Universidade
Estadual de Londrina

LAÍS MARIA COSTA PIRES DE OLIVEIRA

APRENDIZAGENS NO EMPREENDIMENTO ESTUDO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

Londrina
2014

LAÍS MARIA COSTA PIRES DE OLIVEIRA

APRENDIZAGENS NO EMPREENDIMENTO ESTUDO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

Dissertação apresentada à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da UEL, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino

Londrina
2014

APRENDIZAGENS NO EMPREENDIMENTO ESTUDO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

BANCA EXAMINADORA

____

Profa. Orientadora Dra. Márcia Cristina de C. T. Cyrino
Universidade Estadual de Londrina

____

Profa. Dra. Regina Célia Grando
Universidade São Francisco

____

Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 04 de abril de 2014.

DEDICATÓRIA

Às razões de minha existência, àqueles que me fazem uma pessoa melhor...

Maria Alice e Reginaldo, meus pais, pela vida, e pelo amor, dedicação e apoio incondicionais.

Lívia, minha irmã, pelos sorrisos e pela amizade e força infinitas.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela luz e proteção constantes.

À minha orientadora, Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino, pela atenção, paciência, respeito e profissionalismo dedicados ao desenvolvimento deste trabalho; pelos desafios propostos e, sobretudo, por apostar e acreditar em minha capacidade para a realização desta investigação.

À Profa. Dra. Regina Célia Grando e à Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco pela disponibilidade em participar da Comissão Examinadora deste trabalho, pela leitura respeitosa e valiosas contribuições feitas para o aprimoramento do mesmo.

À Tânia Marli Rocha Garcia pela confiança e incentivo enquanto minha professora na graduação, e ainda hoje como companheira nos estudos; pelo apoio, ensinamentos, amizade e imensa paciência ao ouvir atentamente minhas dúvidas com relação à pesquisa, e meus (hilários, infinitos e às vezes intermináveis) relatos a respeito de encontros e desencontros pessoais... por fazer das horas de viagem momentos mais leves.

Aos professores participantes da CoP-PAEM pela disponibilidade e compromisso em fazer parte desta investigação, e também pelas vivências compartilhadas oportunizando meu crescimento profissional e pessoal.

À minha família por me fazer acreditar (nos vários momentos de dúvida e insegurança) que todo esforço valeria à pena e que tudo, no final, terminaria muito bem; pela ajuda, fidelidade e participação ativa em minhas tarefas da pós-graduação.

Aos meus grandes amigos, almas gentis que me acompanham, de longe ou de perto, há muito ou pouco tempo, renovando sempre minha fé nos seres humanos; pelos sorrisos e brilho nos olhos que vi ao compartilhar minhas conquistas e alegrias, pelos abraços apertados e palavras reconfortantes que senti quando precisei de ajuda para superar meus desapontamentos, sobretudo pela segurança de suas amizades.

Às boas companhias, colegas e amigos do PECEM, em especial ao casal Edilaine e Bruno, à minha xará Laís Viel, à Marcia Nagy, ao Paulo Henrique e aos "hermanos" Everton Estevam e Renata Raffa pelo incentivo, gentileza, amizade, solicitude, apoio, e pelas incontáveis "prosas" e incontroláveis risadas...

Aos membros do GEPEFOPEM, queridos companheiros, pelos momentos de discussões, estudos, compartilhamento de experiências e ideias, e pelas sugestões dadas a esta investigação; pela descontração com que esses momentos aconteceram, transformando nossas trajetórias de estudos mais leves e proveitosas.

À CAPES pela bolsa de estudos concedida, o que possibilitou minha dedicação integral à realização deste estudo.

A todos vocês, meu respeito, admiração e gratidão.

OLIVEIRA, Laís Maria Costa Pires de. **Aprendizagens no Empreendimento Estudo do Raciocínio Proporcional**. 2014. 206f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

RESUMO

Nesta investigação, teve-se por objetivo identificar e analisar que empreendimentos articulados desenvolvidos na/pela Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática – CoP-PAEM evidenciaram aprendizagens de seus participantes, no que concerne a seu conhecimento profissional, especificamente aspectos do Raciocínio Proporcional, parte do conhecimento matemático constituído por esses professores. Ademais foram analisados que conhecimentos da Matemática os participantes dessa Comunidade de Prática mobilizavam nas ações de resolver, discutir e refletir a respeito de problemas envolvendo proporção/proporcionalidade. Ao listar esses objetivos como diretrizes da investigação, buscou-se responder a seguinte questão de investigação: "*Que elementos da prática de uma CoP oportunizaram aprendizagens relacionadas ao conhecimento matemático de professores de Matemática nas ações de resolver, discutir e refletir a respeito de problemas envolvendo proporção/proporcionalidade do empreendimento Estudo do Raciocínio Proporcional?*". Optou-se por tratar as aprendizagens dos professores em formação continuada na perspectiva teórica da Teoria Social da Aprendizagem (Wenger, 1998), que concebe o processo de aprender como inerente à participação ou pertença a Comunidades de Prática. Para tanto, desenvolveu-se uma investigação de natureza qualitativa, de cunho interpretativo. Pela análise das Ações *Resolução e discussão de problemas matemáticos envolvendo proporção/proporcionalidade* e *Reflexão a respeito de algumas dessas resoluções e justificações,* tendo em conta o apoio da literatura (LAMON, 2012) sobre o tema do referido empreendimento articulado, foram identificados os seguintes elementos da prática da CoP-PAEM que oportunizaram aprendizagens de seus participantes: a resolução e discussão de problemas, o compartilhamento e a justificação de suas produções, o estudo de textos teóricos que tratam do Raciocínio Proporcional, a oportunidade de ser questionado, a reflexão a respeito da produção (escrita/oral) desencadeada a partir de alguns problemas resolvidos. Os resultados da investigação sugerem que um processo de formação continuada, estruturado na perspectiva de promover o desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática, especialmente a (res)significação do conhecimento do conteúdo que ensina, em que sejam oportunizadas aprendizagens por meio de interações sociais baseadas no respeito, confiança e compromisso dos participantes uns com os outros, como vistos na CoP-PAEM, é uma alternativa às propostas de formação de professores, comumente estruturadas em cursos ou treinamentos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Formação continuada de professores. Comunidades de Prática. Raciocínio Proporcional.

OLIVEIRA, Laís Maria Costa Pires de. **Learning in the Study of Proportional Reasoning Enterprise**. 2014. 206f. Dissertation (Master in Science Education and Mathematics Education) – State University of Londrina (UEL), Londrina, 2014.

ABSTRACT

This study aimed at identifying and analyzing what articulated enterprises, which were developed in/by the Community of Practice of Teachers that are Learning and Teaching Mathematics (CoP-PAEM), have evidenced some learning of participant related to their professional knowledge, specially to Proportional Reasoning aspects, parts that compounds their mathematic knowledge. Furthermore, this research also analyzes which mathematic knowledge were mobilized by the members of this community in solving, discussing and reflecting about proportional problems. Pointing these goals as guidelines for this research, it was attempted to answer the question: "What elements of the practice of a CoP have provided learning related to Mathematic teacher knowledge in actions of solving, discussing and analyzing proportional problems?". It has made an option to treat the learning of teachers, during the process of professional development, based on Social Learning Theory, developed by Wenger (1998), a theoretical perspective which considers the participation or belonging in Communities of Practice as something inherent to the learning process. In accordance with our objectives, it was conducted a qualitative research, focused on an interpretative approach from which the content analysis has contributed to the understanding of data that were produced from collected information. In the analysis of Actions *Solving and discussing proportional problems* and *Reflecting some of these resolutions and justifications* supported by the literature (Lamon, 2012) from such enterprise, it has identified the following elements that have granted its members learning: to solve problems and to justify their strategies/procedures, the study of theoretical texts about Proportional Reasoning, the opportunity of being questioned and reflecting about the production (written/oral) presented in solving problems. The findings of it analyzes suggest that a process of continuous education, in a perspective that promotes professional development of teachers that are teaching Mathematics, especially the re-signification of the Mathematics content, in an environment which are provided learning through social interactions, based on members respect, trust and compromise as were observed in CoP-PAEM, it is an interesting alternative to the current proposals of continuous educations which are commonly structured in models like training courses.

Keywords: Mathematics Education. Teachers Continuous Education. Communities of Practice. Proportional Reasoning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Um número crescente de pesquisas e discussões pautadas no âmbito da Educação Matemática tem evidenciado inquietações e esforços de pesquisadores, formadores de professores e professores de Matemática com relação às propostas de formação profissional de professores dessa disciplina vigentes no Brasil nos últimos anos.

Cyrino (2009) aponta que os esforços empregados na discussão e proposta de alternativas para os processos de formação de professores

> [...] visam, dentre outros aspectos, reorientar a formação desse profissional em vista das demandas colocadas pela sociedade contemporânea e pelos sistemas educativos, ou seja, investigar em que medida a formação de professores pode ser pensada de modo a atender as necessidades educacionais de nosso momento histórico e produzir reflexões em torno dos conhecimentos profissionais que são necessários para o futuro professor [bem como para o professor em serviço] exercer sua atividade profissional. (p. 95)

No intuito de oferecer subsídios que possam ser agregados a esses esforços, o GEPEFOPEM – Grupo de Ensino e Pesquisa sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática – tem investigado e proposto diferentes perspectivas de Educação Matemática de professores que ensinam Matemática, cujo foco tem sido os espaços de formação inicial e continuada com potencial para promover o desenvolvimento profissional de professores que trabalham com essa disciplina.

Examinar esses contextos é uma possibilidade para orientar futuras pesquisas na busca de entender como os professores aprendem para ensinar, seus processos de aprendizagem, e que elementos do conhecimento profissional são constituídos ou mobilizados nessas aprendizagens fornecendo contribuições para ações voltadas à formação de professores e delineadas na perspectiva do desenvolvimento profissional.

Ao considerar os professores como indivíduos reflexivos (SCHÖN, 1995), ativos na constituição de seu conhecimento profissional, e ao tomar a aprendizagem em termos sociais, como algo inerente às interações entre os seres humanos e entre eles e o mundo, muitos autores (LOPES, 2003; FERREIRA, 2003, 2006; MISKULIN et.al, 2005; NACARATO, 2005, NACARATO et. al, 2006; CYRINO, 2006, 2009, 2013; CALDEIRA, 2010; CYRINO e CALDEIRA, 2011; JESUS, 2011; BELINE, 2012; NAGY; 2013; ROCHA,

2013; GARCIA, OLIVEIRA, CYRINO, 2013; OLIVEIRA, GARCIA, 2013) apontam a relevância de trabalhos conjuntos com professores.

Esses autores destacam que a organização de trabalhos coletivos com professores, em que sejam privilegiadas e propiciadas discussões sobre suas práticas em sala de aula a partir da reflexão individual e conjunta a respeito delas, colabora de maneira significativa para a diminuição do isolamento profissional, comumente observado entre professores de Matemática, e para a (res)significação de seu conhecimento profissional (conhecimentos a respeito da Matemática e de como ensiná-la, da gestão curricular, da gestão do tempo, de seus alunos, de si mesmo enquanto professores).

Assim, esta investigação trata de um grupo de estudos (CoP-PAEM) formado por pesquisadores e professores da Educação Básica que ensinam Matemática, constituído na perspectiva de uma Comunidade de Prática – CoP (LAVE, WENGER, 1991; WENGER, 1998) como parte do projeto “Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática” do Programa Observatório da Educação – OBEDUC proposto por docentes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PECEM – UEL e do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL.

O objetivo com relação a esse grupo de estudos é, entre outros, investigar como contextos de formação de professores, inicial ou continuada, caracterizados como Comunidades de Prática de Professores que Ensinam Matemática, oportunizam aprendizagens desses professores com relação a seu conhecimento profissional.

Com o intuito de promover interações entre os participantes da Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática – CoP-PAEM e, consequentemente, propiciar a (re)organização e (res)significação de seu conhecimento matemático, mais especificamente aprendizagens relacionadas ao Raciocínio Proporcional, algo pouco promovido e desenvolvido na trajetória escolar de alunos e professores, negociou-se com esse grupo o empreendimento *Estudo do Raciocínio Proporcional*.

Mesmo que orientações curriculares, como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997, 1998), as Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática (PARANÁ, 2008), os *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) e o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), apontem a necessidade e a importância do desenvolvimento desse raciocínio, dentro e fora do contexto escolar, pouco se investiga a elaboração de estratégias de ensino que promovam o desenvolvimento/mobilização de aspectos do Raciocínio Proporcional.

O pouco trabalho em sala de aula com elementos matemáticos que promovam o desenvolvimento desse raciocínio pode estar relacionado aos conhecimentos de Matemática constituídos pelos professores em suas trajetórias profissionais. Durante sua formação inicial ou continuada, muitos deles não tiveram acesso a informações a respeito de elementos, conceitos e temas matemáticos, nem a oportunidade ou o estímulo a discussões e reflexões cuja preocupação estivesse focada nas implicações de ideias matemáticas no ensino e na aprendizagem dessa disciplina.

Por vezes, as fragilidades no conhecimento matemático dos professores em serviço conduzem à insegurança de expandir o trabalho em sala de aula de temas como frações, números racionais e razões, bases para o desenvolvimento do Raciocínio Proporcional, o que comumente os faz firmarem suas práticas pedagógicas em perspectivas mais tradicionais, nas quais, por vezes, a valorização de habilidades com cálculos sobrepõe o desenvolvimento de raciocínios matemáticos mais livres[1].

Dessa forma, ações de formação continuada elaboradas na perspectiva do desenvolvimento profissional de professores, que promovam a reflexão e (res)significação do conhecimento matemático desses profissionais – de suas ideias e concepções a respeito da Matemática como ciência e do ensino dessa ciência em sala de aula – por meio de trabalhos em grupo são importantes para os processos de ensino e de aprendizagem tanto de professores quanto de seus alunos.

Os espaços propiciados por essas ações possibilitam aos professores, por meio de interações e debates diversos, vivenciarem momentos de desestabilização, de perturbação, em que suas certezas são contestadas e seu conhecimento matemático é posto em discussão. A atitude de inconformismo suscitada nos professores mobiliza-os e os incentiva a investirem contínua e constantemente em seu desenvolvimento profissional.

Este trabalho, ao investigar a Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática – CoP-PAEM – à luz da Teoria Social da Aprendizagem (WENGER, 1998), busca responder à questão:

Que elementos da prática de uma CoP oportunizaram aprendizagens relacionadas ao conhecimento matemático de professores de Matemática nas ações de resolver, discutir e refletir a respeito de problemas envolvendo proporção/proporcionalidade do empreendimento Estudo do Raciocínio Proporcional?

---

[1] Neste trabalho, ao ser empregada a expressão “raciocínio livre”, faz-se referência a raciocínios desenvolvidos na resolução de problemas matemáticos sem o apoio de regras ou recursos algébricos já validados.

Para tanto, foi necessário identificar os empreendimentos da CoP-PAEM que oportunizaram aprendizagens a respeito do conhecimento matemático de professores e analisar conceitos, ideias e formas de pensar subjacentes ao Raciocínio Proporcional mobilizados pelos membros da CoP-PAEM nos processos de *resolver e discutir problemas matemáticos envolvendo proporção/proporcionalidade* (Ação 1) e *refletir a respeito de algumas dessas resoluções e justificações* tendo em conta o apoio da literatura quanto ao tema (LAMON, 2012) (Ação 4).

Este trabalho está organizado em cinco capítulos. O capítulo 1 apresenta e discute parte da fundamentação teórica que sustenta a investigação. As primeiras seções tratam especificamente de aspectos referentes à Teoria Social da Aprendizagem (WENGER, 1998) e à aprendizagem como participação em Comunidades de Prática (CoP), segundo Lave e Wenger (1991) e Wenger (1998), além de pontuar as características identificadas durante a trajetória do grupo de estudos investigado, a CoP-PAEM, que permitiram caracterizá-lo como uma Comunidade de Prática (WENGER, McDERMOTT, SNYDER; 2002).

A terceira seção apresenta aspectos relacionados à formação profissional de professores especificamente, no que diz respeito ao conhecimento profissional de professores de Matemática segundo algumas publicações (SHULMAN, 1986; ELBAZ, 1983, 1993; PONTE, 1998; SERRAZINA, 1999; CYRINO, 2003; CANAVARRO, 2004; OLIVEIRA, 2004; PONTE & OLIVEIRA, 2002; GUIMARÃES 2008; MARCELO 2009).

O capítulo, 2 caracteriza o Raciocínio Proporcional e os principais conceitos, ideias e formas de pensar subjacentes a ele, com base nas ideias publicadas por Lamon (2012), e apresenta algumas das diferentes interpretações assumidas pelos números racionais em sua representação fracionária $\frac{a}{b}$, algo importante para o desenvolvimento desse raciocínio.

A última seção do capítulo 2 discute a maneira como o Raciocínio Proporcional tem sido apresentado em algumas orientações curriculares (Parâmetros Curriculares Nacionais, *Principles and Standards for School Mathematics*, Programas de Matemática do Ensino Básico) e como tem sido explorado no ensino escolar da Matemática.

O capítulo 3 explicita o encaminhamento metodológico adotado para o desenvolvimento desta investigação, suas características, os sujeitos analisados, bem como os instrumentos utilizados na coleta de informações e os processos para a análise dos dados.

O capítulo 4 apresenta uma breve trajetória dos trabalhos da CoP-PAEM com foco no desenvolvimento do empreendimento *Estudo do Raciocínio Proporcional* em que foram analisados os processos de negociação de significados à luz da Teoria Social da Aprendizagem (WENGER, 1998) evidenciando aprendizagens dos professores, membros dessa Comunidade de Prática, relacionadas ao seu conhecimento do conteúdo matemático, elemento do conhecimento profissional de professores de Matemática.

O capítulo 5 explicita e discute elementos da prática da CoP-PAEM que, durante as ações do empreendimento analisado, oportunizaram aprendizagens dos professores participantes dessa Comunidade de Prática, e algumas implicações desta investigação no processo de formação de professores.

Por fim, são apresentadas as referências bibliográficas e os apêndices utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

CAPÍTULO 1
APRENDIZAGEM EM COMUNIDADES DE PRÁTICA E CONHECIMENTO PROFISSIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Este capítulo apresenta parte dos referenciais teóricos assumidos para o desenvolvimento desta investigação. A seção 1.1 trata de alguns aspectos da Teoria Social da Aprendizagem (WENGER, 1998), em que a aprendizagem dos indivíduos está condicionada a seu pertencimento/participação social em Comunidades de Prática; e a seção 1.2 caracteriza o grupo de estudos investigado, CoP-PAEM, como uma Comunidade de Prática de acordo com Lave e Wenger (1991) e Wenger (1998). Por último, a seção 1.3 traz o conhecimento profissional dos professores de Matemática que pode ser mobilizado durante ações promovidas por uma Comunidade de Prática constituída na perspectiva do desenvolvimento profissional de professores.

1.1 TEORIA SOCIAL DA APRENDIZAGEM: A APRENDIZAGEM COMO PARTICIPAÇÃO SOCIAL EM COMUNIDADES DE PRÁTICA

Aprender é algo inerente à natureza humana, assim diversas teorias têm como objetivo caracterizar e discutir aspectos da aprendizagem com base em diferentes pressupostos, cada uma delas evidenciando elementos específicos e importantes para que a aprendizagem aconteça.

A Teoria Social da Aprendizagem discutida por Wenger (1998) considera os indivíduos como seres sociais, o conhecimento como uma questão de competência a valiosos empreendimentos; que conhecer é uma questão de participação na busca de empreendimentos e que o significado é a capacidade dos indivíduos de experimentar o mundo e se engajar nele de forma significativa. Para o autor, aprender está diretamente relacionado à participação social dos indivíduos em diferentes Comunidades de Prática.

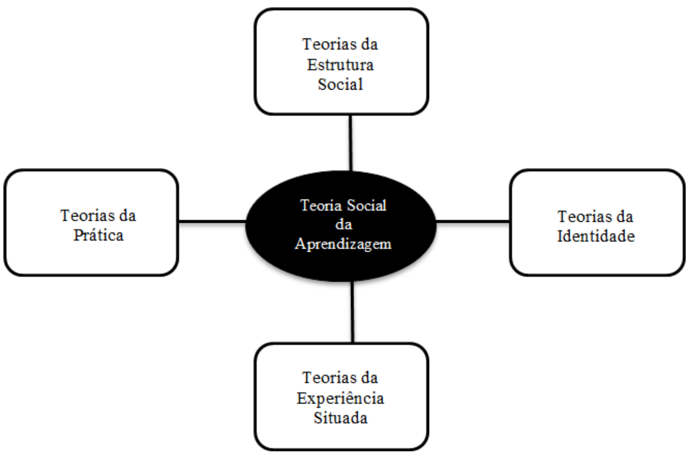
Com essa teoria, Lave e Wenger (1991) e Wenger (1998) desejavam expandir as ideias tradicionais, atribuídas ao conceito de aprendizagem, de um relacionamento até então ilustrado pelas relações mestre/estudante ou mentor/aprendiz para uma ideia de aprendizagem baseada em formas mutáveis de participação e consequente constituição de identidades, tendo por princípio as transformações cognitivas e sociais dos indivíduos em

Comunidades de Prática (WENGER, 1998). Ao propor sua teoria, Wenger ressalta a influência que recebeu de outras teorias de aprendizagem já existentes:

- Teorias de prática social, cuja preocupação está na atividade cotidiana e em cenários da vida real, com ênfase nos sistemas sociais de recursos compartilhados, por meio dos quais os grupos se organizam e coordenam suas atividades.
- Teorias de identidade, que tratam de questões de formação dos indivíduos considerando suas relações sociais.
- Teorias de estrutura social em que são essenciais elementos como instituições, normas e regras, bem como sistemas culturais, discursos e história.
- Teorias da experiência situada, cuja prioridade se refere às dinâmicas da existência cotidiana, à improvisação, à coordenação e à coreografia da interação e que dessa forma, abordam relações interativas das pessoas com o seu ambiente.

Por influência das ideias presentes nessas diferentes teorias, a Teoria Social da Aprendizagem situa-se no ponto de tensão entre as denominadas teorias tradicionais que priorizam a estrutura social (eixo vertical) e aquelas teorias que priorizam a ação (eixo horizontal).

Figura 1 – Dois eixos principais de tradições relevantes



Fonte: Wenger (1998, p. 5, tradução nossa).

A aprendizagem, no eixo vertical, acontece no engajamento dos indivíduos em ações de um grupo social, que tem uma cultura e uma história, transformando a estrutura da comunidade em que está. Já, no eixo horizontal, a aprendizagem é concebida como uma maneira de conduzir as práticas desenvolvidas nesses grupos, bem como de desenvolver/transformar as identidades dos participantes por meio de seu engajamento nessas práticas. Em ambos os eixos, fica explícita a importância da participação para que a aprendizagem ocorra.

Para Wenger (1998), a *participação* é uma ação que

> [...] não se refere aqui somente a eventos locais de engajamento em certas atividades com certas pessoas, mas sim a um processo abrangente de sermos [nós, seres humanos] participantes ativos nas *práticas* de comunidades sociais e construirmos *identidades* em relação a essas comunidades. Participar em um grupo específico ou de um trabalho em equipe, por exemplo, é tanto uma forma de ação quanto uma forma de pertencimento. Tal participação dá forma não somente ao que fazemos, mas também a quem somos e como interpretamos o que fazemos.[2] (p. 4).

Wenger (1998) destaca que uma teoria social da aprendizagem deve integrar componentes que se inter-relacionam e se definem mutuamente, de maneira a caracterizar a participação social como um processo de aprendizagem. Esses componentes são:

> 1) *Significado*: uma forma de falar de nossa[3] capacidade (de mudar) – individualmente ou coletivamente – de experimentar nossa vida e o mundo como algo significativo.
> 2) *Prática*: uma forma de falar de recursos históricos e sociais compartilhados, sistemas, e perspectivas que possam sustentar o engajamento mútuo na ação.
> 3) *Comunidade*: uma forma de falar sobre as configurações sociais em que nossos empreendimentos se definem como buscas valiosas e nossa participação é reconhecida como competência.
> 4) *Identidade*: uma forma de falar a respeito de como a aprendizagem muda quem somos e cria histórias pessoais de transformação no contexto de nossas comunidades.[4] (WENGER, 1998, p. 5).

---

[2] "[…] here refers not just to local events of engagement in certain activities with certain people, but to a more encompassing process of being active participants in the *practices* of social communities and constructing *identities* in relation to these communities. Participating in a playground clique or in a work team, for instance, is both a kind of action and a form of belonging. Such participation shapes not only what we do, but also who we are and how we interpret what we do." (WENGER, 1998, p. 4).

[3] Neste trabalho é feito o uso da primeira pessoa do plural para referenciar os indivíduos de maneira geral, enquanto seres humanos.

[4] "1) *Meaning*: a way of talking about our (changing) ability – individually and collectively – to experience our life and the world as meaningful.
2) *Practice*: a way of talking about the shared historical and social resources, frameworks, and perspectives that can sustain mutual engagement in action.

A figura a seguir apresenta um esquema, com os quatro componentes descritos anteriormente, e tem como elemento central a aprendizagem, vista como uma prática social desenvolvida em Comunidades de Prática, espaços em que "negociamos significados a partir de nossas experiências de vida e constituímos identidades que vão se integrando e definindo a partir do nosso compromisso dentro das Comunidades de Prática às quais pertencemos." (CYRINO; CALDEIRA, 2011, p. 375).

Figura 2 – Componentes de uma teoria social de aprendizagem

Fonte: Wenger (1998, p. 5 tradução nossa)

Trabalhos desenvolvidos pelo GEPEFOPEM (CYRINO, 2009; CALDEIRA, 2010; CYRINO e CALDEIRA, 2011; NAGY; 2013; ROCHA, 2013) têm considerado a aprendizagem como elemento central do esquema estruturado por Wenger (1998), entretanto os componentes apresentados podem ter suas posições alteradas, de forma que, por exemplo, sua componente central seja a identidade em vez da aprendizagem, o que também é considerado pelo GEPEFOPEM (BELINE, 2012; GARCIA, OLIVEIRA, CYRINO, 2013; CYRINO, 2013).

Dado que os componentes se inter-relacionam e se definem mutuamente, quaisquer modificações em seus posicionamentos não alterariam o sentido do esquema.

A aprendizagem, segundo Wenger (1998), acontece por meio do processo de negociação de significados, já que os indivíduos estão engajados no mundo em diferentes

3) *Community*: a way of talking about the social configurations in which our enterprises are defined as worth pursuing and our participation is recognizable as competence.
4) *Identity*: a way of talking about how learning changes who we are and creates personal histories of becoming in the context of our communities." (WENGER, 1998, p. 5).

Comunidades de Prática. Esse processo envolve a interação entre dois outros processos, o **processo de participação** e o **processo de reificação**.

1.1.1 PROCESSO DE NEGOCIAR SIGNIFICADOS

O engajamento dos seres humanos no mundo por meio do desenvolvimento de atividades/tarefas diárias, sejam elas rotineiras ou não, provoca em cada indivíduo diferentes impressões, novas experiências, ou seja, a produção de significados.

À luz da Teoria Social da Aprendizagem (WENGER, 1998), infere-se que esses significados são produzidos, redimensionados, confirmados, rejeitados, expandidos, reinterpretados, modificados e estão em constante *negociação/renegociação* levando em conta particularidades e influências dos indivíduos que os (re) negociam, da cultura, do tempo e do espaço em que esses indivíduos dão vida a esse processo.

Segundo Wenger (1998), os significados negociados são históricos e dinâmicos, contextuais e únicos, e, por estar sob influência de diferentes elementos, o processo de negociar significados altera constantemente as situações nas quais significados são produzidos, bem como os indivíduos que os projetam. O significado "não existe nem em nós, nem no mundo, mas na relação dinâmica de viver no mundo." [5] (WENGER, 1998, p. 54).

O processo de negociar significados pode estar relacionado às situações em que pessoas buscam chegar a acordos entre suas ideias, entre os significados que cada uma produz a respeito de algo, mas, para Wenger (1998), esse processo não se limita a isso. Sua intenção, ao lançar mão do termo *negociação*, é expressar um processo de interação contínua, a conquista de algo que continuamente requer atenção e ajustes.

O foco do processo de negociar significados, bem como sua importância na produção de significados, não está em criar/buscar consensos como resultados dessas negociações, de forma a encontrar alguma uniformidade entre opiniões ou mesmo a aceitação delas pelos indivíduos envolvidos.

Sua importância reside no **processo de interação** que é estabelecido entre indivíduos no momento em que um deles pressupõe ser legítimo o significado produzido/reificado pelo outro – mesmo que esse seja divergente das suas próprias reificações – e no interesse que surge entre esses indivíduos em compartilhar os significados produzidos,

---

[5] "[…] exists neither in us, nor in the world, but in the dynamics relation of living in the world." (WENGER, 1998, p. 54)

em (res)significar tais significados quando necessário, em redimensioná-los, em suma, negociá-los.

Isso só se torna possível, de acordo com a Teoria Social de Aprendizagem, por meio da interação entre os processos de *participação*, que remete ao envolvimento e engajamento dos indivíduos em ações e empreendimentos das Comunidades de Prática das quais participa, e de *reificação*, relacionado às projeções feitas pelos participantes a respeito dos significados produzidos.

1.1.2 O PROCESSO DE PARTICIPAÇÃO

Wenger (1998) emprega o termo *participação* como forma de retratar as vivências dos indivíduos em Comunidades de Prática, suas afiliações nessas comunidades, suas experiências pessoais e sociais. A *participação* caracteriza um processo complexo que envolve diferentes combinações entre o fazer, falar, pensar, pertencer e o sentir.

A principal característica desse processo é o chamado *reconhecimento mútuo*, a capacidade que os seres humanos têm de, ao se engajarem em ações com outros seres humanos, reconhecer nos outros algo que é próprio de cada um, permitindo assim, negociar significados. Entretanto, esse reconhecimento de algo de cada indivíduo nos outros não pressupõe relações solidárias, respeito mútuo, igualdade ou mesmo homogeneidade em suas formas de participação desses indivíduos.

Quanto ao processo de participação, Wenger (1998) destaca alguns outros aspectos a serem considerados em sua teoria.

- A participação não é sinônimo de colaboração, já que envolve tanto relações de cooperação, quanto relações conflituosas que não promovem uma ajuda mútua.
- Todas as experiências dos indivíduos em Comunidades de Prática são transformadas por essas comunidades, bem como todas as comunidades são transformadas por suas diferentes formas de participação.
- A participação vai além de um mero engajamento direto em práticas quaisquer. “Ela coloca a negociação de significado no contexto de nossas

formas de afiliação em várias comunidades. Ela é uma constituinte de nossas identidades”[6] (1998, p. 57).

No ano de 1991, Jean Lave e Etienne Wenger publicam o livro *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation* (Aprendizagem Situada: Participação Periférica Legítima), em que apresentam sua teoria da aprendizagem como forma de participação em Comunidades de Prática e o que eles consideram como característica central dessa aprendizagem: a “participação periférica legítima”, processo pelo qual um indivíduo, recém-chegado, se torna parte de uma Comunidade de Prática por meio das relações desenvolvidas entre ele e os membros experientes que já fazem parte da comunidade.

A expressão “participação periférica legítima” deve ser vista como uma unidade e tem seu significado constituído na inter-relação entre os três elementos (termos) que a compõem, participação, periferia e legitimidade.

(i) **Legitimidade da participação** é a característica que define as diferentes formas, igualmente legítimas, de participação (pertença) dos indivíduos em uma Comunidade de Prática. Para Lave, a legitimidade da participação é “não só uma condição crucial de aprendizagem como um elemento constitutivo do seu conteúdo” (1991, p. 35). Santos (2004) destaca ainda que é o

> [...] participar no que é próprio da prática (e não só da sua aprendizagem) que confere legitimidade a essa participação. Participar como aprendiz é a forma legítima de se aceder à prática, e de ser reconhecido como participante daquela prática. (p.62)

(ii) **Periferia da participação** refere-se à localização no mundo social (seu posicionamento enquanto ser cognitivo no desenvolvimento das atividades nas Comunidades de Prática das quais faz parte), à existência de diferentes graus de envolvimento definidos pela Comunidade de Prática. Assim, as mudanças ocorridas nos posicionamentos, nas perspectivas dos indivíduos fazem parte de suas trajetórias de aprendizagem, constituição de suas identidades e maneiras de se constituírem como participantes de uma comunidade.

O termo ‘periferia’ não remete à ideia de um posicionamento que mantém um indivíduo afastado de um centro ou núcleo da comunidade da qual faz parte, pelo

[6] “It places the negotiation of meaning in the context of our forms of membership in various communities. It is a constituent of our identities.” (WENGER, 1998, p. 57)

contrário, a periferia da participação é um aspecto positivo que permite o acesso gradual e progressivo dos indivíduos aos conhecimentos compartilhados pela Comunidade de Prática.

(iii) **Legitimidade da periferia** é, para Lave e Wenger (1991), "uma noção complexa implicada em estruturas sociais que envolvem relações de poder"[7] (p.36). Há uma ambiguidade na legitimação da periferia: se o caráter da periferia for legitimado por meio do acesso a uma participação mais intensa na Comunidade de Prática, isso progressivamente dará poder ao indivíduo que aprende, caso contrário, se a participação se mantém periférica, por existir legitimidade que impeça maior envolvimento, uma participação mais intensa, esse posicionamento impede o acesso ao poder.

"A ambiguidade na participação periférica liga-se, portanto, a questões de legitimidade, de organização social dos recursos e do controlo sobre eles." (SANTOS, 2004, p. 63).

Dessa forma, a participação periférica legítima, posicionamento pelo qual um indivíduo aprende na perspectiva de aprendizagem a partir da participação social, não pressupõe relações de aprendizagem em que estejam presentes hierarquias institucionalizadas, como as mestre/aluno ou mentor/aprendiz em que informações são compartilhadas *por aqueles* que as conhecem *para aqueles* que se predispõem a aprender.

A aprendizagem como participação social acontece com base no engajamento dos indivíduos em ações diversas, que lhes permitem aprender e ensinar uns aos outros, além de exercer influência no contexto em que acontece e nos indivíduos que estão envolvidos: aprende-se com os outros enquanto participa-se de Comunidades de Prática, e participa-se interagindo com os demais membros de uma Comunidade de Prática enquanto aprende-se.

A ideia de periferia atribui legitimidade a participação dos indivíduos nas Comunidades de Prática, permitindo-os caminhar em direção a uma participação plena, "aprender não é apenas uma condição de pertencimento, mas uma forma de evoluir nesse quesito." (ROCHA, 2013).

1.1.3 O PROCESSO DE REIFICAÇÃO

Reificar, segundo definição do dicionário Houaiss (2001), pode ser entendido como "encarar (algo abstrato) como uma coisa material ou concreta; coisificar;

---

[7] "[…] is a complex notion, implicated in social structures involving relations of power" (LAVE; WENGER, 1991, p. 36).

transformar em coisa”. Já o termo *coisificar*, indicado como um sinônimo de *reificar*, pode ser entendido como “identificar com um ato ou objeto concreto”. Wenger (1998) considera que o conceito de reificação é útil para descrever o engajamento dos seres humanos no mundo como produtor de significados.

Ao se projetar no mundo o entendimento, a compreensão acerca de determinado objeto (uma ideia, uma situação cotidiana qualquer...), por meio de uma experiência (uma conversa, um texto, um monumento, uma celebração, um pensamento), os indivíduos estão envolvidos num *processo de reificação*: são impressas no mundo suas marcas, abstrações, que, ao serem legitimadas pelas/nas Comunidades de Prática em que estão inseridos, passam a ter vida própria, a carregar um significado legitimado no contexto em que é utilizado.

Wenger (1998) destaca em seu texto que emprega o termo/conceito de reificação para se “referir ao **processo** de dar forma à nossa experiência, produzindo objetos que cristalizam esta experiência em ‘coisidade’. Assim fazendo, criamos pontos de enfoque em torno do qual a negociação do significado torna-se organizada.”[8] (p. 58, grifo nosso).

O termo reificação pode sugerir um significado mais estático em que reside a ideia de paralisar algo; o que pode soar limitado/limitador quando utilizado como parte característica do processo de negociação de significados em uma dinâmica de aprendizagem.

Apesar de Wenger (1998) considerar a **reificação como um processo**, o autor não desconsidera essa faceta do termo: o que é reificado ‘congela’ algum elemento de uma experiência de engajamento mútuo, deixando uma impressão na história, um vestígio no contexto em que acontece.

A compreensão de um indivíduo sobre algo, ao ser projetada no mundo, está condicionada à interferência de elementos contextuais, como tempo, espaço, indivíduos envolvidos, ou seja, as reificações estão sob influência dos participantes que se engajam nas negociações de significados e das Comunidades de Prática em que acontecem.

Uma reificação exteriorizada (ou não) torna-se um ponto de enfoque em uma negociação de significados (entre indivíduos diferentes ou entre um mesmo indivíduo em dois momentos distintos), que permite que outras reificações sejam feitas ou que uma mesma reificação seja (re)negociada, de forma que, em algum momento desse processo, os

[8] “[…] to refer to the process of giving form to our experience by producing objects that congeal this experience into ‘thingness’. In so doing we create points of focus around which the negotiations of meaning becomes organized” (WENGER, 1998, p. 58)

significados produzidos possam ser legitimados, por serem coerentes ao momento e contexto em que foram produzidos.

Segundo Wenger (1998), o termo reificação envolve uma "gama de processos que inclui fazer, desenhar, representar, nomear, codificar, e descrever, assim como perceber, interpretar, usar, reutilizar, decodificar e reformular.[9]" (p. 59) que não capta plenamente em sua forma a experiência de negociar significados subjacente às reificações produzidas.

Por conta disso, o conceito caracteriza um processo ambíguo: de um lado, seu poder reside na concisão, transportabilidade e efeito concentrador (fórmulas matemáticas, dispositivos algébricos – como a regra de três – regularidades, estratégias validadas por matemáticos) e, de outro lado, pode ser enganoso por ocultar significados mais amplos (o conhecimento de uma fórmula/domínio de uma estratégia pode levar à ideia ilusória de que um indivíduo compreende completamente o processo que elas descrevem).

Considerando que as reificações fazem parte do processo de aprendizagem dos indivíduos enquanto seres sociais, que essas projeções acontecem em determinados tempo e espaço e que nenhuma delas carrega de fato todos os significados subjacentes à experiência que as produziu, pode-se inferir que as reificações *estão* temporariamente postas no mundo, existindo por ínfimos segundos ou até séculos, e não *são* postas de forma estática e incontestável.

Por ser sempre possível enunciar algo de diferentes maneiras, a cada enunciação, outros significados são produzidos e consequentemente negociados. O **processo de reificação** para Wenger (1998) é um processo aberto "no sentido de que as formas do mundo mudam e desaparecem, e porque – ao não transportar seu próprio significado – essas formas estão abertas à reinterpretação e a múltiplas interpretações."[10] (p. 88).

Esse mesmo autor ainda destaca alguns apontamentos importantes com relação ao termo/conceito *reificação*:

- pode tanto se referir a um processo quanto a um produto de um processo (dado que o significado só existe em sua negociação, dessa forma no nível do significado o processo e o produto não são distintos);
- pode ter origem fora de determinada prática, mas nesses casos deve ser reapropriada para que se torne significativa;

[9] "[...] range of process that include making, designing, representing, naming, encoding, and describing, as well as perceiving, interpreting, using, reusing, decoding, and recasting." (WENGER, 1998, p. 59)
[10] "[...] in the sense that the shapes of the world change and vanish, and because – not carrying their own meaning – such shapes are open to reinterpretation and to multiple interpretations." (WENGER, 1998, p. 88)

- o que é produzido pelas reificações (de forma intencional ou não) pode ser reintegrado como reificação em outros momentos de negociações de significado;
- pode assumir formas variadas como textos, conversas, longos silêncios, teorias, fórmulas.

Para Cyrino e Caldeira (2011), “os produtos da reificação não se referem somente a sua forma, não são simples objetos concretos, mas são reflexos da prática de uma comunidade, extensões dos significados negociados.” (p. 380).

1.1.4 INTERAÇÃO ENTRE OS PROCESSOS DE PARTICIPAÇÃO E REIFICAÇÃO

Os conceitos referentes à *participação* e à *reificação* são concebidos por Wenger (1998) como uma dualidade, “uma unidade conceitual única que é formada por dois elementos inseparáveis e mutuamente constitutivos cuja inerente tensão e complementaridade dão ao conceito riqueza e dinamismo.”[11] (p. 66).

Ou seja, são processos distintos, mas que devem ser vistos de forma conjunta nas negociações de significados; são processos que se completam de maneira que suas limitações são compensadas. É na interação entre os processos que as experiências dos indivíduos no mundo são moldadas e que as aprendizagens ocorrem.

Figura 3 – A dualidade da participação e da reificação

Fonte: Wenger (1998, p. 5 tradução nossa)

[11] “[...] is a single conceptual unit that is formed by two inseparable and mutually constitutive elements whose inherent tension and complementary give the concept richness and dynamism.” (WENGER, 1998, p. 66)

Wenger (1998) lista uma série de apontamentos relevantes, envolvendo os processos de participação e reificação, para o estudo das negociações de significados em Comunidades de Prática.

- *Os processos de participação e reificação constituem uma dualidade, e não opostos*: eles "acontecem juntos; [...] são dois constituintes intrínsecos ao processo de negociação de significado, e sua complementaridade reflete a dualidade inerente deste processo. Participação e reificação ambas requerem e possibilitam uma a outra."[12] (p. 66);
- *Participação e reificação são duas dimensões que interagem não definindo um espectro*: ambos estão sempre envolvidos e podem tomar formas e graus diferentes (pode haver tanto participação como reificação intensas);
- *Participação e reificação implicam-se; elas não substituem uma à outra.* Aumentar o nível de um dos processos não dispensa o outro, pelo contrário, tende a aumentar a necessidade do outro. A

> [...] reificação sempre repousa sobre participação: o que é dito, representado, ou de outra maneira colocado em foco sempre assume uma história de participação como um contexto para sua interpretação. Por sua vez, participação sempre se organiza acerca de reificação porque ela sempre envolve artefatos, palavras, e conceitos que lhe permitem prosseguir.[13] (WENGER, 1998, p. 67).

- *Participação e reificação transformam sua relação e não se traduzem uma na outra*: uma mudança nas relações de participação e reificação nunca é neutra, ela sempre transforma as possibilidades para negociar significado.

Esses processos não descrevem categorias classificatórias. O importante é compreendê-los enquanto processos que interagem entre si.

A dualidade entre os processos de reificação e participação, segundo o próprio autor, "é um aspecto fundamental da constituição de Comunidades de Prática, de sua evolução no tempo, das relações entre práticas, das identidades de participantes, das

---

[12] "[...] they take place together [...] are two constituents intrinsic to the process of negotiation of meaning, and their complementarity reflects the inherent duality of this process. Participation and reification both require and enable each other" (WENGER, 1998, p. 66)

[13] "[...] reification always rests on participation: what is said, represented, or otherwise brought into focus always assumes a history of participation as a context for its interpretation. In turn, participation always organizes itself around reification because it always involves artifacts, words, and concepts that allow it to proceed." (WENGER, 1998, p. 67).

organizações mais amplas nas quais as Comunidades de Prática existem."[14] (WENGER, 1998, p. 65).

Com o objetivo de investigar elementos da prática da Comunidade de Prática CoP-PAEM que oportunizaram aprendizagens de seus participantes acerca de conhecimentos matemáticos de professores de Matemática, foram identificados empreendimentos e ações que oportunizaram essas aprendizagens e analisado o conhecimento matemático dos professores mobilizado a partir dos processos de negociação de significados ocorridos nesses momentos já que, pela Teoria Social da Aprendizagem (WENGER, 1998), o processo de negociação de significados (interação entre os processos de participação e reificação) é mecanismo de aprendizagem nas Comunidades de Prática.

Na seção seguinte caracteriza-se o grupo de professores investigado como uma Comunidade de Prática, descrevendo seus elementos constituintes: *comunidade, domínio e prática*, com base em Wenger, McDermott, Snyder (2002); e as dimensões da prática: *engajamento mútuo, empreendimento articulado e repertório compartilhado*, segundo Wenger (1998), evidenciando aspectos desse grupo de estudos que possam justificar tratá-lo como uma Comunidade de Prática.

1.2 CoP-PAEM: UMA COMUNIDADE DE PRÁTICA DE PROFESSORES QUE APRENDEM E ENSINAM MATEMÁTICA

Considera-se *comunidade* como um grupo de pessoas que comungam crenças, ideais, sentimentos, ou interesses; que negociam objetivos, tarefas e estão engajadas pessoalmente com um mesmo tema, interagem com regularidade e se comprometem com atividades conjuntas construindo uma relação de confiança, o que não significa que no grupo haja homogeneidade de ideias e ações, essas devem ser partilhadas e negociadas (CYRINO, 2009).

Segundo Caldeira (2010), ao assumir tarefas e responsabilidades diversas durante a trajetória de vida,

> nos comprometemos em definir e realizar empreendimentos que dependem da nossa relação com outras pessoas, com o mundo e, assim, desenvolvemos práticas que buscam a conquista conjunta de empreendimentos articulados.

---

[14] "[...] is a fundamental aspect of the constitution of communities of practice, of their evolution over time, of the relations among practices, of the identities of participants, and of the broader organizations in which communities of practice exist." (WENGER, 1998, p. 65).

> Tais práticas são propriedades de certos tipos de comunidades, que Wenger (1998) denomina *Comunidades de Prática*. (p.13)

Ao interagirem regularmente, esses indivíduos, comprometidos e engajados em empreendimentos articulados, desenvolvem, com o passar do tempo, perspectivas, conhecimentos, prática, ferramentas, repertórios específicos daquele grupo de pessoas.

Nesse processo, também se desenvolvem relações pessoais e são estabelecidas maneiras muito particulares de interação entre os indivíduos, que podem até desenvolver uma identidade comum enquanto grupo. Dessa forma, eles tornam-se uma Comunidade de Prática (WENGER, McDERMOTT, SNYDER, 2002).

As Comunidades de Prática estão organizadas por todos os lados em uma sociedade: cada um dos indivíduos, enquanto ser social, faz parte de diferentes Comunidades de Prática, reconhecidas e definidas como tal, ou não. Em algumas delas a participação é mais intensa, já em outras é limitada a uma participação mais periférica.

Independente da forma de participação em Comunidades de Prática, esse tipo de organização é uma combinação única de três elementos fundamentais: um *domínio* de conhecimento, uma *comunidade* de pessoas e uma *prática* compartilhada por essa comunidade, que efetiva o domínio de conhecimento que lhe é característico (WENGER, McDERMOTT, SNYDER, 2002).

Apresenta-se a seguir uma descrição detalhada de cada um desses elementos no grupo de estudos no qual essa investigação foi desenvolvida, constituído como uma Comunidade de Prática, denominada por seus participantes como Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática CoP-PAEM (ROCHA, 2013).

O elemento *comunidade* refere-se ao ambiente no qual as pessoas interagem, aprendem e constroem relações (CYRINO, 2009). É o que forma o "tecido social da aprendizagem" [15] (WENGER, McDERMOTT, SNYDER, 2002). O grupo de professores analisado foi constituído pelos pesquisadores, de doutorado, Tânia (formadora responsável pela organização e coordenação do grupo) e, de mestrado, Márcio e Laís (autora deste trabalho) juntamente com sete professores dos anos finais do Ensino Básico[16].

Essa comunidade não teve origem de forma espontânea, a partir das relações pessoais e profissionais estabelecidas entre professores de Matemática de uma mesma instituição ou núcleo de ensino. Como apontado nos capítulos 3 (seção 3.2) e 4 (seção 4.1)

---

[15] "social fabric of learning" (WENGER, McDERMOTT, SNYDER, 2002).

[16] Todos os sete professores lecionam para turmas dos anos finais do Ensino Fundamental, entretanto alguns deles também lecionam para turmas do Ensino Médio.

deste trabalho, a formadora/pesquisadora Tânia formou o grupo de estudos com a intenção de constituí-lo como uma CoP, tendo por foco o desenvolvimento profissional continuado de professores. Assim, um de seus objetivos foi propiciar dinâmicas no grupo de forma a cultivar algumas interações sociais inerentes às Comunidades de Prática, de maneira que fosse possível tratar o grupo formado por professores e pesquisadores como tal.

Devido a essa trajetória, ao se posicionar como formadora, Tânia foi legitimada pelos professores participantes como coordenadora do grupo, uma líder. Esses professores legitimaram sua identidade de formadora (por sua proposta e seu conhecimento desse modelo de formação continuada, até então desconhecido por eles; e por sua experiência como professora de Matemática da Educação Básica e Ensino Superior) e também de pesquisadora (os interesses, intenções e objetivos de sua investigação).

Assim, Tânia foi reconhecida, em diversos momentos no desenvolvimento dos empreendimentos negociados conjuntamente, como uma *expert* (WENGER, McDERMOTT, SNYDER, 2002).

Para Wenger, McDermott, Snyder (2002), a organização, bem como o desenvolvimento da prática de uma CoP, está atrelada à existência de lideranças internas, que não permanecem concentradas em apenas um indivíduo da comunidade: os empreendimentos e ações negociados demandam, por vezes, conhecimentos específicos que podem não ser constituídos pela maioria dos participantes, ou informações às quais grande parte deles não tem acesso.

Ao legitimar o conhecimento mais aprofundado que alguém tem de uma ideia, situação ou conceito, a Comunidade de Prática elege/aponta (formalmente ou informalmente) um *expert*, um indivíduo que se dispõe a compartilhar as informações que tem e a assumir a organização de ações/empreendimentos.

A variação da figura do *expert* na CoP-PAEM pode ser observada, por exemplo, na Ação 5 do empreendimento *Estudo do Raciocínio Proporcional*, em que cada participante tinha como tarefa selecionar e propor problemas envolvendo proporção/proporcionalidade, com potencial para mobilizar estruturas do Raciocínio Proporcional, e analisar as resoluções apresentadas pelos demais colegas da comunidade inferindo se havia ou não a mobilização desse raciocínio, momento em que cada um deles teve legitimado seu conhecimento relacionado ao Raciocínio Proporcional e sua participação mais central na CoP.

Foram promovidas, entre os professores participantes, discussões acerca de seu conhecimento profissional (conhecimento da Matemática e do ensino dessa disciplina, conhecimento dos alunos, do currículo, dos processos de ensino e de aprendizagem), em que os participantes foram incentivados a relatarem suas vivências enquanto professores e a compartilharem suas angústias, dúvidas, sucessos e fracassos em suas práticas didáticas.

Durante a trajetória do grupo, ficou evidente aos pesquisadores que as características do contexto propiciado por essas dinâmicas de interação criaram um espaço que promovia e incentivava a exploração e mostrava-se seguro para que cada participante pudesse expressar-se livremente.

Isso indicava a presença de fatores fundamentais na constituição de uma Comunidade de Prática, como respeito, confiança, desafio, solidariedade (NAGY, 2013), compromisso e responsabilidade, a qual mais tarde passou a ser conhecida como Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática.

Para Cyrino (2009), o *domínio* de uma Comunidade de Prática pode ser caracterizado como o “elemento que mobiliza os membros a contribuírem e participarem da comunidade na busca da afirmação dos seus propósitos, ações, iniciativas e valorização de seus membros; é o elemento que legitima a existência da comunidade.” (p. 97). O domínio é o que leva as pessoas a se unirem em uma Comunidade de Prática, é o que define a identidade da comunidade, que explicita seu lugar no mundo social.

Um domínio bem definido legitima a existência da comunidade, afirma suas propostas e valores aos seus membros, além de inspirá-los a contribuírem e a participarem dos empreendimentos articulados, os quais negociam em conjunto. O domínio guia suas aprendizagens e dá sentido às ações negociadas e tomadas em conjunto (WENGER, MCDERMOTT, SNYDER, 2002).

As diferentes preocupações, perspectivas e interesses dos participantes de uma Comunidade de Prática podem modificar o domínio dessa comunidade, assim, esse elemento da CoP não se define como um conjunto fixo de problemas (WENGER; MCDERMOTT; SNYDER, 2002).

Na Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática, a CoP-PAEM, o domínio foi identificado como a formação de professores, já que o interesse dos participantes residia em discutir e encontrar formas de lidar com algumas preocupações envolvendo a continuidade de seus estudos da Matemática e de como ensiná-la (evidências desse tema ficaram explícitas durante as negociações de significados ocorridas, em que pontos de enfoque envolvendo ideias do conhecimento matemático dos professores foram identificados).

A *prática* de uma CoP é caracterizada, segundo Wenger, McDermott, Snyder (2002) como um conjunto

> de estruturas de trabalho, ideias, ferramentas, informações, estilos, linguagem, histórias, e documentos que os membros da comunidade compartilham. Enquanto o domínio denota o tópico em que a comunidade está focada, a prática é o conhecimento específico que a comunidade desenvolve, compartilha e mantém.[17] (p. 29).

A prática do grupo investigado foi constituída no desenvolvimento de diferentes empreendimentos negociados e articulados de forma a atender aos interesses dos participantes bem como dos formadores/pesquisadores (fomentar uma Comunidade de Prática na perspectiva do desenvolvimento profissional de professores de Matemática e produzir dados para comporem o *corpus* de suas investigações).

No processo de definir um empreendimento e legitimá-lo como algo de interesse para a CoP, os participantes negociam, organizam e projetam possíveis ações conjuntas (prática comum) a serem desenvolvidas, dividindo responsabilidades com o intuito de desenvolver o empreendimento articulado ao mesmo tempo que constroem meios para alcançá-lo.

A legitimação do empreendimento pelos participantes, e seu consequente comprometimento com as ações negociadas, é o que define e sustenta a prática conjunta constituída por uma CoP.

Na trajetória da CoP-PAEM, foram desenvolvidos os empreendimentos *Estudo dos temas SAEB, Prova Brasil e IDEB; Estudo a respeito do conceito de fração* e *Estudo do Raciocínio Proporcional*. Rocha (2013), ao investigar a CoP-PAEM, por exemplo, identificou, pela análise do segundo empreendimento (*Estudo a respeito do conceito de fração*), os seguintes elementos da prática da comunidade:

> a reflexão a respeito da prática pedagógica, ponto marcante em cada um dos encontros desse grupo; a produção de material manipulativo, a elaboração de tarefas associadas ao material manipulativo produzido, aplicação das tarefas em sala de aula; o relato da aplicação das tarefas em sala de aula e a reflexão a respeito da aplicação; estudo de artigos; registros feitos pelos membros do grupo a respeito das impressões deles sobre a participação nos encontros. (p. 19).

---

[17] "[…] of frameworks, ideas, tools, information, styles, language, stories, and documents that community members share. Whereas the domain denotes the topic the community focuses on, the practice is the specific knowledge the community develops, shares, and maintains." (WENGER, MCDERMOTT, SNYDER, 2002, p. 29)

Quanto ao empreendimento *Estudo do Raciocínio Proporcional*, foram identificados alguns elementos nomeadamente:

- os relatos e reflexões feitos pelos participantes a respeito de práticas pedagógicas. Esse elemento também foi destacado por Rocha (2013), nele ficava evidente o conhecimento profissional dos professores (conhecimento da Matemática e de seu ensino, conhecimento dos alunos, da gestão do tempo, conhecimento do currículo, entre outros);

- a resolução e a discussão de problemas envolvendo proporção/proporcionalidade;

- a elaboração/seleção de tarefas com potencial para mobilizar o Raciocínio Proporcional,

- a reflexão e discussão de registros escritos referentes às estratégias de resolução de problemas apresentadas pelos colegas da CoP;

- o estudo e a discussão de textos (LAMON, 2012) a respeito do Raciocínio Proporcional.

1.2.1 DIMENSÕES DA PRÁTICA DA CoP-PAEM

Ao associar os elementos *prática* e *comunidade*, Wenger (1998) descreve três dimensões da relação pela qual a prática é considerada fonte de coerência de uma Comunidade de Prática: o *engajamento/compromisso mútuo, o empreendimento articulado e o repertório compartilhado.*

A primeira das dimensões da prática, o *engajamento/compromisso mútuo*, está relacionada às diferentes formas de participação dos membros de uma Comunidade de Prática, às relações desenvolvidas entre os participantes (harmoniosas ou conflituosas), ao fato de os indivíduos estarem incluídos no que importa para a Comunidade de Prática à qual pertencem.

A prática de uma comunidade existe na medida em que as pessoas que constituem essa CoP se comprometem e se engajam em ações cujos significados são negociados entre elas. Esse engajamento desenvolvido nessas relações estabelecidas envolve não só

> a nossa competência [de cada indivíduo], mas também a competência dos outros. Baseia-se no que fazemos e no que conhecemos, assim como na nossa capacidade de associar significativamente ao que não fazemos e ao

> que não conhecemos – isto é, às contribuições e conhecimentos dos outros[18]. (WENGER, 1998, p. 76).

Os motivos que levam os participantes a se comprometerem e a se engajarem mutuamente nas ações de uma CoP são variados e assumem valores distintos na vida de cada um deles, mas são esses comprometimento e engajamento, que têm origem na necessidade de lidar com dificuldades e inquietações decorrentes da prática, que os mantêm conectados (CYRINO, CALDEIRA; 2011).

Na CoP-PAEM, cada um dos participantes demonstrou formas diferentes de comprometimento e engajamento nos empreendimentos negociados. Alguns se mostraram mais reservados explicitando suas opiniões, ideias e raciocínios matemáticos de maneira mais discreta, outros comumente compartilhavam seus pontos de vista de forma mais ativa e alguns ainda mudaram suas formas de participação, de formas mais periféricas para formas plenas durante o desenvolvimento dos empreendimentos.

O conjunto específico de ações, ideias, instrumentos, linguagens, dinâmicas de trabalho que compõe a prática constituída pela CoP-PAEM, bem como o domínio característico dessa comunidade, explicitado na seção anterior, só podem ser descritos da maneira como foi apontado devido a estrutura atual dessa comunidade , ou seja, por conta dos participantes que compõem a CoP-PAEM e do engajamento que têm em seus empreendimentos.

Os impactos vivenciados pelas trajetórias de entrada, permanência e saída de alguns participantes, as particularidades das identidades pessoais e profissionais de cada um deles e suas diferentes formas de engajamento mútuo nas ações desenvolvidas (contribuições feitas, ou não; formas de participação e de não participação) promoveram negociações de significados e interações sociais que possibilitaram o desenvolvimento dos empreendimentos listados e das consequentes ações desenvolvidas.

Ou seja, o pertencimento e a participação dos sete professores da Educação Básica, bem como das duas pesquisadoras, de mestrado e doutorado[19], são imprescindíveis para a caracterização da Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática nesse período de sua trajetória[20] considerado para as análises desta investigação.

---

[18] “[...] not only our competence, but also the competence of others. It draws on what we know, as well as on our ability to connect meaningfully to what we don’t do and what we don’t know – that is, to the contributions and knowledge of others.” (WENGER, 1998, p. 76)

[19] Informações detalhadas a respeito dos participantes da CoP-PAEM, ver quadro 1 disposto na página 81

[20] Devida à importância do pertencimento e da participação de cada um dos professores da CoP-PAEM, é que não foi excluída a análise das produções da autora deste trabalho, apresentada no capítulo 4.

Todos os participantes, cada um com as particularidades de sua identidade e de seus interesses, mostraram-se comprometidos e engajados no desenvolvimento dos empreendimentos dessa Comunidade de Prática, compartilhando informações, materiais didáticos, ajudando uns aos outros na elaboração de estratégias para resolução de problemas ou na organização de dinâmicas de aulas.

A segunda dimensão da prática, o *empreendimento articulado*, é, segundo Wenger (1998), o resultado do processo coletivo de negociação na Comunidade de Prática, que reflete a complexidade do engajamento mútuo dos participantes. É algo definido pela comunidade no próprio processo de buscá-lo, que cria entre os participantes relações de responsabilidade mútua que constituem parte da prática da CoP.

Para Santos (2004), da iniciativa de construção ou desenvolvimento de algo por um conjunto de pessoas "emerge um sentido de apropriação e responsabilidade pelo que constroem. Esta característica parece, assim, evidenciar uma íntima ligação com a dimensão anterior (o engajamento mútuo)" (p. 333).

Considerando que o engajamento/compromisso mútuo dos participantes em uma Comunidade de Prática não pressupõe homogeneidade, a negociação e o desenvolvimento de empreendimentos articulados não indicam que os indivíduos envolvidos estejam todos de acordo com as ações ou tomadas de decisões.

O empreendimento "é articulado/conjunto não no sentido de que todos acreditam na mesma coisa ou concordam com tudo, mas no sentido de que é negociado coletivamente."[21] (WENGER, 1998, p. 78). Santos (2004), em acordo com essas ideias de Wenger (1998), ainda destaca que o desenvolvimento de um empreendimento articulado tem como base

> formas particulares que cada um adopta ou constroi para responder aos dilemas [que então] serão coordenadas, estarão interligadas, e só se poderão perceber tendo em conta o que conjuntamente emerge das actuações de todos – um empreendimento conjunto e partilhado, e nesse sentido negociado. (SANTOS, 2004, p. 334)

Na CoP-PAEM, foram negociados e desenvolvidos três empreendimentos articulados, como já citado anteriormente, o *Estudo dos temas SAEB, Prova Brasil e IDEB*; *Estudo a respeito do conceito de fração* e *Estudo do Raciocínio Proporcional*, dos quais foram analisadas algumas ações desenvolvidas no último empreendimento citado.

---

[21] "[…] is joint not in that everybody believes the same thing or agrees with everything, but in that it is communally negotiated." (WENGER, 1998, p. 78)

O *repertório compartilhado*, terceira dimensão da prática como fonte de coerência de uma CoP, surge ao longo do tempo. Enquanto a comunidade busca e desenvolve empreendimentos articulados, ela cria recursos coerentes à sua prática para negociar significados. Esses recursos podem ser caracterizados como

> rotinas, palavras, ferramentas, formas de fazer as coisas, histórias, gestos, símbolos, gêneros, ações, ou concepções que a comunidade tem produzido ou adotado no curso de sua existência, e que se tornaram parte de sua prática. O repertório combina aspectos reificados e de participação. Ele inclui o discurso pelo qual membros criam afirmações significativas sobre o mundo, bem como os estilos pelos quais expressam suas formas de afiliação e suas identidades como membros.[22] (WENGER, 1998, p. 83)

Os elementos que constituem o repertório compartilhado são importantes, não por sua natureza (textos, ações, ferramentas, etc), mas ganham importância para os indivíduos da comunidade na medida em que são apropriados à prática que eles desenvolvem. Na Comunidade de Prática investigada, identificaram-se como parte do repertório compartilhado pelos/entre os participantes, impressões dos processos de ensino e de aprendizagem, relatos de práticas pedagógicas, rotinas.

Algo rotineiro na CoP era a atitude da formadora Tânia de iniciar os encontros da comunidade perguntando aos participantes como é que havia sido a semana deles, se todos estavam bem. Era um momento em que os professores que se sentiam mais à vontade relatavam angústias profissionais ou mesmo pessoais, discutiam e (res)significavam ideias matemáticas, comentavam acerca de vivências na resolução, discussão, análise e aplicação de tarefas na CoP-PAEM e em sala de aula.

Na trajetória de constituição do grupo de professores em uma Comunidade de Prática na perspectiva da formação continuada de professores de Matemática, foi possível observar as interações sociais apontadas por Lave e Wenger (1991) e Wenger (1998), além da construção de relações de confiança e respeito entre os participantes, o que permitiu aos pesquisadores tratarem o grupo investigado como uma Comunidade de Prática – CoP.

Promover essas interações sociais entre professores de Matemática, em formação inicial ou continuada, em grupos que desenvolvem suas atividades em períodos não delimitados *a priori*, cujo foco das discussões e do desenvolvimento dos empreendimentos

---

[22] "[…] routines, words, tools, ways of doing things, stories, gestures, symbols, genres, actions, or concepts that the community has produced or adopted in the course of its existence, and which have become part of its practice. The repertoire combines both reificative and participative aspects. It includes the discourse by which members create meaningful statements about the world, as well as the styles by which they express their forms of membership and their identities as members." (WENGER, 1998, p. 83).

tem por base as próprias preocupações, práticas e vivências dos professores pode ser uma forma significativa de diminuir o isolamento profissional, comumente observado entre professores dessa disciplina, e de propiciar oportunidades de um desenvolvimento profissional mais coerente com as demandas sociais atuais do contexto escolar.

Como apresentado por Ferreira (2006), grupos de estudos com essas características, formados por professores, são contextos em que

> são criadas oportunidades para o professor explorar e questionar seus próprios saberes e práticas, bem como para conhecer saberes e práticas de outros professores, permitindo-lhe aprender por meio do desafio das próprias convicções. (p. 152)

Dessa forma, considera-se importante para o desenvolvimento profissional dos professores, especialmente para o desenvolvimento e (res)significação de seu conhecimento profissional, como o conhecimento da Matemática como ciência e das possibilidades de ensiná-la, a participação em grupos constituídos nessa perspectiva.

Na seção seguinte, apresenta-se mais detalhadamente, que elementos constituem o conhecimento profissional do professor e de que maneira especialmente aspectos do conhecimento matemático constituído por esses profissionais são mobilizados ou (res)significados no contexto de grupos de professores, particularmente nas Comunidades de Prática.

1.3 CONHECIMENTO PROFISSIONAL DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

O conhecimento profissional do professor faz parte da sua identidade profissional. De acordo com Cyrino (2013), a identidade profissional do professor é constituída por

> um conjunto de crenças/concepções interconectadas e de conhecimentos a respeito do seu ofício (conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico, conhecimento curricular, e compreensão acerca da estrutura da disciplina e das práticas concorrentes à sala de aula) bem como, pela sua autonomia e seu compromisso político. (p.3)

O exercício de diferentes atividades profissionais exige dos indivíduos que as executam conhecimentos específicos, inerentes a elas. Esses conhecimentos, bem como quaisquer outros, podem ser modificados para se adequarem às necessidades/demandas do contexto em que se fazem necessários.

> O conhecimento não é puro, independente de seus instrumentos e ferramentas materiais e instrumentos mentais que o tornam possível, é relativo ao tempo, aos padrões adotados e à sociedade na qual se desenvolve. Desse modo, o conhecimento é contextualizado pelas condições que o tornam possível, a partir das necessidades básicas de aprendizagem dos indivíduos e da sociedade, e desenvolve-se à medida que estas condições se transformam. (CYRINO, 2003, p. 49)

Mais especificamente, quanto ao conhecimento profissional dos professores, Elbaz (apud Guimarães 2008) aponta que

> este conhecimento engloba experiência em primeira mão dos estilos de aprendizagem dos alunos, [de seus] interesses, necessidades, capacidades e dificuldades, e um repertório de técnicas de ensino e de competências para a gestão da aula. O professor conhece a estrutura social da escola e o que ela exige [...], bem como a comunidade a que a escola pertence [...] (ELBAZ, 1983, p. 5).

Canavarro (2004) destaca que, pela natureza do conhecimento profissional do professor,

> fica claro que se trata de um conhecimento prático, que resulta da síntese pessoal que o professor realiza ao combinar o seu conhecimento teórico com a sua experiência de ensino e o balanço que dela faz. É, por isso, um conhecimento dinâmico, que evolui com a prática de ensino, que se inicia logo desde o tempo em que foi aluno [...]. É um conhecimento essencialmente dirigido para a acção, orientado para a resolução das situações e problemas profissionais que se colocam num dado contexto. É também na acção que este conhecimento se revela, pois o seu carácter implícito e tácito nem sempre o torna traduzível de forma proposicional. (p.62)

Assim, para a tarefa de ensinar, torna-se necessário que o professor conheça *o que* se propõe a ensinar, *por que* é necessário ensinar, *como* é possível ensinar, *a quem* se ensina, *como o outro aprende* o que se ensina, *sob que circunstâncias* se ensina, *qual a finalidade* de se ensinar e *quem é o professor* enquanto pessoa que ensina.

Conhecer esses elementos implica em refletir a respeito das teorias (conhecimentos científicos/acadêmicos) e das experiências[23] (conhecimentos subjetivos,

[23] (LARROSA, 2009)

intuitivos, tácitos, com grande influência do senso comum) que os sustentam, das formas como estão relacionados entre si, bem como da função e significado de cada um deles para a constituição de uma rede de conhecimento que sustenta/orienta a prática profissional dos professores (conhecimento profissional do professor).

O conhecimento profissional do professor relaciona conhecimentos teóricos e práticos, ou seja, é de certa forma ‘orientado’ pela teoria (ELBAZ, 1983) e tem como base as diferentes práticas dos professores, e, por conseguinte, as consequentes reflexões propiciadas por suas experiências.

É um conhecimento situado e orientado de forma a atender as demandas/finalidades da prática. No processo de constante reflexão e diálogo com a prática, esses elementos do conhecimento profissional são confrontados, transformados e reelaborados, são constituídos em constantes processos interativos de reflexão e diálogo com a realidade (CYRINO, 2003).

Diferentes estudos (SHULMAN, 1986; ELBAZ, 1983, 1993; PONTE, 1998; SERRAZINA, 1999; CYRINO, 2003; CANAVARRO, 2004; OLIVEIRA, 2004; PONTE, OLIVEIRA, 2002; GUIMARÃES 2008; MARCELO 2009) discutem aspectos do desenvolvimento profissional de professores e apontam as dimensões e significados que o conhecimento profissional deles assume em suas práticas.

Existem diferentes organizações e relações estabelecidas entre os elementos que constituem esse conhecimento, mas de forma geral os autores concordam que o conhecimento profissional dos professores abarca o conhecimento do conteúdo que se ensina, do currículo, dos processos de ensino, do contexto e de si mesmo como professor.

Elbaz (1983) aponta a existência de cinco categorias pertencentes ao conhecimento prático do professor: o conhecimento de si mesmo, do contexto de ensino, do assunto a ser ensinado, do desenvolvimento curricular e de ensino (instrução).

A primeira categoria se refere à tradução da forma pela qual os valores, crenças e propósitos pessoais do professor constituem sua prática. A segunda está relacionada ao seu conhecimento dos contextos escolar e social em que sua prática docente é desenvolvida. A terceira faz referência ao conhecimento do professor a respeito da disciplina, o conteúdo que ensina. A quarta e a quinta referem-se, respectivamente, ao conhecimento curricular do professor, de que forma ele compreende e faz uso das propostas dos currículos, e ao seu conhecimento relativo aos alunos e aos processos de ensino e de aprendizagem.

Shulman (1986) apresenta três categorias para o conhecimento dos professores. A primeira é o conhecimento referente ao conteúdo ensinado, que demanda do professor conhecer a quantidade e a organização do conteúdo *per si*; a segunda é o conhecimento pedagógico dos professores, aquele que envolve os conhecimentos de como ensinar o conteúdo.

A terceira categoria é a do conhecimento que se refere ao currículo, elemento que é composto por uma ampla gama de programas desenvolvidos para o ensino de certos conteúdos e tópicos em determinados níveis de escolaridade, de materiais disponíveis para o uso nesses programas e de algumas características que servem como sugestões ou indicadores do uso/não uso de aspectos particulares do currículo, ou de materiais ali apresentados e circunstâncias particulares (SHULMAN, 1986).

Cyrino (2003) aponta como conhecimentos profissionais dos professores o conhecimento do conteúdo, dos conceitos e da estrutura da disciplina; o conhecimento curricular e pedagógico geral, com seus princípios gerais, estratégias de organização e condução da aula, utilização de material didático; o conhecimento do aluno e da gestão de sua aprendizagem individual e em grupo; o conhecimento de si mesmo como professor e o conhecimento do conteúdo pedagógico[24].

A seguir, cada um dos elementos do conhecimento profissional dos professores na perspectiva dessas pesquisas é apresentado detalhadamente.

1.3 1 CONHECIMENTO DO CONTEÚDO A SER ENSINADO

Ao se propor a ensinar conceitos, ideias e propriedades constituídos no campo da Matemática, é primordial que o professor conheça *o que* ensina de modo que se sinta seguro para interpretar, de forma coerente, e explorar, de maneira flexível, os temas matemáticos propostos pelas orientações curriculares que norteiam suas práticas, como os PCN e as Diretrizes propostas pelos estados brasileiros.

O conhecimento desse conteúdo não fica restrito aos seus domínios estritamente teóricos, à Matemática como ciência. Ele vai além, estendendo-se:

- ao conhecimento das possíveis relações internas (entre os próprios conceitos matemáticos) e externas (entre diferentes disciplinas e áreas de conhecimento) a serem estabelecidas tendo como elo os temas matemáticos (PONTE, OLIVEIRA; 2002; CYRINO, 2003);

[24] Segundo Cyrino (2003), o conteúdo pedagógico é entendido como "a integração de diferentes aspectos dos domínios identificados na análise da tarefa profissional do professor. Por exemplo: integração conteúdo e pedagogia, ou seja, integração de idéias matemáticas com o que conhecemos sobre o ensino e a aprendizagem de matemática." (p. 31)

- ao conhecimento da estrutura da disciplina;
- à validação de estratégias e procedimentos;
- às diferentes formas de raciocínio desenvolvidas.

O conhecimento do conteúdo matemático também permite orientar *o ensino da* Matemática, ou seja, *como* ensinar. Segundo Canavarro,

> o conhecimento matemático do professor precisa de combinar o conhecimento da Matemática e o conhecimento sobre a Matemática, que é contextualizado num quadro disciplinar marcado por definições curriculares que enfatizam determinados conceitos e procedimentos, valorizam diferentes aspectos da actividade matemática, os aspectos da sua evolução e história, a sua relação com outros domínios do saber e as suas aplicações. Em especial, inclui uma visão do papel da Matemática enquanto contributo para a formação global de aluno. (2004, p. 40)

Para Schulman (1986), é necessário que o professor entenda o conteúdo para além do que ele é, mostrando-se capaz de compreender por que alguns dos conceitos/temas do conteúdo matemático são afirmados e aceitos, em quais circunstâncias essas afirmações matemáticas são válidas e em que momentos as crenças e justificações a respeito de determinado conceito/tema podem ser contestadas ou mesmo negadas.

É esperada também do professor, segundo Schulman, a compreensão das razões pelas quais algumas ideias, temas e conteúdos são particularmente mais centrais que outros nos processos de ensino e de aprendizagem, algo importante para as constantes decisões pedagógicas que os professores tomam no desenvolvimento de suas práticas profissionais.

Shulman (1986) ainda pontua que conhecer as diferentes maneiras de ensinar determinado conteúdo considerando as particularidades de onde, quem e quando se ensina envolve o conhecimento das fragilidades e dificuldades nos processos de ensinar e de aprender determinado assunto, bem como as maneiras de representar e (re) formular o conteúdo de forma a fazê-lo compreensível para aqueles a quem se ensina.

O conhecimento que o professor constitui de seus alunos, da estrutura disciplinar, do currículo, dos processos de ensino e de aprendizagem, de acordo com as demandas e particularidades de sua prática, acaba por (res)significar seu conhecimento matemático, da mesma forma que seu conhecimento da Matemática (res)significa/(re) dimensiona os demais elementos que constituem seu conhecimento profissional.

Constituir conhecimentos aprofundados da Matemática e das possíveis formas de ensiná-la propicia ao professor o desenvolvimento de bases sólidas, o que influencia de forma positiva a maneira como ele vê a disciplina, bem como a ensina.

Ao considerar a formação de professores, como o domínio da Comunidade de Prática CoP-PAEM, neste trabalho, a proposta é investigar um aspecto importante do desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática, evidente nas negociações de significado ocorridas entre os participantes dessa Comunidade de Prática: elementos do conhecimento matemático constituído por esses professores em serviço.

O foco desta investigação é identificar e analisar que elementos do conhecimento matemático dos professores, especificamente aqueles que constituem/caracterizam o Raciocínio Proporcional, foram mobilizados durante resoluções, discussões e reflexões a respeito de estratégias para a resolução de problemas envolvendo proporção/proporcionalidade em uma Comunidade de Prática destacando a importância do conhecimento do conteúdo a ser ensinado como parte constituinte do conhecimento profissional do professor.

1.3.2 CONHECIMENTO DOS ALUNOS

Conhecer o aluno enquanto ser cognitivo, bem como os processos por meio dos quais ele aprende, é um importante elemento do conhecimento profissional do professor para o desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem, em que ambos os indivíduos estão engajados nas práticas escolares.

Ao desenvolver a tarefa de ensinar, é interessante que o professor escute seus alunos, oportunize momentos durante a dinâmica das aulas em que eles possam expressar-se de maneira livre evidenciando suas formas de interação em grupo, individuais ou com o ambiente, revelando indícios de conhecimentos já constituídos, de seus interesses, potencialidades, fragilidades, de sua cultura, de experiências já vivenciadas, etc.

Faz-se necessário, nesse processo de conhecer o aluno, que o professor tenha conhecimento da gestão dos processos de aprendizagem (individuais e coletivos), identificando possíveis obstáculos e dificuldades cognitivas com as quais seus alunos não conseguem lidar com segurança.

Canavarro (2004) aponta que é importante “que o professor tenha em conta o estado do conhecimento matemático dos alunos (de cada aluno…) e que construa materiais e ambientes de trabalho que desafiem e promovam o seu pensamento matemático.” (p.45).

Para Oliveira (2004), outro elemento importante a ser considerado é “o conhecimento bem como as expectativas que o professor tem das capacidades e das disposições dos alunos para a aprendizagem.” (p.8).

1.3.3 CONHECIMENTO DO CURRÍCULO

O conhecimento do currículo matemático e da gestão curricular inclui, segundo Oliveira (2004), o conhecimento dos objetivos da disciplina bem como de quais são suas finalidades. Ponte e Oliveira (2002) ainda acrescentam a esse conhecimento do currículo os diferentes modos de avaliação a serem feitos (suas intencionalidades, instrumentos).

É importante conhecer a seleção e a sequência de trabalho com os conteúdos matemáticos, quais são e como podem ser relacionados diferentes conceitos e ideias matemáticas, como esses conceitos e ideias guardam relações com outras disciplinas, quais são e como podem ser feitas diferentes representações dos conceitos matemáticos estudados, quais são os materiais mais apropriados ao trabalho com determinados temas da Matemática.

Além do conhecimento do texto curricular,

> o professor precisa de o interpretar, adaptando-o à pessoa e profissional que é e ao contexto onde exerce a profissão, reconstruindo-o para a sua sala de aula e alunos. Para tal, deverá ter em conta todas as suas componentes de forma ponderada e inter-relacionada, equacionando as melhores opções de abordar os conteúdos, pondo em prática as orientações metodológicas para dar consecução às finalidades principais da aprendizagem da Matemática. (CANAVARRO, 2004, p. 48-9)

O conhecimento que o professor tem de seus alunos, do contexto de ensino e de todas as particularidades que permeiam suas práticas possibilita que ele reflita acerca do que observa, e tome decisões com o intuito de aproximar as propostas curriculares aos elementos e situações particulares de sua rotina como professor.

Esse fato, bem como as alterações das perspectivas curriculares, exige dos professores o conhecimento suficiente desse elemento tão influente em sua prática profissional para que possam refletir, discutir tais alterações e adaptações, de forma a tomar decisões e assumir posicionamentos frente às mudanças.

1.3.4 CONHECIMENTO DOS PROCESSOS DE ENSINO

Esse elemento do conhecimento profissional do professor é diretamente utilizado em sua prática letiva e orienta a preparação das aulas (planejamento detalhado das ações para médios e longos prazos, escolha de tarefas a serem propostas), a condução das ações dos processos de ensino e de aprendizagem em sala de aula (as formas de organização do trabalho e de interação – negociação de significados – dos alunos, as formas de avaliação às quais os alunos serão submetidos) e a posterior reflexão do professor a respeito desses momentos (PONTE e OLIVEIRA, 2002; OLIVEIRA 2004).

Segundo Oliveira (2004), “esta vertente será, eventualmente, aquela que tem uma maior visibilidade no discurso do professor sobre a sua prática, pois está intimamente relacionada com ela.” (p.9).

1.3.5 CONHECIMENTO DO CONTEXTO

O conhecimento do contexto e de si mesmo como professor não fazem parte da vertente didática do conhecimento profissional do professor de Matemática segundo Ponte, Oliveira (2002) e Oliveira (2004)[25], mas se articulam com os elementos que compõem o conhecimento didático.

Conhecer o contexto em que está inserido e as particularidades de onde desenvolve suas práticas é fundamental para que o professor coordene os conhecimentos que tem, a respeito dos diversos elementos que compõe seu conhecimento profissional, e as peculiaridades de onde desenvolve e firma suas práticas profissionais. Para Oliveira (2004), há a necessidade de “enquadrar a prática do professor em termos sociais e culturais, pois esta não existe ‘num vácuo contextual’ (GOODSON, 1997).” (p. 9).

Esse elemento fundamental para a estruturação e o desenvolvimento da prática profissional envolve o conhecimento dos colegas de profissão, dos alunos e de seus pais/responsáveis, da estrutura, organização e funcionamento da escola, da comunidade e da cultura local e de aspectos históricos, sociais e políticos relativos à educação no país e na região em que se trabalha.

---

[25] Para esses autores, o conhecimento profissional dos professores abrange o conhecimento didático, o conhecimento do conteúdo e o conhecimento de si mesmo enquanto professor. A vertente didática é constituída pelos conhecimentos da Matemática, do currículo, do aluno e de seus processos de aprendizagem e do processo instrucional.

1.3.6 CONHECIMENTO DE SI MESMO COMO PROFESSOR

Conhecer a si mesmo como pessoa e como profissional é de fundamental importância no desenvolvimento profissional do professor. Esse conhecimento inclui a imagem que o professor tem de si como profissional (as projeções que faz, bem como a imagem que os outros projetam dele), suas potencialidades e fragilidades, habilidades, capacidades e as responsabilidades e o tipo de autoridade que assume em sala de aula e na escola de forma geral (ELBAZ, 1983 apud CANAVARRO, 2004).

O processo de desenvolvimento dos conhecimentos profissionais dos professores acontece, como já apontado, na prática e tem como finalidade atender a aspectos da própria prática do professor, que se caracteriza pela instabilidade, singularidade e presença de situações de conflito.

Por meio de ações e reflexões que consideram essas peculiaridades do contexto em que sua prática está situada, o professor constitui parte de seu conhecimento profissional durante sua trajetória na profissão. Ponte e Oliveira (2002), com base em Elbaz (1983) e Schön (1983), sumarizam a ideia de conhecimento profissional dos professores da seguinte forma:

> conhecimento específico da profissão usado nas diversas situações de prática profissional. Em muitos aspectos, este conhecimento é tácito e fortemente pessoal, desenvolvendo-se e consolidando-se através da experiência e da reflexão sobre a experiência (Elbaz, 1983; Schön, 1983). Para este conhecimento concorre a formação inicial recebida, a interacção com os colegas de profissão [...] (p. 11).

Refletir quanto ao contexto da escola/da sala de aula, de seus alunos, do currículo, individualmente ou em conjunto, no intuito de planejar e tomar decisões, bem como refletir sobre ações já desenvolvidas no contexto escolar possibilita ao professor conceber, estruturar, organizar e conduzir sua prática de outras maneiras, sob outras perspectivas.

Considerando a ideia de Donald Schön, do professor como um prático reflexivo, alguns autores (SERRAZINA, 1999; CYRINO, 2003; PIMENTA, 2006; FAIÇAL, 2006) pontuam que as ações do professor nessa perspectiva envolvem o *conhecimento na ação*, conhecimento tácito, que se evidencia na execução da ação; *a reflexão na ação* que se constitui no diálogo constante que o profissional estabelece entre a realidade com a qual está lidando e seus conhecimentos já constituídos, de forma a ajustar/alterar de maneira coerente os caminhos de sua prática; *a reflexão sobre a ação* e a *reflexão sobre a reflexão na ação,* momentos que recapitulam e reconstituem as ações já postas em prática, sendo possível analisar criticamente suas nuances.

Autores (FERREIRA, 2003, 2006; NACARATO et. al, 2006; CYRINO, 2009; CYRINO E CALDEIRA, 2011; BELINE, 2012; ROCHA, 2013; CYRINO, GARCIA, OLIVEIRA, 2013; OLIVEIRA, GARCIA, 2013) destacam a importância de professores de diferentes níveis de escolaridade se engajarem em práticas coletivas (grupos de estudos, grupos colaborativos, Comunidades de Prática), fomentando discussões e reflexões sobre seu conhecimento profissional, e a relevância que essas dinâmicas assumem no desenvolvimento profissional de professores.

As consequentes discussões e trocas de experiência no processo de reflexão na e sobre a ação de outros professores permitem a cada um dos participantes desses grupos entrar em contato com diferentes informações e opiniões que possibilita a ele (res)significar, (re)dimensionar bem como (re)afirmar elementos que constituem seu conhecimento profissional.

A possibilidade de participação conjunta de professores em grupos como aqueles constituídos em Comunidades de Prática, delineadas na perspectiva de promover seu desenvolvimento profissional, colabora de forma significativa para a constituição do conhecimento inerente à sua profissão, concomitantemente à constituição de sua identidade como professor.

Essa ideia justifica a intenção neste trabalho de investigar que ações de/em uma Comunidade de Prática – CoP – permite identificar indícios de aprendizagens de seus participantes, pela mobilização do conhecimento matemático.

A seguir, apresentam-se considerações de investigações que tratam do desenvolvimento profissional de professores em serviço que têm como foco a participação e o comprometimento desses indivíduos em trabalhos conjuntos e que possuem como ponto de partida e de chegada discussões e reflexões acerca de suas práticas profissionais.

1.4 DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM SERVIÇO

Considerar o professor como um sujeito prático-reflexivo (SCHÖN, 1995) implica tomar como inerentes à sua profissão a investigação e a produção de conhecimentos.

Essa perspectiva alterou tanto a concepção que se tinha do professor, de agente passivo a agente ativo no processo de sua própria formação, como a natureza dos programas e pesquisas que se dedicavam ao estudo e desenvolvimento de novas propostas de formação profissional de professores (o contexto escolar não seria mais visto como um receptor de teorias e conhecimentos produzidos em outros ambientes, que deveriam ser aplicados com eficiência pelos professores; o contexto em que o professor desenvolve suas práticas passa a ser visto como o ambiente onde são constituídos conhecimentos).

Os "cursos", "aperfeiçoamentos", "treinamentos", "reciclagens" oferecidos aos professores como opções de formação continuada têm (ou tiveram durante muito tempo) como base, em sua maioria, os princípios da racionalidade técnica que, segundo Fiorentini e Nacarato (2005), apresentam-se de forma pontual e *descontínua*:

> descontínua em relação à formação inicial dos professores; descontínua em relação ao saber experiencial dos professores, os quais não eram tomados como ponto de partida da formação continuada; descontínua, ainda, em relação aos reais problemas e desafios da prática escolar; e descontínua, sobretudo, porque eram ações pontuais e temporárias, tendo data marcada para começar e terminar. (p.8)

Isso vai de encontro aos pressupostos de um desenvolvimento profissional continuado, contextualizado e articulado da educação do professor. Existe uma perceptível contradição entre as intenções e discursos que sustentam essas ações de formação continuada e seu efetivo desenvolvimento na prática: apesar de serem concebidas de forma a atender *aos* professores, essas propostas não consideram as necessidades e desejos *dos* professores.

Grande parte dessas propostas de formação, segundo Ferreira (2003), está relacionada

> [...] à ideia de freqüentar cursos que buscam atender às *carências* do professor e alcançar resultados predeterminados (por ex., a implementação de determinado currículo ou metodologia de ensino). Nessa perspectiva, a teoria – geralmente desenvolvida longe da escola – é o ponto de partida e as propostas tendem a ser desenvolvidas de modo fragmentado, compartimentalizado e, muitas vezes, descontextualizado da realidade do professor e desconsiderando sua opinião, experiência e necessidades. (p. 33)

Ponte (1998) destaca que tais propostas de formação implicam em um

> [...] movimento [...] essencialmente de fora para dentro, cabendo ao professor assimilar os conhecimentos e a informação que lhe são transmitidos, enquanto que no desenvolvimento profissional temos um

> movimento de dentro para fora, cabendo ao professor as decisões fundamentais relativamente às questões que quer considerar, aos projectos que quer empreender e ao modo como os quer executar. (p. 2)

Os PCN (1997) enfatizam a necessidade de investimentos em propostas de formação continuada em uma perspectiva de desenvolvimento profissional.

> Além de uma formação inicial consistente, é preciso considerar um investimento educativo contínuo e sistemático para que o professor se desenvolva como profissional de educação. [...] A formação não pode ser tratada como um acúmulo de cursos e técnicas, mas sim como um processo reflexivo e crítico sobre a prática educativa. Investir no desenvolvimento profissional dos professores é também intervir em suas reais condições de trabalho. (BRASIL, p. 25)

Oliveira (2002); Fiorentini, Nacarato (2005); Cyrino (2003) Ferreira (2003, 2006); Lopes (2003); Jesus (2011); Nagy (2013) Santos (2004) consideram o desenvolvimento profissional dos professores em uma perspectiva mais ampla que aquela caracterizada pela formação inicial e continuada.

Concorda-se com Ferreira (2003) e Jesus (2011) que descrevem esse desenvolvimento como

> [...] um contínuo movimento de dentro pra fora [que] tende a considerar a teoria e a prática de forma interligada, sem privilegiar uma delas em detrimento da outra. Essa perspectiva envolve todos os aspectos do professor: cognitivo, afetivo e relacional e, ao invés de procurar sanar as carências do professor, envolve múltiplas atividades (cursos, elaboração de projetos, leituras e reflexões, etc.) e procura valorizar suas potencialidades, considerando sua opinião e escolhas. O professor torna-se sujeito ativo e responsável por seu desenvolvimento profissional. (FERREIRA, 2003, p.34)

> [...] um processo que acontece gradualmente [na vida do professor], e que implica aprendizagens formais ou informais. Um processo que considera o professor como um todo, respeitando sua individualidade, frustrações, experiências, conhecimentos, emoções, que, consequentemente, pode conduzir uma modificação na forma de o professor ver a si próprio, a sua prática, os processos de ensino e aprendizagem e o aluno. (JESUS, 2011, p. 17)

Dessa forma, propostas de formação continuada com vistas ao desenvolvimento profissional dos professores, que se proponham a articular conhecimentos teóricos e práticos a respeito da Matemática bem como do ensino dessa disciplina, a oportunizar momentos de reflexão sobre a/na prática dos professores, a viabilizar o compartilhamento de experiências, informações, anseios, sucessos, inseguranças, fragilidades entre esses profissionais, a promover a negociação de significados a respeito de temas diversos, a possibilitar a interação e o desenvolvimento de trabalhos com aspectos colaborativos entre professores de diferentes níveis de escolaridade, é uma inciativa coerente com as necessidades contemporâneas dos professores em serviço – já que tem como ponto de partida e de chegada suas próprias práticas – que oportuniza aprendizagens e consequentemente seu desenvolvimento profissional.

Ao considerar o processo de formação de professores como uma aprendizagem constante, um contínuo caminhar para a mudança, ou seja, como um *desenvolvimento* profissional ao invés de mera *formação*, torna-se relevante oportunizar aos professores momentos conjuntos em que sejam propiciadas discussões e reflexões a respeito de elementos de seu conhecimento profissional.

Para Ferreira (2006), um aspecto relevante na constituição de grupos de professores nessas perspectivas é a

> [...] percepção da participação no grupo como fonte de aprendizagem. Ou seja, o grupo torna-se o contexto no qual são criadas oportunidades para o professor explorar e questionar seus próprios saberes e práticas, bem como para conhecer saberes e práticas de outros professores, permitindo-lhe aprender por meio do desafio das próprias convicções. (p. 152).

Essas propostas de maior interação entre professores, de engajamento em ações coletivas contribuem para a diminuição do isolamento profissional, comumente visto entre professores que ensinam Matemática, e para a (re) organização, (re) construção e (re) estruturação de concepções e crenças, que permeiam e sustentam seus conhecimentos, por meio da constante negociação dos significados reificados dos elementos que constituem o conhecimento profissional dos professores.

A existência de uma periodicidade na comunicação, compartilhamento de informações e opiniões, e da reflexão conjunta entre professores colabora para o desenvolvimento de seu conhecimento profissional, de seus alunos, do contexto em que estrutura suas práticas, o que reflete de forma positiva em sua profissão.

Nesse sentido considera-se que a dinâmica de um grupo, constituído de maneira a fomentar uma Comunidade de Prática – CoP – (WENGER, LAVE, 1991; WENGER, 1998; WENGER, MCDERMOTT, SNYDER, 2002) na perspectiva da Teoria da Social de Aprendizagem (WENGER, 1998), é uma forma de promover uma formação com vistas ao desenvolvimento profissional de futuros professores ou de professores em serviço.

Dentre os elementos do conhecimento profissional dos professores discutidos durante a trajetória da CoP-PAEM, neste trabalho são enfatizadas as discussões a respeito do conhecimento matemático desses profissionais, em especial, no que se refere à mobilização do Raciocínio Proporcional em ações do empreendimento *Estudo do Raciocínio Proporcional* nessa Comunidade de Prática.

No próximo capítulo abordam-se algumas considerações relevantes envolvendo esse raciocínio com base em pesquisas publicadas na área da Educação Matemática.

CAPÍTULO 2
RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

Este capítulo apresenta considerações da caracterização do Raciocínio Proporcional, segundo algumas pesquisas publicadas no contexto da Educação Matemática, e da importância, para o desenvolvimento matemático de alunos e professores, de estudos e discussões de conceitos, ideias e formas de pensar subjacentes a esse raciocínio.

2.1 CARACTERÍSTICAS DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL EM ALGUMAS PESQUISAS

Em diferentes publicações da área da Educação Matemática que tratam desse tema, os termos *Pensamento Proporcional* e *Raciocínio Proporcional* são utilizados, por vezes, como sinônimos, no intuito de caracterizar um tipo de raciocínio que envolve noções de covariância e invariância, comparações multiplicativas entre razões e demanda dos indivíduos a capacidade de interpretar, armazenar e processar conjuntos de informações mobilizando aspectos quantitativos e qualitativos do pensamento (BEHR et al., 1988).

O Raciocínio Proporcional é considerado um conceito pivô no processo de aprendizagem da Matemática escolar. Por um lado é o ponto alto do aprendizado de aritmética pelas crianças no ensino elementar, e ao mesmo tempo, é a base para os futuros estudos de conceitos matemáticos mais complexos que envolvem proporção/proporcionalidade (BEHR et al., 1988).

Lamon (2012) ainda acrescenta que o Raciocínio Proporcional é um dos melhores indicadores de que um estudante compreendeu o significado dos números racionais e os conceitos multiplicativos a eles relacionados.

Raciocinar proporcionalmente exige dos indivíduos mais do que a capacidade de resolver problemas envolvendo proporção/proporcionalidade por meio da aplicação e manipulação correta de relações como $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Esse raciocínio demanda a capacidade de interpretar, fazer predições, elaborar hipóteses, justificar ideias, elaborar e apresentar argumentos que justifiquem a escolha e aplicação de estratégias/procedimentos para resolução de problemas e exige conhecimentos variados que devem ser selecionados, organizados e relacionados entre si de maneira coerente.

Para Behr, Lesh, Post (1988) o Raciocínio Proporcional mobiliza aspectos quantitativos e qualitativos do conhecimento. Os aspectos quantitativos destacados são: a capacidade de resolver algoritmos matemáticos de maneira correta, de pensar em grandezas numéricas em termos relativos, de conceber a razão como uma relação constante (mesmo com a covariação das quantidades que a produzem).

Já os aspectos qualitativos do conhecimento, para os mesmos autores, são: a capacidade de identificar situações em que grandezas numéricas relacionam-se de forma multiplicativa e não aditiva e de interpretar, relacionar e analisar de forma consciente essas grandezas e os resultados numéricos encontrados em problemas resolvidos, avaliando a pertinência desses valores, sua dimensão e significado no contexto dos problemas, além de identificar e distinguir situações que envolvem relações diretamente/inversamente proporcionais, daquelas que não apresentam tais tipos de relações multiplicativas.

A caracterização para esse tipo de raciocínio apresentada por Lamon (2012) vai ao encontro das ideias de Behr et al. (1988), citadas anteriormente. Para essa autora, o

> *Raciocínio Proporcional* refere-se a detectar, expressar, analisar, explicar e oferecer evidências em apoio às afirmações sobre relações proporcionais. A palavra *raciocínio* sugere ainda que usamos senso comum, bom julgamento e uma abordagem cuidadosa para resolver problemas, ao invés de arrancar números das palavras do problema e aplicar de maneira cega regras e operações. Tipicamente não associamos raciocínio com regras dirigidas ou procedimentos mecanizados, mas sim com processo mental, de fluxo livre que exige análise consciente das relações entre quatidades.[26] (p. 4).

Lamon (2012) ainda destaca que o Raciocínio Proporcional não deve ser tomado como um sinônimo de proporcionalidade, mas como uma condição necessária para que os indivíduos sejam capazes de compreender contextos e aplicações matemáticas que envolvam proporção/proporcionalidade.

Neste trabalho assume-se a perspectiva do *Raciocínio Proporcional* ao invés de *Pensamento Proporcional* em acordo com a diferenciação apresentada por Lopes (2012)

[26] “Proportional *reasoning* refers to detecting, expressing, analyzing, explaining, and providing evidence in support of assertions about proportional relationships. The word *reasoning* further suggests that we use common sense, good judgment, and a thoughtful approach to problem-solving, rather than plucking numbers from word problems and blindly applying rules and operations. We typically do not associate reasoning with rule-driven or mechanized procedures, but rather, with mental, free-flowing processes that require conscious analysis of the relationships among quantities.” (LAMON, 2012, p. 4)

para os termos *raciocínio* e *pensamento*. Para essa autora, o *pensamento* pode ser entendido como

> aquilo que é trazido à existência através da atividade intelectual. [...] um produto da mente, que pode surgir mediante atividades racionais do intelecto ou por abstrações da imaginação. O pensamento pode implicar uma série de operações racionais, como a análise, a síntese, a comparação, a generalização e a abstração. (p. 161)

Já o termo *raciocínio*, visto como parte do *pensamento*, é entendido como

> uma operação lógica, discursiva e mental. O intelecto humano utiliza uma ou mais proposições para concluir, por mecanismos de comparações e abstrações, quais são os dados que levam às respostas verdadeiras, falsas ou prováveis. Das premissas, chegamos a conclusões. [...]. O raciocínio é, portanto, um processo de pensamento por meio do qual podemos justificar ou defender uma determinada conclusão a partir de um conjunto de premissas [...] Todas estas formas de raciocínio: explicação, inferência, verificação e demonstração, possibilitam estabelecer relações de consequência entre juízos. (p. 162)

Embora autores como Lamon (2012) e Behr et al. (1988) considerem que a mobilização de aspectos do Raciocínio Proporcional aconteça na elaboração de estratégias e desenvolvimento de procedimentos mais livres para a resolução de problemas envolvendo proporção/proporcionalidade, ou seja, estratégias desarticuladas de fórmulas ou recursos algébricos, como a regra de três (cujos procedimentos podem ser desenvolvidos de forma mecânica), entende-se que um indivíduo, ao optar pelo uso de tal estratégia para a resolução de um problema, evidencia a mobilização de aspectos do Raciocínio Proporcional.

Podem-se observar aspectos como, capacidade de identificar as relações multiplicativas existentes entre grandezas numéricas de um problema, de optar por uma estratégia para resolução, coerente com o contexto, e de, ao selecionar e organizar os valores na estrutura da regra de três, explicitar as grandezas que covariam entre si (e de que forma o fazem) bem como aquelas que permanecem constantes.

Mesmo considerando que o uso de recursos algébricos indica a mobilização de aspectos do Raciocínio Proporcional, concorda-se com os autores (BEHR et al. 1988; LAMON, 2012) no que diz respeito à importância, para a constituição do conhecimento matemático dos indivíduos, de incentivá-los a elaborarem estratégias de resolução para problemas envolvendo proporção/proporcionalidade de forma mais livre, durante suas trajetórias de estudos escolares, não dependendo da exclusiva memorização de regras ou fórmulas.

Matematicamente, estar apto a raciocinar proporcionalmente inclui ainda a compreensão dos significados das representações fracionárias dos números racionais e das relações multiplicativas proporcionais do tipo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

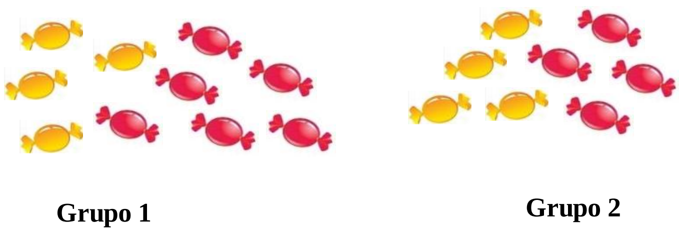
Faz-se necessário entender as diferentes formas de representação do número racional (porcentagem, decimal, fração), as possíveis interpretações para sua representação fracionária $\frac{a}{b}$ em diferentes contextos (relação parte – todo/medida, quociente, razão, probabilidade, operador...) e identificar relações coerentes que podem ser estabelecidas entre duas ou mais dessas representações (relações de proporcionalidade, equivalência ou comparações envolvendo a noção de ordem: maior, menor, igual).

Spinillo (2002) apresenta três fatores que são requeridos dos indivíduos para o desenvolvimento do Raciocínio Proporcional:

> [...] a) reconhecer a equivalência entre situações distintas; b) pensar em termos relativos e não em termos absolutos; e c) estabelecer relações entre relações, i.e., estabelecer relações de segunda-ordem que ligam duas ou mais relações de primeira-ordem. Estes aspectos são o cerne do Raciocínio Proporcional, em especial as relações de primeira e de segunda-ordem. (p.1)

As relações ditas de primeira ordem (*within fractions)*, de acordo com Vanhille, Baroody (2004) e Lamon (2012), podem ser do tipo *parte-parte* (ou razão – SPINILLO (1994)) ou *parte-todo* (conhecidas também como fração – NESHER (1985); SPINILLO (1994)). No primeiro caso, *parte-parte* (ou razão), são estabelecidas relações entre quantidades diretamente comparáveis, por exemplo, dois subgrupos de um conjunto de balas de cores diferentes.

Figura 4 – Relações de primeira e segunda ordem em um conjunto discreto



Fonte: Autora

No grupo 1, a relação *parte-parte* pode ser representada pela razão $\frac{4}{6}$ indicando que existem 4 balas amarelas para 6 balas vermelhas. Já no grupo 2, essa relação parte-parte é indicada como $\frac{4}{4}$, indicando que no grupo em questão existem 4 balas amarelas para 4 balas vermelhas.

Já no segundo caso de comparações, *parte-todo* (ou fração), as relações podem ser expressas entre um subgrupo de um conjunto discreto de elementos ou uma subárea de uma figura com relação à unidade referencial.

A relação *parte-todo* de balas vermelhas no primeiro grupo é representada pela fração $\frac{6}{10}$ que indica que 6 balas de um total de 10 são vermelhas. No grupo 2, a fração que representa a relação *parte-todo*, de balas vermelhas com relação ao total de balas, é $\frac{4}{8}$.

As relações de segunda ordem (*fractions-between*), de acordo com Vanhille e Baroody (2004), consistem em comparações entre as relações de primeira ordem. Se a ideia é comparar os grupos 1 e 2 anteriores, para descobrir em qual deles existe a maior proporção de balas amarelas, faz-se comparações entre relações de primeira ordem, já estabelecidas nos grupos 1 e 2.

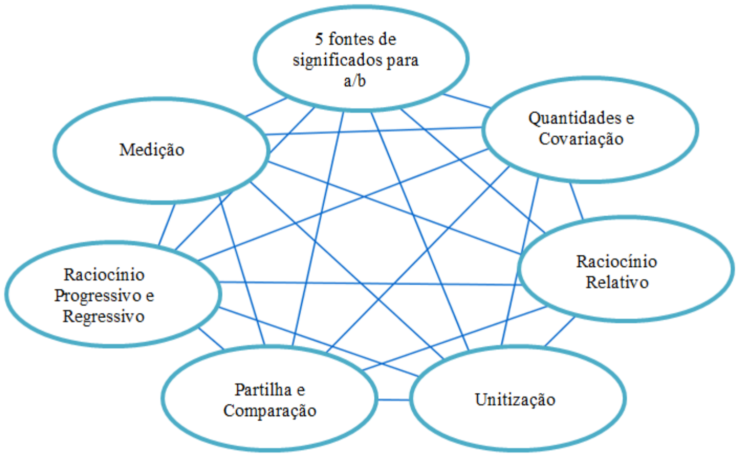
Para Cai e Sun (2004), com "[...] um entendimento sólido de razão, proporção, proporcionalidade direta, e proporcionalidade inversa, os estudantes têm um forte alicerce para desenvolver sua habilidade em raciocinar proporcionalmente."[27] (p. 200).

Lamon (2012) considera que o Raciocínio Proporcional é desenvolvido/mobilizado a partir do trabalho com algumas estruturas centrais do conhecimento matemático que se inter-relacionam formando uma rede de conceitos, contextos, representações e maneiras de pensar.

---

[27] "With a solid understanding od ratio, proportion, direct proportionality, and inverse proportionality, students have a Strong foundation to develop their ability in reasoning proportionally." (CAI, SUN, 2004, p. 200)

Figura 5 – Rede Lamon



Fonte: Lamon (2012, p. 10 tradução nossa)

Lamon (2012) destaca que, ao apresentar e relacionar esses elementos necessários ao desenvolvimento/mobilização do Raciocínio Proporcional, não desconsidera o amplo e intrincado processo de constituição do conhecimento matemático: os “nós” (vértices do polígono imaginário que representa uma rede) indicando ideias, conceitos, formas de pensar matematicamente que estão subjacentes ao Raciocínio Proporcional, apesar de graficamente serem apresentados de forma pontual, representam diversas ideias e conceitos do conhecimento matemático dos indivíduos constituído por meio de diferentes vivências durante suas trajetórias de estudos.

O desenvolvimento/mobilização dessas ideias e conceitos não acontece de forma linear, e o estudo e desenvolvimento desses “nós” repercute em toda a estrutura da rede. É interessante para o desenvolvimento/mobilização do Raciocínio Proporcional dos indivíduos que, durante suas trajetórias escolares, esses diferentes conceitos, ideias e representações propostos na rede de Lamon (2012) sejam estudados e discutidos possibilitando e incentivando estudantes e professores a raciocinarem proporcionalmente.

A seguir apresentam-se algumas considerações a respeito de cada um dos nós presentes na rede (Figura 5), trabalhados durante o desenvolvimento do empreendimento *Estudo do Raciocínio Proporcional* na CoP-PAEM, evidenciando seu significado e a relação que têm com o desenvolvimento/mobilização do Raciocínio Proporcional.

Como as ideias, conceitos e formas de pensar subjacentes aos nós são aspectos matemáticos também considerados por outros autores no estudo do Raciocínio Proporcional, além de Lamon (2012), quando necessário apresentam-se os pontos de vista desses outros autores para complementar as ideias dessa autora. Isso pode ser observado quando as interpretações atribuídas ao registro fracionário $\frac{a}{b}$ são apresentadas e discutidas, o que justifica a subseção ser mais extensa que as demais.

Para explicações mais claras a respeito desses aspectos do Raciocínio Proporcional, às vezes é apresentado o significado de dois deles em uma mesma subseção.

2.1.1 MEDIDA/MEDIÇÃO E O RACIOCÍNIO RELATIVO

A ideia de medida, ou de medição, está presente na constituição do conhecimento da representação fracionária dos números racionais e consequentemente está na base do desenvolvimento/mobilização do Raciocínio Proporcional. As diferentes interpretações, fontes de significado do registro fracionário $\frac{a}{b}$, (um dos nós da rede, Figura 5) podem ser concebidas como formas variadas de efetuar medições:

> – Uma fração [relação parte-todo] mede a relação multiplicativa que uma parte tem com o todo ao qual ela pertence.
> – Uma razão mede magnitude relativa.
> – Uma taxa, como a velocidade, é uma quantificação de movimento.
> – Um quociente é a medida de quanto uma pessoa recebe quando *m* pessoas dividem *n* objetos.
> – Um operador é uma medida de alguma mudança na quantidade em um estado anterior.
> – Como uma medida, o número racional quantifica diretamente uma qualidade como comprimento ou área. [28] (LAMON, 2012, p. 47)

A compreensão da ideia de efetuar medições tem como base três princípios matemáticos importantes (LAMON, 2012):

i) o *princípio compensatório*: quanto menor a unidade considerada, maior a quantidade de unidades necessárias para mensurar algo, e vice-versa;

ii) o *princípio de aproximação*: uma medida é sempre uma aproximação, assim é possível manipular unidades de medida para torná-la tão precisa quanto necessário;

[28] "- A fraction measures the multiplicative relationship a part to has to the whole to which it belongs;
- A ratio measures relative magnitude;
- A rate such as speed is a quantification of motion;
- A quotient is a measure of how much 1 person receives when *m* people share *n* objects;
- An operator is a measure of some change in a quantity from a prior state;
- As a measure, a rational number directly quantifies a quality such as length or area." (LAMON, 2012, p. 47)

iii) o *princípio da partição recursiva*: uma unidade de medida pode ser subdividida em partes menores, e iguais, tantas quantas forem às vezes necessárias para obter uma medida precisa.

A ideia de medida/medição está atrelada ao raciocínio relativo (outro nó da rede, Figura 5), de fundamental importância para o desenvolvimento do Raciocínio Proporcional.

Ao comparar medidas, como no caso de alturas de seres vivos em dois momentos distintos de seu crescimento, é possível identificar a ocorrência de variações nas medidas em termos relativos e absolutos: a diferença entre altura final e inicial de uma árvore resulta em uma quantidade numérica, uma medida linear, indicada por unidades como centímetros, milímetros, metros, etc (uma variação absoluta).

Já a comparação estabelecida entre essa quantidade linear, registrada no crescimento da árvore em dois momentos distintos, e sua altura inicial, resulta em uma *taxa de crescimento*, uma comparação indicando uma variação relativa, sinalizada por unidades como a porcentagem (%).

Segundo Lamon (2012), raciocinar em termos relativos demanda maior abstração por parte dos indivíduos que raciocinar em termos absolutos (raciocínio que tem como base a visualização, contagem e medição direta de quantidades).

Por meio do raciocínio relativo, os indivíduos são capazes de mensurar quantidades mais complexas, abstratas, que não podem ser medidas diretamente com a utilização de instrumentos específicos ou contagem imediata, são quantidades resultantes de comparações/relações entre grandezas de naturezas por vezes distintas como velocidade, densidade, inclinações, concentração, etc.

2.1.2 QUANTIDADES E COVARIAÇÃO

A caracterização do nó relativo à "quantidades e covariação", destacado por Lamon (2012) em sua rede (Figura 5), está relacionada à capacidade dos indivíduos de identificar e mensurar quantidades, além de perceber de que maneira essas quantidades variam (co-variam) quando relacionadas.

O processo de identificar, quantificar grandezas (de forma direta ou indireta por meio do raciocínio relativo) e analisar quais delas sofrem ou não alterações (quais delas co-variam ou permanecem invariantes) e de que forma essas alterações acontecem (de maneira multiplicativa, diretamente ou inversamente proporcional) possibilita o desenvolvimento de formas mais poderosas de raciocínio que vão além da percepção de informações óbvias nos contextos analisados (LAMON, 2012).

2.1.3 PROCESSOS DE UNITIZAÇÃO E RACIOCÍNIO PROGRESSIVO E REGRESSIVO

O processo de unitização está relacionado diretamente ao processo de raciocínio progressivo e regressivo (*reasoning up and down* – Lamon (2012)) e ao conceito de equivalência de frações. A unitização pode ser caracterizada como um processo de reorganizar as grandezas com as quais se trabalha, (re) agrupando-as de maneira a formar subgrupos que continuam a representar as mesmas quantidades totais, ou seja, os inteiros ou unidades referenciais permanecem os mesmos, mas são representados por formas fracionárias diferentes.

Trata-se de “[...] conceitualizar uma quantidade em termos de grupos de diferentes tamanhos”[29] (LAMON, 2012, p. 105); unitizar, para essa autora, é um processo subjetivo e natural para os indivíduos, mas que constantemente deve ser estimulado no intuito de promover maior liberdade de raciocínio.

Unitizar quantidades mantendo suas relações de proporcionalidade é algo desenvolvido por meio do raciocínio progressivo e regressivo, procedimento mental que envolve calcular de maneira progressiva, a partir de uma fração qualquer, as relações de proporcionalidade equivalentes ao inteiro (à unidade referencial) e em seguida encontrar as relações proporcionais para outras frações quaisquer desse inteiro, a partir dessas relações já encontradas, ou vice-versa.

2.1.4 PARTILHA (DIVISÃO EQUITATIVA) E COMPARAÇÃO

O registro de grandezas numéricas na forma fracionária $\frac{a}{b}$ tem raízes na ideia de partilha ou divisão equitativa, no ato de particionar uma unidade, seja ela discreta ou contínua, em seções disjuntas, finitas e iguais, isto é, as partes divididas não se sobrepõem umas às outras e todas elas, resultantes da partilha, fazem parte da unidade (LAMON, 2012).

Esse processo é central para a compreensão da representação fracionária dos números racionais, das representações decimais e do conceito de equivalência entre frações. A

[29] “[...] to conceptualize a quantity in terms of many different-sized pieces.” (LAMON, 2012, p. 105)

ideia de efetuar divisões em uma unidade, podendo em seguida estabelecer comparações entre essas divisões, está também relacionada à medição.

2.1.5 AS DIFERENTES FONTES DE SIGNIFICADO PARA O REGISTRO FRACIONÁRIO $\frac{a}{b}$ DOS NÚMEROS RACIONAIS

Os possíveis significados do registro fracionário $\frac{a}{b}$ podem ser caracterizados como diferentes "interpretações" (LAMON, 2012), "subconstrutos" (BEHR et al., 1983, 1988, 1992), "aspectos" (FREUDENTHAL, 2002), ou "personalidades" (ROMANATTO, 1997, 1999) dos números racionais.

O registro fracionário $\frac{a}{b}$ de um número racional pode ser concebido como uma medida, um quociente, uma razão, um operador, uma taxa, uma probabilidade. Mesmo partindo de bases epistemológicas ou critérios distintos para delimitar e caracterizar essas interpretações, "parece haver consenso entre os diferentes pesquisadores de que os significados centrais ao estudo da representação fracionária dos números racionais são: quociente, razão, operador e relação parte–todo." (NEPEM/USF, 2004, p.54).

Concorda-se com Freudenthal (2002) que as frações são recursos fenomenológicos que representam números racionais, ou seja, a forma fracionária $\frac{a}{b}$ pode ser interpretada como uma manifestação concreta da ideia abstrata de número racional.

O grupo de pesquisadores Behr, Harel, Post, Lesh (1992) aponta que, da perspectiva da pesquisa e do desenvolvimento curricular, o grande desafio é descrever essas personalidades dos números racionais de maneira detalhada e clara para que as aprendizagens dos estudantes possam estar embasadas em fundamentações teóricas seguras.

Estudar, discutir e trabalhar durante a trajetória escolar com essas diferentes interpretações do registro fracionário $\frac{a}{b}$ parece uma alternativa promissora. Ela possibilita que os indivíduos compreendam, além dos diferentes significados assumidos pelos números racionais em sua forma fracionária, quais operações aritméticas são válidas ao lidar com algumas dessas interpretações em problemas matemáticos ampliando o conhecimento constituído a respeito desse conjunto numérico, estimulando o desenvolvimento/mobilização de aspectos do Raciocínio Proporcional.

A seguir são apresentadas algumas ideias de Lamon (2012), cuja teoria serviu como apoio para o desenvolvimento do empreendimento *Estudo do Raciocínio Proporcional* na CoP-PAEM, e de autores como Kieren (1976, 1980, 1988), Freudenthal (2002), Berh, Lesh, Post (1988), Romanatto (1997, 1999) a respeito dos significados do registro $\frac{a}{b}$ dos números racionais.

Relação parte-todo/Medida

Compreender o significado de uma quantidade, representada pelo registro fracionário $\frac{a}{b}$, como uma medida, colabora, segundo Lamon (2012), para o desenvolvimento da chamada *noção fracionária*: capacidade de identificar o 'tamanho' das grandezas relativas em comparações, a posição que essas grandezas ocupam na reta numérica, e de entender o conceito de frações equivalentes.

Como medida, o registro fracionário quantifica determinadas distâncias a partir do ponto zero, em termos de uma unidade de medida especificada (uni, bi ou tridimensional).

Supondo que um intervalo de comprimento *l* esteja particionado em *b* subintervalos menores, indicados por $\frac{1}{b}$, a interpretação medida para a representação fracionária $\frac{a}{b}$ é: *a* intervalos de medida $\frac{1}{b}$ (LAMON, 2012).

Já a interpretação parte-todo para o registro fracionário $\frac{a}{b}$, segundo a mesma autora, indica *a* partes tomadas de *b* partes, ou seja, o número de partes iguais da unidade, considerados com relação ao total de partes iguais em que o inteiro foi dividido.

Apesar de Lamon (2012) considerar as interpretações medida e relação parte-todo como interpretações distintas, autores como Behr et al. (1983), Romanatto (1997, 1999) consideram essas ideias como um único subconstruto, já que a representação fracionária $\frac{a}{b}$ pode ser interpretada da seguinte forma: a quantidade que existe de *a* partes em relação a *b* partes, o que representa uma relação, mas também uma medida.

Por concordar com as ideias de Behr et al. (1983) e Romanatto (1997, 1999), optou-se neste estudo considerar da mesma forma, as interpretações parte-todo e medida como um único subconstruto dos números racionais, ao qual é feita a referência “subconstruto parte-todo/medida”.

Nos PCN, a caracterização para a interpretação parte-todo aponta que essa relação

> [...] se apresenta quando um todo (unidade) se divide em partes equivalentes. A fração, por exemplo, indica a relação que existe entre um número de partes e o total de partes [em que o inteiro foi dividido], é o caso das tradicionais divisões de uma figura geométrica em partes iguais. (BRASIL, 1998, p. 102,).

Com relação a esse significado, deve-se supor que uma pessoa “[...] seja capaz de identificar a unidade que representa o todo (grandeza do tipo contínua ou discreta), compreenda a inclusão de classes, saiba realizar divisões operando com grandezas discretas ou contínuas.” (BRASIL, 1998, p. 102).

Para Lamon (2012), a interpretação medida pode propiciar o estudo de uma característica importante do conjunto dos números racionais, a densidade: com base na ideia de medida/medição, é possível discutir a existência de infinitas grandezas entre duas representações fracionárias (correspondentes á números racionais na reta numérica dos números reais) e a possibilidade de mensurá-las efetuando quantas divisões forem necessárias para as devidas aproximações.

Para a autora, o estudo da interpretação parte-todo propicia discussões a respeito da ideia de “frações equivalentes”, diferentes representações fracionárias que indicam uma mesma quantidade.

Nesher (1985) considera a interpretação relação parte-todo uma ideia de grande relevância na compreensão dos registros fracionários e atribui a ela a denominação “fração”.

Comumente, no ensino escolar, o termo fração é utilizado para referenciar o registro fracionário de forma geral e como um sinônimo para a interpretação relação parte-todo dos números racionais, o que muitas vezes dificulta o desenvolvimento matemático dos estudantes durante o estudo dos números racionais por não possibilitar discussões a respeito de outros significados existentes para a representação fracionária $\frac{a}{b}$.

Quociente

Outra ideia que é subjacente à representação $\frac{a}{b}$ dos números racionais é a 'partição' ou 'divisão equitativa'. A ação de fracionar, quebrar ou separar um inteiro (unidade) está próxima às experiências cotidianas dos indivíduos, e a representação fracionária $\frac{a}{b}$ é interpretada, nesse caso, como um quociente, a divisão entre duas quantidades numéricas *a* e *b* (LAMON, 2012; BEHR et al. 1983).

Ohlsson (1987) trata a interpretação quociente como uma "partição" em que *a* é uma quantidade e *b* é um parâmetro, assim, na representação $\frac{a}{b}$, a quantidade *a* é operada da maneira indicada pelo parâmetro *b*.

Os PCN caracterizam o subconstruto quociente como uma divisão entre quantidades, assim como Lamon (2012) e Behr et al. (1983), e ainda o diferenciam do subconstruto parte-todo:

> [...] outra interpretação do número racional como quociente de um inteiro por outro $\left(a:b = \frac{a}{b};\ b \neq 0\right)$ [...] ela se diferencia da interpretação anterior [parte-todo], pois dividir uma unidade em 3 partes e tomar 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 unidades em 3 partes iguais. (BRASIL, 1998, p. 102).

Operador

Essa representação fracionária dos números racionais é vista como uma função, um transformador capaz de modificar uma área ou conjunto de objetos em outra área ou conjunto de objetos equivalentes.

De forma mais simples, pode-se dizer que os operadores atuam de modo a ampliar ou reduzir, contrair ou expandir, alongar ou encurtar, aumentar ou diminuir grandezas de naturezas diferentes, como áreas, segmentos lineares ou então conjuntos de quantidades discretas de objetos quaisquer.

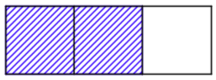
Um operador, segundo Lamon (2012), representa um grupo de instruções para desenvolver um processo. Por exemplo, ao calcular $\frac{4}{5}$ *de* uma grandeza, pode-se multiplicá-la por 4, em seguida dividi-la por 5. Como a segunda operação é realizada sobre o resultado da primeira, pode-se indicar uma representação fracionária que descreva a composição dessas duas operações.

Associar a preposição “de” à operação de multiplicação, como no caso “$\frac{4}{5}$ *de* 10”, é algo enfatizado nos primeiros estudos escolares a respeito das frações, mas o hábito de sempre estabelecer essa relação, e de efetuar uma multiplicação toda vez que esta preposição aparece em um problema envolvendo registros fracionários, pode ocasionar equívocos de interpretação que influenciam de maneira tendenciosa a escolha de estratégias ou mesmo conduzem a uma resolução errônea do problema em questão.

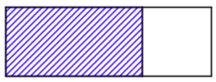
Onuchic e Botta (1997, p. 6) apontam que a interpretação operador é a mais algébrica dentre as interpretações do registro fracionário $\frac{a}{b}$, o que define propriedades multiplicativas para essa representação. Segundo as autoras, um operador, por exemplo, $\frac{2}{3}$, pode ser interpretado das seguintes formas:

Figura 6 – Representações do registro $\frac{2}{3}$ como operador

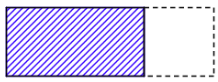
a) $\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3} \left(duas\ vezes\ \frac{1}{3} \right)$



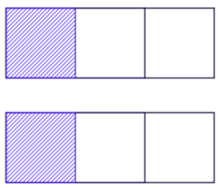
b) $\frac{2}{3} = 1 \times \frac{2}{3} \left(uma\ vez\ \frac{2}{3} \right)$



c) $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times 1 \left(\frac{2}{3}\ de\ 1 \right)$



d) $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2 \left(\frac{1}{3}\ de\ 2 \right)$



Fonte: Onuchic, Botta, (1997, P. 6-7)

Behr et al. (1983) consideram a interpretação operador como uma função; já Ohlsson (1987) nomeia esse subconstruto como "operação composta", na qual o numerador *a* de $\frac{a}{b}$ representa um multiplicador e o denominador *b*, um divisor, que, quando aplicados a quantidades quaisquer, têm a propriedade de transformá-las; ideia também defendida por Nesher (1985).

Nos PCN (1998), há um breve comentário a respeito do operador, um quarto possível significado para o registro fracionário de um número racional: essa operação é observada quando o número "[...] desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica" (p. 102-3).

Com relação a essa descrição, apenas é dado um exemplo de quando esse significado pode ser identificado: "[...] em problemas do tipo: que número devo multiplicar por 5 para obter 2." (p.103).

Razão

Nessa interpretação, o registro $\frac{a}{b}$ (ou "a:b" ou "a *para* b") não representa um número. Aqui o subconstruto do número racional indica um par ordenado de números, que expressa tamanhos relativos de duas grandezas.

Uma razão expressa uma relação multiplicativa, uma comparação entre duas grandezas (OHLSSON, 1987) de mesma natureza em uma situação particular quando não há possibilidade de expressar tal relação por meio de um único número. Os PCN tratam a interpretação razão como "um índice comparativo entre duas quantidades" (BRASIL, 1997, p.102), observável em situações envolvendo probabilidade, índice demográfico e porcentagem.

De forma mais geral, como aponta Smith III (2004), o termo razão caracteriza um número relativo "[...] que tem duas propriedades: (1) relaciona duas quantidades em uma situação, e (2) projeta essa relação para uma segunda situação na qual quantidades relativas das duas quantidades permanecem as mesmas."[30] (p.14).

Como tratado anteriormente, existem duas formas de expressar uma comparação entre grandezas do mesmo tipo: por meio de registros fracionários que

[30] "[...] has two properties: (1) it relates two quantities in one situation, and (2) it projects that relationship onto a second situation in which the relative amounts of the two quantities remain the same." (SMITH III, 2004, p. 14)

representam relações parte-todo (comparação entre uma parte de uma grandeza com relação ao total dessa mesma grandeza) e por meio de razões (comparações parte-parte entre duas grandezas que representam partes distintas do mesmo conjunto ou unidade).

O significado razão para o registro fracionário $\frac{a}{b}$ possui algumas particularidades que possibilitam relações matemáticas diferentes daquelas que podem ser estabelecidas em contextos envolvendo outros significados de $\frac{a}{b}$. Por exemplo, razões podem ter como denominador o número zero[31], o que não é aceito em outras interpretações fracionárias dos números racionais.

Outro caso é, as razões 2 bolas azuis para 3 bolas brancas e 3 bolas brancas para 2 bolas azuis são diferentes, como acontece com as frações (relação parte todo/medida) $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$, porém as razões anteriores, ainda que invertidas, fornecem a mesma informação a respeito da situação que representam, o que não é válido para frações.

A aritmética das frações, como a soma ou subtração, não vale para as razões. Por exemplo, um jogador de basquete encesta 3 bolas em 7 tentativas no primeiro treino e consegue um resultado de 2 cestas em 5 tentativas no segundo treino. Quantos acertos ele teve no total?

O total de cestas feitas nos dois treinos é dado pela soma: 3:7 + 2:5 = 5:12, ou seja, uma razão de 5 acertos para 12 lances, e não $\frac{3}{7}+\frac{2}{5}=\frac{15+14}{35}=\frac{29}{35}$, resultado obtido pela soma aritmética das representações fracionárias.

Entende-se que a interpretação razão do registro fracionário $\frac{a}{b}$, se explorada desde os anos iniciais e durante toda a trajetória escolar dos alunos, e não de forma pontual em apenas alguns anos ou em conteúdos específicos do currículo escolar, propicia a compreensão de ideias envolvendo proporcionalidade, raciocínio relativo, promovendo o desenvolvimento/mobilização do Raciocínio Proporcional por esses indivíduos, o que colabora de forma positiva e significativa para a constituição e compreensão de conceitos matemáticos mais avançados nos anos finais da educação básica, como aqueles do campo algébrico.

[31] Em uma situação hipotética em que existam em um espaço qualquer, 5 homens e nenhuma mulher, há a possibilidade de ser estabelecida a relação (razão) homens para mulheres das formas 5:0 ou 5/0.

Taxa

Quando uma razão representa a comparação entre grandezas de naturezas diferentes e, além disso, pode ser concebida como a descrição de um fenômeno comum a outras situações, essa comparação é considerada uma *taxa*.

Para Lamon (2012), as taxas são consideradas como extensões das razões e podem ser vistas, por exemplo, como uma descrição da maneira como as grandezas analisadas se modificam com o passar do tempo. Comumente encontra-se o termo *por* relacionando às duas quantidades de uma taxa, que podem ser manipuladas de tal forma a fornecer informações relacionando uma unidade da primeira grandeza por outra unidade da segunda grandeza, o que é denominado *taxa unitária*.

Uma taxa amplamente conhecida é a *velocidade*, que indica a variação da distância percorrida *por* um determinado intervalo de tempo considerado (comparação multiplicativa entre grandezas de naturezas diferentes). Por possuir uma denominação própria e significativa para grande parte dos indivíduos, por vezes, a velocidade é interpretada como uma unidade de medida e não como uma relação matemática entre grandezas.

Os PCN (1998) encerram a apresentação e discussão das diferentes interpretações, ou subconstrutos do número racional em sua forma fracionária $\frac{a}{b}$ com os seguintes apontamentos:

> Na perspectiva do ensino não é desejável tratar isoladamente cada uma dessas interpretações. A consolidação desses significados pelos alunos pressupõe um trabalho sistemático, ao longo do terceiro e quarto ciclos, que possibilite análise e comparação de variadas situações-problema. [E mesmo que o contato] com representações fracionárias seja bem menos freqüente nas situações do cotidiano seu estudo também se justifica, entre outras razões, por ser fundamental para o desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos (proporções, equações, cálculo algébrico). (BRASIL, p. 103).

Lamon (2012) defende que o estudo e a discussão das diferentes interpretações fracionárias dos números racionais, bem como o desenvolvimento dos outros conceitos, ideias e formas de pensar inter-relacionadas em uma rede (raciocínio relativo, unitização, raciocínio progressivo e regressivo...), colaboram para que os indivíduos desenvolvam/mobilizem aspectos do Raciocínio Proporcional.

Os estudos apresentados a respeito dessas diferentes interpretações e suas consequentes caracterizações não têm como propósito esgotar todos os significados dos números racionais representados na forma fracionária, tampouco distingui-los para classificá-los de acordo com os contextos em que são identificados. A diferença entre uma interpretação e outra é tênue, e um mesmo contexto pode admitir mais que uma interpretação para uma mesma representação fracionária.

Para que conceitos, formas de pensar e ideias relacionadas ao Raciocínio Proporcional possam estar presentes nos trabalhos em diferentes níveis escolares, permeando de maneira vertical os temas do currículo escolar, é interessante, para os processos de ensino e de aprendizagem desenvolvidos em sala de aula, que os professores se dediquem ao estudo, discussão e reflexão com seus pares sobre aspectos que sustentam o desenvolvimento/mobilização do Raciocínio Proporcional: o que é raciocinar proporcionalmente? Que ideias matemáticas essa maneira de raciocinar demanda? Como promover o Raciocínio Proporcional em sala de aula?

Ao estudarem e discutirem a respeito de aspectos do Raciocínio Proporcional, os professores podem fortalecer o conhecimento que têm desse raciocínio, por vezes pouco trabalhado em sala de aula, e buscar promovê-lo e incentivá-lo entre os alunos, oferecendo informações a respeito dos diferentes significados que o registro fracionário pode assumir, de maneira que lidar com números racionais na forma fracionária, ao raciocinar proporcionalmente, torne-se algo mais comum aos alunos, fazendo parte de seu repertório de estratégias no trabalho com problemas envolvendo proporção/proporcionalidade.

Na seção seguinte, apresenta-se de que forma o Raciocínio Proporcional e os estudos relativos a proporcionalidade têm sido tratados em algumas orientações curriculares de países como Brasil, Portugal e Estados Unidos, e em algumas pesquisas, reforçando a importância do desenvolvimento desse raciocínio pelos estudantes e da preparação dos professores para propiciarem e incentivarem seus alunos a raciocinarem proporcionalmente para além de dispositivos algébricos como a regra de três.

2.2 O RACIOCÍNIO PROPORCIONAL NA MATEMÁTICA ESCOLAR

No Brasil, os primeiros contatos dos indivíduos com situações envolvendo proporcionalidade e representações fracionárias dos números racionais acontecem antes mesmo do estudo formalizado desse tema nas escolas, entre o 3º e 4º anos do Ensino Fundamental.

Por meio de processos intuitivos, os alunos são capazes, a partir de suas experiências diárias, de emitirem julgamentos qualitativos ao compararem conjuntos discretos ou unidades contínuas levando em conta referenciais fracionários já conhecidos, como a 'metade' (SPINILLO 1994, 2002). Lidar com contextos que explicitam relações de proporcionalidade e representações fracionárias é algo que permanece durante toda a trajetória escolar.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998), a proporcionalidade e o Raciocínio Proporcional estão presentes no currículo escolar em diferentes níveis de escolaridade e atrelados a diferentes estudos e discussões, envolvendo temas especificamente matemáticos ou não.

Mesmo assim, com a necessidade constante de lidar com números racionais na forma $\frac{a}{b}$ em diferentes contextos, grande parte dos indivíduos não se sente confortável ou mesmo seguro em trabalhar com tais situações e acaba por terminar a Educação Básica com dificuldades primárias na compreensão desses conceitos.

Como parte dos conteúdos estruturantes da Educação Básica[32], mais especificamente do Ensino Fundamental, a proporcionalidade é apresentada como conteúdo a ser tratado dentro do tema Números e Álgebra. A expectativa que se tem é que os alunos compreendam "[...] o conceito de razão e proporção, regra de três, porcentagem, frações e dos números decimais e as suas operações." (PARANÁ, 2008, p. 51).

Nos terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, é proposto que os professores trabalhem, em sala de aula, com tarefas que incentivem os alunos a fazerem predições, a desenvolverem estratégias não convencionais de resolução antes do contato com recursos algébricos, como o algoritmo da multiplicação cruzada – a regra de três – que comumente substitui a utilização de outras estratégias de resolução, que evidenciam outros aspectos do Raciocínio Proporcional, por ser uma maneira rápida e precisa de obter respostas numéricas para problemas envolvendo proporção/proporcionalidade.

Os PCN (1998), do terceiro e quarto ciclos, destacam a proximidade de temas envolvendo proporcionalidade, como Grandezas e Medidas, com fenômenos cotidianos (possíveis de serem imaginados ou vivenciados), a importância do desenvolvimento do Raciocínio Proporcional para a compreensão e resolução de problemas, e a necessidade de evidenciar e explorar tarefas com diferentes significados dos números racionais em suas

[32] "[...] conhecimentos de grande amplitude, os conceitos e as práticas que identificam e organizam os campos de estudos de uma disciplina escolar, considerados fundamentais para a sua compreensão." (PARANÁ, p. 49, 2008).

formas fracionária (relação parte-todo/medida, quociente, razão e taxa, e operador) e decimal, para a mobilização de conhecimentos relativos ao Raciocínio Proporcional.

No quarto ciclo do Ensino Fundamental, ideias relacionadas à proporcionalidade devem aparecer na “[...] resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções.” (BRASIL, 1998, p. 84).

Neste ciclo espera-se, com relação ao tópico Números e Operações, que os alunos possam identificar

> [...] a natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais (afim ou quadrática), expressando a relação existente por meio de uma sentença algébrica e representando-a no plano cartesiano. (BRASIL, 1998, p. 87)

O documento ainda destaca que os alunos devem ser capazes de resolver problemas envolvendo “[...] grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais por meio de estratégias variadas, incluindo a regra de três.” (BRASIL, 1998, p. 87).

Os *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), orientações curriculares americanas, defendem que, apesar de o desenvolvimento do Raciocínio Proporcional de forma mais consistente estar relacionado ao período *middle grades* (equivalente ao Ensino Fundamental II no Brasil), algumas ideias relacionadas a ele podem ser introduzidas nas séries anteriores, equivalentes ao Ensino Fundamental I brasileiro, incentivando e antecipando o contato dos alunos com situações envolvendo relações multiplicativas, por meio de um estudo formal ou informal do Raciocínio Proporcional (THOMPSON, et.al, 2004).

O foco dos estudos entre a 3ª e 5ª séries americanas recai sobre a equivalência, no aprimoramento e domínio dos cálculos aritméticos básicos, além do trabalho com o raciocínio multiplicativo, que oferece a possibilidade aos alunos de constituírem conhecimentos necessários enquanto caminham para um estudo mais aprofundado dos aspectos do Raciocínio Proporcional nas séries do equivalente ao Ensino Fundamental II. (NCTM, 2000).

Os Programas de Matemática do Ensino Básico, publicados pelo Ministério da Educação de Portugal (ME, 2007), também apontam para o início dos estudos envolvendo conceitos de números racionais, proporcionalidade e razão ainda nos anos iniciais do primeiro ciclo (equivalente aos quatro primeiros anos do Ensino Fundamental no Brasil), dentro do tema de Números e Operações. No segundo ciclo (equivalente aos 5º e 6º anos do Ensino Fundamental brasileiro), no contexto de Números e Operações, a noção de número racional e frações é desenvolvida como foco mais aprofundado da noção de número, em que são trabalhadas, por exemplo, as diferentes interpretações para a forma fracionária $\frac{a}{b}$.

Ainda com relação ao segundo ciclo, é proposto que a noção de proporcionalidade e o desenvolvimento do Raciocínio Proporcional sejam aprofundados no contexto de estudos da álgebra, com a exploração de situações que envolvem proporcionalidade direta, inversa e razões. Nesse ciclo, espera-se que seja concluído

> [...] o estudo das operações elementares sobre frações e [que se complete] a construção dos números racionais, introduzindo os negativos. Os alunos deverão, à entrada do 3.º ciclo, mostrar fluência e desembaraço na utilização de números racionais em contextos variados, relacionar de forma eficaz as suas diversas representações (frações, dízimas, numerais mistos, percentagens) e tratar situações que envolvam proporcionalidade direta entre grandezas. (ME, 2007, p. 29).

No terceiro ciclo (equivalente ao 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental no Brasil), as ideias de proporcionalidade também aparecem na geometria, na construção/análise de figuras semelhantes e no estudo de relações proporcionais, como o Teorema de Tales, e na álgebra, cujas relações diretas e inversamente proporcionais são vistas como funções.

Diferentes pesquisas (KIEREN, 1976, 1980, 1988; BEHR et al.,1983; LESH, et al., 1988; BEHR, HAREL, POST, LESH, 1992; ROMANATTO, 1997, 1999; LAMON, 2005; ONUCHIC e BOTTA, 1997; ONUCHIC e ALLEVATO, 2008) apontam fragilidades identificadas nos processos de ensino e de aprendizagem de temas que são base para o desenvolvimento/mobilização do Raciocínio Proporcional, como o estudo das interpretações das representações fracionárias de números racionais, que têm influência direta na constituição deste raciocínio matemático.

De modo geral, os autores concordam que tradicionalmente o ensino dos números racionais e de suas representações fracionárias tem sido pautado somente em uma das possíveis interpretações para o registro $\frac{a}{b}$, a comparação ou relação parte-todo/medida, e privilegiado a manipulação de algoritmos e símbolos, quase sempre introduzidos precocemente nos anos iniciais escolares, ao invés de estimular e incentivar a compreensão e o desenvolvimento de raciocínios mais livres.

Se há entre os professores a preocupação com um ensino que promova compreensão do sentido das frações e dos números racionais, eles devem estar cientes de que existe uma gama de fenômenos que podem ser representados por esse conjunto numérico e seus registros fracionários, mas que têm interpretações e significados diferentes. (GARCIA et. al, 2012).

Dessa forma, faz-se necessário que os professores invistam em estudos dos aspectos, ideias, conceitos envolvidos no Raciocínio Proporcional, de forma a desenvolverem ou mobilizarem com mais frequência esse raciocínio e consequentemente proporcionarem aos estudantes, em sala de aula, oportunidades que os incentivem a também raciocinarem proporcionalmente.

O próprio tema proporcionalidade, que abrange os números racionais, as razões, as representações fracionárias em geral, tem sido concebido no ensino de Matemática como um tópico curricular e não como uma ideia a ser compreendida e trabalhada em momentos convenientes da trajetória escolar, independente dos níveis de escolaridades das turmas ou dos temas matemáticos estudados.

O ensino de conceitos relacionados aos diferentes registros e interpretações dos números racionais e às razões, como partes indispensáveis para o desenvolvimento do Raciocínio Proporcional, deveria oportunizar e encorajar alunos e professores a desenvolverem suas próprias estratégias para resolução de tarefas, a levantarem hipóteses, a predizerem resultados, a utilizarem os domínios da linguagem materna para justificar suas estratégias e raciocínio antes do trabalho com formalizações dos conhecimentos matemáticos em regras e fórmulas.

Dessa forma, seria possível promover maior liberdade e autonomia para os indivíduos, incentivando-os a mobilizarem diferentes elementos de seu conhecimento matemático e a elaborarem estratégias diferentes daquelas matematicamente estruturadas e formalizadas, mas com potencial matemático, para resolverem problemas envolvendo proporção/proporcionalidade.

Spinillo (1994) destaca que muitas vezes a base do ensino de proporção tem como foco principal "[...] a quantificação numérica (cálculos) e o uso do algoritmo da regra de três" (p. 110), e mais, que os conceitos matemáticos envolvidos comumente são apresentados após serem

> [...] reduzidos de forma simplista à sua representação simbólica (expressões do tipo y/a = x/b; ou a:b :: c:d) e o Raciocínio Proporcional é entendido

> como a utilização de um algoritmo de resolução. Tanto a representação simbólica como o uso do algoritmo não garantem uma compreensão do significado das relações envolvidas no conceito. Assim, a compreensão conceitual do que de fato está envolvido no Raciocínio Proporcional é aspecto negligenciado no ensino de proporção. (1994, p. 110)

Para Weinberg (2004), o conhecimento que os professores constituem a respeito de seus alunos indica que é

> indispensável para os estudantes não apenas encontrar as respostas, mas também determinar o que eles fizeram matematicamente e por que [...]. Apesar de alguns livros enfatizarem a estratégia da multiplicação cruzada para resolver proporções, eles raramente explicam por que isso deve ser utilizado (Levin, 1999). Nós [professores] devemos ajudar os estudantes a reconhecerem que muitas estratégias de Raciocínio Proporcional são apropriadas e válidas [...]. Nós não devemos apenas ensinar essas estratégias para os nossos estudantes, mas também reforçar os significados subjacentes do Raciocínio Proporcional na situação.[33] (p.144)

Lidar com problemas envolvendo proporção/proporcionalidade por meio de estratégias com base em recursos algébricos, como a regra de três, não deve ser uma ideia excluída da trajetória de desenvolvimento do Raciocínio Proporcional, já que esta regra constitui uma ferramenta eficiente para resolução de problemas.

Entretanto, durante essa trajetória de estudos, os professores devem estimular seus alunos a produzirem significados para os conceitos, ideias e formas de pensar subjacentes ao Raciocínio Proporcional e consequentemente para fórmulas, regras que têm como princípio esse raciocínio, de maneira que os alunos sintam-se seguros ao escolher, elaborar e desenvolver estratégias para resolução de problemas envolvendo proporção/proporcionalidade, evidenciando a mobilização de aspectos do Raciocínio Proporcional.

Preocupa a perspectiva de que, por vezes, o trabalho com o Raciocínio Proporcional não seja estimulado nas escolas ou que esteja restrito ao ensino de cálculos e à manipulação correta de algoritmos referentes a regras, como a regra de três, pois isso propicia um desenvolvimento frágil, pouco significativo, deste raciocínio matemático.

Mesmo que orientações curriculares (PCN, NCTM, ME) apontem a necessidade e a importância do desenvolvimento do Raciocínio Proporcional, dentro e fora do

---

[33] "[...] imperative for students not only to find the answer but also to determine what they did mathematically and why [...]. Although some textbooks emphasize the cross-multiply strategy for solving proportions, they rarely explain why it should be used (Levin, 1999). We must help students recognize that many proportional reasoning strategies are appropriate and valid […]. We must not only teach strategies to our students but also reinforce the underlying meaning of the proportional reasoning in the situation." (WEINBERG, 2004, p. 144)

contexto escolar, pouco se vê com relação à discussão e à elaboração de estratégias de ensino que promovam o desenvolvimento/mobilização de aspectos desse raciocínio.

O pouco trabalho em sala de aula com elementos matemáticos que promovem o desenvolvimento do Raciocínio Proporcional pode estar relacionado aos conhecimentos matemáticos, constituídos pelos professores em sua trajetória profissional.

Durante sua formação inicial ou continuada, muitos deles não tiveram acesso a informações a respeito de elementos, conceitos, temas matemáticos, nem a oportunidade ou estímulo a discussões e reflexões cuja preocupação fosse as implicações dessas ideias no ensino e na aprendizagem da Matemática.

As fragilidades no conhecimento matemático dos professores que estão em serviço conduzem à insegurança de expandir o trabalho de alguns temas, como frações, números racionais e razões, ou mesmo o Raciocínio Proporcional, o que comumente os faz firmarem suas práticas pedagógicas em perspectivas mais tradicionais – com as quais provavelmente tiveram contato enquanto alunos – em que, por vezes, a valorização de habilidades com cálculos se sobrepõem ao desenvolvimento de raciocínios mais autônomos.

Dessa forma, ações de formação continuada, elaboradas na perspectiva do desenvolvimento profissional dos professores, e que promovam a reflexão e a (res)significação do conhecimento matemático desses profissionais – suas ideias e concepções a respeito da Matemática como ciência e do ensino dessa ciência em sala de aula – por meio de trabalhos em conjunto, são importantes para os processos de ensino e aprendizagem de professores e de alunos.

CAPÍTULO 3
ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

De acordo com Cyrino (2009), embora diversas investigações no campo da Educação Matemática tenham promovido contextos que oportunizam aprendizagens de professores e descrito *o que* eles aprendem em termos sociais, pouco tem sido feito para explicar *de que forma* esses contextos oportunizam tais aprendizagens.

Considerando os pressupostos de Wenger (1998) de que a aprendizagem está relacionada à participação dos indivíduos em Comunidades de Prática; buscou-se, nesta investigação, responder à seguinte questão: *Que elementos da prática de uma CoP oportunizaram aprendizagens relacionadas ao conhecimento matemático de professores de Matemática nas ações de resolver, discutir e refletir a respeito de problemas envolvendo proporção/proporcionalidade do empreendimento Estudo do Raciocínio Proporcional?*

Para tanto foram pontuados como objetivos:

- Identificar os empreendimentos da CoP-PAEM que oportunizaram aprendizagens a respeito do conhecimento matemático de professores;
- Analisar o conhecimento matemático de professores mobilizados pelos membros da CoP-PAEM no processo de:
    a) Resolver e discutir problemas matemáticos envolvendo proporção/proporcionalidade (Ação 1);
    b) Refletir a respeito de algumas destas resoluções e justificações tendo em conta o apoio da literatura sobre o tema (LAMON, 2012) (Ação 4).

Na sequência são apresentadas, a perspectiva metodológica assumida, a caracterização do grupo estudado e de seus participantes, a delimitação dos instrumentos utilizados para a recolha das informações que compuseram os dados para análise, assim como os procedimentos de análises.

3.1 ESCOLHA METODOLÓGICA

De forma a manter a coerência entre os objetivos deste estudo e as ações empreendidas buscando responder à questão de pesquisa, optou-se por uma investigação de natureza qualitativa, abordagem que

> exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo. (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p. 49)

Para os mesmos autores, uma pesquisa qualitativa, pode assim ser caracterizada por atender particularidades, como:

(i) *O ambiente natural é fonte direta dos dados, constituindo o investigador o instrumento principal.* A investigadora participou de todos os encontros da Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática envolvendo-se no desenvolvimento dos empreendimentos e na realização das tarefas, registrando informações relevantes e pertinentes a esta investigação por meio de um diário de campo, para complementar as informações audiogravadas.

(ii) *A investigação qualitativa é essencialmente descritiva*. As informações obtidas por meio das gravações em áudio foram transcritas para que, junto com as anotações a respeito do comportamento dos participantes e dos registros escritos produzidos por eles, fosse possível descrever e analisar os dados.

(iii) *Os investigadores interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos*. O foco da investigação foi analisar, durante os diversos encontros, que elementos da prática de uma Comunidade de Prática oportunizaram aprendizagens dos participantes, ou seja, o interesse maior estava no processo de desenvolvimento do grupo.

(iv) *Os investigadores tendem a analisar os seus dados de forma indutiva*. O ponto de partida foram informações recolhidas, as quais foram organizadas de maneira que revelassem aspectos mais específicos da investigação. Em acordo com os pressupostos da pesquisa qualitativa, foi desenvolvido um estudo interpretativo já que as informações recolhidas, que posteriormente compuseram os dados desta pesquisa, foram analisadas de forma indutiva, com a perspectiva de fornecer evidências/indícios que permitissem compreender que elementos da prática da Comunidade de Prática CoP-PAEM oportunizaram aprendizagens de professores relacionadas ao seu conhecimento matemático.

(v) *O significado é de importância vital nesta abordagem*. Nos contatos estabelecidos com os participantes da CoP-PAEM, foram mantidos, respeitados e destacados seus pontos de vista que descreveram os significados produzidos por eles no decorrer dos empreendimentos da comunidade.

Esta pesquisa, bem como as pesquisas desenvolvidas por Cyrino (2009), Caldeira (2010), Cyrino e Caldeira (2011), Beline (2012); Nagy (2013), Rocha (2013) e Cyrino (2013), trata da dinâmica de um grupo de estudos, que se caracterizou como uma Comunidade de Prática, em que o desenvolvimento profissional de professores é visto como um campo de prática e como um campo de *pesquisa.*

A participação/envolvimento da pesquisadora com o grupo investigado não se restringiu apenas a observações das interações entre os outros participantes da CoP-PAEM.

Como membro legitimado por essa Comunidade de Prática, a pesquisadora se envolveu de forma ativa em todas as dinâmicas desenvolvidas no/com o grupo de professores, assumindo os papéis de participante em processo de formação continuada, na medida em que negociou e participou das ações da comunidade, de investigadora, ao buscar na Comunidade de Prática elementos que pudessem responder à questão de investigação e de formadora, visto que colaborava com Tânia nas intervenções na prática da CoP buscando promover o desenvolvimento profissional dos membros da CoP-PAEM.

Pelas intenções deste estudo, bem como pela descrição da participação da pesquisadora no grupo investigado, este trabalho pode ser caracterizado como uma *pesquisa intervenção* (KRAINER, 2003). Nessa modalidade, cujo *design* combina intervenção e pesquisa, os investigadores

> não se posicionam fora da prática e tampouco investigam sua própria prática a fim de melhorá-la. O pesquisador/formador desempenha um duplo papel: por um lado é um investigador que visa "elevar sua própria compreensão e conhecimento teórico de uma forma a compartilhá-la com a comunidade científica" (KRAINER, 2003, p.97) e, por outro lado, é um formador que busca promover o desenvolvimento dos participantes, decorrente da prática. (CYRINO, 2013, p. 5191)

Segundo Krainer (2003), a pesquisa intervenção não tem como pressuposto somente aplicar conhecimentos produzidos em contextos como o das universidades, mas, para além disso, a pesquisa intervenção tem como intenção produzir conhecimentos locais transpondo a ideia do distanciamento existente entre os conhecimentos científicos e os práticos.

Dessa forma, grande parte das vezes as pesquisas intervenção constituem-se em processos-orientados em contextos limitados gerados por meio da contínua comunicação e interação com a prática.

3.2 O CONTEXTO E OS SUJEITOS INVESTIGADOS

O grupo de estudos nomeado "Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática – CoP-PAEM" foi organizado no ano de 2011, na cidade de Paranavaí, Estado do Paraná, com a intenção de constituir-se em uma Comunidade de Prática (CoP) na perspectiva de Lave e Wenger (1991) e Wenger (1998), de forma a propiciar um contexto para pesquisas e para o desenvolvimento profissional de professores em serviço em que fosse possível investigar que elementos da prática oportunizaram aprendizagens de professores de Matemática.

A referida Comunidade de Prática foi formada como parte dos estudos de um projeto de doutorado desenvolvido pela formadora/pesquisadora Tânia Marli Rocha Garcia (aluna do PECEM – UEL). As pesquisas desenvolvidas nessa comunidade fazem parte do projeto "Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática", coordenado por docentes do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PECEM da Universidade Estadual de Londrina – UEL e vinculado ao Programa Observatório da Educação (Edital nº. 38/2010/CAPES/INEP).

Desde sua constituição, em março de 2011, a Comunidade de Prática CoP-PAEM se reúne semanalmente, às terças feiras nas dependências do Laboratório de Matemática do Colégio Estadual de Paranavaí – Ensino Fundamental, Médio, Normal e Profissional – CEP. Os encontros têm início às 13h 30min e término às 15h 30min.

A partir do segundo semestre do ano de 2013, o cronograma de encontros da comunidade sofreu alterações. Com a necessidade de as formadoras/pesquisadoras Tânia e Laís dedicarem mais tempo à organização e à escrita de seus trabalhos de doutorado e mestrado, a CoP-PAEM passou a agendar seus encontros a cada 15 dias.

A princípio a denominação do grupo de estudos era "Comunidade de Prática de Professores que Ensinam Matemática", mas, com o decorrer dos encontros, uma das professoras participantes sugeriu que tal denominação fosse alterada para "Comunidade de Prática de Professores que *Aprendem* e Ensinam Matemática" dado que a CoP oportunizava a todos aprenderem mais Matemática, ou seja, (res)significarem seus conhecimentos a respeito da Matemática e do ensino dessa disciplina, sugestão que foi legitimada por todos os outros participantes.

Durante sua trajetória, a configuração dos participantes da CoP-PAEM se alterou com a inclusão/saída de alguns membros. Inicialmente o grupo de participantes era composto por três professoras da Educação Básica, Cléa, Eva e Bia, a pesquisadora de doutorado e formadora, Tânia, e um pesquisador de mestrado e formador, Márcio Rocha (ambos alunos do PECEM – UEL).

Atualmente o grupo conta com sete professores da Educação Básica de diferentes instituições[34] do núcleo de Paranavaí e com as formadoras/pesquisadoras Tânia e Laís, autora deste trabalho. O grupo realizou os encontros com a coordenação de Tânia e apoio de Márcio e Laís. Atualmente, Márcio não participa mais da CoP-PAEM.

No quadro a seguir é apresentada a movimentação dos participantes (data de ingresso, saída, retorno) durante a trajetória da CoP-PAEM no período de março de 2011 a setembro de 2013, além de mais algumas informações pessoais e profissionais a respeito de cada um. Os nomes dos participantes apresentados no quadro são fictícios, de acordo com o termo de consentimento livre-esclarecido (APÊNDICE A), exceto os nomes dos três investigadores/formadores.

Quadro 1 – Informações dos participantes da CoP-PAEM

Nome	**(I) Ingresso (S) Saída (R) Retorno**	**Função**	**Idade**	**Tempo de magistério**	**Formação**
Tânia	(I) 01/03/2011	Coordenadora CoP-PAEM e Pesquisadora	47	26	Doutoranda em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM)
Márcio	(I) 01/03/2011 (S) 11/12/2012	Prof. Outra	35	11	Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM)
Bia	(I) 01/03/2011	Prof. CEP	42	22	Graduada em Ciências/Matemática (Licenciatura Plena) e especialista em Orientação, supervisão e administração escolar.
Cléa	(I) 01/03/2011	Prof. CEP	52	28	Graduada em Ciências/Matemática (Licenciatura Curta) e

[34] É identificada neste trabalho apenas a instituição de ensino na qual acontecem os encontros da Comunidade de Prática (CoP-PAEM), o Colégio Estadual de Paranavaí (CEP); as demais instituições em que alguns participantes lecionam são indicadas por ‘outras’.

					especialista em Métodos e Técnicas de Ensino
Eva	(I) 01/03/2011	Prof. CEP	62	24	Graduada em Ciências/Matemática (Licenciatura Plena) e especialista em Didática e Metodologia do Ensino
Tina	(I) 01/03/2011 (S) 28/06/2011	Prof. CEP/ Prof. Outra	32	8	Graduada em Ciências/Matemática (Licenciatura Plena)
	(R) 05/03/2012				
Laís	(I) 05/04/2011	Prof. Recém-formada	25	-	Graduada em Matemática (Licenciatura Plena)
	05/03/2012	Pesquisadora			Mestranda em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM)
Iara	(I) 05/04/2011	Prof. Outra	56	26	Graduada em Ciências/Matemática (Licenciatura Plena) e especialista em Educação Matemática
Ada	(I) 19/04/2011	Prof. Outra	37	15	Graduada em Ciências/Matemática (Licenciatura Plena) e especialista em Educação Matemática
Tadeu	(I) 06/08/2012	Prof. Outra	22	6 meses	Graduado em Matemática (Licenciatura Plena)

Fonte: Autora

Em intervalos regulares de seis ou doze meses, os participantes da CoP-PAEM recebem certificações contabilizando as horas de participação nas atividades da Comunidade de Prática. Os certificados fornecidos são utilizados por eles participantes na contagem de horas relativas a processos de formação continuada, permitindo progressões em suas carreiras.

3.3 PROCEDIMENTOS PARA COLETA DE INFORMAÇÕES

Nas ações negociadas e realizadas pela CoP-PAEM, coletaram-se informações julgadas relevantes para a pesquisa, aquelas que permitiram inferir quais aspectos do Raciocínio Proporcional eram mobilizados pelos participantes durante os processos de negociação de significados, ou seja, nas aprendizagens ocorridas, em quais momentos essas aprendizagens aconteciam e que relação guardavam com elementos da prática da comunidade que as oportunizavam.

Para tanto, as informações foram coletadas por meio dos seguintes instrumentos: diário de campo da pesquisadora Laís, gravações em áudio feitas por aparelhos de mp3 durante os encontros do grupo e suas respectivas transcrições, além dos registros escritos dos participantes em folhas de tarefas.

No diário de campo foram registradas impressões e percepções com relação à dinâmica dos participantes durante as atividades da CoP-PAEM, por exemplo, algumas de suas manifestações que evidenciaram elementos da prática do grupo que oportunizaram aprendizagens dos participantes em relação ao conhecimento matemático de professores de Matemática.

As anotações feitas durante a trajetória da comunidade permitiu as formadoras/pesquisadoras inventariar as ações do empreendimento *Estudo do Raciocínio Proporcional*, negociadas no/com o grupo de professores. Dessa forma, como formadoras, Tânia e Laís puderam acompanhar/verificar com detalhes o desenvolvimento e os resultados das ações negociadas e fazer ajustes ou mesmo mudanças nas dinâmicas quando fosse preciso.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), o diário de campo, ou diário de bordo, é

> um dos instrumentos mais ricos de coleta de informações durante o trabalho de campo [...]. É nele que o pesquisador registra observações de fenômenos, faz descrições de pessoas e cenário, descreve episódios ou retrata diálogos. (p.118 – 19).

As gravações em áudio feitas por 2 ou 3 aparelhos de mp3 e as posteriores transcrições[35], de alguns dos encontros, foram úteis por captarem e manterem em sua forma original as justificações verbalizadas pelos participantes durante as negociações de significado.

Dessa forma, o diário de campo e as gravações em áudio forneceram informações que se complementaram na medida em que os registros escritos pontuaram comportamentos, expressões faciais, além de outros acontecimentos não captados por meio do

[35] As transcrições dos encontros da CoP-PAEM referentes às Ações 1 e 4 foram feitas em datas posteriores a conclusão das mesmas, conforme a necessidade das pesquisadoras de produzirem os dados para serem analisados na investigação.

áudio. As gravações mantiveram em formato original as falas dos participantes que não poderiam ser transcritas de forma fiel no exato momento das discussões na comunidade.

Cada participante do grupo mantém um caderno, recebido logo nos primeiros dias de sua participação na Comunidade de Prática, no qual faz registros de ideias, estratégias de resolução para problemas, apontamentos, reificações, anotações que julgue ser relevantes.

Eventualmente alguns dos registros feitos durante a trajetória de estudos do empreendimento *Estudo do Raciocínio Proporcional* foram feitos em folhas avulsas, como nos casos das tarefas 1 e 2 (entregues nos dias 03 e 31 de julho de 2012, APÊNDICES B e C).

3.4 PROCESSO DE ANÁLISE DOS DADOS

Em uma pesquisa qualitativa, analisar os dados que constituem o *corpus* da pesquisa é um processo

> [...] de busca e de organização sistemático de [...] materiais que foram sendo acumulados com o objetivo de aumentar sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão de unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros. (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 205).

Após a recolha de informações e organização do *corpus* da pesquisa, as análises foram desenvolvidas de forma interpretativa, buscando-se encontrar significados por trás de mensagens, comunicações, falas, textos, práticas (FIORENTINI e LORENZATO, 2006).

No intuito de conseguir evidências que ajudassem a responder a questão de investigação, retomaram-se os registros feitos no diário de campo da pesquisadora, os registros escritos dos participantes em seus cadernos e nas folhas de tarefas, e as gravações de áudio feitas na Comunidade de Prática com o objetivo de encontrar momentos nas ações desenvolvidas no empreendimento *Estudo do Raciocínio Proporcional*, em que fosse possível identificar que elementos da prática de uma Comunidade de Prática oportunizaram aprendizagens dos participantes relacionadas ao seu conhecimento matemático.

Para as análises desta investigação, selecionaram-se duas ações, a Ação 1 (*Resolução e discussão de estratégias de resolução de problemas que envolvem* *proporção/proporcionalidade*) e a Ação 4 (*Reflexão a respeito de estratégias e justificações apresentadas na Ação 1* com o apoio da literatura a respeito do tema (LAMON, 2012)) desenvolvidas na/pela CoP-PAEM.

Foram escolhidos esses dois momentos da trajetória do empreendimento *Estudo do Raciocínio Proporcional* (que será descrita na primeira parte do capítulo 4) por envolverem o trabalho dos participantes com os mesmos problemas de proporção/proporcionalidade propostos pela formadora/pesquisadora (APÊNDICES B e C) em dois momentos distintos, antes e depois de uma trajetória de discussões e estudos teóricos a respeito do Raciocínio Proporcional.

A primeira parte selecionada e analisada, denominada Ação 1, consistiu da *resolução e discussão de problemas envolvendo proporção/proporcionalidade* propostos à Comunidade de Prática pelas formadoras/pesquisadoras Tânia e Laís, traduzidos por elas, do livro "*Theaching fractions and rations for understanding*" (LAMON, 2012).

No total foram resolvidos 16 problemas distribuídos em duas tarefas: 10 problemas na tarefa 1, resolvida e discutida no dia 03 de julho de 2012 e 6 problemas na tarefa 2, resolvidos e discutidos entre os dias 31 de julho e 21 de agosto de 2012. Recolhidas as informações referentes à resolução e à discussão desses 16 problemas, fez-se uma pré-seleção dos problemas com maior probabilidade de comporem os dados a serem analisados nesta investigação.

O critério levado em conta foi: identificar os problemas que, ao serem resolvidos pelos participantes, oportunizaram a mobilização de uma variedade maior de ideias, formas de pensar e conceitos relacionados ao Raciocínio Proporcional, e em quais deles foram observadas negociações de significados mais intensas, em que os pontos de enfoque envolvessem o elemento "conhecimento do conteúdo matemático", do conhecimento profissional de professores de Matemática. Feito isso, os dados foram reduzidos a um conjunto de 5 problemas: construção da casa, preço dos chocolates, razão homens/mulheres, preço do café e dos retângulos.

Analisando a resolução (registros escritos dos participantes de suas estratégias/procedimentos[36]) e a discussão (transcrição das negociações audiogravadas) desses 5 problemas, decidiu-se apresentar neste trabalho a análise de apenas 2 deles, problema da

[36] Segundo Buriasco et al. (2009) em acordo com as ideias de Hadji (1994) uma estratégia pode ser entendida como "a orientação geral das operações e dos meios a utilizar. [...]. Em sentido lato, o termo designa um conjunto de ações coordenadas tendo em vista uma finalidade" (p.47) já os procedimentos, segundo as autoras, podem ser caracterizados como o "processo de desenvolvimento da estratégia, o modo pelo qual se desenvolve a estratégia." (p.77).

construção da casa e problema do preço dos chocolates, já que eles evidenciaram a mobilização pelos participantes de diferentes aspectos do Raciocínio Proporcional em estratégias e procedimentos distintos e interessantes, além de suscitarem negociações de significado em que ficou evidente uma variedade maior de elementos de seu conhecimento matemático.

No intuito de evidenciar de que forma os participantes lidaram com tais problemas, a Ação 1 privilegiou a mobilização de aspectos do Raciocínio Proporcional em um momento em que os participantes não haviam estudado aspectos teóricos desse raciocínio.

Após uma trajetória de estudos na CoP sobre aspectos teóricos do Raciocínio Proporcional com o apoio de literatura sobre o tema (LAMON, 2012), buscou-se evidenciar indícios de aprendizagens dos participantes, ao trabalharem em uma dinâmica de *reflexão a respeito de suas produções (escritas e orais)*, dos mesmos 5 problemas de proporção/proporcionalidade trabalhados na Ação 1, denominada Ação 4.

Neste trabalho faz-se referência à análise da Ação 4 como uma análise das *reflexões* dos participantes, já que se buscam evidências de aprendizagens nas negociações de significado ocorridas na CoP-PAEM nos momentos em que os participantes se dispuseram a refletir a respeito de alguns registros escritos e justificações produzidos por eles mesmos ou por seus colegas. Para a análise da Ação 4, neste trabalho, selecionaram-se encontros em que os participantes trabalharam com os problemas da construção da casa e do preço dos chocolates.

Os problemas selecionados para a Ação 4 foram os mesmos 5 problemas selecionados para comporem os dados analisados pelos participantes, como descrito anteriormente. Esses problemas foram apresentados à Comunidade de Prática da seguinte forma: as formadoras/pesquisadoras Tânia e Laís organizaram folhas individuais com o enunciado de cada problema e com duas colunas.

A primeira coluna continha imagens referentes aos registros escritos apresentados pelos participantes nas discussões na/da CoP-PAEM na Ação 1 e a segunda apresentava as respectivas transcrições das justificações verbais enunciadas no momento em que os participantes justificaram suas estratégias e procedimentos para a resolução dos problemas em grande grupo (APÊNDICES D e E).

Nem todas as resoluções apresentadas pelos participantes na Ação 1 foram analisadas na Ação 4, porque alguns deles perderam suas folhas da tarefa 1 ou, então, optaram por não resolvê-la por não estarem presentes no dia 03 de julho de 2012, quando a tarefa foi trabalhada na CoP.

As formadoras/pesquisadoras Tânia e Laís também decidiram não incluir nas reflexões as resoluções apresentadas por uma professora, que comumente estavam incompletas ou apresentavam equívocos matemáticos elementares. Como a participação dessa professora manteve-se periférica durante muito tempo na trajetória da CoP, discutir em grande grupo seus equívocos poderia causar certo constrangimento perante o grupo, conduzindo-a a uma trajetória de saída da comunidade, posicionando-se de forma ainda mais distante dos colegas.

Nos episódios das duas ações selecionadas para a seção 4.2 do capítulo 4, são apresentados e analisados alguns registros escritos, que foram fotografados[37] das folhas de tarefa dos participantes ou do quadro de giz, e suas justificações verbais (transcrições de suas falas captadas pelos aparelhos de mp3) ou escritas durante os processos de negociação de significados evidenciando a interação entre os processos de participação e reificação, relacionada ao seu conhecimento matemático.

Como já apontado no item 3.2, a participação da pesquisadora como participante em formação continuada na CoP-PAEM foi legitimada pelos demais membros. Dessa forma, ela se engajou no desenvolvimento dos empreendimentos negociados em grupo, a exemplo das ações selecionadas para as análises neste trabalho.

Assim, suas reificações verbalizadas ou registradas na forma escrita foram analisadas como os demais dados apresentados pelos outros participantes da Comunidade de Prática. Nos momentos em que suas falas ou registros são apresentados é feita referência ao nome Laís.

Para a identificação, nas falas dos participantes e em seus registros escritos, de aspectos de seu conhecimento matemático, em especial ideias, conceitos e formas de pensar relacionados ao Raciocínio Proporcional, utilizou-se a legenda a seguir baseada em Lamon (2012).

---

[37] As fotografias sofreram algum tratamento no intuito de revelarem de maneira mais nítida os registros feitos pelos participantes. Por vezes foram feitos alguns recortes/montagens com as fotos referentes aos registros de forma que sua visualização fosse mais organizada. Em ambos os casos, as alterações não implicaram na modificação/alteração das ideias registradas.

Quadro 2 – Legenda de cores referentes aos aspectos do Raciocínio Proporcional

LEGENDA		
Unitização		
Interpretações do registro fracionário $\frac{a}{b}$	Parte-todo/medida	
	Razão	
	Quociente	
	Operador	
Relação de invariância e covariância		
Raciocínio progressivo e regressivo[38] (*reasoning up and down*)		
Raciocínio relativo		
Raciocínio absoluto		
Constante de proporcionalidade		
Partição		

Fonte: Autora

Tanto na análise da Ação 1 (*Resolução e discussão de estratégias de resolução de problemas que envolvem proporção/proporcionalidade*) quanto na análise da Ação 4 (*Reflexão a respeito de estratégias e justificações apresentadas na Ação 1* com o apoio da literatura a respeito do tema (LAMON, 2012)), ao serem identificados indícios de

[38] No original *reasoning up and down* (LAMON, 2012)

mais de um desses elementos em uma fala ou em um registro escrito dos participantes, são destacados, com a cor correspondente, aquele(a) que se sobrepõe (mais se evidencia) aos demais e, em seguida, são identificadas a presença de outros aspectos que são subjacentes.

As análises foram organizadas por problemas, apresentando-se primeiramente a análise das Ações 1 e 4 referentes ao trabalho com o problema da construção da casa (primeiro problema trabalhado na CoP-PAEM no dia 03 de julho de 2012). E, em seguida apresenta-se a análise das Ações 1 e 4 referentes ao problema do preço dos chocolates (segundo problema trabalhado na CoP-PAEM no dia 03 de julho de 2012). A organização da sequência dos problemas analisados coincide também com a ordem em que estavam propostos na tarefa 1.

Nas análises da Ação 1, após apresentar cada um dos enunciados dos problemas selecionados, é feito um breve comentário a respeito deles, evidenciando os possíveis aspectos do Raciocínio Proporcional que poderiam ser mobilizados no desenvolvimento de estratégias com base nesse raciocínio.

Na sequência, são apresentadas as análises de estratégias/procedimentos utilizados pelos participantes para a resolução dos problemas e das respectivas negociações de significados transcritas referentes às suas justificações às maneiras de lidarem com o problema.

Em alguns momentos são analisados apenas os registros escritos das resoluções ou porque os participantes não estavam presentes nos encontros do grupo em que foram resolvidos e discutidos os problemas ou porque eles preferiram não manifestar suas justificações.

Encerradas as análises das produções dos participantes referentes à Ação 1, seguiu-se com as análises das reflexões dos participantes referentes aos problemas da construção da casa e do preço dos chocolates na Ação 4. No texto, são apresentados alguns recortes (utilizados pelo grupo em suas reflexões, selecionados e organizados pelas formadoras/pesquisadoras em folhas individuais) e na sequência a transcrição de alguns episódios referentes à Ação 4 (justificação dos participantes).

Ao final das análises das duas ações, referentes a cada um dos problemas, é apresentado um quadro síntese com algumas das aprendizagens relacionadas ao conhecimento matemático dos professores mobilizados nessas duas ações e as reificações que as sustentam.

Ao se fazer referência aos registros escritos dos participantes, identificou-se quem o produziu, de onde foi retirado e quando foi registrado. Na transcrição das falas, foi indicado quem as pronunciou e em qual encontro isso ocorreu. Além disso, foram feitas algumas correções gramaticais (erros de concordância, vícios de linguagem...) e inserções de termos que não foram pronunciados pelos participantes (para melhor compreensão do leitor), indicadas pelo símbolo “( )”. Essa revisão demandou algumas alterações, como indicado neste parágrafo, mas elas foram feitas de forma que o sentido das justificações verbalizadas pelos participantes fosse preservado.

O símbolo ‘[...]’ foi empregado para indicar supressões feitas nas falas ou mesmo durante as negociações de significado, no intuito de ser destacado apenas o que havia de essencial para as análises.

Nos capítulos 4 e 5 são destacados em negrito, elementos da prática da CoP-PAEM que serão discutidos mais a frente, na seção 5.1 desta investigação.

CAPÍTULO 4
APRENDIZAGENS DA CoP-PAEM

Para responder à questão de investigação, este capítulo, na seção 4.1, traz um breve relato da trajetória da CoP-PAEM, a fim de que o leitor possa localizar o desenvolvimento do empreendimento *Estudo do Raciocínio Proporcional*, que será objeto de análise na seção 4.2, em que são descritas e analisadas duas ações do referido empreendimento, a Ação 1 (*Resolver e discutir problemas matemáticos envolvendo proporção/proporcionalidade*) e a Ação 4 (*Reflexão a respeito de algumas destas resoluções e justificações* tendo em conta o apoio da literatura a respeito do tema (LAMON, 2012)), e os respectivos processos de negociação de significados ocorridos durante seus desenvolvimentos, oportunizando aprendizagens na CoP-PAEM relacionadas ao conhecimento matemáticos dos professores.

4.1 BREVE RELATO DOS TRABALHOS DESENVOLVIDOS NA COMUNIDADE DE PRÁTICA DE PROFESSORES QUE APRENDEM E ENSINAM MATEMÁTICA – CoP-PAEM

Os encontros do grupo de estudos, formado na perspectiva de constituir uma Comunidade de Prática, tiveram início no dia 01 de março do ano de 2011. Nessa ocasião estavam presentes os formadores Tânia e Márcio, respectivamente alunos do doutorado e do mestrado do PECEM – UEL, e três professoras, Bia, Cléa e Eva, do corpo docente do Colégio Estadual de Paranavaí, local onde os encontros da CoP acontecem até hoje.

A pesquisadora Laís (autora desta investigação) só começou a participar dos encontros semanais do grupo um mês após o início de suas atividades, em 05 de abril de 2011, atendendo a um convite feito pela formadora/pesquisadora Tânia. Era professora recém-formada e foi legitimada pelos colegas da Comunidade de Prática como uma participante novata.

Um ano mais tarde, em 2012, após ser admitida no Programa de Pós-Graduação de Ensino de Ciências e Educação Matemática PECEM – UEL, passou a ser identificada e legitimada na CoP-PAEM, além de participante em formação continuada, como formadora e pesquisadora, uma vez que o espaço da Comunidade de Prática foi assumido como contexto de investigação para o desenvolvimento deste estudo.

Na primeira reunião com o grupo (ROCHA, 2013), Tânia apresentou o projeto "Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática" vinculado ao Programa Observatório da Educação (Edital nº 38/2010/CAPES/INEP) e quais eram os objetivos ao formar esse grupo de estudos. Foi levantada a possibilidade de serem convidados outros professores de Matemática do Núcleo de Paranavaí para integrarem o projeto, possibilitando a participação de professores pertencentes ao corpo docente de outras instituições de ensino de Paranavaí e região[39].

A cada um dos participantes, Tânia entregou um caderno, logo que iniciaram a participação no grupo, para que registrassem suas expectativas, impressões, opiniões relacionadas aos encontros e aos trabalhos negociados e desenvolvidos na comunidade. Inicialmente a dinâmica de registros periódicos feitos pelos participantes em seus cadernos foi mantida: após fazerem suas anotações, o caderno era recolhido pela formadora/pesquisadora Tânia e, em seguida, devolvido a cada um com alguns questionamentos apresentados por ela, relacionados ao que os participantes haviam escrito.

Esses questionamentos deveriam ser respondidos de forma que fosse estabelecido um diálogo constante entre Tânia e os participantes. Porém, no decorrer dos trabalhos desenvolvidos, Tânia percebeu que os participantes, em sua maioria, expressavam-se de forma mais espontânea por meio da fala durante os encontros do grupo e não por meio de registros escritos.

Essa constatação a fez mudar a estratégia de uso do caderno: ele ficaria com cada um dos participantes e poderia ser utilizado para anotações diversas a respeito dos estudos feitos e tarefas trabalhadas, bem como para o registro de resoluções de problemas. O

[39] Mais informações a respeito da trajetória de entrada e saída de participantes na CoP-PAEM, Quadro 1.

caderno seria recolhido ocasionalmente pelas formadoras/pesquisadoras para a coleta de informações relevantes às investigações desenvolvidas. Esse instrumento pode ser caraterizado como um importante elemento do repertório compartilhado constituído por esta Comunidade de Prática.

Desde a constituição do grupo como uma Comunidade de Prática, uma das expectativas da pesquisadora Tânia era de que as ações desenvolvidas na/pela CoP-PAEM mobilizassem os participantes a se engajarem mutuamente no estudo do Raciocínio Proporcional.Dado que as práticas/pesquisas se desenvolveram em um contexto específico, de uma CoP, essa proposta de estudos foi negociada com os participantes de forma que pudesse ser legitimada por eles como um tema relevante para o trabalho conjunto, não sendo apenas um foco de interesse das pesquisadoras.

O empreendimento *Estudo do Raciocínio Proporcional* foi precedido por outros dois empreendimentos: o *Estudo dos temas SAEB, Prova Brasil e IDEB*, em que foram discutidas particularidades a respeito do SAEB e da Prova Brasil, além da resolução e análise de questões similares às propostas nessa avaliação, e o *Estudo a respeito do conceito de fração*[40], em que foram feitos levantamentos a respeito da ideia de fração, construção de material manipulativo e elaboração de tarefas com base nesse material, estudo de artigos e a análise da aplicação das tarefas elaboradas na CoP, nas salas de aula dos participantes.

Essas ações se desdobraram em encontros da CoP-PAEM bem como em salas de aulas de alguns dos professores participantes. O *Estudo a respeito do conceito de fração*, nomeadamente dos subconstrutos do número racional, permitiu às formadoras/pesquisadoras propor e negociar o *Estudo do Raciocínio Proporcional*.

Esse raciocínio permeia vários conteúdos matemáticos, e seu estudo permite aprofundar o conhecimento de conceitos e ideias relacionadas à proporção/proporcionalidade, que pode subsidiar o trabalho docente e a elaboração e aplicação de propostas de ensino que promovam seu desenvolvimento, dotando professores e alunos da capacidade de desenvolver estratégias e aplicar relações de proporcionalidade que vão além da reprodução mecânica de fórmulas.

O *Estudo do Raciocínio Proporcional*, objetivo desta pesquisa, foi constituído por ações que se desenvolveram a partir do segundo semestre do ano de 2012. O foco de cada ação bem como as intencionalidades das pesquisadoras são apresentados no quadro que segue:

---

[40] ROCHA, M. R. (2013)

Quadro 3 – Ações do empreendimento *Estudo do Raciocínio Proporcional*

	Intencionalidade das pesquisadoras nas análises	Ações	Descrição
Empreendimento Estudo do Raciocínio Proporcional	Identificar a mobilização de Raciocínio Proporcional pelos participantes	Ação 1	Resolução e discussão de estratégias para resolução de 16 problemas que envolvem proporção/proporcionalidade (folhas de tarefas 1 e 2 – APÊNDICES B e C);
		Ação 2	Estudos de textos a respeito do Raciocínio Proporcional organizados pelas formadoras/pesquisadoras a partir da tradução de trechos do livro *Teaching fractions and ratios for understanding* (Lamon, 2012)
		Ação 3	Proposição de problemas envolvendo proporção/proporcionalidade pelos participantes da CoP-PAEM seguida de reflexões, feitas em conjunto, do potencial desses problemas para mobilização do Raciocínio Proporcional;
	Identificar aprendizagens dos participantes com relação ao Raciocínio Proporcional	Ação 4	Reflexão a respeito de algumas estratégias e justificações apresentadas na Ação 1 (referentes aos problemas da construção da casa, do preço dos chocolates, da razão homens/mulheres, do preço do café e dos retângulos) com apoio da literatura a respeito do tema (LAMON, 2012);
		Ação 5	Proposição e análise de problemas com potencial para mobilizar o Raciocínio Proporcional e análise de estratégias de resolução desses problemas pelos participantes da CoP-PAEM;

Fonte: Autora

Vale ressaltar que o desenvolvimento dessas ações não seguiu uma ordem cronológica e fixa. A Ação 2, por exemplo, (estudos teóricos do Raciocínio Proporcional) foi realizada de acordo com as necessidades dos participantes em aprofundarem algumas discussões e reflexões desencadeadas pelas/nas Ações 1 e 3. Já a Ação 4 foi interrompida temporariamente para o desenvolvimento da Ação 5.

Segundo Tânia, o objetivo geral das ações 1, 2 e 3 era desencadear a negociação de significados a respeito de aspectos do Raciocínio Proporcional, a partir dos conceitos e ideias mobilizados/construídos na resolução e discussão de problemas que envolvem proporção/proporcionalidade, e promover o engajamento dos participantes no estudo do Raciocínio Proporcional.

Na Ação 1, as formadoras/pesquisadoras Tânia e Laís propuseram aos participantes duas listas de problemas (tarefas 1 e 2, impressas em folhas individuais e distribuídas a cada participante) com potencial para mobilizar o Raciocínio Proporcional (APÊNDICES B e C).

Os problemas das tarefas 1 e 2 foram propostos, resolvidos e discutidos na CoP-PAEM em encontros distintos. A tarefa 1 foi trabalhada no dia 03 de julho e a tarefa 2 foi proposta e trabalhada entre os dias 31 de julho e 21 de agosto do ano de 2012. Nesses encontros foi recomendado que os participantes resolvessem os problemas sem a utilização de recursos algébricos, como a regra de três, o que em um primeiro momento provocou estranheza nos professores do grupo.

A tarefa 1 era composta por 10 problemas, traduzidos de Lamon (2012), em grande parte problemas do tipo "valor omisso" (em que os valores de três grandezas são conhecidos e deseja-se saber o valor desconhecido de uma quarta grandeza). Já a tarefa 2 apresentava 6 problemas dos tipos "valor omisso" e "comparação entre razões" (problemas em que, ao comparar duas razões, o indivíduo deve emitir um julgamento qualitativo concluindo se uma razão é igual, maior ou menor que a outra com a qual é comparada) também traduzidos de Lamon (2012).

Na tarefa 1 (APÊNDICE B), os 10 problemas estavam dispostos em uma coluna com espaços em branco ao lado de cada um deles, para que os participantes registrassem suas respostas.

No enunciado da tarefa estava indicado que nenhum cálculo deveria ser feito nesses espaços em branco, que preferencialmente os problemas fossem resolvidos mentalmente, mas, no momento em que foi distribuída a folha de tarefa, percebeu-se que tal indicação era restritiva demais, o que fez as formadoras/pesquisadoras renegociarem esse enunciado, permitindo que cálculos fossem feitos, desde que eles não tivessem por base a regra de três.

Na tarefa 2 (APÊNDICE C), as formadoras/pesquisadoras Tânia e Laís apresentaram os 6 problemas organizados em uma coluna, com espaços em branco ao lado de cada um deles para os registros das resoluções.

Nessa tarefa, entretanto, o espaço reservado para os registros escritos das estratégias e justificações foi adaptado de forma que os participantes pudessem registrar suas estratégias individuais (ou negociadas em pequenos grupos) na coluna indicada por “1ª resolução” e, após a discussão em grande grupo na CoP, pudessem tomar nota de outras resoluções ou corrigir suas próprias estratégias/procedimentos fazendo registros na segunda coluna, indicada por “2ª resolução (após discussão)”.

Dessa forma seria possível analisar os registros pré e pós-discussão coletiva. Como o espaço destinado aos registros era por vezes, insuficiente, sugeriu-se aos participantes que fizessem as anotações necessárias em seus cadernos[41].

Aqueles participantes que não estavam presentes nos dias em que a Comunidade de Prática se dedicou a resolução e discussão da tarefa 1 foram instruídos á resolvê-la em casa, seguindo as mesmas orientações negociadas na CoP-PAEM de que, na medida do possível, não utilizassem recursos algébricos, a exemplo da regra de três, como estratégia para resolução.

Alguns dos participantes (presentes ou faltosos), porém, perderam seus registros ou não resolveram a tarefa, o que impossibilitou as analises na Ação 4.

No encontro da CoP-PAEM de 03 de julho, último encontro do grupo antes do período de férias (entre os dias 04 e 30 de julho), dia em que **foram resolvidas e discutidas estratégias para a resolução dos 10 problemas da tarefa 1**, estavam presentes Tina, Bia, Eva, Ada, Tânia e Laís, que negociaram a organização da resolução e discussão dos problemas dessa tarefa da seguinte forma: um problema seria selecionado e resolvido pelos participantes (individualmente ou em pequenos grupos) e discutido em seguida em grande grupo[42], antes de ser negociada a escolha de um próximo problema a ser resolvido e discutido dando sequência a essa dinâmica.

As discussões em grande grupo eram momentos em que os participantes da CoP apresentavam suas resoluções, justificando seu raciocínio para os demais colegas, que validavam ou não as estratégias/procedimentos utilizados.

Conforme os participantes se familiarizavam com a dinâmica negociada, de resolver e discutir estratégias para resolução de problemas envolvendo proporção/proporcionalidade sem o uso de recursos algébricos, e sentiam a necessidade de compartilhar e validar suas resoluções com os colegas antes mesmo da discussão em grande grupo, a organização dessa dinâmica sofreu alguma alteração.

[41] Nesse momento os cadernos passam a ter uma utilidade diferente daquela inicialmente negociada na CoP-PAEM, agora eles são um instrumento para os participantes registrarem resoluções de problemas e apontamentos diversos que julgam relevantes.
[42] O termo grande grupo se refere a todos os participantes da CoP-PAEM.

Os participantes liam os problemas selecionados e esboçavam estratégias individualmente e, logo em seguida, já **compartilhavam seus raciocínios e resoluções com o grande grupo**, de maneira que alguns problemas foram resolvidos com a colaboração de todos os participantes, o que dispensou a existência do momento posterior de apresentação e discussão das resoluções em grande grupo. Assim, as estratégias/procedimentos eram validados ao mesmo tempo em que era elaborada uma maneira para resolver o problema.

É importante destacar que a organização e a reorganização da dinâmica de resolver e discutir estratégias para os problemas na tarefa 1, descrita anteriormente, foram observadas também no trabalho com a tarefa 2, após o período de férias da CoP.

A tarefa 2 foi resolvida e discutida em mais de um encontro da CoP-PAEM, como já descrito (nos dias 31 de julho e 07, 14 e 21 de agosto). Isso aconteceu porque os 6 problemas da tarefa 2 demandaram a elaboração de estratégias para resolução mais complexas e análise mais cuidadosa das relações estabelecidas entre as grandezas dos problemas. Isso exigiu maior atenção dos participantes e a mobilização de alguns aspectos do Raciocínio Proporcional até então não mobilizados na resolução e discussão de estratégias dos problemas da tarefa 1.

Ao serem resolvidos, os 6 problemas da tarefa 2 desencadearam intensas negociações de significado a respeito de outros conhecimentos profissionais dos professores, além de aspectos do conhecimento matemático (conhecimento da ciência e de seu ensino). Percebeu-se também que os participantes mostraram-se mais confiantes em **negociar e elaborar estratégias para a resolução dos problemas** com os colegas da Comunidade de Prática, fatores que ocuparam mais tempo nos encontros.

Mesmo que o intervalo de tempo entre o trabalho com as tarefas 1 e 2 tenha sido pequeno, diferenças significativas foram notadas nas negociações ocorridas na CoP-PAEM durante a resolução e discussão de estratégias para os problemas da segunda tarefa.

Enquanto o ponto de enfoque das negociações de significado ocorridas no dia 03 de julho (referentes ao trabalho com a tarefa 1) evidenciavam a constante preocupação de alguns participantes em não conseguir elaborar estratégias para resolução dos problemas, as negociações referentes a resolução e discussão de estratégias matemáticas para a tarefa 2 evidenciavam outras preocupações dos participantes relacionadas a seu conhecimento matemático, à gestão curricular, aos conhecimentos matemáticos de seus alunos. Iam além do imediato objetivo de encontrar respostas para os problemas, evidenciando outros elementos do conhecimento profissional de professor de Matemática.

Com a Ação 1, as pesquisadoras Tânia e Laís buscaram identificar, por meio de análises posteriores, que ideias, conceitos ou formas de pensar do Raciocínio Proporcional eram mobilizados pelos participantes da CoP – PAEM ao **resolverem problemas envolvendo proporção/proporcionalidade, quando não recorriam a recursos algébricos como estratégias para a resolução.**

De forma geral, observa-se que grande parte da Comunidade de Prática mostrou algum tipo de insatisfação à limitação de não utilizar recursos algébricos, como a regra de três, para resolver os problemas das tarefas 1 e 2. A dificuldade em mobilizar outros conhecimentos matemáticos para a resolução foi justificada pelo hábito que os participantes têm de utilizar o dispositivo da multiplicação cruzada de forma mecânica, quase automática nos casos em que são identificados problemas envolvendo relações de proporcionalidade.

As participantes Tina, Eva e Laís evidenciaram essa dificuldade, como pode ser observado no episódio a seguir, em que **Tânia questiona os participantes da CoP-PAEM** acerca de como se sentiram na dinâmica de resolver problemas envolvendo proporção/proporcionalidade sem o uso de recursos algébricos:

Tina:	Ah (eu senti) bastante dificuldade.
Eva:	É complicado.
Tânia:	O que vocês sentiram que era mais difícil fazer? O que era difícil, complicado?
Tina:	Eu acho que (recorrer a recursos algébricos como estratégia de resolução) é algo que vem de como a gente aprendeu, entendeu? Porque não era tão usada essa questão de você pensar sem ficar fazendo aquele monte de contas. E as pessoas não raciocinam, não é isso? Eu penso assim...
Tânia:	Quer dizer, nós já estamos doutrinados a buscar uma estratégia algébrica de resolução. Nós já fomos treinados para isso. [...]

(Encontro dia 31/07/2012)

Tina aponta que a exigência de pensar mais a respeito de um problema ao resolvê-lo, na busca de elaborar outras estratégias para resolução, não é algo que lhe seja familiar, o que é reforçado pela declaração seguinte feita por Tânia de que muitas vezes os indivíduos acabam sendo ‘treinados’ durante sua trajetória escolar para, ao identificarem determinadas relações matemáticas entre grandezas, nos problemas com os quais lidam, selecionarem e aplicarem, quase mecanicamente, fórmulas adequadas.

Já a participante Laís afirma que, ao identificar as relações matemáticas presentes em um problema, "automaticamente pesca" os valores apresentados e os encaixa na estrutura das fórmulas, como é observado no episódio seguinte:

Tânia: E o que você achou difícil Laís?

Laís: Me desprender dos dispositivos, da parte algébrica. Não tem como. É imediato, pelo menos para mim, resolver por meio da regra de três. Automaticamente você já pesca os números do problema e já estrutura (a regra)...

Tânia: Você já vai pensando na organização dos dados, quer dizer... [...], uma vez que você tem a estratégia algébrica construída e compreende como é que ela se relaciona com o problema, a resolução é imediata [...].

(Encontro dia 31/07/2012)

Ao se sentirem desafiados a elaborarem outras estratégias de resolução para os problemas, os participantes da CoP-PAEM perceberam e evidenciaram aos colegas suas dificuldades em mobilizar e desenvolver estratégias por meio de raciocínios mais livres, mobilizando aspectos do Raciocínio Proporcional para além daqueles subjacentes à regra de três.

No entanto, o grupo legitimou essa ação como algo importante para seu desenvolvimento profissional e **se engajou nesse empreendimento articulado de resolver problemas envolvendo proporção/proporcionalidade sem o uso de recursos algébricos**, reconhecendo a importância dos estudos teóricos e discussões conjuntas para desenvolverem/mobilizarem o Raciocínio Proporcional, algo explicitado por Ada em grande grupo após o trabalho com a tarefa 1, como segue:

Ada: Eu acho que falta tempo para o professor estudar [...] Ele precisa de tempo para estudar. O professor não tem tempo para estudar... Porque a parte do raciocínio [...] eu estou com dificuldade. [...] Na última aula (encontro do grupo) que nós nos deparamos com esses exercícios (tarefas envolvendo proporção/proporcionalidade da folha 1), a aplicação da parte algébrica, foi "beleza". Agora nós ficamos "patinando" no raciocínio... Que raciocínio é esse? Como que a gente vai desenvolver esse raciocínio se a gente não estudar... [...] o governo tem que dar um tempo pra que a gente possa estudar...

(Encontro dia 31/07/2012)

Na Ação 2, os estudos de textos tratando do Raciocínio Proporcional aconteceram em diferentes encontros no decorrer das Ações 1 (Resolver e discutir estratégias para resolução de problemas envolvendo proporção/proporcionalidade) e 3 (Proposição de problemas envolvendo proporção/proporcionalidade pelos participantes da CoP-PAEM seguida de reflexões, feitas em conjunto, do potencial desses problemas para mobilização do Raciocínio Proporcional).

No dia 21 de agosto, após o término do trabalho com a tarefa 2 (Ação 1), foi proposto à CoP-PAEM a leitura no grande grupo de um texto organizado pelas formadoras/pesquisadoras Tânia e Laís, intitulado “Raciocínio Proporcional” (APÊNDICE F). Nele foram traduzidas/adaptadas as principais ideias de Lamon (2012) do Raciocínio Proporcional (como se caracteriza esse raciocínio, que conhecimentos estão envolvidos, quais são seus principais elementos).

Ao final do texto estavam propostos três problemas com potencial para mobilizar o raciocínio relativo, que foram resolvidos e discutidos no grupo. Os problemas tratavam da comparação entre alturas de duas árvores em crescimento, da inclinação de uma rampa para uso de cadeirantes e da concentração de um suco de limão a ser preparado.

A leitura desse texto teve por objetivo introduzir aspectos teóricos do Raciocínio Proporcional e chamar a atenção dos participantes para a importância de desenvolvê-lo/mobilizá-lo no intuito de promovê-lo em sala de aula, com seus alunos, o que foi enfatizado pela resolução e discussão desses 3 problemas.

Nos encontros dos dias 04 de setembro a 02 de outubro, foi desenvolvida a Ação 3: os participantes da CoP-PAEM selecionaram problemas, dos materiais didáticos com os quais trabalham em sala de aula, que julgavam ter potencial para mobilizar o Raciocínio Proporcional, e propuseram esses problemas ao grupo.

Após um momento para resolução e discussão em pequenos grupos acerca de estratégias para resolução dos problemas, os colegas do participante que o havia proposto apresentavam as ideias/raciocínios que utilizaram para resolução e julgavam se o problema trabalhado tinha ou não potencial para mobilizar o Raciocínio Proporcional.

Foi possível observar que propor problemas com potencial para desenvolver Raciocínio Proporcional não era algo familiar para os professores da CoP-PAEM, já que eles estão acostumados a selecionar e trabalhar problemas em função dos conteúdos matemáticos e não com base no raciocínio que eles envolvem.

Desse modo, alguns problemas propostos não tinham potencial para mobilizar Raciocínio Proporcional. Nesses casos, os participantes discutiam e apontavam que razões possivelmente os levaram a escolhê-los e se, com algumas modificações, seria possível alterar os problemas para que o objetivo de mobilizar estruturas do Raciocínio Proporcional fosse atendido.

Tânia e Laís perceberam, então, que seria necessário investir em mais estudos teóricos a respeito de aspectos do Raciocínio Proporcional, de maneira que os participantes refletissem sobre as informações presentes nos textos, se familiarizassem com elas, produzissem significados para esse raciocínio e pudessem identificar seus aspectos em problemas e temas matemáticos diversos com os quais já trabalham em sala de aula. E, a partir daí, o Raciocínio Proporcional passasse a integrar de forma significativa o repertório individual e compartilhado, dos participantes da CoP.

Foi possível observar certa insegurança nos participantes durante essa tarefa de selecionar e propor problemas aos colegas da comunidade e de sugerir alterações no intuito de fazer com que alguns problemas passassem a ter potencial para mobilizar Raciocínio Proporcional.

Assim, nos encontros dos dias 09 de outubro e 07 de novembro[43], o grupo se dedicou ao estudo conjunto, em grande grupo, de outros textos que tratavam do Raciocínio Proporcional (Ação 2). O texto estudado no dia 09 (APÊNDICE G), traduzido e organizado pelas formadoras/pesquisadoras, foi proposto aos participantes da CoP por Tânia.

Ele tratava das ideias de Lamon (2012) a respeito dos seguintes elementos do Raciocínio Proporcional: raciocínio relativo, medição, quantidades e covariação, considerados pela autora, e pelas formadoras/pesquisadoras, como importantes para o desenvolvimento desse raciocínio. Esse texto foi organizado em forma de uma pequena apostila e distribuído a cada um dos professores participantes da CoP-PAEM.

No dia 07 de novembro, Tânia propôs uma conversa com os participantes persentes a fim de fazer uma espécie de balanço das ações do empreendimento *Estudo do Raciocínio Proporcional* desenvolvidas até então. O objetivo era identificar dúvidas quanto às ideias estudadas ou algumas fragilidades conceituais ainda existentes referentes a esse tema, e reorganizar as próximas ações da CoP-PAEM de acordo com o que fosse explicitado pelos participantes.

Nessa conversa em grande grupo, alguns declararam não se sentirem seguros quanto ao significado de alguns aspectos (como as diferentes interpretações do

[43] Nos encontros dos dias 16, 23 e 31 de outubro, os estudos a respeito do Raciocínio Proporcional foram interrompidos para que a CoP-PAEM pudesse organizar trabalhos e uma oficina a serem apresentados no II SEPEM - Seminário de Professores e Pesquisadores do Projeto ‘Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática’ realizado nos dias 04 e 05 de dezembro de 2012.

registro fracionário $\frac{a}{b}$, os subconstrutos do número racional), conceitos e ideias subjacentes ao Raciocínio Proporcional.

Os participantes evidenciaram, também, que julgavam necessário a CoP fazer mais estudos teóricos sobre esse tema de modo que suas dúvidas fossem sanadas e que assim, pudessem mobilizar/desenvolver seu Raciocínio Proporcional e promovê-lo em ações futuras nas salas de aula com mais segurança.

Considerando essas declarações, nesse mesmo encontro, retomou-se a leitura (Ação 2) do primeiro texto a respeito do Raciocínio Proporcional, estudado na/pela CoP-PAEM em 21 de agosto de 2012 (APÊNDICE F), e foram discutidos novamente, em grande grupo, aspectos, ideias e conceitos do Raciocínio Proporcional.

No encontro do dia 20 de novembro, foi trabalhado um quadro, organizado pelas formadoras/pesquisadoras, com uma breve definição das diferentes interpretações do registro fracionário $\frac{a}{b}$ e com problemas envolvendo essas interpretações relacionadas às unidades referenciais, contínuas e discretas, algo estudado no empreendimento anterior, *Estudo a respeito do conceito de fração*, mas que ainda não estava claro para os participantes (APÊNDICE H).

O grupo demonstrou maior interesse, motivação e engajamento nas Ações 1, 3, 4 e 5 do que na Ação 2, em que o grupo se dedicava ao estudo teórico de textos. O estudo de textos desvinculado da resolução e discussão de problemas (algo presente nas demais ações) tornou-se enfadonho para a Comunidade de Prática, porém foi necessário e mobilizou a atenção dos participantes, uma vez que apresentava mais informações a respeito do Raciocínio Proporcional possíveis de serem utilizadas na resolução/análise futura de problemas.

A Ação 4, *reflexão a respeito de algumas estratégias e das justificações apresentadas na Ação 1* com apoio da literatura sobre o tema (LAMON, 2012), foi desenvolvida no primeiro semestre do ano de 2013, juntamente com a Ação 5 (que intercalou o período de desenvolvimento da Ação 4).

Nessa Ação 5, os participantes da CoP-PAEM selecionaram/adaptaram/elaboraram problemas com potencial para mobilizar aspectos do Raciocínio Proporcional e propuseram problemas aos demais participantes da Comunidade de Prática, que se empenharam em resolvê-los e em analisar as estratégias/procedimentos para resolução apresentados pelos colegas.

Os objetivos das ações 4 e 5 respectivamente foram identificar, nas estratégias, procedimentos e justificações apresentadas na resolução/discussão/reflexão dos problemas evidências de aprendizagens relativas ao conhecimento matemático dos professores, especificamente quanto aos aspectos do Raciocínio Proporcional, e identificar que tipos de tarefas poderiam ter potencial para mobilizar esse raciocínio.

A ideia de organizar uma dinâmica na CoP-PAEM, na qual os participantes refletissem sobre alguns de seus registros escritos bem como a respeito de algumas de suas justificações verbais referentes a problemas trabalhados na Ação 1, surgiu de uma das negociações entre as formadoras/pesquisadoras Tânia e Laís ocorridas no início do ano de 2013 relativas a possíveis ações a serem propostas e negociadas na/com a CoP que pudessem promover aprendizagens dos participantes já que, após uma revisão cuidadosa das ações desse empreendimento desenvolvidas em 2012 (tarefas trabalhadas e reificações registradas por escrito/verbalizadas pelos participantes), percebeu-se que o Raciocínio Proporcional ainda não estava claro para os professores.

Na análise de alguns dados (resoluções e justificações – trechos das negociações de significados transcritas – de alguns participantes da CoP-PAEM na resolução, discussão e análise de um problema da tarefa 2) para a escrita de um artigo[44], percebeu-se o quanto esse trabalho foi significativo na promoção de aprendizagens das formadoras/pesquisadoras à respeito do Raciocínio Proporcional e que esse exercício de confrontar aspectos teóricos e dados também poderia ser interessante para a Comunidade de Prática, oportunizando aprendizagens.

As reflexões dos participantes, referentes à Ação 4, foram feitas na CoP-PAEM nos dias 05, 12 e 19 de março, 23 de abril e 14 e 21 de maio de 2013, com o apoio da literatura a respeito do tema (LAMON, 2012). Antes de cada uma das reflexões, **a comunidade se dedicava ao estudo teórico de alguns conceitos, ideias e formas de pensar subjacentes ao Raciocínio Proporcional,** selecionados e traduzidos previamente pelas formadoras/pesquisadoras a partir da publicação "*Theaching fractions and rations for understanding*" (LAMON, 2012), encontrados nos problemas, nas resoluções e justificações apresentadas.

Tânia e Laís organizaram, em momentos anteriores, os problemas que seriam trabalhados na Comunidade de Prática e, para isso, adotaram o seguinte critério: dos 16 problemas resolvidos e discutidos na Ação 1, seriam selecionados para a Ação 4 aqueles

[44] (CYRINO, M. C. C. T.; GARCIA, T. M. R; OLIVEIRA, L. M. C. P.)

em que fossem identificados, por meio de análise prévia dos registros escritos/justificações apresentados pelos participantes, a maior quantidade/diversidade de elementos do Raciocínio Proporcional mobilizados por eles.

Feita essa busca, passou-se a olhar com mais atenção para as resoluções apresentadas pelos participantes (quais estratégias e procedimentos foram utilizados) em 5 problemas (problema da casa, do preço dos chocolates, dos retângulos, do preparo de um suco, da razão entre homens e mulheres e do preço do café), dos quais foram escolhidos, para as análises desta investigação, aqueles em que as estratégias apresentavam raciocínios interessantes, que mobilizavam diferentes aspectos do Raciocínio Proporcional.

Neste trabalho analisaram-se as discussões e registros desencadeados por 2 problemas da Ação 4, a saber: problema da construção da casa e problema do preço dos chocolates, ambos trabalhados na Ação 1. Após a escolha dos problemas e de algumas estratégias apresentadas, prepararam-se folhas individuais para os professores da CoP-PAEM em que foram dispostos quadros com duas colunas.

A coluna da esquerda apresentava imagens dos registros escritos dos participantes (resoluções feitas no quadro de giz ou em seus cadernos) agrupados por estratégias semelhantes. A coluna da direita apresentava a transcrição de recortes da respectiva negociação de significados ocorrida na comunidade no momento em que o participante justificava para o grande grupo o raciocínio utilizado para a resolução do problema (APÊNDICE D e E).

A dinâmica negociada em conjunto para as reflexões a respeito das resoluções/justificações desses 5 problemas, inicialmente, foi organizada da seguinte forma: **as reflexões eram feitas em pequenos grupos com até 4 participantes e, em seguida, eram discutidas em grande grupo as inferências de cada pequeno grupo** (quais elementos, aspectos, ideias do Raciocínio Proporcional puderam ser identificados e o que justificava esses indícios encontrados).

No segundo encontro, porém, em que foram feitas as reflexões a respeito das resoluções/justificações dos problemas selecionados (12 de março de 2013), os participantes sentiram-se mais à vontade em interagir somente no grande grupo, o que se manteve durante os encontros seguintes dessa ação.

A primeira reflexão feita na comunidade aconteceu no dia 05 de março de 2013, primeiro encontro desse ano após as férias letivas da CoP, de dezembro a fevereiro, e teve como foco os registros escritos e justificações verbais referentes ao “problema dos retângulos”.

Nesse primeiro encontro, as formadoras/pesquisadoras Tânia e Laís analisaram, elas mesmas, algumas das resoluções/justificações apresentadas pelos participantes, como uma maneira de demonstrar como seria o exercício de refletir a respeito de registros escritos e transcrições de falas, além de negociar mais uma vez com os participantes a relevância dessa ação no desenvolvimento do empreendimento *Estudo do Raciocínio Proporcional*. O grupo mostrou-se interessado e envolvido nessa dinâmica de trabalho, legitimando a sua continuidade.

Durante essas negociação da Ação 4 (05 de março de 2013), as formadoras/pesquisadoras admitiram aos participantes da CoP-PAEM o que inferiram, em momento anterior, em uma negociação fora da CoP-PAEM.

Ao fazerem uma retrospectiva das ações do empreendimento *Estudo do Raciocínio Proporcional* desenvolvidas até o final de 2012, perceberam que a maior parte dos aspectos estudados desse raciocínio ainda não estavam claros para alguns participantes (isso foi inferido ao escutar novamente as gravações dos encontros em que foram desenvolvidas ações do empreendimento em questão).

Surgiu, então, a ideia de negociar essa dinâmica de reflexões em conjunto com a intenção de, ao ser promovido espaço para reflexões a respeito dos registros analisados, fossem oportunizadas aprendizagens.

Nos encontros dos dias 12 e 19 de março de 2013, refletiu-se a respeito dos registros restantes, apresentados para a resolução do "problema dos retângulos" não discutidos no dia 05 do mesmo mês. No dia 23 de abril foi feita a reflexão, pelos participantes, das produções (escritas e orais) do problema do preço dos chocolates e do problema da construção da casa; em 14 de maio, as produções a respeito do problema da razão homens/mulheres e, em 21 de maio, do problema do preço do café.

A Ação 4 foi interrompida no período de 26 de março a 09 de abril para o desenvolvimento da Ação 5, em que os participantes da CoP-PAEM selecionaram/elaboraram problemas que julgavam ter potencial para mobilizar aspectos do Raciocínio Proporcional, propuseram os problemas à CoP-PAEM e analisaram as resoluções dos colegas.

No desenvolvimento desse trabalho, os participantes que propuseram os problemas assumiram uma participação mais central na Comunidade de Prática, sendo legitimados como *experts*, e apresentaram indícios de aprendizagem relacionados ao Raciocínio Proporcional que puderam ser identificados pela escolha dos problemas propostos ao grupo e pelas análises que faziam dos registros escritos/justificações dos colegas (apresentados ao grande grupo por meio de registros no quadro de giz).

Foi possível perceber o amadurecimento dos participantes após a trajetória de estudos teóricos feitos a respeito do Raciocínio Proporcional (Ação 2 – Estudos de textos a respeito do Raciocínio Proporcional organizados pelas formadoras/pesquisadoras a partir da tradução de trechos do livro *Teaching fractions and ratios for understanding* (Lamon, 2012). Seu conhecimento desse raciocínio foi ampliado e eles se mostraram mais seguros ao projetarem suas reificações.

Nos encontros dos dias 16, 23 e 30 de abril e no dia 07 de maio, o grupo voltou a desenvolver a Ação 4 (*Reflexão a respeito de algumas estratégias e justificações apresentadas na Ação 1*) com apoio teórico, especificamente do capítulo 5 do livro "*Theaching fractions and rations for understanding*" (LAMON, 2012), traduzido pelas formadoras/pesquisadoras.

Os trechos foram selecionados para o trabalho na CoP-PAEM por apresentarem ideias centrais do Raciocínio Proporcional, além de problemas (alguns deles resolvidos por alunos americanos de diferentes séries da educação básica) com potencial para mobilizar esse raciocínio matemático.

Como formadoras, pensou-se que a linguagem acessível dessa literatura, o formato em que a teoria é apresentada (sempre confrontando aspectos práticos com aqueles de cunho teórico) e a diversidade de informações disponíveis a respeito do tema Raciocínio Proporcional seriam interessantes de serem trabalhados em conjunto para compor o repertório da Comunidade de Prática no empreendimento *Estudo do Raciocínio Proporcional*, colaborando com o desenvolvimento desse raciocínio pelos participantes da Comunidade de Prática e oferecendo apoio teórico para os professores em seus estudos e trabalhos.

Após o término da Ação 4, em meados do mês de maio de 2013, a Comunidade de Prática negociou outro empreendimento, ao qual vem se dedicando até hoje: planejamento e organização de aulas investigativas com base em um *framework* desenvolvido pelo GEPEFOPEM.

Os encontros do grupo continuam acontecendo com regularidade (no ano de 2013 e início de 2014 passaram de encontros semanais para quinzenais) e os participantes continuam engajados nas atividades desenvolvidas na/pela CoP-PAEM, comprometidos com os empreendimentos negociados em grupo.

4.2. APRENDIZAGENS OCORRIDAS NA CoP-PAEM NO EMPREENDIMENTO *ESTUDO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL*

Para investigar e explicitar que elementos da prática da Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática – CoP-PAEM oportunizaram aprendizagens relacionadas ao conhecimento matemático de seus professores participantes, focalizaram-se duas ações: Ação 1 – *Resolução e discussão de estratégias de resolução de problemas que envolvem proporção/proporcionalidade* – e Ação 4 – *Reflexão a respeito de algumas estratégias e justificações apresentadas na Ação 1*, com apoio da literatura sobre o tema (LAMON, 2012) – mais especificamente nos processos de negociação de significados (WENGER, 1998) ocorridos nesses dois momentos.

Organizou-se a seção seguinte por problemas; para cada um deles serão apresentadas a análise da Ação 1, seguida da análise da Ação 4. Ao final das análises de cada problema, apresenta-se um quadro-síntese com reificações dos participantes, indicando algumas de suas aprendizagens.

4.2.1 ANÁLISE DO PROBLEMA DA CONSTRUÇÃO DA CASA, DA RESOLUÇÃO E DAS JUSTIFICAÇÕES DOS PARTICIPANTES DA CoP-PAEM

O primeiro problema analisado na Comunidade de Prática, envolvendo proporção/proporcionalidade, foi denominado pelos participantes como problema da construção da casa e se caracteriza como um problema de valor omisso (LAMON, 2012; BEHR et al 1988): três grandezas são apresentadas no enunciado do problema e, ao responder à questão "[...] *quantos homens seriam necessários para construir a casa em 1 dia?*", busca-se encontrar o quarto valor não explicitado.

Quadro 4 – Enunciado do problema da construção da casa

Seis homens podem construir uma casa em 3 dias. Assumindo que todos os homens trabalham no mesmo ritmo, quantos homens seriam necessários para construir a casa em 1 dia?

Fonte: Autora

As grandezas relacionadas nesse problema variam de forma inversamente proporcional. Ao considerar que todos os homens envolvidos na construção da casa se empenham no trabalho em um mesmo ritmo, o aumento da quantidade desses trabalhadores implica na diminuição do período destinado à construção da casa, bem como uma possível diminuição na quantidade de integrantes da equipe de trabalhadores implicaria no aumento do período de trabalho.

Independente da estratégia elaborada, para que fosse possível indicar mobilização de aspectos do Raciocínio Proporcional, o participante deveria ser capaz de identificar a existência da **relação multiplicativa entre as grandezas** explicitadas no enunciado (**raciocínio relativo**) e da **covariação dessas grandezas de forma inversamente proporcional**[*]**.**

4.2.1.1 RESOLUÇÃO E DISCUSSÃO DE ESTRATÉGIAS PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS QUE ENVOLVEM PROPORÇÃO/PROPORCIONALIDADE: O PROBLEMA DA CONSTRUÇÃO DA CASA

A seguir são apresentadas as resoluções dos participantes e negociações de significados ocorridas durante a resolução do problema e durante as apresentações das resoluções no grande grupo.

Análise da produção de Bia

Como estratégia de resolução, a participante Bia recorre a uma representação pictórica da situação apresentada no problema (Figura 7) indicando em seu desenho que fração do trabalho total um grupo de 6 homens fez em cada um dos 3 dias.

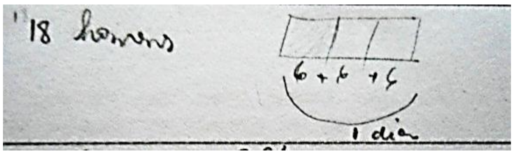
Comumente Bia faz uso de representações baseadas em desenhos para a resolução de problemas, o que evidencia sua familiaridade, mobilidade e segurança em relacionar e registrar de diferentes formas um mesmo raciocínio, aspectos de seu conhecimento matemático.

---

[*]

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância		Raciocínio Progressivo e Regressivo		Raciocínio Relativo
Raciocínio Absoluto		Constante de Proporcionalidade		Partição

Figura 7 – Registro escrito Bia (Folha de tarefas 1)



Fonte: Autora

A formadora/pesquisadora Tânia ao considerar legítimo o que Bia reificou durante a resolução do problema, inicia com ela um diálogo por meio do qual **a participante verbaliza para o grande grupo como elaborou a estratégia e desenvolveu seus procedimentos**:

[...]*

Tânia: Como que você pensou, Bia?

Bia: **Eu pensei que cada dia correspondeu a $\frac{1}{3}$ do tempo que eles gastariam para fazer essa casa**. **Se em cada dia, eu tinha 6 homens, então 6+6+6, 18** (homens)...

Tânia: Então em **cada dia esses 6 homens faziam $\frac{1}{3}$ da casa.**

Bia: $\frac{1}{3}$ **da casa.**

Tânia: **Então em um dia eles conseguem fazer $\frac{1}{3}$ da casa.**

Bia: **Isso, 6 homens.**

Tânia: **Então, no outro dia mais $\frac{1}{3}$ e no outro dia mais $\frac{1}{3}$.** Mas, como tem que acabar tudo (1 casa) no primeiro dia...

Bia: Em um dia...

Tânia: Então para fazer **esse outro terço** (aponta para o segundo terço da figura que Bia desenhou) **precisa de mais 6 homens** e para fazer **esse outro terço** (aponta para o terceiro terço da figura que Bia desenhou) **também precisa de mais 6 homens**. Então é por isso que **para cada terço, em cada dia, é preciso 6 homens**. É uma forma de pensar [...] cada dia **6 homens fazem $\frac{1}{3}$ da casa, então para poder fazer os outros dois terços** (em apenas um dia) **precisa de mais duas vezes 6 homens. Então vão ser 3 vezes 6 que vai dar 18** [...]*

(Encontro dia 03/07/2012)

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

Pelo registro escrito (Figura 7) e pelo trecho inicial da fala de Bia, é possível identificar a mobilização da ideia de **parte-todo/medida** para a forma fracionária $\frac{a}{b}$. O inteiro contínuo ('casa') foi dividido proporcionalmente em 3 partes, cada uma delas correspondente a $\frac{1}{3}$ do total da casa.

Com o objetivo de encontrar a quantidade total de homens necessária para a construção da casa em apenas um dia, Bia calcula que parte do trabalho 6 homens são capazes de executar em cada um dos 3 dias e chega à relação de que, a cada dia, 6 homens constroem $\frac{1}{3}$ da casa. Encontrar valores correspondentes entre as grandezas covariantes mantendo as relações de proporcionalidade entre elas envolve dois aspectos do Raciocínio Proporcional: o processo de **unitização**[*] e o processo denominado **raciocínio progressivo e regressivo**.

Bia considera como unidade o conjunto formado por 6 homens e, ao buscar uma maneira para encontrar que parte da casa corresponde ao trabalho de uma unidade de trabalhadores (conjunto de 6 homens), ela chega à relação apontada anteriormente de que 6 homens fazem $\frac{1}{3}$ da casa em 1 dia.

O processo de **unitização** fica explícito quando a participante encontra a quantidade de homens correspondente à fração da casa construída em uma unidade de dia (1 dia). Tanto no processo descrito quanto na estratégia verbalizada por Tânia, ao final dessa negociação (destaque vermelho no episódio anterior), está presente a ideia do **raciocínio progressivo e regressivo**: a estratégia de encontrar os valores proporcionais referentes a uma unidade de quaisquer grandezas covariantes do problema, e a partir dessa relação (descrita por uma **constante de proporcionalidade**), raciocinar de forma progressiva mantendo a relação de proporcionalidade para valores maiores que uma unidade é uma evidência desse processo.

Bia identifica as relações de proporcionalidade no problema, o que lhe permite tomar decisões quanto a quais estratégias utilizar e de que maneira relacionar as grandezas apresentadas. A participante percebe a **relação de invariância e covariância**

[*]

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

existente entre as grandezas (a quantidade ‘casa’ permanece invariante enquanto a quantidade de trabalhadores e de dias de trabalho covariam de maneira inversamente proporcional) e que as variações dos valores do problema são **relativas** (**raciocínio relativo**) e não absolutas.

Dessa forma, pode-se inferir que, ao se dispor a resolver o problema envolvendo relações de proporção/proporcionalidade elaborando uma estratégia diferente da regra de três, a participante mobilizou aspectos do Raciocínio Proporcional (processos de **unitização** e **raciocínio progressivo e regressivo**, interpretação **parte-todo/medida** do registro fracionário $\frac{a}{b}$ e o reconhecimento das **relações multiplicativas** e da **covariância e invariância** das grandezas), o que se confirma pela estratégia/procedimento utilizado e pelas projeções (reificações) verbalizadas na negociação de significados estabelecida com Tânia, a respeito da resolução do problema.

Logo após Tânia ler o enunciado do problema e antes de os participantes iniciarem as resoluções, Bia fez um comentário com relação à tarefa 1 (APÊNDICE B) relacionado à dificuldade que alguns graduandos de sua turma do curso de Licenciatura em Matemática encontravam em lidar com problemas envolvendo conhecimentos matemáticos mais complexos.

Segundo ela, uma de suas professoras afirmava que tais dificuldades se evidenciavam na graduação por conta de um desenvolvimento frágil de conhecimentos matemáticos elementares aprendidos durante o Ensino Fundamental escolar, como se pode verificar no diálogo a seguir.

Bia: Hoje eu lembrei que [a professora da faculdade] no comecinho do curso, falava para a gente: “vocês não conseguem resolver os exercícios porque vocês não sabem a ‘basiquinha’!”... Tudo para ela era a...
Tânia: A “Matemática da dona Mariquinha”.
Bia: A ‘basiquinha’, a “Matemática da dona Mariquinha”... Tudo isso aqui (tarefa 1) é “Matemática da dona Mariquinha”.
Tânia: “Matemática basiquinha”.

(Encontro dia 03/07/2012)

Bia identifica, ao olhar os enunciados dos problemas da tarefa 1, a presença de conhecimentos matemáticos elementares, os quais sua professora caracterizava como “a (Matemática) basiquinha”, “a Matemática da dona Mariquinha[45]”, trabalhada no período da Educação Básica. Ao verbalizar sua impressão a respeito dos problemas desta tarefa, Bia

[45] A professora de Bia se referia à “dona Mariquinha” como uma professora fictícia do Ensino Fundamental.

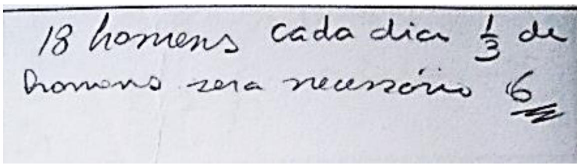
evidencia a concepção que tem da Matemática como ciência, aspecto de seu conhecimento matemático, do conteúdo que ensina.

Ter domínio de conhecimentos matemáticos possibilita ao indivíduo maior liberdade de raciocínio, permitindo-lhe formular estratégias de maneira mais livre, sem depender diretamente da memorização de fórmulas algébricas.

Análise da produção de Eva

A participante Eva manipula os valores apresentados no enunciado do problema aparentemente sem estabelecer uma relação entre eles. Ela multiplica as grandezas “quantidade de dias” e “quantidade de homens” chegando ao resultado esperado, 18 homens (Figura 8).

Figura 8 – Registro escrito Eva (Folha de tarefas 1)



Fonte: Autora

A seguir apresenta-se o episódio no qual **Eva verbaliza seu raciocínio para o grande grupo** e legitima a explicação de Tânia a respeito da resolução que apresentou:

Eva: Eu achei assim, se 6 homens [...] (demoram) 3 dias para construir uma casa... 3 x 6, 18.
Tânia: 3 x 6, 18... Reduziu três dias, então é inversamente proporcional...
Eva: É.

(Encontro dia 03/07/2012)

Após a interferência de Tânia, afirmando a existência de uma relação proporcional na estratégia (ao diminuir 3 dias da quantidade inicial, o número de trabalhadores deve ser triplicado, uma situação de proporcionalidade inversa), Eva concorda com a afirmação feita.

No entanto, não há como inferir se houve a mobilização de aspectos do Raciocínio Proporcional na resolução apresentada por essa participante, já que, além de poucos elementos verbalizados, seus registros escritos não condizem com a estratégia por ela relatada.

Nos dois recortes apresentados e analisados anteriormente, referentes às produções de Bia e Eva, ficam evidentes, nas transcrições das negociações de significado, algumas interferências da formadora/pesquisadora Tânia, retomando ou confirmando o que já foi verbalizado pelas participantes.

Ao (res)significar o que foi explicitado, Tânia acrescenta os significados que produziu para as estratégias/procedimentos descritos pelos participantes da CoP-PAEM. Ao fazer isso, verbaliza mais informações e detalhes que não foram notados nas manifestações dos participantes no grande grupo.

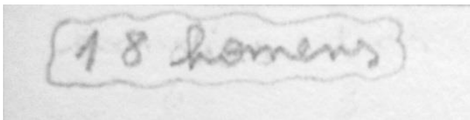
A projeção (reificação) desses significados pela formadora/pesquisadora, que nesse momento assume a posição de *expert*, é uma maneira de legitimar aspectos do conhecimento matemático das duas professoras: ao enunciar as estratégias/procedimentos utilizados por elas, Tânia legitima o que foi dito, e de alguma forma, sistematiza, com base nas reificações que faz a partir do que ouviu da resolução verbalizada.

Essa legitimação bem como os significados produzidos e projetados pela formadora/pesquisadora com relação à produção dos participantes são importantes para o processo formativo desencadeado na/pela prática da CoP-PAEM já que validam aspectos do conhecimento matemático dos professores participantes, incentiva-os a compartilhar os significados que produzem durante as resoluções, promovem a reflexão dos participantes sobre diferentes maneiras de resolver um problema matemático e o contato com diferentes informações, compartilhadas pelos colegas participantes ou pelo formador.

Análise da produção de Tina

Tina sente-se desconfortável no grupo com a restrição de não utilizar a regra de três como estratégia para resolução do problema e apresenta apenas uma resposta numérica (Figura 9) que, de acordo com o questionamento "*quantos homens seriam necessários para construir a casa em 1 dia?*", está correta.

Figura 9 – Registro escrito Tina (Folha de tarefas 1)



Fonte: Autora

No episódio a seguir, Tina verbaliza que não consegue resolver o problema a não ser pela estratégia da regra de três, o que pode ser observado por reificações como “eu não sei como fazer isso sem fazer (a regra de três)...”, ou então quando a participante se manifesta evidenciando sua vontade de resolver o problema por meio dessa estratégia algébrica, mas evitando fazê-lo por conta das recomendações negociadas em grupo: “Eu estou aqui segurando meu lápis!”.

[...]
Tina: Eu não sei como fazer isso sem fazer (a regra de três)... (risos).
[...]
Tânia: Coloca só a resposta então, não precisa de esquema... (sugiro que você) se esforce para achar outra forma de explicar como é que você chegou nessa resposta.
[...]
Tina: Pode só colocar a resposta?
Tânia: Pode...
[...]
Tina: [...] Eu estou aqui segurando meu lápis!
Tânia: [...] Quem não conseguiu achar outra estratégia, fez mentalmente, mas só conseguiu pensar na regra de três...
Tina: É, foi mentalmente, mas aqui foi pensado na regra de três (risos) não adianta...

(Encontro dia 03/07/2012)

Tânia, ao perceber que Tina não conseguiria elaborar uma estratégia, permitiu que a participante registrasse apenas o resultado encontrado para o problema, contrariando as negociações feitas na comunidade.

Ao utilizar a regra de três como estratégia para a resolução do problema, pode-se inferir que Tina identificou a existência de **relações multiplicativas**[*] **(indícios de**

---

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

raciocínio relativo) entre as grandezas que **covariam de forma inversamente proporcional** “quantidade de homens” e “quantidade de dias”, o que lhe possibilitou organizar mentalmente esses valores e, assim, conseguir encontrar uma resposta para o problema.

Ser capaz de identificar situações em que estratégias com base no raciocínio multiplicativo são mais apropriadas de serem aplicadas que aquelas com base no raciocínio absoluto, na resolução de um problema, é fundamental para o avanço no desenvolvimento do Raciocínio Proporcional (LAMON, 2012).

A falta de justificações verbais dessa participante esclarecendo seu raciocínio não permite detalhar de forma mais precisa as inferências feitas no parágrafo anterior. A utilização de uma regra como estratégia de resolução para problemas envolvendo proporção/proporcionalidade, nos estudos desenvolvidos por autores como Lamon (2012), Behr et al. (1988) com estudantes da Educação Básica, pode ser considerada um indício da não mobilização de Raciocínio Proporcional.

Esses autores apontam que o termo *raciocínio*, na expressão *Raciocínio Proporcional*, demanda dos indivíduos a análise cuidadosa das relações entre grandezas em um problema e justificações de estratégias e procedimentos utilizados, o que vai além da manipulação correta de relações como $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, que para eles, às vezes, são utilizadas de forma mecânica, sem que algum significado seja produzido para os valores bem como para as relações de proporcionalidade em que elas estão envolvidas.

Apesar de **Tina ter usado a regra de três como estratégia para a resolução do problema** e de não ter verbalizado explicações ou justificações de seu raciocínio, o que poderia explicitar sua compreensão das interações existentes entre as grandezas “quantidade de dias” e “quantidade de homens”, pode-se pensar que a participante, um adulto com uma considerável trajetória de estudos, mobilizou alguns aspectos do Raciocínio Proporcional, especificamente aqueles que estão subjacentes à estratégia da regra de três, como o **raciocínio relativo**[*] e as ideias de **covariância e invariância**.

Optar por essa estratégia não foi algo aleatório. Essa escolha foi feita pela participante Tina após um processo de leitura e interpretação das relações matemáticas existentes no problema, só assim foi possível que ela selecionasse uma estratégia conveniente

[*]

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

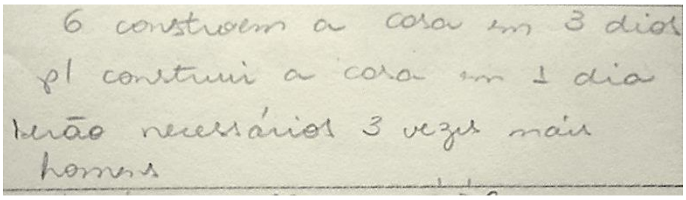
para resolvê-lo e encontrasse uma resposta ao manipular corretamente os valores de forma inversamente proporcional.

Análise da produção de Laís

Da mesma forma que Tina, Laís não conseguiu elaborar uma estratégia alternativa para resolver o problema e acabou por escolher e aplicar o dispositivo da multiplicação cruzada, a regra de três.

A opção por essa estratégia e os indícios evidenciados na fala dessa participante, no episódio a seguir, permitem inferir que ela reconheceu a existência de **relações multiplicativas** no contexto do problema, o que a fez mobilizar **raciocínio relativo** selecionando e desenvolvendo uma estratégia apropriada.

Figura 10 – Registro escrito Laís (Folha de tarefas 1)


6 constroem a casa em 3 dias
p/ construir a casa em 1 dia
serão necessários 3 vezes mais
homens

Fonte: Autora

No episódio seguinte, Laís explicita sua dificuldade em elaborar outra estratégia distinta da regra de três, mas evidencia a mobilização de Raciocínio Proporcional ao reconhecer a relação multiplicativa entre as grandezas do problema:

[...]
Laís: É mais forte que eu, eu não consigo (resolver sem utilizar a regra de três)... (risos).
[...]
Tânia: Mas você sabe qual que é a resposta?
Laís: Sei.
Tânia: Então escreva a resposta... Quem não conseguiu achar uma estratégia, só conseguiu pensar na regra de três (escreva a resposta)...
[...]
Laís: Eu também não consegui não pensar em (relações de) proporcionalidade. **São 3 dias a menos, então provavelmente... Precise de mais** (trabalhadores)...
Tânia: Entendi. **Precisa de mais...**
Laís: **Se eles** (homens) **aumentarem a quantidade**...

Tânia: Foi esse o pensamento. Aí já está associada a regra de três...*
Laís: É.

(Encontro dia 07/03/2012)

Laís reconhece a existência de **relações de covariância** das grandezas e a **relação inversamente proporcional** entre elas (reduzir o período de trabalho a $\frac{1}{3}$ da quantidade inicial implica em triplicar a quantidade de pessoas envolvidas no trabalho), o que é possível inferir a partir da análise de seu registro escrito (Figura 10) e do trecho de sua fala: “São 3 dias a menos, então provavelmente... Precise de mais (trabalhadores)...”.

De forma semelhante à participante Tina, infere-se que Laís mobiliza os aspectos do Raciocínio Proporcional, já destacados, que estão subjacentes à estratégia da regra de três.

Muitas vezes a dificuldade de alguns indivíduos em elaborar estratégias matemáticas de forma mais livre para a resolução de problemas é compensada pela memorização e uso de regras algébricas, geométricas e trigonométricas envolvendo proporção/proporcionalidade (LAMON, 2012), o que pode ser ilustrado pelos episódios anteriores envolvendo Tina e Laís.

A recorrente utilização de regras para a resolução de problemas envolvendo proporção/proporcionalidade por pessoas adultas, a exemplo da regra de três, parece justificável por serem estratégias práticas e fáceis de serem memorizadas.

Outra justificativa para esse uso pode estar relacionada ao fato de que o ensino escolar de temas que estimulam o desenvolvimento do Raciocínio Proporcional, como proporção/proporcionalidade, comumente é feito de maneira pontual, restrito a determinadas séries e conteúdos curriculares, com ênfase na memorização e aplicação repetitiva de fórmulas, o que não propicia o desenvolvimento de aspectos desse raciocínio, além daqueles subjacentes a essas regras/fórmulas trabalhadas.

Algumas vezes, antes que os alunos tenham tempo e oportunidade de produzir significados para as relações de proporção, ou que sejam capazes de testar a elaboração e posterior validação de diferentes estratégias matemáticas, os professores já

---

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

apresentam fórmulas e regras bem estruturadas e organizadas, justificando seu ensino e utilização por serem maneiras fáceis e rápidas de os alunos lidarem com esses problemas.

O fato de as participantes, nesse momento, não terem elaborado uma estratégia matemática alternativa e terem optado pelo uso da regra de três não indica que ambas sejam incapazes ou não estejam aptas a desenvolverem outros aspectos desse raciocínio, para além da regra, usando-o de maneira mais livre.

Entretanto isso causou algum desconforto nessas participantes, e Laís chegou a declarar que, por ter usado a regra de três como estratégia, acreditava não ter raciocinado proporcionalmente.

Tina:	Só eu que não estou entendendo? Todo mundo está (sem entender)?
Laís:	Não, tá tranquilo... Normal [...], mas eu vou chegar triste hoje em casa sabendo que eu não penso proporcionalmente.

(Encontro dia 03/07/2012)

Ao perceber a insatisfação das participantes, Tânia busca esclarecer e justificar essa situação de estranhamento, bem como estimular as participantes na tentativa de não deixar que elas desanimem ou se constranjam com o episódio.

A formadora/pesquisadora comenta, então, o hábito de utilizar regras em detrimento da elaboração de estratégias livres, algo alimentado pela cultura escolar. Ela apontou que raciocinar proporcionalmente, para além dessas regras, exige certo esforço dos indivíduos familiarizados apenas com a manipulação de recursos algébricos, o que, por vezes, confere às suas estratégias de resolução um aspecto mecanizado.

O espaço proporcionado pela CoP para negociações de significados possibilitou criar e cultivar entre os participantes a confiança uns nos outros para exporem suas dúvidas e dificuldades relacionadas a alguns dos elementos de seu conhecimento profissional, como algumas fragilidades no conhecimento especificamente matemático e a consequente dificuldade em elaborar uma estratégia de resolução, como foi exteriorizado pelas participantes Tina e Laís.

As declarações feitas por elas evidenciam a segurança/confiança que construíram com os demais colegas da CoP-PAEM. Isso torna possível a elas se exporem a uma situação de vulnerabilidade (OLIVEIRA, CYRINO, 2011; GARCIA, OLIVEIRA, CYRINO; 2013) em uma comunidade formada por professores de Matemática, o que, em outras circunstâncias, poderia não acontecer ou causar constrangimento.

Para Wenger, McDermott e Snyder (2002), uma CoP "fomenta interações e relações baseadas em respeito mútuo e confiança. Ela incentiva uma ação voluntária de compartilhar ideias, expor a própria ignorância, fazer perguntas difíceis, e ouvir cuidadosamente"[46] (p.28).

Essas negociações permitem a apresentação, justificação, discussão e validação das estratégias matemáticas elaboradas pelos participantes valorizando olhares e interpretações individuais de um mesmo problema.

Esse processo possibilita aos professores, participantes da CoP-PAEM, o exercício de conhecer e compreender quais são os conhecimentos matemáticos constituídos e as crenças de seus pares, e de que forma esses aspectos influenciam na constituição de seu conhecimento profissional e consequentemente em sua identidade de professor.

Análise da produção de Iara [47]

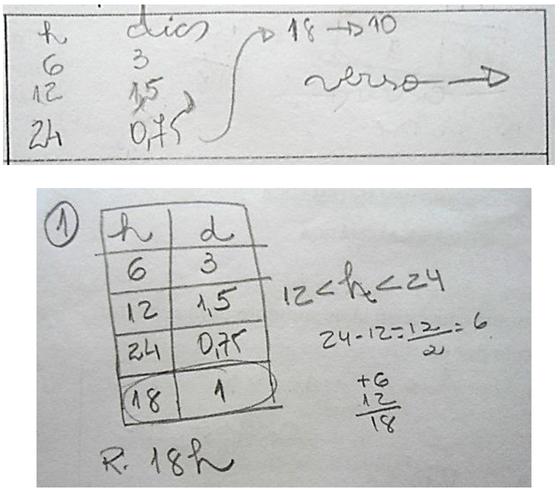
Iara optou por organizar os dados do problema (quantidade de homens e de dias) em um quadro (Figura 11), evidenciando alguns aspectos do Raciocínio Proporcional, nomeadamente: as **relações multiplicativas**[*], de proporcionalidade inversa entre as grandezas do problema, bem como a **covariação dessas grandezas**.

Efetuando as operações de dobrar e reduzir à metade – indícios de mobilização do processo denominado **raciocínio progressivo e regressivo** – por duas vezes, nos valores do quadro, Iara encontra uma quantidade quatro vezes maior que o valor inicial de homens e $\frac{1}{4}$ do valor da quantidade inicial de dias de trabalho, o que resulta em um valor sem sentido para a situação-problema: 24 homens terminariam a casa toda em 0,75 dias.

[46] "[…] fosters interactions and relationships based on mutual respect and trust. It encourages a willingness to share ideas, expose one's ignorance, ask difficult questions, and listen carefully." (WENGER, McDERMOTT e SNYDER, 2002, p. 28).
[47] A análise da estratégia elaborada por essa participante é feita apenas com base em seus registros escritos já que no encontro do dia 03/07/2012 a participante não esteve presente e, nos encontros posteriores, não se manifestou verbalmente no grande grupo a respeito deste problema.
[*]

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

Figura 11 – Registro escrito Iara (Folha de tarefas 1)



Fonte: Autora

Percebendo que o número de dias desejado era 1 (um) e que esse situava-se no intervalo entre os valores 1,5 e 0,75, Iara tenta encontrar o valor médio (cálculo com base no **raciocínio relativo**[*]) entre as quantidades, porém essa ideia é aplicada de forma coerente somente à quantidade de homens e não à quantidade de dias.

A participante encontra o valor médio entre o intervalo 12 e 24 (18) homens e faz a correspondência do resultado com o valor 1 (um), quantidade de dias, que não corresponde ao real valor médio do intervalo 1,5 e 0,75.

Apesar de indicar corretamente o resultado e uma estratégia para resolução até certo ponto correta, não há coerência entre ambos. Mesmo com erro, a estratégia elaborada mobiliza alguns aspectos do Raciocínio Proporcional, como o **raciocínio relativo** e as ideias de **covariância**.

4.2.1.2 REFLEXÃO A RESPEITO DE ALGUMAS DAS RESOLUÇÕES E JUSTIFICAÇÕES COM O APOIO DA LITERATURA: PROBLEMA DA CONSTRUÇÃO DA CASA

---
*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

A primeira estratégia de resolução do problema, a **ser estudada em um processo de reflexão pela comunidade**, foi a da participante Tina (Figura 12), que apresentou apenas um registro numérico como resposta.

Ao ser questionada sobre como resolveu o problema, Tina mostrou-se confusa, questionando Laís, que ajudou Tânia na tarefa de organizar as estratégias dos participantes e selecionar, fotografar/escanear e editar os registros escritos que eram apresentados em folhas impressas (APÊNDICES D e E), como é possível observar no episódio a seguir:

Figura 12 – Registros de Tina (Ação 1) para reflexão em grupo (Folha 2.1)

REPRESENTAÇÃO ESCRITA E CONCLUSÃO/JUSTIFICATIVA	
Tina: 18 homens	**Tânia:** Isso, então, aí cada um vai tentar fazer, pensar um raciocínio, num esquema, tá e escrever... **Tina:** O duro é o esquema de, **Laís:** Você não fazer isso (a regra de três) **Tânia:** O esquema da regra de três não **Laís:** Você já vai direto **Tina:** Eu não sei como fazer isso sem fazer (a regra de três)... **Laís:** É mais forte que eu, eu não consigo... **Tina:** É, então, eu tô aqui segurando meu lápis! [...] **Tina:** É, foi mentalmente, mas aqui foi pensando na regra de três (risos), não adianta...

Fonte: Autora

Tina: Então, você colocou... Eu não entendi por que você (para Tânia) só colocou esse 18, você não, a Laís, colocou esse 18...
Laís: Porque você só colocou isso!
(risos)

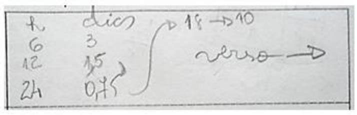
(Encontro dia 23/04/2013)

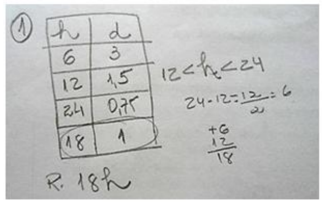
Tânia relembra que, assim como Eva e Laís, Tina também sentiu dificuldade em abandonar a "regra de três" para elaborar outra estratégia matemática para a resolução do problema mobilizando aspectos do Raciocínio Proporcional, o que levou essa participante a apresentar como registro escrito apenas o resultado final do cálculo mental efetuado, que teve como base, segundo ela, a organização, visualização e manipulação dos valores, na estrutura do dispositivo da multiplicação cruzada, a regra de três.

O estranhamento de Tina, frente à falta de registros de sua estratégia, não foi um caso isolado. Na reflexão a respeito dos registros escritos de Iara (Figura 13), o mesmo estranhamento foi registrado.

Figura 13 – Registros de Iara (Ação 1) para reflexão em grupo (Folha 2.1)

REPRESENTAÇÃO ESCRITA E CONCLUSÃO/JUSTIFICATIVA
ESTRATÉGIA 2: Construir uma tabela relacionando as grandezas envolvidas
Iara





Fonte: Autora

Tânia: [...] Ela (Iara) construiu uma tabela[48] relacionando as grandezas envolvidas, certo? E, aí, o que a gente pode observar [...]?

Eva: **Usou a proporção, não usou**?

Iara: É, eu fui fazendo uma tabela, certo? **Fui pegando pelos meios, ó, está vendo? [...] eu fui dobrando a tabela lá.**

Tânia: 6 homens, 3 dias...

Iara: 12 homens, 1 dia e meio, aí 24 homens a metade, 075... [...] o número de homens está entre o 12 e o 24 então...

[...]

Tânia: Isso.

Iara: Aí eu passei pro 18.

Tânia: Você fez uma referência, aí a conta que você fez foi 24 – 12.

Iara: Então, lá a quantidade de homens deu 6 $\left(\dfrac{24-12}{2}\right)$.

Tânia: 24, 6.

Iara: Daí o 12+6 dá 18...

[...]

Laís: Aí 18 dá 1.

Tânia: E como é que você achou esse 1?[*]

---

[48] O que as participantes tratam como *tabela*, na verdade, caracteriza-se como um *quadro*.

[*]

[...]

(Encontro dia 23/04/2013)

A participante optou por organizar os dados do problema em um quadro, em que operou os valores e encontrou que seriam necessários 18 trabalhadores para construírem a casa em apenas 1 dia. Contudo, apesar de a estratégia levar ao valor correto, o padrão de cálculos usados no procedimento, nas relações multiplicativas entre os valores registrados, se mantido, não conduz ao resultado final encontrado.

Na **reflexão feita pelos participantes a respeito da estratégia apresentada por Iara** no episódio anterior podem-se observar indícios de aprendizagem da participante Eva e também da própria Iara, quando ambas identificam aspectos do **raciocínio relativo** nos registros escritos analisados, a saber, as relações multiplicativas e proporcionais estabelecidas entre as grandezas dispostas no quadro.

A estratégia utilizada pela participante, organizar os valores covariantes de problema em quadros, é eficiente quando não se dispõe de recursos algébricos como o dispositivo da multiplicação cruzada (a regra de três). Lamon (2012) destaca que essa estratégia para resolução é comumente utilizada por crianças logo que começam a lidar com proporção/proporcionalidade.

A elaboração do quadro promove o desenvolvimento do processo denominado **raciocínio progressivo e regressivo*** e alguns de seus indícios podem ser observados em procedimentos como consecutivas duplicações e reduções à metade dos valores covariantes, operações que são familiares aos alunos mais jovens (SPINILLO, 1994, 2002).

Em determinado momento na CoP-PAEM, as formadoras/pesquisadoras Tânia e Laís comentam o uso de quadros por crianças, o que faz Iara sentir-se constrangida, considerando sua estratégia pouco sofisticada, quando comparada às resoluções apresentadas pelos outros colegas da CoP.

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância		Raciocínio Progressivo e Regressivo		Raciocínio Relativo
Raciocínio Absoluto		Constante de Proporcionalidade		Partição

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância		Raciocínio Progressivo e Regressivo		Raciocínio Relativo
Raciocínio Absoluto		Constante de Proporcionalidade		Partição

Durante algumas negociações na CoP-PAEM, **quando Iara compartilhou suas resoluções com o grupo, a participante justificou a escolha de suas estratégias/procedimentos** tendo em conta a sua prática em sala de aula.

O trabalho por um longo período com crianças das séries iniciais do Ensino Fundamental exerce influência direta sobre seu conhecimento matemático, sua forma de pensar e elaborar estratégias para resolver problemas, que acaba sendo (res)significado pelo conhecimento que ela tem de seus alunos (suas potencialidades e fragilidades), bem como das demandas do currículo escolar.

> É a partir da problematização da prática que o professor passa a refletir e produzir significados para os acontecimentos que vivencia. Os saberes específicos do conteúdo – muitas vezes adquiridos nos cursos de licenciatura – sofrem (re) significações quando trabalhados em sala de aula, pois passam a ser imbrincados com as questões pedagógicas e curriculares. (NACARATO, 2006, p. 200)

A falta de descrições mais precisas nos registros escritos dos procedimentos desenvolvidos por Iara propicia uma negociação de significados em grande grupo, cujo ponto de enfoque é a reconstrução da possível estratégia utilizada pela participante.

[...]*

Laís: Mas aí ela (Iara) somou metade... Ela dobrou de 12 pra 24, ela usou a mesma estratégia desses dias atrás em uma tabela (na resolução de outro problema), [...] ia passar (da quantidade desejada), aí o que ela fez, somou metade e **como tinha que aumentar metade no número de homens, então ia diminuir metade no número de dias**, ela tirou o meio e chegou no 1 [...] mas o meio não é metade de 1 e meio...

[...]

Iara: Mas por que eu coloquei 1 lá? 1 dia...?

Tânia: Como é que você chegou nesse 1 dia?

[...]

Iara: Ah ele (o 1) está na metade, está assim, ó, **ele está na metade, é maior que o 0,75 e menor do que o 1,5**.

---

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

Tânia: Sim.

Iara: Está bem no meio.

Tânia: Aí você achou que (o 1) estava no meio?

[...]

Iara: É (o 1), não é? Porque o 0,75 para o 1 falta 0,25! Não falta?

Laís: É isso que eu estou vendo aqui, e depois a diferença de 1 pra 1,5 é meio.

Iara: Mas o meio [...] de 1,5 mais 0,75 dividido por 2 também não dá o 0,25?

[...]

Laís: Como Iara? Metade de 1,5...?

Iara: 1,5 mais 0,75.

(pausa)

Eva/Tânia: Dá 2,25.

Iara: Divide por 2.

Tânia: Dá 1,125.*

[...]

(Encontro dia 23/04/2013)

Durante essas negociações a respeito do desenvolvimento da estratégia de Iara, identificaram-se evidências de aprendizagens de Laís dos **raciocínios absoluto*** e **relativo**, quando a participante identifica **a relação inversamente proporcional entre as grandezas** covariantes no quadro e assim sugere **a soma/subtração** das **'metades'** (quantidades relativas) aos valores de cada coluna.

A participante Iara também evidencia sua aprendizagem relacionada à ideia de **medida ao indicar a posição do número 1 entre dois outros números encontrados, 1,5 e 0,75**, reafirmada pela ideia de que o número 1 seria o resultado de uma média aritmética entre esses dois valores.

---

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

Ao **refletirem a respeito dos registros de Iara**, percebe-se a mobilização de diferentes elementos do conhecimento matemático pelos participantes, especificamente aspectos do Raciocínio Proporcional, como o **raciocínio relativo** e o **significado parte-todo/medida** do registro fracionário $\frac{a}{b}$.

Iara, ao final das reflexões, conclui que, pelos procedimentos utilizados, a relação proporcional entre os valores 18 e 1 não pode ser encontrada. Mesmo com outras negociações acontecendo no grande grupo quanto aos possíveis procedimentos utilizados, não há informações suficientes nos registros de Iara que permitam afirmações mais consistentes sobre um possível raciocínio desenvolvido na resolução do problema.

O conhecimento que os professores, participantes da CoP-PAEM, têm da Matemática os faz desenvolver mentalmente boa parte das estratégias/procedimentos utilizados para a resolução de problemas. Assim, eles se preocupam pouco com o registro detalhado de seus cálculos, o que, por vezes, dificulta a compreensão de outro indivíduo ao olhar cuidadosamente tais registros, como justificado pela participante Eva: "é porque ali (nos registros escritos) a gente simplifica muito." (Encontro dia 23/04/2013).

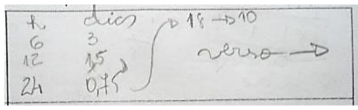
A forma despretensiosa com que alguns professores fazem seus registros é uma contradição quando se pensa em suas atitudes em sala de aula, lugar em que, comumente, boa parte deles exige dos alunos registros minuciosos na resolução de problemas.

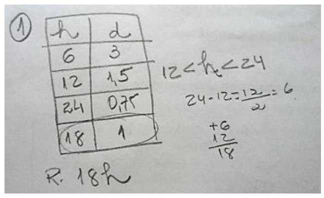
Apresenta-se a seguir um quadro-síntese com algumas das reificações verbalizadas pelos participantes durante suas participações na CoP-PAEM no desenvolvimento dos trabalhos com o problema da construção da casa.

Destacam-se a seguir as aprendizagens relacionadas ao conhecimento matemático do professor nos momentos em que os participantes se engajaram na *resolução e discussão de estratégias para a resolução do problema que envolvia proporção/proporcionalidade* (Ação 1) e nas *reflexões a respeito de algumas produções apresentadas na Ação 1* com apoio da literatura sobre do tema (Lamon, 2012) (Ação 4)

Quadro 5 – Frases que evidenciaram reificações dos participantes durante processos de negociação de significados na CoP-PAEM nas ações de resolver, discutir e *refletir a respeito de problemas envolvendo proporção/proporcionalidade.*

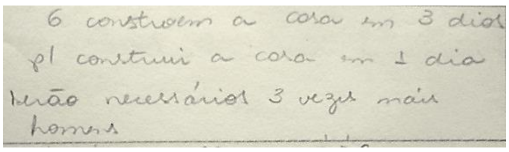
O QUE FOI REIFICADO		**JUSTIFICAÇÕES**
Indícios de mobilização de conhecimento matemático	Interpretação medida para um número racional	"Ele (o 1) está na metade, [...] é maior que o 0,75 e menor do que o 1,5." (Iara)

<table>
<tr>
<td rowspan="5"></td>
<td rowspan="2">Raciocínio Proporcional: Processo de Unitização e Raciocínio progressivo e regressivo</td>
<td>Ênfase no significado parte todo/medida para o registro $\frac{a}{b}$</td>
<td>“eu pensei que cada dia correspondeu a $\frac{1}{3}$ do tempo que eles gastariam para fazer essa casa, se em cada dia eu precisava de 6, eu tinha 6 homens, então 6+6+6, 18...” (Bia)</td>
</tr>
<tr>
<td>Evidências do processo building up</td>
<td>



(Iara)

“[...] eu fui fazendo uma tabela, fui pegando (os valores) pelos meios [...] dobrando a tabela lá [...]12 homens, 1 dia e meio, aí 24 homens a metade, 075... [...] o número de homens está entre o 12 e o 24 então... [...] eu não sei não, mas eu estou achando que usei a regra de três aí escondidinha!” (Iara)

“Usou a proporção, não usou?” (Eva)</td>
</tr>
<tr>
<td>Raciocínio Proporcional: Raciocínio Relativo</td>
<td colspan="2">

(Laís)</td>
</tr>
<tr>
<td>Identificação de conhecimentos matemáticos básicos nos problemas envolvendo proporção/proporcionalidade</td>
<td colspan="2">“[...] tudo isso aqui (problemas envolvendo proporção/proporcionalidade, folha 1 de tarefa) é “Matemática da dona Mariquinha” (Bia)</td>
</tr>
<tr>
<td>Dificuldade em mobilizar conhecimentos matemáticos na elaboração de uma estratégia para a resolução do problema</td>
<td colspan="2">“eu não sei como fazer, sem fazer (regra de três)... [...] pode só colocar a resposta? (resolvi) mentalmente mas aqui foi pensado na regra de três (risos) não adianta...” (Tina)

“não pode pôr ‘x’ né?” (Tina)

“é mais forte que eu, eu não consigo (resolver sem fazer regra de três)... (risos) [...] você já vai (resolve) direto” (Laís)</td>
</tr>
</table>

Fonte: Autora

Nos processos de negociação de significados, desencadeados pela **resolução, discussão e reflexão a respeito de problemas e de algumas resoluções apresentadas**, identificaram-se aprendizagens dos participantes da CoP-PAEM relativas a aspectos de seu *conhecimento matemático*, nomeadamente:

- potencialidades observadas na elaboração de diferentes estratégias para a resolução de problemas envolvendo proporção/proporcionalidade que evidenciaram a mobilização de algumas estruturas do Raciocínio Proporcional (raciocínio relativo, interpretações do registro fracionário a/b dos números racionais, por exemplo, a interpretação medida, processos de unitização, raciocínio progressivo e regressivo e *building up*);

- fragilidades perceptíveis na tentativa de elaboração de estratégias para a resolução do problema, indicando a pouca familiaridade/flexibilidade que alguns dos professores participantes têm ao lidar com problemas matemáticos sem o uso de recursos da álgebra, como a regra de três.

Na próxima seção, dando continuidade às análises, apresentam-se inferências a respeito das Ações 1 e 4, relacionadas ao trabalho com o problema do preço dos chocolates.

4.2.2 ANÁLISE DO PROBLEMA DO PREÇO DOS CHOCOLATES, DA RESOLUÇÃO E DAS JUSTIFICAÇÕES DOS PARTICIPANTES DA CoP-PAEM

O problema analisado a seguir, denominado pela CoP-PAEM problema do preço dos chocolates, é caracterizado como um *problema de valor omisso* (LAMON, 2012; BEHR et al. 1988), em que os valores de três grandezas são apresentados no enunciado do problema e deseja-se saber qual o valor da quarta grandeza envolvida nas relações proporcionais existentes entre elas.

Quadro 6 – Enunciado do problema do preço dos chocolates

Se 6 chocolates custam R$ 0,93, quanto custam 22 chocolates?

Fonte: Autora

Esse problema representa uma situação em que as grandezas covariantes, quantidade de chocolates e seu respectivo preço, variam de forma diretamente proporcional: o aumento na quantidade de elementos do grupo de chocolates implica no aumento proporcional do valor a ser pago em determinada unidade monetária.

Independente da estratégia elaborada para a resolução do problema, as evidências de mobilização de aspectos do Raciocínio Proporcional poderiam ser apontadas quando um participante identificasse a **covariância**[*] entre as grandezas do problema e a **relação multiplicativa** (diretamente proporcional) existente entre elas.

4.2.2.1 RESOLUÇÃO E DISCUSSÃO DE ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS QUE ENVOLVEM PROPORÇÃO/PROPORCIONALIDADE: O PROBLEMA DO PREÇO DOS CHOCOLATES

A seguir são apresentadas as resoluções dos participantes e as negociações de significados ocorridas durante a resolução do problema e durante as apresentações das resoluções no grande grupo.

Análise da produção de Laís

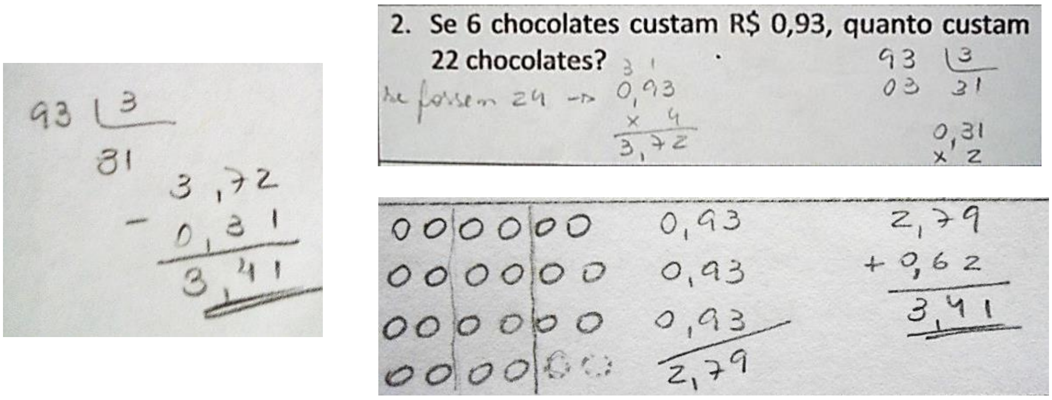
Laís recorre a uma representação pictórica como apoio para a elaboração de sua estratégia (Figura 14), que em princípio evidencia aspectos do **raciocínio absoluto,** especificamente quando a participante organiza grupos de 6 chocolates (considerado por ela como a unidade), associa-os aos seus respectivos preços (R$ 0,93) e efetua somas consecutivas desses conjuntos:

---

[*]

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

Figura 14 – Registro escrito Laís (Folha de tarefas 1)



Fonte: Autora

No trabalho com este segundo problema da folha de tarefas, **a participante resolve o problema por meio de outra estratégia** que não a regra de três.

Segue abaixo a transcrição do episódio em que Laís, ao negociar significados com Tânia, **expõe para o grande grupo de que maneira lidou com o problema dos chocolates**:

Tânia: Laís, o que você pensou? O que você fez?

Laís: Dessa vez eu fiz assim, **pensei no total de chocolates que era 22, como eu tinha o preço de 6** (chocolates) **então fui agrupando de 6 em 6 até chegar nos 24** (chocolates)**, mas aí passava** (da quantidade 22 chocolates)...

Tânia: Aham.

Laís: Então, eu fiz o desenho dos docinhos, **e aí calculei quantos grupos inteiros de 6** (chocolates) **dava, são três grupos.**

Tânia: Certo.

Laís: No último grupo ficam sobrando dois chocolates, então **eu dividi (o último grupo de 6 chocolates) em 3 (partes) e calculei o preço de cada 2 chocolates**

Tânia: Aham.

Laís: Eu tirei do total de 24 [...] e depois eu fiz de outro jeito também, calculei para menos (organizando um grupo com 18 chocolates)...

Tânia: **Sim, você foi até o 18 com 3 pacotinhos de 6.**

Laís: **É.**

Tânia: E como você calculou o preço dos 4?

Laís: Eu fiz da mesma forma.

Tânia: Ah [...] **você viu que o pacote de 6** (chocolates) **também dava pra fazer** (grupos) **de 2 em 2.**

Laís: **Uhum.**

Tânia: **Isso? Aí você pegou** $\frac{1}{3}$

Laís: **Aí eu achei** (quanto custavam) $\frac{2}{3}$

Tânia: Isso, calculou $\frac{1}{3}$ do preço (R$ 0,93).

Laís: Isso

Tânia: E depois somou $\frac{2}{3}$ desse preço (R$ 0,93)

Laís: É.*

(Encontro dia 03/07/2012)

Após verificar que, em um conjunto de 22 chocolates, é possível obter três grupos completos de seis chocolates (totalizando 18) que custam R$ 2,79, para encontrar o preço dos quatro chocolates que faltam, a participante subdivide o grupo de seis chocolates em três partes e calcula o preço de cada uma dessas partes (R$ 0,31) e multiplica por dois (R$ 0,62). Em seguida encontra a soma R$ 2,79 + R$ 0,62 = R$ 3,41.

Como a participante considerou a unidade como o conjunto de 6 chocolates, para calcular o preço exato dos 22 chocolates, ela lança mão da estratégia de reorganizar a unidade, 6 chocolates, em três grupos menores, cada um deles contendo 2 chocolates, o que evidencia o processo de **unitização** e indícios do **raciocínio relativo**.

Ao final das negociações a respeito de sua maneira de resolver o problema, quando Laís aponta a estratégia utilizada para calcular que fração da unidade 6 chocolates ela considerou para o cálculo do preço final do total de 22 chocolates, fica explícita a ideia de relação **parte todo/medida** atribuída ao registro fracionário $\frac{a}{b}$. A participante considera *a* partes (1) tomadas de *b* partes (3) (LAMON, 2012).

É possível observar, também, evidências da **interpretação operador***
atribuída por Laís às formas fracionárias $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ no momento em que ela calcula o preço dos 4 chocolates. O **operador** funciona como uma função (BEHR et al. 1983), um grupo de

---

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

instruções (LAMON, 2012) que modifica a quantidade inicial, R$ 0,93, em uma quantidade proporcional ao valor do operador.

Nesse caso, o preço total de 6 unidades de chocolate foi alterado para quantias proporcionais a $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, representando o preço a ser pago por essas partes do todo referencial. A ideia de **partição** fica evidente no momento em que Laís divide em três partes o conjunto de 6 chocolates.

Raciocinar em termos relativos é fundamental para a mobilização de aspectos do Raciocínio Proporcional, como o **processo de unitização** e as interpretações **parte-todo/medida** e **operador** (LAMON, 2012) que foram destacadas nas justificações da participante.

Com essa análise pode-se inferir que Laís ao se dispor a elaborar uma estratégia de resolução para este problema, sem recorrer a recursos algébricos, mobilizou diferentes aspectos do Raciocínio Proporcional, o que não havia acontecido na resolução do primeiro problema, o da construção da casa.

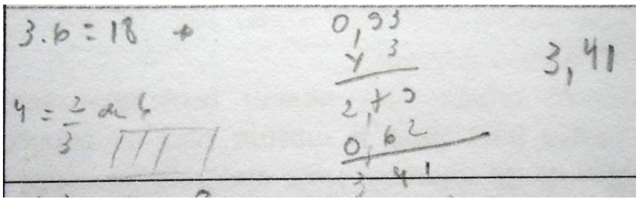
Nessa segunda resolução, Laís mostra-se mais engajada na ação de resolver problemas de proporção/proporcionalidade sem o uso de recursos algébricos, o que pode ser notado quando a participante apresenta uma estratégia diferente para a resolução do problema (que é legitimada e, ao final da negociação, sistematizada pela formadora/pesquisadora Tânia), o que não havia acontecido no trabalho com o problema anterior.

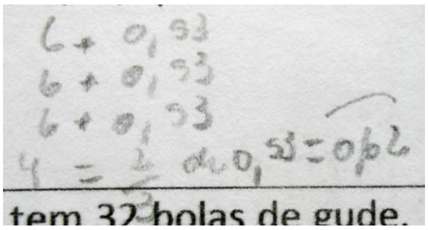
Dessa forma, infere-se que Laís legitima a ação de resolver e discutir estratégias de resolução para problemas envolvendo proporção/proporcionalidade, negociada com a Comunidade de Prática, como algo importante para o desenvolvimento de seu conhecimento matemático, especificamente do Raciocínio Proporcional.

Análise da produção de Bia

Assim como Laís, Bia inicialmente resolve parte do problema com base em uma estratégia em que a adição foi predominante (Figura 15):

Figura 15 – Registro escrito Bia (Folha de tarefas 1)





Fonte: Autora

Sabendo que um conjunto de 6 chocolates custa R$ 0,93 unidades monetárias, Bia soma consecutivamente conjuntos de 6 chocolates (6+6+6 = 18) relacionando-os com seu respectivo preço (R$ 0,93 x 3 = 2,79), no intuito de aproximar esse somatório da quantia indicada no enunciado, 22 chocolates, o que evidencia a mobilização de **raciocínio absoluto** (ou raciocínio aditivo, cuja característica são as repetidas adições de valores – LAMON, 2012). Bia escolhe organizar três conjuntos contendo 6 chocolates cada um, totalizando 18 chocolates que custam R$ 2,79 unidades monetárias.

Para o cálculo do restante dos chocolates necessários para completar o conjunto de 22 chocolates, é possível observar em seus registros escritos que Bia encontra a correspondência entre 4 de um grupo de 6 chocolates: 4 equivale a $\frac{2}{3}$ do conjunto de 6 chocolates; o que evidencia o tratamento pela participante do registro fracionário $\frac{2}{3}$ como uma **relação parte todo/medida**[*]: a fração indica a relação existente entre um número de partes e o total delas (BRASIL, 1998; BEHR et al. 1983).

Ela ainda interpreta o mesmo registro $\frac{2}{3}$ como um **operador**, ao calcular $\frac{2}{3}$ *de* R$ 0,93 ($\frac{2}{3}$ x 0,93 = R$ 0,62). Por fim, a participante adiciona as quantidades R$ 2,79 e R$ 0,62 encontrando o valor total de chocolates, R$ 3,41.

---

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância		Raciocínio Progressivo e Regressivo		Raciocínio Relativo
Raciocínio Absoluto		Constante de Proporcionalidade		Partição

A seguir apresenta-se o recorte das negociações de significados a respeito da estratégia utilizada por Bia (e por Tina) para a resolução deste problema, ocorridas entre os participantes da CoP-PAEM no momento em que **Bia justifica seu raciocínio ao lidar com o problema para o grande grupo:**

Tânia:	[...] Como é que vocês (Bia e Tina) pensaram?
Bia:	Foi a mesma coisa da Laís.
Tina:	**É, de 6 em 6** (grupos de chocolates)...
Tânia:	Mas como vocês fizeram para achar? Eu achei legal o jeito que você (Bia) falou...
Tina:	Ah, o $\frac{4}{6}$!
Tânia:	É, como que você (Bia) pensou pra achar os 4?
Bia:	Ah então, aqui **eu tive 3 grupos de 6, que são 18 (chocolates), e** faltaram 4 chocolates (para completar os 22 chocolates) que eu queria saber quanto custava. **4 num grupo de 6 são** $\frac{4}{6}$. $\frac{4}{6}$ **representa** $\frac{2}{3}$**, (pois) é uma fração equivalente a** $\frac{2}{3}$.
Tânia:	Estão vendo? É outro jeito de pensar.
[...]	
Bia:	Isso, eu calculei $\frac{2}{3}$ **de R$ 0,93, que são R$ 0,62,** e fiz a soma...
Tina:	Desse jeito, (calculando o valor) de dois em dois é mais fácil [...] porque, **0,93 centavos cada dois** (chocolates) **aqui ó, 62 (centavos). É mais fácil visualizar.**
Tânia:	Porque dividir os 93 por 6 dá quebrado, vai dar uma casa decimal a mais, uma unidade de dinheiro que não tem.
Tina:	É, é...

(Encontro dia 03/07/2012)

Ao questionar Tina e Bia a respeito da resolução deste problema, Tânia incentiva as participantes a **compartilharem com os colegas da Comunidade de Prática os significados negociados entre elas**, o que é explicitado nas falas: “Como é que vocês (Bia e Tina) pensaram?”, “Eu achei legal o jeito que você (Bia) falou...”. Após a resposta de Bia, Tânia valida a resolução no grande grupo (“Estão vendo? É outro jeito de pensar.”).

A legitimação dos significados produzidos pelos participantes, pela formadora/pesquisadora da Comunidade de Prática, e o incentivo explicitado por ela para o compartilhamento de informações com o grande grupo promovem a participação mais ativa dos professores, a reflexão e consequentes reificações a respeito do que é compartilhado.

Ao responder a Tânia sobre como encontrou o exato número de chocolates e seu respectivo preço, Bia evidencia indícios do processo de **unitização***, ao relacionar as frações $\frac{4}{6}$ e $\frac{2}{3}$ como frações equivalentes – o que indica uma reorganização da quantidade relativa $\frac{4}{6}$ em subunidades de 'tamanhos' equivalentes (LAMON, 2012).

Após reorganizar a unidade, 6 chocolates, em 3 subgrupos com 2 chocolates cada um, Bia calcula quanto valem 2 desses subgrupos (que somados resultam em 4 unidades de chocolates): 3 subgrupos formado por 2 unidades cada um, custam ao todo 0,93; assim, ao calcular o preço de $\frac{2}{3}$ dos subconjuntos existentes, Bia aplica ao valor total, R$ 0,93, **um transformador, o operador** $\frac{2}{3}$, capaz de reduzir esse valor a um valor proporcional a $\frac{2}{3}$ *de* R$ 0,93 ($\frac{2}{3}$ x 0,93), ou seja, R$ 0,62.

Bia tem sua resolução legitimada pela Comunidade de **Prática enquanto justifica sua estratégia/procedimentos utilizados.** A participante Tina expressa essa validação afirmando que, em relação à estratégia que ela mesma havia elaborado, a utilizada por Bia lhe parece mais fácil, ou seja, Tina legitima a estratégia de Bia e consequentemente o conhecimento matemático da colega.

Pelas análises feitas, pode-se afirmar que Bia mobiliza aspectos do Raciocínio Proporcional ao lançar mão da estratégia escolhida para a resolução do problema. Outras evidências de mobilização de aspectos do Raciocínio Proporcional por essa participante são destacados a seguir, momento em que Tina negociou significados de maneira intensa com Bia, na tentativa de elaborar uma estratégia matemática para resolver este mesmo problema.

Análise da produção de Tina

---

*

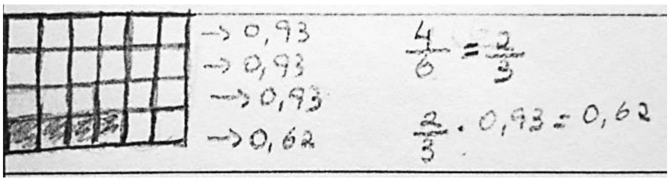
Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

Os diálogos transcritos a seguir são referentes às negociações de significado ocorridas entre as participantes Bia e Tina no momento em que os participantes da CoP resolviam problemas individualmente ou em pequenos grupos.

Assim o **ponto de enfoque** do episódio seguinte é a **elaboração de uma estratégia para a resolução do problema do preço dos chocolates.** Como Bia verbaliza essa estratégia em grande grupo, ao ser questionada por Tânia (episódio apresentado anteriormente), optou-se por apresentar aqui **as negociações correspondentes à elaboração dessa estratégia pelas participantes Tina e Bia**.

Tina utiliza uma representação pictórica para apoiar parte da estratégia para a resolução do problema (Figura 16).

Figura 16 – Registro escrito Tina (Folha de tarefas 1)



Fonte: Autora

Inicialmente ela raciocina em termos absolutos **somando, repetidamente, 6 unidades de chocolate**[*], que ela considera como unidade (inteiro referencial), relacionando essas unidades com seus respectivos preços (R$ 0,93), o que lhe permitiu fazer uma aproximação do valor a ser pago por um conjunto de 22 chocolates.

Ao agrupar quatro conjuntos formados por 6 unidades de chocolate (6 +6 + 6 +6 = 24), Tina obtém um total que ultrapassa em 2 unidades a quantidade de 22 chocolates, cujo valor é requerido pelo enunciado do problema.

No intuito de encontrar esse valor exato, Tina destaca 4 unidades do último conjunto de 6 chocolates (área hachurada no desenho – Figura 16), indicando o número de chocolates necessários para formar o conjunto desejado com 22 elementos, o que indica a

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

ideia de interpretação **parte todo/medida**[*], evidenciando a mobilização de Raciocínio Proporcional.

Apesar de se poderem inferir a respeito de evidências da relação parte-todo/medida nos registros escritos de Tina (Figura 16), essa ideia não fica evidente nas justificações verbalizadas pela participante.

No trecho a seguir, **Tina justifica seu raciocínio, em negociação a respeito de sua estratégia com a colega Bia**:

[...]
Tina: **Pensando num desenho, eu poderia colocar 6 barrinhas, seriam 6 chocolates, certo? É 93** (centavos)**, aí depois colocar mais 6** (chocolates)**, 93** (centavos) **e depois...**
[...]
Bia: 93 centavos isso.
Tina: **Aí mais 6... Posso ir fazendo assim, daí?**
Bia: **Pode...**
Tina: **93** (centavos)**...**
Bia: **Bom, chocolate você já tem 18.**
Tina: **18...**
Bia: Então para 22 (chocolates)...
Tânia: 22 (chocolates)... Você tem que achar o preço de mais 4 (chocolates).
Tina: Achar o preço de mais 4 (chocolates), aí aqui já complicou... (risos).

(Encontro dia 03/07/2012)

Tina mostra-se insegura quanto à escolha da estratégia que utilizou bem como dos procedimentos que deverá desenvolver para encontrar o preço de 22 chocolates. A participante recorre à colega Bia, visando conseguir a legitimação de seu raciocínio por outra pessoa da Comunidade de Prática, portando-se como uma participante novata, alguém menos experiente ou com conhecimento menor das ideias e conceitos negociados para elaboração de uma estratégia (WENGER, 1998).

As interações desenvolvidas na comunidade permitiram aproximações entre alguns participantes, o que pode ser observado no episódio acima: Tina busca a ajuda de Bia, porque Bia é uma participante cuja trajetória como professora de Matemática e cujo

---

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

conhecimento matemático Tina legitima. É uma colega com quem se sente à vontade para expor dúvidas e fragilidades de seu conhecimento com relação à Matemática, uma participante com quem cultiva laços de amizade e que considera como experiente no grupo de participantes da CoP-PAEM.

Quando uma Comunidade de Prática mostra-se forte, um ambiente seguro para os participantes, ela promove interações e o desenvolvimento de relações com base no respeito e na confiança, contribuindo para promover um espaço em que é possível expor dúvidas e dificuldades (WENGER, MCDERMOTT, SNYDER, 2002), aspectos que podem ser observados na CoP-PAEM.

No recorte das negociações apresentado a seguir, **Tina continua a negociar significados com Bia para encontrar uma maneira de calcular** o preço dos 4 de 6 chocolates:

[...]*

Tina: **É, eu vou ter que dividir, certo? 0,93... Tem que dividir por 6** e depois multiplicar por 4? [...] **Bom, dá pra fazer divisão 4 por 6 aqui** [...] **4 dividido por 6, é isso?**

[...]

Bia: **Eu já simplifiquei, eu coloquei assim $\frac{4}{6}$ equivale a $\frac{2}{3}$.**

Tina: **Aí divide 2 por 3?**

Bia: **Eu calculei $\frac{2}{3}$ de R$ 0,93...**

Tina: Você colocou em fração (forma fracionária), fica mais fácil**... $\frac{4}{6}$ é igual a...**

Bia: **Igual a $\frac{2}{3}$.**

[...]

Tina: Então, **divido 2 por 3**, dá 0,666... Acho que é isso aqui... É assim?

Bia: **Eu faço diferente Tina, eu divido 93 centavos por 3, dá 31 centavos cada terço e** (então) **multiplico pelo que eu quiser.**

[...]

Tina: [...] que é mais fácil.

Tânia: Sim, **porque primeiro você reduz pra depois ampliar** [...] ainda mais se for múltiplo... Igual o 93 é múltiplo de 3, não é?

Tina: Então vai ser R$ 0,62?

---

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

Bia: Isso*.

(Encontro dia 03/07/2012)

Tina percebe que, para encontrar o valor de apenas 4 chocolates, já sendo conhecido o preço de um conjunto com 6 deles (R$ 0,93), ela teria que dividir, ou seja, **particionar** o valor de R$ 0,93 por 6, encontrando **o valor de cada $\frac{1}{6}$ do conjunto** de chocolates, e em seguida efetuar uma multiplicação por 4 $\left(\frac{0{,}93}{6} \times 4\right)$, o que evidencia a mobilização dos processos de **unitização** e de **raciocínio progressivo e regressivo**.

Ao **negociar significados com Bia, a respeito de procedimentos para a resolução do problema,** Tina produziu o significado **quociente** para o registro fracionário $\frac{4}{6}$, e, como interpreta o traço fracionário como uma divisão, sua primeira intenção é dividir o valor do numerador pelo do denominador dessa representação, para encontrar um valor não fracionário de maneira que pudesse prosseguir os cálculos.

A busca por outra representação numérica, que não a fracionária, aponta indícios da maior familiaridade/segurança da participante em lidar com números registrados na forma decimal. Por outro lado, Bia insiste em conservar a forma fracionária das quantidades com as quais lida, o que evidencia sua familiaridade/segurança em efetuar cálculos com essa forma de representação numérica, aspectos do conhecimento matemático de ambas as participantes.

Ao verbalizar a ideia de que a representação fracionária $\frac{4}{6}$ indica uma divisão, Tina inicia uma negociação de significados com Bia para desenvolver o procedimento escolhido (divisão entre os valores 4 e 6) e encontrar uma possível resposta ao problema.

Bia apresenta outra forma de conduzir a estratégia de Tina, produzindo outro significado para o valor $\frac{4}{6}$: ela sugere que a colega continue os cálculos com os

---

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

registros fracionários, evitando trabalhar com números decimais; sugestão que foi validada mais à frente por Tina ("[...] você (Bia) colocou em fração (forma fracionária), fica mais fácil [...]" grifos nosso).

Nas **justificações dadas por Bia durante a negociação com Tina a respeito da estratégia para resolução**, fica evidente a mobilização de alguns aspectos do Raciocínio Proporcional, como o processo de **unitização**[*] (a participante identifica a equivalência entre as frações $\frac{4}{6}$ e $\frac{2}{3}$ e reorganiza a unidade, o conjunto de 6 chocolates, em 3 subconjuntos formados por 2 chocolates cada um).

Além do processo de unitização, também ficam evidentes a ideia de **partição** (ela particiona, de maneira justa, o preço total da unidade 6 chocolates, 0,93, em 3 partes) e a **interpretação operador** (para encontrar o valor equivalente a 4 chocolates, ou $\frac{2}{3}$ do total da unidade 6 chocolates, Bia opera a fração $\frac{2}{3}$ com 0,93 multiplicando-os, o que faz a quantia 0,93 ser reduzida de maneira proporcional ao operador $\frac{2}{3}$).

As negociações entre Tina e Bia evidenciam o **engajamento mútuo das participantes** no desenvolvimento da tarefa proposta**, na busca de resolverem o problema**, a confiança que ambas estabeleceram em suas interações na CoP-PAEM, a preocupação e disponibilidade com que Bia se propõe a ajudar a colega e a legitimação, por Tina, do conhecimento matemático de Bia, evidente no registro escrito apresentado por ela, explicitando elementos da estratégia negociada com Bia.

No episódio anterior, as recorrentes perguntas de Tina, para conseguir a legitimação de seu raciocínio pela colega Bia, apontam mais uma vez o seu posicionamento como uma participante novata e a legitimação de Bia como uma participante mais experiente (WENGER, 1998) na avaliação de Tina.

Comumente, nas dinâmicas de resolução e discussão de problemas na Comunidade de Prática, Tina recorre à colega Bia para, juntas, compartilharem informações e negociarem significados a respeito de estratégias/procedimentos para resolução de problemas.

---

[*]

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

Análise da produção de Eva[49]

A estratégia escolhida por Eva para resolver o problema tem como base o **raciocínio absoluto***. A participante tenta encontrar o valor dos 22 chocolates da seguinte maneira: se, de um grupo de 22 chocolates, sabe-se o preço de 6 chocolates, descobrindo o valor de 16 deles (22 – 6 = 16) seria possível responder quanto custa o conjunto todo. Por essa estratégia, Eva considera como unidade cada chocolate individualmente.

Entretanto, a participante não consegue efetuar seus cálculos, já que, para desenvolver esse procedimento, seria necessário saber o valor total do preço dos 22 chocolates *a priori*.

Pode-se inferir que Eva não identifica a covariância entre as grandezas do problema, nem a relação de proporcionalidade existente entre elas, indicando, inicialmente, a ausência de mobilização de aspectos do Raciocínio Proporcional, o que é confirmado por suas falas na negociação com Tânia a respeito da estratégia escolhida, apresentada a seguir:

Tânia: [...] quanto deu o seu, Eva?
Eva: Eu não fiz o cálculo...
Tânia: [...] Mas qual foi sua estratégia? O que você pensou?
Eva: Eu pensei que... **Diminuiu 6 chocolates** (de 22 chocolates) **deu 16. Aí eu fui fazer o cálculo depois, mas eu não terminei...**
Tânia: Você sabe o preço de 6 (chocolates)...
Eva: 6, é...
Tânia ...Você quer saber o de 22 (chocolates).
Eva De 22.
Tânia: Sabendo de 6 (chocolates), vamos pensar... De quantos (chocolates) você conseguiria saber com bastante facilidade...? Você conseguiria saber o de 12 que bastaria somar...
Eva: **Somar, é...**
Tânia: **O que mais?**
Eva: **Mais?...Somar 12.**
Tânia: **Mais 12 dá 24.**
Eva: **24.**
Tânia: Bom então dá pra saber o de 24 (chocolates), mas passa de 22, você só quer (o

[49] A análise da resolução da participante Eva foi feita com base na verbalização de sua estratégia e procedimentos na discussão do problema no grupo, já que não há registros escritos dessa professora.
*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

	preço) de 22 (chocolates), então pelo menos conseguir achar o preço lá perto, já dá pra saber, depois tem que achar um jeito de tirar...
Eva:	De tirar os outros dois.
Tânia:	De tirar os 2, então como que poderia fazer?
Eva:	Pra tirar esses dois...?*

(Encontro dia 03/07/2012)

Ao perceber que Eva não consegue encontrar uma resposta coerente para o problema, Tânia propõe alguns questionamentos, evitando indicar, sem negociação, uma possível resposta ou estratégia para resolver o problema, com o intuito de incentivar e motivar a participante a elaborar uma resolução.

Durante a negociação, Tânia esboça o início de uma estratégia com base no raciocínio relativo, apropriada para o problema, ainda assim, apesar de Eva participar do diálogo estabelecido, repetindo e legitimando o que é falado por Tânia, não se tem indícios suficientes de que nessa negociação de significados a participante tenha produzido algum significado para a estratégia envolvendo aspectos do Raciocínio Proporcional.

Análise das justificações de Ada[50]

Ao elaborar a estratégia que pensa ser mais conveniente para a resolução do problema, Ada mobiliza **raciocínio relativo** quando recorre ao processo de unitização e quando percebe como as grandezas se relacionam e **covariam*** (de maneira diretamente proporcional) no problema, o que fica explícito na transcrição do episódio que segue:

Ada:	**Eu achei** (o valor de) **um** (chocolate) **só...**
Tânia:	**Ah você unitarizou**[51] (unitizou), **foi lá e pegou o preço de um só, certo?**
Ada:	**Aham, que é aproximadamente 0,155 centavos, depois eu multipliquei por 22** (chocolates).
Tânia:	Depois você continuou...

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

[50] A análise da resolução da participante Ada foi feita com base na verbalização de sua estratégia e procedimentos na discussão do problema no grupo, já que não há registros escritos dessa professora.

[51] Até a legitimação do termo *unitização* pelos participantes da CoP-PAEM, no encontro do dia 23/04/2013, em alguns episódios anteriores a essa data, foi registrado o uso do termo *unitarização* durante as negociações.

Ada: Tentando associar, **se 10** (chocolates) **vai dar 1,55; 20** (chocolates) **vai dar 3,10, e 22** (chocolates) **vai dar 3,41.**

Tânia: Então você também pensou em agrupar em 10, **por que você pensou em fazer com grupos de 10** (chocolates)**? Se o pacotinho é de 6** (chocolates)**...?**

Ada: **Foi porque eu reduzi...**

Tânia: Porque você achou (o valor) de um (chocolate) aí depois você achou... Ah entendi... **Primeiro você achou** (o valor de) **1** (chocolate) **depois você achou** (o valor de) **10** (chocolates) **, aí pensou 20** (chocolates)**, e aí mais 2** (chocolates) **pra chegar no preço dos 22...***

(Encontro dia 03/07/2012)

Em seus cálculos Ada deixa evidente que considera como unidade um único chocolate, ao contrário das colegas Laís, Bia e Tina que em suas estratégias consideraram a unidade como um conjunto de 6 chocolates.

Ao encontrar o preço de um dos chocolates por meio do processo de **unitização** (se um conjunto de 6 chocolates custa R$ 0,93, logo 1 chocolate custa aproximadamente R$ 0,155), Ada consegue encontrar o valor do total de chocolates, ao multiplicar 0,155 – preço unitário dos chocolates – pela quantia desejada de 22 chocolates, encontrando o valor de R$ 3,41 (R$ 0,155 x 22 = R$ 3,41); evidências do processo de **raciocínio progressivo e regressivo.**

Com base nessa estratégia, Ada seria capaz de determinar com segurança o valor de qualquer outro conjunto de chocolates com mais ou menos elementos do que foi pedido no enunciado.

Apesar de a participante declarar que efetuou uma multiplicação por 22 (quantidade de chocolate), essa multiplicação não foi feita na forma R$ 0,155 x 22: após encontrar o valor de uma unidade (R$ 0,155), Ada reorganiza mentalmente a quantidade de chocolates em novos grupos constituídos por 10 elementos cada (uma relação com a base decimal do sistema de numeração utilizado, algo familiar para a participante), explicitando novamente aspectos dos processos de **unitização*** e de **raciocínio progressivo e regressivo** respectivamente.

---

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

*

A participante relaciona que, se um chocolate custa R$ 0,155, um grupo de 10 chocolates custará R$ 1,55 (0,155 x 10 = 1,55), de 20 chocolates custará R$ 3,10 (1,55 + 1,55 = 3,10). Como 2 chocolates custam R$ 0,310 (0,155 + 0,155 = 0,310), logo 22 chocolates custarão R$ 3,41 (R$ 3,10 + R$ 0,310).

Mas as relações proporcionais descritas com detalhes foram justificadas por Ada apenas pela fala “Foi porque eu reduzi...”. A partir dessa justificação verbalizada, Tânia projeta sua própria reificação (significados produzidos por ela) na CoP, acrescentando alguns detalhes do procedimento utilizado por Ada.

A formadora/pesquisadora projeta s significados que produziu, no intuito de, ao retomar os procedimentos desenvolvidos, sistematizá-los, possibilitando aos demais participantes da comunidade conhecerem, com mais detalhes, outra maneira de resolver o problema. Ou seja, como formadora, Tânia (res)significa a fala de Ada a fim de promover a compreensão do que já foi dito.

Um diferencial, que pode ser evidenciado nas falas de Ada, é que a participante, ao elaborar sua estratégia e operar os cálculos que pensa serem necessários, não se deixa influenciar pelo contexto do problema: enquanto outros participantes da CoP manipularam conjuntos formados por 6 unidades de chocolate, algo já explicitado no enunciado do problema, Ada manipula conjuntos formados por 10 chocolates por ter maior facilidade em efetuar cálculos mentais dessa forma.

Essa liberdade de raciocínio da participante é uma característica apontada por alguns autores (LAMON, 2012; CRAMER, POST, 1993a, 1993b) como natural dos chamados “pensadores proporcionais”. Ao se engajar na resolução do problema sem o uso de recursos algébricos, a participante mobiliza aspectos do Raciocínio Proporcional, evidenciando indícios de seu conhecimento matemático.

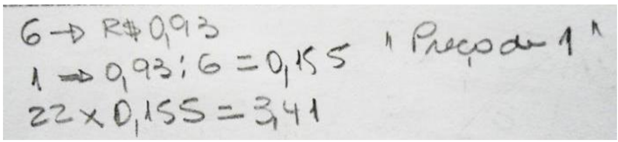
Análise da produção de Iara

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

Pelos registros escritos de Iara[52] (Figura 17), percebe-se que, da mesma forma que Ada, essa participante leva em conta em sua estratégia a unidade referencial do problema como apenas um chocolate e evidencia os processos de **unitização**[*] e de **raciocínio progressivo e regressivo**.

Iara calcula o preço dessa unidade a partir do preço do conjunto de 6 chocolates, se 6 chocolates custam R$ 0,93, ao reduzir essa relação, tem-se que um chocolate custa R$ 0,155 $\left(\frac{0{,}93}{6}=0{,}155\right)$, ao multiplicar o preço de uma unidade por 22 (R$ 0,155 x 22), total desejado, a participante expande a relação multiplicativa para uma quantidade maior de elementos e encontra o valor total de R$ 3,41.

Figura 17 – Registro escrito Tina (Folha de tarefas 1)



Fonte: Autora

Pela estratégia utilizada, pode-se inferir que a participante identifica as grandezas **covariantes** do problema e a forma como elas **covariam (relação de proporcionalidade direta)**, reconhecendo as **relações multiplicativas** existentes entre essas quantidades.

Ao calcular **o preço de uma unidade de chocolate** e em seguida **multiplicar o valor encontrado por 22**, preço que o enunciado do problema pede, Iara evidencia aspectos doa processos de **unitização** e processo de **raciocínio progressivo e regressivo**. Pela análise da estratégia e dos procedimentos utilizados na resolução deste problema, é possível afirmar que a participante mobilizou aspectos do Raciocínio Proporcional.

A seguir é apresentada a análise referente à Ação 4 em que os participantes da CoP-PAEM refletiram a respeito de alguns registros escritos e justificações verbalizadas

[52] A participante não verbaliza sua estratégia de resolução para o grande grupo, logo as análises têm como base apenas nos seus registros escritos.

[*]

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

no desenvolvimento da Ação 1, quando resolveram problemas envolvendo proporção/proporcionalidade e discutiram estratégias de resolução para eles, sem recorrer ao uso de recursos algébricos.

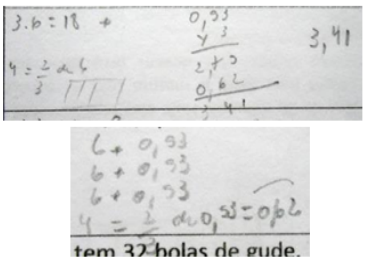
4.2.2.2 REFLEXÃO A RESPEITO DE ALGUMAS DAS RESOLUÇÕES E JUSTIFICAÇÕES COM O APOIO DA LITERATURA: PROBLEMA DO PREÇO DOS CHOCOLATES

A primeira estratégia de resolução para o problema do preço dos chocolates e as respectivas justificações verbalizadas a serem trabalhadas pelos participantes nessa parte da Ação 4 (referentes a 23 de abril de 2013) foram aquelas apresentadas por Bia.

Nas negociações durante a reflexão em grupo, buscou-se identificar que estratégia foi elaborada, bem como quais aspectos do Raciocínio Proporcional foram mobilizados na resolução do problema por essa participante.

A seguir apresenta-se parte da folha organizada para o problema do preço dos chocolates, com a estratégia e parte das justificações da participante Bia (Figura 18).

Figura 18 – Registros de Bia (Ação 1) para reflexão em grupo (Folha 2.2)

REPRESENTAÇÃO ESCRITA	CONCLUSÃO/JUSTIFICATIVA
Bia 	**Tânia**: Como que você pensou pra achar os 4? **Bia**: Ah tá, então aqui eu tive 3 grupos de 6, que são 18, sobraram 4 chocolates (para completar os 22) que eu queria saber quanto custava, 4 num grupo de 6, são $\frac{4}{6}$, $\frac{4}{6}$ representam $\frac{2}{3}$, é uma fração equivalente a $\frac{2}{3}$ [...] eu calculei $\frac{2}{3}$ de R$ 0,93, que são R$ 0,62 e aí fiz a soma...

Fonte: Autora

Ao refletir a respeito das informações referentes à maneira como Bia resolveu o problema, a participante Eva identifica evidências do **processo de unitização*** na

*

estratégia da colega (quando Bia tenta reorganizar a quantidade 22 chocolates em função de grupos de 6 chocolates) e afirma que tal estratégia é semelhante à utilizada no reagrupamento de latas de refrigerante em um problema apresentado em Lamon (2012), como pode ser observado no episódio seguinte:

Tânia: [...] nessa resolução que ela (Bia) fez, vocês percebem que houve uma mobilização desse tipo de raciocínio (unitização), como é que ela (Bia) tratou unidade aí?

Bia: A unidade foi 6 chocolates.

Tânia: Isso...

Eva: Ela (Bia) fez como na divisão das latinhas (do problema do livro da Lamon) ali (aponta para a resolução de Bia), não foi?

Tânia: Isso!

Eva: Foi, não foi?

Tânia: Fez como na divisão das latinhas, você tinha um pacote de 6 (chocolates) e tinha que fazer um pacote de 22 (chocolates), certo?

Eva: É!

Tânia: Então foi juntando pacotinhos até chegar (em um valor) perto de 22 (chocolates).

(Encontro dia 23/04/2013)

Ao identificar esse aspecto na estratégia de uma colega e estabelecer relação com outro problema resolvido de forma semelhante, visto em momento anterior, Eva evidencia que é capaz de reconhecer esse aspecto do Raciocínio Proporcional em estratégias para resolução de problemas envolvendo proporção/proporcionalidade, o que dá indícios de sua aprendizagem relacionada ao processo de unitização de grandezas numéricas.

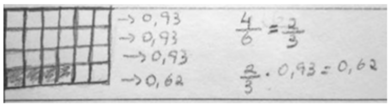
Nas reflexões feitas pelo grupo referentes à resolução e justificações apresentadas por Tina (Figura 19), os participantes da Comunidade de Prática, ao **refletirem a respeito dos registros escritos dessa participante e de suas falas**,

---

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

evidenciaram indícios de aprendizagens relacionados a outros aspectos do Raciocínio Proporcional, além do processo de unitização já identificado por Eva.

Figura 19 – Registros de Tina (Ação 1) para reflexão em grupo (Folha 2.2)

REPRESENTAÇÃO ESCRITA	CONCLUSÃO/JUSTIFICATIVA
Tina 	**Tina**: Pensando num desenho aqui, eu poderia fazer 6, colocar 6 barrinha seriam 6 chocolates né, é 93, aí depois colocar mais 6, 93 e depois [...] **Bia**: Aí, chocolate você já tem 18 **Tânia**: 22... Você tem que achar o preço de mais 4 **Tina**: É, eu vou ter que dividir né? 0,93... **Bia**: Mas você tem $\frac{4}{6}$ **Tina**: Bom daí dá pra fazer divisão 4 por 6 aqui ... 4 dividido por 6, é isso? **Bia**: Eu já simplifiquei, eu coloquei assim $\frac{4}{6}$ equivale a $\frac{2}{3}$ **Tina**: Aí divide 2 por 3 **Bia**: Eu calculei $\frac{2}{3}$ de R$ 0,93... **Tina**: Você colocou em fração, fica mais fácil... $\frac{4}{6}$ é igual a **Bia**: Igual a $\frac{2}{3}$

Fonte: Autora

Tânia questiona a participante Tina sobre o motivo de sua insistência em efetuar uma divisão entre as grandezas 4 e 6 e 2 e 3 dos registros fracionários $\frac{4}{6}$ e $\frac{2}{3}$ (o que fica explícito na Figura 19 , na negociação de significados entre Bia e Tina a respeito do desenvolvimento de um procedimento para a resolução do problema).

Com os questionamentos, a formadora/pesquisadora Tânia desejava saber e, assim, de alguma maneira, garantir que os demais participantes da CoP compreendessem o significado produzido por Tina durante a resolução do problema.

Tina justifica para a comunidade que desejava desenvolver esse cálculo por conta do significado que reificou para o traço fracionário nesses registros: para ela, o traço fracionário em $\frac{4}{6}$ e $\frac{2}{3}$ indicava uma divisão entre as grandezas numéricas, o que fica evidente no diálogo a seguir:

Tânia: Por que, Tina, você queria **dividir o 4 por 6**[*]?

*

Tina: Porque ela (Bia) falou $\frac{4}{6}$ não falou? Ela (Bia) falou aqui ó “mas você tem $\frac{4}{6}$” **aí eu pensei 4 dividido por 6**...

Tânia: E o que você queria achar quando você pensou o 4 dividido por 6?

Tina: Nem sei (risos).

Tânia: O que vocês (demais participantes) acham que a Tina queria achar quando ela queria fazer a divisão de 4 por 6? O que a levou a fazer essa divisão de 4 por 6?

Cléa: Achar a unidade, o preço de um docinho...

Tânia: Ela queria achar o preço de 1?

Eva: Quanto custava um chocolate, certo?

Tânia: Será que ela ia conseguir dividindo 4 por 6*?

(Encontro dia 23/04/2013)

Tina mostra-se confusa ao justificar a opção pelo procedimento de dividir os valores 4 por 6 e 2 por 3. Ao considerar o traço fracionário como indicativo de uma divisão, infere-se que a participante lida com os valores do problema como representações numéricas destituídas de significado, já que, em um primeiro momento, não consegue justificar a operação de divisão no desenvolvimento de sua estratégia para a resolução do problema.

A não produção de um significado para a grandeza fracionária, de acordo com o problema, é confirmada pela própria participante em outra negociação com Tânia:

Tânia: Você (Tina) só enxergava o $\frac{4}{6}$ (como uma divisão).

Tina: É.

Tânia: Sem estabelecer relação com a situação do problema?

Tina: Sem estabelecer relação, é...

(Encontro dia 23/04/2013)

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

Ao perceber a dificuldade de Tina em justificar seu procedimento, a Tânia convoca a Comunidade de Prática para colaborar na interpretação do procedimento utilizado, incentivando-os a participarem de maneira mais central na ação e a **compartilharem os significados que produziram na reflexão feita a respeito da estratégia/justificações de Tina** para que possam ser negociados em conjunto.

Na tentativa de justificar a possível intenção da colega Tina com esse procedimento, as participantes **Cléa e Eva projetaram suas inferências** apontando que a intenção de Tina talvez tenha sido encontrar o valor unitário de cada chocolate por meio dessa divisão, algo incoerente com a interpretação quociente reificada por Tina.

A participante Bia, ao analisar os registros/justificações de Tina, produz outro significado para o registro fracionário $\frac{4}{6}$, também produzido por Tânia, como fica explícito nas negociações a seguir:

[...]*

Bia: Eu achei que ela (Tina) queria **dividir o 4 pelo 6 e depois multiplicar pelo R$ 0,93**.

Tânia: [...] **Eu tinha pensado que ela talvez estivesse tentando achar o operador...**

[...]

Bia: Mas na verdade **é o que ela fez aqui, ó:** $\frac{2}{3}$ **vezes 93 centavos.**

Tânia: Isso, [...] o que ela acabou registrando por influência sua (se dirige à participante Bia).

Tina: É.

Laís: Mas você ia pegar o resultado da divisão $\left(\frac{4}{6}\right)$ e multiplicar pelo 93?

[...]

---

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

Tina: (não) porque **na hora que ela (Bia) falou $\frac{4}{6}$, por isso que eu falei "divide", por causa da fração** (registro fracionário)...

Tânia: Você já pensou em dividir, **pensar em dividir pra achar um decimal** que depois pudesse multiplicar (pelo valor de R$ 0,93).

Tina: É... Mas é muito mais fácil usar a fração (registro fracionário) [...] porque fica muito mais fácil multiplicar (4 x 0,93) e depois já dividir aqui $\left(\frac{4 \times 0{,}93}{6}\right)$, ao invés de você dividir $\left(\frac{4}{6}\right)$ porque vai ter um decimal...

[...]

Iara: Vai dar uma dízima, não vai?

Tina: É.

Iara: E aí você não vai achar (um resultado preciso)... Se você transformar na dízima você corre o risco de não chegar em um número exato...

(Encontro dia 23/04/2012)

Bia, ao refletir a respeito dos registros/justificações de Tina, identifica a grandeza $\frac{4}{6}$ como um **operador**[*] e não como um quociente, especificamente no procedimento em que a colega divide o valor 4 por 6 e em seguida multiplica o resultado por R$ 0,93.

O **operador** $\frac{4}{6}$ atua como um transformador (LAMON, 2012) nos cálculos descritos, indicando proporcionalmente quanto vale $\frac{4}{6}$ de R$ 0,93, ou seja, o preço correspondente a quatro chocolates de um grupo de seis chocolates.

Bia, ao ser capaz de identificar essa interpretação da forma fracionária $\frac{a}{b}$ nos procedimentos desenvolvidos por Tina, evidencia uma aprendizagem com relação a esse aspecto do Raciocínio Proporcional, como observado no episódio anterior.

---

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

Ao final desse mesmo episódio, **Tina consegue justificar para o grupo** o motivo pelo qual negociava com Bia efetuar divisões entre numeradores e denominadores de cada um dos registros fracionários $\frac{4}{6}$ e $\frac{2}{3}$: ao interpretar o traço fracionário como uma divisão, Tina buscou eliminar o registro das grandezas do problema na forma $\frac{a}{b}$, encontrando valores equivalentes na forma de escrita decimal, com a qual possivelmente a participante tenha mais segurança em lidar.

Onuchic e Botta (1997) destacam que, da maneira como a manipulação das frações tem sido tratada no ensino escolar, é justificável o pouco uso que os adultos fazem dessa representação o que é ilustrado pela participante Tina.

Entretanto, após refletir a respeito das negociações apresentadas (Figura 19), ela afirma que utilizar os valores numéricos do problema na forma fracionária tornaria os cálculos efetuados mais fáceis, ideia que também é legitimada pela participante Iara, que justifica o uso das frações como forma de desenvolver cálculos matemáticos mais precisos, evitando lidar com dízimas.

As reificações verbalizadas por Bia, Iara e Tina, a respeito de o uso dos registros fracionários ser mais conveniente que o uso de grandezas registradas na forma decimal, indica evidências do conhecimento matemático dessas professoras pertencentes à Comunidade de Prática – CoP-PAEM.

A opção pela utilização de determinados registros escritos, como as representações fracionárias ou decimais, é ponto de enfoque de uma negociação entre Tânia e Bia (episódio seguinte).

Ao ser questionada por Tânia, a participante destaca as razões para ter mantido seus registros na forma fracionária ao invés de alterá-los para a forma decimal e como essa escolha colaborou para a seleção e desenvolvimento de uma estratégia para a resolução do problema com base no registro pictórico:

Tânia: [...] Bia por que você não foi para o decimal? [...]

Bia: Porque eu gosto do desenho, eu imagino lá os terços, aí cada terço vale R$ 0,31... Eu gosto do desenho, eu enxergo melhor assim...

Tânia: Mas você faz isso (os desenhos) independente do número, ou você olha para o número primeiro pra ver se tem alguma relação?

Bia: Ah sim, quando o número é divisível. Quando a divisão é exata, aí eu (faço desenhos)...

Tânia: E você viu alguma relação entre R$ 0,93, 6 e $\frac{2}{3}$ [...] o $\frac{4}{6}$...?

Bia: São divisíveis por 3.

Tânia: [...] ela pensou em $\frac{4}{6}$ na hora em que ela fez o desenho, mas aí ela pensou 'eu tenho que dividir R$ 0,93 por 6, não vai dar exato', aí ela simplificou a fração pra $\frac{2}{3}$, R$ 0,93 (divididos) por $\frac{2}{3}$ dá R$ 0,31e aí então ela multiplica (por 22)... [...] você já percebe que ela tá conseguindo identificar que essa é uma situação mais conveniente (para o uso do registro fracionário).

(Encontro dia 23/04/2013)

A reificação verbalizada por Tânia ao final desse episódio retoma a fala de Bia, (res)significando a justificativa dada pela participante, acrescentando informações mais detalhadas, sistematizando os procedimentos utilizados e evidenciando aspectos do conhecimento matemático mobilizados por ela.

A familiaridade e a facilidade com que Bia converte, relaciona e registra as quantidades numéricas fracionárias em registros pictóricos para desenvolver os cálculos necessários em sua estratégia, assim como sua consciência em escolher a estratégia mais conveniente para resolver o problema e adaptá-la de forma que os cálculos feitos fossem o mais simples e rápidos possível são indícios do amplo conhecimento matemático que a participante constituiu.

Segundo Melo (2005), "esse domínio amplo e profundo da matéria de ensino pelo professor é fundamental e necessário, sobretudo quando se busca inovação curricular" (p. 39), uma das inquietações explicitadas por Bia em um encontro da CoP-PAEM.

Após Iara reiterar uma afirmação de Tânia a respeito do tratamento dado à proporção/proporcionalidade no ensino escolar, Bia se pronuncia, evidenciando em sua fala a legitimação da importância ao estímulo do desenvolvimento do Raciocínio Proporcional nos alunos e, de certa forma, denuncia a falta de ações em sala de aula que promovam esse desenvolvimento:

Tânia: [...] vocês me falaram que trabalham (proporcionalidade da seguinte forma:)

	primeiro a ideia de razão, a proporcionalidade como uma igualdade de duas razões, e daí pra frente regra de três, direta, inversa, certo? E aí, finaliza com alguns problemas... Mas será que só é isso que é (trabalhar com proporcionalidade)...?
Neuza:	É razão, proporção, grandezas proporcionais e juros simples, nessa sequência...
Tânia:	[...] é até aí que chega, então será que isso é suficiente? Então o que a gente tá buscando? De que mais precisa, se isso não é suficiente? O que precisa desenvolver?
[...]	
Bia:	Eu fico pensando que a gente tem, assim, uma matriz curricular tão extensa tão cheia de conteúdo, sabe? A gente tinha que repensar essa matriz, ver o que é prioridade pro 6º, 7º, 8º e 9º ano e trabalhar bem em cima desses conteúdos que são prioridade, tem tanta coisa pra trabalhar que acaba trabalhando quase tudo...
Tânia:	Tudo superficialmente [...].

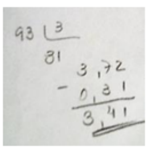
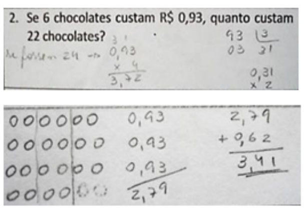
(Encontro dia 31/07/2012)

A declaração de Bia nesse episódio evidencia aspectos do conhecimento que a participante tem da organização e gestão do currículo com o qual trabalha. Entretanto, a preocupação em repensar a prioridade de alguns conteúdos escolares presentes nesse currículo não vem apenas do conhecimento que a participante tem desse documento.

A articulação entre esse conhecimento e o conhecimento que Bia tem de seus alunos, dos processos de ensino e de aprendizagem, da Matemática e do ensino dessa disciplina, entre outros, é que permite que ela reflita a respeito do currículo vigente e sugira uma ação para contornar o que vê como um aspecto negativo, a quantidade de conteúdo estipulada para cada um dos anos escolares.

Na reflexão a respeito da resolução e das justificações apresentadas por Laís (Figura 20), alguns participantes da Comunidade de Prática fazem inferências de como a colega resolveu o problema.

Figura 20 – Registros de Laís (Ação 1) para reflexão em grupo (Folha 2.2)

<table><tr><td>**Laís**
 </td><td>**Laís**: Então, dessa vez eu fiz assim, eu pensei no total de chocolates que era 22, como tinha o preço de 6, então eu fui agrupando de 6 em 6 até chegar nos 24, mas aí passava [...] então eu, eu desenhei, fiz o desenho dos docinhos, e aí eu calculei quantos grupos inteiros de 6 dava, são três [...] o último grupo fica sobrando dois chocolates, então eu dividi em 3, calculei o preço de cada, a cada 2 chocolates [...]aí eu tirei do total [...] do total dos 24 e depois eu fiz de outro jeito também, eu, eu calculei a...pra menos, com os 22 mesmo...</td></tr></table>

Fonte: Autora

Nas reificações verbalizadas pelos participantes, podem-se identificar evidências de aprendizagens relacionadas a diferentes aspectos do Raciocínio Proporcional, como destacado no episódio a seguir:

[...]*

Bia: Eu entendi que ela (Laís) pegou os **R$ 0,93 e dividiu por 3** e **diminuiu um grupo** (de chocolates)**, que eram dois chocolates, tirou R$ 0,21...**

Tânia: Então, mas ela tirou (R$ 0,21) de onde?

Bia: Do grupo dos 24 (chocolates).

Tânia: [...] ela (Laís) **fez os 4 grupos** (total de 24 chocolates) e **depois ela achou** (o valor de) **um grupo de 2** (chocolates) [...] ela (Laís) **dividiu o pacote de 6 (chocolates) em quantas partes?**

Eva: **3 partes.**

[...]

Tânia: [...] para achar o valor dos 22 (chocolates) então ela (Laís) teria que, dos 24, diminuir 2.

Todas: Uhum.

Tânia: E aí na hora dela diminuir esses 2 olha a estratégia que ela (Laís) fez, **pegou os grupos de 6 e reorganizou em 3,** ela viu que tinha que diminuir aqueles 2 (chocolates), e ela fala que fez essa conta, **pegou do total dos 24 [...] e diminuiu esses 2** [...] **ela somou os 3** (unidades de 6 elementos) **e depois acrescentou o 062 que é o...**

Laís: **Que são os $\frac{2}{3}$.**

Tânia: **São os outros $\frac{2}{3}$,** [...] aquele que ela calcula 3 pacotes (unidades) e acrescenta mais 4 (chocolates), nessa estratégia aí aparece a ideia de tratar a unidade de modo diferente?

Iara: Apareceu, não apareceu? [...] **foram feitos grupos, que nem o dela** (de Bia) **de 6 em 6.**

[...]

---

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

Bia: **Em grupo de 6 [...] ó 6, 6, 6.**

Tânia: Depois $\frac{4}{6}$, $\frac{2}{3}$ **de 93 são 62,** né... Então percebe que primeiro elas (Bia e Laís) **tratam a unidade como grupo de 6** (chocolates).

Laís: Uhum.

Tânia: Então somam 3 (grupos de 6 chocolates), aí pra calcular depois o valor dos 4 (chocolates) o que elas fazem?

Laís: **Aí reorganiza.**

Tânia: ...**dá uma reorganizada, surge uma modificação da unidade, quer dizer o pacote de 6** (unidades de chocolate) **passa a ser um pacote com 3** (conjuntos) **de 2** (chocolates), **certo?**

Laís: Uhum.

Tânia: **Como se fossem 3 pacotinhos com 2 docinhos cada um,** aí calcula o preço desse pacotinho e tira do total, percebe então que é essa mobilidade no tratamento da unidade que evidencia o que a gente chama de Raciocínio Proporcional [...]*

(Encontro dia 23/04/2013)

Durante as negociações de significados a respeito da mobilização de aspectos do Raciocínio Proporcional pela participante Laís, em seus registros escritos e justificações apresentados (Figura 20), os participantes reificaram, por meio de suas falas, a identificação, ou então legitimaram essas identificações (pela fala de outros colegas) dos aspectos processo de **unitização**, **partição** e das interpretações **parte-todo/medida** e **operador** presentes na resolução e justificações de Laís, o que evidenciou indícios de aprendizagens dos participantes relativos a esses aspectos do Raciocínio Proporcional.

Um ponto que aproxima as resoluções de Bia e Laís é que ambas consideram, como unidades referenciais, grupos formados por seis chocolates, o que não foi levado em conta pelas participantes Ada e Iara, que consideraram como unidade no problema um único chocolate.

---

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

Segundo Lamon (2012), a ideia de organizar quantidades numéricas em grupos com diferentes números de elementos é algo subjetivo, desenvolvido naturalmente pelos indivíduos com base em situações vivenciadas. Dessa forma, é interessante para o desenvolvimento desse aspecto do Raciocínio Proporcional que os indivíduos compartilhem suas formas de pensar a respeito de quantidades a serem organizadas.

Nas reflexões a respeito da resolução/justificações apresentadas por Iara (Figura 21), os participantes da CoP-PAEM identificaram essa diferença entre as estratégias analisadas até então, evidenciando indícios de aprendizagem a respeito do processo de unitização e de raciocínio progressivo e regressivo, como é possível observar no episódio a seguir:

Figura 21 – Registros de Iara (Ação 1) para reflexão em grupo (Folha 2.2)

REPRESENTAÇÃO ESCRITA
ESTRATÉGIA 2: Considerar "1 chocolate" como a UNIDADE
Iara 6 → R$ 0,93 1 → 0,93 ÷ 6 = 0,155 'Preço de 1' 22 x 0,155 = 3,41

Fonte: Autora

Bia: Ela (Iara) **achou o preço de cada** (chocolate)*.

Iara: **Eu achei o individual?** (pausa) **ah sim, eu dividi por 6** (o valor 0,93) **também,** (para encontrar) **o preço de 1.**

Bia: **Depois multiplicou por 22.**

Tânia: Isso (pausa), qual que é a diferença aí?

Iara: **Eu fui direto na unidade 1 mesmo**, eu não fui agrupando (a unidade em conjuntos de diferentes tamanhos)...

Tânia: Isso.

---

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

Laís: **A unidade era um chocolate só.**

Iara: Ah então meu raciocínio não é proporcional...

Tânia: Por que não?

Iara: Ué porque eu não agrupei (a unidade em conjuntos de diferentes tamanhos), eu fui direto (encontrar o valor) da unidade mesmo...

Tânia: Mas a ideia de achar o valor de 1 (unidade), não é uma estratégia?

Laís: É.

Tânia: E você achou o valor de 1 e multiplicou pelo número que você queria, não é?

Iara: Aham [...] eu achei um só, ela (Ada) também fez um só, não foi? Aí você (Ada) unitarizou (unitizou)...*

(Encontro dia 23/04/2013)

Iara identifica a diferença entre os seus procedimentos de resolução e os utilizados por Ada após encontrarem o valor de um chocolate, como explicitado no episódio a seguir: enquanto a primeira participante recorre a um cálculo direto (a multiplicação R$ 0,155 x 22) para descobrir o valor final do preço dos chocolates (Figura 21), a participante Ada recorre ao agrupamento de preços relativos a grupos formados por 10 chocolates, procedimento que lhe permite efetuar cálculos mentais precisos:

[...]

Iara: **"Depois** (de encontrar o valor de 1 chocolate) **eu multipliquei por 22"**, depois você (Ada) continuou?

Tânia: Se **"10 vai dar 1,55"**

Iara: **20 vai dar 3,10.**

Tânia: O que tem de diferente na estratégia dela (de Ada)? Ela foi achar o preço de 10, de 20 aí mais 22 vai dar 3 e 41 aí eu perguntei "[...] por que você pensou em fazer de 10? Se o pacotinho é de 6...?" a Ada respondeu assim ' **foi porque eu reduzi'** [...] (Tânia lê o registro – Figura 21) "**Primeiro você achou 1 depois você achou 10, aí pensou 20, e aí mais 2 pra chegar lá** (nos 22 chocolates)**..."**

---

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

foi isso que você tinha feito?

Ada: É, que seria o calculo mental...

Tânia: Você foi pensando de 10 em 10, [...] olha o procedimento que a Ada fez: **ela foi lá, achou o preço de 1** (chocolate), **depois ela achou o preço de 10 e depois de 20 e depois de mais 2**, então olha a trajetória que ela fez, ela adotou a estratégia parecida com a da Iara que era achar o preço de 1 (chocolate) [...] aí, quando ela foi quebrar os 22 (chocolates) pra poder achar os grupos (menores), ela foi fazendo grupo de 10, certo?

Laís: Aham.

(Encontro dia 23/04/2013)

O procedimento utilizado por Ada e por Iara nos dois episódios anteriores, de reorganizar quantidades numéricas em grupos de diferentes 'tamanhos' (contendo diferentes números de elementos), é ideia base dos processos de **unitização**[*] e de **raciocínio progressivo e regressivo**.

Entretanto, efetuar cálculos com um grupo formado por apenas um chocolate, em princípio, não parece para Iara evidência desses processos, o que a faz reificar perante os colegas que sua estratégia não mobiliza Raciocínio Proporcional.

Frente a essa reificação de Iara, **Tânia a questiona** buscando entender qual foi o significado produzido pela participante para os processos de unitização e de raciocínio progressivo e regressivo, que a fez projetar tal compreensão, de que sua estratégia não mobilizava esse aspecto do Raciocínio Proporcional.

Após breve negociação com Tânia a respeito de sua resolução, Iara reconhece e legitima os processos de **unitização** e **raciocínio progressivo** e regressivo em seus procedimentos, concordando que sua resolução revela indícios de mobilização do Raciocínio Proporcional, o que evidencia uma aprendizagem da participante.

Durante essa negociação de significados referente às estratégias de Ada e Iara para a resolução do problema, em que o processo de unitização foi identificado pelos participantes, Tânia projeta suas próprias reificações para os termos unitarizar e unitizar, diferenciando seus significados.

---

*

Processo de unitização	Parte-todo/medida	Razão	Quociente	Operador
Relação de invariância e covariância	Raciocínio Progressivo e Regressivo	Raciocínio Relativo		
Raciocínio Absoluto	Constante de Proporcionalidade	Partição		

A formadora/pesquisadora verbaliza ao grupo que, *unitarizar* é a estratégia de reduzir as relações de proporcionalidade para um grupo de elementos formado por uma unidade (de qualquer uma das quantidades covariantes com as quais se lida) e *unitizar* seria a estratégia de organizar grupos mantendo as relações de proporcionalidade, contendo quantidades diferentes de elementos para além de apenas um elemento.

Em um momento posterior a essa reificação de Tânia, quando **Cléa questiona os colegas a respeito do significado dos dois termos**, Laís assume um posicionamento mais pleno nas negociações e contesta a reificação feita por Tânia:

Cléa: Pera aí que eu me perdi, unitização é quando a gente pensa na unidade como medidas diferentes? Mais de 1 e tal... E unitarização?

Tânia: É quando você reduz pra um...

Cléa: Um só.

[...]

Laís: Mas tem um problema... A palavra unitarizar não existe...

Tânia: Não existe... Aí, ó, ela acabou de me chamar a atenção...

[...]

Laís: [...] Eu fiquei pensando, essa coisa de unitarizar, transformar em 1 (reduzir as relações de proporcionalidade para uma unidade), também é unitizar!

Tânia: Também é, a capacidade de unitizar.

Laís: Vai além de reduzir (relações de proporcionalidade) pra 1 (unidade).

Tânia: Vai além de reduzir pra 1 (unidade), é a capacidade de fazer vários agrupamentos.

(Encontro dia 23/04/2013)

Laís projeta verbalmente (reifica) sua compreensão a respeito do processo de unitizar e negocia com o grupo outro significado para o termo unitização, o qual é legitimado pelos colegas. Esse processo de negociação é destacado no episódio anterior, em que se identificaram evidências de uma aprendizagem ocorrida na CoP-PAEM, propiciada pelo espaço cultivado no grupo para a negociação de significados.

A partir desta negociação cujo ponto de enfoque foi a caracterização do processo de unitização, a Comunidade de Prática passa a utilizar o termo legitimado unitizar com um significado mais amplo: unitizar é reificado como o processo de reorganizar uma unidade em subconjuntos de diferentes tamanhos (com quaisquer números de elementos). Esse termo passa então a fazer parte do repertório compartilhado da CoP-PAEM.

No quadro a seguir são apresentadas algumas das aprendizagens ocorridas na CoP-PAEM relacionadas ao conhecimento matemático dos professores, durante o desenvolvimento da *resolução e discussão de estratégias para a resolução do problema que envolvia proporção/proporcionalidade* (Ação 1) e das *reflexões a respeito de algumas produções apresentadas na Ação 1* com apoio da literatura sobre do tema (Lamon, 2012) (Ação 4).

Quadro 7 – Frases que evidenciaram reificações dos participantes durante processos de negociação de significados na CoP-PAEM nas ações de *resolver, discutir e refletir a respeito de problemas envolvendo proporção/proporcionalidade*

<table>
<tr><th colspan="3">O QUE FOI REIFICADO</th><th>JUSTIFICAÇÕES</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Indícios de mobilização de aspectos do Raciocínio Proporcional nas estratégias elaboradas</td><td colspan="2">A representação fracionária $\frac{4}{6}$ interpretada como um quociente</td><td>“Pensando num desenho aqui, eu poderia colocar 6 barrinhas, seriam 6 chocolates. É R$ 0,93, aí depois colocar mais 6 (chocolates), R$ 0,93 [...] Tem que dividir (0,93) por 6 e depois multiplicar por 4? [...] Bom, daí dá pra fazer divisão 4 por 6 aqui [...] 4 dividido por 6, é isso?” (Tina)

“na hora que ela (Bia) falou $\frac{4}{6}$ por isso que eu falei divide, por causa da fração (registro fracionário)” (Tina)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Interpretações</td><td>Como um operador (evidências da ideia de divisão equitativa e relação parte-todo/medida nos procedimentos)</td><td>“eu calculei $\frac{2}{3}$ de R$ 0,93 [...] eu R$ 0,93por 3, dá R$ 0,31 cada terço e multiplico pelo que eu quiser.[...] aí aqui você multiplica pelo que ele (o problema) perguntou” (Bia)</td></tr>
<tr><td>Como um operador (evidências do processo de unitização nos procedimentos)</td><td>“então aqui eu tive 3 grupos de 6 (chocolates), que são 18, sobraram 4 chocolates que eu queria saber quanto custavam, 4 num grupo de 6, são $\frac{4}{6}$, $\frac{4}{6}$ representam $\frac{2}{3}$, é uma fração equivalente a $\frac{2}{3}$ [...] eu calculei $\frac{2}{3}$ de R$ 0,93, que são R$ 0,62 e aí fiz a soma...” (Bia)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td rowspan="3">da representação fracionária $\frac{2}{3}$</td><td></td><td>“Mas na verdade é o que ela (Tina) fez [...] $\frac{2}{3}$ vezes R$ 0,93” (Bia)</td></tr>
<tr><td>Como operador (evidências da relação parte-todo/medida e unitização nos procedimentos)</td><td>“eu pensei no total de chocolates que era 22, como eu tinha o preço de 6 (chocolates) então fui agrupando de 6 em 6 até chegar nos 24 (chocolates), mas aí passava (da quantidade 22 chocolates)... [...] então, eu fiz o desenho dos docinhos, e eu calculei quantos grupos inteiros de 6 (chocolates) dava, são três grupos [...] no último grupo ficam sobrando dois chocolates então eu dividi (o último grupo de 6 chocolates) em 3 (partes) e calculei o preço de cada 2 chocolates ($\frac{2}{3}$ de 0,93) [...] Aí eu, tirei do total de 24 (chocolates)” (Laís)</td></tr>
<tr><td>Como quantidade equivalente a $\frac{4}{6}$ (evidência do processo de unitização)</td><td>“eu já simplifiquei, eu coloquei assim $\frac{4}{6}$ equivale a $\frac{2}{3}$.” (Bia)</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Estratégia de unitização (considerando a unidade um grupo de apenas 1 chocolate)</td><td colspan="2">“eu achei um só, [...] que é aproximadamente 0,155 centavos, depois eu multipliquei por 22 [...] se 10 vai dar 1,55; 20 vai dar 3,10, mas 22...vai dar 3,41” (Ada)</td></tr>
<tr><td colspan="2">6 → R$ 0,93
1 → 0,93 : 6 = 0,155 ' Preço de 1 '
22 × 0,155 = 3,41

(Iara)

“Eu achei o individual? [pausa] ah tá eu dividi por 6 (o valor 0,93) também, (para encontrar) o preço de 1 [...] Eu fui direto na unidade 1 mesmo” (Iara)

“Aham [...] eu achei um só, ela (Ada) também fez um só né? Aí você (Ada) unitarizou (unitizou)...” (Iara)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Significado produzido para o termo unitizar</td><td colspan="2">“a palavra unitarizar não existe [...] eu fiquei pensando, essa coisa de unitizar, transformar em um também é unitizar! (a capacidade de unitizar) vai além de reduzir (quantidades) pra 1(unidade)” (Laís)</td></tr>
</table>

Indícios do conhecimento profissional de professores de Matemática com relação à gestão curricular	"[...] a gente tem, assim, uma matriz curricular tão extensa tão cheia de conteúdo, sabe? A gente tinha que repensar essa matriz, ver o que é prioridade pro 6º, 7º, 8º e 9º ano e trabalhar bem em cima desses conteúdos que são prioridade" (Bia)	
Utilização de diferentes formas de registros numéricos	Conveniência de utilizar registros na forma fracionária ou decimal	"é muito mais fácil usar a fração (registro fracionário), não é? [...] porque fica muito mais fácil multiplicar e depois já dividir aqui ao invés de você dividir aqui, que vai resultar em um decimal (referindo-se aos procedimentos de resolução do problema dos chocolates)..." (Tina) "é mais fácil é usar o decimal [...] mas nesse (caso) aí não porque (o resultado) não é exato." (Iara)

Fonte: Autora

Nos processos de negociação de significados ocorridos durante o trabalho com o problema do preço dos chocolates, foram identificadas aprendizagens dos participantes da Comunidade de Prática CoP-PAEM relativas a aspectos de seu *conhecimento matemático*, nomeadamente:

- a escolha de registros numéricos mais convenientes (fracionários ou decimais) para a resolução do problema;

- a elaboração de diferentes estratégias para a resolução do problema (algumas com o apoio de registros pictóricos);

- as diferentes interpretações do registro fracionário $\frac{a}{b}$ (quociente, operador, medida),

- o desenvolvimento de procedimentos como os processos de unitização e de raciocínio progressivo e regressivo;

- a reificação e legitimação do termo *unitizar*.

CAPÍTULO 5
CONSIDERAÇÕES FINAIS

No empenho de responder à questão: "*Que elementos da prática de uma CoP oportunizaram aprendizagens relacionadas ao conhecimento matemático de professores de Matemática nas ações de resolver, discutir e refletir a respeito de problemas envolvendo proporção/proporcionalidade do empreendimento Estudo do Raciocínio Proporcional?*", relata-se no Capítulo 4 uma breve trajetória da CoP –PAEM com foco na negociação de significados e desenvolvimento de parte do empreendimento Estudo do Raciocínio Proporcional.

Na análise das ações de *resolver e discutir problemas matemáticos envolvendo proporção/proporcionalidade* e de *refletir a respeito de algumas destas resoluções e justificações* tendo em conta o apoio da literatura a respeito do tema (LAMON, 2012) desse empreendimento, são evidenciadas aprendizagens dos professores de Matemática, membros dessa Comunidade de Prática, relativas ao conhecimento a respeito do conteúdo que ensinam, especificamente aspectos do Raciocínio Proporcional.

A partir disso, foi possível identificar elementos da prática da CoP-PAEM que oportunizaram as aprendizagens evidenciadas (seção 5.1). Na seção, 5.2, apontam-se algumas implicações desta investigação para formação continuada de professores que ensinam Matemática.

5.1 ELEMENTOS DA PRÁTICA DA CoP-PAEM QUE OPORTUNIZARAM APRENDIZAGENS DE SEUS PARTICIPANTES

A partir das análises feitas foram identificados elementos da prática da CoP-PAEM que oportunizaram aprendizagens dos professores participantes dessa Comunidade de Prática, nomeadamente: **a resolução e discussão de problemas, o compartilhamento e**

justificação de suas produções escritas; o estudo de textos teóricos sobre o Raciocínio Proporcional, a oportunidade de ser questionado e a reflexão a respeito da produção escrita/oral desencadeada a partir de alguns problemas resolvidos.

Na ação de resolver e discutir problemas envolvendo proporção/proporcionalidade, os professores participantes da CoP-PAEM tiveram a oportunidade de **resolver problemas, compartilhar e justificar suas produções escritas para o grande grupo**.

Logo após resolverem os problemas, individualmente ou em pequenos grupos, os participantes se organizaram para **compartilharem as estratégias/procedimentos utilizados**.

Essa dinâmica demandou o cuidado dos participantes em (re) organizar os significados por eles produzidos e legitimados para as ideias matemáticas mobilizadas na resolução dos problemas (aprendizagem propiciada pela necessidade de justificação das resoluções), de maneira que, ao verbalizá-los para os colegas, prezando pela clareza e coerência, lhes garantissem a compreensão a respeito do que haviam feito, possibilitando que os demais participantes negociassem e produzissem significados para sua fala.

Ao compartilharem suas resoluções justificando-as (assumindo assim uma participação mais intensa na CoP-PAEM), ou como ouvintes, ao produzirem significados para as falas exteriorizadas (validando ou não as estratégias/procedimentos apresentados/justificados pelos colegas), os participantes dessa Comunidade de Prática evidenciaram aprendizagens com relação ao seu conhecimento matemático, especificamente quanto aos aspectos do Raciocínio Proporcional.

Esses momentos demandavam dos participantes a (re) organização de seus conhecimentos a respeito da Matemática, a (res)significação dos significados já produzidos ou reificados para algumas ideias ou conceitos matemáticos aprendidos anteriormente.

Além dessas aprendizagens, **resolver e discutir problemas envolvendo proporção/proporcionalidade** possibilitou aos professores participantes da CoP-PAEM a oportunidade de criar um espaço comunicativo com seus pares para o compartilhamento de seus repertórios.

A restrição quanto ao uso da regra de três mobilizou os participantes a buscarem outras estratégias de resolução, despertando neles o interesse em conhecer as maneiras como seus colegas haviam lidado com os mesmos problemas (que estratégias/procedimentos haviam elaborado ou desenvolvido, que ideias matemáticas mobilizaram, que significados produziram...), desencadeando negociações de significado intensas entre eles.

Com isso, foi possível observar o compartilhamento de diferentes informações matemáticas e consequentes aprendizagens por meio das negociações de significados.

Durante essas negociações observou-se que, ao **compartilharem informações a respeito de suas estratégias/procedimentos**, os participantes evidenciavam potencialidades bem como fragilidades de seu conhecimento da Matemática.

O reconhecimento da existência dessas fragilidades provocou uma desestabilização nos participantes, incômodo que os motivou a buscar ajuda de colegas da CoP, cujo conhecimento matemático eles legitimavam, uma forma de transpor os obstáculos/dificuldades encontrados, aproximando-os, como no caso de Tina e Bia.

Após resolver o primeiro problema (construção da casa) utilizando a regra de três, Tina procurou a ajuda de Bia, considerada por ela como alguém experiente, para resolver o problema seguinte (preço dos chocolates) por meio de uma estratégia alternativa à regra aplicada no problema anterior.

A legitimação verbal de Bia às reificações feitas por Tina, em suas tentativas de resolver o problema de outra maneira, motivava-a a não desistir de resolvê-los mesmo com as dificuldades encontradas ou insegurança sentida frente ao desafio legitimado.

Como resultado dessa interação, Tina conseguiu elaborar uma estratégia que evidenciou a mobilização de outros aspectos do Raciocínio Proporcional, para além daqueles subjacentes à regra de três, mobilizados anteriormente. Isso evidenciou aprendizagens de ambas as participantes: Bia, no processo de compartilhar informações com Tina e, (res)significar ideias matemáticas, e a participante Tina, ao buscar ajuda para elaborar uma estratégia alternativa à regra de três e obter sucesso nesse processo.

As demandas das situações reais ou imagináveis frequentemente vivenciadas pelos indivíduos (res)significam constantemente seu conhecimento a respeito da Matemática e os fazem optar e priorizar o uso de determinadas estratégias e procedimentos matemáticos ao lidarem com problemas dessa natureza.

A dificuldade em mobilizar ideias, conceitos matemáticos diferentes daqueles subjacentes a regras/fórmulas/dispositivos algébricos pode estar relacionada ao fato de que, durante a trajetória de estudos de professores e alunos, algumas estratégias matemáticas para resolução de problemas, depois de apreendidas pelos indivíduos, passam a ser aplicadas de maneira indiscriminada.

Muitas vezes não há uma reflexão acerca dos possíveis significados existentes nas relações matemáticas estabelecidas entre as grandezas apresentadas; ou acerca dos motivos de os cálculos efetuados serem necessários para responder aos questionamentos do problema que se resolve, e da existência, ou não, de estratégias alternativas àquela escolhida para resolvê-lo.

Comumente, ao identificar relações (aditivas ou multiplicativas) entre valores numéricos de um problema matemático, parte dos indivíduos prioriza a escolha e a aplicação de estratégias mais rápidas, práticas e que possivelmente já foram validadas pela comunidade matemática, cuja memorização muitas vezes aconteceu por conta da recorrência de aplicações em problemas semelhantes durante sua trajetória de estudos e não pela compreensão de seus significados, o que acontece, por exemplo, com a regra de três.

Foi possível observar, nas interações entre os participantes, no início da ação de resolver e discutir problemas envolvendo proporção/proporcionalidade, que o hábito frequente de resolver problemas envolvendo proporção/proporcionalidade por meio da aplicação da regra de três mostrou-se inicialmente como um obstáculo para Eva, Tina e Laís, já que, ao terem essa estratégia suprimida de seus repertórios, as professoras não conseguiam elaborar/desenvolver estratégias alternativas.

Há uma ideia generalizada, cultivada muitas vezes nas próprias aulas de Matemática, que sugere certa banalização do uso da estratégia da multiplicação cruzada, a regra de três, de que, ao lidar com problemas matemáticos, é sempre possível encontrar respostas numéricas coerentes a eles, sejam as respostas exatas ou ao menos aproximadas, por meio da aplicação consecutiva dessa estratégia.

Possivelmente, essa ideia ainda se sustente pela existência de uma grande variedade de fenômenos, observáveis ou imagináveis, dos mais simples aos mais complexos, que podem ser teoricamente descritos por relações proporcionais, o que pode justificar o uso constante da regra de três, muitas vezes dissociada de significados.

Para desmitificar essa ideia de que com a estratégia da regra de três é possível resolver grande parte dos problemas matemáticos, é interessante, para os processos de ensino e de aprendizagem desenvolvidos em sala de aula, oportunizar aos professores que ensinam Matemática momentos como os descritos pelas Ações 1 (*Resolver e discutir problemas matemáticos envolvendo proporção/proporcionalidade*) e 4 (*Refletir a respeito de algumas destas resoluções e justificações* tendo em conta o apoio da literatura a respeito do tema (LAMON, 2012)) na CoP-PAEM.

A relevância de promover tais interações está em promover o contato dos professores com informações matemáticas a respeito de aspectos subjacentes às relações de proporção/proporcionalidade (algumas vezes desconhecidas) de modo que possam (re) negociar com seus pares os significados produzidos para essas ideias. Momentos de (res)significação do conhecimento profissional dos professores a respeito do conteúdo ensinado, ou seja, de aprendizagens relacionadas ao conhecimento matemático.

O interesse dos participantes em conhecer os significados produzidos pelos seus colegas de Comunidade de Prática, que razões os levaram a produzir tais reificações, a confiança cultivada entre eles e a predisposição em solicitar e propor ajuda para transpor obstáculos de qualquer natureza (problemas no desenvolvimento de estratégias ou relacionado à pratica letiva), evidenciou a preocupação e o compromisso que cada um deles assumiu com relação à sua própria aprendizagem e à aprendizagem dos demais participantes da CoP-PAEM.

O elemento "**compartilhar e justificar produções escritas/orais**", parte da prática constituída por essa comunidade, ainda oportunizou aprendizagens dos participantes com relação a outros elementos de seu conhecimento profissional, para além daqueles especificamente matemáticos.

Na medida em que os participantes se engajavam na ação negociada, resolvendo problemas envolvendo proporção/proporcionalidade, mobilizando ideias, conceitos e formas de pensar subjacentes ao Raciocínio Proporcional, discutindo e justificando suas estratégias, eles estabeleceram relações, por exemplo, com os temas e conteúdos matemáticos sugeridos pelas orientações curriculares (PCN, Diretrizes do Estado do Paraná).

Ademais, foi possível observar aprendizagens desses participantes na medida em que eles perceberam que da maneira como muitas vezes esse conteúdo tem sido tratado em sala de aula, não propiciam o desenvolvimento de raciocínios mais livres.

Essa percepção desencadeou reflexões sobre a necessidade de revisar as orientações curriculares, de maneira que seja priorizado o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos independentemente da memorização ou aplicação corretas de fórmulas e regras.

As reflexões e discussões observadas foram especialmente provocadas por um aspecto da ação de resolver e discutir problemas envolvendo proporção/proporcionalidade, a restrição ao uso da regra de três como estratégia de resolução para os problemas propostos, o que evidenciou o conhecimento dos professores a respeito da

Matemática como ciência e de suas crenças e concepções a respeito de seu ensino e do currículo escolar.

Os participantes da CoP-PAEM também puderam refletir e reconhecer a importância da formação continuada para seu desenvolvimento profissional e a relevância da continuidade dos estudos de ideias e conceitos matemáticos e de outros temas relacionados à sua profissão; principalmente de estudos e discussões em conjunto com seus pares.

Esses professores também reconheceram a importância, para o desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem, de conhecer e estimular a constituição do conhecimento matemático dos alunos por meio do trabalho com tarefas que exijam deles maior esforço cognitivo.

Isso evidencia o conhecimento que os professores têm de seus alunos, bem como de seus processos de aprendizagem, de suas fragilidades e potencialidades cognitivas; além de aprendizagens com relação a esses aspectos, na medida em que identificaram, relacionaram, exteriorizavam e refletiam a respeito deles nas interações da CoP.

Ao exteriorizarem o conhecimento que têm com relação a esses diferentes elementos, os professores ainda evidenciaram o conhecimento a respeito de si mesmo enquanto professores, de suas responsabilidades e autonomia para promoverem mudanças na cultura escolar, buscando oportunizar a aprendizagem dos alunos por meio de situações mais desafiadoras, como as vivenciadas por eles na CoP-PAEM na ação de resolverem e discutirem problemas com relações de proporção/proporcionalidade (algo até então familiar aos professores), sem o uso da estratégia algébrica regra de três (uma restrição inusitada).

O engajamento dos participantes na **resolução dos problemas propostos, sem o uso da estratégia regra de três**, e na **justificação para o grande grupo das produções elaboradas/desenvolvidas** oportunizaram aprendizagens dos professores com relação ao seu conhecimento matemático (além de outros elementos de seu conhecimento profissional, como já apontado), na medida em que:

- motivou os participantes a interagirem, ajudando-se mutuamente na busca de resolver os problemas por meio de raciocínio mais livres;

- possibilitou, pela criação (estabelecimento) de um espaço comunicativo, o compartilhamento de informações a respeito do conhecimento matemático de cada participante, o que os fez legitimar ou não alguma delas, ampliando seus próprios repertórios;

- demandou do grupo de professores o exercício de produzir significados para estratégias matemáticas utilizadas e exteriorizá-los de maneira clara para os demais colegas, garantindo sua compreensão do que cada um raciocinou na elaboração/desenvolvimento de estratégias e procedimentos.

As **leituras, discussões e estudos de textos** tratando de aspectos teóricos do Raciocínio Proporcional, feitos em conjunto pelos participantes da CoP-PAEM, no desenvolvimento da ação de refletir a respeito de algumas das resoluções e justificações com o apoio da literatura (LAMON,2012), oportunizaram aos participantes o contato com diversas informações a respeito de ideias e conceitos matemáticos envolvidos na mobilização de aspectos desse raciocínio, consequentemente evidenciando aprendizagens uma vez que os professores da comunidade produziam significados para o que liam e discutiam os excertos dos textos de Lamon (2012) traduzidos pelas formadoras/pesquisadoras Tânia e Laís.

Os significados produzidos e reificados (muitas vezes verbalmente) na CoP, durante as negociações acerca do conteúdo dos textos, evidenciaram processos de aprendizagem dos participantes, por exemplo, quando os professores estabeleciam relações entre as informações apresentadas no texto e suas práticas de sala de aula e refletiam sobre isso, apontando diferenças entre o que liam e vivenciavam no ensino de proporcionalidade e outros conteúdos matemáticos, ou então em momentos que elencavam ou relatavam possíveis ações com potencial para reverter essas situações de sala de aula.

Em um episódio, Iara, ao ler um trecho do texto de Lamon (2012) que tratava do processo de unitização em uma resolução de problemas com alunos americanos, verbalizou, com certa indignação, o significado por ela produzido: dado que a autora caracterizava o processo de unitização como algo subjetivo, isso demandaria dos professores a necessidade de considerar corretas mais de uma estratégia de resolução apresentada pelos alunos para um mesmo problema:

Iara: Olha, pelo que eu li (em Lamon, 2012), eu vou ter que adivinhar o pensamento das crianças!

(risos)

Eva: É verdade, eu estava lendo também...

Tânia: Por que Iara?

Iara: Por quê? Olha aqui... A resposta que eles deram aqui ó (para o problema), eram 24 latas, um (aluno) pensou em 4 (grupos) de 6 (latas), outra (aluna) pensou em 2 (grupos) de 12 (latas), e daí? Dependo do que elas (as crianças) pensaram foi a resposta delas, e daí, como é que vai ser?

Tânia: Então como é que lida com isso?

Iara: [...] Ou você então direciona bem o exercício... Não é? (ou então vão surgir diversas respostas)

(Encontro dia 23/04/2013)

A reificação de Iara desencadeou uma negociação de significados na CoP, mediada por Tânia, a respeito de como os participantes lidavam, em sala de aula, com situações em que seus alunos apresentavam diferentes resoluções, muitas delas matematicamente corretas, para um mesmo problema. Esse ponto de enfoque das negociações extrapolou o conhecimento da Matemática dos professores, evidenciando indícios de aprendizagens relativas a outros elementos desse conhecimento.

Ao interagirem com a formadora/pesquisadora, **respondendo seus questionamentos**, os participantes afirmaram que comumente os alunos não apresentam respostas distintas uns dos outros, já que são instruídos por eles, os professores, a resolverem os problemas propostos de determinadas maneiras, utilizando estratégias específicas, em acordo com os conteúdos/temas estudados naquele momento, como é observado no episódio que segue:

[...]
Iara: Tânia, mas assim, é que a gente já dá mesmo a pergunta direta.
Bia: Direcionada.
Tânia: E por que vocês já dão direto?
[...]
Eva: Acho que é hábito. A gente tem o hábito de fazer isso.
Tina: E mesmo pergunta direta eles (os alunos) não fazem...
Ada: É porque (para os professores) é mais fácil.
Tânia: É mais fácil?
Ada: Aí só vai ter aquela técnica (tipo de resposta).
Iara: Só vai ter uma resposta
Tânia: Só vai ter uma resposta. Só vai ter uma possibilidade, então, se surgir aquela, muito bem, se não surgir...
Iara: É...

(Encontro dia 23/04/2013)

A justificativa para essa prática pedagógica, tão comum a esses participantes, é a praticidade na posterior correção da produção dos alunos. **Provocados pelos questionamentos feitos por Tânia**, os participantes acabaram por reificar que o costume de direcionar as opções de estratégias de resolução dos alunos acaba por não desafiá-los cognitivamente, algo não produtivo no que tange à promoção de autonomia para a aprendizagem dos alunos.

Ao refletirem sobre suas práticas já desenvolvidas em sala de aula (SCHÖN, 1995), os professores verbalizaram reificações a respeito da autonomia que têm e da necessidade de promover mudanças nessa perspectiva atual de ensino e aprendizagem nas aulas de Matemática:

Tina: Só que olha o nosso erro, quando você tem uma turma como esse sexto ano, que é uma graça, você já se propõe a fazer isso com mais facilidade, você fala "vou tentar", mesmo que eles não tragam (a tarefa feita), você corrige depois, faz com eles, mas quando você tem uma turma que eles não sabem nada de conceitos anteriores, você não tem essa facilidade de trabalhar, eu não tenho!
Bia: Mas você não vai se negar a tentar?
Tina: Não, eu não vou [...]

Ada: É que eles vem habituados já a essa técnica, mas cabe à gente mudar esse pensar.
Tânia: Isso.
Ada: Porque aí eles vão se transformando, é uma transformação, é difícil pra gente...
Tina: É, com algumas turmas [...] com esse sexto ano mesmo eu estou fazendo bastante isso Ada, mudando... Dando bastante probleminha diferente pra eles.

(Encontro dia 23/04/2013)

Responder aos questionamentos de Tânia, desencadeados pela **leitura e a discussão de textos a respeito do Raciocínio Proporcional**, oportunizou aprendizagens aos participantes da CoP, na medida em que a interação com a formadora/pesquisadora, negociações de significado ocorridas, os fez refletir sobre suas práticas nas aulas de Matemática e (res)significar elementos de seu conhecimento profissional para além daquele especificamente matemático.

Como ilustrado pelo episódio anterior, bem como observado em outros momentos apresentados neste trabalho, os participantes da CoP-PAEM conceberam o espaço criado e cultivado por eles, por meio de suas diferentes interações sociais desenvolvidas na Comunidade de Prática, como um ambiente seguro para compartilhar vivências profissionais e pessoais (relatando angústias, compartilhando informações pedagógicas, sucessos e fracassos de algumas práticas em sala de aula, potencialidades e fragilidades de seu conhecimento matemático, crenças, motivações) e para (res)significar seu conhecimento profissional, por meio de negociações de significados, oportunidades de aprendizado.

As reflexões a respeito das estratégias e justificações apresentadas pelos colegas para os problemas trabalhados na Ação 1, feitas na ação de refletir a respeito de algumas destas resoluções e justificações tendo em conta o apoio da literatura a respeito do tema (LAMON, 2012), oportunizaram aos participantes assumir uma participação mais central na CoP, já que se propuseram a negociar as inferências que faziam (significados que produziam/legitimavam) no processo de interpretar essas produções, em busca de indícios da mobilização de aspectos do Raciocínio Proporcional, evidenciando aprendizagens.

A reflexão cuidadosa a respeito dos possíveis significados subjacentes às reificações apresentadas, nos registros escritos ou em justificações verbais, para elementos do Raciocínio Proporcional e o confronto entre as informações teóricas e os dados apresentados, necessário ao processo de análise, possibilitaram aos participantes exteriorizar os conhecimentos mobilizados a respeito do Raciocínio Proporcional, ao reconhecerem nos dados evidências de significados produzidos/legitimados para aspectos desse raciocínio, como processos de unitização, raciocínio relativo e as diferentes interpretações dos números racionais em sua forma fracionária $\frac{a}{b}$.

Pode-se afirmar que os elementos identificados como constituintes da prática da CoP-PAEM oportunizaram a (res)significação do conhecimento profissional de professores de Matemática, especialmente com relação ao conhecimento constituído do conteúdo matemático. Isso evidenciou aprendizagens de grande importância ao processo de desenvolvimento profissional desses professores, que foi propiciado pela participação em uma Comunidade de Prática de professores que ensinam Matemática em formação continuada.

O desenvolvimento das ações da/na CoP-PAEM, especialmente dos elementos da prática dessa comunidade que oportunizaram aprendizagens de seus participantes, foi possível pela presença de alguns elementos cultivados pelos participantes (professorem em formação e pesquisadores) em suas relações interpessoais, como o respeito, a confiança uns nos outros, o desafio e a solidariedade (NAGY, 2013).

Acrescente-se, ainda, que o compromisso de cada participante, firmado com a CoP-PAEM bem como com cada um de seus participantes, e a responsabilidade assumida, com relação às suas aprendizagens e à de seus colegas professores de Matemática, também foram elementos de fundamental importância para reafirmar a existência da CoP-PAEM como uma comunidade de professores e um ambiente com potencial para exploração, aprendizagens, em suma, de (res)significação do conhecimento profissional de professores que ensinam Matemática na perspectiva do desenvolvimento profissional.

5.2 IMPLICAÇÕES DA INVESTIGAÇÃO NA FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

O trabalho desenvolvido na/pela CoP-PAEM, estruturado no intuito de promover o desenvolvimento profissional de professores em serviço que ensinam Matemática, buscou firmar sua prática e desenvolver suas ações e empreendimentos em perspectivas de aprendizagem distantes daquelas consideradas por muitas propostas vigentes de formação de professores.

Em muitos casos, nessas propostas o professor em formação se dispõe a receber informações e em seguida decidir se reproduz, ou implementa o que vê e ouve de especialistas na área da educação, que, apesar de terem propriedade para discutir dinâmicas dos processos de ensinar e de aprender nas escolas, muitas vezes, estão alheios às particularidades e peculiaridades da prática vivenciada pelos professores em serviço.

Buscou-se, enquanto formadoras e pesquisadoras, cultivar interações sociais entre os participantes da CoP-PAEM que os estimulassem a assumir um posicionamento ativo com relação à sua aprendizagem, ficando os próprios professores responsáveis por expor e negociar com o grupo seus desejos com relação aos temas a serem discutidos e aos estudos que deveriam ser desenvolvidos para a ampliação e (res)significação de seus repertórios de conhecimento profissional, ou seja, aos professores da Comunidade de Prática não foi apresentada uma sequência de trabalhos inflexível, um currículo determinado *a priori* pelas formadoras.

Dessa forma conseguiu-se um movimento de dentro para fora, atendendo aos professores dessa Comunidade de Prática, levando em conta suas vivências, participações em outras Comunidades de Prática, necessidades, fragilidades e potencialidades, de modo a desencadear um processo de desenvolvimento profissional apropriado, “na medida”, a esse grupo de professores.

A continuidade nos encontros da CoP e a proximidade entre pesquisadores, no papel de formadores e professores em processo de formação, também foram características importantes para oportunizar o aprendizado dos participantes, que são distintas das adotadas em modelos de formação comumente propostos aos professores em serviço.

A aprendizagem, por ser um processo, demanda tempo, e a descontinuidade que impera nos “cursos”, “aperfeiçoamentos” e “reciclagens” mostra-se algo pouco produtivo no que compete à promoção de aprendizagens. O tempo limitado, por vezes, impede que diferentes reificações sejam feitas pelos professores, por não serem discutidas ou (re)negociadas.

Com os encontros contínuos, desenvolvidos desde 2011, os professores da CoP-PAEM tiveram a oportunidade de negociar suas reificações, os significados que produziam para diferentes ideias presentes nos elementos de seu conhecimento profissional, o que evidenciou aprendizagens diversas, o amadurecimento dos participantes e a constante ampliação e (re)estruturação de seus repertórios.

A proximidade estabelecida entre os participantes da Comunidade de Prática proporcionada pelo tempo da trajetória construída por eles, pela regularidade dos encontros e pela perspectiva de desenvolvimento profissional proposta oportunizou a todos conhecerem melhor os colegas enquanto indivíduos, professores e pesquisadores, bem como as práticas, repertórios e identidades constituídos por eles na participação em outras Comunidades de Prática.

Segundo Wenger (1988) as Comunidades da Prática que os indivíduos constituem não podem ser consideradas de maneira isolada ou independente do restante do mundo e de outras práticas desenvolvidas. As ações negociadas para/no o desenvolvimento de empreendimentos articulados ocorrem de formas particulares e peculiares às Comunidades de Prática, por conta das formas de participação de seus membros em outras Comunidades de Prática.

A legitimação, pelos participantes da CoP PAEM, da existência desses outros papéis e características constituídos (negociados/(re) negociados) em contextos distintos influenciou e possibilitou alterações nos processos de participação desses professores e a constituição de identidades específicas aos papéis desenvolvidos nessa comunidade.

As diferentes formas de engajamento desenvolvidas pelos participantes nos empreendimentos articulados deixaram evidentes indícios de suas identidades profissionais e pessoais, dos papéis que exerciam em suas escolas, suas salas de aula, em suas famílias, no espaço social em que estão inseridos, das vivências anteriores e dos significados produzidos e legitimados pelos participantes em aprendizagens já ocorridas.

No início, ao ingressar na CoP-PAEM, Laís foi legitimada como uma participante recém-chegada e dessa forma foi autorizada pelos professores a participar da prática que o grupo, em processo de formação continuada.

Enquanto professora recém-formada, Laís negociava e participava das ações e empreendimentos dessa Comunidade de Prática buscando, ao interagir com profissionais mais experientes, obter informações diversas a respeito de elementos da prática profissional de professor, no intuito de (re)estruturar alguns elementos de seu conhecimento profissional em constituição.

Após sua admissão no Programa de Pós-Graduação da Universidade Estadual de Londrina, Laís assumiu a responsabilidade de investigar a Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática, da qual era parte.

A legitimação dos demais professores à sua participação nessa comunidade como profissional em formação continuada de alguma forma favoreceu a legitimação de outros papeis a serem desenvolvidos nesse espaço, sua participação na CoP-PAEM como investigadora e formadora.

Nesses papeis, Laís negociava com Tânia e auxiliava-a na proposição e coordenação de algumas das ações desenvolvidas com os demais participantes, com o objetivo de coletar informações que colaborassem para o desenvolvimento de seu estudo.

Entretanto, os papeis de participante em formação continuada, de investigadora e formadora desenvolvidos por Laís evidenciaram aspectos de repertórios constituídos por ela em diferentes comunidades de prática, o que não dissociava uma identidade da outra, uma forma de participação da outra, mas as complementavam produzindo uma terceira forma de participação particular e coerente à CoP-PAEM.

Ademais, a legitimação dos participantes, da experiência profissional de Tânia e da pouca vivência em sala de aula de Laís, possibilitou maior liberdade na exteriorização de dúvidas, quanto à maneira de conduzir certas práticas em sala de aula, ou então, a respeito de temas ou conteúdos matemáticos, e no compartilhamento de situações positivas e negativas vivenciadas em sala de aula, o que comumente não é observado em cursos de formação, no qual há pouco espaço para o desenvolvimento de laços de companheirismo mais significativos entre os professores.

Essa abertura encontrada em meio a um grupo de professores que ensinam Matemática oportunizou aprendizagens e consequentes mudanças de atitudes dos professores em sala de aula (perceptíveis pelos relatos de ações em sala de aula com iniciativas não observáveis no início dos encontros do grupo), evidenciando maior segurança e autonomia.

Ao apontar e justificar nesta investigação as potencialidades do trabalho com professores que ensinam Matemática, na perspectiva de seu desenvolvimento profissional em Comunidades de Prática, e a urgência em promover espaços de formação profissional com essa estrutura, em que a exploração e a investigação sejam prioritárias na aprendizagem dos professores, considera-se que esses aspectos devem ser fortemente levados em conta pelos responsáveis por políticas públicas no Brasil como alternativa aos modelos de formação continuada, dada a defasagem observável em grande parte do ensino no país.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 1977.

BELINE, W. **Formação de professores de matemática em comunidades de prática**: um estudo sobre identidades. 2012. 184 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER E. Rational Number Concepts. In LESH, R. & LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 91-125.

_________.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. Rational number, ratio and proportion. In: GROUWS, D. (Ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan Publishing, 1992. p. 296-333.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução de M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Ed. Porto. Tradução de: Qualitative research for education. 1994.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática (1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental)**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

________. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental)**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BURIASCO, R. L. C.; FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A. B. Avaliação como prática de investigação (alguns apontamentos). **Bolema** - Boletim de Educação Matemática, UNESP-Rio Claro, v. 22, n. 33, p. 69-96, 2009.

CAI, J.; SUN, W. Developing Students' Proportional Reasoning: a Chinese Perspective. In: Litwiller, B.; Bright, G. (Eds.). **Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions**: 2002 Yearbook. 2 ed. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics , 2002. p. 195 – 205.

CALDEIRA, J. S. **Um estudo sobre o pensamento algébrico em uma comunidade de prática de formação de professores de matemática.** 2010. 121 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

CANAVARRO, A. P. **Práticas de ensino da matemática**: duas professoras dois currículos. 2004. 658 f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa. 2004.

COISIFICAR. In: HOUAISS, A. **Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. CD-ROM.

COSTA, S. **O raciocínio proporcional dos alunos do 2º ciclo do ensino básico**. 2007. 149 f. Dissertação (Mestrado em Didática da Matemática) – Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa.

CRAMER, K.; POST, T. Making connections: A case for proportionality. **Arithmetic Teacher**, n. 40, 342-346, Feb. 1993a.

___________________. Connecting research to teaching proportional reasoning. **Mathematics Teacher**, v. 86, n.5, 404-407, May 1993b.

CYRINO, M.C.C.T. **As várias formas de conhecimento e o perfil do professor de matemática na ótica do futuro professor**. 2003. 256 f. Tese (Doutorado em Educação) – FEUSP, São Paulo, São Paulo, 2003.

________________. Preparação e emancipação profissional na formação inicial do professor de Matemática. In: NACARATO, Adair M.; PAIVA, Maria A.V. A. (Org.). **A formação do professor que ensina Matemática: perspectivas e pesquisa**. 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 77-88.

________________. Comunidades de Prática de professores como espaço de investigação sobre a formação de professores de Matemática. In: BATISTA, I. L.; SALVI, R. F. (Org.). **Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática***:* um perfil de pesquisas. Londrina: EDUEL, 2009. p. 95-110.

________________.; CALDEIRA, J. S. Processos de negociação de significados sobre pensamento algébrico em uma comunidade de prática de formação inicial de professores de Matemática. **Revista Investigações em Ensino de Ciências**, v. 16, n. 3, p. 373-401, dez. 2011.

________________.; GARCIA, T. M. R; OLIVEIRA, L. M. C. P. Aspectos do Raciocínio Proporcional mobilizados na resolução e discussão de um problema de proporcionalidade: negociações de significados dos membros da CoP – PAEM . In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11, 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: SBEM Regional, 2013. p. 1-16.

________________. Formação de Professores que Ensinam Matemática em Comunidades de Prática. In: Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, 7., 2013, Montevidéu. **Anais...** Montevidéu, 2013. p. 5188-5195.

ELBAZ, F. **Teacher thinking: A study of practical knowledge**. London: Croom Helm, 1983.

_________. Responsive teaching: A response from a teacher's perspective. **Journal of Curriculum Studies**, v. 25, n. 2, p 189-199, 1993.

FAIÇAL, C. Saberes mobilizados por três docentes de Matemática das séries finais do Ensino Fundamental. 2006. 191f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

FERREIRA, A. C. **Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de matemática:** uma experiência de trabalho colaborativo. 2003. 368f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Educação, Campinas, 2003.

_______________. O trabalho colaborativo como ferramenta e contexto para o desenvolvimento profissional: compartilhando experiências. In: NACARATO, A. M; PAIVA, M. A. V. (Org.). **A formação do professor que ensina matemática**: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 149-166.

FIORENTINI, D; NACARATO, A. M. (Org.). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática**: investigando e teorizando a partir da prática. Campinas: Musa Ed, 2005.

______________.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FREUDENTHAL, H. **Didactical Phenomenology of Mathematical Structures**. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow. Kluwer Academic Publishers, 2002.

GARCIA, T. M. R. et al. Educação matemática de professores que ensinam Matemática: (re) pensando o ensino de frações. In: SEPEM - Seminário de Professores e Pesquisadores do Projeto 'Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática, n. 2, 2012, Londrina. **Anais...** p. 1-20.

________________.; OLIVEIRA, L. M. C. P; CYRINO, M. C. C. T. Negociações de significado sobre aspectos do Raciocínio Proporcional e identidade profissional da CoP – PAEM. In: Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, 7, 2013, Montevidéu. **Anais...** Montevidéu, 2013. p. 5367-5374.

GOODSON, I. F. Representing teachers. **Teaching and Teacher Education**, v. 13, n.1, p.111-117. (1997).

GUIMARÃES, H. M. Perspectivas sobre o conhecimento do professor. Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 8, n. 25, p. 819-839, set./dez. 2008.
JESUS, C.C. **Análise crítica de tarefas matemáticas**: um estudo com professores que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. 2011. 95f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, R. (Ed.). **Number and measurement**: papers from a research workshop. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC, 1976. p. 101 – 144.

____________. Personal Knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development .In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Eds.) **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, 1980. p. 162-180

____________. Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Eds.). **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 53-92.

KRAINER, K. Teams, communities & networks. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Netherlands, v. 6, n. 2, p. 93-105, jun. 2003.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding**: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 2nd edition. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 2005.

____________. **Teaching fractions and ratios for understanding**: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3th edition. New York: Routledge, 2012.

LARROSA, J. Veinte minutos en la fila. Sobre experiencia, relato y subjetividad en Imre Kertész. **Revista Actualidades Pedagógicas**, v. 54, n. 2, p. 55-68, 2009.

LAVE, J.; WENGER, E. **Situated Learning**: Legitimate Peripheral Participation. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

LEVIN, S.W. Fractions and divisions: research conceptualizations, textbook presentations and student performances. 1998. Tese (Doutorado). University of Chicago, 1998.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional Reasoning. In J. HIEBERT; M. BEHR (Eds.) **Number Concepts and Operations in the Middle Grades** (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics. 1988. p. 93-118.

LOPES, C. E. **O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil**. 2003. 281 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação FE/Unicamp, Campinas. 2003.

___________. A educação estocástica na infância. **Revista Eletrônica de Educação**. São Carlos, São Paulo, v. 6, n. 1, p.160-174, mai. 2012. Disponível em: <http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/issue/view/10.> .Acesso em: 25 de maio de 2013

MARCELO, C. Desenvolvimento Profissional Docente: passado e futuro. Sísifo Revista de Ciências da Educação, n. 8, p. 7-22, jan/abr 2009.

MELO, G F A. Saberes docentes de professores de Matemática em um contexto de inovação curricular. In: FIORENTINI, D; NACARATO, A.M. (Org.) **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática**: investigando e teorizando a partir da prática. Campinas: Musa Editora, 2005. p. 33-48.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (2007). **Programa de Matemática do Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC. Disponível em: < http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinobasico/index.php?s=directorio&pid=50> . Acesso em: 12 de junho de 2012.

MISKULIN et al. Pesquisa sobre trabalho colaborativo na formação de professores de Matemática: um olhar sobre a produção do PRAPEM/UNICAMP. In: FIORENTINI, D; NACARATO, A.M. (Org.) **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática**: investigando e teorizando a partir da prática. Campinas: Musa Ed., 2005. p.196-219.

MOCHON, S. When can you meaningfully add rates, ratios and fractions?. **For the Learning of Mathematics**, v. 13, n. 3, p. 16-21, nov. 1993. Disponível em: <http://www.jstor.org/discover/10.2307/40248090?uid=3737664&uid=2129&uid=2134&uid=364076251&uid=2&uid=70&uid=3&uid=364076241&uid=60&purchase-type=none&sid=21100846780881&showMyJstorPss=false&seq=2&showAccess=false>. Acesso em 11/06/2012.

NACARATO, A M. Escola como *locus* de formação e de aprendizagem: possibilidades e riscos da colaboração. In: FIORENTINI, D; NACARATO, A.M. (Org.) **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática**: investigando e teorizando a partir da prática. Campinas: Musa Editora, 2005. p.175-195.

________________.; et.al. Professores e futuros professores compartilhando aprendizagens: dimensões colaborativas em processo de formação. In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Org.). **A formação do professor que ensina matemática**: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2006, p. 197-212.

NAGY, M. C. **Trajetórias de aprendizagem de professoras que ensinam matemática em uma Comunidade de Prática**. 2013. 197f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, 2013.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA.: NCTM, 2000.

NEPEM/USP. Números racionais: aspectos conceituais, o papel da linguagem e dos materiais manipulativos. **Horizontes**, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 53–64, jan/jun. 2004.

NESHER, P. **An outline for a tutorial on rational numbers**. Un-published manuscript. (1985).

OHLSSON, S. Sense and reference in the design of iterative illustrations for rational numbers. In: LAWLER, R. W.; YAZDANI, M. (Eds.). **Artificial intelligence and education** Norwood, NJ: Ablex, 1987. p. 307-344.

OLIVEIRA, H. M. A. P. **A construção da identidade profissional de professores de Matemática em início de carreira**. 2004. 576f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Departamento de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2004.

____________________; CYRINO, M. C. C. T. Formação inicial de professores de matemática em Portugal e no Brasil: Narrativas de vulnerabilidade e agência. **Interacções**, v.18, p.104-130. 2011.

OLIVEIRA, L. M. C. P.; GARCIA, T. M. R. Negociação de significados a respeito do subconstruto razão na resolução e discussão de um problema. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11, 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: SBEM Regional, 2013. p. 1-10.

ONUCHIC, L.R. BOTTA, L.C. Uma nova visão sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais. **Revista de Educação Matemática**, v.5, n.3, p. 5-8, 1997.

______________.; ALLEVATO, N. S. G. As Diferentes ‘Personalidades’ do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v 21, n. 31, p. 79–102, 2008.

PIMENTA, S. G.; GHEDIN, E (Org.). **Professor Reflexivo no Brasil**: gênese e crítica de um conceito. 4 ed. São Paulo: Cortez Editora, 2006.

PONTE, J. P. Da formação ao desenvolvimento profissional, Conferência plenária apresentada no Encontro Nacional de Professores de Matemática ProfMat 98. In: **Actas do ProfMat 98**. Lisboa: APM. 1998. p. 27-44

___________.; OLIVEIRA, H. Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. **Revista de Educação**, Campinas, v. 11, n. 2, p. 145-163, 2002.

REIFICAR. In: HOUAISS, A. **Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. CD-ROM

ROCHA, M. R. **Empreendimentos de uma comunidade de prática de professores de matemática na busca de aprender e ensinar frações**. 2013. 129f.Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, 2013.

ROMANATTO, M. C. **Número racional**: relações necessárias a sua compreensão. 1997. 158f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 1997.

____________. Número racional: uma teia de relações. **Zetetiké**, Campinas, v. 7, n. 12, p. 37-49, jul./dez. 1999.

SANTOS, M. P. **Encontros e esperas com os ardinas de Cabo Verde**: aprendizagem e participação numa prática social. 2004. Tese (Doutorado em Educação: Didática da Matemática) – Departamento de Educação, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2004.

SCHÖN, D.A. Formar professores como profissionais reflexivos. In: NÓVOA, A. **Os professores e a sua formação**. 2.ed. Lisboa: Dom Quixote, 1995. p.77-92.

___________. **The reflective practioner**: How professionals think in action. Nova Iorque: Basic Books, 1983.

SERRAZINA, L. Reflexão, conhecimento e práticas lectivas em Matemática num contexto de reforma curricular no 1º ciclo. **Quadrante,** v.8, p.139-168, 1999.

SHULMAN, L. S. Those who understanding: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4 -14, fev. 1986. Disponível em:< http://links.jstor.org/sici?sici=00131-189X%28198602%2915%3A2%3C4%3ATWUKGI%3E2.0.CO%3B2-X>. Acesso em 03 de outubro de 2013

SMITH III, J.P. Development of students' knowledge of fractions and ratios. . In: Litwiller, B.; Bright, G. (Eds.). **Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions**: 2002 Yearbook. 2 ed. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics , 2002. p. 3-17.

SPINILLO, A. G. Raciocínio proporcional em crianças: Considerações acerca de alternativas educacionais. **Revista Pro-Posições**, v. 5, n. 1, p. 109-114, 1994b.

_____________. O Papel de Intervenções Específicas na Compreensão da Criança sobre Proporção. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, v.15, n. 3,p. 475-487, 2002.

THOMPSON, D.R; AUSTIN. R.A; BECKMANN, C.E. Using literature as a vehicle to explore Proportional Reasoning. . In: Litwiller, B.; Bright, G. (Eds.). **Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions**: 2002 Yearbook. 2 ed. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics , 2002. p.130-137.

VANHILLE, L; BAROODY, A.J. Fraction instruction that fosters multiplicative reasoning. . In: Litwiller, B.; Bright, G. (Eds.). **Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions**: 2002 Yearbook. 2 ed. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics , 2002. p. 224-236.

WEINBERG, S.L. proportional reasoning: one problem, many solutions. In: Litwiller, B.; Bright, G. (Eds.). **Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions**: 2002 Yearbook. 2 ed. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics , 2002. p. 138-144.

WENGER, E. **Communities of Practice**: Learning, Meaning, and Identity. New York: Cambridge University Press, 1998.

__________.; Mc DERMOTT, R.; SYNDER, W. **Cultivating Communities of Practice**. Harvard Business School Press, Boston, 2002.

APÊNDICES

APÊNDICE A

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

I – DADOS DE IDENTIFICAÇÃO DO SUJEITO DA PESQUISA OU RESPONSÁVEL LEGAL

Nome do participante:

....

Documento de Identidade N°:...Sexo: ( ) M ( ) F

Data de Nascimento:.........../.........../.................

Endereço:...N°:.................Apto:.............

Bairro:...CEP:...

Município...Telefone: (......)................................

E-mail:...

II – DADOS SOBRE A PESQUISA

1. Título do Protocolo de Pesquisa: "Educação Matemática de Professores que ensinam Matemática", vinculado ao Programa "Observatório da Educação" (Edital n° 38/2010, da CAPES/INEP)

2. Pesquisadores:

Profa. Laís Maria Costa Pires de Oliveira

Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino

3. Avaliação do Risco da Pesquisa:

Sem Risco ( ) Risco Mínimo (**X**) Risco Médio ( ) Risco Baixo ( ) Risco Maior ( )

4. Duração da Pesquisa: A obtenção das informações contemplará possíveis momentos de entrevistas que não serão superiores a uma hora; gravações em áudio das interações dos participantes nos encontros da Comunidade de Prática CoP-PAEM; acompanhamento das atividades desenvolvidas entre coordenação do projeto, professores e estudantes de Matemática; acompanhamento de preparação e desenvolvimento de atividades para sala de aula.

III – REGISTRO DAS EXPLICAÇÕES DO PESQUISADOR AO ENVOLVIDO OU SEU REPRESENTANTE LEGAL SOBRE A PESQUISA, CONSIGNANDO:

1. Justificativa e objetivo

O projeto "Educação Matemática de Professores que ensinam Matemática", em concordância com os objetivos propostos no Edital no 38/2010, da CAPES/INEP, tem como objetivo geral:

> - Fomentar a produção acadêmica relativa à Formação de Professores que ensinam Matemática e à formação de recursos humanos em Educação Matemática na Educação Básica, na Graduação e na Pós-Graduação (mestrado e doutorado), que colaborem para elevação do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – IDEB. (CYRINO, 2010, p. 6)

E como objetivos específicos:

> - Fortalecer o diálogo entre pesquisadores da área de Educação Matemática do PECEM, estudantes de mestrado e de doutorado do PECEM, estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UEL e professores que ensinam Matemática de Escolas da Rede Pública de Ensino do Paraná, por meio da formação de grupos de trabalho que desenvolvam atividades acadêmicas voltadas para o diálogo qualificado entre esses dois níveis de escolaridade.
> - Investigar aspectos relativos à formação continuada desencadeados pelo diálogo entre os participantes para adoção de uma agenda de trabalho colaborativo e constituição de uma Comunidade de Prática de Professores que ensinam Matemática formada por pesquisadores, futuros professores de Matemática e professores de Matemática que atuam na Educação Básica.
> - Investigar contextos em que os participantes desenvolvam sua capacidade para analisar, explicar seu raciocínio, e comunicar suas ideias

> matemáticas enquanto propõem, formulam, resolvem e interpretam problemas em uma variedade de situações.
>
> - Propiciar um campo de investigação e formação profissional para os estudantes do PECEM e do curso de Licenciatura em Matemática, baseado na articulação entre teoria, prática docente e investigação, de modo a gerar uma reflexão sobre conteúdos matemáticos e do modo como estes conteúdos se transformam em ensino.
> - Fomentar, disseminar e desenvolver metodologias de prática de ensino significativas, para enfrentamento dos problemas na área de Matemática. (CYRINO, 2010, p. 7)

Procedimentos que serão adotados durante a pesquisa

Participaremos das reuniões semanais do grupo investigado (Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática) que ocorrerão nas dependências do Colégio Estadual de Paranavaí, a fim de identificar e registrar aspectos relativos à formação continuada de professores de Matemática no contexto de uma Comunidade de Prática. Buscaremos, em todos os momentos, criar um relacionamento de confiança com os participantes, estabelecer uma comunicação agradável de modo que eles se sintam à vontade e com o mínimo de constrangimentos, valorizar o significado que dão às coisas e aos fatos, respeitar seus valores culturais e aspectos emocionais e não somente o produto da investigação.

3. Desconfortos e riscos

No presente estudo todo o esforço será feito para que não ocorram constrangimentos por parte dos investigados.

4. Benefícios esperados

Esperamos que esta investigação possa fornecer aos organizadores de currículo, nomeadamente aos coordenadores de Curso de Licenciatura em Matemática, aos responsáveis pelas políticas públicas relativas à formação inicial de professores e aos pesquisadores da área subsídios que possam orientar ações relativas à formação de professores de Matemática.

IV – ESCLARECIMENTOS DADOS PELOS PESQUISADORES SOBRE GARANTIAS DO ENVOLVIDO NA PESQUISA

1. Exposição dos resultados e preservação da privacidade dos voluntários

Os resultados a serem obtidos neste estudo serão publicados, independente das informações encontradas, contudo sem a identificação dos participantes que prestaram sua contribuição, respeitando-se, portanto, o direito de privacidade, conforme normas éticas.

2. Despesas decorrentes da participação no projeto de pesquisa

Os voluntários estarão isentos de qualquer despesa ou ressarcimento decorrente da participação voluntária neste projeto de pesquisa

Liberdade de consentimento

Os participantes estarão livres para negar a assinatura deste consentimento ou, ainda, para parar de participar em qualquer momento, se desejarem, sem que isso traga algum prejuízo.

4. Questionamentos

Os participantes terão acesso, a qualquer tempo, às informações sobre procedimentos relacionados a esta pesquisa. No caso de outros esclarecimentos que se fizerem necessários, informações adicionais poderão ser obtidas com os responsáveis pelo projeto.

V – PARA CONTATO EM CASO DE DÚVIDAS

VI – CONSENTIMENTO PÓS-ESCLARECIDO

Declaro que, após convenientemente esclarecido pelos pesquisadores e ter entendido o que me foi explicado, consinto em participar do presente Protocolo de Pesquisa.

Londrina, __________ de ________________________ de 2011.

____

Assinatura do participante

Pesquisadores:

____

Profa. Laís Maria Costa Pires de Oliveira

____

Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino

APÊNDICE B

OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO - 2012
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA
GRUPO DE ESTUDOS – CEP
COP - PROFESSORES QUE APRENDEM E ENSINAM MATEMÁTICA

RACIOCÍNIO PROPORCIONAL – PARTE 1 (03-07-2012)

GRUPO 1: Resolva estes problemas **mentalmente.** Use sua caneta ou lápis somente para registrar suas respostas e raciocínios.

1. Seis homens podem construir uma casa em 3 dias. Assumindo que todos os homens trabalham no mesmo ritmo, quantos homens seriam necessários para construir a casa em 1 dia?	
2. Se 6 chocolates custam R$ 0,93, quanto custam 22 chocolates?	
3. Entre eles, João e Marcos têm 32 bolas de gude. João tem 3 vezes a quantidade de bolas de gude de Marcos. Quantas bolas de gude cada um tem?	
4. Lucas pode podar o gramado do Sr. Roberto em 45 minutos. O irmão mais novo de Lucas leva o dobro do tempo para podar o mesmo gramado. Quanto tempo eles levarão para fazer o serviço se cada um tiver um cortador de grama e trabalharem juntos?	
5. Seis alunos tinham 20 minutos para limpar a sala de aula depois de uma "guerra de borracha". Eles ficaram com raiva e entregaram 3 outros amigos. A diretora juntou os amigos à equipe de limpeza e mudou o limite de tempo. Quanto tempo ela deu a eles para completar o serviço?	
6. Se um jogador de futebol pesa 92 kg, qual é o peso total dos 11 jogadores do time?	
7. Sandra quer comprar um aparelho de MP3 que custa R$ 210,00. Sua mãe concordou em pagar R$ 5,00 para cada R$ 2,00 que Sandra poupar para a compra. Com quanto cada uma contribuiu?	
8. Uma companhia envia normalmente 9 homens para instalar um sistema de segurança em um prédio comercial, e eles fazem o trabalho em cerca de 96 minutos. Hoje eles têm somente 3 homens para fazer o mesmo tipo de serviço. Quanto tempo eles devem programar para completar o	

trabalho?	
9. Uma motocicleta pode rodar por 10 minutos com R$ 1,30 de combustível. Quanto essa motocicleta poderá rodar com R$ 0,91 de combustível?	
10. A academia “Em forma” está hoje com uma razão de 150 alunos para 18 professores. Como o número de docentes deve ser ajustado para que a razão aluno por professor da academia seja de 15 para 1?	

APÊNDICE C

OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO - 2012
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA
COP - PROFESSORES QUE APRENDEM E ENSINAM MATEMÁTICA

RACIOCÍNIO PROPORCIONAL – PARTE 2 (31/07/2012)

GRUPO 2: Procure resolver estes problemas **mentalmente**, registrando o raciocínio que guiou suas respostas. Procure não aplicar regras ou propriedades do tipo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

PROBLEMAS	1ª. RESOLUÇÃO	2ª. RESOLUÇÃO (Após discussão)
1. Qual forma está mais próxima de um quadrado: um retângulo que mede 35cm x 39cm ou um retângulo que mede 22cm x 25cm?		
2. Duas engrenagens A e B estão dispostas de forma que os dentes de uma engrena com os dentes da outra. A engrenagem A gira no sentido horário e tem 54 dentes. A engrenagem B gira no sentido anti-horário e tem 36 dentes. Se a engrenagem A fizer 5,5 rotações, quantas voltas fará a engrenagem B?		
3. A Sra. Júlia prepara e vende suco de maçã com canela em sua lanchonete. No jarro A ela misturou 4 cubos de essência de canela com 3 cubos de essência de maçã com uma quantidade de água. No jarro B ela usou 3 cubos de essência de canela e 2 de sabor maçã, e a mesma quantidade de água. Se você pedir a ela para tomar o suco que tem o gosto mais forte de canela, de qual jarro ela deverá servir sua bebida?		
4. A mãe de Pedro pediu a ele para ir a sua mesa e pegar uma fotografia de seu pai junto com uma ampliação dela, mas quando Pedro entrou no escritório, ele encontrou cinco fotografias de seu pai, de vários tamanhos. Quais as duas fotografias que ela quer? a) 9 cm x 10 cm b) 10 cm x 12 cm c) 8 cm x 9,6 cm d) 6 cm x 8 cm e) 5 cm x 6,5 cm		
5. Qual é a razão de homens para mulheres em uma cidade onde $\frac{2}{3}$ dos homens são casados com $\frac{3}{4}$ das mulheres?		

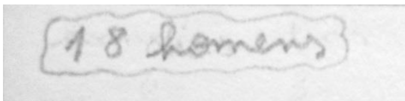
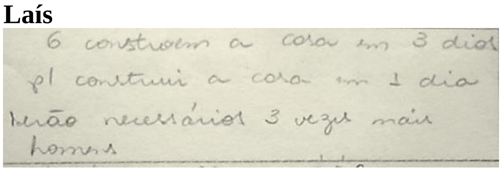
6. Em uma cafeteria, dois tipos de grãos são combinados e vendidos como a “mistura da casa”. Um dos grãos é vendido por R$ 8,00 o quilo e o outro por R$ 14,00 o quilo. O dono da loja mistura um lote de 50 quilos de cada vez e vende a “mistura da casa” por R$ 10,00 o quilo. Quantos quilos de cada tipo de café vão nessa mistura?		

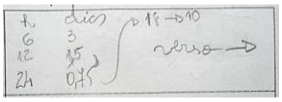
APÊNDICE D

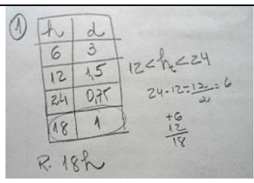
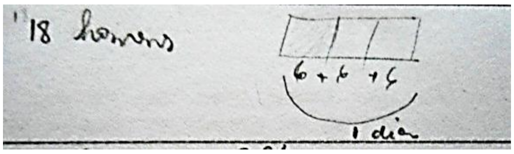
OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO - 2012
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA
GRUPO DE ESTUDOS – PARANAVAÍ
CoP PAEM – COMUNIDADE DE PRÁTICA DE PROFESSORES QUE APRENDEM E ENSINAM MATEMÁTICA

EMPREENDIMENTO ESTUDO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

Reflexão a respeito de aspectos do Raciocínio Proporcional na resolução de problemas na CoP-PAEM (Folha 2.1)

PROBLEMA 1: Seis homens podem construir uma casa em 3 dias. Assumindo que todos os homens trabalham no mesmo ritmo, quantos homens seriam necessários para construir a casa em 1 dia?	
ESTRATÉGIA 1: Identificar a relação de proporcionalidade entre as grandezas e aplicar a “regra de três”.	
REPRESENTAÇÃO ESCRITA E CONCLUSÃO/JUSTIFICATIVA	
Tina:  18 homens	**Tânia:** Isso, então, aí cada um vai tentar fazer, pensar um raciocínio, num esquema, tá e escrever... **Tina:** O duro é o esquema de, **Laís:** Você não fazer isso (a regra de três) **Tânia:** O esquema da regra de três não **Laís:** Você já vai direto **Tina:** Eu não sei como fazer isso sem fazer (a regra de três)... **Laís:** É mais forte que eu, eu não consigo... **Tina:** É, então, eu tô aqui segurando meu lápis! [...] **Tina:** É, foi mentalmente, mas aqui foi pensando na regra de três (risos), não adianta...
Laís  6 constroem a casa em 3 dias p/ construir a casa em 1 dia serão necessários 3 vezes mais homens	**Laís:** **E**u também não consegui não pensar em proporcionalidade, são 3 dias a menos, então, provavelmente... Precise de mais... **Tânia:** Entendi, precise de mais... **Laís:** Se eles aumentarem a quantidade...
ESTRATÉGIA 2: Construir uma tabela relacionando as grandezas envolvidas	
Iara:	

<table>
<tr><td colspan="2">

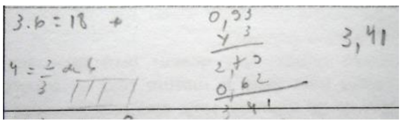
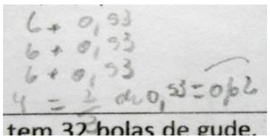

</td></tr>
<tr><td colspan="2">ESTRATÉGIA 3: Representar a situação com uma figura e relacionar as grandezas envolvidas usando frações</td></tr>
<tr><td>Bia:

</td><td>Bia: Eu pensei que cada dia correspondeu a $\frac{1}{3}$ do tempo que eles gastariam para fazer essa casa, se em cada dia eu precisava de 6, eu tinha 6 homens, então 6+6+6, 18...
Tânia: Cada dia esses 6 homens faziam $\frac{1}{3}$ da casa?
Bia: $\frac{1}{3}$ da casa
Tânia: Então, em um dia eles conseguem fazer $\frac{1}{3}$ da casa.
Bia: Isso, 6 homens
Tânia: Então, no outro dia mais $\frac{1}{3}$, e no outro dia mais $\frac{1}{3}$, mas como tem que acabar tudo (1 casa) no primeiro dia [...]
Bia: Em um dia
Tânia: Então, pra fazer esse outro terço precisa de mais 6 homens e pra fazer esse outro terço também precisa de mais 6 homens, então ... pra cada terço em cada dia é preciso 6 homens, [...] é uma forma de pensar [...] você tentar pensar no projeto como um todo, aí (dividir) em partes e tentar associar [...] cada dia 6 homens fazem $\frac{1}{3}$ da casa, então, pra poder fazer os outros dois terços(em apenas um dia) precisa de mais duas vezes 6 homens, então vão ser 3 vezes 6 que vai dar 18 [...]</td></tr>
</table>

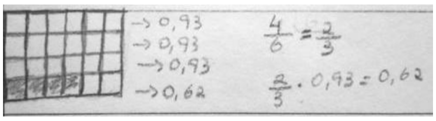
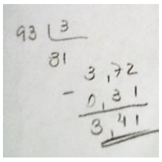
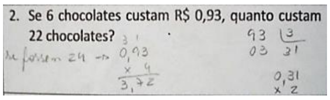
APÊNDICE E

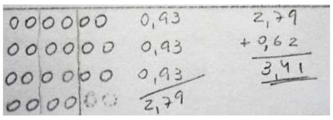
OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO - 2012
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA
GRUPO DE ESTUDOS – PARANAVAÍ
CoP-PAEM – COMUNIDADE DE PRÁTICA DE PROFESSORES QUE APRENDEM E ENSINAM MATEMÁTICA

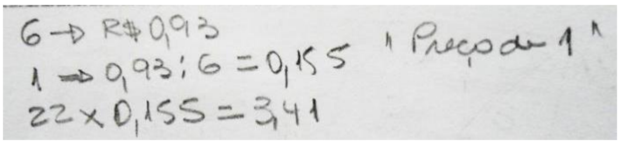
EMPREENDIMENTO ESTUDO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

Reflexão a respeito de aspectos do Raciocínio Proporcional na resolução de problemas na CoP-PAEM (Folha 2.2)

<table>
<tr><td colspan="2">PROBLEMA 2: Se 6 chocolates custam 0,93, quanto custam 22 chocolates?</td></tr>
<tr><td colspan="2">ESTRATÉGIA 1: Considerar o “pacote de 6 chocolates” como a UNIDADE</td></tr>
<tr><td>REPRESENTAÇÃO ESCRITA</td><td>CONCLUSÃO/JUSTIFICATIVA</td></tr>
<tr><td>Bia

</td><td>Tânia: Como que você pensou pra achar os 4?
Bia: Ah tá, então aqui eu tive 3 grupos de 6, que são 18, sobraram 4 chocolates (para completar os 22) que eu queria saber quanto custava, 4 num grupo de 6, são $\frac{4}{6}$, $\frac{4}{6}$ representam $\frac{2}{3}$, é uma fração equivalente a $\frac{2}{3}$ [...] eu calculei $\frac{2}{3}$ de R$ 0,93, que são R$ 0,62 e aí fiz a soma...</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Tina

</td>
<td>Tina: Pensando num desenho aqui, eu poderia fazer 6, colocar 6 barrinhas seriam 6 chocolates, é 93, aí depois colocar mais 6, 93 e depois [...]
Bia: Aí, chocolate você já tem 18
Tânia: 22... Você tem que achar o preço de mais 4
Tina: É, eu vou ter que dividir, não é? 0,93...
Bia: Mas você tem $\frac{4}{6}$
Tina: Bom, daí dá pra fazer divisão 4 por 6 aqui ... 4 dividido por 6, é isso?
Bia: Eu já simplifiquei, eu coloquei assim $\frac{4}{6}$ equivale a $\frac{2}{3}$
Tina: Aí divide 2 por 3
Bia: Eu calculei $\frac{2}{3}$ de R$ 0,93... né?
Tina: Você colocou em fração (registro fracionário), fica mais fácil... $\frac{4}{6}$ é igual a
Bia: Igual a $\frac{2}{3}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Laís
 

</td>
<td>Laís: Então, dessa vez eu fiz assim, eu pensei no total de chocolates que era 22, como tinha o preço de 6, então eu fui agrupando de 6 em 6 até chegar nos 24, mas aí passava [...] então eu, eu desenhei, fiz o desenho dos docinhos, e aí eu calculei quantos grupos inteiros de 6 dava, são três [...] o último grupo fica sobrando dois chocolates, então eu dividi em 3, calculei o preço de cada, a cada 2 chocolates [...]aí eu tirei do total [...] do total dos 24 e depois eu fiz de outro jeito também, eu, eu calculei a...pra menos, com os 22 mesmo...</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">ESTRATÉGIA 2: Considerar “1 chocolate” como a UNIDADE</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Ada

[...]
Ada: Eu achei um só.
Tânia: Ah você unitarizou, foi lá e pegou o preço de um só.
Ada: É, que é aproximadamente R$ 0,155, depois eu multipliquei por 22.
Tânia: Depois você continuou.
Ada: [...] se 10 vai dar 1,55; 20 vai dar 3,10, mas 22...vai dar 3,41
Tânia: Então você também pensou em fazer em 10, por que você pensou em fazer de 10? Se o pacotinho é de 6...?
Ada: Foi porque eu reduzi...
Tânia: Ah porque você achou de um aí depois você achou, ah entendi... Primeiro você achou 1, depois você achou 10, aí pensou 20, e aí mais 2 pra chegar lá...</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Iara

</td>
</tr>
</table>

APÊNDICE F

OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO - 2012
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA
GRUPO DE ESTUDOS – PARANAVAÍ
CoP-PAEM – COMUNIDADE DE PRÁTICA DE PROFESSORES QUE APRENDEM E ENSINAM MATEMÁTICA

RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

Por muito tempo, Raciocínio Proporcional tem sido um termo “guarda-chuva”, uma expressão polivalente que se refere a certas facilidades com conceitos e contextos do número racional. O termo é mal definido e os pesquisadores têm sido melhores em determinar quando um aluno ou um adulto *não* pensam proporcionalmente do que em definir as características de alguém que pensa. Sem objetivos de ensino apropriados, o ensino intencional desse tópico não era possível, e o Raciocínio Proporcional permaneceu como um subproduto indescritível do ensino de frações. Como o currículo dos anos iniciais prevê não mais do que um tratamento apressado das ideias de número racional, o desenvolvimento do Raciocínio Proporcional é deixado ao acaso. Desse modo, o fato de que muitos adultos não pensam proporcionalmente (mais de 90%) aponta evidências convincentes de que esse modo de pensar envolve mais do que um processo de desenvolvimento espontâneo e que o ensino deve desempenhar um papel ativo no seu desenvolvimento.

O Raciocínio Proporcional é um dos melhores indicadores de que um aluno atingiu a compreensão dos números racionais e os conceitos multiplicativos relaciodados a eles. Enquanto, por um lado, ele é o indicativo de que alguém compreende as ideias elementares da Matemática, por outro lado, é também parte da base de conceitos mais complexos.

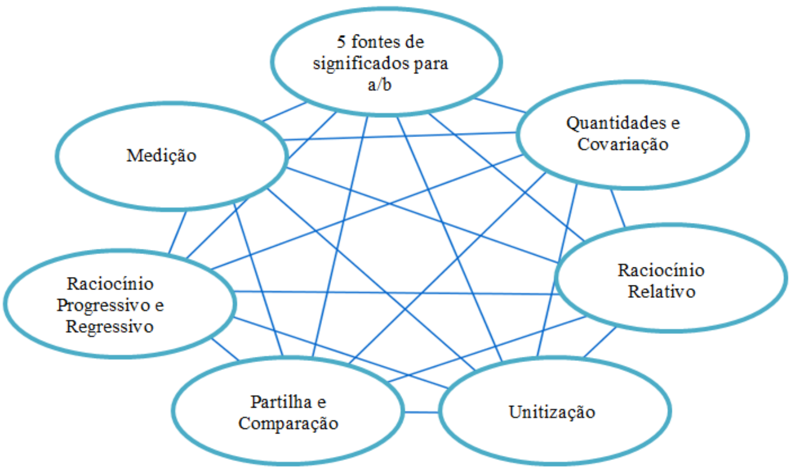
É importante distinguir Raciocínio Proporcional do conceito de proporcionalidade. Proporcionalidade é um conceito que desempenha importante papel em aplicações do domínio da Física e da Matemática mais avançada. O Raciocínio Proporcional é visto como um “pré-requisito” para a compreensão dos contextos e aplicações baseados em proporcionalidade.

Em nosso estudo a proposta é, além de analisar e resolver problemas que de algum modo envolvem o Raciocínio Proporcional, para ter uma ideia do que isso significa, estudar também as estruturas e instrumentos que podem ser usados para facilitar o seu desenvolvimento.

ESTRUTURAS CENTRAIS

Existem alguns temas que são universais na Matemática. Eles atravessam uma vasta extensão do currículo, direto para a fase universitária, quando os alunos estudam cálculo. Penso neles como estruturas centrais porque são muito importantes para o pensamento matemático em geral. Eles sustentam um sistema muito maior do que apenas a aprendizagem do número racional. São ideias sobrepostas – mas diferentes – que têm uma relação simbólica. O crescimento em um dos nós do diagrama a seguir tem repercussões nos outros nós. Essas ideias são centrais ainda em outro sentido. Elas são importantes para o modo como o pensamento matemático das crianças se desenvolve. Esses nós foram identificados não somente pelos estudos abstratos dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também através dos anos de pesquisa que estruturam o modo como as crianças pensam em situações reais em que esses conceitos entram em jogo.

Figura 1 - Rede Lamon 2012



Fonte: Lamon (2012, p. 10 tradução nossa)

Questões para resolver e analisar

1.	Antes a árvore A tinha 80 cm de altura e a árvore B tinha 1 m de altura. Agora a árvore A está com 1,40 m de altura e a árvore B está com 1,60 m de altura. Qual árvore cresceu mais?
2.	A limonada na jarra amarela foi feita com 3 limões e 5 copos de água. Na jarra verde a limonada foi feita com 5 limões e 7 copos de água. Se os limões e os copos são do mesmo tamanho, qual limonada ficou mais forte?
3.	Uma família tem em casa uma pessoa que usa cadeira de rodas e pretende construir uma rampa para facilitar o acesso à casa. Uma das portas da casa está a 50 cm do chão e a outra está a 30 cm do chão. Qual rampa será mais íngreme?

APÊNDICE G

ESTRUTURAS CENTRAIS DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

1. PENSAMENTO RELATIVO E MEDIÇÃO

Antes a árvore A tinha 80 cm de altura e a árvore B tinha 1 m de altura. Agora a árvore A está com 1,40 m de altura e a árvore B está com 1,60 de altura. Qual árvore cresceu mais?

A situação apresentada no problema do crescimento das árvores evidencia um dos mais importantes tipos de raciocínio exigidos para o Raciocínio Proporcional: a capacidade de analisar uma alteração, tanto em termos absolutos quanto em termos relativos.

Essa é a perspectiva mais básica que os alunos precisam adotar antes de poderem compreender frações. É essencial que eles sejam capazes de compreender as mudanças em duas perspectivas: crescimento real e crescimento relativo, ou mudança absoluta e mudança relativa. Importante destacar que não é que uma perspectiva está errada e a outra está certa. As duas perspectivas são úteis. A palavra “mais” tem dois significados diferentes, e é importante que as crianças se envolvam com as duas.

Pensamento relativo envolve mais abstração do que pensamento absoluto e, por meio do pensamento relativo, criamos quantidades mais complexas. Na era do computador, os alunos estão acostumados com uma avalanche de dados sensoriais; o conhecimento vem de dados baseados na percepção. No entanto, em Matemática, o conhecimento geralmente consiste em compreender abstrações impostas aos dados sensoriais. Essa abstração é muito mais uma concepção do que uma percepção.

Por exemplo, tente pensar nas seguintes situações:

- Imagine 5 pessoas em um elevador para 8 pessoas.
- Agora imagine as mesmas 5 pessoas em um estádio de futebol.
- Agora imagine as mesmas 5 pessoas em um carro esportivo com 2 assentos.

Cada situação deve ter dado a você uma impressão diferente sobre "aglomeração". Você pensou nas mesmas cinco pessoas de cada vez; entretanto, cada situação provocou você a rever sua concepção de quanto espaço cada pessoa ocuparia naquela área. Sua comparação mental resultou em uma nova quantidade, a densidade, e em um método para medir isso, a comparação de duas quantidades.

1.1. Pensamento Relativo e a Compreensão das Frações

Pensamento relativo é fundamental no ensino inicial das frações, pois está vinculado à compreensão de diversas noções importantes, que incluem o seguinte:

- A relação entre o tamanho das partes e o número de partes.
- A necessidade de comparar frações relativas a uma mesma unidade.
- O significado do número fracionário em cada situação. Três partes de cinco subdivisões de algo transmitem a noção de quanto, da mesma forma que o exemplo anterior transmite a noção de aglomeração.
- O tamanho de um número fracionário.
- A relação entre frações equivalentes. O numeral 3/5, por exemplo, representa a mesma quantidade relativa, mesmo quando cada parte da unidade é dividida novamente em 4 partes (12/20) ou em 2 partes (6/10).

1.2. A Importância da Medição

A medição está no coração da atividade humana; humanos sempre estão preocupados em medir seu universo, e unidades e métodos de medição são essenciais para a ciência. Medir é um ponto de partida para os matemáticos. Quando estudamos números inteiros, o ato de medir ocorre de uma forma simples, pela contagem de objetos discretos. Entretanto, quando os alunos começam a estudar os números racionais positivos, a ênfase muda para a medida de quantidades contínuas.

Quando falamos sobre a compreensão das crianças, é importante levar em conta a distinção entre o ato de medir e a medição. O que queremos dizer é que, mesmo quando as crianças já são capazes de realizar medidas e utilizar instrumentos de medir, isso não garante que elas tenham aprendido os princípios da medição.

Isso tem implicações importantes na aprendizagem dos conceitos do número racional e no desenvolvimento do raciocínio multiplicativo, uma vez que algumas interpretações do número racional podem ser concebidas como medida:

- ✓ Uma fração mede a relação multiplicativa de uma parte com o todo ao qual ela pertence.
- ✓ Uma razão mede grandezas relativas.
- ✓ Um taxa, como a velocidade, é uma quantificação do movimento.
- ✓ Um quociente é uma medida de quanto 1 pessoa recebe quando **m** pessoas partilham **n** objetos.
- ✓ Um operador é a medida de alguma mudança em uma quantidade em relação a um estado anterior.
- ✓ Como uma medida, um número racional quantifica diretamente uma qualidade, tal como comprimento ou área.

Da mesma forma, é possível conceber qualquer medida como uma razão. Por exemplo: usando a unidade padrão metro, encontramos a medida do comprimento de uma sala como sendo 6 m. Esse resultado é uma forma de dizer qual é o comprimento da sala quando comparado com 1 m. Em geral não explicitamos essa comparação, mas a medida de 6 metros realmente significa $\frac{6\ metros}{1\ metro}$.

- ✓ Um desconto de 10% é uma medida de quanto você poderá economizar.
- ✓ 5 quilômetros por hora (5/1) é uma medida de até onde você poderá ir em 1 hora.
- ✓ ¼ é uma medida de quanto de um chocolate você recebe quando divide com mais 3 amigos.

Todas essas conexões sugerem que compreender a medição é um empreendimento complexo e que não acontece em um curto período de tempo, mas somente com os anos de experiência. Isso porque a compreensão da medição envolve uma compreensão mais profunda de três princípios maiores: o princípio compensatório, o princípio da aproximação e o princípio da partição recursiva.

- O Princípio Compensatório

Este princípio estabelece que quanto menor for a unidade de medida, maior será a quantidade de unidades necessárias para medir algo. Do mesmo modo, quanto maior for a unidade de medida usada, menor a quantidade de unidades necessária para expressar o mesmo valor.

- O Princípio da Aproximação

Uma medição é sempre aproximada, isto é, podemos realizar o processo de medição com qualquer grau de precisão exigido pelo trabalho em questão, e decisão sobre quão precisa deve ser a medição geralmente é feita no contexto e de acordo com os instumentos disponíveis. No entanto, compreender o princípio da aproximação significa mais do que saber e afirmar que uma medição é uma aproximação. É preciso que os alunos tenham experiências suficientes e em diferentes contextos para que possam saber: quando é necessário mais ou menos precisão; como proceder para obter a precisão necessária e também quando parar de refinar a medição.

- Princípio da Partição Recursiva

Pode-se fazer qualquer medição tão precisa quanto necessário, quebrando a unidade de medida em subunidades cada vez menores e de igual tamanho. Ao fazer isso, as frações entram em jogo. Existe um infinito número de frações entre qualquer par de frações, não importa quão perto elas estejam. Esta propriedade é geralmente referida como a **densidade dos números racionais**, que permite a aproximação cada vez maior de uma medição. Essa é uma ideia poderosa que tem implicações para a matemática superior. Por exemplo, a ideia de ficar tão perto quanto você queira está no coração do cálculo. É por meio da partição recursiva que se pode obter o nível de precisão desejado numa medição.

1.3. Medição de Qualidades mais Abstratas

Até o final do Ensino Fundamental, os alunos certamente irão se deparar com atributos tais como velocidade, inclinação e densidade. Esses atributos são excessivamente difíceis para eles, pois, nos anos iniciais de sua aprendizagem matemática, eles não são se envolvem em situações de medição cuja quantificação requer mais do que simples contagem e medidas. Parte da compreensão de medição é também saber quando contar e fazer medições diretas é inadequado.

Por exemplo, a maioria dos alunos nunca pensou em como se mede a concentração de uma bebida ou a lotação de um elevador. Essas são características que não podem ser medidas directamente. Isto é, a sua medida é uma nova quantidade que é formada por uma relação entre duas outras quantidades.

Os alunos precisam de tempo para analisar tais características como intensidade de cor, acidez e concentração de uma bebida ou lotação em um elevador, e se envolverem em argumentação e justificação sobre como medir essas qualidades.

Medições dessa natureza envolvem comparações entre grandezas e remetem ao uso das razões e taxas para expressar os resultados. Entretanto, essas medições não podem ser reduzidas unicamente à obtenção desses resultados. Antes é preciso explorar, compreender e interpretar situações e contextos que evidenciem essas relações.

2. QUANTIDADES E COVARIAÇÃO

O cotidiano das crianças está repleto de situações em que elas lidam com quantidades e algumas relações entre elas e com quantidades que variam juntas (covariação), o que lhes confere um bom conhecimento informal sobre essas questões.

No entando, quando falamos com nossos alunos sobre quantidades e variação em qualquer nível de ensino, eles têm dificuldade em saber onde colocar seu foco e como se expressar a respeito. O que ocorre é que esse é mais um tema pouco explorado nos anos iniciais.

Nesta discussão pretende-se evidenciar duas mensagens importantes:

- A primeira é que as crianças tem uma boa dose de experiência e conhecimento intuitivo sobre quantidades e variação; e, sempre que possível, vale a pena partir deles para explorar outros conhecimentos.
- A segunda é que muitas formas poderosas de pensar sobre essas questões envolvem situações visuais ou verbais. Isso significa que implementar atividades dessa natureza com nossos alunos não exige incluir novos recursos ou materiais; é possível abordar o tema e alguns dos principais obstáculos a partir de todas as atividades matemáticas já desenvolvidas na sala de aula.

2.1. Quantidades não quantificadas

Uma quantidade é uma qualidade mensurável de um objeto – quer essa qualidade esteja quantificada ou não. Por exemplo, você pode comparar as alturas de duas pessoas de sua família sem ter que medi-las. Quando uma está em pé ao lado ou perto da outra outra, você pode dizer quem é mais alta. Relacionar quantidades que não estão quantificadas é um tipo importante de raciocínio. Vejamos mais alguns exemplos:

- Ontem você dividiu alguns biscoitos com alguns amigos. Hoje você vai dividir menos biscoitos com mais amigos. Vocês irão receber mais, menos ou a mesma quantidade que receberam ontem?

Naturalmente, você sabe que todos irão receber menos hoje. Mesmo que o número de pessoas e o número de biscoitos não tenham sido quantificados, você pode responder essa questão sem problemas.

Agora tente pensar sobre as razões (de ontem e de hoje) entre o número de biscoitos e o número de pessoas. O que você pode dizer sobre elas?

- Hoje menos pessoas vão dividir mais biscoitos.

Novamente, você pode dizer que hoje todos irão receber mais do que receberam ontem.

- Agora suponha que hoje mais pessoas irão dividir mais biscoitos. O que se pode dizer a respeito dessa situação?

Você pode pensar em outras situações em que a resposta não pode ser determinada?

Esse tipo de raciocínio é fácil para as crianças porque pode ser construído sobre seu próprio conhecimento e experiência. Além disso, é possível explorar um pouco mais essa situação, usando uma tabela que você pode tentar preencher.

Mudança na quantidade de biscoitos por pessoa			
	Mudança no número de pessoas		
Mudança no número de biscoitos	**+**	**-**	**0**
+			
-			
0			

Isso pode se tornar uma forma muito útil de pensar em muitas situações!
O processo de analisar o que muda assim como o que não muda é extremamente útil em Matemática, bem como na vida diária. Ele nos permite elaborar raciocínios mais profundos do que somente observar as informações óbvias e superficiais.

2.2. Características Quantificáveis

Antes de lidar com números racionais simbolicamente, é importante conseguir que as crianças discutam as relações entre quantidades em situações do mundo real. O estudo das relações começa sobre um nível visual e pode ser esclarecido e ampliado à medida que as crianças desenvolvem um vocabulário, falam sobre aquelas relações e as analisa. Analisar relações visualmente e verbalmente também ensina as crianças a irem além das observações óbvias e superfíciais e a pensarem melhor sobre por que as coisas funcionam de uma dada maneira. É importante que o pensar sobre as relações ocorra muito antes do ensino simbólico para que as crianças aprendam que há muito mais para ver e fazer quando elas primeiro confrontam uma situação, do que somente extrair os números e operar cegamente com eles. Mesmo antes de desafiarmos as crianças para pensar sobre as relações entre quantidades, isso é importante para garantir que elas tenham um sentido do que é uma quantidade.

Nas salas de aula, observa-se que algumas crianças não focam necessariamente sobre as quantidades quando elas leem um problema. Para identificar quais aspectos de uma situação elas observam, uma pesquisadora propôs a um grupo de alunos do Ensino Fundamental pensar sobre essa situação:

Você parte da frente de sua casa e pedala sua bicicleta descendo a rua. O que muda?

Houve várias respostas diferentes, e dentre elas destacam-se:

- As árvores passam.
- Eu me afasto da frente da minha casa.
- Os pedais da minha bicicleta sobem e descem.
- As rodas giram.
- Eu vou para a casa do meu amigo.

Pelas respostas, observa-se que os alunos precisam de mais direcionamento para ajudá-los a focar sobre características quantificáveis. Então a pesquisadora pediu a eles para pensar em mudanças que poderiam ser medidas, e obteve as respostas:

- Quão longe eu estou de minha casa.
- Quão rápido e quão lento meu pé sai do chão.
- Quão rápido eu vou.
- Quanto de calçada uma roda percorre quando gira uma vez.
- Quanto tempo leva para chegar à casa do meu amigo.

A partir dessas respostas, foi possível falar sobre quantidades como circunferência, velocidade, distância e tempo. Mais uma vez fica claro que não se pode assumir que os alunos sabem sobre o que estamos falando, e é sempre necessário confirmar para ver o que eles estão pensando sobre o que falamos.

Olhando superficialmente, parece que um professor não teria dificuldades em discutir essas situações com as crianças, mas, na realidade, isso acaba por ser difícil. A razão é que as crianças (e muitos adultos também) têm dificuldade em distinguir uma quantidade (uma característica mensurável) de uma descrição física.

O fato é que somente pedir para as crianças descreverem uma imagem ou situação não irá promover raciocínio quantitativo. Mesmo quando elas não tentam fazer alguma medida, discutir quantidades envolve saber o que são características mensuráveis. Observar a distinção entre descrição e identificação de quantidade é um passo necessário para matematizar uma situação-problema. Qualquer um pode olhar a imagem e ver que o gigante é mais alto que João. Medir as alturas dos dois personagens usa a Matemática para provar a afirmação.

2.3. Discutir Relações Proporcionais em Figuras

Nossa primeira compreensão de proporção ocorre em um nível visual mesmo antes de aprendermos a falar. Nós dependemos de dados visuais para obter nossas informações sobre coisas, tais como escala, grau de fidelidade dos modelos, perspectiva, e assim por diante. Durante os primeiros anos, nós podemos ajudar as crianças a construirem este conhecimento intuitivo, tornando-o mais explícito e aberto à análise. Podemos usar figuras para ajudar os alunos a desenvolverem o vocabulário para pensar e falar sobre proporções. As discussões em sala de aula também precisam tratar ideias, tais como esticar, encolher, ampliar, distorcer, estar em proporção, estar fora de proporção, e estar desenhado em escala.

Nós usamos a palavra proporção de várias formas diferentes, e é importante que os alunos compreendam todos esses usos. Por exemplo, em algumas tarefas, "Que proporção da turma é de mulheres?", o que se questiona de fato é que fração ou parte da turma é de mulheres? Dizer que o número de casos de uma doença atingiu proporções de epidemia significa somente que ele aumentou muito.

Existem diversos tipos de comparações que podemos usar para ajudar os alunos a construirem a linguagem das proporções bem antes de eles se depararem com os símbolos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

A primeira compara a figura de um objeto com algo externo, em geral o objeto real. Quando dizemos que o objeto está desenhado em proporção, queremos dizer que há uma relação entre o objeto real e o desenho daquele objeto, tal que para todas as dimensões do objeto correspondente, as razões entre o tamanho do desenho e o tamanho real são iguais. Se uma pessoa real tem 180 cm de altura e seus braços medem 58 cm de comprimento e em uma fotografia a pessoa está com 100 cm, então seus braços não podem ter os mesmos 58 cm de comprimento na fotografia. Tecnicamente falando, para estar em proporção, a comparação entre todos as medidas da pessoa real e todas as medidas correspondentes na fotografia devem ser as mesmas.

Proporções desempenham um importante papel nas caricaturas. Veja as imagens de algumas personalidades:



Fonte: http://fottus.com/desenhos/caricaturas/

O que podemos dizer sobre as imagens dessas pessoas?

Elas estão desenhadas em proporção?

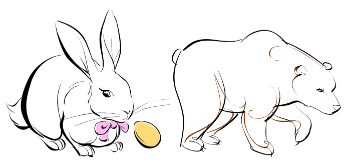
Por que o artista pode ter desenhado certas características fora de proporção?

O que o artista estava tentando comunicar com essas distorções?

Um segundo e importante sentido da palavra se refere às relações entre as proporções internas de um único objeto. Por exemplo, suponha que você seja desafiado a fazer um julgamento das proporções desse retângulo.

Isso significa verificar a forma como as dimensões do retângulo se relacionam umas com as outras. Sem fazer qualquer medição, você poderá tomar a largura do retângulo e visualmente compará-la com o comprimento, fazendo o julgamento de que são necessárias 4 larguras para obter o comprimento. Você pode dizer que o lado maior do retângulo é cerca de 4 vezes mais longo que o lado menor. Ou ainda, você pode dizer que a razão entre a largura e o comprimento do retângulo é de 1:4.

Outra questão importante é estimular as crianças a falarem sobre diferentes objetos e seus tamanhos relativos um ao outro. Quando as crianças vão para escola, elas já têm um senso de proporção bem desenvolvido. Por exemplo, as crianças não são enganadas pela justaposição de dois desenhos, tais como aqueles do coelho e do urso mostrados a seguir. Elas sabem que o tamanho dos animais não são seus tamanhos reais, nem os desenhos retratam seus tamanhos relativos. As crianças compreendem implicitamente que cada desenho em si é um modelo fiel do animal que representa, mas colocados juntos, o par de desenhos não é representativo de uma cena na qual os animais reais são colocados um ao lado do outro. As primeiras explicações das crianças para isso pode ser "um foi mais encolhido que o outro" ou simplesmente "não parece estar certo esse desenho". Novamente é uma questão de desenvolver algum vocabulário com o qual os alunos possam pensar e se comunicar sobre as proporções. O tamanho dos dois animais foi reduzido, mas foram desenhados em escalas diferentes.



- A figura do urso está desenhada em uma escala menor do que a de um urso real.
- A figura do coelho está desenhada em uma escala menor do que a de um coelho real.
- O urso e o coelho não estão em proporção relativa um ao outro.

Computadores tornam muito fácil a introdução de escalas. Uma imagem em que dois itens estão desenhados numa proporção correta em relação um ao outro pode ser alterada pelo encolhimento de cada item com um fator diferente para produzir diferentes efeitos. Mostradores numéricos para comprimento absoluto, comprimento relativo e para razão, podem ajudar as crianças não somente com a linguagem das mudanças, mas também para obterem uma compreensão profunda dos termos através de suas próprias experimentações sobre redimensionamento de imagens.

2.4. Visualizar, Verbalizar e Simbolizar Relações Mutáveis

Parte da preparação para o Raciocínio Proporcional posterior é ajudar as crianças a desenvolverem habilidades para olhar para uma situação, discernir as características quantificáveis importantes, observar se as quantidades estão mudando ou não naquela situação, e, se estiverem, observar as direções das mudanças em relação umas às outras.

É útil que os alunos façam apontamentos verbais sobre relações mutáveis e usem setas para observar a direção da mudança de cada quantidade. Eu tenho observado que as crianças têm uma tendência de não pensar muito cuidadosamente sobre a maneira como as quantidades variam em relação umas às outras. As crianças têm uma tendência a acreditar que duas quantidades aumentam ou diminuem juntas. Exigir um apontamento verbal sobre a situação faz com que eles se concentrem mais cuidadosamente sobre as quantidades, enquanto a notação de setas servirá mais tarde como um lembrete para raciocinar para cima ou raciocinar para baixo.

- Por exemplo, nós podemos mostrar uma figura de uma criança assistindo um balão subir no céu.

A figura é estática, mas, a partir de suas experiências passadas, os alunos podem imaginar o tipo de mudança que ocorre nessa situação. O balão se move para mais longe e mais alto no céu e, à medida que se afasta de nós, parece menor em tamanho.

Quais quantidades estão mudando? Altura do balão, o tamanho aparente do balão.
Apontamentos verbais das relações quantitativas: quanto mais alto o balão flutua no céu, menor ele parece.
Notação de setas: altura do balão $\uparrow$ tamanho aparente $\downarrow$

- Nós temos o desenho de três crianças com barras de doces. Duas outras crianças estão em pé e próximas às outras. O título da figura é Dividindo doces.

Quais quantidades estão mudando? O número de crianças e a quantidade de doces por criança.
Apontamentos verbais: quanto mais crianças para dividir, menos doces haverá para cada criança.
Notação de setas: número de crianças $\uparrow$ quantidade de doces por criança $\downarrow$

Em tempo, os alunos rapidamente adotam o hábito de se referir a situações aumenta-aumenta, situações aumenta-diminui, situações diminui-aumenta e assim por diante. Depois, essa linguagem e notação podem ser ampliadas para ideias mais poderosas, e as categorias podem ser refinadas, por exemplo, todas as situações aumenta-aumenta não são o mesmo.

As situações do balão e das barras de doces envolvem covariação. Isso significa que quantidades relacionadas estão mudando juntas. Naturalmente, isso nem sempre quer dizer que quantidades variáveis estão relacionadas.

- Ontem no treino de futebol, João conseguiu marcar 3 gols das 10 tentativas que fez. Qual será a situação de João depois de 3 dias de treino?

Não faria muito sentido chamar isso de uma situação aumenta-aumenta, e os alunos precisam ser lembrados para usar sua experiência e senso comum para distinguir aquelas quantidades que partilham uma relação daquelas em que isso não acontece.

APÊNDICE H

OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO - 2012
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA
CoP-PAEM

QUADRO RESUMO DAS DIFERENTES INTERPRETAÇÕES DA FRAÇÃO

INTERPRETAÇÃO DA FRAÇÃO	SIGNIFICADO	SITUAÇÃO COM TODO DISCRETO	SITUAÇÃO COM TODO CONTÍNUO	
Parte-todo / Medida	Representação de uma quantidade ou medida que é uma parte ou partes de uma unidade (todo, inteiro) que foi dividida em partes iguais. Obs.: Deve-se ficar atento às diferentes possibilidades para a "unidade".	Um pacote de biscoitos contém 24 biscoitos de chocolate e 12 biscoitos de baunilha, todos do mesmo tamanho. Que parte do pacote de biscoitos é de chocolate?	Um bolo foi dividido em pedaços iguais para serem vendidos na cantina da escola. Até agora foram vendidos 12 pedaços, o que representa $\frac{1}{3}$ do bolo. Quantos pedaços havia no bolo inteiro?	
Operador	Refere-se ao número racional como uma função que transforma a unidade/todo/conjunto a que se aplica. Segundo Behr et al. (1983, p. 96), esse subconstruto impõe ao número racional p/q uma interpretação algébrica, significando uma função que, quando aplicada em figuras geométricas, transforma-as em figuras semelhantes, e, quando aplicada a um conjunto discreto, atua como um multiplicador–divisor.	Maria e Elisa concordaram que 3 barrinhas de chocolate poderiam ser trocadas por 4 chicletes de maneira justa. Se Elisa der 42 chocolates para sua colega, quantos chicletes ela ganhará em troca?	Você reduz uma figura para 80% de seu tamanho original e mais tarde percebe que deveria ter aumentado a figura em 20% e não diminuído 20%. Sabendo que você não dispõe mais da figura original em mãos, o que deve ser feito para que a figura reduzida a 80% seja ampliada à 120% com relação a figura original?	

Quociente	Representa a solução para uma situação de divisão. Desse modo podemos considerar duas interpretações: **Partição:** Refere-se a situações em que um número de objetos precisa ser repartido igualmente num certo número de grupos. O quociente indica o "tamanho" do grupo. **Quotização:** Quando o quociente representa "quantas vezes uma parte cabe dentro da outra".	Três pacotes contendo 30 balas cada um, serão distribuídos para 5 crianças. Que parte das balas cada criança receberá? Quantas balas isso representa? Uma caixa contém 150 pacotes de miçangas. Para fazer uma pulseira, utiliza-se $\frac{2}{3}$ de um pacote. Quantas pulseiras podem ser feitas com uma caixa?	Três barras de chocolate foram divididas igualmente para preparar 5 receitas de mousse. Quanto de chocolate será usado em cada receita? Para um trabalho de artesanato, será preciso cortar pedaços de tecido de $\frac{3}{4}$ de metro. Quantos pedaços será possível obter com 5 metros de tecido?	
Razão	O número racional indica a relação expressa entre duas quantidades de uma mesma espécie, quando essa relação não pode ser expressa por um único número.	Se um jogador de basquete encesta uma bola a cada duas tentativas num jogo e se no outro jogo ele encesta uma bola em cada quatro tentativas, qual a fração que representa o desempenho do jogador nos dois jogos?	Geraldo recebe, como salário base, 60 reais mais 5% de comissão. Em uma semana que suas vendas somaram 600 reais, qual a razão entre seu salário base e sua comissão?	
Taxa	O número racional indica a definição de uma nova quantidade como uma relação entre duas outras quantidades que não necessariamente são da mesma espécie.	Um corredor faz um percurso de 16 km a uma velocidade de 3,5 km por hora. Se ele dobrar o tempo de percurso, o que acontece com a velocidade?	$\frac{1}{2}$ do cereal "dulce" é açúcar. $\frac{1}{4}$ do cereal "leve" é açúcar. Se misturarmos porções iguais de ambos os cereais, que fração dessa mistura é de açúcar?	