>20</b>
3.1 PERFIL DOS PARTICIPANTES .....	22
3.2 OS ENCONTROS .....	23
3.3 A PROVA EM FASES .....	26
<b>4 APRESENTAÇÃO DO ESTUDO</b> .....	<b>28</b>
4.1 QUESTÃO 01 .....	28
4.1.1 Resolução da questão 01 apresentada por P06 .....	32
4.1.2 Resolução da questão 01 apresentada por P07 .....	35
4.1.3 Resolução da questão 01 apresentada por P10 .....	39
4.2 QUESTÃO 02 .....	44
4.2.1 Resolução da questão 02 apresentada por P01 .....	51
4.2.2 Resolução da questão 02 apresentada por P02 .....	54
4.2.3 Descrição da questão 02 por P10 .....	63
<b>5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES</b> .....	<b>67</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>71</b>
<b>APÊNDICES</b> .....	<b>75</b>
APÊNDICE A .....	76
APÊNDICE B .....	80
APÊNDICE C .....	87

## INTRODUÇÃO

Nos últimos 30 anos ganham destaque: a) estudos que evidenciaram, por exemplo, que os pensamentos, as crenças e as teorias pessoais dos professores eram importantes na configuração de suas práticas de sala de aula e em suas decisões pedagógicas; b) estudos a respeito do conhecimento que os professores têm de suas áreas específicas, de como lidam com ele.

Para Shulman (1986), importa saber como um conteúdo específico da matéria que o professor leciona é transformado, a partir do conhecimento do professor, em conhecimento de ensino, como formulações particulares do conteúdo se relacionam com o que os estudantes passam a conhecer (SHULMAN, 1986). De acordo com esse mesmo autor, o conhecimento do conteúdo específico, que inclui as compreensões de fatos, conceitos, processos, procedimentos etc., é necessário, mas não suficiente para que seja ensinado e aprendido.

Considerando que, para Shulman (1986), um ponto central para pensar o conhecimento específico dos professores é que apenas quem compreende ensina, é desejável que se criem situações nas quais o professor possa reexaminar, refletir sobre sua produção, modificando-a de alguma forma, sempre que necessário. Esse é o caso da situação envolvida nesta investigação que faz parte da agenda de ação adotada pelo Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática - GEPEMA<sup>1</sup>. Os estudos realizados pelos participantes desse grupo têm envolvido três grandes temas: a avaliação da aprendizagem escolar como prática de investigação tomada como oportunidade de aprendizagem; a análise da produção escrita presente em resoluções de tarefas (rotineiras ou não-rotineiras) de matemática; a abordagem para o ensino de matemática chamada Educação Matemática Realística (RME). Pedrochi Junior (2012) apresentou, teoricamente, a configuração de uma perspectiva de avaliação como oportunidade de aprendizagem; Santos (2014), por sua vez, defende a tese de que a análise da produção escrita em aulas de matemática, sob a luz da reinvenção guiada, para além da perspectiva de estratégia de avaliação, pode ser utilizada como uma estratégia de ensino.

Este trabalho pretende dar continuidade aos trabalhos desenvolvidos no GEPEMA acerca do tema avaliação da aprendizagem, a partir da análise da

---

<sup>1</sup> O GEPEMA está constituído no Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina. < <http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema>>.

produção escrita de professores que ensinam matemática, em uma prova em fases buscando obter indícios de alguma (re)significação de conteúdos específicos da matemática básica escolar.

Assim, neste caso, dar continuidade aos trabalhos do GEPEMA pode ser entendido no sentido de utilizar uma prova em fases para mostrar um modo de fazer a análise da produção escrita assumida na perspectiva da oportunidade de aprendizagem sob a luz do Princípio da Orientação, um dos princípios da abordagem ao ensino de matemática denominada Educação Matemática Realística - RME<sup>2</sup>.

Este estudo está inserido em uma das ações do Projeto Universal 483266/2012-4 intitulado “**Análise da produção escrita como oportunidade para o desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática**”, desenvolvido com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), na Universidade Estadual de Londrina (UEL) e na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). O projeto tem como principal objetivo investigar potencialidades da análise da produção escrita como oportunidade para o desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática.

Na UEL, o Projeto Universal 483266/2012-4 iniciou suas atividades no primeiro semestre de 2013. Entre as suas metas está presente a produção de, pelo menos, duas dissertações de mestrado nos dois programas de Pós Graduação. Esta é uma delas e a segunda está sendo desenvolvida por outra participante do GEPEMA a respeito da elaboração de uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem com o mesmo grupo de 16 professores da área de matemática, da turma de 2014 do Programa de Desenvolvimento Educacional - PDE<sup>3</sup>. Esse grupo de professores participou da Oficina de Análise da Produção Escrita em Tarefas De Matemática<sup>4</sup>, uma das ações do Projeto Universal 483266/2012-4, e sua produção escrita foi analisada e dela foram recolhidas as informações para duas dissertações.

---

<sup>2</sup> *Realistic Mathematics Education*.

<sup>3</sup> O PDE é uma política pública de Estado regulamentado pela [Lei Complementar nº 130](#), de 14 de julho de 2010, que estabelece o diálogo entre os professores do ensino superior e os da educação básica, através de atividades teórico-práticas orientadas, tendo como resultado a produção de conhecimento e mudanças qualitativas na prática escolar da escola pública paranaense. Disponível em <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=20> acesso em 18 de agosto de 2015.

<sup>4</sup> Daqui por diante denominada apenas de Oficina.

Ao realizar essa investigação com os professores, pretendeu-se que eles vivenciassem, em uma Oficina de formação, uma oportunidade de aprendizagem utilizando a prática de resolver uma prova escrita em fases de matemática que permitisse um espaço de debate e troca de experiência.

A Educação Matemática Realística e a Avaliação como Oportunidade de Aprendizagem e Prática de Investigação foram tomadas como suporte deste estudo, que buscará:

- analisar como professores que ensinam matemática na Educação Básica lidam com questões não-rotineiras em uma prova de Matemática (por meio das produções escritas e de um caderno de campo utilizado de forma assistemática).

O instrumento "prova em fases" e a análise da produção escrita vêm sendo utilizados por participantes do GEPEMA nas suas investigações. Este trabalho se diferencia de outros desenvolvidos no GEPEMA por tomar a prova em fases à luz do Princípio da Orientação da RME na capacitação de professores, tendo como mote que um professor que não entende o que faz não pode ensinar (SHULMAN, 1987).

Neste trabalho, tomada a avaliação como parte integrante dos processos de ensino e de aprendizagem, utiliza-se o instrumento prova em fases para buscar enxergar, na produção escrita dos participantes, uma (re)consideração no pensar a matemática escolar, algum olhar diferente para algum dos conteúdos matemáticos envolvidos nas questões da prova.

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos. Na Introdução apresentam-se o problema, a justificativa e os objetivos da pesquisa. O segundo capítulo traz o suporte teórico deste estudo. O terceiro capítulo apresenta os encaminhamentos metodológicos utilizados. No quarto capítulo estão as análises e discussões realizadas, e no capítulo cinco são apresentadas considerações à guisa de finalização.

## 2 APONTAMENTOS TEÓRICOS

A abordagem Educação Matemática Realística (RME), foi desenvolvida na Holanda nos anos 1960 com base nas ideias de Hans Freudenthal<sup>5</sup>, tendo surgido em oposição ao chamado Movimento da Matemática Moderna<sup>6</sup> que teve uma perspectiva estruturalista. Na abordagem da RME é fundamental que o estudante, sob a orientação de um professor, tenha a oportunidade de elaborar seu conhecimento ao percorrer caminhos semelhantes aos dos matemáticos no desenvolvimento da Matemática tal como se conhece hoje, de sorte que possa ser considerado autor do seu próprio conhecimento.

Uma das características da RME é que a matemática é uma atividade provinda da ação humana, uma ação que compreende a ideia de lidar com fenômenos de modo organizado, de maneira que o conhecimento matemático formal seja desenvolvido a partir do conhecimento informal dos estudantes.

Na perspectiva da RME, os alunos devem ter a oportunidade guiada de “reinventar” a matemática de forma que possam aprender matemática matematizando, isto é, vivenciando processos de fazer matemática similares aos dos matemáticos. “Assim, as ideias de Freudenthal de matemática como uma atividade humana e de educação matemática como “reinvenção guiada” constituem o ponto de partida para o desenvolvimento das aulas de matemática” (CIANI, 2012, p. 34).

Segundo Freudenthal<sup>7</sup> (1971, pág. 413-414, tradução de Rodrigo Camarinho Oliveira, 2014), a matemática é uma

atividade de resolver problemas, de procurar problemas, e também uma atividade de organização de um assunto. Este pode ser uma questão de realidade, a qual tem de ser organizada de acordo com padrões matemáticos caso tenha de ser resolvida. Também pode ser uma questão matemática, resultados novos ou velhos, de produção própria ou de outros, que têm de ser organizados de acordo com

<sup>5</sup> Considerado o precursor da Educação Matemática Realística, Hans Freudenthal (1905-1990), matemático alemão que viveu na Holanda.

<sup>6</sup> O Movimento da Matemática Moderna foi uma abordagem para o ensino de Matemática que adotava uma perspectiva estruturalista.

<sup>7</sup> *“It is an activity of solving problems, of looking for problems, but it is also an activity of organizing a subject matter. This can be a matter from reality which has to be organized according to mathematical patterns if problems from reality have to be solved. It can also be a mathematical matter, new or old results, of your own or of others, which have to be organized according to new ideas, to be better understood, in a broader context, or by an axiomatic approach”.*

novas ideias, para ser mais bem entendida, em um contexto mais amplo ou por uma abordagem axiomática.

Para Oliveira (2014, p.54),

matematizar, no sentido mais amplo da palavra, significa aprender matemática numa perspectiva em que a matemática não é apenas um conjunto de conhecimentos, mas inclui o próprio processo de aprendizagem.

A RME adota seis princípios:

- da realidade - a matemática é entendida como uma atividade humana;
- da atividade - reinventar matemática se dá por meio do “fazer matemática” – matematização;
- de níveis - a partir de seus conhecimentos, informais ou não, os estudantes podem alcançar níveis mais altos de entendimento por meio da reinvenção guiada,;
- do entrelaçamento - os conteúdos dos domínios do conhecimento matemático (mas não apenas) são entrelaçados, possuem conexões entre si;
- da interatividade- a aprendizagem é uma atividade social e acontece por meio da interação entre os estudantes (mutuamente) e o professor na reinvenção guiada;
- da orientação - indica que os estudantes devem dispor de uma oportunidade guiada para “reinventar” a matemática”;

Esta investigação se utiliza mais diretamente do Princípio da Orientação. Nessa perspectiva, segundo Van Den Heuvel- Panhuizen (2000), é necessário um espaço para que os alunos construam conhecimentos matemáticos e ferramentas. Para isso o professor deve ser capaz de, por um lado, proporcionar esse espaço/oportunidade e, por outro deve estar constantemente observando e examinando a atividade dos alunos para saber como melhorá-lo (espaço/oportunidade).

Na abordagem aqui adotada, a importância de observar está também relacionada com a consideração de que ocorrem descontinuidades durante o processo de aprendizagem, e tomar consciência delas pode ajudar na compreensão da aprendizagem.

Uma descontinuidade, segundo Freudenthal (1991), pode

manifestar-se sob a forma de uma espécie de corte, de uma interrupção de algum processo em andamento e que acarreta a tomada de um ponto de vista diferente. Neste trabalho, o constructo dessa sequência, se acontecer, será denominado ressignificação (BURIASCO, 2016 no prelo).

Existem muitas formas de o professor fazer observações a respeito da atividade dos alunos. Uma delas, a adotada neste estudo, pode ser desenvolvida a partir de uma prova escrita em fases.

Inicialmente De Lange (1999) apresentou a prova em duas fases no seguinte formato: na primeira fase, os alunos resolviam individualmente as questões da prova elaborada pelo professor em um tempo determinado sem qualquer tipo de esclarecimento; após recolher a prova, o professor analisava as respostas dos alunos, realizava alguns questionamentos a partir das resoluções apresentadas e, em outro dia, na segunda fase, devolvia a prova para os alunos, que deveriam responder aos questionamentos, retomar a resolução das questões, podendo utilizar outros materiais. Dependendo do combinado com a turma, a segunda fase poderia até ser realizada em casa.

A prova em fases, que vem sendo desenvolvida pelo GEPEMA (PIRES, 2013; TREVISAN, 2013; MENDES, 2014; PRESTES, 2014), considera um número maior de fases e uma variedade de encaminhamentos. Por exemplo: na primeira fase,

- o professor elabora as questões da prova;
- os alunos resolvem a prova em um tempo determinado e individualmente;
- o professor recolhe as provas, analisa as resoluções dos alunos, faz comentários ou questionamentos.

Na segunda fase,

- o professor devolve a prova para os alunos;
- os alunos, em um tempo determinado, respondem aos questionamentos, podem retomar suas resoluções ou resolver questões não resolvidas.

Esse procedimento pode parar na segunda fase ou continuar, dependendo das intenções do professor.

Na primeira fase, a prova é igual para todos os alunos, mas nas fases seguintes, isso não se mantém, pois os questionamentos são individuais, referentes às resoluções de cada um, o que proporciona que, a cada fase, o aluno possa estar envolvido com diferentes tarefas, retomando conteúdos anteriores ou avançando, o que valoriza a individualidade e a singularidade.

A avaliação da aprendizagem é assim tomada como uma possibilidade de o professor utilizá-la como guia das suas ações, inclusive a de observação da atividade dos alunos.

Para Esteban (2006, p. 2) “a aprendizagem é um processo singular, em que os sujeitos vão construindo seus conhecimentos por meio de uma dinâmica própria em que não se pode predeterminar seu ritmo e trajeto, tampouco seu resultado”.

Compreendendo a avaliação como um processo permanente, Van den Heuvel-Panhuizen (1996) afirma que a avaliação não se destina a olhar apenas para trás, mas também para frente. Nesse sentido, permite que o professor possa, sempre que necessário, retomar a trajetória planejada tendo a avaliação também como uma indicadora de qual caminho tomar. Nessa perspectiva, a avaliação subsidia os processos de ensino e de aprendizagem, fornece informações sobre os alunos, professores, escolas (BURIASCO, 2000). Avaliar tem sempre como consequência a reflexão do aluno e também a do professor.

A avaliação, enquanto parte dos processos de ensino e de aprendizagem, oportuniza ao aluno (re)avaliar seu desenvolvimento, seus hábitos de estudo, seus pontos fortes e fracos; refletir a respeito de como pode direcionar sua trajetória de aprendizagem. Segundo Barlow, “o objetivo é, portanto, um ponto de apoio para a ação. Essa projeção no futuro não tem outro interesse a não ser motivar o aprendiz, estimulando-o a avançar nessa direção” (2006, p. 83).

Para apoiar a ação do aluno, o professor pode, por meio de *feedback*, dar à avaliação um caráter de diálogo uma vez que como a

[...] avaliação escolar tem como única finalidade melhorar o desenrolar da ação e torná-la mais condizente com seu projeto – do mesmo modo que, em matéria de comunicação, um *feedback* procura tornar a mensagem mais fiel às suas intenções (BARLOW, 2006, p. 15).



Esteban (2006) ressalta que quando não há perguntas sobre o que a professora faz, como, por que e para que faz, não se permite o espaço de diálogo, de *feedback* autêntico, de uma relação horizontal entre professor e aluno.

O professor, ao tornar público seus motivos, suas intenções e seus objetivos e deixar claro para o aluno o que se espera dele, o que ele deve fazer e/ou aprender, pode colaborar com as atitudes do aluno em sala de aula, permitindo que ele saiba o que é necessário em sua atuação para cumprir o que vem sendo exigido dele no que diz respeito ao seu desempenho escolar (PEDROCHI JUNIOR, 2012). Nessa direção, a avaliação formativa permite abarcar o maior número de necessidades diárias da avaliação, podendo ter como funções anexas: inventariar, harmonizar, tranquilizar, apoiar, orientar, reforçar, corrigir, estabelecer um diálogo e, também, promover outras oportunidades de aprendizagem.

A avaliação da aprendizagem foca o que os alunos aprenderam e são capazes de fazer. Mas, se não transforma as informações obtidas em algo novo para o aluno, que o faça repensar, reconsiderar, refletir, não será formativa. A avaliação formativa contém em si uma ação, precedida de uma intenção formativa (PEDROCHI JUNIOR, 2012, p.26).

A avaliação pode tratar a diferença como uma questão favorável para mostrar que a diversidade da forma de pensar auxilia na troca de experiências entre os alunos. Para isso ela precisa dar condições para o professor comparar o aluno exclusivamente com ele mesmo, pelos seus avanços no decorrer do período de aprendizagem, uma das ações pedagógicas comprometidas com

o desenvolvimento de habilidades, competências e conhecimentos prévios e uniformemente determinados, quando entendemos ser fundamental (re)conhecer e legitimar diferenças e singularidades, experiências, saberes e fazeres, desejos e curiosidades de diferentes sujeitos que vivem e dão vida à escola (ESTEBAN, 2012, p. 03).

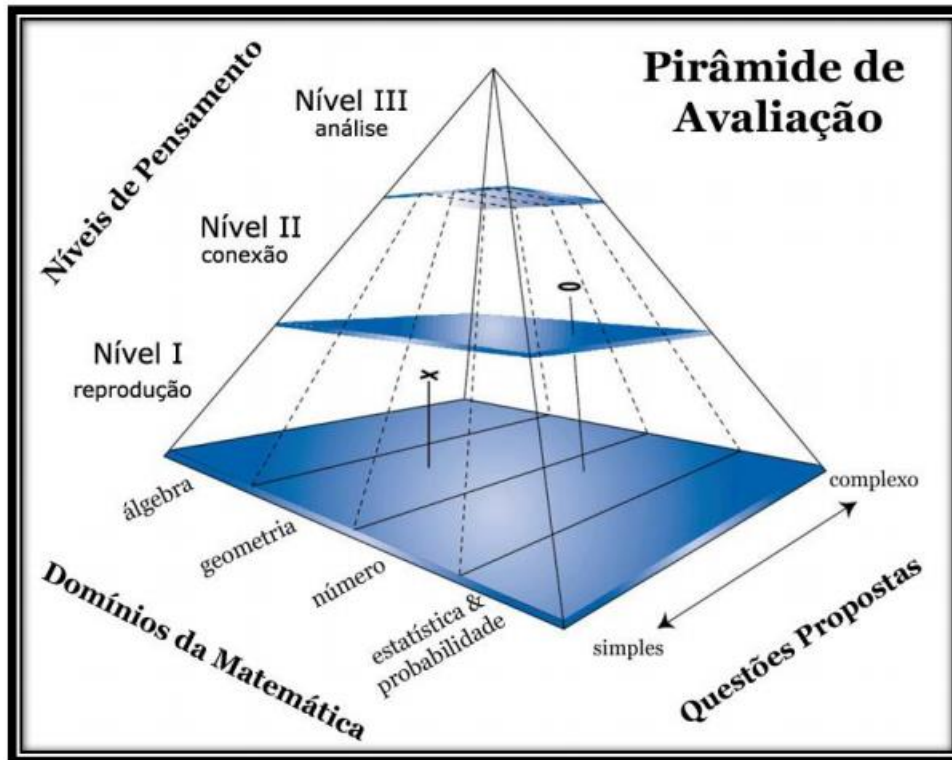
Na abordagem da RME, as tarefas devem ser as mesmas para todos os momentos da aula, sejam ou não para avaliação. De Lange (1999) propõe um modelo denominado Pirâmide de Avaliação<sup>8</sup> que contempla três níveis de pensamento e compreensão matemática, levando em conta o grau de complexidade (do simples ao complexo) e os domínios de conteúdo. Os níveis de pensamento, reprodução, conexões e análise/reflexão, dizem respeito aos processos matemáticos

---

<sup>8</sup> Tradução proposta pelos membros do GEPEMA e sistematizada em Ferreira (2012).

aplicados pelos estudantes na resolução da tarefas. A pirâmide pode servir de parâmetro para compor instrumentos de avaliação.

**Figura 01:** Pirâmide de Avaliação proposta por De Lange (1999)



Fonte: Ferreira (2013).

O nível 1, reprodução, engloba as competências familiares dos estudantes, com as quais lidam com situações e procedimentos familiares e rotineiros que envolvem conhecimento já mobilizado.

O agrupamento de competências presentes no nível 2, conexões, contém as competências descritas no nível anterior, mas, para lidar com as situações ou procedimentos que se apresentam, são necessários mais do que apenas procedimentos de rotina. Nesse agrupamento é necessária a integração de mais de um procedimento, a ampliação ou conexão entre várias ideias estruturadoras, ou, ainda, de diferentes representações. De Lange (1999, p. 14, tradução nossa) ressalta:

espera-se que, nesse nível, os estudantes lidem com diferentes formas de representações de acordo com a situação e a finalidade, decodificando e interpretando a linguagem simbólica e formal e

entendendo suas relações com a linguagem natural<sup>9</sup>.

O nível 3, reflexão, envolve, além das competências descritas nos outros dois agrupamentos, a capacidade de refletir e planejar estratégias para resolver problemas poucos familiares, ou não-rotineiros. Esse agrupamento contempla o raciocínio avançado, a argumentação, a abstração, a generalização, a modelagem aplicada a diferentes contextos. São características desse agrupamento de competências: a matematização, o pensamento matemático, a generalização, o *insight*, a capacidade de pensar criticamente, analisar modelos e a reflexão durante e sobre o processo (DE LANGE, 1999).

---

<sup>9</sup> From the point of view of mathematical language, another aspect at this level is decoding and interpreting symbolic and formal language and understanding its relations to natural language.

### 3 ENCAMINHAMENTO DO ESTUDO

O GEPEMA tem realizado estudos com a prova em fases buscando explicitar os princípios da RME por meio desse instrumento de avaliação, que é entendida como uma oportunidade de aprendizagem e prática de investigação. Alguns desses estudos (BURIASCO, 2004; NAGY-SILVA e BURIASCO, 2005; SANTOS, 2008; VIOLA dos SANTOS, BURIASCO e CIANI, 2008; PEREGO e BURIASCO, 2008; DALTO e BURIASCO, 2009; VIOLA DOS SANTOS e BURIASCO, 2009; DALTO e BURIASCO, 2009; FERREIRA, 2009, CIANI, 2012, TREVISAN, 2013; PIRES, 2013, SANTOS, 2014) apontam que professores podem realizar interpretações e reflexões a respeito da análise da produção escrita de seus alunos em sala de aula e que essas ações podem oferecer retratos e leituras dos processos de ensino e de aprendizagem. Retratos de um processo dinâmico, em tempos e condições diferentes, que podem possibilitar questionamentos a respeito de qual matemática os alunos aprendem, que entendimentos têm do que é trabalhado em sala de aula, que dificuldades apresentam e, por conseguinte, para os professores, que estratégias de intervenção podem elaborar.

Neste trabalho essa mesma direção foi seguida, mas utilizando a produção escrita de professores em situação de avaliação, sob a luz do Princípio da Orientação. Isso significa, no caso de um processo de formação de professores, em que repensam suas práticas, o que conhecem a respeito de conteúdos básicos da Educação Básica, em um contexto de “volta” a uma das ações realizadas frequentemente por alunos, mas não tão frequentemente por professores.

Segundo Buriasco (1999), a capacitação dos professores em serviço precisa ser feita a partir da problematização e discussão dos diferentes aspectos da sua prática pedagógica. Isso ocorre porque a formação se efetiva em um trabalho permanente de reflexão crítica sobre as práticas e em uma construção, também permanente, tanto pessoal quanto profissional, valorizando também o saber da experiência. Com isso, a formação é vista como um processo permanente, parte do cotidiano dos professores e das escolas.

O objetivo de utilizar uma prova em fases na presente pesquisa é apresentá-la como um instrumento que pode também desencadear uma ação formativa sob a ótica do sexto princípio da RME, o da Orientação.

Retomando o que já foi dito anteriormente, na abordagem aqui adotada, a importância de observar está também relacionada com a consideração de que ocorrem descontinuidades durante o processo de aprendizagem, e tomar consciência delas pode ajudar na compreensão da aprendizagem.

Como já foi explicitado na seção 2, ressignificação está sendo tomada como uma descontinuidade, uma interrupção de algum processo em andamento e que acarreta a tomada de um ponto de vista diferente. Para que essa ressignificação seja observada mais cuidadosamente, decidiu-se observar a produção de apenas três participantes da Oficina. Até porque as informações colhidas durante a investigação precisaram ser analisadas constantemente, uma vez que o questionamento que foi sendo feito nas diferentes fases dependia dessa análise.

Em geral, os professores utilizam a matemática que aprenderam (instrumental matemático da forma como dispõem) em situações consideradas rotineiras (padronizadas). Um dos aspectos de ressignificação seria utilizar esse instrumental em tarefas não-rotineiras (não padronizadas).

Uma das ações do Projeto foi o desenvolvimento de uma oficina que envolveu três professoras do departamento de Matemática da UEL, intituladas aqui como Professoras Formadoras; três alunos do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, um deles a autora deste trabalho e dezesseis professores do PDE, nomeados nessa dissertação como P01, P02, P03, P05, P06, P07, P08, P09, P10, P11, P12, P13, P14, P15, P16, P017. A professora P04 desistiu no segundo encontro por motivos pessoais.

Foram 16 encontros, entre os meses de agosto e novembro de 2014, oito presenciais e oito não. A partir do quarto encontro presencial, no primeiro momento, os participantes respondiam a uma prova em fases e, no restante do tempo, trabalhavam em grupo na elaboração de uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem<sup>10</sup>. A participação dos professores no período a distância envolvia também a construção de um glossário com as palavras cujos significados julgassem importante conhecer. Além disso, escreviam relatórios anotando suas impressões a respeito do ocorrido nos encontros presenciais.

---

<sup>10</sup> Essa ação é tema de estudo de outra aluna do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL.

### 3.1 PERFIL DOS PARTICIPANTES

O quadro a seguir apresenta as informações recolhidas a respeito da formação específica dos participantes e o tempo de docência. Mais informações no Apêndice B.

**Quadro 01 – Perfil dos participantes da Oficina.**

<b>Ano de conclusão da Graduação</b>	<b>Tempo de atuação na Educação Básica (anos)</b>	<b>Formação Inicial Específica</b>
1998	21	Fisioterapia, Matemática e Pedagogia
1997	19	Licenciatura Plena em Matemática
1997	16	Ciências com Habilitação em Matemática
1998	15	Matemática
1995	20	Matemática
1990	12	Matemática
1991	17	Administração de Empresas e Formação Pedagógica
2000	10	Licenciatura em Ciências com Habilitação em Matemática
1991	15	Não respondeu
1999	14	Matemática
1989	24	Licenciatura em Ciências com Habilitação em Matemática
1989	17	Matemática
2004	9	Magistério – Ensino Médio e Pedagogia
1994	20	Ciências com Habilitação em Matemática
1989	21	Ciências com Habilitação em Matemática
1991	20	Não respondeu

Fonte: A autora

Os dados do questionário mostram que o grupo dos professores participantes tem, em média, 17 anos de experiência (o tempo de trabalho varia entre 9 e 24 anos). Sete professores cursaram Licenciatura Plena em Matemática, cinco cursaram Licenciatura em Ciências com Habilitação em Matemática, um cursou Licenciatura em Pedagogia, um fez o curso de Administração e dois não responderam. Um dos professores realizou mais de um curso de graduação.

### 3.2 OS ENCONTROS

No primeiro encontro (19/08/14), foi apresentada a proposta do Projeto Universal e como seria conduzida a oficina, além disso, foi negociado o contrato didático com os participantes. Como tarefa, foi pedido aos participantes que, quando se deparassem com palavras não conhecidas ou que tivessem dúvidas em relação ao seu significado, consultassem os dicionários filosófico, etimológico e da língua portuguesa, escrevendo o significado em um caderno, compondo um glossário. Cada um dos participantes deveria ter um caderno de campo para relatar as atividades e suas impressões de cada encontro.

No primeiro encontro, inicialmente os alunos trabalharam individualmente com uma tarefa que envolvia o conceito de média aritmética, em seguida, coletivamente, discutiram alguns critérios de avaliação para essa questão.

No segundo encontro (02/09/14) o grupo de professores foi separado em duplas para analisar o caderno de campo do colega. Em seguida, coletivamente, foi discutido o que poderia ser feito para detalhar o relatório dos encontros. Cada participante pôde verbalizar o que considerou importante no seu relato. Na sequência, a prova em fases foi distribuída para cada professor resolver individualmente em um tempo de 2h30min. Estavam presentes 16 professores. As questões da prova em fases poderiam ser resolvidas na sequência que quisessem e deveriam justificar as respostas apresentadas. Também foi orientado que qualquer rascunho realizado permanecesse no corpo da prova em fases, não sendo permitida a utilização de outro material.

Alguns professores perguntaram como deveriam proceder, caso não conseguissem resolver alguma tarefa ou, ainda, caso o tempo não fosse suficiente para resolver toda a prova. A orientação dada foi que resolvessem o que fosse possível no tempo estabelecido. Os professores, nesse encontro, fizeram comentários durante a prova em fases. O professor P01 falou: “Isso aqui é prova em fases, não acaba nunca! Você vai receber tanta pergunta...”, outro comentário foi realizado pelo professor P16 para P14 “Tem que achar a área das duas [se referindo à pizza] a área é  $\pi r^2$ ?”

O terceiro encontro foi substituído pela participação no simpósio “Uma década de estudo e pesquisa em educação matemática e avaliação da

aprendizagem" do GEPEMA realizado nos dias 15 e 16/09/14 na Universidade Estadual de Londrina.

No quarto encontro (30/09/14), a prova em fases foi distribuída para cada professor terminar, individualmente, retomar alguma questão que não tivesse sido concluída no encontro do dia (02/09/14). Para isso, foi designado o tempo de 1 hora. Essa estratégia foi utilizada porque muitos professores informaram que o tempo não havia sido suficiente para realizar toda a prova. Estavam presentes 15 professores. Terminado o tempo, a prova foi recolhida e os professores formaram duplas para trabalhar na segunda tarefa da Oficina, a Trajetória de Ensino e Aprendizagem (TEA)<sup>11</sup>. Essa mesma dinâmica foi utilizada no quinto encontro (14/10/14), quando estavam presentes 14 professores. Porém, nessa fase da prova os participantes tiveram que responder questionamentos feitos pelos pesquisadores a respeito das resoluções para a tarefa Q01 e Q02.

Nesse encontro, os professores trabalharam na questão Q01 e Q02 e, por diversas vezes, utilizaram a calculadora. Muitos consultavam a calculadora por longo tempo, digitavam e continuavam olhando para a prova. Pode-se inferir que isso ocorreu por ser necessário fatorar os números 12600 e 497420 pedidos na questão 02. Para encontrar as áreas também utilizaram a calculadora.

P01 perguntou para uma das professoras formadoras em voz alta: "Na minha prova não houve nenhuma observação, o duro é que não dá para saber se está certo ou errado". Outro professor também falou em voz alta: "Não consigo decifrar esse nome... nunca mais dou prova para meus alunos, coitadinho deles".

Os professores apresentavam algumas expressões de dúvidas, como, por exemplo, olhar fixo para a folha de prova, balançar a caneta na mão de um lado para outro.

Notou-se que, quando não conseguiam responder o questionamento feito pelas Professoras Formadoras, os professores ficavam longo tempo "debruçados" na questão com expressão pensativa.

No sexto encontro (04/11/14), realizou-se a continuação da prova em fases e os professores trabalharam nas questões Q02, Q03 e Q04. Estavam presentes 12 professores e o tempo dado para essa tarefa foi de uma hora. Alguns professores questionaram se as respostas anteriores estavam corretas ou não. No

---

<sup>11</sup> O estudo do desenvolvimento das trajetórias está sendo objeto de estudo de outra participante do GEPEMA.



geral, os professores mostraram pressa para entregar a prova. P13 falou: “É duro ser aluno”. Todos riram. P01 solucionou a questão e pareceu conferir alguns cálculos e, ao final apresentou uma expressão facial de dúvida, olhou a prova por longo tempo como se estivesse tentando entender. Após o término da prova em fases, os professores trabalharam em duplas na elaboração da TEA.

No sétimo encontro (11/11/14), o trabalho com a realização da prova em fases continuou, também com duração aproximada de uma hora. Estavam presentes 15 professores. P03 terminou a questão e mostrou uma expressão de dúvida, olhando compenetrado para a prova, chegou a ficar com a face vermelha. Nesse dia, escutaram-se diversas frases, entre elas: "Não quero pensar de novo não, cansei!", "Só vou responder o que estiver perguntando", "O que você disser será usado contra você no tribunal", "Cansei, cansei dessa brincadeira", "Só acho que, se a gente for trabalhar com prova em fases, tem que tomar esse cuidado, as idas e vindas podem cansar o aluno, e hoje o aluno não gosta de repetir, é muito imediato, não gosta de repetir, não gosta... tem que tomar cuidado", "Tanto que entrega em branco", "Não quer fazer recuperação".

No último encontro (25/11/14), os participantes responderam aos questionamentos da prova em fases, no primeiro momento, com duração em torno de uma hora. Estavam presentes 15 professores. Em seguida, foi permitido que olhassem a prova em fases dos colegas e conversassem a respeito de suas resoluções, porém não foi permitida qualquer alteração da produção escrita. Essa ação foi pensada a partir da curiosidade mostrada pelos professores em trocar informações com os colegas no decorrer da tarefa, apresentando uma preocupação constante em relação ao correto ou incorreto. Na sequência houve uma discussão coletiva para que os professores expusessem suas impressões de trabalhar com a prova em fases.

**Quadro 02:** Resumo dos Encontros

Data	Tempo de duração do encontro		Resumo dos encontros
	Outras atividades	Prova em fases	
19/08/15	3h	-	Apresentação do Projeto Universal, realização do contrato didático. Oficina de resolução de problemas.
02/09/15	30 min	2h30	Análise e discussão de uma tarefa. Elaboração do relatório do encontro

			anterior. Aplicação da prova em fases.
15/09/15	3h	-	Simpósio do GEPEMA
16/09/15	3h	-	Simpósio do GEPEMA
30/09/15	2h	1 h	Aplicação da prova em fases. Trabalho na elaboração da Trajetória de Ensino e Aprendizagem.
14/10/15	2h	1 h	Aplicação da prova em fases. Trabalho na elaboração da Trajetória de Ensino e Aprendizagem.
04/11/15	2h	1 h	Aplicação da prova em fases.
11/11/15	2h	1 h	Aplicação da prova em fases. Trabalho na elaboração da Trajetória de Ensino e Aprendizagem.
25/11	2h	1 hora	Aplicação da prova em fases. Troca de informação entre os colegas em relação a prova em fases. Discussão coletiva para expor as impressões, opiniões e sugestões do trabalho com a prova em fases.

Fonte: a autora.

### 3.3 A PROVA EM FASES

A prova em fases (Apêndice C), utilizada como instrumento de coleta de informações neste estudo, foi composta por oito tarefas, todas abordando temáticas de matemática da Educação Básica, retiradas do banco de questões do PISA<sup>12</sup> e da OBMEP<sup>13</sup>. Para a escolha dessas questões, levou-se em conta a possibilidade de poderem ser resolvidas de formas diversas e abordarem conteúdos frequentemente trabalhados por professores de matemática nos anos finais do Ensino Fundamental. Juntamos a esses propósitos a possibilidade de os participantes, em algum momento, levarem as tarefas para suas turmas de alunos e considerarem os questionamentos realizados durante o processo, permitindo repensar outras formas de trabalhar esses conteúdos de matemática.

Os conteúdos envolvidos nas tarefas da prova em fases estão apresentados no quadro a seguir.

<sup>12</sup> Programme for International Student Assessment.

<<http://portal.inep.gov.br/pisa-programa-internacional-de-avaliacao-de-alunos>>

<sup>13</sup> Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

**Quadro 03 – Relação do conteúdo matemático por questão**

Questão 01	Área do círculo, razão, proporção.
Questão 02	Fatoração, decomposição em fatores primos, elemento neutro da multiplicação.
Questão 03	Sistema monetário, regra de três, conversão de moedas.
Questão 04	Multiplicação, divisão, porcentagem, função afim.
Questão 05	Área de figuras planas.
Questão 06	Regra de três, proporção, equação, porcentagem, funções.
Questão 07	Cálculo de estimativa, porcentagem.
Questão 08	Números decimais, média, estimativa.

Fonte: a autora

O número de encontros não foi suficiente para explorar todas as tarefas da prova, apenas as duas primeiras foram finalizadas. Por esse motivo, este trabalho utilizou a produção escrita dos professores nessas duas tarefas.

## 4 APRESENTAÇÃO DO ESTUDO

Para este estudo escolheu-se, por conveniência, trabalhar com duas questões da prova escrita e as soluções apresentadas por P06, P07 e P10 para a questão 01, e as soluções de P01, P02 e P10 para a questão 02.

Na sequência apresentam-se as duas tarefas, a relação dos conteúdos envolvidos e possíveis caminhos de solução.

### 4.1 QUESTÃO 01

Enunciado da questão 01:

Uma pizzaria serve duas pizzas redondas da mesma espessura, do mesmo recheio e em tamanhos diferentes. A menor delas tem um diâmetro de 30 cm e custa 30 reais. A maior delas tem um diâmetro de 40 cm e custa 40 reais. Qual das pizzas tem o preço mais vantajoso? Demonstre seu raciocínio.

Para resolver Q01, é necessário conhecer alguns conteúdos matemáticos da Educação Básica, contextualizá-los na tarefa e relacioná-los.

#### Quadro 04 – Conteúdos matemáticos para a tarefa Q01

<p><b>Círculo</b> Superfície plana limitada por uma circunferência. O círculo de centro <math>O</math> e raio <math>r</math> pode ser definido como o conjunto de todos os pontos do plano que têm distância <math>r</math> do ponto <math>O</math>.</p>
<p><b>Circunferência</b> Linha curva fechada dada pela expressão <math>C = 2\pi r</math> cujos pontos são equidistantes de um ponto fixo, o centro.</p>
<p><b>Área do círculo</b> Medida de uma superfície<sup>14</sup>. Área de um círculo de raio <math>r</math> é o limite das áreas das regiões poligonais regulares inscritas nesse círculo<sup>15</sup>. Fórmula: <math>A = \pi r^2</math>.</p>
<p><b>Diâmetro</b> É uma corda que passa pelo centro do círculo.</p>

<sup>14</sup> Microdicionário de Matemática (IMENES; LELLIS 1998, p.63).

<sup>15</sup> Disponível em: <<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/geom-areas/geom-areas-circ.htm>>. Acesso em 15 de Jan 2016.

<p><b>Espessura</b> Qualidade ou característica do que é espesso; grossura. Se a altura de uma figura espacial é muito menor que o comprimento e a largura, costuma-se chamá-la de <i>espessura</i><sup>16</sup>.</p>
<p><b>Fração</b> Fração é um conceito com mais de um significado. Um desses significados relaciona-se com a noção de <i>parte</i>. Considere um todo (ou unidade) dividido em partes iguais, do qual se tomam algumas das partes. Nesse caso, a fração indica as partes tomadas. Outro significado de fração relaciona-se com a noção <b>de razão</b>. A forma fracionária pode representar uma razão entre grandezas. Um terceiro significado de fração envolve a noção de divisão e entendida dessa forma, as frações representam números racionais<sup>17</sup>.</p>
<p><b>Grandezas</b> Valor (ou medida) associado a um objeto matemático<sup>18</sup>.</p>
<p><b>Massa</b> Quantidade de matéria contida num corpo<sup>19</sup>.</p>
<p><b>Pi (<math>\pi</math>)</b> Quociente da divisão (ou a razão) entre a medida do diâmetro de círculo e sua circunferência. Valor aproximado 3,141592</p>
<p><b>Razão</b> Quociente entre dois números<sup>20</sup>. Noção relacionada com a comparação de duas quantidades por meio da divisão.</p>
<p><b>Proporção</b> Relação multiplicativa entre duas grandezas, dois números ou duas medidas Proporção é a igualdade entre duas razões<sup>21</sup>.</p>
<p><b>Raio</b> Raio é um segmento de reta que liga o centro de um círculo a qualquer ponto da circunferência do círculo<sup>22</sup>. A medida desse segmento também é designada pela palavra <i>raio</i><sup>23</sup>.</p>
<p><b>Volume</b> Medida (em unidades cúbicas) do espaço ocupado por um sólido<sup>24</sup>. Medida do espaço ocupado por um corpo<sup>25</sup>.</p>

O GEPEMA diferencia estratégia de procedimento da seguinte forma:

<sup>16</sup> Idem, p. 119.

<sup>17</sup> Idem, p. 136-137-138.

<sup>18</sup> Dicionário Houaiss.

<sup>19</sup> Idem, p. 186.

<sup>20</sup> Dicionário Houaiss.

<sup>21</sup> Idem, p. 252.

<sup>22</sup> Idem, p. 265.

<sup>23</sup> Idem, p. 265.

<sup>24</sup> Dicionário Houaiss.

<sup>25</sup> Idem, p. 328.

- estratégia é entendido como a ferramenta matemática tomada para resolver a tarefa;
- procedimento é o caminho trilhado pelo estudante na resolução, ou seja, como foi realizada a tarefa.

Alguns procedimentos que poderiam ser utilizados na resolução da tarefa Q01 são apresentados a seguir.

Calcular a área do círculo e realizar a divisão do preço pela área para saber o preço do  $cm^2$  de cada pizza.

Calcular a área do círculo e realizar a divisão da área de cada uma das pizzas pelo seu preço para saber quanto se pode comprar de cada uma com 1 real.

Apresentam-se a seguir algumas estratégias que poderiam ser utilizadas na resolução da tarefa Q01.

Comparar o preço por  $cm^2$  em cada uma das pizzas.  
 Fazer a comparação pela diferença de área e de preço.  
 Comparar as duas pizzas utilizando a diferença de preço e de tamanho em forma de porcentagem.

### Possíveis modos de resolução

#### 1º. modo

Calcular a área do círculo e utilizar a razão centímetro por preço.

	Pizza menor	Pizza maior
$A = \pi r^2$	$A = 3,14 \cdot 15^2$	$A = 3,14 \cdot 20^2$
$razão = \frac{área}{preço}$	$A = 706,5 cm^2$	$A = 1256 cm^2$
	$razão = \frac{706,5}{30} = 23,55 \text{ cm}^2 \text{ por real}$	$razão = \frac{1256}{40} = 31,40 \text{ cm}^2 \text{ por real}$

Resposta: Com 1 real posso comprar aproximadamente  $23,55 \text{ cm}^2$  da pizza menor e aproximadamente  $31,40 \text{ cm}^2$  da pizza maior. Então a pizza que tem o preço mais vantajoso é a pizza maior.

2º. modo

Calcular a área do círculo e utilizar a razão preço por centímetro.

$A = \pi r^2$ $razão = \frac{preço}{área}$	pizza menor	pizza maior
	$A = 3,14 \cdot 15^2$ $A = 706,5$	$A = 3,14 \cdot 20^2$ $A = 1256$
	$razão = \frac{30}{706,5} = 0,04 \text{ real por } cm^2$	$razão = \frac{30}{706,5} = 0,04 \text{ real por } cm^2$

Resposta: Cada  $cm^2$  da pizza menor custa aproximadamente R\$ 0,04 e cada  $cm^2$  da pizza maior custa aproximadamente R\$0,03. Então a pizza com o preço mais vantajoso é a pizza maior.

3º. modo

Tomar  $\pi = 3$ , encontrar a área aproximada dos círculos, utilizar a regra de três para a relação custo por  $cm^2$ , envolvendo a ideia de proporção.

$A = \pi r^2$	$A = 3 \cdot 15^2$	$A = 3 \cdot 20^2$
$preço \text{ reais} - \text{área } cm^2$	$A = 675$	$A = 1200$
$1 \text{ real} - x$	$30 \text{ reais} - 675 \text{ } cm^2$	$40 \text{ reais} - 1200 \text{ } cm^2$
	$1 \text{ real} - x$	$1 \text{ real} - x$
	$x = 22,5 \text{ } cm^2$	$x = 30 \text{ } cm^2$

Resposta: Com 1 real posso comprar aproximadamente  $22,50 \text{ } cm^2$  da pizza menor e aproximadamente  $30 \text{ } cm^2$  da pizza maior. Então a pizza com o preço mais vantajoso é a pizza maior.

4º. modo

Encontrar as áreas dos círculos, achar a diferença entre as duas áreas e entre os dois preços. Fazer a comparação entre essas diferenças.

$Área = A_{40} - A_{30}$	$Área = 1256 - 706,5 = 549,50$
$Preço = P_{40} - P_{30}$	$Preço = 40 - 30 = 10$

Resposta: A diferença entre as áreas das pizzas é de  $549,50 \text{ cm}^2$  e a diferença do preço delas é de 10 reais. Logo a pizza maior, de diâmetro de  $40 \text{ cm}$ , tem o preço mais vantajoso porque com uma diferença de apenas 10 reais é possível comprar uma superfície de  $549 \text{ cm}^2$  enquanto que comprando a pizza menor eu pago 30 reais por  $706 \text{ cm}^2$ .

#### 4.1.1 Resolução da questão 01 apresentada por P06

##### Quadro 05 - Produção de P06 e descrição da resolução - Tarefa Q01 – Fase 01.

<p> <math>D = 30</math>  <math>A = \pi R^2</math>  <math>A = 706,5 \text{ cm}^2</math> </p> <p> <math>\frac{30}{706,5} = 0,042</math> </p> <p> <math>D = 40</math>  <math>A = \pi R^2</math>  <math>A = 1256 \text{ cm}^2</math> </p> <p> <math>\frac{40}{1256} = 0,031</math> </p> <p>Preço mais vantajoso</p> <p> <math>0,25 \cdot \pi \cdot 30 \cdot 30 = 225\pi</math>      Área R\$  <math>225\pi</math> — 30  <math>x</math> — ↓  <math>x = 7,5\pi</math>      ou 23,55      ↓ real = <math>23,55 \text{ cm}^2</math> </p> <p> <math>0,25 \cdot \pi \cdot 40 \cdot 40 = 400\pi</math>      Área R\$  <math>400\pi</math> — 40  <math>x</math> — ↓  <math>x = 10\pi</math> ou      31,4      ↓ real = <math>31,4 \text{ cm}^2</math> </p>	<p>Descrição:</p> <p>Desenhou dois círculos, escreveu, abaixo do menor, <math>D=30</math> e, abaixo do maior <math>D=40</math>. Calculou a área das pizzas utilizando a fórmula da área do círculo, encontrando, respectivamente, <math>706,5 \text{ cm}^2</math> e <math>1256 \text{ cm}^2</math>. Dividiu 30 por 706,5 e 40 por 1256, encontrou 0,042 e 0,031. Escreve embaixo da divisão de 40 por 1256: preço mais vantajoso. Em seguida apresentou outra forma de resolução: subtraindo 30 de 40, que resultou em 10,</p>
<p>igualou a 25% e igualou a 0,25. Escreveu a expressão: 0,25 vezes <math>\pi</math> vezes 30 vezes 30, chegou a <math>225\pi</math>. Escreveu uma regra de três relacionando área e custo e concluiu que 1 real é igual a <math>23,55 \text{ cm}^2</math>. Escreveu a expressão: 0,25 <math>\pi</math> vezes 40 vezes 40 e chegou a <math>400\pi</math>. Escreveu uma regra de três relacionando área e custo e concluiu que 1 real é igual a <math>31,4 \text{ cm}^2</math>.</p>	

Os procedimentos utilizados por P06 foram:

- utilizar a fórmula da área do círculo  $A = 2\pi r^2$ ;
- realizar a divisão entre o preço e a área, para cada pizza;
- calcular as áreas deixando o resultado em função de  $\pi$ ;
- escrever uma regra de três relacionando área total de cada pizza com o seu preço e  $x$  com 1 real;



- realizar os cálculos para encontrar a área que custaria 1 real.

A estratégia utilizada foi comparar as razões de preço pela área das duas pizzas.

E, para confirmar a resposta, calculou a área de pizza que consegue comprar com um real, em cada uma das duas pizzas.

A produção do professor na primeira fase mostrou compreensão do problema, calculou a área, encontrou o preço por  $\text{cm}^2$  em cada uma das duas pizzas, não escreveu o significado disso, mas deu uma justificativa correta para confirmar sua resposta. Como se fosse a prova real, ele calcula também o que levaria com 1 real em cada uma das pizzas e, nesse caso, apresentou claramente, por escrito, um registro da possível atribuição desse significado.

P06 indicou como sendo mais vantajosa a pizza maior. É importante notar que, para chegar ao valor da unidade monetária por área, o resolvidor parte do cálculo da diferença porcentual do custo das pizzas, multiplica a diferença encontrada pela área de cada pizza e com o resultado monta uma regra de três para encontrar a relação unidade monetária por área.

A resolução de P06 mostra que Q01 permite o princípio do entrelaçamento. O professor aplica uma gama de ferramentas matemáticas e entendimentos, nesse caso, os conteúdos envolvidos foram: área de círculo, razão entre grandezas, porcentagens apresentadas em mais de uma forma, regra de três. Ao utilizar essas ferramentas matemáticas, P06 indica que seu nível de pensamento é de conexão por lidar com situações que, provavelmente, estão além dos seus procedimentos de rotina, integrando mais de um procedimento.

O Quadro 06 apresenta a segunda fase, constituída de questões geradas a partir da resolução inicial e das respostas de P06 na primeira fase.

**Quadro 06** Produção de P06 e descrição da resolução - Tarefa Q01 – Fase 02.

<b>Fase</b>	<b>Perguntas da pesquisadora</b>	<b>Registro<sup>26</sup> escrito de P06</b>
2	1) Você calculou a área de cada pizza e utilizou a forma fracionária para indicar a relação preço por $\text{cm}^2$ . Qual é a ideia que essa fração representa? É a de parte/todo?	A quantidade da pizza adquirida é encontrada pela observação do diâmetro, a área da superfície aumenta mais rápido que o preço da pizza, concluindo que a pizza maior

<sup>26</sup> Em todos os registros escritos dos professores será mantida a escrita original.


		tem o preço mais vantajoso, diâmetro ou preço pela área total da pizza. A proporção preço por $cm^2$ representa uma parte do todo.
	2) Por que, no enunciado, o problema informa que as pizzas possuem a mesma espessura?	Para deixar claro que a única diferença está no diâmetro.
	3) Por que, no enunciado, o problema informa que as pizzas possuem o mesmo recheio?	Para indicar que as pizzas são iguais, que a diferença está somente no diâmetro.

Na primeira parte da resposta à questão 1, P06 volta a justificar sua resposta à tarefa inicial, dizendo que a pizza de diâmetro maior é mais vantajosa porque "a área da superfície aumenta mais rápido que o preço da pizza", porém não apresenta nenhum detalhe na resolução que o fez chegar a essa conclusão.

Na segunda parte da resposta à questão 1, P06 diz que a "proporção preço por  $cm^2$  representa uma parte do todo", porém a razão não representa parte/todo, mas a relação de preço por  $cm^2$ .

Na tentativa de responder aos questionamentos 2 e 3, P06 dá indício de que compreende a questão colocada e por que é possível considerar apenas o tamanho da pizza. A resposta à questão 3 dá indícios de que compreende que não teria que calcular o volume.

**Quadro 07 - Produção de P06 e descrição da resolução - Tarefa Q01 – Fase 03.**

Fase	Perguntas da pesquisadora	Registro escrito de P06
3	4) O que significa parte/todo? Dê um exemplo fora do contexto do problema.	Penso que é a parte fracionária. ex:  consumiu a metade do chocolate, $\frac{1}{2}$ de todo. (parte/todo)

P06 não explica o que entende por parte/todo, apresenta um exemplo costumeiramente trabalhado no contexto escolar ao desenhar uma barra de chocolate. Não menciona que as frações podem representar quatro ideias (razão, quociente, parte/todo e operador).

**Quadro 08** - Produção de P06 e descrição da resolução - Tarefa Q01 – Fase 04.

Fase	Perguntas da pesquisadora	Registro escrito de P06
4	5) Em relação ao problema, aparece na sua resolução a fração $\frac{40}{1256}$ , que significado ela pode ter?	Diâmetro ou preço dividido pela área total.

Pela resposta dada por P06, supõe-se que ele não entendeu a pergunta ou não analisou a produção inicial, pois na resposta o "40" indica o preço da pizza. P06 afirma, pela segunda vez, que 40 pode ser diâmetro ou preço, sem levar em consideração que a razão  $\frac{40}{1256}$  é custo por  $cm^2$ .

Finalmente, pela última resposta de P06, nota-se que a pergunta a respeito da ideia da fração não alcançou o seu objetivo, a produção escrita do resolvidor sequer anuncia que conhece as diferentes ideias que a fração pode assumir.

#### 4.1.2 Resolução da questão 01 apresentada por P07

**Quadro 09** - Produção de P07 e descrição da resolução - Tarefa Q01 – Fase 01.

raciocínio.	Descrição:
<p>raciocínio.</p> <p>menor maior</p> <p><math>C = 2 \cdot \pi \cdot r</math>  <math>C = 6,28 \cdot 15</math>  <math>C = 94,2 \text{ cm}</math></p> <p><math>C = 6,28 \cdot 20</math>  <math>C = 125,6 \text{ cm}</math></p> <p><math>94,2 \overline{) 30}</math>  <math>\underline{3,14}</math> A</p> <p><math>125,6 \overline{) 40}</math>  <math>\underline{3,14}</math> B</p> <p>A maior tem 31,4 cm de comprimento a mais por ter diâmetro maior a diferença de preço de 10 reais também será proporcional vai pagar mais e irá comer mais, ambas são vantajosas vai depender do apetite.</p>	<p>Desenhou duas circunferências, indicou o valor do raio da primeira (menor), 15 cm; indicou o raio da segunda (maior), 20 cm. Calculou o comprimento das duas circunferências, chegou em 94,2 cm e 125,6 cm. Dividiu o comprimento de cada uma das circunferências pelo preço, e o preço pelo comprimento das circunferências.</p>

Encontrou para a pizza menor: 3,14 e 0,318 e, para a pizza maior, 3,14 e 0,318.

Responde: A maior tem 31,4 *cm* de comprimento a mais por ter diâmetro maior, a diferença de preço de 10 reais também será proporcional, vai pagar mais e irá comer mais, ambas são vantajosas, vai depender do apetite.

Os procedimentos utilizados por P07 foram:

- calcular o comprimento das duas circunferências, utilizando a fórmula  $C = 2\pi r$ ;
- dividir o comprimento de cada uma das circunferências pelo preço (ou o diâmetro);
- dividir o preço (ou o diâmetro) pelo comprimento das circunferências;
- calcular a diferença entre os dois comprimentos de circunferência.

A estratégia utilizada por P07 foi comparar as circunferências das pizzas e seus respectivos preços.

Na primeira fase da prova, P07 faz o cálculo do comprimento das pizzas. Encontra, na razão comprimento dividido por preço (ou pelo diâmetro), o valor 3,14, ou seja, o valor de  $\pi$ . Isso acontece porque o diâmetro das pizzas possui o mesmo valor numérico do preço. Realiza a operação inversa, que divide o preço pelo comprimento da circunferência. Na resposta final, justifica que a maior tem 31,4 *cm*, o que não corresponde aos valores encontrados nas operações de divisão. P07 reconhece o comprimento e o diâmetro, realiza o cálculo de diferença de preço das pizzas. Expõe um argumento social ao dizer que a maior é mais vantajosa porque se comerá mais, dependendo do apetite.

**Quadro 10 - Produção de P07 e descrição da resolução - Tarefa Q01 – Fase 02.**

Fase	Perguntas da pesquisadora	Registro escrito de P07
2	1) Você calculou o comprimento do círculo e fez uma divisão para encontrar os indicadores para a resposta. O que significa A, B, C e D?	A, B, C e D significam o comprimento do círculo dividido pelo valor de custo em reais e a operação inversa custa em reais pelo (valor) medida de comprimento do círculo em ambas as pizzas para verificar a equivalência.
	2) Por que no enunciado o problema informa que as pizzas têm a mesma espessura?	Porque o que está em questão é o tamanho das pizzas em relação ao preço e não a massa, pois espessuras diferentes para daria p/ equivaler.

	3) Por que no enunciado o problema informa que as pizzas têm o mesmo recheio?	Porque dependendo do recheio o custo é mais alto, o que não daria p/ verificar a equivalência.
--	---	--

Para o primeiro questionamento da segunda fase, P07 não mostra perceber que realizar o cálculo do comprimento do círculo não resolve a questão. Na segunda fase, questão 1, apenas descreve as operações sem demonstrar reflexão ou os níveis de pensamento indicados por De Lange (1999). A questão 1, feita pela pesquisadora, tinha a intenção de provocar a reflexão a respeito da necessidade do cálculo de área, ainda mais que, nas próximas duas questões, a indicação é que a espessura e o recheio não influenciam na comparação, já que são iguais nas duas pizzas. Além disso, pretendeu mostrar que calculou duas razões à procura de um indício de resposta, sem analisar o significado de cada uma delas.

No 2º questionamento, P07 não expôs claramente o significado do que levou à conclusão, pois, quando escreve "o tamanho da pizza", poderia estar levando em conta a massa. A resposta apresentada indica que P07 pode não ter claro o conceito de massa, assim, não foi possível inferir se ele reconheceu que teria que calcular o volume, caso houvesse variação da espessura.

**Quadro 11** - Produção de P07 e descrição da resolução - Tarefa Q01 – Fase 03.

Fase	Perguntas da pesquisadora	Registro escrito de P07
3	4) O que você quis dizer com "tamanho" *?	Ao me referir ao tamanho pensei no diâmetro de cada pizza, pois através dele consigo obter o comprimento de cada disco de pizza.
	5) A espessura pode ser considerada um tamanho?	Penso que seja uma altura, uso o termo para espessura como mais grosso(a) ou fina(o).
	6) Proporcionalmente, qual é a mais vantajosa?	As duas, mas eu compraria a maior.

Na terceira fase foram feitos três questionamentos. Ao responder à quarta pergunta, P07 mostra compreender a ideia de diâmetro, mas falta precisão na linguagem matemática.

Na resposta à quinta interrogação, P07 usou o conceito de altura que é frequentemente usado no senso comum, utilizou as palavras "grossa" e "fina". P07

não indica que teria que calcular o volume de cada pizza, porém parece compreender a pergunta feita.

Ao responder à questão 06, P07 diz que poderiam ser as duas pizzas e, em seguida, afirma que compraria a maior, sem justificativa matemática ou apresentar algum cálculo.

A pesquisadora continua tentando guiar P07 a refletir na primeira resolução, tentando fazê-lo enxergar a necessidade de conhecer a área de cada uma das duas pizzas.

**Quadro 12** Produção de P07 e descrição da resolução - Tarefa Q01 – Fase 04.

Fase	Perguntas da pesquisadora	Registro escrito de P07
4	7) Quanto custa o $\text{cm}^2$ de cada pizza?	[não respondeu]

P07 não apresenta resposta para a questão 07. A resposta esperada seria: calcular a área do círculo e a razão preço por área. Por não ter respondido a essa questão, acredita-se que, apesar de P07 ter compreendido a proposta da tarefa, não entendeu a relação do  $\text{cm}^2$  na tarefa, já que, na primeira resolução, apresenta o comprimento da circunferência.

**Quadro 13** - Produção de P07 e descrição da resolução - Tarefa Q01 – Fase 05.

Fase	Perguntas da pesquisadora	Registro escrito de P07
5	8) ⑦?	<p> <math>d=30\text{cm}</math>  <math>r=\frac{d}{2}</math>  <math>r=\frac{30}{2}</math>  <math>r=15\text{cm}</math>  <math>A=\pi \cdot r^2</math>  <math>A=3,14 \cdot 15^2</math>  <math>A=3,14 \cdot 225</math>  <math>A=706,5\text{cm}^2</math>  <math>\frac{706,5\text{cm}^2}{30\text{reis}}</math>  <math>\underline{\underline{23,55}}</math>          ↓          O custo do <math>\text{cm}^2</math> da pizza menor é <u>0,042</u>.       </p> <p> <math>d=40\text{cm}</math>  <math>r=\frac{d}{2}</math>  <math>r=20\text{cm}</math>  <math>A=\pi \cdot r^2</math>  <math>A=3,14 \cdot 20^2</math>  <math>A=3,14 \cdot 400</math>  <math>A=1256\text{cm}^2</math>  <math>\frac{1256\text{cm}^2}{40\text{reis}}</math>  <math>\underline{\underline{31,4}}</math>          ↓          O custo do <math>\text{cm}^2</math> da pizza maior é <u>0,031</u>.       </p>

Na quinta fase, a pesquisadora propõe que a pergunta 08 seja idêntica à pergunta 07, anteriormente não respondida. Ao responder a questão 8, P07 mostra compreender a diferença entre área e diâmetro. Apresenta o cálculo da área do círculo, realiza a operação área dividida por preço e apresenta o resultado preço por área. É possível que o resolvidor tenha vindo para essa fase com a resposta decorada. Não responde qual das pizzas é mais vantajosa. A produção de P07, nesta fase, possibilita inferir que ele tenha refletido e conversado com outros participantes, pois escreve a relação diâmetro e raio e a fórmula da área, calcula a razão  $\text{cm}^2$  por real, porém dá como resposta números que representam a razão inversa. Os questionamentos realizados pela pesquisadora oportunizaram que P07 calculasse o valor das áreas, porém não houve reflexão e, com base em sua produção, pode-se inferir que está no nível de reprodução.

Parece que a resposta final só representa uma hipótese do resolvidor e não uma relação das operações realizadas com a conclusão. Quando divide o comprimento da borda de cada uma das pizzas por 30 (a menor) e por 40 (a maior), apenas volta ao valor de  $\pi$ . Por coincidência, o valor do diâmetro de cada pizza é o mesmo número do valor em reais. As indicações B e C (Quadro 8) apontam o cálculo em cada uma das pizzas de  $1/\pi$ .

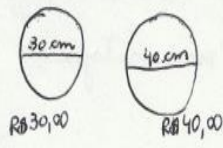
A resposta dada à questão 1, na segunda fase, mostra que P07 faz uma relação do comprimento da borda da pizza com o preço, ao invés de fazer a relação da área com o preço.

Ao tentar responder à questão 6, não dá uma resposta matemática para a questão.

Após a convocação para calcular o preço por  $\text{cm}^2$  de cada pizza, P07 apresenta alguns cálculos e responde corretamente à pergunta 07/08. Os cálculos apresentados mostram que a proposta feita pela pesquisadora foi realizada, porém fica a dúvida se P07 compreendeu que a sua resposta conduziu à resposta esperada para a Tarefa, pois não volta à questão do problema.

#### 4.1.3 Resolução da questão 01 apresentada por P10

**Quadro 14 - Produção de P10 e descrição da resolução - Tarefa Q01 – Fase 01.**

<p>aciocínio.</p>  <p>menor 30 cm → R\$ 30,00 <math>A = \pi \cdot r^2</math> <math>A = 3,14 \cdot 15^2</math> <math>A = 225 \pi \text{ cm}^2</math></p> <p>maior 40 cm → R\$ 40,00 <math>A = \pi \cdot r^2</math> <math>A = \pi \cdot 20^2</math> <math>A = 400 \pi \text{ cm}^2</math></p> <p><math>A_1 = 225 \pi \rightarrow 30,00</math>    <math>R\\$ 30,00 \rightarrow 706,50 \text{ cm}^2</math> menor <math>A_2 = 400 \pi \rightarrow 40,00</math>    <math>R\\$ 40,00 \rightarrow 1256,00 \text{ cm}^2</math> maior</p> <p><math>R\\$ 30,00 + 15,00 \rightarrow R\\$ 45,00</math> <del><math>706,50 + 3,53 \cdot 2,5 \rightarrow R\\$ 1059,75 \text{ cm}^2</math></del></p> <p>O preço mais vantajoso é a da pizza maior por R\$ 40,00. Pois a área da pizza maior é quase o dobro da área da pizza menor. E a diferença de valor da pizza menor para a maior é apenas R\$ 10,00.</p> <p><math>A = \pi \cdot r^2</math> <math>A = \pi \cdot 15^2</math> <math>A = \pi \cdot 22,5^2</math> <math>A = \pi \cdot 506,25</math> <math>A =</math></p> <p>Normalmente, quanto maior a pizza, menor é seu preço em relação a pizza menor.</p>	<p>Descrição:</p> <p>Desenhou duas circunferências, indicou o valor do diâmetro da menor, 30 cm; indicou o diâmetro da maior, 40 cm. Escreveu embaixo da menor R\$ 30,00 e embaixo da maior, R\$ 40,00. Nomeou menor e escreveu 30 cm → R\$30,00 e calculou a área utilizando a fórmula da área do círculo, chegou em <math>225\pi \text{ cm}^2</math>. Nomeou maior e escreveu 40 cm → R\$40,00 e calculou a área utilizando a fórmula da área do círculo, chegou em <math>400\pi \text{ cm}^2</math>.</p>
<p>Escreve:</p> <p><math>A_1 = 225\pi \rightarrow 30,00</math> <math>A_2 = 400\pi \rightarrow 40,00</math></p> <p>R\$30,00 → <math>706,50 \text{ cm}^2</math> menor R\$40,00 → <math>1256,00 \text{ cm}^2</math> maior</p> <p>Responde:</p> <p>O preço mais vantajoso é da pizza maior por R\$40,00. Pois a área da pizza maior é quase o dobro da pizza menor. E a diferença do valor da pizza menor para a maior é apenas R\$10,00. Normalmente, quanto maior a pizza, menor seu preço em relação a pizza menor.</p>	

O procedimento utilizado por P10 foi utilizar a fórmula da área do círculo  $A = 2\pi r^2$ .

A estratégia utilizada por P10 foi confrontar a área das duas pizzas e a diferença entre o preço delas.



Na primeira fase, P10 calculou a área e deixou a resposta em função de  $\pi$ . Escreveu R\$30,00→706,50  $cm^2$  menor e R\$40,00→1256,00  $cm^2$  maior, fazendo uma comparação de preço com área, o que indica o pensamento de proporcionalidade. Essa estratégia sugere o "fazer matemática" de Freudenthal (1971). P10 não reproduz o que comumente acontece nas aulas de matemática, parece utilizar uma estratégia de comparação particular. Essa forma de resolver remete ao pensamento de Van den Heuvel-Panhuizen (2000 p. 03): "em vez de serem receptores de matemática pronta [...] desenvolvem todos os tipos de ferramentas matemáticas e ideias por si mesmos".

Para chegar a sua resposta P10 calcula a diferença de preço e a diferença da área entre as pizzas, relaciona essas grandezas de forma coerente. Essa tarefa possibilitou que P10 matematizasse, confirmando o contexto rico da tarefa (FREUDENTHAL, 1991).

Na última parte da sua resposta, para respaldar a escolha, apresenta o conhecimento social de que, geralmente, na compra de maior quantidade, o preço por porção é menor.

**Quadro 15 - P10 e descrição da resolução - Tarefa Q01 – Fase 02.**

Fase	Perguntas da pesquisadora	Registro escrito de P10
2	1) Sua resposta está baseada num cálculo estimativo. É possível chegar a um valor exato nessa relação?	Deve ser possível sim. Mas não sei qual. A resposta que farei agora também é por estimativa. $\begin{array}{r} 1256,00 \\ - 706,50 \\ \hline 549,50 \end{array}$ A diferença de área da pizza maior para pizza menor é de 549,50 $cm^2$ Ou seja essa diferença se aproxima da área da pizza menor. Por esse motivo a pizza maior é mais vantajosa
	2) Por que no enunciado o problema informa que as pizzas têm a mesma espessura?	Porque de acordo com a espessura o peso das pizzas podem variar. Como é o mesmo peso esse dado fica desprezível. E chama-se atenção apenas para o tamanho e preço.
	3) Por que no enunciado o problema informa que as pizzas têm o mesmo recheio?	Porque dependendo do recheio a pizza apresenta pesos diferentes. Como é o mesmo recheio esse valor é desprezível. E chama-se atenção apenas para o tamanho e preço.

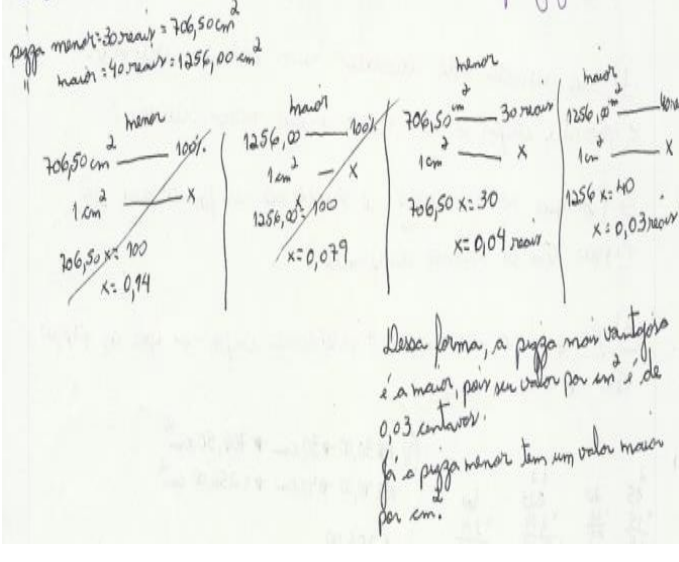
Ao responder ao primeiro questionamento da fase 02, P10 expõe que não sabe que recurso matemático poderia utilizar para chegar a resposta exata, porém acredita que seja possível. Reforça sua hipótese calculando a diferença entre as áreas das duas pizzas, e relaciona essa diferença com os 10 reais a mais da pizza maior. Realiza a operação de diferença das áreas ( $549,50 \text{ cm}^2$ ) para subsidiar a resposta apresentada.

As resoluções apresentadas por P10 remete ao princípio

- da atividade: sua forma particular de resolver o coloca como ator principal no processo de aprender;
- da realidade: a produção escrita mostra particularidades da vida real (comparação de preços e tamanho das pizzas).
- de entrelaçamento: calculou área, diferenças, e, por meio de proporção, fez uma estimativa;
- da interatividade: o questionamento da pesquisadora provoca novas reflexões e nova tentativa de fazer a tarefa, articulando os conhecimentos de P10.

Ao responder ao questionamento 02, dá indício de que identificou que, se houvesse variação da espessura, haveria variação do peso influenciando o preço. No terceiro questionamento proposto pela pesquisadora, P10 identificou que, se houvesse variação do recheio haveria variação do peso.

Quadro 16 - P10 e descrição da resolução - Tarefa Q01 – Fase 03.

Fase	Perguntas da pesquisadora	Registro escrito de P10
3	4) Quanto custa o $\text{cm}^2$ de cada pizza?	 <p> <math>\text{pizza menor} = 30 \text{ reais} = 706,50 \text{ cm}^2</math>  <math>\text{pizza maior} = 40 \text{ reais} = 1256,00 \text{ cm}^2</math> </p> <p> <math>706,50 \text{ cm}^2 \rightarrow 100\%</math>  <math>1 \text{ cm}^2 \rightarrow x</math>  <math>706,50 \times x = 100</math>  <math>x = 0,14</math> </p> <p> <math>1256,00 \rightarrow 100\%</math>  <math>1 \text{ cm}^2 \rightarrow x</math>  <math>1256,00 \times x = 100</math>  <math>x = 0,079</math> </p> <p> <math>706,50 \text{ cm}^2 \rightarrow 30 \text{ reais}</math>  <math>1 \text{ cm}^2 \rightarrow x</math>  <math>706,50 \times x = 30</math>  <math>x = 0,04 \text{ reais}</math> </p> <p> <math>1256,00 \text{ cm}^2 \rightarrow 40 \text{ reais}</math>  <math>1 \text{ cm}^2 \rightarrow x</math>  <math>1256,00 \times x = 40</math>  <math>x = 0,03 \text{ reais}</math> </p> <p>         Dessa forma, a pizza mais vantajosa é a menor, pois seu valor por <math>\text{cm}^2</math> de 0,03 centavos, já a pizza maior tem um valor maior por <math>\text{cm}^2</math>.       </p>

Na última fase, P10 apresentou uma regra de três para encontrar a relação preço por  $\text{cm}^2$ , isso mostra que compreendeu a questão e que conseguiu atingir a intencionalidade da pesquisadora com a tarefa ao buscar outras ferramentas matemáticas para responder à questão.

P10 apresenta novamente a relação pizza menor = R\$30,00=706,50  $\text{cm}^2$  e pizza maior R\$40,00=1256,00  $\text{cm}^2$ , utilizando o sinal de igualdade de forma inadequada. Monta uma regra de três simples igualando a área a 100%, mas risca o cálculo, indicando que compreendeu o caminho matemático adotado para resolver a tarefa e também que os valores 0,14 e 0,079 não correspondem a solução da tarefa. Ao lado apresenta outra regra de três simples chegando ao preço por  $\text{cm}^2$  de superfície.

Nessa fase é possível perceber o princípio de níveis, o resolvidor parte da matemática informal, lida com ela e chega à matemática formal, que se poderia chamar de modelo para encontrar o preço por  $\text{cm}^2$ .

Pode-se inferir, ainda, que os questionamentos da prova em fases guiaram P10 e permitiram que passasse pelo processo e aprender, o que ilustra o princípio da orientação.

Outro paralelo possível é relacionar esse processo com o trabalho do professor em sala de aula. Na atividade de guiar o aluno, o professor precisa

dispor de diversos caminhos para conduzir o aluno no percurso de aprender, e, para isso, deve ter um conhecimento matemático que lhe permita indicar diversas possibilidades de resolução, quando for possível. Como guia, é necessário que ele reconheça que a sua ação influencia a trajetória do estudante e que, por isso, deve oportunizar tarefas nas quais o estudante possa transitar por diferentes níveis de pensamento. Nesse caso, é possível inferir que P10 transitou pelos níveis de conexão e reflexão.

Na sequência duas tarefas são apresentadas: a relação dos conteúdos envolvidos e de possíveis caminhos de solução e, a produção escrita de três participantes para a solução das tarefas com respostas às questões das pesquisadoras.

#### 4.2 QUESTÃO 02

Enunciado da questão 02

Estava outro dia com uns amigos quando resolvemos transformar as letras dos nossos nomes próprios em números, de acordo com um dos mais antigos códigos que se conhece: A=1, B=2, C=3, ...X=22, Z=23. Depois disso, cada um de nós multiplicou os números do seu nome. No meu caso, JOSÉ deu  $10 \times 14 \times 18 \times 5 = 12600$ .

Uma das minhas amigas obteve 24453 e um dos meus amigos, 497420. Como é que eles se chamam?

Para realizar a tarefa Q02 é necessário conhecer alguns conteúdos matemáticos da Educação Básica, contextualizá-los na tarefa e relacioná-los.

#### Quadro 17 - Conteúdos matemáticos para a tarefa Q02

Conteúdos matemáticos para a tarefa Q02	
<b>Fatorar</b>	Escrever um número ou uma expressão algébrica na forma de multiplicação de fatores <sup>27</sup> .
<b>Decompor em fatores primos</b>	Decompor um número em fatores é escrevê-lo como multiplicação. Se os fatores forem em números primos, temos uma decomposição em fatores primos <sup>28</sup> .

<sup>27</sup> Microdicionário de Matemática (IMENES; LELLIS 1998, p.129).

<sup>28</sup> Idem (p.89).

<p><b>Elemento neutro da multiplicação</b><sup>29</sup></p> <p>O número que, multiplicado por qualquer outro (em qualquer ordem), dá como resultado esse outro é o <i>elemento neutro da multiplicação</i>. Esse número é o 1, pois <math>1 \cdot x = x \cdot 1 = x</math>.</p>
<p><b>Multiplicação</b><sup>30</sup></p> <p>Operação matemática que: a) equivale a uma adição de parcelas iguais.; b) dá o número de combinações resultantes quando se associam os elementos de um conjunto com cada um dos elementos de outro conjunto.</p>
<p><b>Múltiplo</b><sup>31</sup></p> <p>Um número natural <math>m</math> é múltiplo de um número natural <math>a</math> se <math>m</math> é o resultado da multiplicação de <math>a</math> por algum número natural.</p>
<p><b>Múltiplo comum</b><sup>32</sup></p> <p>Um número que é múltiplo de dois ou mais números é múltiplo comum desses números.</p>
<p><b>Números primos</b></p> <p>São números naturais que podem formar todos os outros naturais (exceto 0 e 1) por meio da multiplicação.</p> <p>Um número é primo se tem apenas dois divisores: 1 e ele mesmo.</p> <p>Um número primo só é divisível por si mesmo e pela unidade.</p>
<p><b>Números primos entre si</b></p> <p>São números naturais que não têm divisores comuns além do 1. Portanto, o mdc<sup>33</sup> deles é 1.</p>

### Possíveis modos de resolução

#### 1º. modo:

Fatorar os valores 12600, 24453 e 497420 para encontrar os nomes. Utilizar a decomposição dos fatores primos para relacionar as letras do alfabeto (na composição de) formando os nomes.

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fatorar os valores 12600, 24453, 497420.</li> <li>• Encontrar os fatores primos e substituir pelas letras correspondentes no alfabeto.</li> <li>• organizar as letras na tentativa de</li> </ul>	<p>Pode realizar a fatoração de 12600 em fatores primos para compreender a tarefa.</p>
---	--

<sup>29</sup> Idem (p. 107)

<sup>30</sup> Idem (p. 200).

<sup>31</sup> Idem (p. 201).

<sup>32</sup> Idem (p. 202).

<sup>33</sup> Máximo divisor comum.

buscar encontrar os nomes.

12600	2
6300	2
3150	2
1575	3
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

$$12600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

Substituindo os números pelas letras do alfabeto correspondente temos:

$$\begin{array}{l} 2 \times 5 = J \\ 2 \times 7 = O \\ 3 \times 3 \times 2 = S \\ 5 = E \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2 \times 5 = J \\ 2 \times 7 = O \\ 3 \times 3 \times 2 = S \\ 5 = E \end{array}} \right\} JOSE$$

Formando o nome *JOSE*.

Para o nome dos amigos temos a fatoração de 24453:

24453	3
8151	3
2717	11
247	19
13	13
1	

$$\text{Então } 24453 = 3^2 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 13$$

Substituindo os números pelas letras do alfabeto correspondente temos o nome:

$$\begin{array}{l} 3 \times 3 = I \\ 11 = L \\ 13 = N \\ 19 = T \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 3 \times 3 = I \\ 11 = L \\ 13 = N \\ 19 = T \end{array}} \right\} NATALIA$$

Considerando as letras I, L, N, T e A (porque A equivale ao 1 e, 1 é o

	<p>elemento neutro da multiplicação) pode-se chegar ao nome <i>NATALIA</i>.</p> <p>O produto 497420 pode ser decomposto em fatores primos:</p> $\begin{array}{r l} 497420 & 2 \\ 248710 & 2 \\ 124355 & 5 \\ 24871 & 7 \\ 3553 & 11 \\ 323 & 17 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$ <p>Então <math>497420 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19</math> Substituindo os números pelas letras do alfabeto correspondente temos:</p> $\begin{array}{l} 2 \times 7 = O \\ 5 = E \\ 2 = B \\ 11 = L \\ 17 = R \\ 19 = T \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2 \times 7 = O \\ 5 = E \\ 2 = B \\ 11 = L \\ 17 = R \\ 19 = T \end{array}} \right\} \text{ALBERTO}$ <p>Considerando as letras O, E, B, L, R, T e A (porque A equivale ao 1 e, 1 é o elemento neutro da multiplicação) pode-se chegar ao nome <i>ALBERTO</i>.</p>
--	--

Resposta: O nome da amiga pode ser *NATALIA* e do amigo pode ser *ALBERTO*.

2º. modo:

Fatorar os valores 24453 e 497420 para encontrar os nomes. Utilizar a decomposição dos fatores primos para relacionar as letras do alfabeto (na composição de) formando os nomes.

- Fatorar os valores 24453 e 497420.
- Encontrar os fatores primos e substituir pelas letras correspondentes no alfabeto.
- Organizar na tentativa de buscar encontrar os nomes.

O produto 24453 pode ser decomposto em fatores primos:

$$\begin{array}{r|l}
 24453 & 3 \\
 8151 & 3 \\
 2717 & 11 \\
 247 & 19 \\
 13 & 13 \\
 1 & 
 \end{array}$$

$$\text{Então } 24453 = 3^2 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 13$$

Substituindo os números pelas letras do alfabeto temos:

$$\begin{array}{l}
 3 \times 3 = I \\
 11 = L \\
 13 = N \\
 19 = T
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 3 \times 3 = I \\ 11 = L \\ 13 = N \\ 19 = T \end{array}} \right\} \text{TALIANA}$$

Formando o nome *TALIANA*

Para o nome do amigo podemos decompor, em fatores primos, o produto 497420.

$$\begin{array}{r|l}
 497420 & 2 \\
 248710 & 2 \\
 124355 & 5 \\
 24871 & 7 \\
 3553 & 11 \\
 323 & 17 \\
 19 & 19 \\
 1 & 
 \end{array}$$

$$\text{Então } 497420 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19$$

Substituindo os números pelas letras do alfabeto temos:



	$2 \times 7 = O$ $5 = E$ $2 = B$ $11 = L$ $17 = R$ $19 = T$
	ALBERTO
	Considerando as letras O, E, B, L, R, T e A (porque A equivale ao 1 e, 1 é o elemento neutro da multiplicação) pode-se chegar ao nome ALBERTO.

Resposta: O nome da amiga pode ser TALIANA e do amigo pode ser ALBERTO.

3º. modo:

Fatorar os valores 24453 e 497420 para encontrar os nomes. Utilizar a decomposição dos fatores primos para relacionar as letras do alfabeto (na composição de) formando os nomes.

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fatorar os valores 24453 e 497420.</li> <li>• Encontrar os fatores primos e substituir pelas letras correspondentes no alfabeto.</li> </ul> <p>organizar na tentativa de buscar encontrar os nomes.</p>	<p>Para o nome dos amigos temos a fatoração de 24453:</p> $\begin{array}{r l} 24453 & 3 \\ \hline 8151 & 3 \\ 2717 & 11 \\ 247 & 19 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$ <p>Então <math>24453 = 3^2 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 13</math>  Substituindo os números pelas letras do alfabeto correspondente temos o nome:</p>
--	--

$$3 \times 3 = I$$

*NATALIA*

$$11 = L$$

*NATALI*

*TALIANA*

$$13 = N$$

*ANALITA*

$$19 = T$$

Considerando as letras I, L, N, T e A (porque A equivale ao 1 e, 1 é o elemento neutro da multiplicação) pode-se chegar aos nomes *NATALIA* ou *TALIANA* ou *NATALI* ou *ANALITA*.

O produto 497420 pode ser decomposto em fatores primos:

$$\begin{array}{r|l} 497420 & 2 \\ 248710 & 2 \\ 124355 & 5 \\ 24871 & 7 \\ 3553 & 11 \\ 323 & 17 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{Então } 497420 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19$$

Substituindo os números pelas letras do alfabeto correspondente temos:

$$2 \times 7 = O$$

$$5 = E$$

$$2 = B$$

$$11 = L$$

$$17 = R$$

$$19 = T$$

*ALBERTO*

*ALBERT*

Considerando as letras O, E, B, L, R, T e A (porque A equivale ao 1 e, 1 é o elemento neutro da multiplicação) pode-se chegar ao nome *ALBERTO* ou *ALBERT*.

Resposta: O nome da amiga pode ser NATALIA ou TALIANA ou NATALI ou ANALITA e do amigo pode ser ALBERTO.

#### 4.2.1 Resolução da questão 02 apresentada por P01

**Quadro 18** - Produção de P01 e descrição da questão 02 – Fase 01.

<p>A = 1 B = 2 C = 3 D = 4 E = 5 F = 6 G = 7 H = 8 I = 9 J = 10 L = 11 M = 12 N = 13 O = 14 P = 15 Q = 16 R = 17 S = 18 T = 19 U = 20 V = 21 X = 22 Z = 23</p>	<p>EXEMPLO LUCIANA <math>(11) \times (20) \times (3) \times (9) \times (1) \times (13) \times (1) = 77.220</math> 27 13 ?</p>	<p><b>Descrição:</b> Esboçou uma coluna no canto esquerdo da folha, relacionando cada letra do alfabeto à sequência de números naturais: A=1, B=2, C=3,... Apresentou um exemplo: LUCIANA <math>11 \times 20 \times 3 \times 9 \times 1 \times 13 \times 1 = 77.220</math> 60      13 Apresenta o símbolo de ?. Não responde.</p>
--	---	---

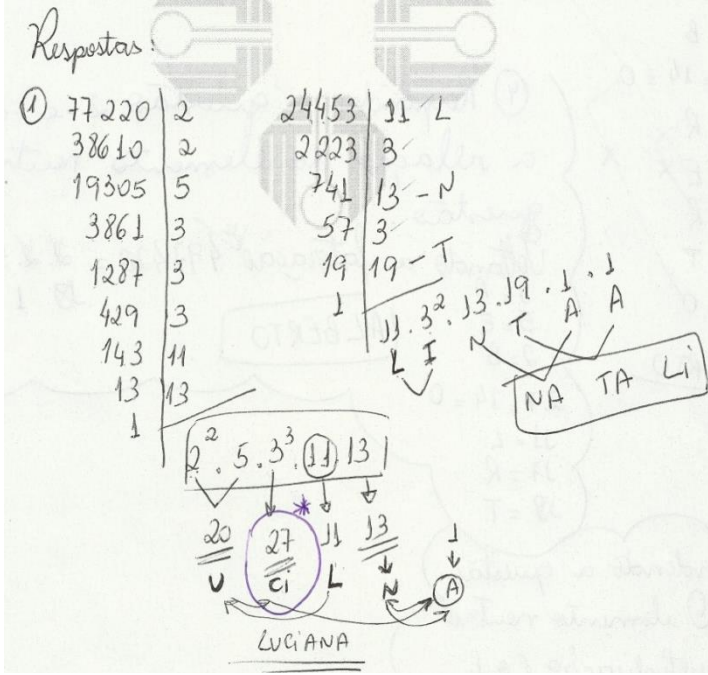
Os procedimentos utilizados por P01 foram:

- relacionar cada letra do alfabeto com a sequência dos naturais;
- relacionar as letras de outro nome com as posições das letras do alfabeto;
- encontrar o produto 77220.

A estratégia adotada para a segunda questão foi testar um exemplo. Apresentou a decomposição de fatores do número 77220. Realizou primeiro o produto de  $3 \times 9$  e  $1 \times 13 \times 1$  para depois chegar a 77220.

P01 escolhe um nome, escreve a correspondência número por letra, isto é, transforma as letras em números como indica o enunciado e realiza a operação de multiplicação para encontrar o valor final do nome escolhido arbitrariamente.

**Quadro 19 -** Produção de P01 e descrição da questão 02 – Fase 02.

Fase	Perguntas da pesquisadora	Registro escrito de P01
2	1) Você decompôs 77220 em vários fatores. Decomponha-o agora em fatores primos. O que você percebe?	 <p>The handwritten work shows the prime factorization of 77220 as <math>2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13</math>. It also shows the factorization of 24453 as <math>3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 19</math>. A mapping of letters to numbers is provided: L=11, A=1, I=19, N=13, T=19, C=27, U=20. The name 'LUCIANA' is derived from these mappings. A box contains the letters 'N A T A L I'.</p>
	2) Qual é o elemento neutro da multiplicação?	O elemento neutro da multiplicação é o 1. O elemento neutro será a letra A e pode ser utilizada à vontade por não alterar o resultado.

Para responder ao primeiro questionamento da segunda fase, P01 decompôs 77220, apresentou os fatores primos, efetuou o produto dos fatores e, ao encontrar o valor 27, associa-o com a sílaba CI, de que não há representação no alfabeto. Indica o nome LUCIANA. Pode-se inferir que, ao realizar esse processo, compreendeu a regularidade e encontrou o nome da amiga NATALI ao fatorar 24453 corretamente. Ao tomar um exemplo, P01 partiu da realidade, que pode ser entendida, segundo a RME, como uma fonte para desenvolver a aprendizagem

matemática. A ação ou intervenção da pesquisadora oportunizou que P01 entendesse o procedimento da tarefa para avançar na busca do nome da amiga.

P01 mostra compreender a segunda questão, como o 1 equivale à letra A e a multiplicação por 1 não altera o produto, diz que "pode ser utilizada à vontade", desconsiderando que ao utilizar a letra A, altera o nome.

**Quadro 20** - Produção de P01 e descrição da questão 02 – Fase 03.

Fase	Perguntas da pesquisadora	Registro escrito de P01
3	<p>3) Na sua relação letra-número, não tem o 27. Como você determinou o CI?</p>	<p>497420   2 248710   2 124355   5 24871   11 2261   7 323   17 19   19 1</p> <p>Respondendo a questão 3: o ci foi C = 3 e I = 9 e como na fatoração anterior = 3<sup>3</sup> foi 3 * 3<sup>2</sup>.</p> <p>2 3 5 11 7 17 19 1 1 ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ 4 5 11 7 17 19 ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ D E L R T</p> <p><u>GERALDT</u>                      2 = 8 <u>ALBERT</u>                      10 = 0</p> <p>2 = 8 2 * 7 = 14 = 0 17 = R 5 = EX 17 = R 19 = T 14 = 0 <u>ROBERTO</u></p>
	<p>4) Responda a questão 2 e determine a relação do elemento neutro nessa questão?</p>	<p>Voltando a fatoração 497420 = 2 * 2 * 5 * 11 * 7 * 17 * 19 * 1.</p> <p>J = A 5 = E 2 = B</p> <p><u>ALBERTO</u></p> <p>2 * 7 = 14 = 0 11 = L 17 = R 19 = T</p>

Na terceira fase, o questionamento foi respondido com argumentos matemáticos; pois decompôs  $3^3$  em  $3 \times 3^2$ . Parece que volta à questão inicial mesmo sem isso ser cobrado e, então, fatora corretamente 497420, chegando ao nome ROBERTO, pois usa de repetição de fatores para compor o nome. Para a quarta interrogação, P01 apresenta outro nome para o amigo, ALBERTO. Não é possível inferir que compreendeu a questão da pesquisadora.

O desenvolvimento que P01 mostra que as várias fases da prova foram importantes para que refletisse a respeito dos conteúdos envolvidos na tarefa e que, como decorrência disso, apresentasse uma resposta fundamentada na matemática envolvida.

Na primeira fase, P01 analisou a relação entre números e letras do alfabeto utilizando um nome diferente dos que aparecem no enunciado. Na fase seguinte, volta-se para a fatoração desse nome, analisa a questão da sílaba CI e a ligação do elemento neutro da multiplicação e sua relação com a letra A, e chega ao nome da amiga. Na última fase, P01 chega ao nome que estava faltando, do amigo. Mesmo que tenha conversado com outros participantes no tempo entre as fases, P01 mostra que entendeu a questão e explica como esses nomes e o número do enunciado se relacionam.

É possível que P01 tenha conversado com outros participantes fora do momento da prova, o que remete ao princípio da interatividade, que, para a RME, é fundamental no processo de aprender.

#### 4.2.2 Resolução da questão 02 apresentada por P02

**Quadro 21 - Produção de P02 e descrição da questão 02 – Fase 01.**

**QUESTÃO: 02**

R: Amiga = NATALI  
Amigo = ALBERTO (4ª Possibilidade)

Estava outro dia com uns amigos quando resolvemos transformar as letras dos nossos próprios em números, de acordo com um dos mais antigos códigos que se conhece: A=1, B=2, C=3, ...X=22, Z=23. Depois disso, cada um de nós multiplicou os números do seu nome.  
No meu caso, JOSÉ deu  $10 \times 14 \times 18 \times 5 = 12600$ .  
Uma das minhas amigas obteve 24453 e um dos meus amigos, 497420. Como é que eles se chamam?

*(Handwritten lists of letter values: A=1, B=2, C=3, D=4, E=5, F=6, G=7, H=8, I=9, J=10, K=11, L=12, M=13, N=14, O=15, P=16, Q=17, R=18, S=19, T=20, U=21, V=22, W=23)*

*(Handwritten prime factorizations: 24.453 → 3 × 3 × 11 × 13 × 19 × 1; 497.420 → 2 × 2 × 5 × 7 × 11 × 17 × 19)*

*(Handwritten letter assignments: CCLNTA, ILNTA, JXGRT, BOELRTA)*

*(Note: Não consegui encontrar os nomes.)*

**Descrição:**

Relaciona cada letra do alfabeto à sequência de números naturais: A=1, B=2, C=3, ... decompõe em fatores primos os números: 12600, 24453, 497420. Na fatoração de 12600 indicou as letras J, O, S, É, S. Na fatoração 24453 encontrou as letras C, C, L, N, T, agrupou C e C indicando I, escreve a expressão:

$3 \times 3 \times 11 \times 13 \times 19 \times 1$   
 $\downarrow$   
 $9 \times 11 \times 13 \times 19 \times 1$

C C L N T A  
 I L N T A

Na fatoração 497420 encontrou as letras J, O L R, T, em seguida escreve a expressão

$2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 17$   
 $\times 19$   
 J X G R T

$2 \times 7 \quad 2 \times 5 \quad 11 \quad 17 \quad 19$   
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 D J L R T

Agrupou verticalmente ao lado das expressões anteriores JxGRT, em seguida escreve a

expressão

$2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 17 \times 19$

~~B~~ B E G L R T

∅

BOELRTA

Escreve: não consegui encontrar os nomes.

O procedimento utilizado por P02 foi fatorar os valores 12600, 24453, 497420 dados no enunciado.

A estratégia foi decompor em fatores primos, relacionar as letras do alfabeto com os fatores primos e, por tentativa, encontrar o nome.

Na primeira fase, P02 realizou a reprodução do exemplo JOSÉ para, possivelmente, compreender a tarefa. Não conseguiu arranjar as letras de modo a formar nomes com as letras encontradas, escreve a letra A, elemento neutro da multiplicação, porém não trabalha com ela o que pode ter colaborado para que os nomes não fossem encontrados.

Pode-se inferir que, apesar de não chegar à resposta, P01 entrou em atividade, princípio que, de acordo com a RME, oportuniza que os alunos sejam os atores principais no processo de aprendizagem elaborando a sua própria matemática.



**Quadro 22 - Produção de P02 e descrição da questão 02 – Fase 01.**

**Descrição  
(2º dia de resolução)**

The image shows a student's handwritten work on a grid background. At the top left, there is a list of prime factors and their corresponding letters: 2 → B, 5 → E, 7 → G, 11 → L, 17 → R, 19 → T. To the right, the word 'amiga' is written with a squiggly arrow pointing to it. Below this, the student has written 'Possibilidades:' and a vertical list of letters: B, J, G, L, R, T. In the center, there is a vertical column of letters: A, B, O, E, L, R, J, T, A, with circled numbers 4, 2, 2, 5, 11, 17, 19, 1 next to them. To the right of this column, there is a list of letter assignments: B=2, G=7, J=2x5, L=11, R=17, T=19, A=1. Below this, the student has written 'ALBERTO' with an arrow pointing to the vertical column. On the left side, there are two prime factorizations: 1) 2x2x5x7x11x17x19 with letters D, E, G, L, R, J below it; 2) 2x5x7x2x17x19 with letters B, E, G, X, R, T below it. In the middle, there is a cloud-like shape containing the text '= NATALI' with an arrow pointing to it. To the right of the cloud, the word 'AMIGA' is written with a squiggly arrow. Below the cloud, there is a list of prime factors: 3x3x11x13x19x1x1 with letters C, C, L, N, T, A, A below it. At the bottom left, there is a circled number 6 and the prime factorization 2x2x5x7x11x17x19, followed by the expression 2x14x5x17x19 = X{O}{E}{R}{T}. At the bottom right, there is another prime factorization: 2x2x5x7x11x17x19x1 with letters D, E, G, L, R, T, A below it, and the name 'GERALD?' written below that.

**Descrição:**

Relaciona cada letra do alfabeto à sequência de números naturais: A=1, B=2, C=3,... decompõe em fatores primos os números: 12600, 24453, 497420. Na fatoraçaõ de 12600 indicou as letras J, O, S, É, S. Na fatoraçaõ 24453 encontrou as letras C, C, L, N, T, agrupou C e C indicando I, escreve a expressaõ:  $3 \times 3 \times 11 \times 13 \times 19 \times 1$

$9 \times 11 \times 13 \times 19 \times 1$   
C C L N T A  
I L N T A

Na fatoraçaõ 497420 encontrou as letras J, O L R, T, em seguida escreve a expressaõ

$2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 17 \times 19$   
J X G R T

$2 \times 7 \ 2 \times 5 \ 11 \ 17 \ 19$   
D J L R T

Agrupou verticalmente ao

lado das expressões anteriores J×GRT, em seguida escreve a expressaõ

$2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 17 \times 19$   
B E G L R T  
D /  
BOELRTA

A escreve: não consegui encontrar os nomes

Continua na folha seguinte,

Esboçou uma coluna:

2—B

2—B

5—E

7—G

11—L

17—R

19—T

~~$2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 17 \times 19$   
D E G L R T (riscou)~~

~~$2 \times 5 \times 7 \times 22 \times 17 \times 19$   
B E G X R T (riscou)~~

Escreve: possibilidades: amigo

⇒ ALBERTO

Em colunas escreve:

3	A	4	5	
				B=2
B	B	2	G=7	
J	O	2×7	J=2×5	
G	E	5		
L	L	11	L=11	
R	R	17	R=17	
T	T	19	T=19	
	A	1	A=1	

Indica 24.453 amiga

Em seguida escreve:

$3 \times 3 \times 11 \times 13 \times 19 \times 1 \times 1$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

C C L N T A A

9

↓

I

~~$2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 17 \times 19$~~

~~$22 \times 14 \times 5 \times 17 \times 19 =$~~

~~X O E R T~~

Indica a para NATALIA em seguida amiga.

Escreve novamente

~~$2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 17 \times 19 \times 1$~~

D E G L R T A  
GERALD

Chegou aos nomes ALBERTO e NATALI por tentativa, a partir das letras encontradas. Na primeira folha chega às letras que compõem os nomes, com excessão do A. No segundo dia da resolução, ainda sem intervenção, P02 chega ao nome ALBERTO após várias tentativas. Buscou outro nome de amigo, chegando a GERALD. P02 realiza uma composição de produto diferente,  $11 \times 2$ , encontrando a letra X.

**Quadro 23 - Produção de P02 e descrição da questão 02 – Fase 02.**

Fase	Perguntas da pesquisadora	Registro escrito de P02
2	1) Em * você considera 9 em lugar de 3x3. Na decomposição de 24453 quais fatores devem permanecer? Por que?	Os fatores $9 \times 11 \times 13 \times 19 \times 1 \times 1$ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ I L N T A A Para encontrar o nome <span style="border: 1px solid black; padding: 2px 10px;">NATALI</span>
	2) Uma colega sua encontrou o nome TALIANA, diferente mas possível. Esse nome está associado a 24453 ou a 497420? Dê uma justificativa matemática?	Ao número 24.453, fiz na <u>1ª tentativa</u> , mas não “enxerguei” esse nome. Por isso fiz outra tentativa.

A resposta dada por P02 ao primeiro questionamento da segunda fase da prova foi que em \* não é possível multiplicar C por C e sim o número relacionado a C, que é 3, assim, tem-se 3 X 3 e não C X C. Nessa fase, P02 teve a oportunidade de voltar a sua produção escrita conduzida pelo questionamento da pesquisadora, mas, mesmo analisando a pergunta referente a \*, não responde quais outros fatores devem permanecer.

Para a segunda interrogação, P02 indica compreender que é possível o nome TALIANA, porém não apresenta nenhuma justificativa matemática, nem realiza a verificação com um novo agrupamento de letras.

**Quadro 24 - Produção de P02 e descrição da questão 02 – Fase 03.**

Fase	Perguntas da pesquisadora	Registro escrito de P02
	3) Apresente a justificativa Matemática.	<p>③ <math>3 \times 3 \times 1 \times 1 \times 3 \times 1 \times 1</math>  <math>\underbrace{\quad\quad\quad}</math>  <math>9 \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow</math>  <math>\downarrow \quad L \quad N \quad I \quad A \quad A</math>  <math>I</math></p> <p>TALIANA <span style="float: right;"><u>04/11</u></span></p> <p>Podem ser sim pois, e se acrescentar a letra A, ou seja, multiplicar mais uma vez por 1</p> <p>  </p> <p><math>1 \times 1 \times 3 \times 3 \times 1 \times 1 \times 1</math>  <math>\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow</math>  <math>T \quad A \quad L \quad I \quad A \quad N \quad A</math></p>
3	4) Então qual é considerado correto: Natali ou Taliana? E Natália, seria possível e correto? Por quê?	<p>④ Natali e Taliana, os dois estão corretos.      Natália também está correta.</p> <p>↳ Veja:</p> <p><math>1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 3 \times 3 \times 1</math>  <math>N \quad A \quad T \quad A \quad L \quad I \quad A</math></p> <p>Assim; Natali, Natália ou Taliana estão corretos, pois na formação mudamos apenas a ordem dos fatores, e acrescentamos o fator <u>1</u>, pois é o elemento neutro da multiplicação.</p>

Para a terceira questão, P02 apresentou a decomposição de 24453, reagrupou os fatores primos e encontrou o nome TALIANA. Reconhece, portanto, a presença do elemento neutro da multiplicação. A ação de guiar da pesquisadora possibilitou que P02 encontrasse outra resposta para a mesma tarefa, ampliando os níveis de pensamento indicados por De Lange (1999), pode-se analisar que, além do nível de conexão, P02 também atingiu o nível de reflexão, que foi necessário para encontrar outros nomes e dar as justificativas matemáticas. Perceber que pode haver diversos caminhos para realizar uma única tarefa pode influenciar sua ação na sala de aula.

No quarto questionamento P02 conseguiu justificar também a possibilidade do nome NATÁLIA, além de explicar a importância o elemento neutro da multiplicação e sua influência na tarefa, expondo que para a tarefa pode haver diversos caminhos a serem contruídos pelo aluno no processo de matematizar, como indica a RME. A intervenção da pesquisadora possivelmente modificou o modo de pensar de P02.

Quadro 25 - Produção de P02 e descrição da questão 02 – Fase 04.

Fase	Perguntas da pesquisadora	Registro escrito de P02
4	5) Na decomposição 497420 aparecem os números 17, 2 além de outros. Podemos fazer $17 \times 2$ para encontrar outra letra para tentar compor outro nome? Qual letra seria?	<p>(5) 497420</p> <p> <math>B \rightarrow 2</math>  <math>O \rightarrow 2 \times 7</math>  <math>E \rightarrow 5</math>  <math>L \rightarrow 11</math>  <math>R \rightarrow 17</math>  <math>T \rightarrow 19</math>  <math>A \rightarrow 1</math> </p> <p>Possibilidades:</p> <p>(1) <math>2 \times 4 = B</math></p> <p> <math>2 \rightarrow G</math>  <math>5 \rightarrow E</math>  <math>11 \rightarrow L</math>  <math>17 \rightarrow R</math>  <math>19 \rightarrow T</math>  <math>1 \rightarrow A</math> </p> <p>(2)</p> <p> <math>2 \rightarrow B</math>  <math>7 \rightarrow G</math>  <math>5</math> </p> <p> <math>11 \rightarrow L</math>  <math>17 \rightarrow R</math>  <math>19 \rightarrow T</math>  <math>1 \rightarrow A</math> ?? </p> <p>(3)</p> <p> <math>B = 2</math>  <math>G = 7</math>  <math>E = 5</math>  <math>L = 11</math>  <math>R = 17</math>  <math>T = 19</math>  <math>A = 1</math> ?? </p> <p><math>17 \times 2 = 34</math></p> <p><math>\Rightarrow</math> Não daria, pois a multiplicação dá 34 (não tem a letra do alfabeto).</p> <p>* dentro dessas possibilidades, não consegui formar nenhum nome.</p>

Para responder à pergunta da fase 4, P02 realiza três tentativas com a multiplicação dos fatores  $2 \times 2$ ,  $2 \times 5$ ,  $2 \times 11$ , possivelmente entendendo que somente a multiplicação desses fatores primos é que pode corresponder a uma letra do alfabeto. Compreende a questão, pois, como a última letra Z corresponde a 23, não é possível considerar produtos maiores que 23.

P02 compreende as questões, realiza diversas tentativas para encontrar os nomes sempre seguindo uma regularidade. Na primeira decomposição de 24453 e 497420, indica as letras, mas não consegue relacionar com nenhum

nome conhecido. Tarefas com essas características talvez não sejam familiares para P02.

A produção escrita de P02 é muito organizada, enumera as possibilidades de tentativa na busca da resolução. Apresenta uma justificativa matemática plausível para explicar a relação do elemento neutro da multiplicação, mostrando domínio matemático. Essa organização pode colaborar para que se compreenda o que foi feito por P02, uma vez que se pode acompanhar passo a passo o desenvolvimento da resolução.

#### 4.2.3 Descrição da questão 02 por P10

**Quadro 26 - Produção de P10 e descrição da questão 02 – Fase 01.**

<p>A=1 B=2 C=3 D=4 E=5 F=6 G=7 H=8 I=9 J=10 L=11 M=12 N=13 O=14 P=15 Q=16 R=17 S=18 T=19 U=20 V=21 X=22 Z=23</p>	<p><b>JOSIANE</b> 10.14.18.9.1.13.5 ⇒ 1.474.200 *</p> <p><b>ALINE</b> 1.11.9.13.5 ⇒ 6435</p> <p><b>PAULO</b> 15.1.20.11.14 ⇒ 46.200</p>	<p>24453   3 3,1=C 8151   3 2717   13 287   13 19   19 1   1 1</p> <p>12600   2 3 2 7 6300   2 2 3 5 7 3150   2 2 3 5 7 1575   3 525   3 175   5 35   5 7   7 1</p> <p>185   E 22.2.3.3.5.7   140 105</p> <p>497420   2 248710   2 124355   5 24871   7 3553   11 L 323   17 R 19   19 R 1   19 T</p>	<p><b>Descrição:</b></p> <p>Em uma coluna à esquerda, relaciona cada letra do alfabeto à sequência de números naturais: A=1, B=2, C=3,...</p> <p>Fatorou os números 24453, 12600 e 497420.</p> <p>Escreveu:</p> <p><b>JOSIANE</b> 10.14.18.9.1.13.5 ⇒ 1.474.200</p> <p><b>ALINE</b> 1.11.9.13.5 ⇒ 6435</p> <p><b>PAULO</b> 15.1.20.11.14 ⇒ 46.200</p>
--	---	---	---

Os procedimentos adotados por P10 foram:

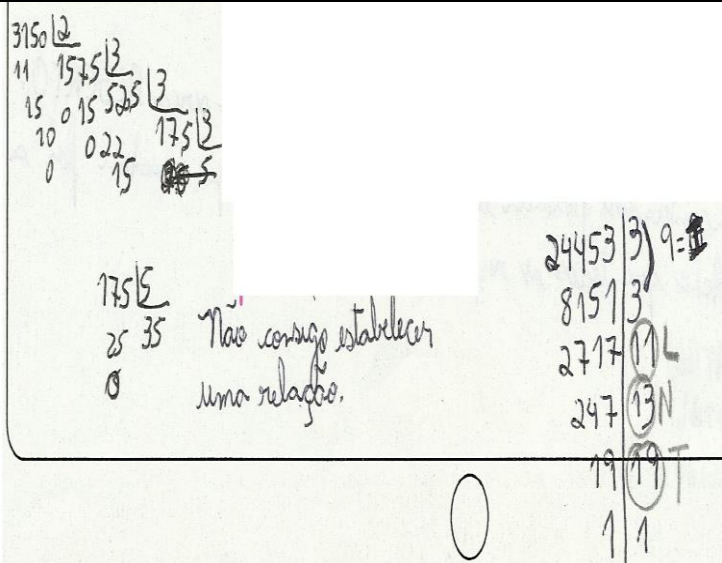
- relacionar as letras do alfabeto com os números naturais;

- escolher três nomes arbitrários e relacionar as letras desses nomes com os números naturais correspondentes, chegando a 1474200, 6435 e 46200;
- fatorar os valores 12600, 24453 e 497420.

A estratégia utilizada foi testar nomes diferentes do enunciado do problema para buscar uma regularidade. Realizou a decomposição de 12600, 24453 e 497420 e, para esses casos, não apresenta relação com nenhuma letra ou nome.

P10 escolhe três nomes como exemplo, possivelmente para entender o procedimento da tarefa. Ao fatorar 497420, escreve  $3 \times 1 = C$ , realiza esse procedimento somente neste caso, talvez porque continuou a fatorar por 1. Fatora 12600, 24453 e 497420, indica a decomposição dos fatores primos, mas não relaciona com todas as letras do alfabeto.

**Quadro 27 - Produção de P10 e descrição da questão 02 – Fase 02.**

Fase	Perguntas da pesquisadora	Registro escrito de P10
2	<p>1) Qual é o elemento neutro da multiplicação?</p> <p>2) Na decomposição de 12600, você considerou 18 no lugar de 2.3.3, 14 no lugar de 2.7 e 10 no lugar de 2.5. No entanto o 5 permaneceu, que é o E de José. Com relação a decomposição de 24453 que números devem permanecer?</p>	<p>O número 1.</p>  <p>The handwritten work includes several prime factorizations: <math>3150 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7</math>, <math>11 \cdot 1575 = 11 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7</math>, <math>15 \cdot 15 \cdot 525 = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7</math>, and <math>10 \cdot 22 \cdot 175 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 7</math>. There is also a note: "Não consigo estabelecer uma relação." (I can't establish a relationship). To the right, there are more factorizations: <math>24453 = 3 \cdot 9 = 3^2</math>, <math>8151 = 3^4</math>, <math>2717 = 17 \cdot L</math>, <math>247 = 13 \cdot N</math>, and <math>19 \cdot 19 = T</math>. A circled '0' is written at the bottom.</p>



No primeiro questionamento, P10 aponta o elemento neutro da multiplicação, sem indicar se identifica a consequência disso na resolução da tarefa, mesmo tendo escrito anteriormente  $3 \times 1 = C$ , na fatoração de 497420.

No segundo questionamento, P10 apresenta o cálculo da divisão de alguns fatores relacionados a 12600. Refaz a fatoração de 24453, aponta algumas letras sem apresentar um nome. Não responde à pergunta e coloca que não consegue realizar uma relação com as letras para formar o nome. Faz corretamente os procedimentos matemáticos, mas não interpreta as informações encontradas, mesmo realizando a composição dos fatores  $3 \times 3 = 9 = I$ .

P10 apresenta dificuldades de mobilizar o conhecimento matemático para relacionar com o que foi realizado e responder as questões da pesquisadora que tinha a intenção de guiar o resolvidor aos níveis de conexão e reflexão. Mas, até esse momento, não obteve sucesso.

**Quadro 28 - Produção de P10 e descrição da questão 02 – Fase 03.**

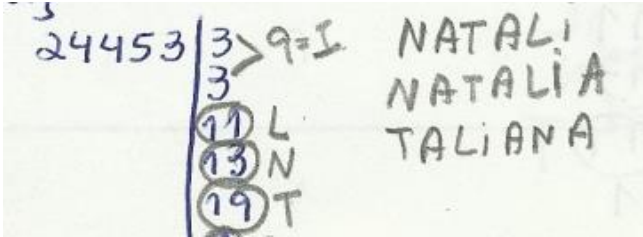
Fase	Perguntas da pesquisadora	Registro escrito de P10
3	3) Decomposição 1474200 em fatores primos. Que relação existe entre os fatores primos e os que estão em *?	<p>The image shows handwritten mathematical work. At the top, the name 'JOSIANE' is written and circled. Below it, the number 1474200 is factored into primes: 1474200   3=9, 491400   3, 163800   3, 54600   3, 18200   5, 3640   5, 728   7, 104   13, 8. Below this, the number 24453 is factored: 24453   3=9=I NATALIA, with letters L, N, T, A assigned to the factors. To the right, 497420 is factored: 497420   2=4=D GERALDO, with letters L, R, T assigned to the factors. Further right, 497420 is factored again: 497420   2=B, 5=14=O, with letters L, R, T assigned to the factors.</p>

P10 fatora 1474200 iniciando pelo número primo 3, mas não vai até o final, interrompe em 8, e, com isso, deixa de considerar o 2 como um dos fatores. Relaciona alguns fatores com as letras que formam o nome JOSIANE, circula os

números 10, 14, 9 e 1. Infere-se que P10 tenha percebido que esses são os números compostos. Ao decompor o número 24453, correspondente ao nome Natalia, circula o último fator, o 1, e o identifica com a letra A, possivelmente por reconhecer que, sendo 1 o elemento neutro da multiplicação, a letra A pode ser colocada em qualquer posição sempre que for desejado. Por exemplo, 10 corresponde ao J, mas como  $10 \cdot 1 = 10$ , logo a sílaba JÁ pode também corresponder ao 10.

Na sequência escreve os fatores de 24453, 497420 e relaciona com as letras do alfabeto. Chega aos nomes NATALIA e GERALDO, mas risca o último. Novamente fatora 497420 e relaciona às letras, mas não forma nenhum nome.

**Quadro 29** - Produção de P10 e descrição da questão 02 – Fase 04.

	4) Como você conseguiu a letra O do nome GERALDO?	Realmente, não tem a letra O e não usei a letra T. O nome seria ALBERTO.
4	5) Uma colega sua encontrou o nome TALIANA e a outra encontrou NATALI, elas acertaram o problema? Por quê? Justifique matematicamente.	<p>Todos os nomes encontrados possuem as mesmas letras, o que mudou foi a posição das letras. Acho que todas as respostas estão corretas</p> 

Ao responder à quarta pergunta, P10 muda sua resposta e apresenta o nome ALBERTO. É possível que ela tenha refletido a respeito da questão no intervalo de tempo entre as fases, ou ainda, conversado a respeito da questão com outro participante. Identificam-se, aqui, o princípio da interatividade e os níveis de conexão e de reflexão de De Lange (1999).

No último questionamento, P10 consegue perceber que, para a mesma questão, há mais de uma resposta, o que pode influenciar o seu entendimento da matemática e compreender a importância de uma tarefa ter mais que uma resposta. Esses fatores só foram possíveis porque a prova em fases permitiu que os questionamentos direcionassem P10 nessas reflexões.

## 5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Shulman (1986) indica que o professor precisa compreender para ser capaz de ensinar, envolver-se em situações que o levem a reexaminar, refletir sobre sua produção, buscando modificar sua ação de algum modo, sempre que necessário. Essa é uma das razões que justifica a necessidade de continuar a formação em serviço, por exemplo, de colocar os professores em situação de realizar uma prova em fases.

Com a intenção de proporcionar reflexão e colocar os professores em situações novas, esta pesquisa se pautou pela avaliação da aprendizagem escolar como prática de investigação tomada como oportunidade de aprendizagem e pela análise da produção escrita presente em resoluções de tarefas de matemática, na perspectiva da abordagem RME; buscou também, obter indícios de alguma (re)significação de conteúdos específicos da matemática básica escolar.

O trabalho com a prova em fases permitiu que os professores repensassem alguns conceitos matemáticos, entre eles: diâmetro, área, circunferência, círculo, razão entre grandezas, elemento neutro da multiplicação. Além disso, elaboraram e justificaram outras resoluções. Todas essas (re)considerações podem ter indicado uma mudança ou a tomada de outros pontos de vista por parte dos professores. Essa constatação só foi possível por meio da análise da produção escrita, assumida na perspectiva da oportunidade de aprendizagem sob a luz do Princípio da Orientação.

Por um lado, os questionamentos permitiram que cada fase se tornasse uma nova tarefa, pois a prova foi se modificando com os questionamentos individuais da pesquisadora para cada professor, o que possibilitou um olhar diferente para a prova a cada momento e um repensar nos diversos conteúdos matemáticos abordados. Por outro lado, os questionamentos podem ser considerados como *feedbacks* que oportunizaram que os professores fossem guiados (Princípio da Orientação) no processo de aprender, na busca de que transitassem de um nível de pensamento para outro.

As falas dos professores durante a realização da prova em fases ("não consigo decifrar esse nome... nunca mais dou prova para meus alunos, coitadinho deles", "é duro ser aluno") indicam que, ao colocar os professores em

situação de prova, é possível oportunizar um repensar em relação ao instrumento, ampliar as estratégias de aula, mostrar que existem diversos instrumentos de avaliação, o que o leva a pensar nos obstáculos da aprendizagem e como eles podem ser repensados também na avaliação.

Dos dezesseis (16) professores que responderam ao questionário (Apêndice B), quatorze disseram que “pretendem utilizar a prova em fases nas aulas” e dois assinalaram talvez; o que mostra a aceitação desse tipo de instrumento e uma disponibilidade de experimentar diferentes estratégias em sala de aula.

No relato e na análise realizados neste estudo, observou-se, várias vezes, em uma mesma questão, mais de uma estratégia de resolução por um mesmo participante. Por exemplo, na questão Q01, P10 encontra o preço do  $cm^2$ , para cada pizza, usando regra de três; depois de ter resolvido pela comparação das áreas e dos preços de cada pizza por estimativa. Pode-se dizer que P10 construiu o seu próprio caminho de mobilização do conhecimento, saindo do nível de pensamento de conexão para o de reflexão.

Por meio dos questionamentos (intervenção), os professores foram sendo guiados, e sua produção escrita indica que transitaram de um nível para outro. Isso mostra que a prova em fases vai para além de um mero formalismo institucional de dar nota, permite que o aluno reflita sobre suas ações, retome ideias anteriores.

A realização da prova em fases mostrou uma utilização do Princípio da Atividade, uma vez que ao tentar responder as questões feitas particularmente, a partir da sua própria produção, o resolvidor se mobilizou, sendo agente da sua própria aprendizagem.

O Princípio da Realidade manifestou-se nos contextos das tarefas, já que fizeram parte de situações da vida real: compra, tamanho, preço, nomes de pessoas. Além disso, a RME considera a matemática uma atividade humana, que ocorre por meio de contextos ricos. A experiência aqui relatada utilizou o raciocínio de estimativa: um dos participantes, após calcular a área de cada uma das duas pizzas, escreve que a maior é quase o dobro da menor, porém apenas 10 reais mais cara, e mais, no final ainda justifica usando um fato real, geralmente quando compramos maior quantidade pagamos menos por unidade.

Em relação ao Princípio de Níveis, que leva em conta que o estudante parte de uma matemática informal e vai refinando o conhecimento matemático até chegar à matemática formal, infere-se que algumas vezes os professores usavam a comparação ou a estimativa para encontrar a resposta e que, com os questionamentos da pesquisadora, foi possível encontrar outras resoluções mais formais.

O Princípio da Interatividade manifestou-se principalmente no diálogo estabelecido por escrito, entre pesquisador e professor participante. Acredita-se, porém, que essa interação, mais individualizada, nem sempre é possível nas salas de aulas com um número grande de aluno. Outro indício de interatividade é percebido nas prováveis conversas que houve entre eles nos intervalos entre as fases da prova, pois, em alguns casos apresentaram as respostas consideradas corretas sem mostrar o caminho percorrido para chegar a elas.

O Princípio da Orientação se manifesta na oportunidade dada ao professor de guiar o aluno e a oportunidade de o aluno, por meio da ação do professor, ser conduzido no processo de reinvenção guiada. Neste trabalho, os professores tiveram a oportunidade de vivenciar outra experiência de avaliação, de ampliar o conhecimento a respeito de instrumentos de avaliação e de refletir, buscar conhecer mais conteúdos matemáticos para ir além de mera reprodução do livro didático.

Os questionamentos foram realizados individualmente em cada tarefa, analisando a resolução de cada professor, em cada fase. A intenção era criar um ambiente de capacitação e promover reflexões dos professores por estarem diante de um instrumento de avaliação diferenciado e por terem que elaborar e reelaborar as resoluções.

Muitas vezes os professores expressaram mudança na estratégia e no procedimento de resolução, ao vislumbrarem outras possibilidades de resolução na mesma tarefa.

Na abordagem da RME, o Princípio da Orientação “deve dar aos alunos uma oportunidade guiada de reinventar matemática” (HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, p. 8). Segundo essa concepção, o professor tem o papel fundamental nesse processo de ser o guia do aluno, de ofertar ambiente rico para conduzi-lo no

desenvolvimento da aprendizagem. Para que isso possa acontecer, é necessário que o professor conheça vários caminhos para elaborar uma mesma tarefa.

Quando a pesquisadora realiza a pergunta “Qual a ideia que essa fração representa? É a de parte-todo?” para o professor P06, a intenção foi orientar o professor a refletir sobre as diversas ideias que as frações podem expressar. Refletir a respeito delas interfere no modo como o professor conduz a aula.

Por meio do questionamento, “Por que no enunciado o problema informa que as pizzas possuem a mesma espessura ou recheio?”, os professores participantes foram guiados para refletir em relação à área das pizzas para poder compará-las. Pelo Princípio da Orientação, a pesquisadora guiou os professores para pensar nessa relação e permitir que refletissem para além do que está pedindo na tarefa e buscassem outros “óculos” para enxergar.

Na tarefa Q01, o professor P07, no primeiro momento de prova, calcula o comprimento das circunferências e encontra a razão pelo preço e vice-versa. Os questionamentos elaborados pela pesquisadora, na ação de conduzir o professor, permitiram que vivenciasse a oportunidade de compreender a questão de outro modo e encontrasse a resposta ao calcular a área e realizar a diferença área por preço.

Na tarefa Q02, os professores P01 e P10 tomaram, arbitrariamente, nomes como exemplos para compor os fatores. Com a ação de guiar da pesquisadora, conseguiram apresentar na produção, nas fases seguintes, os nomes das amigas e do amigo. Também é possível perceber que, para essa tarefa, havia mais de uma resposta. Esse fato pode provocar o repensar a própria prática como professor e, possivelmente, modificar a forma de dar aula.

A prova em fases permitiu a (re)consideração do professores, em alguns momentos, da forma de como fazer prova, assim como buscassem outros modos de resolução, refletir em todo o momento da oficina, tornando a avaliação parte dos processos de ensino e de aprendizagem e não uma ação excludente.

## REFERÊNCIAS

BARLOW, Michel. **Avaliação escolar**: mitos e realidades. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de. **Avaliação em matemática**: um estudo das respostas de alunos e professores. 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Marília, 1999.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Algumas considerações sobre avaliação educacional. In: **Estudos em Avaliação Educacional**. Fundação Carlos Chagas, nº 22, jul- dez, São Paulo, 2000. p.155 –177.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Sobre avaliação em matemática: uma reflexão. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n. 36, dez 2002, p.256-263.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Análise da produção escrita: a busca do conhecimento escondido. In: ROMANOWSKI, J. P.; MARTINS, P. L. O.; JUNQUEIRA, S. A. (Orgs). **Conhecimento local e conhecimento universal**: a aula e os campos do conhecimento. Curitiba: Champagnat, 2004.

CIANI, Andréia Büttner. **O realístico em questões não-rotineiras de matemática**. 2012. 166f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2012.

DALTO, Jader Otávio; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Problema proposto ou problema resolvido: qual a diferença? **Educação e Pesquisa** (USP. Impresso), v. 35, p. 449-461, 2009.

DE LANGE, Jan. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Utrecht: Freudenthal Institute and National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 1999.

ESTEBAN, Maria Teresa. Diferença e desigualdade: desafios à avaliação comprometida com a aprendizagem. In: **XIII ENDIPE**, 2006, Recife. XIII Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino. Recife: XIII ENDIPE, 2006. p. 1-10.

ESTEBAN, Maria Teresa; SAMPAIO, Carmen Sanches. Diferença, alteridade e aprendizagem: desafios infantis ao saber docente. In: **XVI ENDIPE**, 2012, Campinas. XVI Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino. Campinas: XIII ENDIPE, 2012. p. 1-10.

FERREIRA, Pamela Emanuelli Alves. **Análise da produção escrita de professores da educação básica em questões não-rotineiras de matemática**. 2009. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

FERREIRA, Pamela Emanuelli Alves. **Enunciados de tarefas de matemática: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística**. 2013, 121f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2013.

FREUDENTHAL, Hans. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht, The Netherlands: Reidel, 1973.

FREUDENTHAL, Hans. **Revisiting mathematics education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

MENDES, Marcele Tavares. **Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. 275f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

NAGY-SILVA, Márcia Cristina; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Análise da produção escrita em matemática: algumas considerações. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 11, n. 3, p. 499 – 512, 2005.

OLIVEIRA, Rodrigo Camarinho de. **Matematização: estudo de um processo**. 2014. 62f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PEDROCHI JUNIOR, Osmar. **Avaliação como oportunidade de aprendizagem em matemática**. 2012. 56f. Dissertação (Programa de pós-graduação em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

PEREGO, Sibéle Cristina ; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Um Estudo de Registros Escritos em Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 1, p. 55-72, 2008.

PIRES, Magna Natalia Marin. **Oportunidade para aprender: uma Prática da Reinvenção Guiada na Prova em Fases**. 2013. 122f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

PRESTES, Diego Barboza. **Prova em fases de Matemática: uma experiência no 5º ano do Ensino Fundamental**. 2015. 122f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2015.

SANTOS, Edilaine Regina dos. **Estudo da produção escrita de estudantes do ensino médio em questões discursivas não rotineiras de matemática**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática)- Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

SANTOS, Edilaine Regina dos. **Análise da produção escrita em matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino**. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de



Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, 15 (2), 1986. p. 4-14.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, 57 (1), 1987, p. 1-22.

TREVISAN, André Luís. **Prova em fases e um repensar da prática avaliativa em matemática**. 2013. 168f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. **Assessment and Realistic Mathematics Education**. Utrecht: CD-β Press/Freudenthal Institute, Utrecht University, 1996.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. **Mathematics education in the Netherlands: a guided tour**. Freudenthal Institute, Utrecht University, the Netherlands, 2000.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In: SPARROW, L.; KISSANE, B. & HURST, C. (Eds.). Shaping the future of mathematics education: **Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Fremantle: MERGA. 2010.

VIOLA DOS SANTOS, João Ricardo; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Uma análise interpretativa da produção escrita em matemática de alunos da escola básica. **ZETETIKÉ**, Campinas, v. 16, n. 30, p. 11 – 43, junho/dezembro 2008.

VIOLA DOS SANTOS, João Ricardo; BURIASCO, Regina Luzia Corio de.; CIANI, Andréia Büttner. A Avaliação como Prática de Investigação e Análise da Produção Escrita em Matemática. **Revista de Educação**, Campinas, n. 25, p. 35 – 45, novembro 2008.

VIOLA DOS SANTOS, João Ricardo; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Uma análise do pensamento e da linguagem algébrica expressos na produção escrita de alunos da escola básica. **Boletim GEPEM**, v. 54, p. 11-32, 2009.



## APÉNDICES

APÊNDICE A

Quadro: descritivo da pesquisa da expressão “prova em fases”

Autor/Ano	Prova em fases	
	Descrição do que é	Descrição de quais suas características
PASSOS, Adriana Quimentão; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. <b>A prova em duas fases:</b> uma experiência na 1ª série do Ensino Médio. Programa de Desenvolvimento Educacional do Paraná. 2009. Disponível em: < <a href="http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1505-8.pdf">http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1505-8.pdf</a> >. Acesso em: 12 dez. 2014.	Instrumentos de avaliação.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Na primeira fase o tempo de resolução deve ser determinado pelo professor, individualmente e sem consulta. Ao corrigir as resoluções, o professor realiza alguns questionamentos para o estudante, e tece considerações a respeito das respostas dadas. Na segunda fase, o professor devolve a prova comentada para os estudantes, combina com eles o prazo de entrega da segunda versão da prova, que deve ser feita em outra folha;</li> <li>- pode ser tomada a avaliação como fio condutor da prática pedagógica do professor;</li> <li>- permite realizar a avaliação diagnóstica e contínua;</li> <li>- as perguntas elaboradas pelo professor devem ser de cunho interpretativo, abertas e investigativas;</li> <li>- permite tomar a resolução de Problemas como metodologia;</li> </ul>
MONTEIRO, Maria Raquel Marques Pedro. <b>O teste em duas fases e o relatório escrito na avaliação das aprendizagens em Ciências Naturais 3º Ciclo do Ensino Básico.</b> 2010. 220f. Dissertação (Supervisão Pedagógica) - Departamento de Educação e Ensino à Distância, Universidade Aberta de Lisboa, Lisboa, 2010.	instrumentos alternativo de avaliação.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- no teste havia dois tipos de perguntas, com resposta curta, com questões mais fechadas, e perguntas de ensaio, com questões mais abertas;</li> <li>- na primeira fase com maior tempo para resposta, o professor recolhe e realiza questionamentos para os erros mais graves proporcionando pistas para resolução. Na segunda fase utiliza novas folhas, e pode-se consultar o caderno, como um diário individual;</li> <li>- consultar livros, cadernos;</li> <li>- o professor corrige e classifica o teste nos aspectos: qualidade da 1ª fase, qualidade da 2ª fase e evolução do aluno;</li> <li>- pode ser desenvolvido as competências como comunicação, escrita, análise, interpretação, reflexão e raciocínio;</li> <li>- ocorre diminuição da ansiedade, angústia e stress;</li> <li>- melhora a prática letiva do professor;</li> <li>- realização de <i>feedback</i> do professor;</li> <li>- avaliação formadora;</li> <li>- função auto-reguladora.</li> </ul>
PIRES, Magna Natalia Marin; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Prova em fases: instrumento para aprender. In V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 4., 2012, Petrópolis. <b>Anais do V SIPEM.</b> Petrópolis: V SIPEM, 2012. Disponível em: <	Instrumento de avaliação e ação formativa.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Na primeira fase, os alunos resolvem a prova sem nenhuma indicação do professor, em tempo determinado, o professor avalia as resoluções iniciais, e elabora comentários pedindo justificativas e/ou esclarecimentos. Nas demais fases seguintes, os alunos tentam responder as questões postas pelo professor;</li> <li>- permiti reorientar a prática, oportunizar a reflexão e favorecer a aprendizagem, de professores e alunos;</li> <li>- uma prova escrita usual com características de tarefas que são mais abertas;</li> </ul>

<p><a href="http://www.sbemrasil.org.br/files/v_sipem/PDFs/GT08/CC46820833920_A.pdf">http://www.sbemrasil.org.br/files/v_sipem/PDFs/GT08/CC46820833920_A.pdf</a>&gt;. Acesso em: 20 dez. 2014.</p>		<ul style="list-style-type: none"> <li>- oportuniza o processo de comunicação por escrito;</li> <li>- permiti ao aluno refletir, comunicar suas ideias, desenvolver;</li> <li>- avaliação formativa.</li> </ul>
<p>PIRES, Magna Natalia Marin. <b>Oportunidade para aprender</b>: uma prática da reinvenção guiada na prova em fases. 2013. 122f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.</p>	<p>Instrumento usualmente de avaliação e pode ser uma ação de formação.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Quando entende-se que a potencialidade das respostas da professora e também da questão se esgota, passa-se para outra questão;</li> <li>- permite ao aluno refletir;</li> <li>- os comentários do professor são específicos para cada aluno sendo uma comunicação individual;</li> <li>- instrumento de aprendizagem;</li> <li>- avaliação formativa;</li> <li>- permite obter informações a respeito da produção e da aprendizagem do aluno;</li> <li>- permite ao professor inventariar, diagnosticar e prognosticar;</li> <li>- elaboração de perguntas que guiem o aluno no processo de ensino e aprendizagem;</li> <li>- esse processo de diálogo em que, na própria folha de prova do aluno, o professor faz perguntas por escrito e o aluno responde.</li> </ul>
<p>TREVISAN, André Luis. <b>Prova em fases e um repensar da prática avaliativa em Matemática</b>. 2013. 168f. Tese de doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.</p>	<p>Instrumento de avaliação em aulas de Matemática.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Avaliação formativa;</li> <li>- possibilidade de fazer e refazer as questões da prova (feedback);</li> <li>- o professor desenvolve a “arte de fazer perguntas”;</li> <li>- o professor precisa escolher bons problemas de avaliação;</li> <li>- informar a nota parcial atingida pelo estudante ao final de cada fase da prova.</li> </ul>
<p>TREVISAN, André Luis; MENDES, Marcele Tavares; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. Prova em fases: um instrumento para aprender e ensinar matemática. In XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 6., 2013, Curitiba. <b>Anais XI Encontro Nacional de Educação Matemática</b>. Curitiba: XI ENEN, 2013. Disponível em:&lt; <a href="http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/1230_862_ID.pdf">http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/1230_862_ID.pdf</a>&gt;. Acesso em: 20 dez. 2014.</p>	<p>Instrumento de avaliação em aulas de Matemática.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Esse Instrumento possibilita tomar a avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem;</li> <li>- <i>feedback</i> escrito da produção escrita de estudantes nas questões.</li> </ul>
<p>MENDES, Marcele Tavares. <b>Utilização da prova em fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de</b></p>	<p>Instrumento de ensino, de aprendizagem e de</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Recurso para a regulação da aprendizagem;</li> <li>- realização da prova individual, realizada na sala de aula com o tempo estabelecido pelo professor, sem consulta de materiais;</li> </ul>

<p><b>cálculo.</b> 2014. 275f. Tese de doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2014.</p>	<p>avaliação.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- os questionamentos do professor são intervenções escritas, sem dizer o que estar certo ou a errado;</li> <li>- o professor pode indicar livros, sites, sugerir;</li> <li>- o professor guia o aluno por meio do diálogo escrito;</li> <li>- oportunidade de aprendizagem;</li> <li>- o aluno desenvolve uma atitude autorreflexiva;</li> <li>- os alunos são sujeitos participantes ativos no processo educacional;</li> <li>- o <i>feedback</i> do professor para o aluno;</li> <li>- oportuniza ao aluno revelar o que sabe;</li> <li>- desenvolver autonomia do aluno;</li> <li>- tomada de consciência do aluno na relação aos seus conhecimentos matemáticos;</li> <li>- o professor conhecer as potencialidades e dificuldades matemáticas de seus alunos;</li> <li>- oportuniza o aluno fazer matemática, construindo suas próprias produções matemáticas;</li> <li>- auto avaliação;</li> <li>- o aluno desenvolve senso crítico, a reflexão e a autonomia;</li> <li>- o aluno desempenha o papel de protagonista.</li> </ul>
<p>PIRES, Magna Natalia Marin et al. Prova em fases como instrumento de capacitação de professoras dos anos iniciais em matemática. In XII EPREM – Encontro Paranaense de Educação Matemática, 7., 2014, Campo Mourão. <b>Anais XII EPREM.</b> Campo Mourão: XII EPREM, 2014. Disponível em: &lt;<a href="http://sbemparana.com.br/arquivos/anais/epremxii/ARQUIVOS/COMUNICACOES/CCTitulo/C062.PDF">http://sbemparana.com.br/arquivos/anais/epremxii/ARQUIVOS/COMUNICACOES/CCTitulo/C062.PDF</a>&gt;. Acesso em: 20 dez. 2014.</p>	<p>Instrumento de avaliação e capacitação continuada de professores.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Permite fazer um diagnóstico das dificuldades dos alunos;</li> <li>- realizar a avaliação formativa;</li> <li>- no primeiro momento na sala de aula o aluno realiza a prova e sem indicações do professor, no segundo momento, dispendo de mais tempo e dos comentários que o professor formulou ao avaliar as resoluções iniciais;</li> <li>- exige do professor a elaboração de perguntas que guiem o aluno no processo de ensino e aprendizagem.</li> </ul>
<p>SOUZA, Thamires da Silva et al. Proposta de utilização de uma prova em fases em aulas de matemática do 7º ano. In: IV SINECT - Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, 4., 2014, Ponta Grossa. <b>Anais...</b> Ponta Grossa: IV SINECT, 2014. Disponível em: &lt;<a href="http://www.sinct.com.br/2014/down.php?id=3168&amp;q=1">http://www.sinct.com.br/2014/down.php?id=3168&amp;q=1</a>&gt;. Acesso em: 20 dez. 2014.</p>	<p>Instrumento de avaliação da produção escrita do aluno.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ressignificação da prova escrita;</li> <li>- realização individual, realizada na sala de aula, em momentos estabelecidos pelo professor;</li> <li>- numa primeira fase, o estudante conhece as questões da prova e resolve algumas delas, o professor apresenta questionamentos escritos para o estudante. Nas fases seguintes o aluno trabalha com novos e anteriores questionamentos realizado pelo professo;</li> <li>- resolução a tinta, devem deixar na folha todos os rascunhos de cálculos ou métodos;</li> <li>- pode-se atribuir ou não uma nota.</li> </ul>

Fonte: A autora

## APÊNDICE B



## Quadros de informações dos professores participantes da pesquisa

**Quadro 01** – Indicação do material de apoio utilizado por professor

Professor	Material de apoio utilizado frequentemente para preparar aulas
14PUP01	Livro didático, material internet
14PUP02	Livro didático, material internet e vídeo aulas
14PUP03	Livro didático, material internet e vídeo aulas
14PUP04	Livro didático, artigos de revista, material internet e vídeo aulas
14PUP05	Livro didático, material internet e vídeo aulas
14PUP06	Livro didático, artigos de revista, material internet e vídeo aulas
14PUP07	Livro didático, artigos de revista, material internet
14PUP08	Livro didático, material internet
14PUP09	Livro didático, material internet e vídeo aulas
14PUP10	Livro didático, material internet e vídeo aulas
14PUP11	Livro didático, material internet e vídeo aulas
14PUP12	Livro didático, material internet
14PUP13	Livro didático, material internet e vídeo aulas
14PUP14	Livro didático, material internet e vídeo aulas
14PUP15	Livro didático, artigos de revista, material internet, vídeo aulas e outro
14PUP16	Livro didático, artigos de revista, material internet e vídeo aulas

Fonte: A autora

Quadro 2 – Indicação de outros materiais utilizados

<b>Professor</b>	<b>Lê frequentemente artigos de revista da área de ensino/Qual</b>	<b>Artigos publicados em revista</b>	<b>Estudou algum conteúdo matemático para realizar as atividades do curso/Qual</b>	<b>Maior dificuldade ou maior desafio na realização das atividades do curso</b>
<b>14PUP01</b>	Não	Não	Não	Prova em fases, pois me cansei dela. Algumas perguntas mais confundiam do que auxiliavam
<b>14PUP02</b>	Sim/Educação*	Não	Sim/Gráficos e intervalos	Fazer os questionamentos da trajetória e responder os questionamentos da prova em fases
<b>14PUP03</b>	Não	Não	Não	Lembrar de fórmulas que costumeiramente não uso; elaborar questões para a trajetória hipotética de aprendizagem
<b>14PUP04</b>	Não	Não	Não	Elaborar a trajetória hipotética de aprendizagem
<b>14PUP05</b>	Sim/Nova Escola		Não	Sistematização das tarefas
<b>14PUP06</b>	Sim/Nova Escola e outros	Não	Não	Meu maior desafio foi elaborar a THA, pois trata-se de um assunto novo para mim
<b>14PUP07</b>	As vezes/ Revista Cálculo	Não	Não	1ª Resolver questões da prova em ambiente tumultuado, 2ª resolver a questão da prova que envolvia os nomes
<b>14PUP08</b>	Não	Não	Sim/Geratriz	Montar a THA, pois foi algo novo, apesar disso a minha THA ficou parecida com a Produção Didática Pedagógica
<b>14PUP09</b>	Não	Sim, Educação do Campo	Não	Imaginar quais questionamentos e diálogos de alunos na THA
<b>14PUP10</b>	Não	Não	Sim/Sequência de Fibonacci	“Os relatórios”, por não ter o costume de fazer este tipo de atividade
<b>14PUP11</b>	Sim	Não	Não	Resolver a prova, ser avaliada, ter prazo para resolver as questões. Maior desafio foi montar uma trajetória
<b>14PUP12</b>	Não	-	Sim/Sequência de Fibonacci	Escrever os relatórios
<b>14PUP13</b>	Não	Não	Sim/Alguns Ensino Médio	Resolver algumas questões da prova em fases..., mas a maior foi o 1º dia: descobrir o que nos aguardava nesse tal PUMAT
<b>14PUP14</b>	Não	Não	Não	Escrever as trajetórias e fazer os relatórios
<b>14PUP15</b>	Não	Não	Não	Relembrar alguns conteúdos, pois já faz alguns anos que não trabalho com conteúdos matemáticos
<b>14PUP16</b>	Não	Não	Não	Fazer os relatórios e montar a Trajetória Hipotética de Aprendizagem

Fonte: A autora

Quadro 3 – Indicação de conhecimento prévio sobre a Prova em Fases

<b>Professor</b>	<b>Já conhecia ou já trabalhou com a Prova em Fases</b>
<b>14PUP01</b>	Meu projeto do PDE é a prova em fases. Aprendi sobre ela através das leituras solicitadas pela orientadora
<b>14PUP02</b>	Já conhecia, não havia trabalhado
<b>14PUP03</b>	Não
<b>14PUP04</b>	Não
<b>14PUP05</b>	Sim. Já fiz curso e já apliquei em sala de aula
<b>14PUP06</b>	Não
<b>14PUP07</b>	Conhecia aqui do PDE através das aulas da Regina
<b>14PUP08</b>	Não, foi novidade
<b>14PUP09</b>	Não
<b>14PUP10</b>	Já conhecia, mas ainda não tive a oportunidade de trabalhar, mas pretendo iniciar
<b>14PUP11</b>	Não
<b>14PUP12</b>	Conhecia através de um GTR que participei, mas nunca trabalhei com este tipo de prova
<b>14PUP13</b>	Não! Foi meu primeiro contato
<b>14PUP14</b>	Em partes sim, pois tenho o costume de fazer uma retomada nas provas com os alunos, pelo menos em dois (dias) fases
<b>14PUP15</b>	Não conhecia até começar a frequentar as aulas do PDE
<b>14PUP16</b>	Com esse nome não, mais já trabalho com alguns questionamentos nas provas dos alunos

Fonte: A autora

Quadro 4 – Indicativo da pretensão de utilizar a Prova em Fases

<b>Professor</b>	<b>Pretende utilizar a Prova em Fases nas suas aulas? Por que?</b>
<b>14PUP01</b>	Sim, para que eu possa trabalhar com a recuperação de estudos. Mas trabalharei com a prova, no máximo três fases.
<b>14PUP02</b>	Sim, a prova em fases da oportunidade para o aluno e para o professor no processo de ensino e aprendizagem.
<b>14PUP03</b>	Sim, contudo vou experimentar apenas em uma turma e fazer uma análise com outra que não.
<b>P04</b>	Sim, meu projeto é sobre avaliação e vou trabalhar com a prova em duas fases.
<b>14PUP05</b>	Já utilizei a algum tempo.
<b>14PUP06</b>	Sim, pretendo experimentar essa modalidade com o intuito de melhorar o processo de ensino-aprendizagem.
<b>14PUP07</b>	Sim, não no mesmo ano de implementação do projeto, mas no seguinte. Porque professores da UEL que a utilizam disseram dar bons resultados.
<b>14PUP08</b>	Sim, porque achei uma maneira de avaliar bem interessante, apesar de que tenho muitas dúvidas sobre esse tipo de prova. Para poder trabalhar, tenho que estudar, aprender mais.
<b>14PUP09</b>	Talvez, vai depender da turma.
<b>14PUP10</b>	Sim, por ser mais uma forma de aprendizagem e não somente um recurso para dar nota para os alunos.
<b>14PUP11</b>	Sim, pretendo utilizar a Prova em Fases como meio de análise da defasagem da aprendizagem dos meus alunos, também para me orientar na prática pedagógica.
<b>14PUP12</b>	Sim, achei muito interessante, pois dá oportunidade através dos questionamentos ao aluno de repensar sobre a sua resolução. Direcionando-o para construir seu próprio conhecimento.
<b>14PUP13</b>	Talvez! Ainda há que se preparar a consciência dos pais e dos alunos.
<b>14PUP14</b>	É interessante, pretendo sim, mas penso que no máximo 2 ou 3 fases, e dependendo da turma e dos conteúdos.
<b>14PUP15</b>	Sim, vou aplicar a Prova em Fases na minha Proposta do PDE
<b>14PUP16</b>	Sim, leva o aluno a analisar e observar suas resoluções, podendo acrescentar sempre mais na construção de sua aprendizagem

Fonte: A autora

APÊNDICE C

**Universidade Estadual de Londrina**  
**Departamento de Matemática - Área: Educação Matemática**  
**Projeto Universal**  
**Análise da Produção Escrita como Oportunidade para o Desenvolvimento**  
**Profissional de Professores que ensinam Matemática**  
**Oficinas de análise da produção escrita em tarefas de matemática**  
**2014**

Nome: \_\_\_\_\_

Data: ...../...../.....

### **Instruções**

Leia cuidadosamente cada questão.

Use **apenas caneta** para resolver cada questão.

**Não** utilize **borracha**.

Resolva **todas** as questões da prova.

Você deve resolver todas as questões **da forma mais completa possível**, fazendo cálculos, desenhos, esquemas, ou explicando, com suas palavras o que fez para resolver cada questão.

**Não apague** cálculos, esquemas, desenhos que utilizar na resolução da questão.

Se perceber que resolveu algo errado, **passe um traço por cima** e resolva corretamente.

Você pode utilizar o verso da folha se necessário.

**Confira** as resoluções antes de entregar a prova.

#### **QUESTÃO: 01**

Uma pizzaria serve duas pizzas redondas da mesma espessura, do mesmo recheio



e em tamanhos diferentes. A menor delas tem um diâmetro de 30 cm e custa 30 reais. A maior delas tem um diâmetro de 40 cm e custa 40 reais. Qual das pizzas tem o preço mais vantajoso? Demonstre seu raciocínio.



## QUESTÃO: 02

Estava outro dia com uns amigos quando resolvemos transformar as letras dos nossos nomes próprios em números, de acordo com um dos mais antigos códigos que se conhece: A=1, B=2, C=3, ...X=22, Z=23. Depois disso, cada um de nós multiplicou os números do seu nome.

No meu caso, JOSÉ deu  $10 \times 14 \times 18 \times 5 = 12600$ .

Uma das minhas amigas obteve 24453 e um dos meu amigos, 497420. Como é que eles se chamam?





**QUESTÃO: 03**

Mei-Ling, de Singapura, estava preparando-se para uma viagem de 3 meses à África do Sul como aluna de intercâmbio. Ela precisava trocar alguns dólares de Singapura (SGD) por rands sul-africanos (ZAR).

**1)** Mei-Ling descobriu que a taxa de câmbio entre o dólar de Singapura e o rand sul-africano era  $1 \text{ SGD} = 4,2 \text{ ZAR}$ . Mei-Ling trocou 3000 dólares de Singapura por rands sul-africanos a esta taxa de câmbio. Quantos rands sul-africanos Mei-Ling recebeu?



**QUESTÃO: 03**

**2)** Durante estes 3 meses, a taxa de câmbio mudou de 4,2 para 4,0 ZAR por SGD. Foi vantajoso para Mei-Ling que a taxa de câmbio atual fosse de 4,0 ZAR em vez de 4,2 ZAR, quando ela trocou seus rands sul-africanos por dólares de Singapura? Dê uma explicação que justifique a sua resposta.



## QUESTÃO: 04

### ENERGIA EÓLICA



Zedlópolis pretende construir várias usinas eólicas para produzir eletricidade.

A prefeitura de Zedlópolis coletou informações sobre o seguinte modelo.

Modelo:	E-82
Altura do mastro:	138 metros
Números de pás:	3
Comprimento de uma pá:	40 metros
Velocidade máxima de rotação:	20 rotações por minuto
Custo de construção:	3 200 000 zeds
Produção:	0,10 zed por kWh gerado
Custo de manutenção:	0,01 zed par kWh gerado
Eficiência:	Operacional 97% do ano

Observação: O quilowatt/hora (kWh) é uma unidade de medida de energia elétrica.

#### Questão 1: ENERGIA EÓLICA

Determine se as seguintes afirmações acerca da usina eólica E-82 podem ser deduzidas das informações fornecidas. Circule "Sim" ou "Não" para cada afirmação.

Afirmação	Esta afirmação pode ser deduzida das informações fornecidas?
A construção de três usinas eólicas custará mais de 8 000 000 zeds no total.	Sim / Não
Os custos de manutenção da usina eólica correspondem a cerca de 5 % de sua produção.	Sim / Não
Os custos de manutenção da usina eólica dependem do número de kWh gerados.	Sim / Não
Durante exatamente 97 dias por ano, a usina eólica não é operacional.	Sim / Não

Justifique cada uma das suas respostas.



## Questão 2: ENERGIA EÓLICA

Zedlópolis deseja calcular os custos e os lucros gerados pela construção dessa usina eólica.

O prefeito de Zedlópolis propõe a seguinte fórmula para calcular as vantagens financeiras  $F$  (em zeds) sobre um número de anos  $y$ , se eles construírem o modelo E-82.

$$F = 400\,000 y - 3\,200\,000$$

Lucros provenientes  
da produção anual  
de eletricidade.

Custos de  
construção da  
usina eólica.

De acordo com a fórmula do prefeito, qual é o número mínimo de anos de funcionamento necessário para cobrir todos os custos de construção dessa usina eólica?



## QUESTÃO: 05

### A COMPRA DE UM APARTAMENTO

Veja abaixo a planta do apartamento que os pais de Jorge querem comprar em uma imobiliária.



#### Questão 1: A COMPRA DE UM APARTAMENTO

Para estimar a superfície (área) total do apartamento (varanda e paredes inclusas), pode-se medir o tamanho de cada compartimento, calcular sua superfície e depois somar todas essas superfícies.

Um método mais eficaz permite, entretanto, estimar a superfície total medindo somente quatro distâncias. Indique sobre a planta acima os **quatro** comprimentos necessários para estimar a superfície total do apartamento.

Justifique sua resposta.



## QUESTÃO: 06

---

### PINGUIM



O fotógrafo de animais Jean Baptiste fez uma viagem de um ano e tirou inúmeras fotos de pinguins e de seus filhotes.

Ele se interessou particularmente pelo crescimento do tamanho de diferentes colônias de pinguins.

---

#### Questão 1: PINGUINS

Normalmente, um casal de pinguins produz dois ovos por ano. Em geral, o filhote que nasce do maior dos dois ovos é o único a sobreviver.

Com os pinguins saltadores, o primeiro ovo pesa em torno de 78 g e o segundo em torno de 110 g.

Em que proporção aproximadamente o segundo ovo é mais pesado que o primeiro?



---

**Questão 2 : PINGUINS**

Jean se pergunta como o tamanho de uma colônia de pinguins vai evoluir ao longo dos próximos anos. Para determinar essa evolução, ele levanta as seguintes hipóteses:

- No início do ano, a colônia tem 10 000 pinguins (5 000 casais).
- Cada casal de pinguins procria um filhote a cada primavera.
- No final do ano, 20 % de todos os pinguins (adultos e filhotes) estarão mortos.

Ao final do primeiro ano, quantos pinguins (adultos e filhotes) haverá nessa colônia?

Número de pinguins: .....



---

### Questão 3: PINGUINS

Jean supõe que a colônia continuará a crescer da seguinte maneira:

- No início de cada ano, a colônia tem um número igual de machos e fêmeas que formam casais.
- Cada casal de pinguins procria um filhote a cada primavera.
- Ao final do ano, 20 % de todos os pinguins (adultos e filhotes) estarão mortos.
- Os pinguins com um ano de idade também terão filhotes.

De acordo com as hipóteses acima, qual das seguintes fórmulas expressa o número total de pinguins  $P$  ao final de 7 anos?

E  $P = 10\,000 \times (1,5 \times 0,2)^7$

F  $P = 10\,000 \times (1,5 \times 0,8)^7$

G  $P = 10\,000 \times (1,2 \times 0,2)^7$

H  $P = 10\,000 \times (1,2 \times 0,8)^7$

Justifique sua resposta.





## QUESTÃO: 07

### TV A CABO

A tabela abaixo apresenta dados sobre o número de lares equipados com aparelhos de televisão (TV) em cinco países.

A tabela indica igualmente a percentagem de lares equipados com aparelhos de TV e que também são assinantes de TV a cabo.



País	Número de lares equipados com TV	Porcentagem de lares equipados com TV dentre todos os lares	Porcentagem de lares assinantes de televisão a cabo dentre os lares equipados com TV
Japão	48,0 milhões	99,8 %	51,4 %
França	24,5 milhões	97,0 %	15,4 %
Bélgica	4,4 milhões	99,0 %	91,7 %
Suíça	2,8 milhões	85,8 %	98,0 %
Noruega	2,0 milhões	97,2 %	42,7 %

Fontes: UIT, Indicadores das telecomunicações no mundo 2004/2005.  
UIT, Relatório sobre o Desenvolvimento das Telecomunicações/TIC no Mundo, 2006.

#### Questão 1: TV A CABO

A tabela indica que na Suíça, 85,8 % dos lares estão equipados com TV.

De acordo com as informações fornecidas na tabela, qual é a estimativa mais próxima do número total de lares na Suíça?



---

**Questão 2: TV A CABO**

Carlos examina as informações dadas pela França e pela Noruega na tabela.

Ele diz: "Porque a porcentagem de lares equipados com TV é quase a mesma para os dois países, a Noruega, entretanto, tem mais lares assinantes de televisão a cabo."

Explique porque essa afirmação é falsa. Justifique sua resposta.



## QUESTÃO: 08

### A VENDA DE JORNAIS

Em Zedlândia, existem dois jornais que tentam recrutar vendedores. Os anúncios abaixo mostram como eles pagam seus vendedores.

#### *ESTRELA DE ZEDLÂNDIA*

**PRECISA DE DINHEIRO  
EXTRA?**

**VENDA NOSSO JORNAL**

Você será pago:  
0,20 zeds por jornal para os primeiros 240 jornais que você vender na semana, mais 0,40 zeds para cada jornal adicional vendido.

#### *DIÁRIO DE ZEDLÂNDIA*

**MUITO DINHEIRO**

**POUCO TEMPO!**

Venda o *Diário de Zedlândia* e ganhe 60 zeds por semana, mais um adicional de 0,05 zeds por jornal que você vender.

#### Questão 1: A VENDA DE JORNAIS

Em média, Frederico vende 350 cópias do *Estrela de Zedlândia* toda semana.

Quanto ele ganha por semana, em média?

Justifique sua resposta.



---

**Questão 2: A VENDA DE JORNAIS**

Cristina vende o *Diário de Zedlândia*. Em uma semana ela ganhou 74 zeds.

Quantos jornais ela vendeu naquela semana?

Justifique sua resposta.



1) O que você achou dessa prova?

- (A) Muito fácil.
- (B) Fácil.
- (C) Mediana.
- (D) Difícil.
- (E) Muito difícil.

Justifique sua resposta.

2) O que você achou do tamanho da prova ?

- (A) Muito longa.
- (B) Longa.
- (C) Adequada.
- (D) Curta.
- (E) Muito curta.

Justifique sua resposta.

3) Para você, o tempo foi

- (A) mais que o necessário para fazer a prova,
- (B) suficiente para fazer a prova.
- (C) faltou tempo para fazer a prova.

Justifique sua resposta.

A questão que você achou mais fácil foi a de número..... porque

A questão que você achou mais difícil foi a de número..... porque

