Universidade Estadual de Londrina

RODRIGO CAMARINHO DE OLIVEIRA

MATEMATIZAÇÃO:

ESTUDO DE UM PROCESSO

Londrina
2014

RODRIGO CAMARINHO DE OLIVEIRA

MATEMATIZAÇÃO:

ESTUDO DE UM PROCESSO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Regina Luzia Corio de Buriasco.

Londrina
2014

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

O48m Oliveira, Rodrigo Camarinho de.
Matematização : estudo de um processo / Rodrigo Camarinho de Oliveira. – Londrina, 2014.
63 f. : il.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2014.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Educação matemática – Formação de conceitos – Teses. 3. Matemática – Filosofia – Teses. 4. Abordagem interdisciplinar do conhecimento – Teses. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

RODRIGO CAMARINHO DE OLIVEIRA

MATEMATIZAÇÃO:

ESTUDO DE UM PROCESSO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Prof.ª Dr.ª Regina Luzia Corio de Buriasco
UEL – Londrina - PR

Prof.ª Dr.ª Angela Marta Pereira das Dores Savioli
UEL – Londrina - PR

Prof.ª Dr.ª Sonia Abrantes Garcez Palha
Universidade de Amsterdam - Holanda

Londrina, 27 de fevereiro de 2014.

Com amor, ao GEPEMA.

AGRADECIMENTOS

Este estudo é resultado de um trabalho em equipe. Uma equipe formada por diferentes integrantes. Cada integrante teve papel essencial em todo o processo. Tenho muito a agradecer.

Agradeço ao amigos da família GEPEMA. Com olhares atentos, cada um contribuiu grandemente para o estudo. Com espírito de família, cada um contribui grandemente para o meu crescimento pessoal e profissional. Obrigado.

À minha orientadora, mulher incrível que ensina a todo momento. É um privilégio conviver com você.

Às professoras, Profª. Drª. Angela Marta Pereira das Dores Savioli e Profª. Drª. Sonia Abrantes Garcêz Palha, por aceitarem fazer parte da banca de defesa. Obrigado pelas valiosas sugestões, críticas e novas ideias.

À integrante que esteve comigo diariamente, Talita Shigueoka. Obrigado pela compreensão e companheirismo. Obrigado pelos exemplos diários de trabalho, dedicação e vontade de vencer. Obrigado por todo amor dedicado.

À minha família e aos meus amigos, que mesmo sem compreender exatamente o que tudo isso significava, sempre me apoiaram incondicionalmente, torceram e vibraram com cada etapa avançada no processo. Obrigado por me trazerem até aqui.

À todos que participaram de alguma forma, minha eterna gratidão.

À CNPq pela bolsa de estudos concedida.

É necessário que ao menos uma vez na
vida você duvide, tanto quanto possível,
de todas as coisas (René Descartes).

OLIVEIRA, Rodrigo Camarinho de. **Matematização:** estudo de um processo. 2014. 63f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

RESUMO

Este estudo tem por objetivo investigar, em nível teórico, o sentido/significado da expressão *matematização* na perspectiva da Educação Matemática Realística. Nesta perspectiva, cujo foco é o desenvolvimento de uma abordagem para o ensino de Matemática, a matematização aparece como elemento fundamental sendo considerada a principal atividade realizada pelos estudantes. No decorrer do estudo, descrevemos não só o que significa matematização, mas também o desenvolvimento do conceito no decorrer dos anos. Tal desenvolvimento pode ser observado na distinção entre as componentes horizontal e vertical da matematização, na matematização conceitual e na matematização progressiva. Também apresentamos alguns aspectos referentes a uma aula com vistas a proporcionar ambientes favoráveis à matematização no que diz respeito ao papel do professor, do aluno e a dinâmica da aula. Esses aspectos tem papel essencial na perspectiva da RME e têm características específicas, algumas apresentadas e discutidas neste estudo.

Palavras-chave: Educação matemática. Educação matemática realística. Matematização.

OLIVEIRA, Rodrigo Camarinho de. **Mathematization:** study of a process. 2014. 63p. Thesis (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

ABSTRACT

This study aims to investigate, on a theoretical level, the sense/meaning of mathematization on the perspective of Realistic Mathematics Education. In this perspective, which focuses on the development of an approach to teaching mathematics, the mathematization appears as a key element being considered the main activity performed by the students. During the study, we describe not only what means mathematization, but also the development of the concept over the years. Such development can be seen in the distinction between horizontal and vertical components of mathematization, in the conceptual mathematization and progressive mathematization. We also present some aspects relating to classes in order to provide favorable environments for mathematization with regard to the role of the teacher, student and classroom dynamics. These aspects plays an essential role in RME perspective and have some specific characteristics, some of them are presented and discussed in this study.

Keywords: Mathematics education. Realistic mathematics education. Mathematization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Modelo emergente da RME (Gravemeijer, 1994) 27
Figura 2 – Esquema representando processo de matematização conceitual 41
Figura 3 – Matematização na Educação Matemática Realística 46

LISTA DOS QUADROS

Quadro 1 – Resumo dos Princípios da RME 28
Quadro 2 – Definição para *matematização com ênfase na atividade de organização* apresentada por diferentes autores 32
Quadro 3 – Definição para *matematização com ênfase nas características deste processo* apresentada por diferentes autores 33
Quadro 4 – Trechos referentes a *matematização horizontal* e *vertical* retirados de textos de autores da RME 36
Quadro 5 – Tipos de matematização enfatizados em diferentes instruções matemáticas 39

SUMÁRIO

1 DA ESCOLA À PESQUISA 11

2 UM PROBLEMA SE CONSTITUI 14

3 UM MODO DE FAZER 19

4 CONTEXTUALIZANDO 23
4.1 PRINCÍPIOS HEURÍSTICOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA 24
4.1.1 Reinvenção Guiada por Meio da Matematização Progressiva 24
4.1.2 Fenomenologia Didática 25
4.1.3 Modelos Emergentes 26

5 SOBRE MATEMATIZAÇÃO 30
5.1 MATEMATIZAÇÃO CONCEITUAL 40

6 MATEMATIZANDO 44
6.1 A DINÂMICA DA AULA 47
6.2 O PAPEL DO PROFESSOR 49
6.3 O PAPEL DO ALUNO 51

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES 54

REFERÊNCIAS 58

1 DA ESCOLA À PESQUISA

A escola sempre foi fácil[1]*!*

A dificuldade surgiu quando iniciei[2] a graduação no curso de Bacharelado em Matemática em 2005 na Universidade Estadual de Londrina (UEL). Acostumado com o ritmo da escola (Ensino Fundamental e Médio) imaginei que as notas boas viriam e que continuaria "aprendendo" com a mesma facilidade. Então, após as primeiras provas e com elas as primeiras notas abaixo da média, percebi que a maneira como eu estudava na escola não funcionaria na Universidade, decorar não me ajudaria mais a ser aprovado, era preciso mais. Eu havia aprendido um único jeito de "estudar" e esse jeito mostrou-se ineficiente. Reprovei naquele ano. Não tinha ideia do motivo pelo qual isso havia acontecido e, é claro, culpei a grade curricular, era difícil demais. Nesse momento da vida, era funcionário de uma produtora de livros didáticos e a sensação de estar colaborando para a formação de estudantes era muito boa.

O segundo ano como estudante da UEL começou. Uma única disciplina para fazer, do 1º ano do curso de Bacharelado em Matemática, fui aprovado com certa tranquilidade, no entanto, ao iniciar o segundo ano do curso, os problemas voltaram e, então, desiludido com a ideia de estudar Matemática e não ter resultado, decidi trancar o curso, viajar e na volta, me matrícularia em outro curso. Estava perdido.

Viajar trouxe algumas experiências e aprendi muito com elas, percebi que aprendi muito mais com elas do que sentado na cadeira, dentro da sala de aula, ouvindo um professor falar. Viver em outro país, conviver com uma cultura diferente, ter a necessidade de falar outro idioma me proporcionaram situações que precisavam ser resolvidas, e a responsabilidade era minha. Nesse ínterim, notei que, quando era necessário resolver uma situação, tudo o que eu poderia fazer era resolvê-la. E todas as coisas que resolvi dessa forma eu me lembro até hoje. Diante disso, alguns questionamentos surgiram e, dentre eles, este: "será que só aprendo se for realmente necessário?"

---

[1] Esse era o meu pensamento enquanto estudante da Educação Básica.
[2] Nesse capítulo, o texto está escrito na primeira pessoa do singular pelo fato de se referir às opiniões e história do autor da pesquisa.

Voltei para o Brasil buscando novos horizontes, triste por abandonar a Matemática, mas feliz por ter vivido tal experiência. Como gostava muito do trabalho com os livros, decidir voltar e como opção para novo curso, a Licenciatura em Matemática. Ali encontrei coisas que realmente precisavam ser resolvidas como, por exemplo, as dificuldades de aprendizagem de Matemática, inclusive as minhas, e isso era motivo suficiente para estar ali.

Tive a melhor professora da minha vida naquele ano, aprendi muito e, o mais importante, aprendi que pessoas aprendem de formas diferentes, em ritmos diferentes e isso passou a me intrigar. Fui convidado a participar do GEPEMA, Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação. Aceitei prontamente e minha carreira como pesquisador começou naquele momento. Minhas primeiras leituras, agora não mais como aluno e sim como estudante, despertaram-me o interesse pela educação efetivamente.

A entrada no GEPEMA possibilitou-me olhar mais de perto para a avaliação no âmbito da Educação Matemática. Os estudos do grupo concentravam-se no tema Avaliação Escolar (SEGURA, 2005; NAGY-SILVA, 2005; PEREGO, 2005; ALVES, 2006; PEREGO, 2006; NEGRÃO DE LIMA, 2006; DALTO, 2007; VIOLA DOS SANTOS, 2007; SANTOS, 2008; CELESTE, 2008; ALMEIDA, 2009; FERREIRA, 2009; LOPEZ, 2010; BEZERRA, 2010). Nos trabalhos de SANTOS, 2008; CELESTE, 2008; ALMEIDA, 2009; FERREIRA, 2009; LOPEZ, 2010; BEZERRA, 2010, uma característica comum era que todos pretendiam investigar a produção escrita em questões não rotineiras de Matemática por meio da Análise da Produção Escrita (BURIASCO, 1999, 2004). Estas questões haviam sido retiradas do banco de questões do *Programme for International Student Assessment,* o PISA[3]. Meu primeiro contato com essa avaliação internacional foi através de sua fundamentação teórica, que se sustentava nos pressupostos da abordagem para o ensino de Matemática denominada Educação Matemática Realística - RME[4].

Para quem teve dificuldades para aprender a Matemática necessária para cursar Bacharelado em Matemática do jeito convencional[5], perceber uma nova perspectiva foi incrível. De acordo com Freudenthal, "o que os seres humanos têm

---

[3] PISA é um estudo global realizado pela *Organisation for Economic Co-operation and Development* (OECD) - Organização para Desenvolvimento e Cooperação Econômica.
[4] *Realistic Mathematics Education*.
[5] Por convencional considere o esquema professor apresenta (transmissor de conhecimento) – aluno aprende (receptor de conhecimento).

de aprender não é a matemática como um sistema fechado, mas sim como uma atividade, um processo de matematização da realidade e, se possível ainda, da matematização da matemática" (FREUDENTHAL, 1968, p. 7). Ele toma como essencial a ideia da Matemática como uma atividade humana (FREUDENTHAL, 1991) e de que ela deve ser aprendida pelo “fazer”, de modo que o aprendiz tenha a oportunidade de “re-inventá-la”, e o processo de matematização é o núcleo dessa atividade. Nesse momento, dei-me conta de que existiam outras possibilidades para o ensino de Matemática e que talvez a minha dificuldade, e de outros tantos, poderia decorrer de um tipo de ensino que não nos privilegiava.

E mais, lembrei-me da viagem e das situações que exigiram de mim aprender algo e, isso, de certo modo, ia ao encontro do apresentado por Freudenthal com relação à aprendizagem de Matemática, tudo o que aprendi “*fazendo*” fazia mais sentido pra mim.

Minha carreira acadêmica começa aqui.

2 UM PROBLEMA SE CONSTITUI

Algumas coisas são planejadas, outras são desejadas, outras ainda, simplesmente acontecem. O meu problema de pesquisa simplesmente aconteceu. Enquanto fazia o que devia, percebi um aspecto da Educação Matemática Realística, a matematização, que pouco sabia.

Quando comecei a participar dos encontros do GEPEMA, algumas coisas[6] já vinham sendo estudadas, umas há mais tempo, a Avaliação Escolar, outras há menos tempo, a Educação Matemática Realística. Era minha tarefa me inteirar desses assuntos por dois motivos. Primeiro, para não ficar perdido durante os encontros[7] e, segundo, porque também gostaria de contribuir com as discussões do grupo. Para conhecer os estudos do GEPEMA, eu deveria ler e estudar os trabalhos produzidos pelo grupo até então, como artigos publicados, dissertações e teses e, para dar continuidade aos estudos comuns do grupo, deveria estudar alguns textos referentes à Educação Matemática Realística. Nesse momento não estava claro por que estudar dois assuntos distintos, a Avaliação Escolar e a Educação Matemática Realística.

O primeiro artigo que li a respeito da Educação Matemática Realística foi escrito em 2008 por Koeno Gravemeijer, *RME theory and mathematics teacher education*. Neste texto ele começa

> [...] por discutir a visão comum de aprender como fazer as conexões entre o que se sabe e o que se precisa aprender. Faço-o questionando: "O que torna a matemática tão difícil?" Depois eu argumento que a noção alternativa de aprendizagem como construção ou (re) invenção oferece uma melhor chance de ajudar os estudantes a aprender matemática. Em seguida, descrevo a abordagem RME como um exemplo de uma teoria de instrução de um domínio específico que tenta dar instruções de como orientar os alunos em tal processo (GRAVEMEIJER, 2008, pág. 283, tradução nossa)[8].

---

[6] Chamei de coisas, pois, em princípio, não conseguia distinguir nem tampouco estabelecer relações entre o que estava sendo estudado.

[7] Os encontros do GEPEMA acontecem às segundas-feiras, das 8h à 17h na Universidade Estadual de Londrina.

[8] Do inglês "[…] *by discussing the common view of learning as making connections between what one knows, and what one needs to learn. I do so by asking the question, ´what makes mathematics so difficult´ Next I argue that the alternative notion of learning as constructing or (re)inventing offers a better chance of helping students learn mathematics. Then, I describe the RME approach as an example of a domain-specific instruction theory that tries to give directions for how to guide students in such a process."*

Esse texto foi muito importante, pois, além de propor uma discussão a respeito do ensino de Matemática, apresentava outra perspectiva, a RME. Para um estudante, essa era uma oportunidade excelente: conhecer uma nova perspectiva a partir de uma discussão.

Paralelamente a isso, comecei a estudar trabalhos produzidos pelos membros do grupo. SANTOS, 2008; CELESTE, 2008; ALMEIDA, 2009; FERREIRA, 2009; LOPEZ, 2010; BEZERRA, 2010, investigaram, por meio da análise da produção escrita de estudantes e professores, como estes lidaram com questões não-rotineiras de Matemática. As questões utilizadas nas pesquisas haviam sido retiradas do banco de questões do PISA pelo fato de possuírem as características desejadas e já serem validadas, pois fizeram parte de uma avaliação já realizada.

A Educação Matemática Realística, abordagem holandesa para o ensino de Matemática, tem aspectos comuns com a fundamentação teórica da Avaliação do PISA no que se refere à Matemática. Com isso, entendi por que o grupo, inicialmente interessado em Avaliação, se dedicava a estudar a RME. Agora, estudar Avaliação Escolar na perspectiva da Educação Matemática Realística fazia sentido para mim. Estudar os documentos do PISA também fez parte das minhas tarefas.

Segundo os documentos do PISA-OECD[9] (2001, 2003, 2009), o foco da avaliação era verificar como estudantes utilizam seus conhecimentos e habilidades em situações da vida real mais do que o aprofundamento do currículo escolar. A essa utilização de conhecimentos e habilidades deu-se o nome *literacia*.

No âmbito da Matemática, o PISA apresenta o conceito de *literacia matemática* que diz respeito a

> [...] preocupação com a capacidade dos estudantes de analisar, raciocinar e comunicar eficazmente como eles apresentam, resolvem e interpretam problemas matemáticos em uma variedade de situações, incluindo as quantitativas, espaciais, probabilísticas ou outros conceitos matemáticos. (PISA-OECD, 2009, pág. 98, tradução nossa)[10].

---

[9] OECD é sigla para Organisation for Economic Co-operation and Development (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico)

[10] Do inglês "[…] *that is concerned with the capacity of students to analyse, reason and communicate effectively as they pose, solve and interpret mathematical problems in a variety of situations including quantitative, spacial, probabilistic or other mathematical concepts*."

Também de acordo com os documentos do PISA-OECD (PISA-OECD, 2009), a Matemática é definida em relação a três dimensões, a saber, (1) o *conteúdo* matemático, (2) os *processos* matemáticos e (3) as *situações*. A primeira dimensão, o *conteúdo*, é definida primariamente em termos de “ideias gerais” e apenas em segunda instancia, em relação aos conteúdos estruturantes do currículo. Como exemplo de conteúdos estruturantes os documentos do PISA citam os números, a álgebra e a geometria.

A segunda dimensão trata dos processos matemáticos e é definida em termos de competências matemáticas gerais. Nesta avaliação, “as questões (de Matemática) são organizadas em três ‘grupos de competência’ (reprodução, conexão e reflexão) definindo o tipo de habilidade de pensamento necessário” (PISA-OECD, 2009, pág. 98, tradução nossa). O primeiro grupo – *reprodução* – diz respeito a utilização de técnicas e procedimentos já conhecidos por parte dos estudantes e são frequentemente encontradas em provas de Matemática. O segundo grupo – *conexão* – exige dos estudantes o estabelecimento de conexões para resolver questões relativamente simples. O terceiro grupo mencionado – *reflexão* – diz respeito ao pensamento matemático, generalização e requer dos estudantes a análise de informações. De acordo com os documentos do PISA (PISA-OECD, 2009), em geral esses processos estão em ordem crescente de dificuldade, no entanto isso não implica que o estudante deve passar pelo primeiro com vistas a atingir o segundo e assim sucessivamente. É possível que o estudante desenvolva tarefas que envolvam algum tipo de pensamento matemático mais elaborado sem a necessidade de proficiência em aritmética. Estas classificações fazem parte do processo chamado ***matematização***, do qual os estudantes se utilizam para resolver problemas cotidianos. De acordo com o PISA-OECD,

> Matematização pode ser dividida em cinco etapas:
> - Começar com um problema na realidade.
> - Organizá-lo de acordo com conceitos matemáticos e identificar a matemática relevante.
> - Gradualmente afastar a realidade para transformar o problema cotidiano em um problema matemático que representam fielmente a situação.
> - Resolver o problema matemático.
> - Dar sentido à solução matemática em termos da situação real (PISA-OECD, 2009, pág. 98-99, tradução nossa)[11].

[11] Do inglês *PISA-OCDE (2009) Mathematisation can be broken up into five steps:*
- *Starting with a problem in reality.*
- *Organising it according to mathematical concepts and identifying the relevant mathematics.*

A terceira dimensão diz respeito às *situações* nas quais a Matemática é utilizada. Os documentos do PISA-OECD apontam quatro situações: *pessoais*, *educacionais* ou *ocupacionais*, *públicas* (referem-se à comunidade local, sociedade) e *científicas* (PISA-OECD, 2009, pág. 98, tradução nossa).

Diante do exposto, chamou-nos a atenção a segunda dimensão da Matemática, que trata dos processos matemáticos, e, em especial, o processo denominado matematização, pois a mesma expressão era utilizada também nos textos da Educação Matemática Realística. Assim, tínhamos o nosso problema de pesquisa – *como é apresentado e como se dá o processo de matematização nos autores estudados*. E, consequentemente, o nosso objetivo para esta pesquisa – *compreender como é apresentado e como se dá o processo de matematização nos autores estudados*.

Este objetivo envolve:

- identificar os elementos que constituem um processo de matematização ou estão subjacentes a ele;
- descrever, na perspectiva de implementar a matematização em sala de aula, o papel do professor, do aluno e a dinâmica da aula;
- apresentar teoricamente a matematização – concepção, funções, propósitos, características.

Com este estudo, pretendemos contribuir com as pesquisas[12] do grupo GEPEMA, bem como produzir um material em língua portuguesa a respeito desse tema, tendo em vista que a maioria dos trabalhos publicados tratando desse assunto está em língua inglesa.

E, com o intuito de cumprir o objetivo do trabalho, nesta pesquisa buscou-se por meio da Análise de Conteúdo (BARDIN, 1977) investigar nas obras selecionadas informações que permitissem dar respostas aos objetivos propostos. Para tanto, este trabalho foi organizado da seguinte forma:

- *Gradually trimming away the reality to transform the real-world problem into a mathematical problem that faithfully represents the situation.*
- *Solving the mathematical problem.*
- *Making sense of the mathematical solution in terms of the real situation.*

[12] Pesquisas em andamento e futuras.

- *Da escola à pesquisa*
- *Um problema se constitui*
- *Um modo de fazer*
- *Contextualizando*
- *A respeito da matematização*
- *Matematizando*
- *Algumas considerações*

Com esta investigação, esperamos elucidar alguns aspectos dessa abordagem para o ensino da Matemática denominada Educação Matemática Realística bem como tomar seus resultados como mote para pesquisas posteriores, sejam estas em âmbito teórico ou prático.

3 UM MODO DE FAZER

Esta investigação é de caráter qualitativo[13] de cunho interpretativo. Garnica (2004) caracteriza pesquisa qualitativa como aquela que possui as seguintes características:

> (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (GARNICA, 2004, p. 86).

Este estudo foi realizado com base na Análise de Conteúdo tomada

> [...] como um *conjunto de técnicas de análise das comunicações, que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens.* [...] A intenção da análise de conteúdo é *a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção (ou, eventualmente, de recepção), relativamente a "outras coisas"* (BARDIN, 1977, p.38) (grifo do autor).

As obras escolhidas para o estudo formam o que a Análise de Conteúdo chama de *corpus*. "O *corpus* é o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos" (BARDIN, 1977, p. 96). Tomamos como base a Análise de Conteúdo pelo fato de ter seus procedimentos aceitos e validados, de modo que seguir alguns pressupostos por Bardin apresentados nos pareceu seguro no âmbito acadêmico.

Segundo Bardin (2004), as diferentes fases da Análise de Conteúdo se organizam em torno de três polos: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Como parte da fase da pré-análise, este trabalho se inicia com a composição de um inventário a fim de fazer um levantamento, nas obras pré-selecionadas, do tema de interesse. As obras utilizadas nessa primeira etapa do

---

[13] Apesar de estar mencionado no primeiro parágrafo do capítulo referente aos procedimentos metodológicos que esta pesquisa é do tipo qualitativa, somente pudemos observar as características apresentadas por Garnica (2004) nessa pesquisa ao término do trabalho, durante nossas reflexões.

trabalho foram De Lange (1987, 1999), Drijvers (2000), Freudenthal (1968, 1971, 1973, 1985, 1991), Gravemeijer (2005), Gravemeijer e Doorman (1999), Gravemeijer e Terwel (2000), Nelissen (1999), PISA-OECD (2003, 2006, 2009), Treffers (1987) e van den Heuvel-Panhuizen (1996, 1998).

A composição do inventário consistiu de duas partes: a *primeira leitura* e a *busca por expressões* relacionadas ao tema. Na primeira leitura, segundo Bardin (1977), é que o pesquisador deve se permitir ter impressões sobre o *corpus* do trabalho. E, em seguida, foram buscadas expressões como *matematização, matematização horizontal, matematização vertical, matematização progressiva e matematização conceitual* nessas obras. Após essa busca, foram selecionados os trechos em que as expressões apareciam, que foram recortados e organizados em um quadro[14] de modo a facilitar posteriores leituras.

Com esse inventário finalizado, pudemos trabalhar no estabelecimento de relações entre os recortes feitos na etapa anterior, isto é, procuramos pelas ideias comuns, semelhantes ou que se contrapunham na tentativa de montar agrupamentos com estes recortes.

Nesse momento, já tínhamos algum material a partir do qual realmente pudéssemos começar os estudos. Outros materiais ainda seriam acrescentados aos anteriores com o intuito de ampliarmos nosso campo de busca e, também, nosso olhar a respeito do tema a partir de diversos pontos de vista.

Como nosso interesse estava direcionado aos aspectos referentes a matematização dentro da perspectiva da Educação Matemática Realística, novos materiais adicionados (DOORMAN, 2002; DRIJVERS, 2003; FOSNOT, 2006; GRAVEMEIJER, 1994, 1999, 2002, 2004, 2007; KEISOGLOU; SPYROU, 2003; MOSVOLD, 2003; STREEFLAND, 1991; TREFFERS, GOFFREE, 1985; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, 2003, 2005, 2010[15]) foram incorporados ao nosso *corpus*, e passaram pelo mesmo processo que os anteriores, a *primeira leitura* e a *busca por expressões* relacionadas ao tema. A partir desse momento, pudemos iniciar a segunda fase do trabalho, a exploração do material.

[14] Os quadros mencionados nesse capítulo não foram apresentados no corpo do texto, somente serviram de base para os estudos apresentados.

[15] Os trabalhos citados fizeram parte dos quadros montados para exploração do material mencionada adiante, no entanto, os outros trabalhos estudados que não fizeram parte dos quadros estão apresentados somente nas referências ao final do trabalho.

Nessa fase, para efeito de organização, decidimos montar três quadros com o objetivo de encaminhar o trabalho para o que se pretendia. Fundamentados nos recortes feitos nos textos selecionados, três novos quadros foram montados. Eles foram divididos entre os seguintes assuntos: *aspectos teóricos da matematização*, *tarefas que propiciavam matematização* e *ambiente de sala de aula que possibilitasse matematizar*. Esses assuntos foram elaborados com base nos objetivos específicos do trabalho.

Alguns exemplos de trabalhos realizados por outros pesquisadores fizeram parte destes quadros. Montar os quadros baseados nestes assuntos tinha por objetivo organizar os dados de modo a facilitar o estudo proposto.

Dentre os autores mencionados, alguns não tiveram seus trabalhos citados direta ou indiretamente nesta dissertação, no entanto foram importantes no decorrer do estudo para elaborarmos nossas próprias ideias.

Na tentativa de extrair o máximo de informações dos materiais selecionados e poder observar outras relações, decidimos organizar as citações nos quadros em ordem cronológica, o que nos permitiu perceber mudanças no olhar dos autores, no que se refere, ao tema com o passar dos anos. A montagem desses últimos quadros foi essencial para que pudéssemos olhar com mais clareza para os dados de modo a conseguir responder aos objetivos da pesquisa.

Com os quadros montados, pudemos nos dedicar a explorar esse material. Nessa etapa do trabalho, algumas questões sempre estavam em mente, como quais elementos constituem um processo de matematização ou estão subjacentes a ele, qual o papel do aluno, do professor e qual deve ser a dinâmica da aula de modo que o aluno matematize. Estas foram as questões-guia do trabalho.

Durante toda a fase de inferência, tínhamos em mente a tentativa de elaborar nossa própria definição de matematização, descrever as atividades relacionadas, estabelecer uma relação entre todas essas características e a abordagem RME como um todo. Nessa etapa do trabalho, na tentativa de organizar as ideias a partir das informações obtidas dos materiais, fizemos organogramas[16] estabelecendo relações entre os aspectos estudados. Nesse momento, pudemos perceber o quão inter-relacionados estão os pressupostos teóricos de uma abordagem para o ensino.

---

[16] Um deles inclusive é apresentado a seguir, no capítulo Matematizando.

Todo o trabalho desenvolvido durante a revisão bibliográfica, recorte dos trechos nos textos, análise dos dados e montagem dos quadros e organogramas foi essencial para a formação de uma concepção de matematização, para a descrição de um ambiente escolar que permita ao estudante matematizar bem como para explicitar características da atividade de matematizar na perspectiva da Educação Matemática Realística de modo que o texto do presente trabalho refletisse nossas observações baseadas em nossa análise.

4 CONTEXTUALIZANDO

O nosso problema de pesquisa se constitui a partir de um estudo a respeito dos pressupostos teóricos que sustentam a avaliação do PISA – Educação Matemática Realística. Nesta seção apresentaremos as principais características da RME com o objetivo de ambientar o leitor ao contexto da pesquisa.

Com base nas ideias de Hans Freudenthal[17], a abordagem Educação Matemática Realística foi desenvolvida nos anos 1960 no IOWO (Institute for Development of Mathematics Education), atual Instituto Freudenthal, na Holanda (Freudenthal, 1991; van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Uma característica da RME diz respeito a como a matemática pode ser aprendida. Para Freudenthal, Matemática é uma atividade humana (FREUDENTHAL, 1991) e deve ser aprendida pelo "fazer". Essa abordagem para o ensino de Matemática surge em oposição ao Movimento da Matemática Moderna[18] com uma proposta na qual os estudantes são responsáveis pela construção do próprio conhecimento matemático sob a supervisão de um professor.

Nessa perspectiva, os estudantes devem elaborar "pedaços" da Matemática por eles mesmos. É fundamental que seja dada aos estudantes a oportunidade de percorrer caminhos semelhantes aos percorridos pelos matemáticos ao desenvolver a Matemática tal como a conhecemos hoje. Este caminho deve ser feito sob a orientação de um professor, de modo que o conhecimento matemático formal seja desenvolvido a partir do conhecimento informal dos estudantes (TREFFERS, 1991).

Proporcionar ambientes de aprendizagem que possibilitem aos alunos trabalhar com vistas a elaborar conceitos matemáticos passa a ser objetivo da Educação Matemática Realística. Diante disso, alguns aspectos são considerados essenciais no planejamento pedagógico, os chamados princípios heurísticos[19], que caracterizam a RME como abordagem para o ensino de Matemática.

---

[17] Hans Freudenthal (1905-1990), matemático alemão que viveu na Holanda, considerado o precursor da Educação Matemática Realística.

[18] Movimento da Matemática Moderna foi uma abordagem para o ensino de Matemática numa perspectiva estruturalista. Grande parte dos materiais publicados disponíveis na década de 50 eram escritos nessa perspectiva.

[19] Os princípios heurísticos da RME podem ser entendidos como as ideias basilares dessa perspectiva.

4.1 PRINCÍPIOS HEURÍSTICOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

Na perspectiva da Educação Matemática Realística, de acordo com Gravemeijer (1994), há três princípios heurísticos a serem considerados no planejamento pedagógico: reinvenção guiada por meio da matematização progressiva, fenomenologia didática e modelos emergentes. Apresentaremos a seguir um detalhamento de cada um deles.

4.1.1 Reinvenção Guiada por Meio da Matematização Progressiva

Do ponto de vista da RME, todos os alunos são capazes de aprender Matemática, em diferentes níveis, e o objetivo não é criar um ambiente no qual o professor tem função de transmissor de conhecimento e o aluno, de receptor; tampouco desenvolver estratégias pedagógicas que ajudem os alunos a "receber" conhecimento matemático pronto e acabado, mas estruturar, monitorar, ajustar atividades[20] por meio das quais os estudantes se engajem na elaboração do seu próprio conhecimento matemático (GRAVEMEIJER, 1997).

Segundo Freudenthal (1971 apud VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 11), Matemática "pode ser mais bem aprendida pelo fazer" e é por meio da "reinvenção guiada" que isto pode ocorrer (FREUDENTHAL, 1991).

De acordo com Freudenthal,

> crianças deveriam repetir o processo de aprendizagem da humanidade, não como isso de fato ocorreu, mas, sim, como ele teria sido feito se as pessoas no passado tivessem conhecido um pouco mais do que nós sabemos agora (FREUDENTHAL, 1991, p.48, tradução nossa)[21].

Na perspectiva da reinvenção guiada, em vez de apresentar as ferramentas e os conceitos matemáticos prontos e acabados, o que Freudenthal (1971) chamou de *inversão anti-didática,* dá-se a oportunidade aos estudantes de "reinventá-las", e isso de acordo com suas necessidades e nível de compreensão,

---

[20] De acordo com Gravemeijer (1994), atividade pode ser entendida como maneira de trabalhar.

[21] Do inglês "*Children should repeat the learning process of mankind, not as it factually took place but rather as it would have done if people in the past had known a bit more of what we know now*".

tornando os alunos responsáveis também pela sua aprendizagem, atribuindo-lhes o papel de protagonistas no processo de aprendizagem.

O foco principal da “reinvenção guiada” não está nos objetos matemáticos, isto é, no produto, mas na atividade, no realizar.

Freudenthal argumenta que a “reinvenção guiada” pode facilitar a aprendizagem. Ele considera que se aprende mais e melhor como resultado de sua própria atividade, ou seja, quando o aluno é responsável pela elaboração do seu próprio conhecimento. Ele também considera que a aprendizagem pela reinvenção guiada pode ser motivadora e que o processo de descoberta pode ser divertido, e, por fim, que isso nutre uma atitude de experimentação matemática como uma atividade humana (FREUDENTHAL, 1991).

4.1.2 Fenomenologia Didática

Como forma de combater o que chamou de inversão anti-didática, Freudenthal “apresenta” a fenomenologia[22] didática. Isto quer dizer que a aprendizagem matemática inicia-se a partir de fenômenos que são significativos para os estudantes, que precisam ser organizados e que oportunizem o processo de aprendizagem. Isto é, referem-se à fenomenologia didática situações nas quais tópicos matemáticos devem ser investigados e, de acordo com Treffers e Goffree (1985), o trabalho com tais situações deve cumprir as funções:

- formação de conceitos;
- formação de modelos (fornecer uma base sólida para o aprendizado das operações formais, procedimentos, notações e regras em conjunto com outros modelos que sustentam o pensamento);
- aplicabilidade (utilização da realidade como fonte e campo de aplicação);
- prática[23] (para exercitar habilidades específicas dos estudantes em situações aplicadas).

[22] Freudenthal em seu livro **Didactical phenomelogy of mathematical structures** (pág. 28) explica que o termo fenomenologia não tem relação com os trabalhos de Hegel, Husserl e Heidegger e apresenta as ideias dos *noúmenos* e *fenômenos* colocando que os objetos matemáticos são noúmenos e trabalhar com objetos matemáticos são fenômenos. E mais, que as ideias, estruturas e conceitos matemáticos servem para organizar os fenômenos, podendo estes ser do mundo concreto ou da matemática.

[23] No sentido de praticar, exercitar.

De acordo com Gravemeijer (1999), o objetivo da investigação fenomenológica é encontrar situações-problema para as quais uma abordagem específica pode ser generalizada e sirva de base para o desenvolvimento do processo de matematização.

Uma implicação da fenomenologia didática, no que se refere ao *designer* instrucional é: aos estudantes devem ser proporcionados problemas extraídos de situações cujos fenômenos sejam, como disse Gravemeijer (1999), realísticos. A utilização da expressão "realística" diz respeito ao contexto no qual um problema está situado, que é verdadeiro[24] para os estudantes, de modo que possam atuar de forma inteligente dentro desse mesmo contexto. Com isso, problemas de contexto na RME não necessariamente têm que lidar com situações autênticas do dia a dia, mesmo porque um objetivo é que, eventualmente, a própria Matemática possa constituir contextos realísticos para os alunos.

4.1.3 Modelos Emergentes

Gravemeijer (2005), em seu artigo *What makes mathematics so difficult, and what can we do about it?,* questiona como as pessoas aprendem Matemática e afirma que a resposta para essa questão pode ser dada sob diversas perspectivas. De acordo com o que é comumente feito nas escolas, aprender é visto como o estabelecimento entre o que já se sabe e o que se precisa saber e, no caso da Matemática, o que se tem a aprender é um corpo de conhecimentos abstratos e formais.

Não é raro ouvir que pessoas têm dificuldade para aprender Matemática. Para Gravemeijer (2005), o que torna a Matemática difícil de ser aprendida está na concepção de aprendizagem do *fazer conexões* entre o que se sabe e o que se precisa saber pelo fato de existir uma grande lacuna entre o conhecimento pessoal do estudante e o conhecimento matemático formal o que pode causar uma falha de comunicação entre estudantes e professores no momento da aula. Essa perspectiva de aprendizagem vai de encontro ao proposto por Freudenthal no que diz respeito a aprender Matemática fazendo.

[24] Verdadeiro no sentido de ser passível de experimentação por parte do estudante, podendo ser uma situação imaginária ou real.

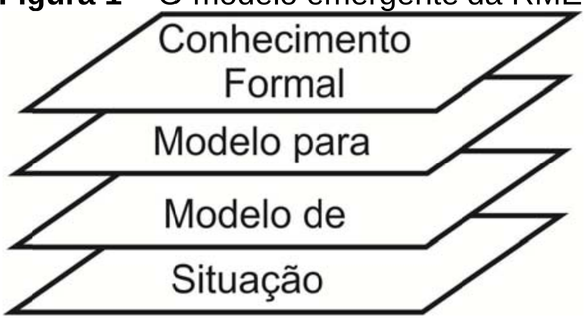
Diante disso, Gravemeijer (1999) faz uma distinção entre ***sistema***[25] e ***modelo***. Para ele, sistemas são apresentados como modelos pré-existentes nas teorias da Educação Matemática que tomam a Matemática como um produto, enquanto os modelos surgem a partir da própria atividade dos alunos na RME.

Como alternativa, Gravemeijer aponta para o fato de que os modelos devem servir para dar suporte à elaboração dos conhecimentos matemáticos a partir das ideias dos alunos, proporcionando ao estudante desenvolver seu próprio potencial ao tentar trabalhar com seus próprios modelos.

Com relação a isso, destaca-se outro princípio da RME, conhecido como ***modelos emergentes*** (Gravemeijer, 1994). Esse princípio tem papel importante na relação existente entre o conhecimento informal e o formal e também numa possível evolução de um para o outro. É fundamental que os alunos desenvolvam seus próprios modelos enquanto resolvem problemas. No início, espera-se que desenvolvam modelos que lhes são familiares. Esses modelos passam por um processo de formalização e generalização, transição que Gravemeijer (1994) denominou ***modelo de*** para ***modelo para***.

Na RME, os modelos emergem das soluções informais dos alunos. Ao resolver problemas, seu papel é, inicialmente, o de servir como base para resolver uma situação específica. Quando esse modelo não depende mais do problema em si, mas em especial de suas características matemáticas, assume um caráter mais geral, tornando-se mais importante como base para o pensamento matemático do que como um modo de representar uma situação-problema qualquer (Gravemeijer, 1999). A figura a seguir representa o exposto.

Figura 1 – O modelo emergente da RME



Fonte: (Gravemeijer, 1994)

[25] Tradução adaptada de termo *embodiment.* Tradução literal seria *personificação***,** que não consideramos retratar a ideia.

Cada um dos níveis apresentados na figura representa uma etapa no processo de desenvolvimento de novos conceitos matemáticos e podem ser explicitados da seguinte forma:

- nível de situação: no qual o conteúdo matemático, conhecimento e estratégias são utilizados unicamente dentro do contexto da situação**;**
- nível referencial: no qual estratégias e procedimentos se referem à situação descrita no problema e modelos são desenvolvidos para resolvê-la, são os chamados **modelos de**;
- nível geral: no qual estratégias e procedimentos extrapolam o contexto, com isso, os modelos também representam outras situações, são os chamados **modelos para**;
- nível formal: no qual se trabalha com procedimentos e notações convencionais, formalizados.

Vale destacar que o passar de um nível para outro com vistas ao aprofundamento matemático é diferente para cada aluno. A Matemática está disponível e é acessível a todos, cada um em seu nível e em seu tempo. O importante é que, independentemente desse nível, seja possibilitado ao aluno passar para a próxima etapa, conforme proposto por Gravemeijer (2005).

Os três princípios heurísticos (fenomenologia didática, reinvenção guiada por meio da matematização progressiva e modelos emergentes), ou ideias basilares, deram origem a seis princípios que guiam o trabalho desenvolvido na perspectiva de implementar a Educação Matemática Realística em sala de aula. Ferreira (2013) apresenta um quadro com um resumo destes princípios.

Quadro 1 – Resumo dos Princípios da RME

Princípios	Características
(1) Da *Atividade*	- refere-se à interpretação da matemática como atividade humana (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - aprender é uma atividade construtiva (NES, 2009); - as produções dos estudantes são utilizadas para a construção de conceitos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000)
(2) Da *Realidade*	- a RME tem a função de tornar os alunos capazes de aplicar matemática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - o processo de matematização ocorre a partir da exploração de contextos ricos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - fenômenos da realidade devem ser organizados por meio da

	matemática (NES, 2009); - é importante o uso de contextos reais que sejam significativos e naturais ao aluno como ponto de partida para a sua aprendizagem (WIDJAJA; HECK, 2003).
(3) De *Níveis*	- os alunos passam vários níveis de compreensão (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - começam de seus procedimentos informais e por meio da matematização progressiva e esquematizações avançam para a construção de modelos mais formais (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - os modelos têm de mudar de “modelo de” a “modelo para” (STREEFLAND, 1991).
(4) Do *Entrelaçamento*	- domínios matemáticos, como geometria, número, medição e manipulação de dados não são considerados capítulos curriculares isolados, mas fortemente integrados (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - os alunos devem desenvolver uma visão integrada da matemática, bem como flexibilidade para se conectar a diferentes subdomínios e / ou a outras disciplinas (WIDJAJA; HECK, 2003); - a resolução de problemas de contexto ricos significa muitas vezes que se tem de aplicar uma ampla gama de ferramentas matemáticas e entendimentos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000); - a força do princípio do entrelaçamento é que traz coerência para o currículo. Este princípio refere-se não só aos diferentes domínios de matemática, mas também podem ser encontradas dentro deles (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).
(5) Da *Interatividade*	- a aprendizagem matemática não é apenas uma atividade pessoal, mas também uma atividade social (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - os alunos devem ter oportunidades para compartilhar suas estratégias e invenções com outros alunos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - a interação entre alunos e professores é uma parte essencial na RME porque a discussão e a colaboração oportunizam a reflexão sobre o trabalho (WIDJAJA; HECK, 2003).
(6) De *Orientação*	- os estudantes devem contar com uma oportunidade “guiada” para “reinventar” a matemática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - o ensino e os programas devem basear-se num conjunto coerente de trajetória de ensino-aprendizagem a longo prazo (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010); - os alunos precisam de espaço para construir conhecimentos matemáticos e ferramentas por si só. Para alcançar isso, os professores têm de proporcionar aos alunos um ambiente de aprendizagem em que este processo de construção possa surgirxxiii (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).

Fonte: Ferreira (2013, p. 38)

A matematização, cujo conceito é objetivo do trabalho compreender, permeia esses seis princípios. Não pretendemos discuti-lo baseado nesses princípios, no entanto compreendê-los torna mais rica a análise. A seguir, nossa abordagem para o tema.

5 SOBRE MATEMATIZAÇÃO

Quando você se deparar com uma expressão desconhecida e o dicionário não o satisfizer. Quando você buscar por referências e ainda não ficar satisfeito. Estes são fortes indícios de que pode ter encontrado sua pesquisa de mestrado!

Com as nossas premissas apresentadas no capítulo 2, a maneira como a pesquisa foi planejada e desenvolvida, apresentada no capítulo 3 e o ambiente em que se deu a pesquisa, isto é, os trabalhos dos autores/pesquisadores da RME, mostrado no capítulo 4, podemos iniciar nossa análise/discussão a respeito do tema de interesse, a ***matematização***.

Ao nos deparar pela primeira vez com a expressão ***mathematization*** busquei seu significado em três dicionários de língua inglesa. Em apenas dois havia registro do termo[26]. As acepções encontradas eram muito semelhantes. De acordo com *Free Online English Dictionary*[27], *mathematize* refere-se a “reduzir a uma formula matemática ou a um problema matemático com termos puramente matemáticos” (tradução nossa). Segundo *The Free Dictionary*[28], *mathematize* diz repeito a “reduzir a uma fórmula matemática ou a um problema matemático”. Também foi feita uma busca em dicionários de língua portuguesa e alguns significados foram encontrados. De acordo com Dicio[29], matematização refere-se a “redução à forma matemática” e, de acordo com Priberam[30], matematização refere-se a “ação de matematizar” e, matematizar significa “introduzir num domínio os métodos matemáticos (leis, conceitos, formalização)”. Honestamente, nenhum dos significados encontrados nos deixou satisfeito, por dois motivos. Primeiro, por parecerem “pobres” e, mais importante, por parecerem não retratar o que os textos a respeito da Educação Matemática Realística estavam querendo dizer[31]. Vejamos então como autores da RME tratam dessa expressão.

Freudenthal, em 1968, ao fazer a palestra intitulada "Por que ensinar matemática de modo a ser útil", nos diz que “os seres humanos têm de aprender não

---

[26] O dicionário de língua inglesa pesquisado em que não havia menção à expressão foi o *Cambridge Free English Dicitionary and Thesaurus* disponível no site www.dictionary.cambridge.org.
[27] www.dictionary.com
[28] www.thefreedictionary.com
[29] http://www.dicio.com.br/matematizacao/
[30] http://www.priberam.pt/dlpo/matematiza%C3%A7%C3%A3o
[31] Consideramos relevante mencionar no corpo do texto a busca pelas expressões de interesse no dicionário, ainda que não tenha sido relevante para o trabalho final, pelo fato de que, a partir dessa busca, pudemos direcionar o olhar para o tema.

é a Matemática como um sistema fechado, mas sim como uma atividade, processo de matematização da realidade e, se possível ainda, da matematização da matemática." (Freudenthal, 1968, p. 7). De acordo com Gravemeijer e Terwel (2000, pág. 781, tradução nossa)[32],

> [...] Freudenthal usou a palavra "matematização" em um sentido amplo: era uma forma de organização que também incorporou questões matemáticas. Ao escolher a palavra "organização", Freudenthal também indicou que, para ele, matematização não era apenas uma tradução para um sistema de símbolos pré-fabricados. Em vez disso, uma forma de simbolizar pode surgir no processo de organização do assunto. Foi a atividade de organização em si o centro da concepção de Freudenthal.

Segundo Freudenthal (1971), a principal atividade desenvolvida na Educação Matemática Realística refere-se a

> uma atividade de resolver problemas, de procurar problemas, e também uma atividade de organização de um assunto. Esta pode ser uma questão de realidade, a qual tem de ser organizada de acordo com padrões matemáticos se tiver de ser resolvida. Também pode ser uma questão matemática, resultados novos ou velhos, de produção própria ou de outros, que têm de ser organizados de acordo com novas ideias, para ser mais bem entendida, em um contexto mais amplo ou por uma abordagem axiomática (FREUDENTHAL, 1971, pág. 413-414, tradução nossa)[33].

Freudenthal chamou esta atividade de organização de *matematizar*.

Ao encontro do exposto por Freudenthal, Treffers (1987) nos diz que é por meio da resolução de problemas contextuais, realísticos[34], que os estudantes aprendem a *matematizar* tais problemas e a esse processo ele também denominou ***matematização***. Aqui percebemos outra definição para a (ou utilização da)

---

[32] Do inglês "*Freudenthal used the word ` mathematizing' in a broad sense: it was a form of organizing that also incorporated mathematical matter. By choosing the word `organizing' , Freudenthal also indicated that, for him, mathematizing was not just a translation into a ready-made symbol system. Instead, a way of symbolizing might emerge in the process of organizing the subject matter. It was the organizing activity itself that was central to Freudenthal's conception".*

[33] Do inglês "*It is an activity of solving problems, of looking for problems, but it is also an activity of organizing a subject matter. This can be a matter from reality which has to be organized according to mathematical patterns if problems from reality have to be solved. It can also be a mathematical matter, new or old results, of your own or of others, which have to be organized according to new ideas, to be better understood, in a broader context, or by an axiomatic approach".*

[34] Realístico é entendido como aquilo que pode ser imaginado pelo aluno.

expressão matematização que, de certa forma, é mais específica do que a apresentada por Freudenthal.

Referente a isso, Treffers e De Lange têm suas próprias definições apresentadas no quadro a seguir.

Quadro 2 – Definição para *matematização com ênfase na atividade de organização* apresentada pelos autores estudados

Matematização	TREFFERS (1987 p.77)	Matematização é uma atividade organizadora. Refere-se à essência da atividade matemática para o segmento que atravessa toda a educação matemática orientada para a aquisição de conhecimento factual, a aprendizagem de conceitos, a obtenção de competências e o uso da linguagem e as outras habilidades de organização na resolução de problemas que são, ou não, colocados em um contexto matemático.
	DE LANGE (1987, p.43)	Matematização é uma atividade de organização e estruturação, segundo a qual adquire-se conhecimentos e habilidades usadas para descobrir regularidades, relações e estruturas desconhecidas.

O que se observa nas diferentes definições apresentadas no **Quadro 2** é uma semelhança com o apresentado por Freudenthal (1971), o que reforça a ideia da matematização como princípio básico da RME. Do exposto, chamou-nos a atenção a ênfase na *atividade*, que se refere ao trabalho do aluno enquanto sujeito que elabora sua própria matemática, e a ideia de *organização* por meio da utilização de ferramentas matemáticas se mostra forte em todos os autores.

É possível observar que as definições apresentadas por Treffers (1987) e De Lange (1987) incluem as expressões “aquisição de conhecimento” e “adquire-se conhecimento”, respectivamente, o que nos dá indícios de que uma ideia subjacente ao processo de matematização é a de que o conhecimento já existe e que o aluno simplesmente se apropria de tal, ou, que não houve preocupação com a linguagem. As publicações do Quadro 2 são de 1987.

Em alguns autores, porém, podemos observar outros aspectos sendo ressaltados, tais como o que está envolvido no processo de matematização, algumas características desse processo e como isso se relaciona com a Matemática em si. No quadro a seguir, outras definições são apresentadas.

Quadro 3 – Definição para *matematização com ênfase nas características deste processo* apresentada pelos autores estudados

Matematização	GRAVEMEIJER; DOORMAN (1999, p. 116)	[...] a principal atividade matemática é a "matematização", que significa organizar a partir de uma perspectiva matemática.
	NELISSEN (1999)	TRECHO 1 Matematização é vista como uma atividade construtiva, interativa e reflexiva. TRECHO 2 O processo de matematização é caracterizado pelo uso de modelos. Alguns exemplos são os esquemas, tabelas, diagramas e visualizações. Procurar modelos - inicialmente os mais simples - e trabalhar com eles produz as primeiras abstrações. As crianças ainda aprendem a aplicar a redução e esquematização, levando a um maior nível de formalização. TRECHO 3 Outras duas características importantes do processo de matematização é que ela é provocada tanto pela própria ação construtiva da criança quanto pelas reflexões da criança sobre essa ação.
	GRAVEMEIJER; TERWEL (2000, p. 781)	Matematização, literalmente, significa “fazer mais matemática”.
	FOSNOT, et. al. (2006)	Esta matematização envolve a criação de relações quantificáveis e espaciais, a construção de padrões e transformações, a prova deles como generalizações e modelos e a busca por elegância da solução.

É de notar que essas publicações são de 1999 em diante. Estes autores tomam a matematização sob uma perspectiva do fazer. Expressões como “atividade construtiva”, “fazer mais matemática” e “criações” dizem respeito à elaboração do conhecimento pelo aluno. Ao olharmos para as definições apresentadas nos Quadros 2 e 3, podemos apontar uma diferença de terminologia para definir o mesmo conceito. Enquanto os primeiros autores se expressavam em termos de *aquisição*, estes falam em termos de *construção*, o que revela um desenvolvimento do conceito em termos de adequação com o que a RME vem fazendo no que se refere ao ensino de Matemática.

De acordo com Mosvold, “a ênfase no ensino da matemática (conforme proposto pela RME) deve ser a atividade” e “esse processo de matematização é a própria forma com a qual o estudante **reinventa** ou **recria** as teorias matemáticas” (MOSVOLD, 2003, p. 8)(grifo do autor). Ao encontro disso, van den Heuvel-Panhuizen nos diz que,

> segundo Freudenthal, a matemática deve estar conectada à realidade, ficar perto das crianças e ser relevante para a sociedade, para ser um valor humano. Em vez de ver a matemática como assunto que tem de ser transmitida, Freudenthal ressaltou a ideia de matemática como uma atividade humana. A educação deve dar aos alunos uma oportunidade "guiada" para "**re-inventar**" a matemática fazendo matemática (van den HEUVEL-PANHUIZEN,1998, p.3, tradução nossa)[35].

É legítimo pensar em um ensino cujo ponto de partida são problemas realísticos, pois, mesmo que poucos estudantes se tornem matemáticos profissionais, muitos deles se dedicarão a áreas como Medicina, Economia, Ciências Sociais, dentre outras. Neste sentido, problemas extraídos da realidade dos estudantes poderiam oferecer maiores possibilidades de matematização.

Nessa direção, Treffers (1987) distingue duas componentes na matematização: a *matematização horizontal*, que consiste em uma atividade de esquematização, uma forma de tratamento que torna possível lidar com o problema por meios matemáticos. Ao passo que, quando é possível lidar com esse problema a partir de meios estritamente matemáticos, trabalhar com as soluções do problema, a

---

[35] Do inglês “*According to him (Freudenthal), mathematics must be connected to reality, stay close to children and be relevant to society, in order to be of human value. Instead of seeing mathematics as subject matter that has to be transmitted, Freudenthal stressed the idea of mathematics as a human activity. Education should give students the “guided” opportunity to “re-invent” mathematics by doing it”.*

generalização das soluções e a maior formalização, essa atividade foi denominada *matematização vertical*.

Com relação a isso, Freudenthal, apesar de também tratar da distinção da matematização proposta por Treffers (1987) em componentes horizontal e vertical, em um primeiro momento se mostrou resistente a isso. Para Freudenthal (1991), não é possível fazer uma distinção clara entre as duas, isto é, não há um limite evidente entre a matematização horizontal e a vertical pelo fato de serem fortemente relacionadas. De acordo com Freudenthal, as duas formas de matematizar são de igual valor e importância, e a matematização deve envolver tanto assuntos relacionados à Matemática pura quanto à aplicada. Para ele, aos estudantes devia ser proporcionado um matematizar dentro dos mundos real e dos símbolos.

Freudenthal (1991, p. 41-42) caracteriza esta distinção como segue:

> Matematização horizontal conduz o mundo da vida para o mundo dos símbolos. No mundo da vida se vive, age (e sofre); no outro, símbolos são formados, reformulados, e manipulados mecanicamente, conscientemente e refletivamente: esta é a matematização vertical. O mundo da vida é o que é experimentado como realidade (no sentido em que usei a palavra antes), como símbolo de um mundo no que diz respeito à abstração. Para ter certeza, as fronteiras desses mundos são vagamente marcadas. O mundo pode expandir e encolher de acordo com a necessidade.[36]

Com base nas ideias de Treffers, aspectos referentes à matematização horizontal e vertical foram discutidos também por outros autores, e o quadro a seguir apresenta algumas outras formulações para isto.

[36] Do inglês *"Horizontal mathematisation leads from the world of life to the world of symbols. In the world of life one lives, acts (and suffers); in the other one symbols are shaped, reshaped, and manipulated, mechanically, comprehendingly, reflectingly; this is vertical mathematisation. The world of life is what is experienced as reality (in the sense I used the word before), as is symbol world with regard to its abstraction. To be sure, the frontiers of these worlds are rather vaguely marked. The worlds can expand and shrink also at one another's expense".*

Quadro 4 – Trechos referentes a *matematização horizontal* e *vertical* retirados de textos de autores da RME

Adrian Treffers	**(TREFFERS, 1987, p. 71)** A tentativa de esquematizar o problema matematicamente é indicado pelo termo matematização "horizontal". [...] Em geral pode-se dizer que a matematização horizontal consiste de uma esquematização da área que torna possível atacar o problema por meios matemáticos. As atividades que se seguem e que estão relacionadas com o processo matemático, a solução do problema, a generalização da solução e a maior formalização, podem ser descritas como matematização "vertical". [...] Dividir a atividade matemática dentro destes dois elementos é uma operação artificial. Na realidade, a distinção é difícil de fazer, principalmente porque a esquematização e o processamento matemático estão intimamente relacionados. No entanto, esta distinção é significativa, se somente deixarmos claro que atividades como a construção, experimentação e classificação se encaixam bem no processo de matematização como simbolizar, generalizar e formalizar.
Koeno Gravemeijer	**(GRAVEMEIJER; DOORMAN, 1999, p. 116-117)** [...] Em relação a isto, Treffers (1987) discerne matematização horizontal e vertical. Matematização horizontal se refere ao processo de descrever um problema de contexto em termos matemáticos – e ser capaz de resolvê-lo com meios matemáticos. Matematização vertical refere-se a matematização da própria atividade matemática. Através da matematização vertical, o aluno atinge um nível superior de matemática.
	(Gravemeijer; Terwel, 2000, p.781-783) Elaborando a ideia de Freudenthal de matematização, Treffers (1987) fez uma distinção entre a matematização horizontal e vertical. O primeiro envolve a conversão de um problema contextual em um problema matemático, o último envolve tomar as questões matemáticas em um plano superior. Matematização vertical pode ser induzida pela configuração de problemas que admitem soluções em diferentes níveis de matemática. [...] Como Freudenthal indica, as fronteiras entre o que deve ser denotado como "matematização horizontal e vertical" "não são claras. O ponto crucial reside em que deve ser entendido como "realidade" e ele nos dá a seguinte elucidação: “Eu prefiro aplicar o termo realidade ao que o senso comum vivencia como real em um determinado estágio. A realidade é entendida como uma mistura de interpretação e experiência sensorial (sensual), o que implica que a matemática também pode se tornar parte da realidade de uma pessoa. Realidade e o que uma pessoa conta como o senso comum não são estáticos, mas crescem, e são afetados pelo processo de aprendizagem do indivíduo. Esta é também a forma como Freudenthal declara “*Mathematics starting at, and staying within, reality must be understood*”.
Marja van den Heuvel-Panhuizen	**(van den Heuvel-Panhuizen, 1998, p. 3)** Mais tarde, Treffers (1978, 1987) formulou a ideia de dois tipos de matematização explicitamente em um contexto educativo e os distinguiu em matematização "horizontal" e "vertical". Em termos gerais, estes dois tipos podem ser entendidos como segue. Na matematização horizontal, os alunos já possuem ferramentas matemáticas que podem ajudar a organizar e resolver um problema localizado em uma situação da vida real.

	Matematização vertical é o processo de reorganização dentro do próprio sistema matemático, como, por exemplo, encontrar atalhos e descobrir as ligações entre os conceitos e estratégias, e depois aplicar essas descobertas. Em suma, pode-se dizer - e aqui estou citando Freudenthal (1991) - "matematização horizontal envolve ir do mundo da vida para o mundo dos símbolos, enquanto matematização vertical envolve movimento dentro do mundo dos símbolos". Embora esta distinção pareça estar isenta de ambiguidade, não significa, como Freudenthal (ibid.) disse, que a diferença entre estes dois mundos seja bem clara. Freudenthal (ibid.) também salientou que estas duas formas de matematização são de igual valor. Além disso, há que ter em mente que matematização pode ocorrer em diferentes níveis de compreensão.
	(van den Heuvel-Panhuizen, 1996, p.10-11) Foi Treffers (1978, 1987a) que formulou, em um contexto educacional, a ideia de dois tipos de matematização, distinguindo-os entre matematização "horizontal" e "vertical". Em termos gerais, estas podem ser descritas como segue: na matematização horizontal, os alunos vêm (utilizam) com ferramentas matemáticas para ajudar a organizar e resolver um problema localizado em uma situação da vida real. Matematização vertical, por outro lado, é o processo que envolve reorganizações e operações dentro do sistema matemático em si. Ou, como Freudenthal (1991) colocou, matematização horizontal envolve ir do mundo da vida para o mundo dos símbolos, enquanto a matematização vertical significa mover-se dentro do mundo dos símbolos.

Fazer esta distinção tem por objetivo poder falar destas componentes separadamente, já que, segundo Freudenthal (1991), a fronteira entre elas não é clara e as duas têm igual importância no processo de matematização. Neste sentido, De Lange (1987, p.43, tradução nossa) nos traz as atividades que são realizadas quando se fala na componente horizontal,

- identificar a matemática específica em um contexto geral;
- esquematizar;
- formular e visualizar um problema de diferentes formas;
- descobrir relações;
- descobrir regularidades;
- reconhecer aspectos isomorfos em diferentes problemas;
- transferir um problema real em um problema matemático;
- transferir um problema real em um modelo matemático conhecido[37].

[37] Do inglês

- *"Identifying the specific mathematics in a general context;*
- *Schematizing*
- *Formulating and visualizing a problem in a different ways;*
- *Discovering relations;*
- *Discovering regularities;*
- *Recognizing isomorphic aspects in different problems;*
- *Transferring a real world problem to a mathematical problem;*
- *Transferring a real world problem to a known mathematical model".*

Quando o problema já se tornou “mais ou menos[38]” matemático, pode-se lidar com ele a partir de meios estritamente matemáticos. Com relação a isto, algumas atividades são descritas por De Lange (1987, p.44, tradução nossa), no âmbito da matematização vertical, tais como,

- representar uma relação em uma fórmula;
- provar regularidades;
- refinar e ajustar modelos;
- usar diferentes modelos;
- combinar e integrar modelos;
- formular um novo conceito matemático;
- generalizar[39].

Para De Lange, generalizar pode ser visto como o nível mais elevado de matematização vertical, e justifica dizendo que, quando o sujeito raciocina dentro de um modelo matemático, ele se sente impulsionado a construir novos modelos matemáticos que levam o modelo original a um nível mais abstrato (DE LANGE, 1987, p. 44). De acordo com De Lange,

> a divisão de grupos de atividades de matematização em duas componentes distintas é, de certo modo, arbitrária. [...] as duas componentes estão sempre interligadas. Mas a divisão em âmbito descritivo é útil, não apenas para descrever a matematização mais claramente por meio de exemplos concretos, mas também para distinguir diferentes metodologias/abordagens metodológicas" (DE LANGE, 1987, p.44)[40].

Além de se poder utilizar as ideias de matematização horizontal e vertical para oferecer aos estudantes possibilidades para elaborarem seu próprio conhecimento matemático da forma como propõe a RME, fazer essa distinção em duas componentes também permitiu a Treffers (1987) comparar as abordagens

---

[38] Expressão retirada do texto de De Lange (1987, p. 44).

[39] Do inglês

- *“Representing a relation in a formula;*
- *Proving regularities;*
- *Refining and adjusting models;*
- *Using different models;*
- *Combining and integrating models;*
- *Formulating a new mathematical concept;*
- *Generalizing”.*

[40] Do inglês “*a division of the cluster of activities of mathematization into two distinct components is rather arbitrary […] the two components are always intertwined. But a bipartition in a descriptive sense can be useful, not only to describe mathematization more clearly in concrete examples, but also to discriminate between different methodologies”.*

tradicionais para o ensino de Matemática e a Educação Matemática Realística no que se refere a matematização. Com relação a isso, Treffers (1987) apresenta o seguinte quadro.

Quadro 5 – Tipos de matematização enfatizadas em diferentes instruções matemáticas

Abordagem para a Educação Matemática	**Matematização**	
	Horizontal	**Vertical**
Mecanicista	**–**[41]	**–**
Empirista	**+**[42]	**–**
Estruturalista	**–**	**+**
Realística	**+**	**+**

Fonte: Treffers (1987, p. 251, tradução nossa).

Essa comparação mostra a ênfase de cada uma das abordagens no que se refere às componentes da matematização. Para exemplificar, na abordagem empirista, a matematização horizontal se mostra presente, isto é, os estudantes são confrontados com situações com as quais eles podem interagir e oferecer-lhes algum tratamento matemático, enquanto a componente vertical não se faz presente, de modo que, nessa perspectiva, o estudante pouco trabalha dentro de um corpo de conhecimento abstrato, no caso, a Matemática. Já a abordagem realística, na qual as duas componentes se fazem presentes, oferece aos estudantes a oportunidade de lidar com problemas realísticos, reais ou imagináveis, bem como trabalhar no aprofundamento do conhecimento matemático enquanto corpo de conhecimento abstrato.

Outros aspectos da matematização são apontados por Gravemeijer e Terwel (2000). De acordo com estes autores, matematização quer dizer “fazer mais matemática”. Para esclarecer o que significa “mais matemática”, eles apresentam algumas características da Matemática a serem trabalhadas: generalidade, certeza, exatidão e concisão. Tais características podem ser analisadas em termos das atividades relacionadas a cada uma delas (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000, p. 781, tradução e grifos nossos):

[41] O símbolo – significa falta da componente na abordagem.
[42] O símbolo + significa presença da componente na abordagem.

- **generalidade**: envolve atividades como classificar, estruturar e procurar por relações;
- **certeza**: envolve atividades como refletir, justificar, provar (usando uma abordagem sistemática, elaborando e testando conjecturas, etc.);
- **exatidão**: envolve atividades como modelar, simbolizar, definir (limitando interpretações e validade);
- **concisão**: envolve atividades como simbolizar e esquematizar (desenvolvimento de procedimentos padrão e notações)[43].

O estudante, ao realizar tais atividades, tem a possibilidade de desenvolver novos conceitos matemáticos, de modo que isso possa se estender a outras situações e esse processo de elaborar novos conhecimentos passa a ser natural. Com relação a isto, a RME nos traz a matematização conceitual.

5.1 MATEMATIZAÇÃO CONCEITUAL

Desenvolver conceitos matemáticos a partir de situações reais, de acordo com De Lange (1987), carrega consigo a necessidade de se refletir sobre o realizado e adequá-lo ao mundo real. Dito de outra forma, do mundo real são extraídas situações, que, após serem "matematizadas", devem ser levadas de volta ao mundo real. Esse processo – *mundo real → matematização → mundo real* – possibilita um lidar com a situação que pode tanto gerar um conhecimento matemático **novo** para o sujeito envolvido no processo quanto um **aprofundamento** matemático. Quando o sujeito elaborou algum conhecimento novo, e não simplesmente aprofundou seu conhecimento matemático já existente, a isso De Lange (1987, 1996) denominou *matematização conceitual*. O esquema a seguir ilustra o comentado.

---

[43] Do inglês
- *"for generality: generalizing (looking for analogies, classifying, structuring);*
- *for certainty: reflecting, justifying, proving (using a systematic approach, elaborating and testing conjectures, etc.);*
- *for exactness: modelling, symbolizing, defining (limiting interpretations and validity);*
- *for brevity: symbolizing and schematizing (developing standard procedures and notations)".*

Figura 2 – Esquema representando processo envolvido na matematização conceitual

Fonte: De Lange (1987)

Em um processo de reinvenção, no qual os conceitos matemáticos podem ser desenvolvidos pelos estudantes, problemas de contexto desempenham um papel fundamental. De acordo com Gravemeijer e Doorman (1999), problemas de contexto podem oferecer oportunidades para os alunos desenvolverem informalmente estratégias de solução que podem funcionar como ponto de apoio para invenções, formalização, generalização. Na Educação Matemática Realística, de modo geral, problemas de contexto são a base para a matematização progressiva[44]. “O designer instrucional tenta construir um conjunto de problemas de contexto que podem levar a uma série de processos de matematização horizontal e vertical que juntos resultam na reinvenção da matemática que se está buscando” (GRAVEMEIJER; DOORMAN, 1999, p.117). Assim, podemos pensar em termos de ensino.

No que diz respeito ao desenvolvimento de sequências de ensino na perspectiva da RME, Treffers (1987) estabeleceu cinco pilares para a matematização progressiva como uma representação de diretrizes para o desenvolvimento de uma teoria de instrução de domínio específico[45]. Em outras palavras, as sequências de ensino desenvolvidas nessa perspectiva (TREFFERS, 1987) devem contemplar:

- a *utilização de problemas contextuais*: esse tipo de problema tem papel de ponto de partida para o desenvolvimento da Matemática e também como

[44] O processo de matematização progressiva envolve tanto a componente vertical quanto a horizontal. É nesse processo que os estudantes constroem (novas) matemáticas, de acordo com Gravemeijer e Doorman (GRAVEMEIJER e DOORMAN, 1999, p.117).

[45] Domínio específico é utilizado como sinônimo de conteúdo matemático específico. Optamos por utilizar em nosso texto uma tradução literal do que foi retirado nos documentos da RME.

fonte de aplicação da Matemática desenvolvida. Os contextos devem ser significativos para os estudantes.

- o *“fazer a ponte” por meio de instrumentos verticais*[46]: estabelecer uma formatação de modelos e conceitos matemáticos surgidos a partir da resolução de uma situação-problema. Tem o objetivo de auxiliar no estabelecimento de relação entre o pensamento que emerge dos modelos informais e o pensamento de matemática como um sistema formal.
- *Contribuição do estudante*: as construções do aluno contribuem e são elementos constitutivos para o desenvolvimento do curso.
- *Interatividade*: a negociação explícita, a intervenção, a discussão, a cooperação e a avaliação são elementos essenciais para um processo de aprendizagem construtivo, no qual os métodos informais dos estudantes são usados como uma alavanca para atingir os formais.
- *Entrelaçamento*: as diferentes vertentes[47] de aprendizagem não podem ser tratadas como entidades separadas, em vez disso, um entrelaçamento das vertentes de aprendizagem é explorado nas atividades de resolução de problemas.

Cada um desses pilares revela características importantes da maneira como a RME pensa o ensino da Matemática. Mais uma vez, podemos observar as diferenças entre as abordagens para o ensino da Matemática, conforme apresentado no Quadro 5, utilizando aqui os pilares propostos por Treffers. Por exemplo, na abordagem empirista, podemos observar a *utilização de problemas contextuais* presente na abordagem, no entanto o “*fazer a ponte” por meio de instrumentos verticais* não é o foco dessa mesma abordagem.

De modo a promover o que propõe a Educação Matemática Realística, atendendo ao sugerido por Treffers (1987), alguns aspectos se sobressaem perpassando cada um dos pilares acima citados e que influenciam no desenvolvimento e execução das sequências de ensino. São eles: a dinâmica da aula, o papel do professor e o papel do aluno.

---

[46] “fazer a ponte” por meio de instrumentos verticais é a tradução livre de *bridging by vertical instruments* retirado de Treffers (1987).

[47] Vertente está sendo tomada como sinônimo de conteúdos estruturantes aqui.

Até esse momento, buscamos apresentar a abordagem para o ensino de Matemática denominada Educação Matemática Realística e elucidar alguns aspectos essenciais da matematização dentro dessa perspectiva. O que segue pretende discutir a dinâmica da aula na perspectiva da RME, bem como o papel do professor e do aluno.

6 MATEMATIZANDO[48]

Em minhas reflexões a respeito de um tema não matemático[49] – matematização – percebi que matematizei[50]!

Basicamente, no que se refere à Matemática, para todo ato do aprendiz[51] ao lidar com uma situação-problema, uma característica da atividade de matematizar pode ser observada. No contexto escolar, muitas destas situações são apresentadas em forma de texto de modo que desde a leitura, quando o aluno se dedica a compreender a situação e tenta transformá-la em um contexto matemático, já temos indícios de que este aluno matematizou, e este processo de matematização se estende durante todo o lidar do aluno com a situação, trabalhando dentro do próprio sistema matemático até que esta se resolva para ele.

Durante esse processo, do primeiro contato com a situação até a resolução da mesma, tem-se o objetivo de que o aprendiz trabalhe utilizando seu conhecimento matemático na situação, de modo a aprimorá-lo e, sempre que possível, elaborando novos conhecimentos matemáticos que lhe sejam úteis em situações posteriores. A esse processo, que permite não só o aprimoramento dos conhecimentos matemáticos existentes mas também a elaboração de outros, chamamos matematização. O desenvolvimento do processo de matematização compreende atividades como a análise, a sistematização, a reflexão e o desenvolvimento de conceitos matemáticos.

De Lange (1987) argumenta que não haveria matematização sem reflexão. Essa característica é relevante não só para matemáticos como também para aprendizes de Matemática. Esta reflexão envolve, por parte dos aprendizes, socializar seus conhecimentos, analisar soluções alternativas, discutir as melhores soluções, avaliar a estratégia mais viável, interpretar os resultados encontrados e tomar decisões. Estas atividades, além de serem parte do processo de matematização, ainda prepara os aprendizes para lidar com situações da vida real.

É por meio da matematização que a Matemática informal pode

---

[48] Alguns apontamentos neste capítulo baseiam-se em observações feitas pelo autor do trabalho nas duas oportunidades (2012 e 2013) de visitar a Holanda e acompanhar algumas aulas da Educação Básica holandesa na perspectiva considerada no trabalho.
[49] Não matemático no sentido de não haver um conteúdo matemático específico.
[50] No sentido de realizar atividades tais como as descritas por De Lange (1987).
[51] Neste trabalho, aluno é o aprendiz no contexto escolar.

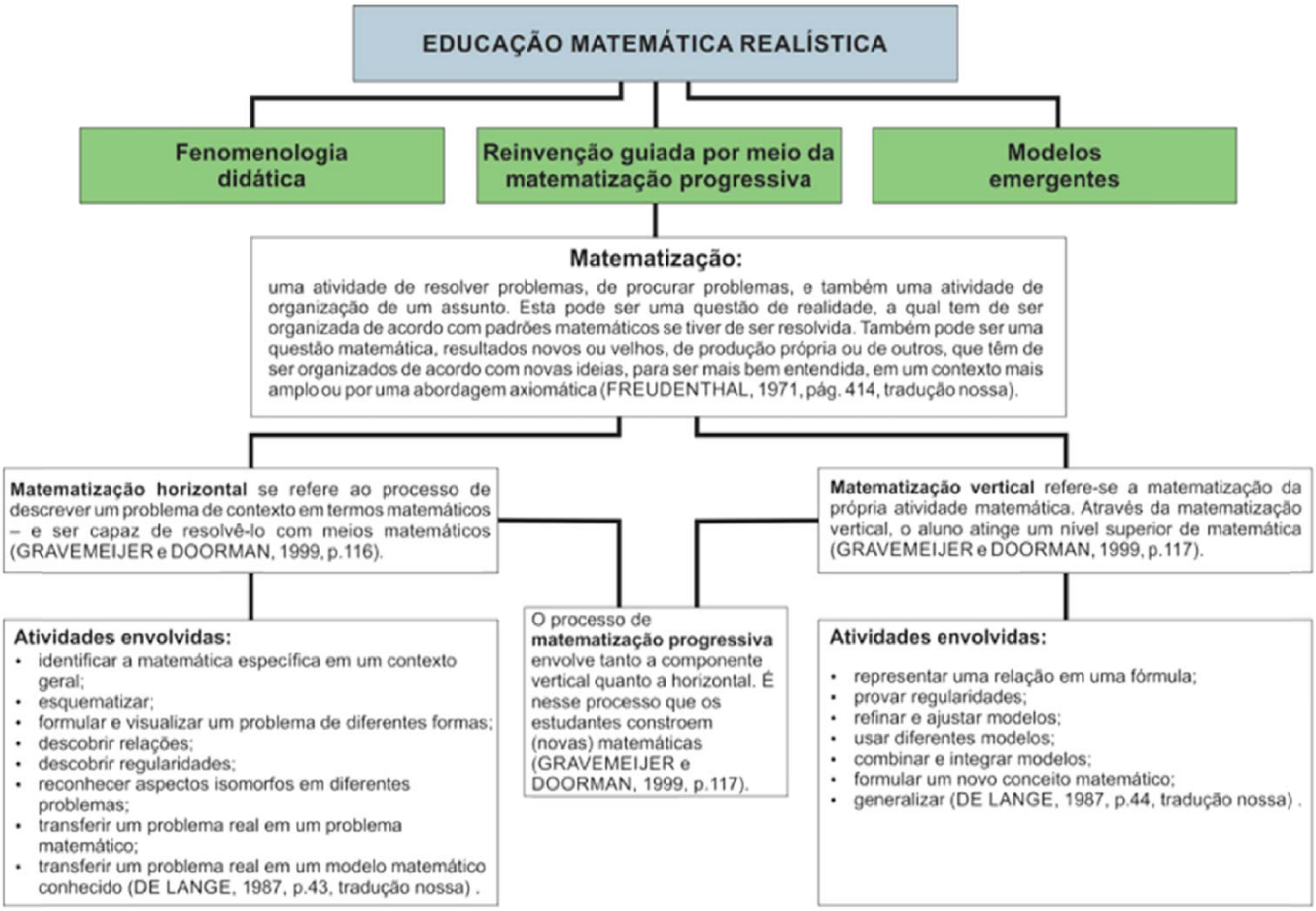
chegar ao *status* de ciência formal, as atividades de matematizar do aluno fazem com que ele passe pelo processo dinâmico de desenvolvimento de seus próprios modelos matemáticos, refinando e tornando-os o mais formal possível.

Nesse sentido, interessa-nos saber se o aprendiz está matematizando e como se pode perceber tal atividade. Conforme descrito por De Lange (1987), tanto a matematização horizontal quanto a matematização vertical envolvem atividades específicas. No que se refere à matematização horizontal, as atividades descritas por De Lange (1987) são, basicamente, atividades mentais e, embora elas estejam explicitadas, identificá-las no trabalho do aprendiz pode ser uma tarefa complexa. Diante disso, aos aprendizes devem-se propor tarefas, fazer questionamentos de modo que, por meio de suas respostas, sejam elas escritas ou faladas, atividades como esquematizar a situação real utilizando meios matemáticos, formular e visualizar um problema de diferentes formas, descobrir relações e regularidades possam ser observadas. O envolvimento do aprendiz com a tarefa, levantar conjecturas, compartilhar suas formas de lidar com outrem podem dar indícios de matematização horizontal.

Do mesmo modo, atividades referentes à matematização vertical também estão descritas e estas são mais facilmente percebidas, pois embora algumas delas sejam atividades mentais, dizem respeito a representar relações, provar regularidades, refinar e ajustar modelos, usar diferentes modelos, generalizar. Aqui, também, as tarefas propostas ao aprendiz têm papel essencial, pois essas atividades podem ser percebidas na sua produção escrita, na maneira como explica suas ideias. São indícios de que houve matematização vertical também a utilização de procedimentos próprios, a elaboração de estratégias diferenciadas, a elaboração de novos conceitos matemáticos.

Na tentativa de tornar mais claro o conceito de matematização, suas especificidades e como este se relaciona com as ideias da Educação Matemática Realística, elaboramos o esquema a seguir.

Figura 3 – Matematização na Educação Matemática Realística



A figura nos permite simplesmente localizar cada aspecto da matematização dentro da Educação Matemática Realística. Com isso, notamos a matematização dentro de um dos princípios heurísticos da RME, a reinvenção guiada por meio da matematização progressiva, como seu elemento estruturante. Obviamente, de acordo com o apresentado no decorrer do texto, outros aspectos ficaram ausentes propositadamente da figura, na tentativa de torná-la mais clara e objetiva. Os desmembramentos desses aspectos foram apresentados anteriormente.

A Educação Matemática Realística, enquanto abordagem para o ensino de Matemática, tem características próprias e são elas que fazem com que o ensino ocorra da forma como se propõe. É nosso interesse saber que características são essas no momento da instrução.

Nessa perspectiva, para que os alunos tenham a possibilidade de matematizar, o ambiente escolar tem papel fundamental e o trabalho do professor se torna indispensável já que é ele o responsável pela preparação e encaminhamento das aulas. Nessa direção, alguns componentes[52] fundamentais podem ser destacados, são eles: a dinâmica da aula, o professor e o aluno. Esses componentes serão apresentados a seguir.

6.1 A Dinâmica da Aula

De acordo com Ciani (2012), na perspectiva da Educação Matemática Realística, a dinâmica das aulas de Matemática é tal que

- os alunos devem ser confrontados com situações-problemas das quais participem ativamente na busca da sua resolução, e, para isso, a utilização de estratégias informais deve ser incentivada, uma vez que, para Freudenthal (1991), a melhor maneira de aprender é fazendo.
- os alunos começam por analisar contextos ricos que possam ser matematizados, de modo que eles sejam preparados para usar a Matemática na formulação e resolução de problemas, assim ela lhes poderá ser útil de fato, no lidar com a realidade.
- a reflexão sobre as atividades desenvolvidas é uma constante, pois pode permitir a passagem para um nível seguinte de compreensão.

[52] Nos materiais estudados esses componentes não são apresentados separadamente, mesmo porque eles estão intimamente relacionados e dependem uns dos outros. Optamos por apresentá-los separadamente pelo fato de, em geral, na escola, o processo de ensino-aprendizagem tê-los como componentes fundamentais.

> - os conteúdos não são apresentados em capítulos estanques, uma vez que, para resolver problemas em contextos ricos, vários conhecimentos e ferramentas matemáticas podem ser necessários.
> - pressupõe atividade social – partilha e reflexão. Cada aluno segue seu próprio trajeto de aprendizagem, mas lhe é dada a oportunidade de partilhar suas estratégias e descobertas com outros; mas, ainda assim, as crianças continuam a ser consideradas como indivíduos, e, por conseguinte, é feita a adaptação a cada um (proposta de problemas cujas resoluções podem ser de diferentes níveis).
> - é dada aos estudantes a oportunidade de "reinventar" a Matemática. Para isso, os professores têm um papel crucial porque ajudam a proporcionar cenários com potencial para que os alunos trabalhem e alcancem níveis mais elevados de compreensão da matemática (CIANI, 2012, p. 34).

Tal dinâmica visa proporcionar aos alunos um ambiente no qual eles possam realizar atividades que lhes permitam matematizar e, consequentemente, elaborar/reinventar alguma Matemática.

Na perspectiva da RME, a maneira como o ambiente escolar é organizado tende a proporcionar maior interação entre os alunos, permitindo que eles participem ativamente da aula. Em geral, nessa abordagem é comum que os trabalhos aconteçam em grupos, possibilitando a interação entre os alunos. Isso difere de outras perspectivas tais como a mecanicista e a estruturalista, nas quais, por exemplo, é comum as carteiras serem organizadas em fila, uma seguida da outra, com alunos olhando para a nuca do colega da frente, recebendo informações com pouca possibilidade de interação e participação, o que é desejável nessas perspectivas mencionadas.

A aula na perspectiva da RME tende a ser "barulhenta", isto é, com conversas, discussões e debates por parte dos alunos. A troca de informações entre aluno e professor também é constante. O professor tem o papel de guia durante a instrução, fazendo os encaminhamentos necessários para que os alunos continuem trabalhando.

Pelo fato de os conteúdos não serem trabalhos de forma estanque, como capítulos com conceitos que não se misturam, é possível que diferentes alunos estejam trabalhando em diferentes soluções para os problemas, lidando com ferramentas matemáticas distintas em diferentes níveis. É papel do professor organizar essa dinâmica.

Para Gravemeijer (1994), uma maneira de organizar tal dinâmica é fazê-la por meio do que ele chamou de *trajetória conjecturada de aprendizagem*[53] (GRAVEMEIJER, 1994). Essa trajetória refere-se ao planejamento do professor que, dentre outras coisas, aponta possíveis caminhos pelos quais os alunos poderão percorrer para desenvolver matemática, quais possíveis obstáculos podem surgir, o que fazer para superá-los.

6.2 O Papel do Professor

Para De Lange (1996), o ensino na RME é tomado sob uma perspectiva que ele denominou *não ensino*[54]. Nessa perspectiva, o professor deixa de ter papel central no processo de ensino e passa a, segundo Hadi (2002), não ensinar mais, seu papel é enfatizado por ser um organizador da reconstrução dos estudantes de ideias e conceitos matemáticos. Para Hadi (2002), os professores desenvolvem sequências instrucionais interativas, dão oportunidades para os estudantes desenvolverem seus próprios processos de aprendizagem e auxiliam os estudantes a interpretar problemas reais (HADI, 2002, p. 38).

O professor exerce o papel de *designer* das trajetórias conjecturadas aprendizagem e nesse ínterim, deve considerar para esse planejamento possíveis obstáculos que os alunos encontrariam referentes aos conceitos a serem abordados, de maneira que ofereça possibilidades para superá-los. Deve também conhecer a história do desenvolvimento de tais conceitos matemáticos de modo que essas informações o auxiliem a projetar os passos da reinvenção. É papel do professor também, ao desenvolver tais trajetórias, considerar situações próximas aos estudantes, que lhes sejam relevantes de modo que se interessem em resolvê-las, isto é, se interessem em dar algum tratamento matemático para essas situações.

Desde o planejamento até a execução de tais trajetórias, a maneira de se portar em sala de aula durante a instrução é considerada. Ao contrário de algumas abordagens para o ensino de Matemática tais como a mecanicista e a estruturalista, nas quais o professor tem papel de transmissor de conhecimento, na RME esse papel muda. Ele atua como interlocutor dos alunos, fazendo papel de

[53] Do inglês *conjectured learning trajectory.*
[54] Do inglês *unteaching.* De Lange justifica a utilização desse termo como contraposição ao que é usualmente tomado por ensino, a sequência *explicação-exercícios-conclusão.*

mediador das discussões e debates em sala de aula. É importante destacar que, embora o professor não tenha o papel de detentor do conhecimento, ele deve, sim, ter domínio do conhecimento matemático envolvido nas situações por ele selecionadas.

A forma como o professor encaminha tais discussões tem um tom questionador, sempre levando os alunos a refletir sobre suas próprias falas. Estimular os questionamentos por parte dos alunos também tem função essencial, pois, para cada pergunta, há uma reflexão e isso também é interesse da RME, formar cidadãos capazes de refletir e tomar decisões de forma consciente e coerente relativas a suas próprias vidas.

É considerada função do professor apresentar didaticamente a realidade por meio de contextos ricos, é a chamada didatização (FERREIRA, 2013). Essa tarefa, própria do professor, refere-se à atividade de organizar fenômenos passíveis de serem matematizados. De acordo com De Lange (1987), as tarefas envolvidas nos fenômenos também devem ser ricas, isto é, aquelas que os alunos se interessem em resolver. Tarefas ricas não necessariamente representam situações complexas ou difíceis. É importante que todos os alunos sejam capazes de dar algum tratamento matemático. O nível das tarefas acompanha a evolução do aluno. Nessa perspectiva, segundo Van den Heuvel-Panhuizen (1996) diferentes formas e instrumentos de avaliação podem ser utilizados para se obter informações de qualidade a respeito da evolução dos alunos.

De acordo com Gravemeijer (1994), a autoridade do professor como quem valida conhecimento é trocada pela autoridade como guia. Ele exerce tal autoridade pela maneira que seleciona as atividades instrucionais, inicia e encaminha as discussões e as contribuições matemáticas dos estudantes (GRAVEMEIJER, 1994). Essa perspectiva proporciona uma relação de confiança entre aluno e professor, a qual possibilita aos envolvidos um trabalho contínuo durante o período da instrução.

Na perspectiva da Educação Matemática Realística, o professor tem papel fundamental, não como detentor e transmissor de conhecimento, mas como alguém que auxilia o aluno, o sujeito principal, no processo de aprendizagem.

6.3 O PAPEL DO ALUNO

Na perspectiva da RME, o estudante tem papel importante e central no processo de ensino-aprendizagem, e alguns aspectos são considerados relevantes no que se refere a ele. Hadi (2002), a respeito disso ele, elenca

> - Cada aluno traz seus preconceitos para a experiência educativa. Esses preconceitos são de grande influência na aprendizagem subsequente. Os alunos possuem um conjunto diversificado de concepções alternativas sobre ideias matemáticas que influenciam o aprendizado futuro;
> - Cada aluno constrói significados ativamente. Os alunos adquirem novos conhecimentos através da construção para eles mesmos;
> - Cada aluno está pronto para compartilhar o seu significado pessoal com os outros, e com base nesse processo de negociação, reconceitualiza as estruturas do conhecimento inicial. A construção do conhecimento é um processo de mudança que inclui a criação, adição, modificação, aperfeiçoamento, reestruturação e rejeição;
> - Cada aluno assume a responsabilidade pela sua aprendizagem. Os conhecimentos novos construídos pelos alunos tem sua origem em um conjunto diversificado de experiências;
> - Cada aluno está convencido de que o sucesso na aprendizagem com compreensão é possível. Em outras palavras, todos os alunos independentemente de raça, cultura e gênero são capazes de compreender e fazer matemática (HADI, 2002, p. 36, tradução nossa)[55].

O ambiente escolar é interativo. Os estudantes, ainda que construtores do próprio conhecimento, são solicitados a todo momento a compartilharem suas reflexões (explicações, justificativas, conjecturas), produções com os demais alunos, apresentando, muitas vezes, diferentes estratégias, reflexões e ideias em diversos níveis. Destacamos a importância de essas informações serem articuladas pelo professor e utilizadas por ele visando proporcionar um ambiente de

---

[55] Do inglês,

- *Each learner brings his or her preconceptions to the educational experience. These preconceptions are highly influential on subsequent learning. Learners possess a diverse set of alternative conceptions about mathematical ideas that influence their future learning;*
- *Each learner actively constructs meaning. Learners acquire new knowledge by constructing it for themselves;*
- *Each learner is ready to share his or her personal meaning with others, and based on this negotiation process, reconceptualizes the initial knowledge structures. The construction of knowledge is a process of change that includes addition, creation, modification, refinement, restructuring, and rejection;*
- *Each learner takes responsibility for his or her learning. The new knowledge learners construct for themselves has its origin in a diverse set of experiences;*
- *Each learner is convinced that success in learning with understanding is possible. In other words, all students regardless of race, culture, and gender are capable of understanding and doing mathematics.*

aprendizagem produtivo baseado na atividade dos alunos. Professor e aluno trabalham em parceria construindo um ambiente de interação social.

Nesse ambiente, segundo Hadi (2002), deve ser possível aos estudantes fazer uso de seu conhecimento prévio ao lidar com as situações apresentadas, e esse conhecimento deve servir de base para o aprofundamento dos conteúdos matemáticos já elaborados pelos alunos, bem como para a elaboração de conhecimentos novos. Esse é o foco da RME, proporcionar aos alunos situações que podem ser matematizadas de modo que eles elaborem algum conhecimento a partir do seu próprio conhecimento prévio.

Os alunos necessitam ser estimulados a elaborarem seus próprios modelos a partir de suas experiências para resolver determinadas situações e do mesmo modo, precisam de estímulos para desenvolver esses modelos, aprimorando-os s fim de refinar seu conhecimento matemático.

Na perspectiva da RME, espera-se do aluno comprometimento, responsabilidade e participação, uma vez que é o protagonista do processo de ensino e aprendizagem. No entanto, um aluno nem sempre está disposto a aceitar a responsabilidade, em especial, quando não está habituado com isso, ou porque não faz parte de sua cultura agir assim ou porque não vê vantagens nisso. O ambiente escolar deve impulsionar essas atitudes nos alunos. Para De Lange (1987), "matematização só pode ser eficiente se realizada numa instrução[56] interativa, isto é, instrução onde haja a oportunidade para discutir, consultar e cooperar" (DE LANGE, 1987, p. 44).

Para De Lange (1987), a interação social é fundamental no processo de matematização, na qual os conflitos conceituais têm potencial para motivar os alunos na resolução de problemas, bem como melhorar a compreensão de conceitos e, em consequência, do mundo físico.

Vale ressaltar que, quando nos referimos a aluno, estamos também considerando a relação entre os alunos de um grupo. Conforme destacado, ainda que cada aluno seja responsável pela sua própria aprendizagem, a discussão e a cooperação proporcionam melhores compreensões a respeito de um determinado assunto.

---

[56] Instrução aqui é tomada como o ambiente em que o processo de ensino-aprendizagem acontece.

Isso diz respeito tanto a alunos quanto a professores que devem fornecer e receber, uns dos outros, *feedback* a respeito do seu trabalho. Matematizar é um processo contínuo e pode ser aprimorado a todo momento.

Aluno, professor e ambiente de sala de aula são aspectos que fazem parte de um grande mecanismo que ocorre nos ambientes escolares. Explicitamos aqui algumas características importantes desses aspectos para que os alunos tenham a possibilidade de aprender Matemática matematizando.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Com este trabalho tínhamos o interesse em investigar nos autores estudados algumas características da matematização na perspectiva da Educação Matemática Realística. Esse interesse decorria de uma necessidade de a pesquisa satisfazer nossas próprias curiosidades e de avançar com os estudos do GEPEMA no que se refere a esse tema. Consideramos que esse trabalho pode contribuir para a divulgação no país da abordagem para o ensino de Matemática denominada Educação Matemática Realística.

Não raro a responsabilidade pelo processo de ensino e aprendizagem recai sobre diversos aspectos políticos e sociais. Em especial, nos casos de fracasso, isso é mais evidenciado. No entanto, um aspecto relevante que influencia o resultado do processo de ensino e aprendizagem é a própria forma como esse processo é desenvolvido, é a concepção de ensino e de aprendizagem e as crenças a respeito da forma como as coisas devem acontecer dentro da escola. Acreditamos que explorar novas alternativas para o ensino de Matemática nos possibilita ampliar nossas perspectivas de escolhas complementando nossa formação como professor e pesquisador.

Com relação ao assunto deste trabalho, após reflexões a respeito do significado da expressão matematização, podemos dizer que a escolha do termo matematização por Freudenthal foi feita numa espécie de apropriação de palavra para a definição de um novo conceito, tanto que Freudenthal atribui amplo significado para o termo matematização e o compreende como a organização da realidade com significado matemático (FREUDENTHAL, 1973, p. 44).

Segundo Freudenthal (1971, pág. 413-414, tradução nossa), a principal atividade desenvolvida na Educação Matemática Realística refere-se a

> uma atividade de resolver problemas, de procurar problemas, e também uma atividade de organização de um assunto. Esta pode ser uma questão de realidade, a qual tem de ser organizada de acordo com padrões matemáticos se tiver de ser resolvida. Também pode ser uma questão matemática, resultados novos ou velhos, de produção própria ou de outros, que têm de ser organizados de acordo com novas ideias, para ser mais bem entendida, em um contexto mais amplo ou por uma abordagem axiomática[57]

---

[57] Do inglês "*It is an activity of solving problems, of looking for problems, but it is also an activity of organizing a subject matter. This can be a matter from reality which has to be organized according*

Freudenthal chamou esta atividade de organização de *matematizar*. Matematizar, no sentido mais amplo da palavra, significa aprender matemática numa perspectiva em que a matemática não é apenas um conjunto de conhecimentos, mas inclui o próprio processo de aprendizagem[58].

Esse processo de aprendizagem inclui atividades de diferentes tipos e é nesse sentido que Treffers (1987) trata a matematização em termos de duas componentes denominadas por ele matematização horizontal e matematização vertical. Matematização horizontal envolve lidar com uma situação real a partir de meios matemáticos, ou ainda, conforme nos diz Freudenthal, matematização horizontal pode ser identificada no movimento do mundo real para o mundo dos símbolos. Este lidar envolve atividades como identificar a matemática específica em um contexto geral, esquematizar, formular e visualizar um problema de diferentes formas, descobrir relações, descobrir regularidades, reconhecer aspectos isomorfos em diferentes problemas, transferir um problema real em um problema matemático. A matematização vertical envolve lidar com a matemática por ela mesma, dentro do mundo dos símbolos, refinando e aprofundando o conhecimento matemático. Esta componente envolve atividades como representar uma relação em uma fórmula, provar regularidades, refinar e ajustar modelos, usar diferentes modelos, combinar e integrar modelos, formular um novo conceito matemático, generalizar.

Outra abordagem da matematização, conforme apresentado por Gravemeijer e Terwel (2000), é que matematização quer dizer “fazer mais matemática”. Eles argumentam que “fazer mais matemática” envolve trabalhar com determinadas características da matemática como corpo de conhecimento: generalidade, certeza, exatidão e concisão.

Nessa perspectiva de “fazer mais matemática”, De Lange nos traz um conceito que diz respeito à elaboração de conhecimentos novos, isto é, à medida que se lida com uma situação real por meio da matematização e esse lidar gera conhecimento novo para determinado sujeito. A esse processo foi denominado matematização conceitual.

---

to mathematical patterns if problems from reality have to be solved. It can also be a mathematical matter, new or old results, of your own or of others, which have to be organized according to new ideas, to be better understood, in a broader context, or by an axiomatic approach”.

[58] Essa frase veio como sugestão da professora Sonia Palha, membro da banca de defesa desse trabalho.

Diversas atividades e processos são indicados para que alunos e professores desempenhem na tentativa de proporcionar a melhor instrução e aprendizagem possível. O ideal seria que tudo o que é proposto pela RME fosse efetivamente trabalhado na prática. Na teoria, tudo parece fácil, no entanto matematizar envolve responsabilidade por parte do aluno. Nesse sentido, vale destacar que responsabilidade não se ensina, assim como não se ensina o desejo, então, para que o estudante adote essa atitude responsável, o contexto no qual esse estudante está inserido deve ser propício a isso.

No contexto do ensino brasileiro, que é predominantemente estruturalista, o estudante não é estimulado a se comprometer com sua aprendizagem, tampouco o ambiente é propício a isso. Sendo assim, trabalhar nessa perspectiva envolve, além de tudo o que se refere à RME, essa quebra de paradigma por parte de professores e alunos.

Diante disso, destacamos que o contexto onde o processo de matematização ocorre é essencial para o processo de matematização. Esse contexto diz respeito ao ambiente no qual o processo de ensino e aprendizagem ocorre.

Com relação à separação dos aspectos fundamentais do ensino em componentes: dinâmica da aula, papel do professor e papel do aluno, fazê-la tinha o objetivo de conseguir discutir cada um deles. No entanto, conforme mencionado no texto, estes aspectos são tão interrelacionados que discuti-los isoladamente nos pareceu artificial, tendo em vista a menção de um aspecto enquanto discutia o outro. A dinâmica da aula, o papel do professor e o do aluno têm características específicas dentro da abordagem da RME.

O que se observa é o caráter ativo e participativo que se espera tanto de alunos quanto de professores nessa perspectiva, cada qual com suas atividades bem definidas e responsável pela sua própria aprendizagem tanto quanto pela do outro.

O ensino da Matemática, conforme proposto pela Educação Matemática Realística, parece uma alternativa bastante promissora do ponto de vista da aprendizagem, pois seu foco é aproximar a escola do aluno, permitir ao aluno fazer uso do próprio conhecimento para elaborar novos e capacitá-lo a um pensar mais matemático.

Poder participar de uma pesquisa desse tipo teve uma utilidade particular, serviu-nos, dentre tantas coisas, para vislumbrar o gigantesco campo de trabalho e pesquisa que existe quando se pensa em ensino na área de Educação Matemática. Esta discussão ocupa um espaço ínfimo dentro de todo o corpo de conhecimento relativo ao tema já existente, no entanto um grande espaço em nossa vida. Deixamos registrado o nosso compromisso com o desenvolvimento de conhecimento nesse campo tão importante e crescente.

Nosso interesse é fazer uso deste estudo como base para estudos posteriores. No presente trabalho, pudemos apresentar aspectos referentes à matematização numa perspectiva teórica, apresentando os elementos que constituem um processo de matematização ou estão subjacentes a ele e também descrever, na perspectiva de implementar a matematização em sala de aula, o papel do professor, do aluno e a dinâmica da aula. A realização deste trabalho nos permitiu identificar alguns aspectos relevantes com relação ao tema que poderão nos ocupar em pesquisas futuras. É nossa intenção implementar em sala de aulas alguns pressupostos dessa abordagem, a RME. Entendemos o desafio, mas consideramos que turmas experimentais podem começar a fazer parte dos nossos objetivos próximos. Fica como estudo complementar estudar as diferenças culturais entre os países que já se utilizam da RME como proposta de ensino e o Brasil, na tentativa de adaptar o que for necessário para proporcionar aos alunos situações em que eles possam matematizar.

Este trabalho se encerra agora e começa no mesmo instante.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, V. L. C. **Questões não-rotineiras:** a produção escrita de alunos da graduação em Matemática. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

ALVES, R. M. F. **Estudo da produção escrita de alunos do ensino médio em questões de matemática**. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

ARMANTO, D. **Teaching multiplication and division realistically in indonesian primary schools: a prototype of local instructional theory**. 2002. Thesis - University of Twente, Enschede, 2002.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa, Portugal. Ltda., 1977.

______. **Análise de conteúdo**. Lisboa, Portugal; Edição 70 Ltda., 2004.

BEZERRA, G. C. **Registros escritos de alunos em questões não-rotineiras da área de conteúdo quantidade:** um estudo. 2010. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

BURIASCO, R. L. C. de. **Avaliação em matemática**: um estudo das respostas de alunos e professores. 1999. 238f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Marília, 1999.

______. Análise da Produção Escrita: a busca do conhecimento escondido. In: Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino - ENDIPE, 12, 2004, Curitiba. **Anais...** Curitiba: Champagnat, 2004. v. 3, p. 243-251.

CELESTE, L. B. **A Produção escrita de alunos do ensino fundamental em questões de matemática do pisa**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

CIANI, A. B. **O realístico em questões não-rotineiras de matemática**. 2012. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

DALTO, Jader Otávio. **A produção escrita em matemática:** análise interpretativa da questão discursiva de Matemática comum à 8ª série do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio da AVA/2002. 100f. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2007.

DE LANGE, J. **Mathematics, Insight and Meaning**. Utrecht: OW &OC, 1987.

______. Assessment: No Change without Problems. In: T.A. Romberg (Ed) **Reform in school mathematics and authentic assessment**. Albany: SUNY Press, 1994, p. 87-172.

______. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Freudenthal Institute & National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.September 1999. Disponível em: <http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/6279.pdf> Acesso em: 6 out. 2013.

DRIJVERS, P. **Studentes encountering obstacles using a CAS**. International Journal of Computers for Mathematical Learning, v. 5, n. 3, p. 189-209, set. 2000.

______. **Learning algebra in a computer algebra environment**. 2003. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade de Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute, The Netherlands, 2003.

FAUZAN, A. **Applying Realistic Mathematics Education (RME) in teaching geometry in Indonesian primary** schools. 2002. Thesis, 346p. University of Twente, Enschede, 2002.

FERREIRA, P. E. A. **Análise da produção escrita de professores da Educação Básica em questões não-rotineiras de matemática**. 2009. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

FERREIRA, P. E. A. **Enunciados de tarefas de matemática:** um estudo sob a perspectiva da educação matemática realística. 2013. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

FOSNOT C. T., et. al**. Mathematics in the city:** measuring teacher change in facilitating mathematizing. Coaching Institute for Literacy and Numeracy Leaders, Agosto, 2006.

FREUDENTHAL, Hans. **Why to teach mathematics so as to be useful.** Educational Studies in Mathematics, 1, 3-8, 1968.

______. **Geometry between the devil and the deep sea.** Educational Studies in Mathematics, 3, 413-435, 1971.

______. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: Reidel. 1973.

______. **Weeding and sowing:** preface to a science of mathematical education. Dordrecht: Reidel. 1973.

______. **Perspectivas da matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

______. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Dordrecht: Reidel. 1983.

______. **Revisiting mathematics education.** Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1991.

GARNICA, A. V. M. **História oral e educação matemática**. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) pesquisa qualitativa em educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GRAVEMEIJER, K. **Developing realistic mathematics education**. Utrecht: Utrecht University, 1994.

______. How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 1, n. 2, 1999, p. 155-177.

______. Emergent modeling as the basis for an instructional sequence on data analysis. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE TEACHING OF STATISTICS, ICOTS 6, 2002, South Africa. **Proceedings...** Disponível em: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php?show=1>. Acesso em: 6 out. 2012.

______. Creating Opportunities for Students to Reinvent Mathematics. In: **The Proceedings of ICME-10**, Kopenhagen, Dinamarca, 2004.

______. O que torna a matemática tão difícil e o que podemos fazer para o alterar?. **Educação matemática**: caminhos e encruzilhadas. Lisboa: APM, 2005. p. 83-101.

______. Emergent modeling and iterative processes of design and improvement in mathematics education. In: APEC - Tsukuba International Conference III, Tokyo Kanazawa and Kyoto, Japão, 2007. **Proceedings...** Disponível em: <http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2008/index_en.php>. Acesso em: 29 out. 2012.

______. RME Theory and Mathematics Teacher Education. In: **International Handbook of Mathematics Teacher Education**, Rotterdam: Sense Publishers, v. 1, p. 283-302. 2008.

GRAVEMEIJER, K; TERWEL, J. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. **Journal Curriculum Studies**, v. 32, n. 6, p. 777-796, 2000.

HADI, D. **Effective teacher professional development for the implementation of realistic mathematics education in Indonesia**. 2002. Thesis, 454p. University of Twente, Enschede, 2002.

KEISOGLOU, S. SPYROU, P. **Processes of mathematization in a learning environment combining devices and computational tools**. Quaderni di Ricerca in Didattica”, n. 13, 2003. Palermo, Itália.

LOPEZ, J. M. S. **Análise interpretativa de questões não-rotineiras de matemática**. 2010. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2010.

MOSVOLD, R. **Mathematics in everyday life,** Telemark Research – Notodden, ICME 10, 2003. Disponível em: <www.vxu.se/msi/picme10/L3MR.pdf> Acesso em: 29 jul. 2013.

NEGRÃO DE LIMA, Roseli Cristina. **Avaliação em matemática:** análise da produção escrita de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental em questões discursivas. 201f. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2006.

NELISSEN, J. M. C. **Thinking skills is realistic mathematics,** 1999. Disponível em: <www.fi.uu.nl/en/fius/jmc_nelissen.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2013.

ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT - OECD. **The PISA 2003 – assessment framework:** mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills. Paris, 2003. Disponível em: <http://www.pisa.oecd.org>. Acesso: 23 set. 2013.

______. **Learning for Tomorrow's World** – First Results from PISA 2003. Paris, 2004a. Disponível em <http://www.pisa.oecd.org>. Acesso em: 27 ago. 2008.

______. **Aprendendo para o mundo de amanhã.** Primeiros resultados do PISA 2003. São Paulo: Moderna, 2005.

______. **PISA 2006**: Science competencies for tomorrow's world. v. 1: Analysis. Paris: OECD, 2007.

______. **Learning mathematics for life**: A view perspective from PISA. Paris: OECD Publications, 2009.

______. **Learning mathematics for life**: A view perspective from PISA. Paris: OECD Publications, 2009.

PEREGO, Franciele. **O que a produção escrita pode revelar?** Uma análise de questões de matemática. 2006. 127 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

PEREGO, Sibele Cristina. **Questões abertas de matemática:** um estudo de registros escritos. 2005. 105 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

SANTOS, E. R. dos. **Estudo da produção escrita de estudantes do ensino médio em questões discursivas não rotineiras de matemática**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

SEGURA, Raquel de Oliveira. **Estudo da produção escrita de professores em questões discursivas de Matemática**. 2005. 178 p. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2005.

STREEFLAND, Leen. **Fractions in realistic mathematics education**: a paradigm of developmental research. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

TREFFERS, A; GOFFREE, F. **Rational analysis of realistic mathematics education – The Wiskobas program**. In: STREEFLAND, Leen (Ed.), Annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 2, Utrecht: PME, 1985. v. 2, p. 97-121.

TREFFERS, A. **Three dimensions**: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company,1987.

VAN DEN BRINK, J. **IOWO material tested**. In: KARPLUS (ed.), In: Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Proceedings… Berkeley: Lawrence Hall of Science University of California, 1980, p. 361-369.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Assessment and realistic mathematics education**. Freudenthal Institute, Utrecht, 1996.

______. **Realistic mathematics education:** work in progress. In: T. Breiteig and G. Brekke (Eds.), Theory into practice in mathematics education. Kristiansand, Norway: Faculty of Mathematics and Sciences / Hogskolen I Agder, 1998.

______. **Mathematics education in the Netherlands**: a guided tour. Freudenthal Institute, Utrecht University, the Netherlands, 2000.

______. **The didactical use of models in realistic mathematics education**: An example from a longitudinal trajectory on percentage. Educational Studies in Mathematics, v. 54, n. 1, p. 09-35, nov. 2003.

______. **The role of contexts in assessment problems in mathematics**. For the Learning Mathematics, v. 25, n. 2, 2005, p. 2-9.

______. Reform under attack – **Forty years of working on better mathematics education thrown on the scrapheap? No way!** In: SPARROW, L.; KISSANE, B.; HURST, C. (Eds.). Proceedings of the 33th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Fremantle: MERGA. 2010.

VIOLA DOS SANTOS, João Ricardo. **O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática.** 108f. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2007.

WIDJAJA, Y. B.; HECK, A. How a realistic mathematics education approach and microcomputer-based laboratory worked in lessons on graphing at an Indonesian Junior High School. **Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia,** Amsterdam, v. 26, n. 2, p. 1-51, 2003.

WITTMANN, Erich Ch. **Realistic Mathematiscs Education, past and present**. Nieuw Archief voor Wiskunde, p. 294-296, 2005.

ZULKARDI. **How to design lessons based on the realistic approach**. University of Twente, 1999.

______. Developing a 'rich' learning environment on RME for student teachers in Indonesia. In: Seminar at the Faculty of Mathematics University of Twente, 2002, Twente. **Proceedings…** Twente: University of Twente, 2002. p. 23-24.