Universidade Estadual de Londrina

CAMILA FOGAÇA DE OLIVEIRA

MODELAGEM MATEMÁTICA DO CRESCIMENTO POPULACIONAL:

UM OLHAR À LUZ DA SOCIOEPISTEMOLOGIA

Londrina
2011

CAMILA FOGAÇA DE OLIVEIRA

MODELAGEM MATEMÁTICA DO CRESCIMENTO POPULACIONAL:

UM OLHAR À LUZ DA SOCIOEPISTEMOLOGIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina como requisito para obtenção do Título de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2011

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

O48m Oliveira, Camila Fogaça de.
Modelagem matemática do crescimento populacional : um olhar à luz da socioepistemologia / Camila Fogaça de Oliveira. – Londrina, 2011.
139 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2011.
Inclui bibliografia.

1. Educação matemática – Teses. 2. Previsão demográfica – Modelos matemáticos – Teses. 3. Epistemologia social – Teses. 4. Modelos matemáticos – Teses. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

CAMILA FOGAÇA DE OLIVEIRA

MODELAGEM MATEMÁTICA DO CRESCIMENTO POPULACIONAL:

UM OLHAR À LUZ DA SOCIOEPISTEMOLOGIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina como requisito para obtenção do Título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
UEL – Londrina - PR

Profa. Dra. Eleni Bisognin
Centro Universitário Franciscano

Profa. Dra. Elaine Cristina Ferruzzi
UTFPR – Londrina - PR

Profa. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini
UEL – Londrina - PR

Londrina, 08 de julho de 2011.

À todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço de antemão a todos que de alguma forma passaram pela minha vida e contribuíram para a elaboração desta dissertação. Em particular, agradeço a algumas pessoas pela contribuição direta na construção deste trabalho.

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus por ter me permitido concluir este trabalho da melhor maneira possível, por me iluminar mesmo quando as ideias não pareciam ser claras, por me dar forças para não abandonar meus sonhos.

Agradeço de forma especial a minha família pela compreensão, pelas palavras de incentivo e por estarem sempre ao meu lado. E, ao meu namorado, por compartilhar comigo tantos momentos felizes e demonstrar tanto carinho durante a realização desta dissertação.

Agradeço a minha orientadora Lourdes Maria Werle de Almeida, por ter me dado a oportunidade de trabalhar durante esses dois anos do curso de mestrado, por compartilhar de sua experiência e de seus conhecimentos, pelo apoio e pela paciência por todas as horas de orientação que tornaram possível a conclusão deste trabalho.

Agradeço as professoras Elaine Cristina Ferruzzi, Regina Célia Guapo Pasquini e Eleni Bisognin pelas sugestões e críticas apresentadas para o aprimoramento deste trabalho.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Finalmente, agradeço a todos os meus amigos, tanto aqueles que construí durante o curso de graduação e de mestrado, como aqueles que permaneceram comigo com toda a distância provocada por este curso. Em particular, agradeço aos amigos do Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT) pelos momentos agradáveis que me foram permitidos passar durante esses dois anos de curso.

"Por que eu não deveria dizer que o que chamamos de matemática é uma família de atividades com uma família de propósitos?"
Ludwig Wittgenstein (1889-1951)

OLIVEIRA, Camila Fogaça de. **Modelagem matemática do crescimento populacional:** um olhar à luz da socioepistemologia. 2011. 139 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

RESUMO

Esta pesquisa teve o objetivo de investigar a modelagem matemática do crescimento populacional e as práticas sociais e matemáticas associadas a esta modelagem. Para este propósito, uma perspectiva teórica chamada de Socioepistemologia foi adotada, investigando as componentes didática, epistemológica e social. Em termos gerais, no que se refere a componente epistemológica, consideramos que as matemáticas se constituíram em diferentes práticas sociais, as quais propiciaram a construção de conhecimentos. No que se refere a componente didática, verificamos a existência de diferentes práticas: algumas relacionadas aos autores dos livros didáticos e outras relacionadas aos alunos quando envolvidos em atividades de Modelagem Matemática. Concluímos que as práticas dos alunos, quer do ponto de vista matemático, quer do ponto de vista social, mostram semelhanças entre as práticas dos autores de crescimento populacional do final do século XVIII e início do século XIX. Sendo assim, os significados se encontram no uso da linguagem e não estão determinados previamente, conforme abordado por Wittgenstein, mas encontram sua origem na atividade humana, por meio da interação entre indivíduos.

Palavras-chave: Educação matemática. Modelagem matemática. Perspectiva socioepistemológica. Crescimento populacional.

OLIVEIRA, Camila Fogaça de. **Mathematical modelling of the population growth:** a look under socioepistemological perspective. 2011. 139 p. Dissertation (Master's degree in Teaching of Science and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

ABSTRACT

This research had the objective to investigate the mathematical modelling of the population growth and its social and mathematical practices related to this modelling. For this purpose, a theoretical perspective called Socioepistemology was adopted, investigating the didactical, epistemological and social components. In general, concerning the epistemological component, we considered that the mathematical were constituted in different social practices, which propitiated the knowledge construction. Regarding the didactical component, we verified the existence of different practices: some related to the authors of didactical books and others related to the students when involved with Mathematical Modelling activities. We concluded that the students's practices, whether from the mathematical viewpoint or from social viewpoint, show similarities between the authors' practices of the population growth of the end of XVIII century and the beginning of the XIX century. This results that the meanings are in the use of the language and are not previously determined, as presented by Wittgenstein, but that they find its origin in the human activity by the interaction among the individuals.

Keywords: Mathematics education. Mathematical modeling. Socioepistemological perspective. Population growth.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 Componentes da perspectiva socioepistemológica (adaptado de HERNÁNDEZ; ARRIETA, 2005, p.538). 22

Figura 2.2 Relação entre ferramentas matemáticas e práticas sociais (adaptado de HERNÁNDEZ; ARRIETA, 2005, p.537). 24

Figura 2.3 As esferas do saber. 26

Figura 2.4 Tensão no campo das matemáticas (adaptado de ARRIETA, 2003, p.96). 27

Figura 3.1 Etapas sugeridas para se realizar um processo de Modelagem Matemática. 31

Figura 3.2 Modelagem Matemática na Educação Matemática 32

Figura 4.1 Representação Gráfica da Teoria Malthusina. 48

Figura 4.2 Modelagem Matemática para o modelo de Malthus 53

Figura 4.3 Curva logística representada por Verhulst em 1845. 61

Figura 4.4 Nascimentos e mortes na Bélgica, depois de 1 de janeiro de 1803, até 31 de dezembro de 1842. 64

Figura 4.5 O progresso da população, na Bélgica, depois de 1 de janeiro de 1815 até 1 de janeiro de 1845. 71

Figura 4.6 Modelagem Matemática para o modelo de Verhulst em 1847. 72

Figura 4.7 Comparação da evolução da população belga na primeira memória (p(t)’, assíntota A’=6.6) e na segunda memória (p(t)”, assíntota A”=9.44). 73

Figura 4.8 Comparação dos modelos de crescimento populacional abordadas. 75

Figura 4.9 Crescimento exponencial: y em função de t para $\frac{dy}{dt}=ry$ 79

Figura 4.10 Gráfico de $f(y)$ em função de y para $\frac{dy}{dt}=r\left(1-\frac{y}{k}\right)y$ 80

Figura 4.11 Crescimento logístico: gráfico de y em função de t para $\frac{dy}{dt}=r\left(1-\frac{y}{k}\right)y$ 80

Figura 4.12 Problemas 15 e 16 da seção 2.5. 82

Figura 4.13 Problemas 22 a 24 da seção 2.5. 83

Figura 4.14 Problemas 1 a 3 da seção 3.1. 85

Figura 4.15 Gráficos da função logística. 87

Figura 4.16 Problemas 1 a 4 da seção 3.2. 89

Figura 4.17 Esquema do tratamento escolar sobre Dinâmica Populacional. 91
Figura 4.18 Censos Demográficos do Brasil de 1940 a 1991. 94
Figura 4.19 Soluções do modelo de Gompertz. 98
Figura 4.20 Projeto – Modelo de Gompertz para a população brasileira. 98
Figura 4.21 Evolução da população de Londrina. 101
Figura 4.22 População de Londrina. 102
Figura 4.23 Curva de Tendência. 102
Figura 4.24 População de Londrina a partir de 1970. 103
Figura 4.25 Curva de Tendência. 103
Figura 4.26 População de Londrina entre 1935 e 1970. 104
Figura 4.27 Curva de Tendência. 104
Figura 4.28 Dados obtidos. 106
Figura 4.29 Variáveis do problema. 106
Figura 4.30 Sequências P_n e P_{n+1} 107
Figura 4.31 Tendência dos dados 107
Figura 4.32 Ajuste linear 107
Figura 4.33 Diferença entre P^* e P_n 108
Figura 4.34 Tendência dos dados 108
Figura 4.35 População brasileira em função do tempo. 109
Figura 4.36 População real e população estimada. 109
Figura 4.37 População real e população estimada. 110
Figura A.1 Problema colocado por Jacob Bernoulli em 1695 125

LISTA DE QUADROS

Quadro 4.1 Introdução do capítulo 2 - Equações Diferenciais de Primeira Ordem, apresentado por W. E. Boyce e R. C. DiPrima... 77

Quadro 4.2 Discussão do crescimento exponencial proposto por Malthus e apresentado por W. E. Boyce e R. C. DiPrima... 78

Quadro 4.2 Discussão do crescimento exponencial proposto por Malthus e apresentado por W. E. Boyce e R. C. DiPrima. (continuação)....................... 79

Quadro 4.3 Discussão do crescimento populacional proposto por Verhulst e apresentado por W. E. Boyce e R. C. DiPrima... 79

Quadro 4.3 Discussão do crescimento populacional proposto por Verhulst e apresentado por W. E. Boyce e R. C. DiPrima (continuação)........................ 80

Quadro 4.4 Discussão do crescimento populacional proposto por Verhulst e apresentado por W. E. Boyce e R. C. DiPrima... 81

Quadro 4.5 Discussão do crescimento exponencial proposto por Malthus e apresentado por D. G. Zill. 84

Quadro 4.6 Discussão do crescimento populacional proposto por Verhulst e apresentado por D. G. Zill. 86

Quadro 4.6 Discussão do crescimento populacional proposto por Verhulst e apresentado por D. G. Zill. (continuação) 87

Quadro 4.7 Discussão do crescimento populacional proposto por Gompertz e apresentado por D. G. Zill. 88

Quadro 4.8 Discussão do crescimento exponencial proposto por Malthus e apresentado por R. C. Bassanezi. 92

Quadro 4.9 Discussão do crescimento exponencial proposto por Verhulst e apresentado por R. C. Bassanezi. 95

Quadro 4.10 Discussão do crescimento exponencial proposto por Verhulst e apresentado por R. C. Bassanezi. 96

Quadro 4.11 Discussão do crescimento exponencial proposto por Gompertz e apresentado por R. C. Bassanezi. 97

Quadro 4.12 Situação-problema “Estimativa para a população da cidade de Londrina” retirada da dissertação de Fidelis (2005)....................................... 101

Quadro 4.12 Situação-problema “Estimativa para a população da cidade de Londrina” retirada da dissertação de Fidelis (2005). (continuação)................ 102

Quadro 4.13 Modelagem Matemática “Estimativa para a população da cidade de Londrina” retirada da dissertação de Fidelis (2005).. 102
Quadro 4.13 Modelagem Matemática “Estimativa para a população da cidade de Londrina” retirada da dissertação de Fidelis (2005). (continuação)................ 103
Quadro 4.13 Modelagem Matemática “Estimativa para a população da cidade de Londrina” retirada da dissertação de Fidelis (2005). (continuação)................ 104
Quadro 4.13 Modelagem Matemática “Estimativa para a população da cidade de Londrina” retirada da dissertação de Fidelis (2005). (continuação)................ 105
Quadro 4.14 Modelagem Matemática “Estimativa para a população do Brasil”................. 106
Quadro 4.14 Modelagem Matemática “Estimativa para a população do Brasil”. (continuação) 107
Quadro 4.14 Modelagem Matemática “Estimativa para a população do Brasil”. (continuação) 108
Quadro 4.14 Modelagem Matemática “Estimativa para a população do Brasil”. (continuação) 109
Quadro 4.14 Modelagem Matemática “Estimativa para a população do Brasil”. (continuação) 110

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO 15
1.1 Apresentação do Tema e Justificativa 15
1.2 Problema de Pesquisa 16
1.3 Aspectos Metodológicos da Pesquisa 16
1.4 Estrutura do Texto 18

CAPÍTULO 2 – SOCIOEPISTEMOLOGIA 20
2.1 A Perspectiva Socioepistemológica 20
2.2 As Práticas Sociais 23
2.3 As Práticas Matemáticas 24

CAPÍTULO 3 – MODELAGEM MATEMÁTICA 29
3.1 Modelo e Modelo Matemático 29
3.2 Modelagem Matemática 30
3.3 Modelagem Matemática em contextos escolares 32
3.3.1 Construção do Conhecimento e Modelagem Matemática 37

CAPÍTULO 4 – MODELOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAL: UMA ANÁLISE EPISTEMOLÓGICA E DIDÁTICA 39
4.1 O Contexto do Conhecimento das Equações Diferenciais 39
4.2 Um Olhar Epistemológico Sobre Modelos de Crescimento Populacional e as Práticas Sociais e Matemáticas neste Contexto 44
4.2.1 O Modelo de Thomas Robert Malthus 44
4.2.2 O Modelo de Benjamin Gompertz 53
4.2.3 O Modelo de Pierre-François Verhulst 57
4.2.4 As Práticas Sociais e Matemáticas na Formulação dos Modelos de Crescimento Populacional Abordadas 74
4.3 O Crescimento Populacional em Livros Didáticos: Os Modelos e as “práticas” dos Autores 76
4.3.1 Modelos de Crescimento Populacional no Livro Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno 77

4.3.2 Modelos de Crescimento Populacional no Livro Equações Diferenciais com aplicações em Modelagem ... 84
4.3.3 As Práticas Sociais e a Matemática Escolar nos Livros Didáticos ... 89
4.4 MODELAGEM MATEMÁTICA DO CRESCIMENTO POPULACIONAL EM LIVRO DE MODELAGEM MATEMÁTICA ... 91
4.4.1 AS PRÁTICAS SOCIAIS E MATEMÁTICAS NO LIVRO DE MODELAGEM MATEMÁTICA ... 99
4.5 O CRESCIMENTO POPULACIONAL EM SALA DE AULA: AS PRÁTICAS SOCIAIS E MATEMÁTICAS DOS ALUNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA ... 100
4.5.1 Atividade 1: Estimativa Para a População da Cidade de Londrina ... 100
4.5.2 Atividade 2: Estimativa Para a População do Brasil ... 105
4.5.3 As Práticas Matemáticas Escolares nas Atividades de Modelagem Matemática ... 111

CAPÍTULO 5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS ... 114

REFERÊNCIAS ... 118

APÊNDICES ... 124
APENDICE A - A equação de John Bernoulli ... 124

ANEXOS ... 127
ANEXO A - Programa da disciplina de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias da Universidade Estadual de Londrina – Matemática: Licenciatura ... 127
ANEXO B - Programa da disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias da Universidade Estadual de Londrina – Matemática: Bacharelado ... 129
ANEXO C - Programa da disciplina de Introdução às Equações Diferenciais da Universidade Estadual de Maringá – Curso de Matemática ... 132
ANEXO D - Programa da disciplina de Equações Diferenciais da Universidade Estadual de Maringá – Curso de Matemática ... 134

ANEXO E - Programa da disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Matemática: Licenciatura 137

CAPÍTULO 1
INTRODUÇÃO

1.1 APRESENTAÇÃO DO TEMA E JUSTIFICATIVA

Nas últimas décadas tem-se percebido na Educação Matemática o desenvolvimento de investigações no que se refere à construção do conhecimento matemático e às práticas sociais associadas a essa construção. O presente trabalho se insere nesta linha de investigação.

Dentre outras questões, quando se investiga a construção social do conhecimento matemático, pode-se pensar sobre o que se ensina, como se ensina, como se aprende, como se convertem conhecimentos científicos em conhecimentos escolares etc.

Estas questões têm sido objeto de investigação de diversos pesquisadores como Cantoral e Farfán (2008); Cantoral (2004); Arrieta (2003); Méndez e Arrieta (2005); Montiel (2005); Buendía (2006); Almeida e Ferruzzi (2009), dentre outros. Estes autores têm inscrito suas pesquisas na perspectiva teórica conhecida como Socioepistemologia.

Caracterizando a Socioepistemologia, Cantoral (2003) escreve que se trata de uma aproximação sistêmica incorporando componentes fundamentais na construção do conhecimento: sua natureza epistemológica, os planos do cognitivo, os modos de transmissão via ensino e os aspectos socioculturais.

Esta perspectiva teórica tem como interesse enfatizar a importância das práticas sociais no que se refere à construção do conhecimento. É no exercício das práticas sociais que os atores constroem conhecimentos como ferramentas e estas ferramentas, por sua vez, modificam suas práticas.

De modo geral, segundo Covián (2005), as práticas sociais não são o que fazem em si o indivíduo ou o grupo, mas aquilo que lhes faz fazer o que fazem. É algo que em um contexto histórico e social outorga, de acordo com Arrieta (2003), uma estrutura e um significado ao que fazemos.

Considerando esta perspectiva teórica e a aprendizagem como uma atividade humana, os conhecimentos matemáticos aprendidos em sala de aula podem ser advindos de práticas sociais exercidas entre professores e estudantes (ARRIETA, 2003; HERNÁNDEZ; ARRIETA, 2005). É nesse sentido que a aprendizagem é constituída

> por meio da apropriação e transformação do saber socialmente elaborado, não depende apenas do indivíduo, mas sim, da relação mediada pelo outro e pela cultura. Essa aprendizagem sistematizada ocorre dentro da sala de aula, na escola. (GRESPAN et al. *apud* ALMEIDA; FERRUZZI, 2009, p.118).

Segundo Arrieta (2003), as práticas sociais são guiadas pela produção e reprodução de práticas ao longo da humanidade com intencionalidade e situação específicas, ou seja, pela reprodução das práticas socialmente validadas histórica e culturalmente.

Neste sentido, nosso interesse está nas práticas sociais e matemáticas do desenvolvimento de alguns modelos de crescimento populacional. Nossa proposta contempla uma análise epistemológica e uma análise didática, investigando as práticas associadas a esse desenvolvimento e, sobretudo, a permanência destas práticas no ambiente acadêmico.

1.2 PROBLEMA DE PESQUISA

Estamos interessados em investigar a modelagem matemática do crescimento populacional e as práticas sociais e matemáticas associadas a esta modelagem.

Essa investigação é norteada pela análise de aspectos específicos:

1. A realização de uma análise epistemológica dos modelos de crescimento populacional com vistas a identificar práticas sociais e matemáticas que influenciaram o processo de desenvolvimento de modelos de crescimento populacional em diferentes épocas e contextos.

2. A realização de uma análise didática com o intuito de identificar como são apresentados os problemas de crescimento populacional para contextos de ensino e aprendizagem. Com esta finalidade, analisamos a apresentação de modelos de crescimento populacional em livros didáticos, em livro específico de Modelagem Matemática e em trabalhos desenvolvidos por estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática.

Nossa pesquisa, todavia, não tem a intenção de abarcar aspectos cognitivos associados ao desenvolvimento destes modelos, considerando que não tivemos contato com os sujeitos envolvidos neste desenvolvimento.

1.3 ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Considerando a sintonia entre a estrutura e as especificidades de nossa pesquisa, e a caracterização de Bogdan e Biklen (1994), atribuímos a essa investigação a natureza qualitativa.

Dentre as características de pesquisa qualitativa, Bogdan e Biklen (1994) afirmam que o ambiente natural constitui-se a fonte direta de dados e o investigador constitui o instrumento principal. Segundo os autores, "o termo *dados* refere-se aos materiais em bruto que os investigadores recolhem do mundo em que se encontram a estudar, são os elementos que formam a base da análise" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.149).

Na nossa pesquisa, para abarcar a componente epistemológica da construção de modelos de crescimento populacional, procuramos recolher os dados a partir de fontes primárias, como textos e documentos originais de autores envolvidos com esta temática.

Para tratar da componente didática em relação a esta classe de modelos utilizamos de livros didáticos, um livro específico de Modelagem Matemática e atividades de Modelagem Matemática relacionadas ao crescimento populacional.

Os livros didáticos analisados foram selecionados a partir de programas da disciplina de Equações Diferenciais para cursos de graduação em Matemática (veja anexos) da Universidade Estadual de Londrina (UEL), da Universidade Estadual de Maringá (UEM) e da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE), dentre as universidades estaduais do Paraná. Dentre os livros contidos na bibliografia destes programas, selecionamos:

- *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno* dos autores W. E. Boyce e R. C. DiPrima, publicado em 2002.
- *Equações Diferenciais com aplicações em Modelagem* do autor D. G. Zill, traduzido por Ciro de Carvalho Patarra e publicado em 2003.

O livro específico de Modelagem Matemática que analisamos é "Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia" publicado em 2010, cujo autor é R. C. Bassanezi. Optamos por esse livro por se tratar de um dos livros mais conhecidos e adotados no Brasil em disciplinas de Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática.

As atividades de Modelagem Matemática analisadas foram desenvolvidas por estudantes do quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina, no contexto da disciplina de "Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática". A primeira atividade aqui analisada consta na dissertação de mestrado "Contribuições da Modelagem Matemática para o Pensamento Reflexivo: Um Estudo" de R. Fidelis e foi desenvolvida no ano de 2004. A segunda atividade aqui analisada, não publicada, foi desenvolvida no ano de 2005 por estudantes do mesmo curso e da mesma disciplina.

Considerando que os dados têm de ser entendidos no contexto da história das instituições a que pertencem, como afirma Bogdan e Biklen (1994), faz-se necessário saber como e em que circunstâncias tais dados foram elaborados. Isso se justifica pelo fato de que o comportamento do sujeito é influenciado pelo contexto em que está inserido, sendo o investigador o instrumento principal.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), outra característica (de pesquisa qualitativa) é que a investigação qualitativa é descritiva. Segundo os autores, esse tipo de investigação “exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.49). E que, além disso, os investigadores qualitativos “tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto possível, a forma com que estes foram registrados ou transcritos” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.48). Nesta investigação, a análise dos dados é minuciosa, respeitando a maneira com que foram transcritos ou registrados, de modo a garantir a sua autenticidade.

Bogdan e Biklen (1994) ainda colocam como característica que o interesse neste tipo de pesquisa está mais no processo do que simplesmente nos produtos ou resultados. Na busca de informações que pudessem revelar aspectos relativos ao nosso problema de pesquisa, podemos inferir que a nossa preocupação com o processo foi muito maior do que com o produto. Isso se justifica pelo nosso problema de pesquisa cujo interesse está em tratar do desenvolvimento de alguns modelos matemáticos e das práticas sociais e matemáticas associadas a esse desenvolvimento.

Outra característica, segundo Bogdan e Biklen (1994), é que a análise dos dados tende a seguir um modo indutivo. Para os autores, os dados não são recolhidos com a finalidade de confirmar hipóteses previstas anteriormente, mas é construído um quadro que vai ganhando forma a partir de quando se recolhem e examinam as partes (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Na medida em que ocorreu nossa investigação, foi se construindo um quadro que ganhou forma a partir dos dados recolhidos e examinados em partes, com vistas a apresentar uma discussão sobre a modelagem do crescimento populacional mediado pela Modelagem Matemática.

1.4 ESTRUTURA DO TEXTO

A estrutura do texto compreende seis capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos o problema de pesquisa, assim como os aspectos metodológicos da pesquisa. No segundo capítulo, abordamos a Perspectiva Socioepistemológica, as práticas sociais associadas à construção do conhecimento matemático e as práticas matemáticas. No terceiro capítulo, abordamos a Modelagem Matemática na Educação Matemática e a construção do conhecimento matemático. No quarto capítulo, tratamos da Modelagem Matemática do crescimento populacional tratando do desenvolvimento de modelos matemáticos clássicos e seu contexto histórico; da análise de modelos matemáticos para o crescimento populacional em livros didáticos e de atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas por estudantes do curso de licenciatura de Matemática, fazendo uma análise de aspectos epistemológicos e didáticos da construção destes modelos. No quinto capítulo, elaboramos as considerações finais sobre o trabalho. No sexto capítulo constam as referências bibliográficas utilizadas durante o desenvolvimento da pesquisa. Finalmente apresentamos alguns anexos relativos a informações usadas e citadas no texto.

CAPÍTULO 2
SOCIOEPISTEMOLOGIA

2.1 A PERSPECTIVA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

A Socioepistemologia marca um tipo de investigação em que se estudam os mecanismos sociais de construção do saber matemático (BUENDÍA, 2006). Esta perspectiva teórica foi apresentada pela primeira vez em duas reuniões acadêmicas (Seminario de Investigación en Matemática Educativa - México; Conference on Research in Mathematics Education - EUA) por Ricardo Cantoral Uriza, ambas realizadas no mês de setembro de 1997 e desde então tem sido produzida uma grande quantidade de investigações a este respeito.

Segundo Cantoral (2004),

> a *socioepistemologia*, ou epistemologia das práticas sociais relativas ao saber, é uma aproximação teórica de natureza sistêmica que permite tratar dos fenômenos de produção e difusão do saber considerando uma perspectiva múltipla, pois articula em uma mesma unidade de análise as interações entre a epistemologia do conhecimento, sua dimensão sociocultural, os processos cognitivos que lhe são associados e os mecanismos de sua institucionalização via ensino (CANTORAL, 2004, p.1, tradução nossa).

Com isso se estabelece um marco onde confluem componentes, a saber, a componente epistemológica, a componente cognitiva, a componente didática e a componente social exercendo influências sobre as demais. A ênfase nas práticas sociais, na busca por compreender a construção do conhecimento, faz com que, ao intervir no sistema, a componente social modifique a concepção das componentes epistemológica, cognitiva e didática (ARRIETA, 2003; MONTIEL, 2005).

Martínez (2005) apresenta uma explicação a respeito das componentes, escrevendo:

> As didáticas são aquelas próprias da configuração dos diferentes sistemas didáticos, as cognitivas são próprias do funcionamento mental, as epistemológicas são próprias da natureza e significados do conhecimento matemático (MARTÍNEZ, 2005, p.198, tradução nossa).

O termo ‘social’ remete ao termo sociedade, que por sua vez, está relacionado a um agrupamento de pessoas, relativos a um tempo e a um espaço determinado.

Em nosso estudo, a componente social, tem o caráter de prática social. Definiremos na seção 2.2 o que entendemos por práticas sociais.

Antes de tratarmos o que se pode entender por componente epistemológica mostraremos o significado do termo ‘epistemologia’ segundo alguns dicionários.

Cunha (1986) coloca que o termo ‘epistemologia’ tem como significado o estudo crítico dos princípios, hipóteses e resultados das ciências já constituídas e que visa determinar os fundamentos lógicos, o valor e o alcance objetivo delas. Do francês *épistémologie*, derivado do grego *episteme* ‘ciência’, de acordo com Ferreira (1999), o termo ‘epistemologia’ tem como significado o conjunto de conhecimentos que têm por objeto o conhecimento científico, visando explicar os seus condicionamentos (sejam eles técnicos, históricos, ou sociais, sejam lógicos matemáticos, ou linguísticos), sistematizar as suas relações, esclarecer os seus vínculos, e avaliar os seus resultados e aplicações.

Considerando estas caracterizações, podemos entender a componente epistemológica como o estudo das práticas que dão origem à construção de determinado conhecimento e ao contexto de origem de determinado conceito nas situações específicas em que ocorrem. Neste sentido, esta componente permite explicar a construção de certo conhecimento matemático e as práticas associadas a essa construção. Essa componente é influenciada pelo momento histórico e pelos objetivos em que determinado conceito foi construído.

Para definir o que vem a ser a componente didática, apresentamos o significado do termo ‘didática’ segundo alguns dicionários.

Segundo Cunha (1986), o termo ‘didática’ tem como significado ciência ou arte de ensinar. Ferreira (1999) sustenta que o termo ‘didática’ se refere a técnica de dirigir e orientar a aprendizagem; técnica de ensino, o estudo desta técnica.

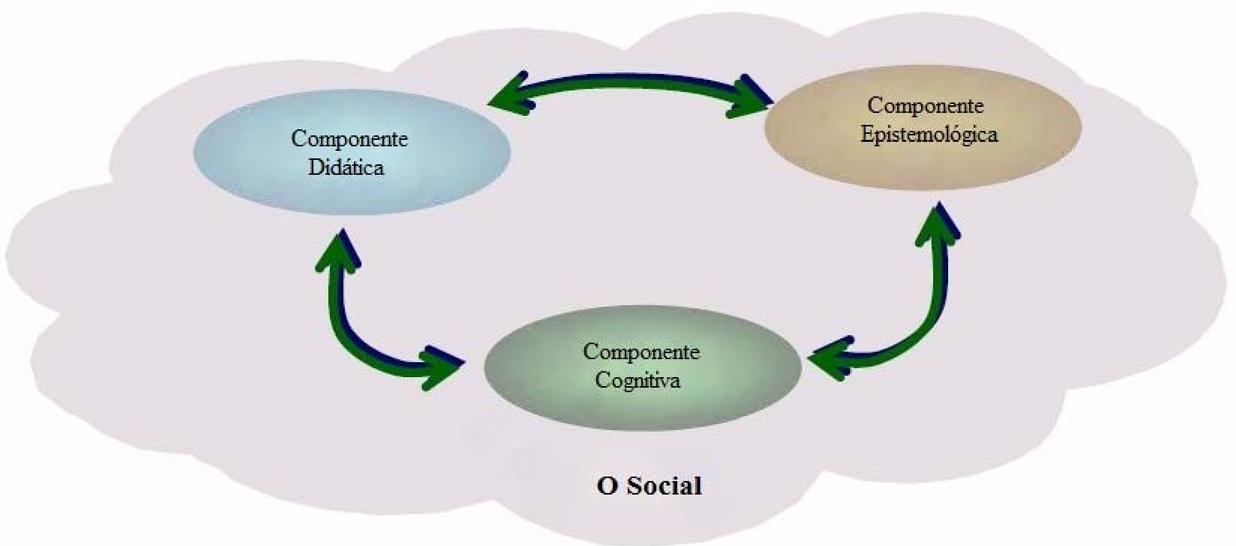
Assim, pode-se entender por componente didática o estudo das práticas associadas ao conhecimento matemático no contexto escolar. Esta componente trata, portanto, da construção e difusão do conhecimento nos sistemas de ensino e é influenciada pelo contexto social, sendo também relativa a um tempo e a um espaço determinados.

Já o termo ‘cognitivo’, segundo Houaiss (2009), é relativo ao conhecimento, à cognição; relativo ao processo mental de percepção, memória, juízo e/ou raciocínio. De acordo com Ferreira (1999), o termo ‘cognição’ significa aquisição de um conhecimento; conhecimento, percepção; o conjunto dos processos mentais usado no pensamento, na percepção etc. O termo cognitivo é relativo à cognição ou ao conhecimento.

Neste contexto, podemos entender a componente cognitiva como o estudo de processos mentais utilizados no pensamento. Tal componente assume o conhecimento como uma série de processos sustentados por mecanismos cognitivos que possibilitam compreender como estudantes e professores constroem significados e sua própria cognição interativamente. Como a construção de um objeto matemático não é única, a cognição é reconstruída de acordo com as práticas sociais exercidas entre estudantes e professores.

Em conjunto, as componentes social, epistemológica, didática e cognitiva condicionam/determinam a construção do conhecimento matemático. A componente social influencia substancialmente a concepção das outras componentes, de modo que os aspectos sociais são como um "pano de fundo" para as demais componentes associadas à perspectiva socioepistemológica (Figura 2.1).

Figura 2. 1 – Componentes da perspectiva socioepistemológica (adaptado de HERNÁNDEZ; ARRIETA, 2005, p.538).



Não se deve considerar, de maneira isolada, como o indivíduo constrói seu conhecimento com base em sua cognição. É preciso relacioná-la às práticas do conhecimento matemático no contexto escolar e associá-las às práticas de origem relacionadas à construção do conhecimento matemático. Não se deve pensar que em conjunto essas componentes formam um todo linear, mas considerar como um sistema complexo, onde a aprendizagem acontece por meio de práticas sociais e depende de um contexto social.

A perspectiva socioepistemológica destaca a necessidade de modificar o foco, "passar dos objetos às práticas" (CANTORAL; FARFÁN, 2008, p.742, tradução nossa). O que nos interessa não é somente como se constrói o conceito sujeito a uma estrutura formal, mas, sobretudo, como ele se constrói com relação às intencionalidades humanas, determinadas pelas interações com os sujeitos e com o contexto.

2.2 AS PRÁTICAS SOCIAIS

De acordo com Covián (2005), a prática social não é o que faz em si o indivíduo ou o grupo, mas aquilo que lhes fazem fazer o que fazem. Arrieta (2003, p.24, tradução nossa) sustenta que o "conceito de prática conota fazer algo, mas não simplesmente fazer algo em si mesmo e por si mesmo; é algo que em um contexto histórico e social outorga uma estrutura e um significado ao que fazemos. Nesse sentido a prática sempre é uma prática social".

De modo geral, podem-se entender as práticas sociais como

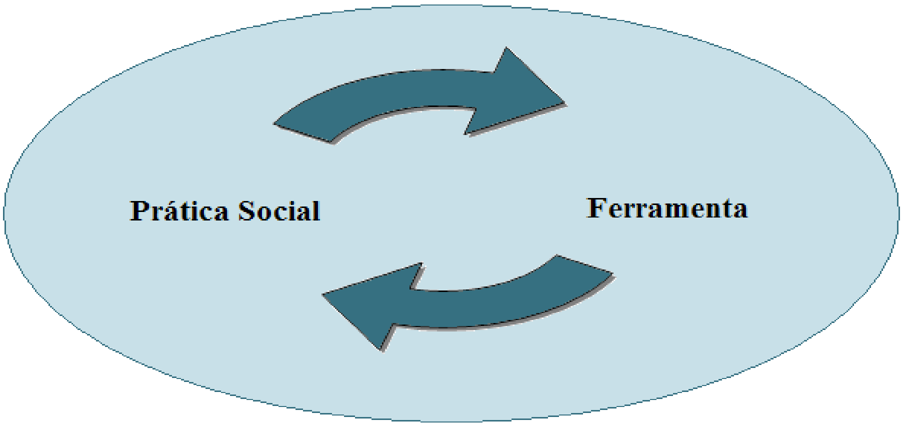
> toda ação ou conjunto intencional e organizado de ações físico-afetivo-intelectuais realizadas, em um tempo e espaço determinados, por um conjunto de indivíduos, sobre o mundo material e/ou humano e/ou institucional e/ou cultural, ações essas que, por serem sempre, em certa medida e por um certo período de tempo, valorizadas por determinados segmentos sociais, adquirem uma certa estabilidade e realizam-se com certa regularidade. [...] (MIGUEL *apud* VILELA, 2009, p.194).

Segundo Cantoral e Farfán (2008), a

> cognição é então entendida como capacidade de "fazer emergir" o significado a partir de realimentações sucessivas entre o homem e seu meio ambiente próximo, tanto físico como cultural, a partir de uma interação "dialética" entre protagonistas. Esta interação, é socialmente normada e em tal sentido, a prática é de fato, inevitavelmente, uma prática social (CANTORAL; FARFÁN, 2008, p.742, tradução nossa).

Os atores, ao exercerem práticas sociais, constroem seus conhecimentos matemáticos como ferramentas; as ferramentas, por sua vez, modificam as práticas (HERNÁNDEZ; ARRIETA, 2005; MÉNDEZ; ARRIETA, 2005), estabelecendo-se assim uma relação de duplo sentido entre ferramentas matemáticas e práticas sociais (Figura 2.2).

Figura 2.2 – Relação entre ferramentas matemáticas e práticas sociais (adaptado de HERNÁNDEZ; ARRIETA, 2005, p.537).



As ferramentas matemáticas disponíveis dependem do contexto social em que são abordadas; além disso, os processos de pensamento dos atores e a maneira de utilizar tais ferramentas dependem da necessidade de realizar as práticas sociais.

São de nosso interesse, neste trabalho, práticas que requerem ou utilizam conhecimentos matemáticos e que se realizam em comunidades não necessariamente científicas, mas que, em certa medida, são influenciadas também por estas comunidades. Assim, podemos nos remeter às práticas matemáticas.

2.3 As Práticas Matemáticas

Segundo Vilela (2009), as práticas matemáticas constituem um conjunto de práticas sociais identificadas com alguma intencionalidade, em situações e contextos específicos, determinados pela força normativa das formulações de determinados grupos. Para a autora, pode-se compreender as práticas matemáticas

> como realizações humanas, mas não simplesmente como práticas intencionais, e sim condicionadas pela própria estrutura da linguagem, que limita e regula as possibilidades de desenvolvimento das matemáticas nas práticas específicas (VILELA, 2009, p.209).

São exemplos de práticas matemáticas aquelas denominadas como práticas matemáticas científicas, práticas matemáticas escolares e práticas matemáticas de um grupo profissional específico.

A prática matemática científica pode ser vista como o conjunto de práticas sociais associadas ao desenvolvimento da matemática e suas aplicações nas academias, como os centros de pesquisas, as universidades ou as faculdades. Segundo Oliveira (2008, p.54), ela está “voltada à produção matemática em estado nascente”, tendo como intenção fazer, reproduzir e comunicar o conhecimento matemático científico (ARRIETA, 2003). Segundo Vilela (2007), a expressão ‘matemática científica’ é, muitas vezes, empregada como sinônimo de ‘matemática acadêmica’.

A prática matemática de um grupo profissional específico pode ser vista como o conjunto de práticas sociais de comunidades, como a de comerciantes, investigadores, etc. Segundo Arrieta (2003), ela não tem como intenção criar matemáticas ou ensinar matemáticas, mas de usar as matemáticas em práticas sociais de comunidades. Nesse sentido, a partir de vivências dos indivíduos e grupos sociais é que se constroem socialmente as noções matemáticas.

A prática matemática escolar, por sua vez, pode ser entendida como o conjunto de práticas sociais associadas ao contexto escolar. De alguma maneira a prática matemática escolar se relaciona com as práticas matemáticas científicas e a de um grupo profissional específico. Contudo, tais práticas matemáticas possuem regras próprias e diferentes interesses quando em relação à prática matemática escolar (ARRIETA, 2003).

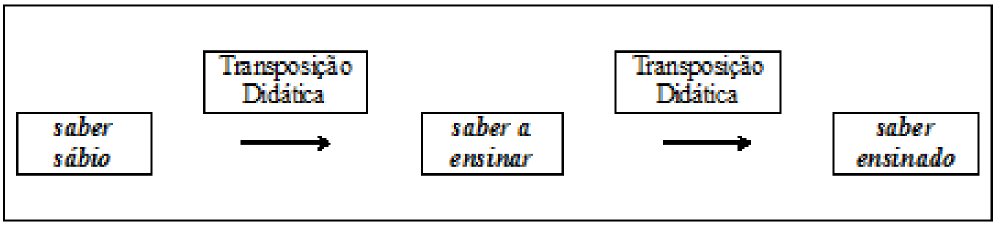
Vale a pena salientar que os termos ‘matemática científica’ e ‘matemática escolar’ apresentam uma relação explícita com as expressões apresentadas por Chevallard (1991), ‘saber sábio’ e ‘saber a ensinar’, respectivamente, e estão mediados por uma Transposição Didática.

A transposição didática foi formulada inicialmente por Michel Verret em 1975 e inserida no contexto matemático por Yves Chevallard em 1980, analisando questões importantes do domínio da Didática da Matemática (CIRILO, 2008).

Segundo Chevallard (1991), um conteúdo do saber, designado ‘saber sábio’, passa por mudanças e adaptações profundas até chegar à forma como é apresentado aos estudantes no livro didático. Ele “sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto do saber sábio faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática” (CHEVALLARD, 1991, p.39, tradução nossa).

Em sua obra, Chevallard (*apud* CIRILO, 2008) trata a Transposição Didática como um instrumento eficiente para descrever as transformações necessárias para que o saber produzido pelos cientistas, o saber sábio, possa ser inserido nos programas e livros didáticos, como o saber a ensinar, e aquele que realmente aparece nas salas de aula, o saber ensinado. Ocorrem, portanto, duas transposições didáticas entre o saber sábio e aquele que, de fato, foi apreendido pelos estudantes (Figura 2.3).

Figura 2.3 – As esferas do saber.



Fonte: CIRILO (2008, p.31).

Cada esfera do saber possui seu conjunto de agentes que pertencem a diferentes grupos sociais, diferentes interesses, regras próprias, que influenciam na transposição dos saberes (CIRILO, 2008). O centro de operações da transposição dos saberes, que determina todo o funcionamento didático é definido por Chevallard como noosfera.

É na noosfera que são selecionados os elementos do saber sábio a serem submetidos ao trabalho de transposição (CHEVALLARD, 1991). O saber sábio, a partir de currículos e programas de ensino, ganha uma ‘roupagem didática’ (BRITO MENEZES *apud* NEVES, 2009). Segundo Chevallard (1991), é na noosfera que

> se encontram todos aqueles que ocupam os postos principais do funcionamento didático, se enfrentam com os problemas que surgem do encontro da sociedade e suas exigências; ali se desenvolvem os conflitos; ali se levam a cabo as negociações; ali se amadurecem as soluções (CHEVALLARD, 1991, p.24, tradução nossa).

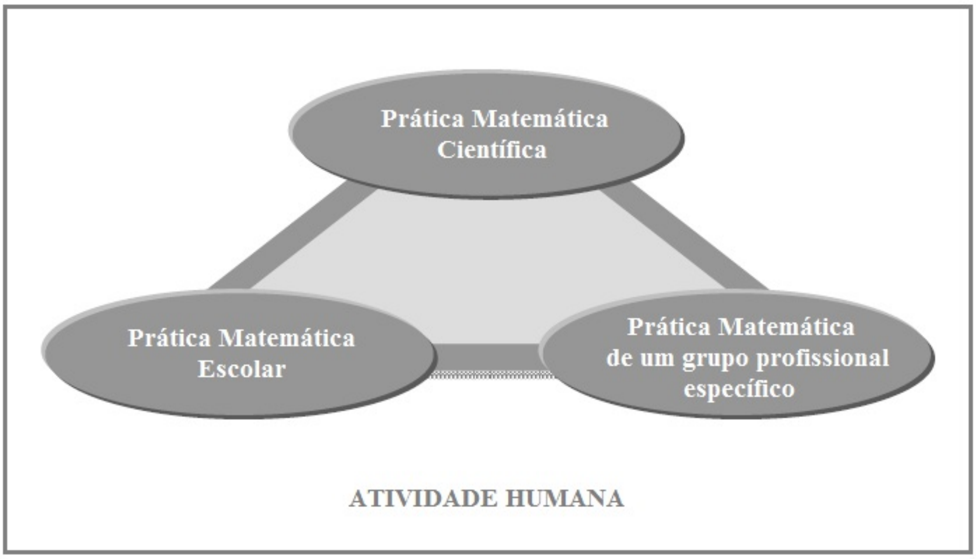
Segundo Moreira e David (2003), Chevallard (1991) parece destacar o conhecimento matemático científico sobre o conhecimento matemático escolar, reduzindo este último a uma espécie de uma versão ‘didatizada’ daquele, onde os conhecimentos envolvidos são elaborações produzidas essencialmente em instâncias extraescolares. Para os autores há relações complexas entre “os saberes científicos, os saberes escolares e as questões postas pela prática profissional docente na escola” (MOREIRA; DAVID, 2003, p.64). Segundo Bello (2010),

> as regras matemáticas existentes e constituintes de uma prática social qualquer (considerando, nesse âmbito, inclusive a prática científica de produção do conhecimento matemático) não são plausíveis de transposição para outras, mesmo aquelas que consideremos pautadas por jogos linguísticos semelhantes. (BELLO, 2010, p.559)

Neste contexto, não se trata de pensar a matemática escolar como uma construção autônoma e/ou autossuficiente na construção do conhecimento científico, nem tampouco se trata de pensar a matemática escolar como uma versão didatizada da matemática científica. Mas trata-se de reconhecer "uma tensão, e não identidade, entre educação (escolar) e ensino (da matemática científica)", onde os métodos, técnicas, valores e resultados da matemática científica serão filtrados, adaptados, retraduzidos e revalorizados, tendo como referência — implícita ou explícita — o ambiente educativo em que essas operações se realizam. (MOREIRA; DAVID, 2003, p.76).

Sob esta perspectiva, considerando a produção de conhecimentos por outros agentes que não só os matemáticos, reconhecemos a tensão entre os pares 'prática matemática científica' e 'prática matemática escolar', 'prática matemática escolar' e 'prática matemática de um grupo profissional específico', 'prática matemática de um grupo profissional específico' e 'prática matemática científica'. Segundo Arrieta (2003), estas tensões são ao mesmo tempo mediadas e resultantes da atividade humana (Figura 2.4) e a separação, interseções e fronteiras entre cada prática matemática não estão claramente definidas.

Figura 2.4 – Tensão no campo das matemáticas (adaptado de ARRIETA, 2003, p.96).



Considerando estas diferentes práticas matemáticas e as componentes da perspectiva socioepistemológica que enunciamos neste trabalho, as práticas sociais e matemáticas, em particular, algumas práticas que tratam da problemática do crescimento populacional, constituem os elementos da análise epistemológica que pretendemos realizar. Por outro lado, a relação entre as práticas matemáticas escolares e as práticas sociais é o objeto de análise quando tratamos da problemática do crescimento populacional em contextos escolares.

Para identificar estas práticas (sociais e matemáticas) investigamos a modelagem matemática associada ao crescimento populacional em diferentes contextos e épocas. Assim, no próximo capítulo tratamos da Modelagem Matemática.

CAPÍTULO 3
MODELAGEM MATEMÁTICA

3.1 MODELO E MODELO MATEMÁTICO

De acordo com Houaiss (2009), o termo modelo do italiano *modello*, do latim vulgar *modellum*, diminutivo de *mòdus*, significa 'medida em geral', uma 'medida que não se deve ultrapassar'. Dentre outras definições, o dicionário nos fornece, “representação de um fenômeno ou conjunto de fenômenos físicos e eventualmente a previsão de novos fenômenos ou propriedades, tomando como base um certo número de leis físicas, em geral obtidas ou testadas experimentalmente”.

Neste texto, o que nos interessa, é a definição de modelo como “representação de alguma coisa” (CUNHA apud BARBOSA, 2009, p.70). Em particular, estamos interessados em um tipo de modelo denominado ‘modelo matemático’.

Na literatura, esse termo é amplamente citado e pode dar margens a diferentes sentidos. A seguir citamos algumas dessas definições.

Segundo Biembengut (1999) e Bassanezi (2010), um modelo matemático pode ser entendido como um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real.

De acordo com Lesh, Carmona e Hjalmarson (2006), um modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática, com a finalidade de descrever o comportamento de outro sistema e permitir a realização de previsões sobre este (LESH; CARMONA; HJALMARSON *apud* ALMEIDA, 2010).

De acordo com Arrieta (2003), um modelo é uma ferramenta que permite compreender e prever o comportamento do fenômeno, validar hipóteses e desenvolver estratégias de intervenção. Segundo o autor, um modelo é uma ferramenta para interpretar e intervir em um contexto.

Segundo Méndez e Arrieta (2005), modelos matemáticos são ferramentas criadas pelos especialistas, ao tratar de entender e predizer o comportamento de um fenômeno.

Neste trabalho entendemos que um modelo matemático constitui uma ferramenta para compreender e determinar o comportamento de uma situação-problema, bem como validar hipóteses e elaborar estratégias para a intervenção nesta situação. Um modelo matemático, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática, permite a realização de previsões sobre uma situação-problema em estudo. Sua formulação não tem um fim em si mesmo, mas visa resolver algum problema.

Considerando esta perspectiva, em sala de aula, faz-se necessário que os alunos construam e manejem modelos matemáticos, com vistas a ter a oportunidade de discutir as circunstâncias que conduziram o pensamento humano para tal estrutura matemática.

Nesse sentido, segundo Barbosa (2009), é preciso criar condições na organização pedagógica de modo que se tenha espaço para discussão de como os resultados matemáticos são gerados e capturados pelas teias conceituais que fazem parte das práticas pedagógicas nas quais os alunos estão inseridos.

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

De acordo com Houaiss (2009), o termo modelagem significa o ato de modelar, ou seja, o ato de dar a forma segundo um modelo.

Segundo Bassanezi (2010), a Modelagem Matemática pode ser entendida como um processo dinâmico utilizado para obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências.

Segundo Lesh; Carmona e Hjalmarson (2006), a Modelagem Matemática implica a construção e a interpretação de modelos matemáticos (LESH; CARMONA E HJALMARSON *apud* ALMEIDA, 2010).

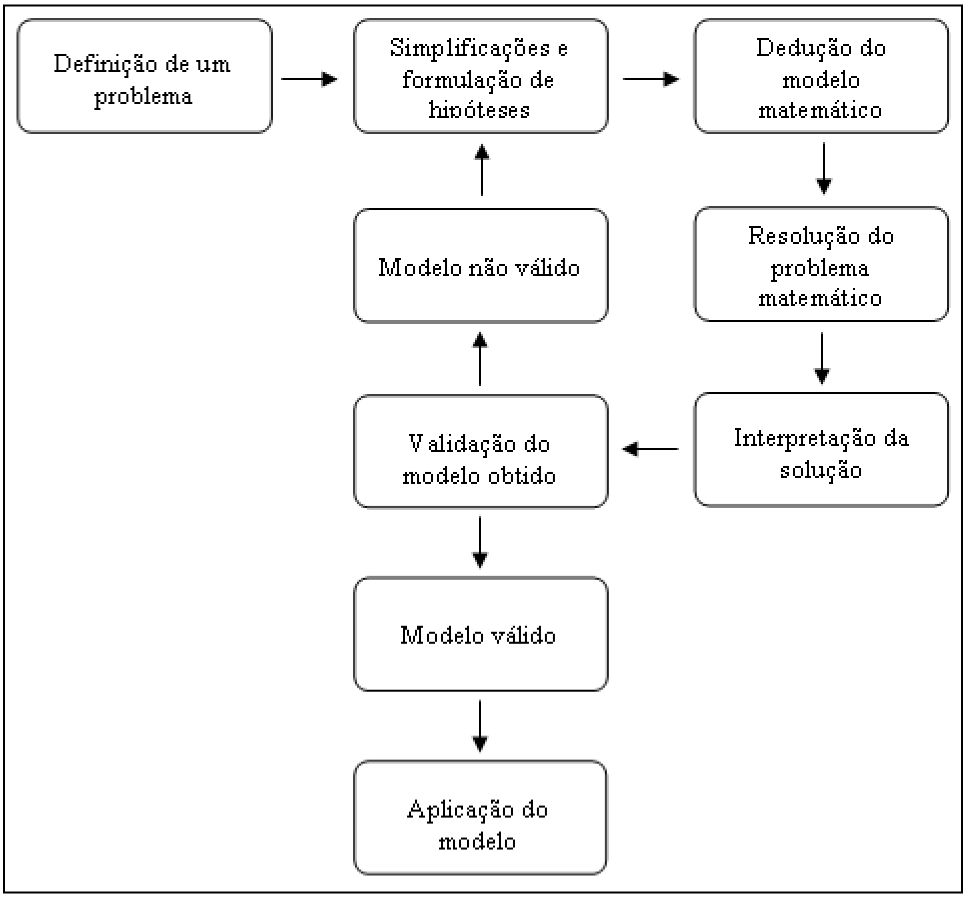
D'Ambrosio (2009), explicita que os modelos são representações do real e a modelagem é a elaboração destas representações.

Podemos dizer que, de modo geral, a Modelagem Matemática é um processo dinâmico que envolve a obtenção de um modelo matemático. Segundo Almeida (2010), uma atividade de Modelagem Matemática,

> pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a final. Nesse sentido, realidade (origem da situação inicial) e Matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão fundamentados) são domínios diferentes que passam a se integrar, e, em diferentes momentos, conhecimentos matemáticos e não matemáticos são acionados e/ou produzidos e integrados. A esta situação inicial problemática a literatura costuma se referir como situação-problema; à situação final desejada é associada, de modo geral, uma representação matemática, um modelo matemático (ALMEIDA, 2010, p.399).

Não existe uma prescrição rigorosa das etapas que podem constituir uma atividade de Modelagem Matemática, mas é possível sugerir uma sequência de procedimentos para conduzir o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática (Figura 3.1).

Figura 3.1 – Etapas sugeridas para se realizar um processo de Modelagem Matemática.



Fonte: ALMEIDA *apud* FERRUZZI (2003, p.38).

A partir de uma situação-problema, define-se o problema a ser estudado. Os dados são selecionados, por meio de simplificações e formulação de hipóteses, de modo a manter as características do problema. Muitas vezes, o problema não parece diretamente associado a uma linguagem matemática, e faz-se necessário substituir a linguagem do problema para uma linguagem matemática adequada. Por meio de conteúdos matemáticos, procura-se uma solução para o problema, de acordo com a hipótese definida. A partir da interpretação desta solução para o problema, verifica-se se o modelo é ou não válido para o problema. Caso não seja válido, inicia-se o processo novamente; caso seja válido, o mesmo pode ser utilizado para fazer previsões, analisar e explicar a situação-problema proposta inicialmente.

Nosso trabalho se encaminha com o intuito de entender a Modelagem

Matemática, esta busca por representações para entender um fenômeno, como uma atividade humana, onde os alunos têm a oportunidade de argumentar, criar ferramentas, significados e conceitos relacionados à matemática, confrontando e discutindo diferentes versões.

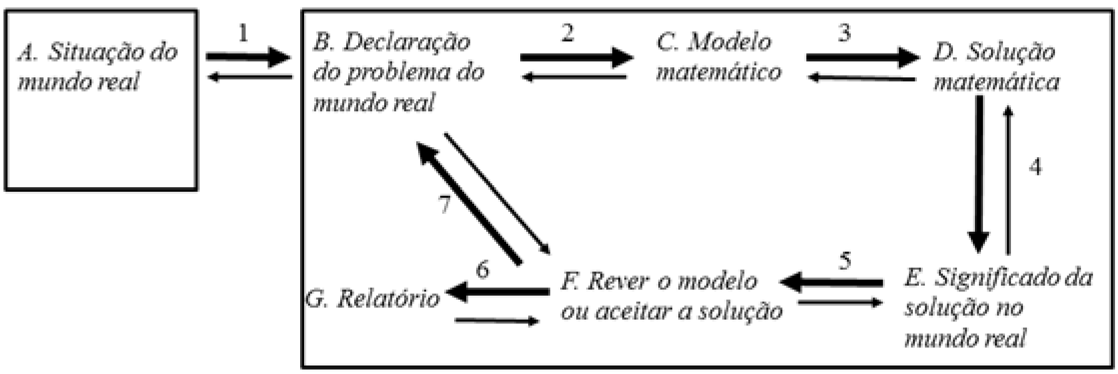
3.3 MODELAGEM MATEMÁTICA EM CONTEXTOS ESCOLARES

Pode-se perceber, dentro do campo da Educação Matemática, um número crescente de pesquisadores que vêm dando contribuições para a consolidação da Modelagem na Educação Matemática brasileira (SILVEIRA, 2007). Uma hipótese subjacente à incorporação da Modelagem Matemática nas aulas, é que "a abordagem de questões reais, oriundas do âmbito de interesses dos alunos, pode motivar e apoiar a compreensão de métodos e conteúdos da matemática escolar, contribuindo para a construção de conhecimentos" (ALMEIDA; VERTUAN, 2010, p.29).

Contudo, na literatura podem ser percebidas diferentes perspectivas para a Modelagem Matemática e diferentes denominações atribuídas pelos pesquisadores, quanto a caracterização da Modelagem no âmbito da Educação Matemática.

Neste âmbito, as etapas da Modelagem Matemática caracterizadas na seção anterior, de modo geral, são associadas aos procedimentos realizados pelos alunos quando envolvidos com atividades de Modelagem Matemática (Figura 3.2).

Figura 3.2 – Modelagem Matemática na Educação Matemática



1. Compreensão, estruturação, simplificação, interpretação do contexto
2. Formulação, matematização
3. Trabalhando matematicamente
4. Interpretação da produção matemática
5. Comparação, crítica, validação
6. Comunicação, justificação (se o modelo é considerado satisfatório)
7. Refazendo o processo de modelagem (se o modelo é considerado insatisfatório)

Fonte: STILLMAN et al. (2007, p.690)

Segundo Stillman et al. (2007), a Figura 3.2 abrange tanto a orientação da tarefa de muitos esquemas do ciclo de modelagem, como aquele apresentado na Figura 3.1, como a necessidade de captar o que está acontecendo nas mentes dos indivíduos enquanto eles trabalham em atividades de modelagem.

As entradas A-G representam fases no processo de Modelagem Matemática, onde as setas grossas significam transições entre as fases, e o processo de solução é descrito seguindo essas setas no sentido horário na parte superior e à esquerda em torno do diagrama. As setas mais finas que estão em sentido inverso ao ciclo de modelagem são incluídas para enfatizar que o processo de modelagem não é linear, ou unidirecional (STILLMAN et al., 2007, p.690). As etapas da Modelagem Matemática mostradas na Figura 3.2 podem ser assim caracterizadas:

a. Situação do mundo real

A partir da intervenção com a situação em estudo (fenômeno), é identificado o problema a ser estudado (declaração do problema do mundo real). Segundo Almeida (2010), o interesse e a intencionalidade dos envolvidos em investigar uma situação-problema se fazem importantes. Em seguida, deve-se procurar compreender o problema por meio da matemática.

> A formulação correta e clara de um problema ou interesse, na linguagem natural, é de fundamental importância para permitir sua formulação em linguagem convencionada, no caso, a linguagem matemática.
> A linguagem Matemática é muito precisa, além de possuir todo um conjunto de resultados potencialmente úteis, muitas vezes necessários à resolução de um problema. (BURAK, 1992, p.180)

b. Declaração do problema no mundo real

Na busca por um modelo matemático adequado para o problema, “ações como buscar informações, identificar e selecionar variáveis, definir hipóteses, fazer simplificações, constituem, elementos desse processo e requerem uma interpretação adequada e certo grau de intuição” (ALMEIDA; FERRUZZI, 2009, p.121). Segundo D’Ambrosio (2009, p.92), a escolha das variáveis determina como é a precisão do modelo, ou seja, o nível de aproximação com a situação-problema.

c. Modelo matemático

> A montagem do modelo matemático, que se dá nesta fase do processo de modelagem, depende substancialmente do grau de complexidade das hipóteses e da quantidade das variáveis interrelacionadas. Um fenômeno biológico – por exemplo – raramente pode ser representado, de maneira completa e abrangente em toda sua complexidade, por uma equação matemática ou um sistema de equação (BASSANEZI, 2010, p.29).

De modo geral, segundo Almeida e Ferruzzi (2009), a situação-problema não está diretamente associada a uma linguagem matemática, faz-se necessário assim, a transformação de uma representação (linguagem natural) para outra (linguagem matemática), evidenciando o problema matemático a ser resolvido.

d. Solução matemática

De acordo com a hipótese definida, é preciso definir quais os recursos matemáticos ou que conteúdos matemáticos, serão adequados para encontrar a solução matemática (ALMEIDA; VERTUAN, 2010). De acordo com Bassanezi (2010), a busca da solução matemática está vinculada ao grau de complexidade empregada em sua formulação e muitas vezes só pode ser viabilizada através de métodos computacionais, dando uma solução numérica aproximada.

e. Significado da solução no mundo real

Por meio da interpretação da solução matemática, busca-se um significado da solução no mundo real.

f. Rever o modelo ou aceitar a solução

É o processo de aceitação ou não do modelo matemático encontrado e as hipóteses que lhe são atribuídas, confrontando/comparando com os dados empíricos e, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real. Segundo Bassanezi (2010), um modelo deve ter, no mínimo, a capacidade de prever os fatos que o originaram.

> O problema de aceitação ou não de um modelo depende muito mais de fatores que condicionam o modelador, incluindo seus objetivos e recursos disponíveis. O simples confronto com os dados empíricos pode não bastar. De qualquer forma, um bom modelo matemático é aquele que o usuário, especialista na área onde se executou a modelagem, o considera como tal, tendo as qualidades de ser suficientemente simples e representar razoavelmente situação analisada. (BASSANEZI, 2010, p.30)

Caso o modelo matemático não seja considerado válido reinicia-se o processo novamente; caso o modelo matemático seja considerado válido busca-se uma solução para o problema do mundo real.

Bassanezi (2010) argumenta que devido a algumas razões, a serem apresentadas na sequência, uma previsão pode discordar da intuição ou estar incorreta. Segundo ele, estas razões podem estar associadas com os pressupostos de partida incorretos, uma simplificação do problema demasiado drástica, hipóteses e dados insuficientes, além de variáveis não utilizadas no modelo teórico, dentre outras razões.

> Nenhum modelo deve ser considerado definitivo, podendo sempre ser melhorado, e agora poderíamos dizer que um bom modelo é aquele que propicia a formulação de novos modelos. A reformulação de modelos é uma das partes fundamentais do processo de modelagem e isto pode ser evidenciado se considerarmos que:
> - Os fatos conduzem constantemente a novas situações;
> - Qualquer teoria é passível de modificações;
> - As observações são acumuladas gradualmente de modo que novos fatos suscitam novos questionamentos;
> - A própria evolução da Matemática fornece novas ferramentas para traduzir a realidade (Teoria do Caos, Teoria Fuzzy etc.). (BASSANEZI, 2010, p.31)

Nesse sentido D'Ambrosio (2009) argumenta que uma vez que os modelos oferecem apenas aproximações do comportamento real, eles também podem ajudar a reformular hipóteses e até mesmo a formular novas hipóteses, preparando o caminho para novas teorias mais adequadas, para lidar com a questão original, levando a melhores aproximações.

g. Relatório

O relatório implica em desenvolver uma argumentação "de que a solução apresentada é razoável e é consistente, tanto do ponto de vista da representação matemática e dos artefatos matemáticos a ela associados quanto da adequação desta representação para a situação em estudo" (ALMEIDA; FERRUZZI, 2009, p.121).

Durante o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática podem existir grandes diferenças individuais. Assim, Gil-Pérez et al. (2001) salientam que uma atividade de Modelagem Matemática não deve ser pensada em termos de uma sequência de etapas a serem seguidas mecanicamente, mas dar margens à criatividade, à dúvida e ao acerto.

Borromeo Ferri (2010) também faz argumentação nesse sentido, afirmando que

> o indivíduo começa esse processo durante uma certa fase, de acordo com suas preferências e, em seguida passa por diferentes fases várias vezes ou apenas uma vez, com foco em determinadas fases e/ou ignorando outras. Para ser mais preciso do ponto de vista cognitivo, deve-se falar de rotas de modelagem visível, como só se pode referir a expressões verbais ou representações externas para a reconstrução do ponto de partida e ao longo de uma rota de modelagem (BORROMEO FERRI *apud* BORROMEO FERRI, 2010, p.112, tradução nossa).

As hipóteses adotadas pelo modelador, as simplificações feitas, a teoria abordada, assim como suas limitações, mostram o caráter de construção humana, em que não faltam hesitações nem erros.

> É, também, necessário insistir em que os problemas científicos constituem, inicialmente, "situações problemáticas" confusas: o problema não é dado, sendo necessário formulá-lo de forma precisa, modelando a situação, fazendo determinadas opções de forma a simplificá-lo para o podermos abordar, clarificando o objetivo, a metodologia, ... Tudo isso deverá ser feito partindo do corpo de conhecimentos que se possuir no campo específico em que se desenvolve o programa de investigação (LAKATOS *apud* GIL-PÉREZ et al., 2001, p.136).

Segundo Almeida e Ferruzzi (2009, p.120), a Modelagem Matemática trata-se de "um procedimento criativo e interpretativo que estabelece uma estrutura matemática que deve incorporar as características essenciais do objeto ou fenômeno que pretende representar". Nesse sentido, segundo Almeida (2010), o interesse e a intencionalidade dos envolvidos em investigar uma situação-problema se fazem importantes em uma atividade de Modelagem Matemática, contudo não é o suficiente para apresentar uma solução em linguagem matemática para a situação inicial problemática.

Com a finalidade de elaborar um modelo matemático adequado para a situação, faz-se necessário uma boa dose de intuição e criatividade para interpretar o contexto e discernir quais serão as variáveis envolvidas (BIEMBENGUT; HEIN, 1999). Entretanto, uma atividade de Modelagem Matemática não culmina com a construção de um modelo (ALMEIDA, 2010), cabe ao modelador interpretar o resultado em termos do problema proposto inicialmente.

Sob esta perspectiva, entendemos a Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática como uma alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática (ALMEIDA; BRITO, 2005, p.487). Reconhecemos assim, que uma atividade de Modelagem Matemática é influenciada pelas intencionalidades humanas, determinadas pelas interações com os sujeitos e com o contexto.

3.3.1 Construção do Conhecimento e Modelagem Matemática

Em nossa perspectiva, entendemos que o conhecimento matemático é construído por meio da ação do homem, e que nesse sentido, ele pode ser visto como um processo em constante movimento. Citando Forquin, Caldeira (2009), considera que

> os conhecimentos matemáticos que são aceitos como verdadeiros são relativos ao tempo e aos padrões estabelecidos pela sociedade e, portanto, dependem da cultura na qual esses conhecimentos se articulam. Nesse caso, o grau de certeza sobre aquilo que julgamos verdadeiro se dá olhando para a realidade do outro, compartilhada por grupos socialmente motivados de acordo com as compreensões prévias dessa realidade. Assim a pergunta: o que é aceitável como conhecimento matemático?, só pode ser respondida em relação a um determinado tempo, numa determinada sociedade, num determinado contexto cultural. O conhecimento instituído se altera de acordo com os padrões e critérios de certeza que as sociedades estabelecem. Padrões que são critérios de verdades em uma determinada sociedade não são, necessariamente, válidos para outras. (FORQUIN *apud* CALDEIRA, 2009, p.42).

Neste sentido, a construção do conhecimento depende do contexto no qual está inserido, dos diferentes interesses dos atores sociais e pode ser entendido como um processo que está em constante movimento.

Com o intuito de buscar uma nova epistemologia que fuja da concepção de sujeito-objeto, Caldeira (2009), explicita uma epistemologia construída pelos sentidos e significados dados pela linguagem, fazendo a aproximação da Modelagem Matemática com a filosofia de Wittgenstein:

> Wittgenstein rompe com a visão essencialista da linguagem de que haveria um significado extralinguístico para os objetos matemáticos e que o estudante poderia se apropriar dele; mas, pelo contrário, o professor deveria introduzir o estudante em alguns “jogos de linguagem” da matemática (CALDEIRA, 2009, p.48).

Segundo Vilela (2007), para Wittgenstein, os significados se constituem e se transformam em seus usos em diferentes contextos, e, desse modo, os significados não estão fora da linguagem, no mundo externo ou numa estrutura mental universal e necessária, mas no uso da linguagem. Para Vilela (2009),

> a leitura das adjetivações produzidas no terreno acadêmico da Educação Matemática pela grade analítica de Wittgenstein possibilita uma base coerente para uma compreensão das matemáticas como práticas sociais, na medida em que a ideia dos significados nos usos remete a práticas e porque comporta o que está manifesto em diferentes pesquisas da Educação Matemática: há regras próprias de cada prática. (VILELA, 2009, p.203)

É nesse sentido que se pode assumir que, no ensino e a aprendizagem da Matemática, as matemáticas se constituem em diferentes práticas sociais. O papel do professor seria o de ensinar significados a partir do seu uso, que no caso de uma atividade de Modelagem Matemática seria o de ensinar os conceitos a partir de uma situação-problema.

Deste modo, a aprendizagem pode variar conforme o jogo de linguagem de que professor e aluno participam (VILELA, 2007). Nesta perspectiva, consideramos que o conhecimento não se trata de uma verdade absoluta, que o mesmo se constrói, e que deste modo, pode existir outro conhecimento além daquele imposto pelo sistema escolar. Faz-se importante que o professor e o estudante compreendam que os mesmos são capazes de produzir conhecimento novo a partir do seu próprio conhecimento.

Uma atividade de Modelagem Matemática depende das condições que condicionam o modelador, seus objetivos e contexto social. Como o conhecimento não se trata de uma verdade absoluta e está em constante construção, uma mesma situação-problema, dependendo de quem a aborda, pode gerar diferentes interpretações.

Compreendendo que a construção do conhecimento é influenciada pelas circunstâncias do momento histórico e, considerando que os conhecimentos matemáticos aprendidos em sala de aula deveriam surgir de práticas sociais, abordaremos no próximo capítulo o desenvolvimento de alguns modelos matemáticos (mais especificamente aqueles que tratam do estudo do crescimento populacional) mediados pela Modelagem Matemática e das práticas sociais relacionadas a esse desenvolvimento.

CAPÍTULO 4
MODELOS DE CRESCIMENTO POPULACIONAL: UMA ANÁLISE EPISTEMOLÓGICA E DIDÁTICA

4.1 O CONTEXTO DO CONHECIMENTO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O desenvolvimento das Equações Diferenciais está intimamente ligado ao desenvolvimento geral da matemática e, mais especificamente, ao desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral e não pode ser separado dele. Foi a partir de estudos do cálculo de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz que se iniciou o desenvolvimento das Equações Diferenciais durante o século XVII. Por isso, antes de tratarmos dos modelos de crescimento populacional, acreditamos ser importante apresentar um resgate histórico do Cálculo Diferencial e Integral a partir das contribuições de Newton e Leibniz.

Isaac Newton nasceu em 1642, em Woolsthorpe, no interior da Inglaterra. Frequentou desde cedo o prestigiado colégio de Grantham, continuou seus estudos no Trinity College em Cambridge, onde foi aluno de Isaac Barrow (1630-1677) e se tornou professor de Matemática por volta de 1668. Estudou René Descartes (1596-1650), François Viète (1540-1603) e John Wallis (1616-1703). Interessou-se por física e astronomia, tendo em 1687, redigido *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Em 1696 tornou-se governador da casa da moeda britânica e em 1703 foi eleito Presidente da Royal Society, lugar que ocupou até a morte. Morreu em 1727 e foi sepultado na abadia de Westminster (PIRES, 2004).

Segundo Bassalo (1996a), foi no período entre 1664 e 1676, que se deram as principais contribuições de Newton para o desenvolvimento do Cálculo, quando estudou os principais livros escritos até então sobre Matemática. Particularmente, a matemática de Barrow e de Wallis (sobretudo a do tratado *Arithmetic of Infinites* de Wallis), de acordo com Cajori (2007), foram os pontos iniciais do qual Newton, com uma força maior do que a dos seus mestres, moveu-se a campos mais amplos.

Como afirma Serna Martínez (2007),

> Newton percebeu claramente a determinação da tangente a uma curva e o cálculo da área abaixo a curva como operações inversas, além disso, para encontrar a tangente a uma curva utilizava ideias do tipo infinitesimais, de tipo variacional, assim como ideias ao passo do limite (SERNA MARTÍNEZ, 2007, p.69, tradução nossa).

Em 1665 e 1666, Newton concebeu o método das fluxões e aplicou-o à quadratura de curvas. Em 1666, embora com uma notação provisória e ainda complicada, Newton apresentou a exposição de seu método das fluxões em um manuscrito intitulado *To Resolve Problems by Motion* (BASSALO, 1996a). Em 1669, com a publicação de livros com o cálculo de quadraturas por intermédio de representações em série, Newton expôs o método que desenvolvera no manuscrito intitulado *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* e mostrou a seu amigo, o matemático inglês Isaac Barrow (1630-1677) que, imediatamente, o enviou ao matemático inglês John Collins (1625-1683), que ficou maravilhado com o trabalho. Barrow pressionou Newton para publicar o tratado; "mas a modéstia do autor, na qual se excedia, se não culpada, foi certamente na presente instância muito infeliz, impedindo a sua concordância" (CAJORI, 2007, p. 266).

Segundo Nápoles Valdés (1998), Newton compôs vários manuscritos entre 1669 e 1676 sobre os elementos das fluxões. Se tais manuscritos tivessem sido publicados naquela ocasião, e não anos mais tarde, em 1704, não teria provavelmente dado motivo para uma deplorável controvérsia entre Newton e Leibniz.

Foi somente em 1684, quando o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz começou a publicar seu trabalho sobre o Cálculo Diferencial no *Acta Eruditorum,* que Newton considerou a hipótese de também publicar seus trabalhos sobre Matemática. Em meados de 1691, dando continuidade a um manuscrito que começara em 1676, intitulado *De Quadratura Curvarum*, Newton escreveu um novo manuscrito, no qual apresentou um conjunto de problemas resolvidos pelo método das fluxões, problemas semelhantes aos que Leibniz havia resolvido com o seu próprio método (BASSALO, 1996a).

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) estudou Latim, Grego e Retórica, pelos seus próprios meios. Em 1661, inscreveu-se na Universidade de Leipzig, onde adquiriu o grau de Bacharel em leis, defendendo a tese *De Principio Individui*. Em 1667, terminou seu doutorado em direito pela Universidade de Altdorf, com a dissertação *De casibus Perplexis* (PIRES, 2004).

Leibniz apresentou novas contribuições para o desenvolvimento do Cálculo, porém, diferentemente das de Newton. No período de 1672 a 1676, Leibniz morou em Paris devido a uma missão diplomática e teve Christiaan Huygens (1629-1695) como seu principal mestre. Sob a influência de Huygens, Leibniz estudou principalmente, os trabalhos de matemáticos, como René Descartes (1596-1650), Blaise Pascal (1623-1662), René-François Sluse (1622-1685) e Bonaventura Cavalieri (1598-1647) (BASSALO 1996a).

Neste contexto, como afirma Bassalo (1996a, p.183), em 1673, ao estudar o "triângulo" dos acréscimos nos trabalhos de Pascal (ao qual deu o nome de infinitesimal ou característico), Leibniz apresentou sua regra de transmutação: "A área sob uma curva pode ser considerada como sendo a soma das áreas de retângulos pequenos, mas também como a soma das áreas de triângulos pequenos".

Segundo Nápoles Valdés e Negrón Segura (2002), Leibniz foi o primeiro a utilizar o termo "Equações Diferenciais" (*aequatio differentialis)* em 1676, em um sentido bastante restrito, para denotar uma relação entre as diferenciais dx e dy e as variáveis x e y. O que Leibniz denominava como diferencial era a diferença infinitamente pequena de dois valores consecutivos de mesma variável, ideia que estava relacionada com a inclinação da reta tangente. Tal concepção se conservou até os tempos de Euler (nos anos 1768–1770).

A primeira publicação do cálculo diferencial apareceu em 1684, escrita por Leibniz e impressa no *Acta Eruditorum*, sob o título *Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec fractas nec irrationales quantitates moratur*. Segundo Nápoles Váldes e Negrón Segura (2002), este escrito continha uma definição de diferencial e regras simples de operação para seu cálculo em somas, produtos, quocientes, potências e raízes, além de pequenas aplicações a problemas de tangentes e pontos críticos.

Leibniz continuou apresentando, no *Acta Eruditorum*, novos resultados decorrentes da aplicação de seu método de cálculo. É nesse sentido que publicou em 1686, sob o título *De geometria recôndita et analysi indivisibilium atque infinitorum*, um artigo que possui rudimentos do cálculo integral, onde enfatizava a relação inversa entre diferenciação e integração (BOYER, 1974).

As descobertas de Newton, segundo Boyer (1974), não se tornaram automaticamente parte da tradição matemática. Como Newton não se comunicava livremente, seu método das fluxões não foi bem conhecido fora da Inglaterra, enquanto que, por outro lado, Leibniz encontrou discípulos dedicados que estavam ansiosos por aprender o Cálculo Diferencial e Integral e transmitir o conhecimento a outros.

Tanto Leibniz como Newton, elaboraram seus conceitos matemáticos em termos de entes geométricos. Isto foi uma consequência do restrito conceito de função que se encontrava no século XVII, ainda ligado a curva geométrica (NÁPOLES VALDÉS; NEGRÓN SEGURA, 2002).

Segundo Bassalo (1996b), a difusão do cálculo leibniziano se deu por parte dos irmãos James (Jakob, Jacques) Bernoulli (1654-1705), John (Johann, Jean) Bernoulli (1667-1748) e do Marquês Guillaume François Antoine de l'Hopital (1661-1704), que foi aluno de John, permitindo novas contribuições ao desenvolvimento do Cálculo.

Os primeiros contatos de James e John Bernoulli com os trabalhos de Leibniz ocorreram logo após a publicação de seus primeiros artigos sobre o cálculo no *Acta Eruditorum*, em 1684 e 1686 (BASSALO, 1996b). Desejoso de iniciar os estudos da nova análise, James escreveu a Leibniz uma carta, em 1687, ficando sem resposta até 1690. Nesse período, os irmãos começaram a estudar sistematicamente os trabalhos de Leibniz, de modo a desvendar os segredos do Cálculo Diferencial sem a requerida ajuda (CAJORI, 2007). Nessa mesma época, James mantinha uma ativa correspondência com outros matemáticos, mantendo-se atualizado com os principais problemas por eles estudados (BASSALO, 1996b).

Os irmãos Bernoulli produziram muito sobre o desenvolvimento de métodos para solucionar equações diferenciais e para ampliar o campo de suas aplicações.

Em 1691, Leibniz descobriu a técnica de separação de variáveis e a comunicou em uma carta a Huygens, resolvendo uma equação do tipo

$$y\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{f(x)}{g(y)},$$

embora não tenha, naquele momento, formulado um método geral para a resolução de equações deste tipo.

Em 1690, John Bernoulli apresentou o processo conhecido como *separatio indeterminatarum* (separação de variáveis). Já em 1692, John Bernoulli apresentou o método da “multiplicação por um fator integrante”, para resolver equações nas quais a separação de variáveis não se podia aplicar. Resolveu então

$$\alpha xdy - ydx = 0,$$

em que, mesmo sendo possível separar as variáveis, ainda não era conhecido o logaritmo $\int \frac{dx}{x} = \ln x$ necessário para a resolução. (NÁPOLES VALDÉS; NEGRÓN SEGURA, 2002).

Em 1697, a equação com a, b constantes,

$$ady = yp(x)dx + by^n q(x)dx,$$

foi transformada em uma equação diferencial linear de primeira ordem, mediante a substituição $y^{1-n} = v$ por John Bernoulli, passando a equação a chamar-se equação de Bernoulli. Apresentamos a resolução de John Bernoulli no Apêndice A deste texto.

Contudo, com os métodos apresentados até então, a teoria geral das equações diferenciais não podia ser proposta. Resultados de caráter mais geral começaram a se apresentar a partir de meados dos anos 20 do século XVIII.

Em 1724, o matemático italiano Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) teve sucesso na integração de alguns casos especiais da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^\alpha ,$$

com α, a, b constantes. John Bernoulli muito tempo antes tinha tentado resolvê-la, mas sem sucesso. Tal equação também foi ocupação de outros matemáticos como Leibniz e Daniel Bernoulli (NÁPOLES VALDÉS; NEGRÓN SEGURA, 2002).

Uma teoria mais geral para a resolução de equações diferenciais aparece exposta pela primeira vez nas *Institutiones Calculi Integralis* de Leonhard Euler (1707-1783), obra que consta de três volumes que vieram à luz sucessivamente nos anos 1768, 1769 e 1770 com um suplemento em 1794. Estas obras correspondem à primeira sistematização dos trabalhos anteriores e se pode encontrar a primeira teoria das equações diferenciais ordinárias, tais como equações diferenciais de primeira ordem - "separáveis", "homogêneas", "lineares", "exatas"; equações diferenciais de segunda ordem - lineares e as suscetíveis de reduzir a ordem; generalização às equações de ordem superior. Vale a pena salientar que a expressão $\frac{dy}{dx}$, para Euler, significava um quociente entre diferenciais (NÁPOLES VALDÉS; NEGRÓN SEGURA, 2002).

Segundo Boyce e DiPrima (2002), Euler identificou, entre outras coisas, a condição para que equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas em 1734-1735 e desenvolveu a teoria dos fatores integrantes no mesmo artigo. Encontrou a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes em 1743, estendendo esse resultado para equações não homogêneas em 1750-1751. Além disso, Euler usou, com frequência, séries de potências para resolver equações diferenciais, propôs também um procedimento numérico em 1768-1769 e fez contribuições importantes em equações diferenciais parciais.

O século XVIII consistiu na solução de equações particulares específicas. No entanto, a partir dos casos específicos uma teoria mais geral foi sendo estruturada.

Os resultados matemáticos iam ganhando importância na medida em que refletiam uma realidade tangível e o que fazia o cálculo era traduzir a linguagem das funções à explicação ou às relações causadas por fenômenos naturais. O problema do rigor no cálculo começa a se considerar importante no século XIX (NÁPOLES VALDÉS; NEGRÓN SEGURA, 2002).

A necessidade de escrever livros textos para as novas instituições surgidas da Revolução Francesa e o Império Napoleônico (Cauchy (1789-1857) em Paris, Weierstrass

(1815-1897) em Berlim) obrigou a repensar e estruturar o Cálculo Diferencial e Integral. O estabelecimento da Escola Politécnica, em 1795, criou uma forma de explicar a matemática, que se convertia no modelo da educação universitária.

Visando contribuir para essa estruturação, Cauchy começou a escritura sistemática de suas notas de classe. Com o objetivo da investigação científica, sua obra ressalta o pensamento conceitual e a eliminação do pensamento algorítmico presente até o momento (NÁPOLES VALDÉS; NEGRÓN SEGURA, 2002). Segundo Nápoles Valdés e Negrón Segura (2002), o discurso sustentado pelo *Cours Inédit* de Cauchy, agrega a derivada à concepção Euleriana de equação diferencial.

Entre as contribuições mais relevantes de Cauchy podem-se citar: o *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. Première partie. Analyse*, de 1821, o *Résumé des leçons données a l'École royale polytechnique, tome premier*, de 1823, e o *Leçons sur le calcul différentiel*, de 1829 (VIANNA, 2010).

O aparecimento das Equações Diferenciais Ordinárias no século XVIII tem estreita relação com as aplicações, sendo o estabelecimento de equações para modelar fenômenos físicos um dos principais feitos. Neste contexto, apresentamos na próxima seção os modelos de crescimento populacional, cujos primeiros modelos surgiram no século XVIII com o intuito de explicar e predizer o crescimento da população mundial.

4.2 Um Olhar Epistemológico Sobre Modelos de Crescimento Populacional e as Práticas Sociais e Matemáticas neste Contexto

Para nos referirmos aos primeiros ensaios sobre a análise do crescimento da população mundial, usamos os trabalhos de Thomas Robert Malthus, Benjamin Gompertz e Pierre-François Verhulst, ambos datados dos séculos XVIII e XIX. Estruturamos nosso texto considerando também algumas fontes primárias, como textos e documentos originais de Malthus, Gompertz e Verhulst.

4.2.1 O Modelo de Thomas Robert Malthus

Thomas Robert Malthus nasceu no ano de 1766, no condado de Surrey, na Inglaterra. Filho de Daniel e Henrietta Malthus era o penúltimo de sete irmãos. Provavelmente, sobre influências pedagógicas de Jean-Jacques Rousseau (1712-1778), Daniel fez com que seus filhos não frequentassem escolas antes de ter idade suficiente para frequentarem a universidade, educando tanto Malthus como seu irmão na sua própria casa (SZMRECSÁNYI[1], 1982).

Em 1784, com dezoito anos de idade, Malthus começou a estudar no Jesus College da Universidade de Cambridge, se formando em Matemática quatro anos mais tarde. Ele teve a oportunidade de estudar a Física newtoniana e recebeu uma boa formação humanística, tornando-se versado em História e em Letras clássicas (grego, latim) e modernas (inglês, francês).

Em 1793, com vinte e sete anos de idade, Malthus foi admitido como pesquisador na Universidade de Cambridge, até 1804, que devido ao seu casamento teve que renunciar ao cargo.

Em 1796, com trinta anos de idade, Malthus escreveu um panfleto de críticas as governo inglês, então chefiado por William Pitt (1759-1806), intitulado *The crisis: a view of the recent interesting State of Great Britain, by a friend to the constitution*, mas não chegou a publicá-lo por falta de quem interessasse em fazê-lo (MCCLEARY *apud* SZMRECSÁNYI, 1982, p.12). Em 1798 publicou sua obra *An Essay on the principle of population* (O Ensaio sobre o Princípio da População).

Em 1804, Malthus casou-se com sua prima Harriet Eckersall e, em 1805, foi nomeado professor de História Moderna e Economia Política no East India College. Segundo Szmrecsányi (1982), as atribuições deste posto, que foi conservado até a morte, deram origem a todos seus demais trabalhos[2]. Malthus faleceu em 1834.

Segundo Silva (2005), as ideias de Malthus tiveram influências tanto das leituras dos trabalhos de Adam Smith, Condorcet ou Godwin, quanto do meio e das circunstâncias de sua época.

---

[1] O professor Tamás Szmrecsányi escreveu o livro *Thomas Robert Malthus: economia* com o intuito de passar em revista a vida e a obra de Malthus. Neste livro são apresentados alguns dos principais trechos de publicações selecionadas no que se refere às teorias da população, da renda da terra e da demanda efetiva.

[2] Nosso foco está na obra *Ensaio*, em particular nos postulados que se refere sua teoria, e não nas demais obras publicadas por Malthus.

> O rápido crescimento das cidades européias depois de 1500, devido à concentração urbana de populações pobres, forneceu uma força de trabalho potencial de dimensões substanciais depois de 1750. As pequenas manufaturas que existiam nessas cidades desde a Idade Média tinham agora mão-de-obra barata em abundância, do que se aproveitaram os proprietários de muitas delas para expandir seus negócios. Embora a jornada de trabalho dos operários atingisse oitenta horas semanais, os salários eram muito baixos. Empregavam-se mulheres e crianças porque elas podiam fazer o mesmo trabalho que os homens, mas recebiam salário muito inferior. As condições de trabalho eram horríveis e acidentes sérios eram comuns. Os trabalhadores viviam em guetos imundos, insalubres, muitas vezes em famílias grandes que se comprimiam em habitações minúsculas e sem aquecimento (SILVA, 2005, p.277).

O texto de Silva (2005) revela que a industrialização requeria, além de uma força de trabalho disponível, uma classe empreendedora com acesso a capitais e investida de autoridade. Foi nesse contexto que se iniciou a Revolução Industrial, por volta de 1750 na Inglaterra, se difundindo por outras partes da Europa e pela América, fazendo emergir a burguesia no final do século XVIII.

A obra "O Ensaio sobre o Princípio da População", como expressa o próprio prefácio, foi sugerida por uma conversa com Godwin[3]. "A discussão iniciou com a questão geral sobre o futuro progresso da sociedade" (MALTHUS, 1798, p.vii, tradução nossa).

> O tema central do *Ensaio* era o crescimento da população e da pobreza, problemas reais e concretos que não podiam ser ignorados por quem quer que acompanhasse mais de perto as circunstâncias em que estava se processando a Revolução Industrial, então em pleno curso na Grã-Bretanha (MEEK *apud* SZMRECSÁNYI, 1982 p.13).

Sem dúvida, o *Ensaio* poderia ter-se tornado mais completo, por uma coleta maior de fatos para esclarecer o argumento geral. Contudo um desejo de publicar essa obra por um prazo não muito além do que fora estabelecido, além de uma interrupção longa por negócios particulares, de acordo com Szmrecsányi (1982), impediram o autor de dar uma atenção ao assunto de maneira a torná-lo mais completo.

Em 1798, as aglomerações industriais começavam a crescer, o proletariado da fábrica surgia, e ao mesmo tempo, o país atravessava uma crise das mais graves. O agravamento da miséria se deu pelo aumento dos impostos para os pobres. Malthus escreveu seu *Ensaio* em meio ao aumento rápido da população e a essa penúria, voltada mais pela má distribuição de riqueza do que pelo grande número de seus habitantes (MANTOUX, sd).

---

[3] William Godwin (1756-1836), partidário da Revolução Francesa; seu trabalho mais famoso, *Enquiry concerning political justice*, foi publicado pela primeira vez em 1793.

Sua teoria sobre o crescimento populacional humano está baseada em dois postulados:

1. "O alimento é necessário para a subsistência do homem".

2. "A paixão entre os sexos é necessária e deve permanecer praticamente em seu estado permanente". (MALTHUS, 1798, p.4, tradução nossa).

Segundo Malthus (1798), tais postulados parecem ter sido fixados pelas leis da natureza, desde que teve qualquer conhecimento sobre a humanidade. Assumindo como garantidos, Malthus afirma que "a capacidade de reprodução da população é superior à capacidade da terra para produzir meios de subsistência para o homem". E, por isso, quando não controlada, a população aumenta em proporção geométrica, enquanto os meios de subsistência aumentam em progressão aritmética (MALTHUS, 1798, p.4, tradução nossa).

Em seu *Ensaio*, Malthus tomou como regra que a população, quando não controlada, cresce dobrando a si mesma, a cada vinte e cinco anos, ou aumentando em uma progressão geométrica. Segundo ele, tal progressão não se aplica a qualquer população, mas apenas àquelas cujo crescimento não estava sujeito a obstáculos (SZMRECSÁNYI, 1982).

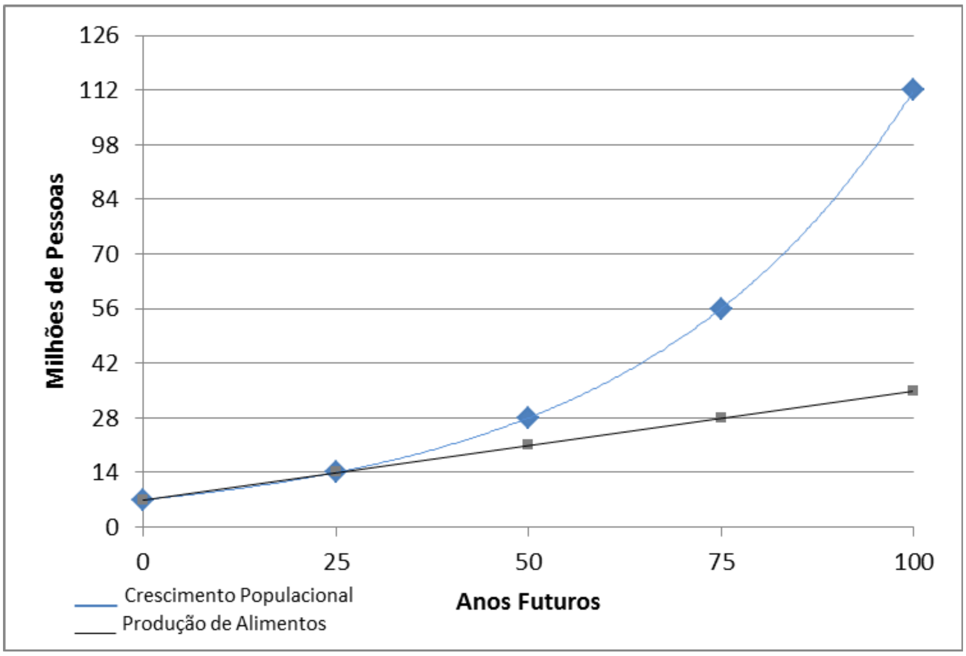
Considerando um estado onde prevalecem costumes puros e simples e onde os meios de subsistência são suficientes para constituir uma família, deixando-se capacidade de crescimento da população se exercer sem obstáculos, o aumento da espécie humana seria evidentemente muito maior do que qualquer aumento conhecido até o momento (SZMRECSÁNYI, 1982).

Os postulados de Malthus conduziram a argumentações sobre as relações entre o crescimento da população e a produção de alimentos:

> A população da ilha foi computada em cerca de sete milhões e suporemos que sua produção anual equalize o sustento dessa quantidade de pessoas. Nos primeiros vinte e cinco anos a população cresceria para catorze milhões e, os alimentos também sendo dobrados, os meios de subsistência seriam iguais a este total aumentado. Nos vinte e cinco anos seguintes a população atingiria vinte e oito milhões e os meios de subsistência equalizariam apenas o sustento de vinte e um milhões. No próximo período a população seria de cinqüenta e seis milhões e os meios de subsistência suficientes apenas para a metade deste número. E no final do primeiro século a população seria de cento e doze milhões e os meios de subsistência iguais a apenas o sustento de trinta e seis milhões, o que deixaria uma população de setenta e sete milhões totalmente desprovida (MALTHUS *apud* SZMRECSÁNYI, 1982 p.60).

Nestas condições, a qualidade de vida das pessoas com menor poder aquisitivo seria muito ruim e condicionada a severas aflições e, ainda, a partir dos primeiros vinte e cinco anos a falta de alimentos poderia ser sentida. A Figura 4.1, que estruturamos a partir dos dados de Malthus, revela esta relação entre alimentos e população.

Figura 4.1 – Representação Gráfica da Teoria Malthusina.



Para Malthus (1826), considerando a situação econômica da época, sendo a oferta de trabalho no mercado inferior à proporção do número de trabalhadores, o preço das provisões iria aumentar e o preço da mão-de-obra diminuir. Diante disto, as dificuldades de constituir uma família e os desencorajamentos ao casamento fariam com que o crescimento da população se estabilizasse.

> Os pobres, consequentemente, devem viver muito pior, e muitos deles serão reduzidos a uma miséria severa. O número de trabalhadores também deve ficar acima da proporção do trabalho no mercado, o preço do trabalho tende a cair, enquanto o preço dos mantimentos ao mesmo tempo tende a subir. O trabalhador, portanto, deve trabalhar mais, para ganhar o mesmo do que antes. Durante esta época de miséria, o desânimo para casar e a dificuldade de criar uma família são tão grandes, que o progresso da população é retardado. Nesse meio tempo, o barateamento do trabalho, a abundância de trabalhadores, e a necessidade da indústria crescem entre eles, incentivando os agricultores a empregar mais trabalho em sua terra, [...] até que finalmente os meios de subsistência podem tornar-se a mesma proporção que a população, como no período a partir do qual partimos. A situação do trabalhador é novamente razoavelmente confortável, as restrições à população são, em certa medida, soltas; e, após um curto período, os mesmos movimentos retrógrados e progressistas, com respeito à felicidade, são repetidos (MALTHUS, 1826, p.18, tradução nossa).

Segundo estas argumentações de Malthus, os meios de subsistência não seriam suficientes para manter a população, que tende a crescer em progressão geométrica. Faz-se assim, necessário submetê-la a algum tipo de controle. Os controles preventivos seriam a redução da taxa de natalidade (como a esterilidade, a abstinência sexual e o controle de nascimentos), e os controles da população já existentes seriam caracterizados pela elevação da taxa de mortalidade (como a pobreza, as doenças, as epidemias, as guerras, a peste e a fome) (MALTHUS, 1826, p.12). Nesse sentido, a miséria seria um controle do crescimento da população, atuando como um meio para reequilibrar a desproporção natural entre o crescimento populacional e os meios de subsistência.

Por outro lado, em meio à abundância de trabalhadores, ao barateamento do trabalho e à necessidade de mais mão-de-obra, os meios de subsistência voltariam a estar na mesma proporção da população, permitindo seu crescimento (SZMRECSÁNYI, 1982). Os pobres viveriam, assim, em um movimento oscilatório entre o retrocesso e o progresso da felicidade humana.

Malthus (1798) coloca em seu *Ensaio* algumas proposições a serem verificadas. Segundo o autor, a sua análise poderia convencer de que são verdades incontestáveis.

> 1. A população está necessariamente limitada pelos meios de subsistência.
> 2. A população invariavelmente aumenta onde os meios de subsistência aumentam, a menos que seja impedido por algum controle muito poderoso e óbvio.
> 3. Esses controles, e os controles que reprimem o poder superior da população e mantém os seus efeitos ao nível dos meios de subsistência, estão todos resolvidos em contenção moral, vício e miséria. (MALTHUS, 1826, p.23, tradução nossa)

“A primeira dessas proposições quase não precisa de ilustração. A segunda e a terceira são suficientemente demonstradas por uma revisão dos controles imediatos para a população do estado passado e presente da sociedade” (MALTHUS, 1826, p.24, tradução nossa).

Considerando discussões em torno dessas proposições, em 1803, Malthus publicou a segunda edição do *Ensaio*, diferentemente da sua primeira edição. O título dessa edição é *An Essay on the principle of population; or a view of its past and presente effects on human happiness; with an inquiry into our prospects respecting the future removal of the evils which it occasions* (Um ensaio sobre o princípio da população; ou uma visão de seus efeitos passados e presentes sobre a felicidade humana; com uma investigação sobre as nossas perspectivas no que diz respeito a remoção futura dos males que ocasiona) (SZMRECSÁNYI, 1982, p.17). Esse segundo *Ensaio*, Malthus veio a reeditar sucessivamente em 1806, 1807, 1817 e 1826.

Segundo Szmrecsányi (1982), Malthus publicou seus trabalhos de uma maneira favorável aos interesses das classes dominantes, uma vez que associou a expansão da miséria com um fenômeno tão natural como o crescimento da população, e não a causas econômicas e sociais. O caráter ideológico de suas publicações, incluindo ideias sustentadas por um grupo social, a qual reflete, racionaliza e defende seus interesses, gerou polêmica entre aqueles que estavam a favor e aqueles que eram contrários as suas publicações.

Neste sentido, as práticas sociais que podem ter influenciado Malthus na elaboração de suas publicações estão relacionadas às relações de poder da classe dominante, as ideias utópicas oriundas da Revolução Francesa e/ou a própria necessidade de chamar a atenção para o crescimento da população e ao aumento da pobreza, consequências da Revolução Industrial.

Em termos da estruturação de uma Modelagem Matemática, podemos considerar que, inicialmente a partir de uma situação inicial problemática (o crescimento da população), Malthus definiu alguns postulados, considerados aqui como hipóteses, na busca por um modelo matemático adequado para o problema. Assim, as hipóteses de Malthus são:

1. “O alimento é necessário para a subsistência do homem”. 2. “A paixão entre os sexos é necessária e deve permanecer praticamente em seu estado permanente”. (MALTHUS, 1798, p.4, tradução nossa).

Com vistas a fazer previsões sobre a situação em estudo e tentar intervir nos acontecimentos e na política de seu tempo, o modelo de Malthus estabelece que “a capacidade de reprodução da população é superior à capacidade da terra para produzir meios de subsistência para o homem”. E, por isso, quando não controlada, a população aumenta em proporção geométrica, enquanto que os meios de subsistência aumentam em uma progressão aritmética (MALTHUS, 1798, p.4, tradução nossa).

O que se pode observar nos trabalhos de Malthus, é que seu modelo não foi escrito em termos de uma linguagem matemática. Isso pode ser justificado pela própria época em que se inseria, e pelo modo como elaborou seus trabalhos dirigidos, essencialmente, às atividades e aos idealizadores da Revolução Industrial.

Atualmente, o que se convencionou chamar de modelo de Malthus, assume que a variação do crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante, o que significa dizer que a população aumenta em progressão geométrica ou em crescimento exponencial.

Em termos de uma linguagem matemática, considerando P_t o número de pessoas de uma população (em milhões) no ano t, uma constante α que pode ser descrita como $\alpha = n - m$, onde n representa a taxa de natalidade e m representa a taxa de mortalidade, e P_0 uma população inicial, podemos escrever $P_{t+1} - P_t = (n-m)P_t = \alpha P_t$, o que implica, $P_{t+1} = (\alpha+1)P_t$. Considerando $t = 0, 1, 2, \ldots$, segue que:

$$P_1 = (\alpha+1)^1 P_0,$$

$$P_2 = (\alpha+1)^2 P_0,$$

$$P_3 = (\alpha+1)^3 P_0,$$

e usando a recursividade podemos escrever,

$$P_t = (\alpha+1)^t P_0, \qquad (4.1)$$

que foi a primeira expressão em linguagem matemática associada às ideias de Malthus sobre o crescimento da população.

Usando a relação entre função exponencial e logaritmo podemos escrever:

$$(\alpha+1)^t = \left[e^{\ln(\alpha+1)}\right]^t = e^{t\ln(\alpha+1)},$$

e assim, a expressão (4.1) pode ser escrita como:

$$P_t = P_0 e^{kt}, \qquad (4.2)$$

onde $k = \ln(\alpha+1)$.

Para encontrar a taxa da progressão geométrica α, consideraremos um trabalho independente de Malthus, publicado em 1824, cujo título é *População*, no suplemento à quinta edição da *Enciclopedia Britannica*. Essa obra tem o mérito de mostrar, em forma condensada, o pensamento de Malthus sobre a temática populacional (SZMRECSÁNYI, 1982). Malthus, nesta publicação, usou dados dos censos de 1790 a 1820 da população branca dos Estados Unidos.

> De acordo com um censo regular, feito por ordem do Congresso em 1790, o qual por todas as razões deve ser considerado essencialmente correto, a população branca dos Estados Unidos era de $3\,164\,148$ habitantes. Um censo similar, feito em 1800, mostrou que ela tinha aumentado para $4\,312\,841$. Portanto, ela crescera durante os dez anos que medeiam entre 1790 e 1800 a uma taxa de 36,3%, a qual, se mantida, dobraria a população em cerca de 22 anos e 4 meses e meio.
> De acordo com um terceiro censo, de 1810, a população branca era de $5\,862\,092$, a qual, comparada com aquela de 1800, mostra, na segunda

> década, um aumento de cerca de 36%, que, se mantido, dobraria a população em cerca de 22 anos e meio. (Estes números são tomados dos *Statistical Annals*, de Seybert, p.230.)
> De acordo com o quarto censo, de 1820, a população branca era de $7\,861\,710$, a qual, comparada com a de 1810, mostra um aumento, na terceira década, a uma taxa de 34,1%, que, se mantido, dobraria a população em 23 anos e 7 meses. (O número é tirado do *National Calendar* americano de 1822 e desde então tem sido comparado com o censo original, tal como foi publicado para uso dos membros do Congresso.)
> Se compararmos com vinte e cinco anos o período que a população leva para dobrar estando submetida à taxa de aumento da década mais desfavorável, encontraremos uma diferença que cobre completamente todo o aumento da população atribuível à imigração ou afluxo de estrangeiros. (MALTHUS *apud* SZMRECSÁNYI, 1982, p.153)

Deste modo, considerando $P_0 = 3\,164\,148$, $P_{10} = 4\,312\,841$ e substituindo em (4.1) segue que $4\,312\,841 = 3164148(1+\alpha)^{10}$, ou seja, $\alpha = 0{,}03$.

Malthus tinha em mente em suas publicações uma taxa de crescimento demográfico de 3% ao ano, capaz de dobrar a população a períodos de 25 anos, como pode ser observado pelo cálculo acima. As diferenças de cálculo, Malthus atribuía à imigração ou afluxo de estrangeiros.

Portanto, seu modelo matemático pode ser descrito da seguinte forma:

$$P_t = P_0 \cdot 1{,}03^t \text{ ou } P_t = P_0 e^{0{,}03\,t} \quad (4.3)$$

Comparando a população observada com a população calculada para os anos de 1790, 1800, 1810 e 1820, segue que o modelo matemático associado às ideias de Malthus, em um pequeno intervalo de tempo, pode ser considerado como válido (Tabela 4.1).

Tabela 4.1 – Comparação entre a população observada e a população calculada para o modelo de Malthus

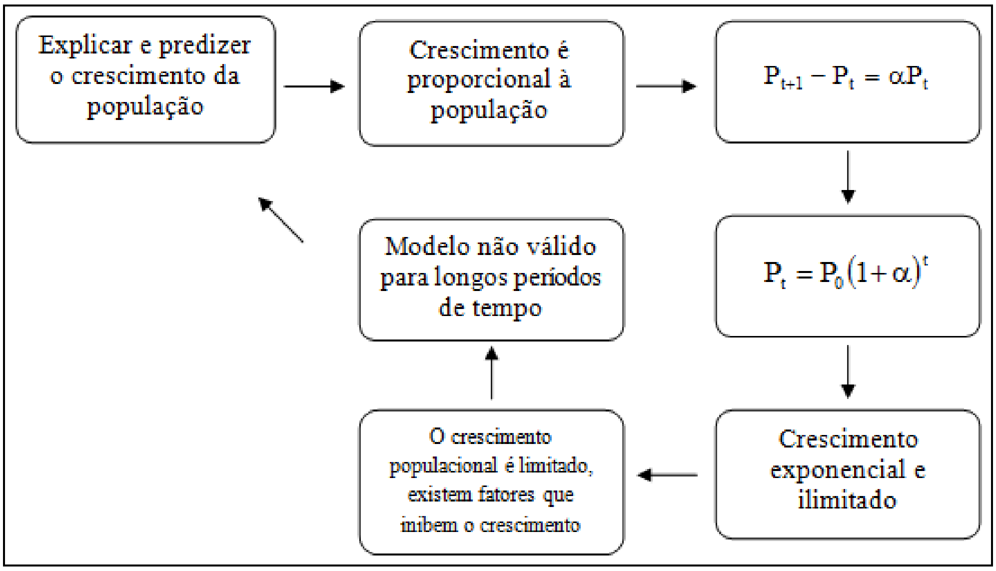
t	anos	População Observada	População Calculada
0	1790	3 164 148	3 164 148
10	1800	4 312 841	4 252 350
20	1810	5 862 092	5 714 803
30	1820	7 861 710	7 680 218

Para o crescimento da população, em períodos curtos de tempo, os modelos (4.1) e (4.2) podem ser razoavelmente precisos. Contudo, tais modelos podem descrever, de maneira equivocada, o comportamento da situação-problema, visto que segundo Malthus, a variação da população seria orientada essencialmente pela variação entre nascimentos e mortes. Para o controle de nascimentos e mortes é que suas publicações eram direcionadas.

Considerando dados atuais da população dos Estados Unidos (http://www.census.gov/ em 05/05/2011), a população residente neste país em 2010 era de $308\,745\,538$ habitantes. Substituindo $t = 220$ em (4.3), que corresponde ao ano de 2010, obteríamos aproximadamente dois bilhões de pessoas. Isso sinaliza que o modelo matemático associado às ideias de Malthus pode ser considerado como não válido para fazer previsões sobre o crescimento populacional, considerando períodos mais prolongados de tempo. Seria necessário, ponderar a existência de algum fator que deve reduzir a taxa de crescimento e inibir o crescimento exponencial.

Em termos das etapas de uma Modelagem Matemática, conforme mostramos na Figura 3.1 (página 29), podemos considerar uma sequência de etapas para as formulações de Malthus com vistas a fazer previsões para o crescimento da população, conforme pode ser observado na Figura 4.2.

Figura 4.2 – Modelagem Matemática para o modelo de Malthus



Considerando esta limitação do modelo proposto por Malthus, Benjamin Gompertz e Pierre-François Verhulst propuseram hipóteses complementares às enunciações apresentadas por Malthus conforme argumentamos a seguir.

4.2.2 O modelo de Benjamin Gompertz

Benjamin Gompertz nasceu em Londres em 1779. O jovem Gompertz mostrou, desde cedo, uma habilidade prodigiosa em matemática. Todavia, sua família era judia, e deste modo foi-lhe negado o acesso à universidade. Gompertz começou a educar a si mesmo e aprendeu matemática por meio do estudo de trabalhos de Newton e Maclaurin. (NORTON, 2005, p.379)

Gompertz, embora ainda tenha estruturado suas ideias em um contexto de pouco desenvolvimento matemático, já era influenciado pela notação de Newton. Iniciou suas publicações ainda jovem e não muito tempo depois de Malthus. O seu avanço principal em relação ao modelo proposto por Malthus reside justamente no fato de considerar que a população humana é limitada e não cresce exponencialmente.

Para estruturar sua primeira publicação no que se refere a mortalidade humana em 1825, Gompertz foi influenciado por Newton. Segundo Henry e Parker (1865, p.262, tradução nossa), "sua recusa em mudar sua linguagem foi ditada por respeito à memória de Newton". A sua publicação de 1825 foi denominada *On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies* (Sobre a natureza da função expressiva da lei de mortalidade humana, e sobre um novo modo de determinação do valor das contingências da vida).

Segundo Gompertz, a intensidade da mortalidade é descrita pela expressão

$$aq^x$$

onde a e q são quantidades constantes e x a idade em anos. Deste modo, a intensidade da mortalidade aumenta exponencialmente com a idade do indivíduo.

Considerando L_x a população no instante x e a, b e q quantidades constantes, usando a notação newtoniana, Gompertz (1825, p.518) escreveu a equação

$$abq^x = -\frac{\dot{L}_x}{L_x} \qquad (4.4)$$

cuja solução é dada por

$$L_x = dg^{q^x} \qquad (4.5)$$

com d, g parâmetros a ser determinados.

Embora publicada em 1825, a formulação de Gompertz tem sido utilizada por vários autores para tratar do crescimento, tanto em fenômenos biológicos como econômicos.

Com o intuito de considerar algumas propriedades matemáticas, em relação à modelagem de Gompertz, vamos nos apropriar da releitura de Winsor (1932) para a equação (4.4).

Considerando a solução $L_x = dg^{q^x}$ indicada por Gompertz, segue que

$$\log L_x = \log dg^{q^x}$$

$$\log L_x = \log d + \log g^{q^x}$$

o que conduz a

$$\log L_x - \log d = q^x \cdot c,$$

onde $c = \log g$.

Escrevendo de outra maneira, temos que

$$q^x = \frac{\log L_x - \log d}{c}. \tag{4.6}$$

Considerando a equação de Gompertz (4.4), usando linguagem de Leibniz, podemos escrever

$$\frac{dL_x}{dx} = -L_x abq^x . \tag{4.7}$$

Substituindo (4.6) em (4.7) segue que

$$\frac{dL_x}{dx} = -abL_x \left(\frac{\log L_x - \log d}{c} \right) ,$$

ou seja,

$$\frac{dL_x}{dx} = kL_x (\log d - \log L_x) .$$

onde $k = \dfrac{ab}{c}$.

Como a equação diferencial encontrada é separável de modo que é possível colocar cada uma das duas variáveis em lados diferentes da equação então

$$\frac{dL_x}{L_x(\log d - \log L_x)} = kdx . \tag{4.8}$$

Fazendo a integral de (4.8) por substituição sendo $u = \log d - \log L_x$ e usando logaritmo neperiano temos que

$$-\ln 10 \int \frac{du}{\text{u}} = \int kdx$$

$$\ln 10 \cdot \ln u = w - kx,$$

sendo w uma constante a ser determinada. Tal equação nos faz concluir, mudando novamente para a variável x,

$$\ln 10 \cdot \ln[\log d - \log L_x] = w - kx,$$

$$\ln 10 \cdot \ln\left[\log\left(\frac{d}{L_x}\right)\right] = w - kx.$$

Transformando o logaritmo decimal em logaritmo natural, segue que

$$\ln\left[\ln\left(\frac{d}{L_x}\right)\right] = w - kx,$$

e considerando as propriedades inversas para a função logarítmica temos

$$\ln\left(\frac{L_x}{d}\right) = -e^{w-kx}$$

$$\exp\left(\ln\left(\frac{L_x}{d}\right)\right) = \exp(-\exp(w-kx)),$$

e, portanto,

$$L_x = d\exp(-\exp(w-kx)). \tag{4.9}$$

onde d e k são essencialmente quantidades positivas.

Com o intuito de analisar o comportamento de um crescimento descrito pela expressão (4.9), é adequado encontrar o ponto de inflexão, ou seja, encontrar o ponto em que ocorre a mudança de concavidade da curva (4.9). Com essa finalidade, Winsor (1932) analisou a primeira e a segunda derivada da função (4.9).

> De (4.9), à medida que x se aproxima do infinito negativo, L_x se aproxima de zero; quando x se aproxima do infinito positivo, L_x se aproxima de d. Diferenciando (4.9) temos
>
> $$\frac{dL_x}{dx} = dk \cdot \exp(w-kx) \cdot \exp(-\exp(w-kx)) = kL_x e^{w-kx}$$
>
> e é evidente que a inclinação é sempre positiva para os valores finitos de x, e se aproxima de zero para valores infinitos de x. Diferenciando novamente temos
>
> $$\frac{d^2L_x}{dx^2} = k^2 L_x e^{w-kx}\left(e^{w-kx} - 1\right), \tag{4.10}$$
>
> De (4.10) vemos que haverá um ponto de inflexão quando
>
> $$x = \frac{w}{k}.$$
>
> A ordenada do ponto de inflexão é
>
> $$L_x = \frac{d}{e},$$
>
> ou aproximadamente, quando 37% da população final foi alcançada. (WINSOR, 1932, p.2)

O modelo de Gompertz, estruturado em termos da linguagem de Leibniz, é ainda hoje um modelo matemático usado em diferentes áreas do conhecimento. Deste modo, quando o conjunto de dados apresentar um ponto de inflexão em aproximadamente 35% a 40% do crescimento total estimado, pode-se utilizar o modelo matemático de Gompertz com uma boa expectativa de ajuste dos dados.

4.2.3 O Modelo de Pierre-François Verhulst

Pierre-François Verhulst nasceu em Bruxelas no ano de 1804, obtendo o grau de doutor em Matemática pela Universidade de Ghent no ano de 1825. Depois da Revolução de 1830 e da independência da Bélgica, ele se tornou professor de Matemática na Universidade Livre de Bruxelas. Verhulst se tornou presidente da Academia Real da Bélgica em 1848, mas morreu no ano seguinte, em Bruxelas, provavelmente de tuberculose (BACAËR, 2011).

Em 1835, Alfhonse Quetelet publicou *A Treatise on Man and the Development of his Faculties* (Um tratado sobre o homem e o Desenvolvimento de suas faculdades). Quetelet foi um dos primeiros a considerar que o modelo exponencial de crescimento de Malthus não era adequado para explicar a expansão demográfica de um país. Ele estava convencido de que uma população não poderia crescer indefinidamente, mas que existiam forças, tanto externas como internas, que privavam esse crescimento.

Foram as ideias de Quetelet que inspiraram Verhulst (BACAËR, 2001; MARTÍNEZ RODRÍGUEZ, 2008). Segundo Martínez Rodríguez (2008), deve-se a referência a Quetelet, porque foi professor de Pierre-François Verhulst na Universidade de Gante, com quem trabalhou durante um extenso período de tempo e sobre quem teve uma grande influência tanto em sua vida pessoal como em sua obra. Quetelet insiste em seu obituário: “Ele foi sucessivamente meu aluno e meu colaborador; meu colega na Escola Militar e meu colega na Academia; estou honrado por ter sido seu amigo, a partir do momento em que eu comecei a conhecê-lo até que a morte nos separou” (*il fut successivement mon élève et mon collaborateur; mon collègue à l’École militaire et mon confrère à l’Académie; je m’honore d’avoir été son ami, depuis l’instant où j’ai pu le connaître jusqu’à celui où la mort nous a séparés*) (QUETELET, 1850, p.98, tradução nossa).

Nesse sentido, o interesse em estudar a previsão do crescimento da população, devido às relações com Quetelet, e/ou o interesse em responder à problemática do crescimento exponencial de Malthus, se apresentaram como práticas sociais, que em um contexto histórico e social outorgaram uma estrutura e um significado às próprias práticas de Verhulst.

Os resultados das investigações de Verhulst sobre o crescimento demográfico vieram à luz através de várias publicações no período de 1838 até 1847 e as quais tivemos acesso para elaboração de nosso trabalho.

- 1838 - *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement* (Nota sobre a lei que a população segue em seu crescimento), um texto de 9 páginas;
- 1845 - *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population* (Investigações matemáticas sobre a lei de crescimento da população), uma primeira memória de 41 páginas;
- 1846 - *Note sur la loi d'accroissement de la population* (Nota sobre a lei do crescimento da população), um texto de 2 páginas;
- 1847 - *Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population* (Segunda memória sobre a lei do crescimento populacional), uma segunda memória de 32 páginas.

O trabalho de Verhulst *Nota sobre a lei que a população segue em seu crescimento* foi publicado em 1838 no *Correspondance Mathématique et Physique*, editado por Alfhonse Quetelet. Nesta publicação, Verhulst expôs a essência de sua teoria e comparou os dados obtidos pelo seu modelo com alguns valores populacionais, utilizando, para isso, dados anteriores a 1833.

Verhulst (1838) defende que o crescimento populacional tem necessariamente um limite (*L'accroissement de la population a nécessairement une limite*) e não cresce indefinidamente como Malthus propôs em seu modelo. Adotando as hipóteses de Quetelet, ele assumiu que a resistência ao crescimento humano é proporcional ao quadrado da velocidade com que a população tende a crescer (*M. Quetelet suppose proportionnelle au carré de la vitesse avec laquelle la population tend à croítre*).

Como seus resultados poderiam despertar interesse, pelo menos como um objeto de especulação, Verhulst se sentiu obrigado a ceder ao convite de Quetelet e entregá-los a público:

> Seja p a população. Representamos por dp o crescimento infinitamente pequeno durante um tempo infinitamente pequeno dt. Se a população crescesse em progressão geométrica, teríamos a equação $\frac{dp}{dt} = mp$. Mas como a velocidade de crescimento da população é retardada pelo aumento do número de pessoas, devemos subtrair de mp uma função desconhecida de p, $\varphi(p)$, de modo que o modelo é dado por:
>
> $$\frac{dp}{dt} = mp - \varphi(p). \tag{4.11}$$
>
> A hipótese mais simples que pode ser feita sobre a forma da função φ, é assumir $\varphi(p) = np^2$. Considerando esta função, e integrando a expressão (4.11) temos que
>
> $$t = \frac{1}{m}\left[\log p - \log(m - np)\right] + \text{const.}, \tag{4.12}$$
>
> e bastam três pares de dados observados para determinar os coeficientes m e n constantes e a constante arbitrária.
>
> Isolando p na expressão (4.12), segue que
>
> $$p = \frac{mp'e^{mt}}{np'e^{mt} + m - np'}, \tag{4.13}$$
>
> onde p' é a população que corresponde a $t = 0$, e e a base dos logaritmos naturais. Se $t = \infty$, vemos que o valor de p corresponde a $p = \frac{m}{n}$. Este é, portanto, o limite superior da população. (VERHULST, 1838, p.115, tradução nossa).

Usando a expressão (4.13), Verhulst (1838) calculou os valores referentes às populações da França, Bélgica, Rússia e do condado de Essex com dados anteriores a 1833. Ainda justificou por que não estendeu as tabelas da França e da Bélgica até 1837 na análise de seu modelo, usando veículos de comunicação publicados nestes dois países desde 1833: minhas ocupações não me deixam ter o prazer (*mes occupations ne m'en ont pas laissé le loisir*).

Contudo, Verhulst (1838) nesta publicação não apresenta detalhes sobre a formulação do modelo (4.13) nem tampouco se referiu a ela como curva logística.

Em 1845, Verhulst publicou a memória *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population* (Investigações matemáticas sobre a lei de crescimento da população) em Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences. Nesta segunda publicação, mais completa que a primeira, Verhulst introduziu o termo 'logístico' para referir-se a equação de crescimento populacional, forneceu mais detalhes sobre suas propriedades, estimou os parâmetros da equação, o que permitiu realizar uma estimativa para o tamanho máximo da população da Bélgica e da França.

No início de sua publicação, Verhulst colocou que são muitas as causas que impedem e promovem o crescimento humano, e que em toda a sua generalidade, o problema é claramente insolúvel. Ainda colocou que, a estatística (sendo muito nova naquela época) não oferecia confiança para comparar os resultados do seu cálculo com aqueles extraídos de documentos oficiais.

> De todos os problemas que a economia oferece para meditações dos filósofos, um dos mais interessantes é, sem dúvida, o conhecimento da lei que regula o crescimento da população. Para resolvê-lo com precisão, deve-se ser capaz de avaliar a influência de muitas causas que impedem ou promovem a multiplicação da espécie humana. E uma vez que muitas dessas causas são variáveis, por sua natureza e modo de ação, o problema considerado em toda a sua generalidade, é claramente insolúvel.
> [...] Se os dados da estatística contêm a mesma precisão que aqueles das ciências experimentais, como a física e a química, poderia ser julgada a influência das causas negligenciadas pela comparação dos resultados do cálculo com os de observação. Infelizmente, a estatística é uma ciência ainda muito nova, para que possamos ter total confiança nos dados que ela fornece. (VERHULST, 1845, p.3-4, tradução nossa)

Para sua formulação na publicação de 1845, Verhulst explicitou que dentre as causas que provocam o aumento na população está a fertilidade, a segurança e a moral do país, bem como as leis civis e religiosas.

Segundo Verhulst, a lei de crescimento geométrico proposta por Malthus é viável apenas em circunstâncias muito excepcionais, como por exemplo, quando um território fértil e ilimitado, é habitado por um povo de uma civilização muito avançada como a dos primeiros colonos dos Estados Unidos.

Designando por p a população, t o tempo, s e n constantes indeterminadas, b a população normal e tendo denotado M como o módulo pelo qual é necessário multiplicar o logaritmo natural para convertê-lo em logaritmo decimal,

> podemos substituir a equação diferencial $\frac{Mdp}{pdt} = s$, relativa a progressão geométrica por
> $$\frac{Mdp}{pdt} = s - n(p - b), \tag{4.14}$$
> portanto, denominando, para encurtar, $m = s + nb$,
> $$\frac{Mdp}{pdt} = m - np ,$$
> e
> $$dt = \frac{Mdp}{mp - np^2} .$$

Esta equação sendo integrada e considerando que $t = 0$ corresponde a $p = b$, resulta em

$$t = \frac{1}{m}\log\left[\frac{p(m - nb)}{b(m - np)}\right]. \qquad (4.15)$$

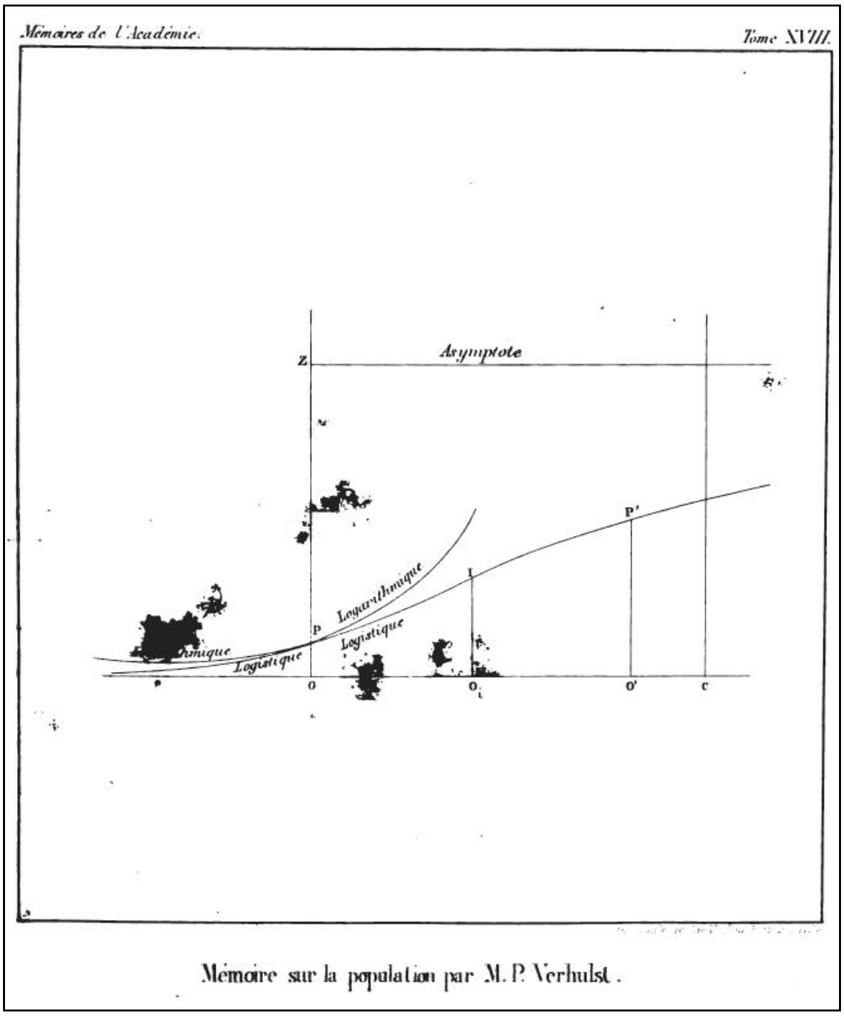
(VERHULST, 1845, p.8, tradução nossa)

Verhulst (1845) deu o nome de logística à curva (Figura 4.3) que representa a equação (4.15). (Nous donnerons le nom de logistique à la courbe (voyez la figure) caractérisée par l'équation precedente).

Dentre as características da curva logística, Verhulst (1845) explicitou que ela tem uma assíntota paralela ao eixo das abscissas, a uma distância $\frac{m}{n}$ da origem, porque $p = \frac{m}{n}$ satisfaz a $t = \infty$ e representa o limite extremo da população.

Por meio da diferenciação da equação (4.14), colocou que a curva tem um ponto de inflexão I, correspondente à $p = \frac{1}{2}\frac{m}{n}$ e, que neste ponto, ocorre a mudança de concavidade da curva, indicando que o crescimento da população é mais rápido até o instante em que metade do limite da população é atingida. A partir desse instante, o crescimento da população é mais lento.

Figura 4.3 – Curva logística representada por Verhulst em 1845.



Fonte: VERHULST (1845, p.41).

Com o intuito de obter uma lei de crescimento da população, Verhulst modificou o eixo das ordenadas, e como a fórmula (4.16) estava em função de três parâmetros desconhecidos, concluiu que bastaria conhecer o número da população em três épocas diferentes.

> Mantendo o mesmo eixo das abscissas, transportando agora a origem das coordenadas em um ponto C, cuja distância do ponto O_i será denotada por i. Mudando, em consequência, t em $t+i$, para a equação geral da logística relatada em relação a uma ordenada qualquer,
>
> $$t+i=\frac{1}{m}\log\left[\frac{p}{\frac{m}{n}-p}\right] \qquad (4.16)$$
>
> em que a abscissa do ponto de inflexão é $-i$. Se quiser obter o valor de p em relação a t, pode-se representar, por brevidade,
>
> $$10^{(t+i)m}=z,$$
>
> e se obtém
>
> $$p=\frac{m}{n}\cdot\frac{z}{1+z}.$$

A fórmula (4.16) contém três desconhecidos, é suficiente conhecer o número da população em três épocas diferentes, para se obter a lei de seu crescimento. São, portanto, p_0, p_1, p_2 as ordenadas que correspondem às abscissas 0, t_1, t_2, e assumindo que $t_2 = 2t_1$, a equação (4.16) resulta

$$i = \frac{1}{m}\log\left[\frac{p_0}{\frac{m}{n} - p_0}\right],$$

$$t_1 + i = \frac{1}{m}\log\left[\frac{p_1}{\frac{m}{n} - p_1}\right],$$

$$t_2 + i = \frac{1}{m}\log\left[\frac{p_2}{\frac{m}{n} - p_2}\right];$$

a partir do qual se conclui, subtraindo a primeira equação da segunda e a segunda da terceira,

$$\frac{p_1\left(\frac{m}{n} - p_0\right)}{p_0\left(\frac{m}{n} - p_1\right)} = \frac{p_2\left(\frac{m}{n} - p_1\right)}{p_1\left(\frac{m}{n} - p_2\right)},$$

$$\left(p_1^{\ 2} - p_0 p_2\right)\frac{m^2}{n^2} - \left(p_0 p_1^{\ 2} + p_2 p_1^{\ 2} - 2p_0 p_1 p_2\right)\frac{m}{n} = 0,$$

e finalmente,

$$\frac{m}{n} = \frac{p_1\left(p_0 p_1 + p_1 p_2 - 2p_0 p_2\right)}{p_1^{\ 2} - p_0 p_2}.$$

Este valor de $\frac{m}{n}$ será finito e positivo, se

$$\mathrm{p}_1^{\ 2} > \mathrm{p}_0\mathrm{p}_2, \quad p_0 p_1 + p_1 p_2 > 2p_0 p_2.$$

[...] Conhecendo $\frac{m}{n}$, se determina o coeficiente m pela equação

$$m = \frac{1}{t_1}\log\left\{\frac{p_1\left(\frac{m}{n} - p_0\right)}{p_0\left(\frac{m}{n} - p_1\right)}\right\},$$

e i pela equação

$$i = \frac{1}{m}\log\left[\frac{p_0}{\frac{m}{n} - p_0}\right].$$

Podemos dar o valor de $\frac{m}{n}$ de uma forma mais favorável ao cálculo logarítmico, denominando

$$p_1 - p_0 = u, \quad p_2 - p_1 = v, \quad \frac{uv}{p_1} = w, \quad \frac{u + w - v}{w} = q,$$

que torna-se

$$\frac{m}{n} = p_1 + \frac{p_1}{q}.$$

Se agora,

$$\frac{p_0}{\frac{m}{n} - p_0} = r,$$

teremos para m e i as expressões mais simples

$$m = \frac{1}{t_1}\left(\log q - \log r\right),$$

$i = \frac{1}{m}\log r$. (VERHULST, 1845, p.11-13, tradução nossa).

Usando esta formulação, Verhulst (1845) realizou uma estimativa para o tamanho máximo da população da Bélgica. Explicou que as tabelas que forneceram os dados necessários, para que ele pudesse encontrar a lei da população, foram retiradas das seguintes obras:

- *Recherches sur la reproduction et la mortalité de l'homme aux différents ages, et sur la population de la Belgique* (Investigação sobre a reprodução e mortalidade dos homens em diferentes idades, e da população da Bélgica) por MM. A. Quetelet e Ed. Smits, 1832.
- *Bulletin de la commission centrale de statistique* (Boletim da Comissão Central de Estatística), Volume 1, 1843.
- *Annuaire de l'observatoire de Bruxelles* (Anuário da observação de Bruxelas), para 1844.

Segundo Verhulst, essas tabelas podem ser consideradas como oficiais, mas para que possam ser encaixadas ao seu objetivo, teriam que ser submetidas às diversas preparações e correções (Figura 4.4).

Figura 4.4 – Nascimentos e mortes na Bélgica, depois de 1 de janeiro de 1803, até 31 de dezembro de 1842.

ÉTAT GÉNÉRAL

Des naissances et décès en Belgique, depuis le 1er janvier 1803, jusqu'au 31 décembre 1842.

ANNÉES.	Pour le LIMB. ET LE LUXEMB. ENTIERS.		Pour le RESTE DE LA BELGIQUE.		Observations.
	NAISSANCES.	DÉCÈS.	NAISSANCES.	DÉCÈS.	
1803 . . . . à 1812	183206	142085	938015	735720	Les mort-nés se trouvent compris dans les décès, sans l'être dans les naissances, même pour 1841 et 1842.
1813	»	»	»	»	
1814	»	»	»	»	
1815 . . . . à 1824	194027	129249	1038182	728627	
1825	20636	13408	114544	74992	
1826	21089	14017	113598	78004	
1827	20995	13596	107633	75709	
1828	20841	13937	114481	74011	
1829	21482	15864	114084	86489	
1830	»	»	»	»	
1831	19894	14678	115156	83411	
1832	20269	15347	108801	99363	
1833	21731	14685	116061	96617	
1834	21726	16096	118036	100477	
1835	22314	14675	120613	86408	
1836	22300	15019	121914	86214	
1837	21035	18585	121679	99557	
1838	22371	15151	129799	94779	
	Pour le Limb. et le Luxemb. belges seulement.				
1839	10796	8312	125226	97136	
1840	11153	8041	126989	95861	
1841	11283	8023	126852	94617	
1842	11288	9138	123739	99404	

Fonte: VERHULST (1845, p.23)

Verhulst observou, com relação a tabela fornecida na Figura 4.4:

1. Antes de 1815, o território da Bélgica não compreendia o Ducado de Bouillon, nem o bairro Philippeville; de modo que o período de dez anos de

> 1803-1812, não é exatamente comparável com as que se seguem. Além disso, neste período, muito infeliz para a Bélgica, como evidenciado pelo grande número de mortes, deve ser considerada como absolutamente excepcional, por causa das guerras do império.
> 2. De 1830 a 1838, as cidades de Maestricht e de Luxemburgo permaneceram no poder dos holandeses; de modo que os nascimentos e as mortes que ocorreram, não foram incluídos na tabela. [...]
> 3. Os nascimentos e as mortes que ocorreram durante o período de dez anos de 1815-1824, sendo dado de uma forma coletiva, inspiram menos confiança do que nos períodos subseqüentes, que são relatados a cada ano, e que na sua maior parte, serviram de base para as investigações às estatísticas de M. Quetelet. (VERHULST, 1845, p.24, tradução nossa)

De acordo com as observações, e após correções da Figura 4.4, Verhulst denominou as datas que correspondem às populações denotadas por p_0, p_1, p_2, como respectivamente 1 de janeiro de 1815, 1 de janeiro de 1830 e 1 de janeiro de 1845.

Para aplicar as fórmulas à população da Bélgica, Verhulst escreveu:

$$p_0 = 3.627253 \ ,$$

$$p_1 = 4.247113 \ ,$$

$$p_2 = 4.800861 \ ,$$

$$u = p_1 - p_0 = 0.619860 \ ,$$

$$v = p_2 - p_1 = 0.553748 \ ,$$

$$w = \frac{uv}{p_1} = 0.080876 \ \cdot$$

Utilizando as fórmulas:

$$q = \frac{u + w - v}{w},$$

$$\frac{m}{n} = p_1 + \frac{p_1}{q},$$

encontrou

$$\frac{m}{n} = 6.5837 \ ,$$

e observando que

$$t_1 = 1.5 \ ,$$

$$r = \frac{p_0}{\frac{m}{n} - p_0},$$

$$m = \frac{1}{t_1}(\log q - \log r),$$

$$i = \frac{1}{m} \log r \ ,$$

obteve,

$$m = 0.113785 \ ,$$

$$i = 0.78060 \ .$$

E concluiu, utilizando as fórmulas,

$$10^{(t+i)m} = z \ ,$$

$$p = \frac{m}{n} \cdot \frac{z}{1+z} \ ,$$

que as fórmulas da população na Bélgica, são

$$\log z = 0.113785 \ (t + 0.78060 \ ) \ ,$$

$$p = 6.5837 \ \frac{z}{1+z} \ .$$

Segundo Verhulst, estes resultados numéricos dizem que, se as leis e costumes da Bélgica não tiverem mudanças significativas, esta população, embora crescente, não equivale a 6,6 milhões de pessoas.

Considerando as fórmulas para a população indicadas por Verhulst, podemos transformar o logaritmo decimal em logaritmo natural como segue

$$p(t) = \frac{m}{n} \cdot \frac{e^{\ln 10 (t+i)m}}{1 + e^{\ln 10 (t+i)m}} \ ,$$

onde $\frac{m}{n}$ representa a população máxima. Particularmente, no caso da Bélgica, as fórmulas da população poderiam ser escritas como:

$$p(t) = 6.5837 \ \frac{e^{0.262 \, t + 0.2045}}{1 + e^{0.262 \, t + 0.2045}} \ .$$

Comparando a população observada com a população calculada para os anos de 1815, 1830 e 1845, segue que os valores calculados se aproximam daqueles apresentados por documentos oficiais (Tabela 4.2).

Tabela 4.2 – Comparação entre a população observada e a população calculada para o modelo de Verhulst

t	Anos	População Observada	População Calculada
0	1815	3.027253	3.627274
1,5	1830	4.247113	4.247040
3	1845	4.800861	4.800746

Verhulst (1845) também fez um estudo da lei da população da França e conclui seu artigo com as seguintes palavras:

> A lei da população é desconhecida, porque é desconhecida a natureza da função utilizada para medir obstáculos, tanto preventivas quanto destrutivas, que se opõe à multiplicação indefinida da espécie humana.
> No entanto, se assumirmos que estes obstáculos crescem exatamente na mesma proporção que a população superabundante, obtemos uma solução completa do problema sob o ponto de vista matemático.
> Descobrimos então, fazendo uso de documentos estatísticos emitidos pelos governos belga e francês, que o limite extremo da população é de quarenta milhões na França, e de seis milhões e seiscentos mil na Bélgica. (VERHULST, 1845, p.38, tradução nossa).

A publicação de 1838, embora menos extensa, apresenta a equação diferencial ordinária para o crescimento populacional e sua solução, enquanto que a publicação de 1845 fornece mais detalhes às ideias de Verhulst, no que se referem os parâmetros da equação, permitindo realizar uma estimativa para o tamanho máximo da população da Bélgica e da França. Os próprios resultados destas publicações serviram de prática social para que Verhulst publicasse em 1846 e 1847, e chegasse a conclusões sensivelmente diferentes, no que se refere as análises e previsões do crescimento populacional.

Em 1846, Verhulst publicou o texto *Note sur la loi d'accroissement de la population* (Nota sobre a lei do crescimento da população) em *Bulletins de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*. Nesta terceira publicação, Verhulst anunciou, depois de retomar a sua pesquisa sobre a lei de crescimento da população, por meio de um exame mais detalhado, que a condição que serve de obstáculo ao crescimento da população, não é proporcional à população supérflua, como tinha assumido em sua memória anterior, mas está em proporção à população superabundante $(p-b)$ pela população total p. Segundo Verhulst, ele tropeçou em novas fórmulas, encontrando que a população da Bélgica se limita a 9.439.000 pessoas (*je suis tombé sur de nouvelles formules dont l'application à la Belgique m'a donné pour limite de la population neuf millions quatre cent trente-neuf mille âmes).*

Em 1847, Verhulst publicou a memória *Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population* (Segunda memória sobre a lei do crescimento populacional) em *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*. Nesta quarta publicação, Verhulst forneceu com mais detalhes as conclusões da nota de 1846, cujas conclusões são sensivelmente diferentes dos textos anteriores, o que o levou a uma revisão do modelo original e permitiu uma nova estimativa do nível máximo da população da Bélgica.

Verhulst, nesta publicação, modificou suas hipóteses, sendo este o motivo de publicar esta segunda memória, assumindo que

> os obstáculos ao crescimento da população aumentam em proporção à população superabundante pela população total,
> $$\frac{Mdp}{pdt} = s - \frac{n(p-b)}{p}.$$
> Colocando
> $$n - s = m\ , \frac{nb}{m} = P\ ,$$
> se deduz da equação anterior que
> $$dt = -\frac{1}{m}\frac{Mdp}{(p-P)},$$
> e integrando,
> $$t + const. = -\frac{1}{m}\log(p-P),$$
> com $\log$ designando um logaritmo decimal.
> Supondo que $t = 0$, quando $p = p_0$, vem
> $$const. = -\frac{1}{m}\log(p_0 - P),$$
> e, por consequência,
> $$t = \frac{1}{m}\log\left(\frac{P-p_0}{P-p}\right),$$
> que escrito de outra forma,
> $$\log(P-p) = \log(P-p_0) - mt\ . \tag{4.17}$$
> (VERHULST, 1847, p.6, tradução nossa)

Para determinar as três constantes m , P e p_0, Verhulst assumiu que a curva representada pela equação (4.17) passa por três pontos, que têm, respectivamente, as abscissas 0 , t_1, t_2 e as ordenadas p_0, p_1, p_2; daí deduziu, pelo método seguido na primeira memória e na hipótese de $t_2 = 2t_1$, que

$$P = \frac{p_1^{\ 2} - p_0 p_2}{2p_1 - (p_0 + p_2)}, \tag{4.18}$$

$$m = \frac{1}{t_1}\log\left(\frac{P - p_0}{P - p_1}\right). \tag{4.19}$$

As três fórmulas (4.17), (4.18) e (4.19) dão a solução do problema em que se propõe determinar. Para fazer a aplicação à Bélgica, Verhulst utilizou em seus cálculos os mesmos elementos que na sua primeira memória, isto é, assumiu que

$$p_0 = 3.627253\ \ ,$$

$$p_1 = 4.247113\ \ ,$$

$$p_2 = 4.800861 \ ,$$

$$t_1 = 1.5 \ ;$$

onde obteve

$$P = 9.4390 \ , \ m = 0.0326563 \ ,$$

$$\log(P - p) = 0.7643107 - 0.0326563 \ t \ .$$

Assim, o valor máximo da população belga seria cerca de nove milhões e quatrocentas mil pessoas.

Considerando a fórmula para a população indicada por Verhulst $t = \frac{1}{m}\log\left(\frac{P - p_0}{P - p}\right)$, podemos transformar o logaritmo decimal em logaritmo natural como segue

$$p(t) = P - \frac{P - p_0}{e^{\ln 10 \cdot tm}} \ ,$$

e, particularmente no caso belga a fórmula seria:

$$p(t) = 9.4390 - \frac{5.81174}{e^{0.0751939t}} \ .$$

Verhulst (1847) fez a validação de seu modelo encontrado, por meio da comparação dos dados de observação com os dados obtidos por seu modelo (Figura 4.5).

Figura 4.5 – O progresso da população, na Bélgica, depois de 1 de janeiro de 1815 até 1 de janeiro de 1845.

TABLEAU

Des progrès de la population en Belgique, depuis le 1er janvier 1815 jusqu'au 1er janvier 1845.

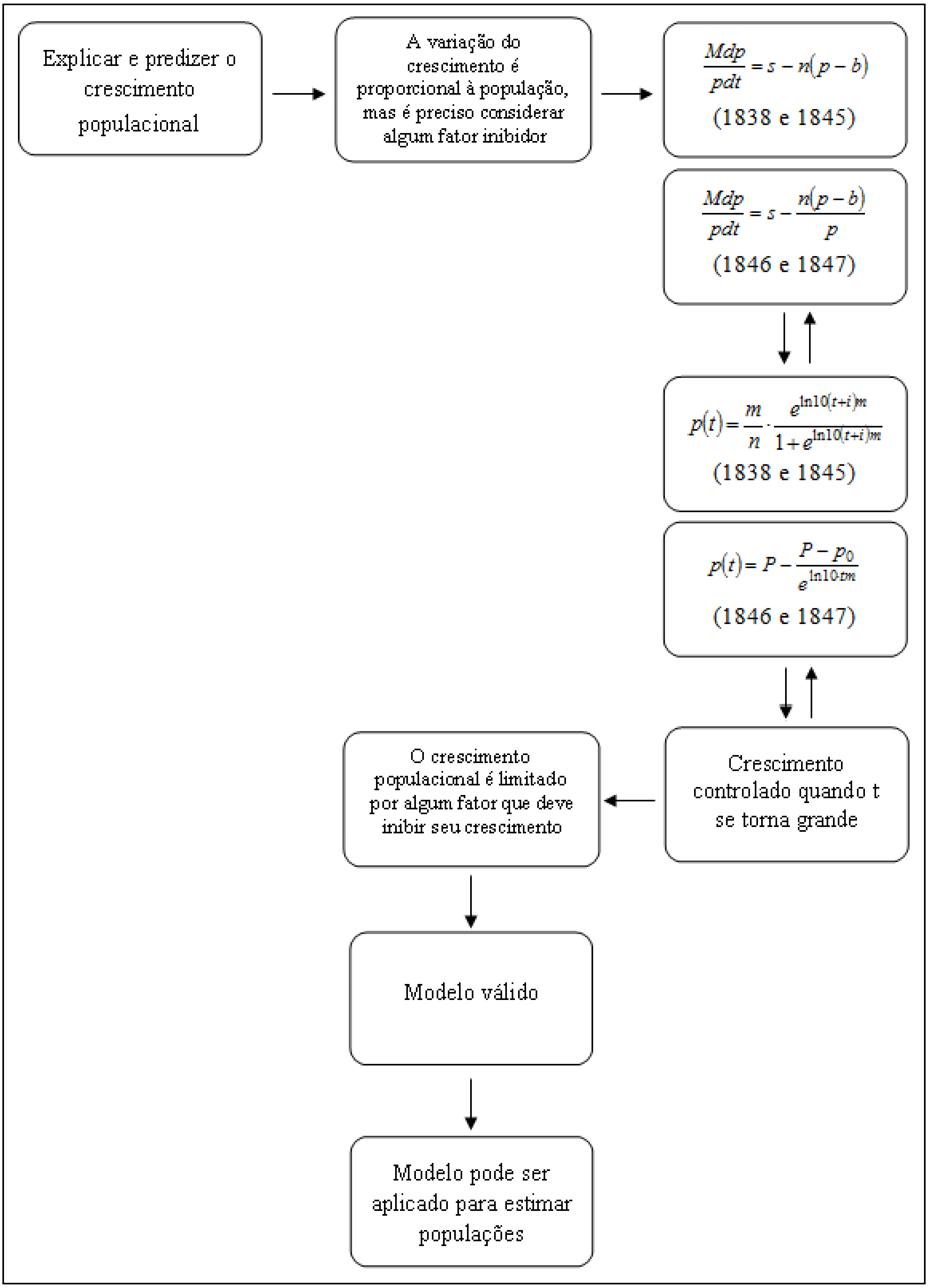
ANNÉES.	POPULATION observée.	POPULATION calculée.	ANNÉES.	POPULATION observée.	POPULATION calculée.
1815..........	3,627,253	3,627,300	1835..........	4,404,220	4,438,600
à	397,602	420,900		44,549	37,400
1825..........	4,024,855	4,048,200	1836..........	4,448,769	4,476,000
	48,896	40,400		45,919	37,100
1826..........	4,073,751	4,088,600	1837..........	4,494,688	4,513,100
	45,089	40,000		30,999	36,800
1827..........	4,118,840	4,128,600	1838..........	4,525,687	4,549,900
	41.439	39,900		45,021	36,500
1828..........	4,160,279	4,168,500	1839..........	4,570,708	4,586,400
	49,849	39,400		38,068	36,200
1829..........	4,210,128	4,207,900	1840..........	4,608,776	4,622,600
	36,985	39,200		41,624	35,900
1830..........	4,247,113	4,247,100	1841..........	4,650,400	4,658,500
	*38.856	38,900		42,790	35,600
1831..........	4,285,969	4,286,000	1842..........	4.693,190	4,694,100
	40,728	38,600		34,201	35,300
1832..........	4,326,697	4,324,000	1843..........	4.727,391	4,729,400
	19,243	38,300		35,855	35,000
1833..........	4,345,940	4,362,900	1844..........	4,763,246	4,764,400
	30,274	38,000		*37,615	34,700
1834..........	4,376,214	4,400,900	1845..........	4,800,861	4,799,100
	28,006	37,700			

NB. Les nombres marqués d'un astérisque sont hypothétiques.

Fonte: VERHULST (1847, p.8).

Considerando as formulações de Verhulst e as etapas da Modelagem Matemática apresentadas na Figura 3.1 (página 29), a Figura 4.6 indica as etapas do desenvolvimento do modelo logístico de Verhulst.

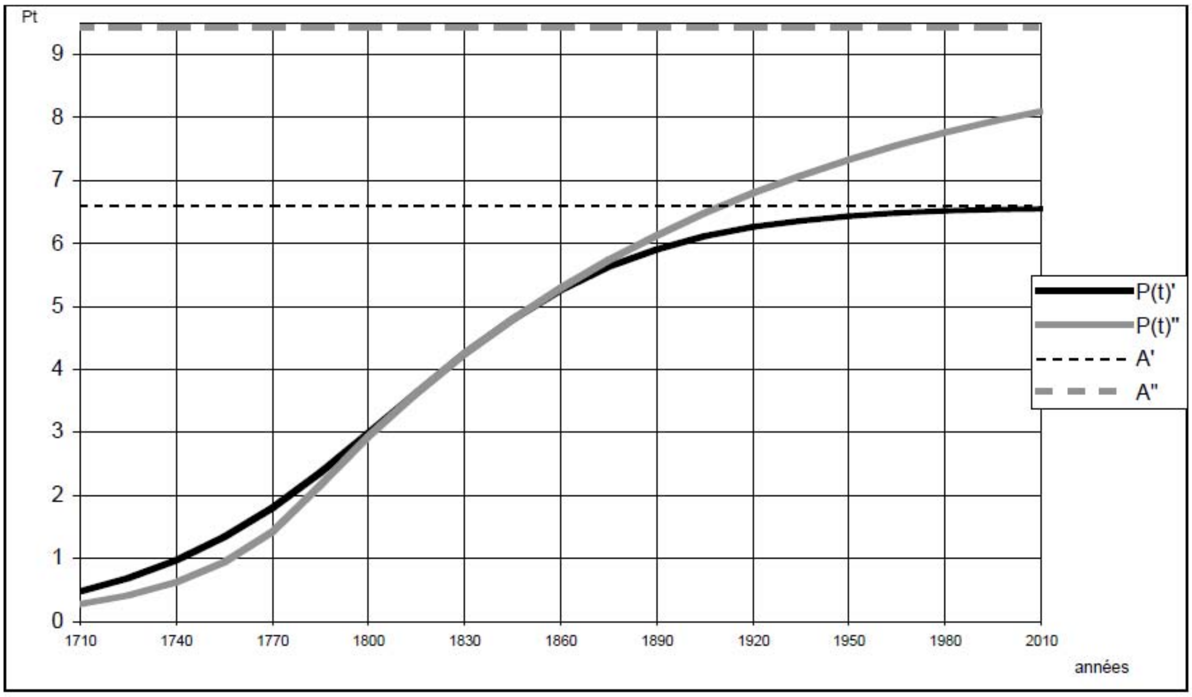
Figura 4.6 – Modelagem Matemática para o modelo de Verhulst em 1847.



Pode-se perceber nas publicações de Verhulst uma mudança nas hipóteses e consequentemente em seu modelo matemático. Como podemos observar, embora o confronto com os dados observados tenha mostrado uma boa aproximação com o modelo matemático apresentado na publicação de 1845, Verhulst optou em não aceitar seu modelo, como descrito em sua publicação de 1846. Segundo Verhulst (1846, p.226), “estes resultados não devem ser considerados como definitivos” (*Je crois n'avoir pas besoin d'ajouter que ces résultats ne doivent pas être regardés comme définitifs*). Ainda, segundo o autor, “a comparação dos resultados da observação com os calculados, durante um longo período de tempo, só pode dissipar as dúvidas” *(L'accord des résultats de l'observation avec ceux du calcul, pendant une longue série d'années, pourra seul dissiper toute incertitude*) (VERHULST, 1846, p.227). Isso demonstra que o problema de aceitação ou não de um modelo depende muito mais de fatores que condicionam o modelador, como o contexto histórico, seus objetivos e recursos disponíveis.

A Figura 4.7 foi construída, a partir das hipóteses de Verhulst (1845) e Verhulst (1847), para comparar os dois padrões de evolução.

Figura 4.7 – Comparação da evolução da população belga na primeira memória (p(t)’, assíntota A’=6.6) e na segunda memória (p(t)”, assíntota A”=9.44).



Fonte: DELMAS (2004, p.75)

Podemos inferir que os modelos de Verhulst se mostram adequados na medida em que o crescimento da população é controlado quando t se torna grande. O que se pode notar que, embora o máximo das populações seja diferente, devido às diferentes hipóteses assumidas nas duas memórias, a tendência geral é a mesma.

4.2.4 As Práticas Sociais e Matemáticas na Formulação dos Modelos de Crescimento Populacional Abordadas

Uma das primeiras ideias referentes ao crescimento populacional se deve a Thomas Robert Malthus, sugerindo o crescimento exponencial, em 1798. Benjamin Gompertz surge em 1825 com sua lei de mortalidade. Posteriormente, Pierre-François Verhulst sugeriu a curva logística em 1838 com modificações de seu modelo matemático em trabalhos posteriores. Isso indica o caráter evolutivo dos modelos de crescimento populacional.

Os trabalhos de Malthus e Gompertz foram influenciados pelo contexto em que se inseriam. A época em que tais trabalhos foram publicados consistia na solução de situações específicas, ligadas à explicação ou as relações causadas por fenômenos naturais.

O modelo de crescimento populacional de Malthus, apresentado pela primeira vez em 1798, foi influenciado pelas circunstâncias de sua época, tentando explicar, por meio de uma linguagem matemática, o agravamento da miséria e o crescimento da população. Por sua vez, o modelo de crescimento populacional de Gompertz, apresentado em 1825, refletia que o Cálculo Diferencial e Integral ainda não estava estabelecido, por meio de seus escritos em que se utilizava a notação newtoniana.

O trabalho de Verhulst, apresentado pela primeira vez em 1838, reflete uma maior preocupação em apresentar seu modelo de crescimento populacional. Percebe-se em seus escritos uma linguagem matemática ao que é hoje convencionada, como aquela apresentada por Cauchy, e uma preocupação em mostrar a consistência de seu modelo matemático por meio de sua validação e refutação, para além de encontrar um modelo matemático que possa descrever a situação.

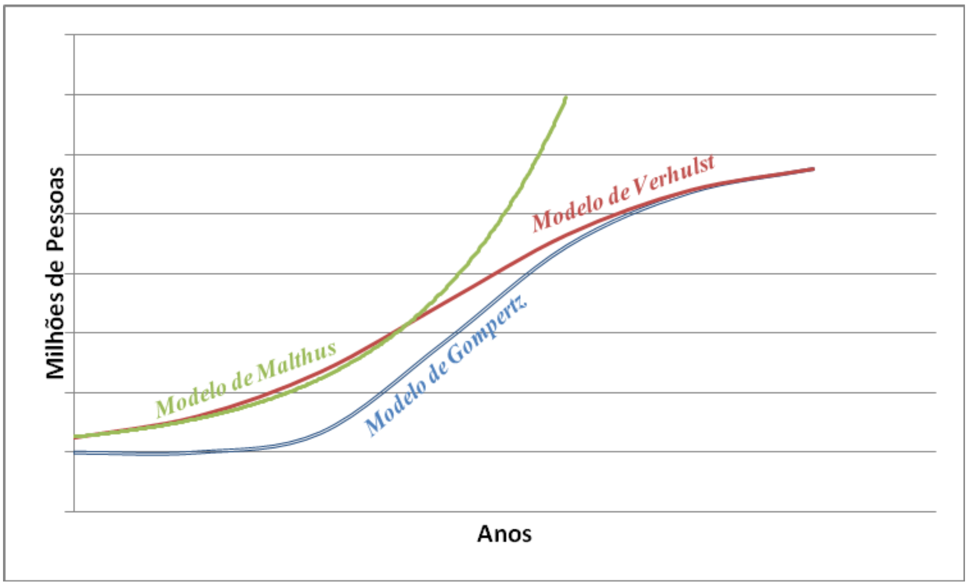
As formulações que apresentamos foram influenciadas pelos momentos históricos tanto do ponto de vista social como do ponto de vista matemático:

- final do século XVIII e início do século XIX (com Malthus e Gompertz);
- após década de 30 do século XIX (com Verhulst).

Esta divisão pode ser justificada pelos trabalhos de Cauchy, que por delimitar o Cálculo Diferencial e Integral, acabou influenciando no desenvolvimento dos modelos de crescimento populacional. Percebe-se uma evolução na notação matemática e maior rigor no que se refere às Equações Diferenciais em cada trabalho.

O modelo de Malthus não considera que o crescimento da população é limitado sob períodos mais prolongados de tempo, enquanto que os modelos de Gompertz e Verhulst consideram esta hipótese. O que diferencia o modelo de Gompertz do modelo de Verhulst está justamente no ponto de inflexão. A Figura 4.8 ilustra o comportamento destes modelos matemáticos.

Figura 4.8 – Comparação dos modelos de crescimento populacional abordadas.



Podem-se observar propriedades semelhantes entre o modelo logístico de Verhulst e a curva de Gompertz. Em ambos os modelos há três constantes indeterminadas, contudo enquanto o modelo de Gompertz apresenta o ponto de inflexão em aproximadamente 37% da curva, no modelo logístico, o ponto de inflexão ocorre em 50% da curva. Os usos de cada modelo dependem da situação-problema em estudo.

As práticas matemáticas ou as práticas sociais dos modelos de crescimento populacional voltadas à produção matemática, neste contexto, podem ser denominadas como ações realizadas em um tempo e espaço determinados, por um grupo social (aqui no caso os matemáticos envolvidos com a temática no final do século XVIII e início do século XIX), as quais propiciaram a construção de conhecimentos matemáticos como ferramentas (atividade humana) e o desenvolvimento de estratégias e habilidades como a simplificações e formulação de hipóteses, a dedução de modelos matemáticos e outros procedimentos matemáticos ou não matemáticos (atividade científica), próprias de um processo de Modelagem Matemática.

Nesse sentido, mesmo que o foco deste trabalho esteja em modelos apresentados no final do século XVIII e início do século XIX, vale indicar que a dinâmica do crescimento populacional tem sido investigada também mais recentemente. Citamos, por exemplo, o modelo de Montroll em 1971 e o modelo de Smith em 1963 (BASSANEZI, 2002).

Atualmente, as projeções demográficas não se fazem como um mero exercício técnico para tentar compreender um fenômeno, mas passaram a ser de fundamental importância para o planejamento social e econômico de um país. No caso do Brasil, o estudo da projeção e contagem da população brasileira, cuja instituição responsável é o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), permite a formulação, a implementação de programas de desenvolvimento e a distribuição de recursos aos estados e municípios.

O que diferencia o método utilizado pelo IBGE dos modelos aqui estudados consiste nas hipóteses adotadas para realizar as projeções da população. Enquanto Malthus considera essencialmente a variação entre nascimentos e mortes (uma hipótese simplista no que se refere ao estudo do crescimento populacional), o IBGE utiliza hipóteses sobre a fecundidade, mortalidade, emigração e imigração para a contagem da população brasileira

Deste modo, a evolução dos modelos de crescimento populacional envolve práticas sociais na medida em que os modelos como o de Malthus, Verhulst, Gompertz influenciaram modelos mais atuais de projeção demográfica. E também envolvem práticas matemáticas na medida em que condicionaram a estrutura matemática destes modelos.

4.3 O Crescimento Populacional em Livros Didáticos: os modelos e as "práticas" dos Autores

O estudo da dinâmica do crescimento populacional ganha espaço no ambiente escolar, especialmente nos cursos superiores, na disciplina de Equações Diferenciais. Visando investigar como a problemática do crescimento populacional é abordada neste ambiente, direcionamos nosso enfoque para a análise de livros didáticos da disciplina de Equações Diferenciais.

Um texto do livro didático, de modo geral, "reflete as complexas relações entre ciências, cultura e sociedade no contexto da formação de cidadãos e se constitui a partir de interações situadas em práticas sociais típicas do ensino na escola" (MARTINS, 2006, p.125).

Os livros didáticos que analisamos, foram selecionados a partir de programas da disciplina de Equações Diferenciais para cursos de graduação em Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), da Universidade Estadual de Maringá (UEM) e da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE), dentre as universidades estaduais do Paraná. Para nossa análise selecionamos os dois livros mais indicados nas referências destes programas, quais sejam:

- *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno* dos autores W. E. Boyce e R. C. DiPrima, publicado em 2002.
- *Equações Diferenciais com aplicações em Modelagem* do autor D. G. Zill, traduzido por Ciro de Carvalho Patarra e publicado em 2003.

Considerando os objetivos e os interesses do nosso trabalho, a análise de livros didáticos se faz importante, uma vez que as práticas dos autores influenciam a prática dos professores e dos alunos em sala de aula. Por se tratar de livros mais adotados nos cursos de graduação de Matemática do Paraná, os mesmos não podem ser considerados como estanques/parados e, nesse sentido, as formulações que eles apresentam para o crescimento populacional revelam práticas (sociais e matemáticas) de seus autores e influenciam as práticas (sociais e matemáticas) de seus leitores.

4.3.1 Modelos de Crescimento Populacional no Livro Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno

A temática do crescimento populacional é abordada no livro Boyce e DiPrima (2002) no capítulo Equações Diferenciais de Primeira Ordem na seção 2.5, denominada Equações Autônomas e Dinâmica Populacional. Para apresentar essa seção, os autores discutem, em seções anteriores, as equações lineares e as equações separáveis. Isto sinaliza a divisão do conteúdo em partes delimitadas, com vistas a dar origem as práticas de aprendizagem. O Quadro 4.1 mostra a introdução do capítulo 2 do livro. Embora seja este o capítulo que apresenta os modelos de crescimento populacional, os autores não fazem menção a eles na introdução.

Quadro 4.1 – Introdução do capítulo 2 - Equações Diferenciais de Primeira Ordem, apresentado por W. E. Boyce e R. C. DiPrima.

Este capítulo trata de equações diferenciais de primeira ordem,

$$y'(t) = f(x,t)$$

onde f *é uma função de duas variáveis dada. Qualquer função diferenciável* $y = \phi(t)$ *que satisfaça essa equação para todo* t *em algum intervalo é dita uma solução e nosso objetivo é determinar se tais funções existem e, caso existam, desenvolver métodos para encontrá-las. Infelizmente, para uma função arbitrária* f*, não existe método geral para resolver a equação em termos de funções elementares. Em vez disso, descreveremos vários métodos, cada um dos quais aplicável a determinada subclasse de equações de primeira ordem. As mais importantes delas são as equações* *lineares (Seção 2.1), as equações separáveis (Seção 2.2) e as equações exatas (Seção 2.6). As outras seções deste capítulo descrevem algumas das aplicações importantes de equações diferenciais de primeira ordem, introduzem a ideia de aproximar uma solução através de cálculos numéricos e discutem algumas questões teóricas relacionadas à existência e à unicidade de soluções.*

A seção 2.5 inicia com a definição das equações chamadas autônomas e em seguida, o autor inicia a discussão destas equações no contexto de crescimento ou declínio populacional de uma espécie considerando o crescimento exponencial de Malthus (Quadro 4.2). Para compreensão do conteúdo a ser ensinado, os autores obtiveram o gráfico de y em função de t para $\frac{dy}{dt} = \mathrm{ry}$, para diversos valores de r, como pode ser observado na Figura 4.9.

Quadro 4.2 – Discussão do crescimento exponencial proposto por Malthus e apresentado por W. E. Boyce e R. C. DiPrima.

Crescimento Exponencial. *Seja $y = \phi(t)$ a população da espécie dada no instante t. A hipótese mais simples sobre a variação da população é que a taxa de variação de y é proporcional* ao valor atual de y, isto é,*

$$\frac{dy}{dt} = ry, \tag{4.20}$$

onde a constante de proporcionalidade r é chamada ***taxa de crescimento ou declínio****, dependendo se é positiva ou negativa. Vamos supor aqui que $r > 0$, de modo que a população está crescendo.*

Resolvendo a Eq. (4.20) sujeita a condição inicial

$$y(0) = y_0, \tag{4.21}$$

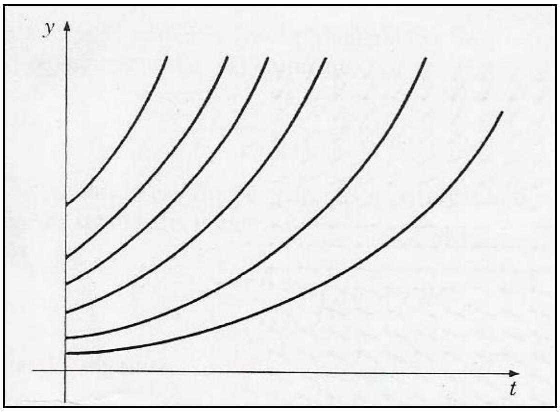
obtemos

$$y(t) = y_0 e^{rt}. \tag{4.22}$$

Logo, o modelo matemático que consiste no problema de valor inicial (4.20), (4.21) com $r > 0$ prevê que a população crescerá exponencialmente sempre. Sob condições ideais, observou-se que a Eq. (4.22) é razoavelmente precisa para muitas populações, pelo menos por períodos limitados de tempo. No entanto, é claro que tais condições ideais não podem perdurar indefinidamente; alguma hora as limitações sobre o espaço, o suprimento de comida ou outros recursos reduzirá a taxa de crescimento e acabará inibindo o crescimento exponencial.

Quadro 4.2 – Discussão do crescimento exponencial proposto por Malthus e apresentado por W. E. Boyce e R. C. DiPrima. (continuação)

Figura 4.9 – Crescimento exponencial: $\boldsymbol{y}$ em função de $\boldsymbol{t}$ para $\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = ry}$.



** Aparentemente, o economista britânico Thomas Malthus (1766-1834) foi o primeiro a observar que muitas populações biológicas crescem a uma taxa proporcional à população. Seu primeiro artigo sobre populações apareceu em 1798.*

Os autores dão ênfase nos métodos para resolver a equação diferencial, embora em nota de rodapé do livro faça menção ao aspecto histórico da origem da equação enquanto modelo para analisar o crescimento populacional.

Além disso, Boyce e DiPrima (2002) também chamam atenção para o fato de que o modelo de Malthus é razoavelmente preciso para muitas populações durante um certo período de tempo. Contudo, em algum momento, as limitações (espaço, comida e outros recursos) acabarão reduzindo a taxa de crescimento e inibindo o crescimento exponencial. Como o modelo proposto por Verhulst, leva em conta tais considerações, na sequência os autores apresentam o modelo logístico proposto por Verhulst, conforme mostra o Quadro 4.3.

Quadro 4.3 – Discussão do crescimento populacional proposto por Verhulst e apresentado por W. E. Boyce e R. C. DiPrima.

Crescimento Logístico. *Para levar em conta o fato de que a taxa de crescimento depende, realmente, da população, vamos substituir a constante r na Eq. (4.20) por uma função $h(y)$, obtendo, assim, a equação modificada*

$$\frac{dy}{dt} = \mathrm{h}(\mathrm{y})\mathrm{y}\,. \tag{4.23}$$

Queremos, agora, escolher $h(y)$ de modo que $h(y) \approx r > 0$ quando y for pequeno, $h(y)$ decresça quando y crescer e $h(y) < 0$ quando y for suficientemente grande. A função mais simples que tem essas propriedades é $h(y) = r - ay$, onde a é, também, uma constante positiva. Usando essa função na Eq. (4.23), obtemos

$$\frac{dy}{dt} = (r - ay)y\,. \tag{4.24}$$

Quadro 4.3 – Discussão do crescimento populacional proposto por Verhulst e apresentado por W. E. Boyce e R. C. DiPrima (continuação).

A Eq. (4.24) é conhecida como a equação de Verhulst ou **equação logística**. Muitas vezes, é conveniente escrever a equação logística na forma equivalente*

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{k}\right)y\,, \qquad (4.25)$$

onde $k = \frac{r}{a}$. *A constante* r *é chamada de taxa de crescimento intrínseco, isto é, a taxa de crescimento na ausência de qualquer fator limitador. A interpretação de* k *ficará clara em breve.*

Vamos, primeiro, procurar soluções da Eq. (4.25) do tipo mais simples possível, isto é, funções constantes. Para tal solução $\frac{dy}{dt} = 0$ *para todo* t*, logo, qualquer solução constante da Eq. (4.25) tem que satisfazer a equação algébrica*

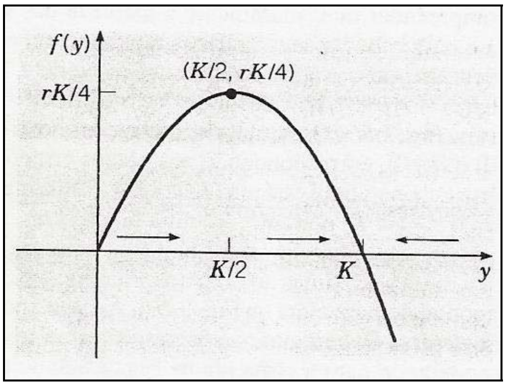
$$r\left(1 - \frac{y}{k}\right)y = 0\,.$$

Portanto, as soluções constantes são $y = \phi_1(t) = 0$ *e* $y = \phi_2(t) = k$. *Essas soluções são chamadas de soluções de equilíbrio da Eq. (4.25) porque correspondem ao caso em que não há variação no valor de* y *quando* t *cresce.*

** P. F. Verhulst (1804-1849) foi um matemático belga que introduziu a Eq. (4.24) como um modelo para o crescimento populacional humano em 1838. Ele se referiu a esse crescimento como crescimento logístico; por isso, a Eq. (4.24) é chamada, muitas vezes, de equação logística. Ele não foi capaz de testar a precisão de seu modelo devido a dados inadequados de censo e não recebeu muita atenção até muitos anos depois. A concordância razoável do modelo com dados experimentais foi demonstrada por R. Pearl (1930) para populações de Drosophila melanogaster (moscas das frutas) e por G. F. Gause (1935) para populações de Paramecium e Tribolium (besouro da farinha).*

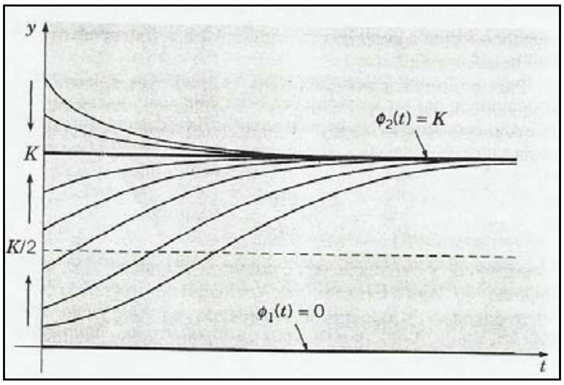
Para a compreensão do conteúdo a ser ensinado, os autores apresentam o gráfico de $f(y) = r\left(1 - \frac{y}{k}\right)y = 0$ em função de y, como pode ser observado na Figura 4.10, sem resolver a Eq. (4.25) e, em seguida concluíram que os gráficos das soluções de (4.25) têm o formato geral da Figura 4.11, independente dos valores de r e k.

Figura 4.10 – Gráfico de $f(y)$ em função de y para $\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{k}\right)y$.



Fonte: BOYCE e DIPRIMA (2002, p.42).

Figura 4.11 – Crescimento logístico: gráfico de y em função de t para $\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{k}\right)y$.



Fonte: BOYCE e DIPRIMA (2002, p.42).

Seguida dessa abordagem qualitativa, os autores apresentam a solução da equação (4.25) conforme apresentamos no Quadro 4.4.

Quadro 4.4 – Discussão do crescimento populacional proposto por Verhulst e apresentado por W. E. Boyce e R. C. DiPrima.

Se $y \neq 0$ e $y \neq k$, podemos escrever a Eq. (4.25) na forma

$$\frac{dy}{(1-y/k)y} = r\,dt.$$

Usando expansão em frações parciais na expressão à esquerda do sinal de igualdade, temos

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1/k}{1-y/k}\right)dy = r\,dt.$$

Integrando, obtemos

$$ln|y| - ln\left|1-\frac{y}{k}\right| = rt + c, \qquad (4.26)$$

onde c é uma constante arbitrária de integração a ser determinada pela condição inicial $y(0)=y_0$. Já observamos que, se $0 < y_0 < k$, então y permanece nesse intervalo para todo o tempo. Assim, nesse caso, podemos remover o módulo na Eq. (4.26) e, aplicando a exponencial nas expressões dos dois lados do sinal de igualdade, encontramos que

$$\frac{y}{1-(y/k)} = Ce^{rt}, \qquad (4.27)$$

onde $C = e^c$. Para satisfazer a condição inicial, precisamos escolher $C = \frac{y_0}{1-(y_0/k)}$. Substituindo esse valor para C na Eq. (4.27) e resolvendo para y, obtemos

$$y = \frac{y_0 k}{y_0 + (k-y_0)e^{-rt}}. \qquad (4.28)$$

Deduzimos a solução (4.28) sob a hipótese $0 < y_0 < k$. Se $y_0 > k$, então os detalhes de tratamento da Eq. (4.26) são apenas ligeiramente diferentes e deixamos a seu cargo mostrar que a Eq. (4.28) também é válida nesse caso. Finalmente, note que a Eq. (4.28) também contém as soluções de equilíbrio $y = \phi_1(t) = 0$ e $y = \phi_2(t) = k$, correspondendo às condições iniciais $y_0 = 0$ e $y_0 = k$, respectivamente.
[...]

Em particular, se $y_0 = 0$ então a Eq. (4.28) diz que $y(t) = 0$ para todo t. Se $y_0 > 0$ e se fizermos $t \to \infty$ na Eq. (4.28), obtemos

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{y_0 k}{y_0} = k.$$

*Dessa forma, para cada $y_0 > 0$, a solução tende à solução de equilíbrio $y = \phi_2(t) = k$ assintoticamente (de fato, exponencialmente) quando $t \to \infty$. Portanto, dizemos que a solução constante $\phi_2(t) = k$ é uma **solução assintoticamente estável** da Eq. (4.25), ou que o ponto $y = k$ é um ponto de equilíbrio, ou crítico, assintoticamente estável. Isso significa que, após um longo tempo, a população fica próxima ao nível de saturação k independente do tamanho inicial da população, desde que seja positivo.*

Nas publicações de Verhulst observa-se uma abordagem do tipo variacional, cuja intenção está em prever o estado futuro de um fenômeno, no caso o crescimento populacional, que difere da abordagem apresentada por Boyce e DiPrima. Os conteúdos, neste livro texto, são apresentados sem fazer referência a problemas que lhes deram origem, as dificuldades, as limitações encontradas, o caráter tentativo, a dúvida. O contexto histórico é abordado fazendo menção ao autor do modelo. Além disso, os autores também dão uma breve indicação do contexto do desenvolvimento e da validação do modelo em nota de rodapé.

No final da seção 2.5, Boyce e DiPrima propõem um exemplo referente a equação logística e problemas para o aprimoramento e certificação dos conceitos aprendidos. No que se refere ao crescimento populacional, os autores abordam poucos problemas. Os problemas 15 e 16 propostos pelos autores estão descritos na Figura 4.12.

O que se observa é a apresentação dos autores, nos problemas 15 e 16, de um modelo matemático que descreve o crescimento populacional. Nos problemas 15 (a) e 15 (b) basta interpretar o enunciado descrito em palavras e substituir na solução já encontrada para o crescimento logístico. Sendo assim, o problema 15 não exige nenhum esforço cognitivo do tipo variacional por parte do estudante e também não requer a interpretação do enunciado. Bastam algumas manipulações algébricas da solução (4.28) mediadas pelas condições do problema.

A abordagem do problema 16 é um pouco diferente do problema 15. O modelo de Gompertz como pode ser observado, neste livro, foi introduzido por meio deste problema, mostrando que é uma variação do modelo de Verhulst. Na verdade, do ponto de vista histórico, o modelo de Gompertz se refere a trabalho anterior daquele apresentado por Verhulst. No problema 16 faz-se uma abordagem qualitativa, mas não há a abordagem do tipo variacional.

Figura 4.12 – Problemas 15 e 16 da seção 2.5.

15. Suponha que uma determinada população obedece à equação logística $dy/dt = ry[1 - (y/K)]$.
(a) Se $y_0 = K/3$, encontre o instante τ no qual a população inicial dobrou. Encontre o valor de τ correspondente a $r = 0{,}025$ por ano.
(b) Se $y_0/K = \alpha$, encontre o instante T no qual $y(T)/K = \beta$, onde $0 < \alpha, \beta < 1$. Note que $T \to \infty$ quando $\alpha \to 0$ ou $\beta \to 1$. Encontre o valor de T para $r = 0{,}025$ por ano, $\alpha = 0{,}1$ e $\beta = 0{,}9$.
16. Uma outra equação que tem sido usada para modelar o crescimento populacional é a equação de Gompertz,

$$dy/dt = ry\ln(K/y),$$

onde r e K são constantes positivas.
(a) Esboce o gráfico de $f(y)$ em função de y, encontre os pontos críticos e determine se cada um deles é assintoticamente estável ou instável.
(b) Para $0 \leq y \leq K$, determine onde o gráfico de y em função de t é convexo e onde é côncavo.
(c) Para cada y em $0 < y \leq K$, mostre que dy/dt dado pela equação de Gompertz nunca é menor do que dy/dt dado pela equação logística.

Fonte: BOYCE e DIPRIMA (2002, p.46).

De modo geral, os problemas de 22 a 24 apresentados na Figura 4.13 abordam a resolução de uma equação diferencial específica, sujeitas a uma condição inicial. Neste sentido parece revelar-se uma intenção dos autores em associar o modelo de Verhulst à análise do crescimento de populações de diferentes espécies.

Figura 4.13 – Problemas 22 a 24 da seção 2.5.

Epidemias. A utilização de métodos matemáticos para estudar a disseminação de doenças contagiosas vem da década de 1760, quando Daniel Bernoulli fez trabalhos sobre a varíola. Em anos mais recentes, muitos modelos matemáticos têm sido propostos e estudados para diversas doenças diferentes.[12] Os problemas de 22 a 24 consideram alguns dos modelos mais simples e as conclusões que podem ser inferidas desses. Modelos semelhantes têm sido usados, também, para descrever a disseminação de boatos e de produtos de consumo.

22. Suponha que uma determinada população pode ser dividida em duas partes: os que têm a doença e podem infectar outros e os que não a têm, mas são suscetíveis. Sejam x a proporção dos indivíduos suscetíveis e y a proporção dos indivíduos infectados; então $x + y = 1$. Suponha que a doença espalha-se através do contato entre elementos doentes e sãos da população, e que a taxa de disseminação dy/dt é proporcional ao número de tais contatos. Além disso, suponha que elementos de ambos os grupos movem-se livremente entre si, de modo que o número de contatos é proporcional ao produto de x e y. Como $x = 1 - y$, obtemos o problema de valor inicial

$$dy/dt = \alpha y(1-y), \qquad y(0) = y_0, \qquad \text{(i)}$$

onde α é um fator de proporcionalidade positiva e y_0 é a população inicial de indivíduos infectados.
(a) Encontre os pontos de equilíbrio para a equação diferencial em (i) e determine se cada um é assintoticamente estável, semi-estável ou instável.
(b) Resolva o problema de valor inicial (i) e verifique que as conclusões a que você chegou no item (a) estão corretas. Mostre que $y(t) \to 1$ quando $t \to \infty$, o que significa que, certamente, a doença se espalhará por toda a população.

23. Algumas doenças (como o tifo) são disseminadas basicamente por *portadores*, indivíduos que podem transmitir a doença, mas que não exibem seus sintomas. Denote por x e y, respectivamente, a proporção de suscetíveis e portadores na população. Suponha que os portadores são identificados e removidos da população a uma taxa β, de modo que

$$dy/dt = -\beta y. \qquad \text{(i)}$$

Suponha, também, que a doença se propaga a uma taxa proporcional ao produto de x e y; assim,

$$dx/dt = \alpha x y. \qquad \text{(ii)}$$

(a) Determine y em qualquer instante t resolvendo a Eq. (i) sujeita à condição inicial $y(0) = y_0$.
(b) Use o resultado do item (a) para encontrar x em qualquer instante t resolvendo a Eq. (ii) sujeita à condição inicial $x(0) = x_0$.
(c) Encontre a proporção da população que escapa à epidemia encontrando o valor limite de x quando $t \to \infty$.

24. O trabalho de Daniel Bernoulli na década de 1760 tinha como objetivo avaliar a eficácia de um programa controverso de vacinação contra a varíola, que era, na época, uma grande ameaça à saúde pública. Seu modelo pode ser aplicado, igualmente bem, a qualquer outra doença que, se uma pessoa a contrai e sobrevive, tem imunidade para o resto da vida.

Considere o grupo de indivíduos nascidos em um determinado ano ($t = 0$) e seja $n(t)$ o número de sobreviventes, t anos depois, entre esses indivíduos. Seja $x(t)$ o número de elementos desse grupo que não tiveram varíola até o ano t e que são, portanto, suscetíveis. Seja β a taxa segundo a qual os indivíduos suscetíveis contraem varíola e seja ν a taxa segundo a qual as pessoas que contraíram varíola morrem da doença. Finalmente, seja $\mu(t)$ a taxa de mortes de todas as outras causas, exceto a varíola. Então, dx/dt, a taxa segundo a qual o número de indivíduos suscetíveis decresce, é dada por

$$dx/dt = -[\beta + \mu(t)]x; \qquad \text{(i)}$$

a primeira parcela na expressão entre colchetes na Eq. (i) é a taxa segundo a qual os indivíduos suscetíveis contraem varíola, enquanto a segunda é a taxa de mortalidade de todas as outras causas. Temos, também,

$$dn/dt = -\nu\beta x - \mu(t)n, \qquad \text{(ii)}$$

onde dn/dt é a taxa de mortalidade de todo o grupo e as duas parcelas na expressão à direita do sinal de igualdade correspondem às taxas de mortalidade devido à varíola e a todas as outras causas, respectivamente.
(a) Seja $z = x/n$ e mostre que z satisfaz o problema de valor inicial

$$dz/dt = -\beta z(1 - \nu z), \qquad z(0) = 1. \qquad \text{(iii)}$$

Observe que o problema de valor inicial (iii) não depende de $\mu(t)$.
(b) Encontre $z(t)$ resolvendo Eq. (iii).
(c) Bernoulli estimou que $\nu = \beta = 1/8$. Usando esses valores, determine a proporção de pessoas com 20 anos que não tiveram varíola.

Obs.: Baseado no modelo que acabamos de descrever e usando os melhores dados sobre mortalidade disponíveis na época, Bernoulli calculou que, se as mortes por varíola pudessem ser eliminadas ($\nu = 0$), poder-se-ia adicionar aproximadamente 3 anos à vida média esperada (em 1760) de 26 anos e 7 meses. Portanto, ele apoiou o programa de vacinação.

Fonte: BOYCE e DIPRIMA (2002, p.47).

Considerando a enunciação dos problemas 22, 23 e 24 (Figura 4.13), parece revelar-se também no livro uma intenção dos autores em associar práticas sociais às práticas matemáticas, tratando da análise de epidemias comuns à época da criação desta prática matemática. Nesse sentido, os autores revelam que práticas matemáticas também se consolidaram e se refinaram, considerando que equações diferenciais em livro do século XXI continuam resolvendo problemas de crescimento populacional.

4.3.2 Modelos de Crescimento Populacional no Livro Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem

Neste livro a modelagem do crescimento populacional é tratada em diferentes momentos e circunstâncias. Na seção 1.3 do capítulo 1, Zill (2003) apresenta alguns modelos matemáticos. Em particular, neste mesmo capítulo, aborda o modelo de Malthus como apresentado no Quadro 4.5.

Quadro 4.5 – Discussão do crescimento exponencial proposto por Malthus e apresentado por D. G. Zill.

Dinâmica Populacional *Uma das primeiras tentativas de modelagem do* ***crescimento populacional*** *humano por meio da matemática foi feita pelo economista inglês Thomas Malthus, em 1798. Basicamente, a idéia por trás do modelo malthusiano é a hipótese de que a taxa segundo a qual a população de um país cresce em um determinado instante é proporcional* à população total do país naquele instante. Em outras palavras, quanto mais pessoas houver em um instante t, mais pessoas existirão no futuro. Em termos matemáticos, se $P(t)$ for a população total no instante t, então essa hipótese pode ser expressa por*

$$\frac{dP}{dt} \propto P \text{ ou } \frac{dP}{dt} = kP \qquad (4.29)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade. Esse modelo simples, embora não leve em conta muitos fatores que podem influenciar a população humana tanto em seu crescimento quanto em seu declínio (imigração e emigração, por exemplo), não obstante resulta ser razoavelmente preciso na previsão da população dos Estados Unidos entre os anos de 1790 e 1860. As populações que crescem à taxa descrita por (4.29) é ainda usada para modelar o crescimento de pequenas populações em um curto intervalo de tempo (crescimento de bactérias em uma placa de Petri, por exemplo).

**Se duas quantidades u e v forem proporcionais, escrevemos $u \mu v$. Isso significa que uma quantidade é um múltiplo constante da outra: u=kv.*

Como pode ser observado, Zill (2003) apresenta a ideia do modelo malthusiano, como ela se tornou conhecida na comunidade acadêmica, sem fazer menção, no entanto, a todo o conjunto de evoluções que essa ideia possui até se configurar da maneira como hoje é conhecida.

Qual foi o modelo definido por Malthus em 1798? Qual foi o contexto em que Malthus estava inserido? Por que ele definiu este modelo deste modo? De que modo o modelo de Malthus resulta ser razoavelmente preciso na previsão da população dos Estados Unidos entre os anos de 1790 e 1860? São questões que não são indicadas no livro e assim, provavelmente, não serão alvo de investigação de seus leitores estudantes.

No capítulo 2 desenvolve alguns métodos para resolver equações diferenciais e no capítulo 3 propõe algumas aplicações de Equações Diferenciais de Primeira Ordem. Isto indica a divisão do conteúdo em partes delimitadas, de modo a programar o ensino-aprendizagem do conteúdo. Neste mesmo capítulo, na seção 3.1, Zill (2003) apresenta modelos do tipo de crescimento e decrescimento, mas não aborda especificamente a problemática do crescimento populacional como abordado por Malthus. Ou seja, práticas sociais e matemáticas associadas ao crescimento populacional não fazem parte do repertório do autor do livro nesta seção. No final desta seção, o autor propõe dez exercícios sobre crescimento e decrescimento, sendo que três são situações hipotéticas de crescimento populacional humano, podendo ser observadas na Figura 4.14.

Figura 4.14 – Problemas 1 a 3 da seção 3.1.

1. Sabe-se que a população de uma comunidade cresce a uma taxa proporcional ao número de pessoas presentes no instante *t*. Se a população dobrou em cinco anos, quanto levará para triplicar? E para quadruplicar?

2. Sabe-se que a população da comunidade no Problema 1 é 10.000 após três anos. Qual era a população inicial? Qual será a população em 10 anos?

3. A população de uma cidade cresce a uma taxa proporcional à população presente em um instante *t*. A população inicial de 500 cresce em 15% em 10 anos. Qual será a população em 30 anos?

Fonte: ZILL (2003, p.103).

Nestes problemas pode-se perceber que, embora o problema esteja dentro de um contexto, a identificação da equação diferencial é mediada pela transição da linguagem língua portuguesa para a linguagem matemática. Esta transição é importante para a aprendizagem do aluno, todavia, em problemas relativamente simples ela também pode se tornar mecânica.

Na seção 3.2, aborda os modelos de crescimento populacional de Verhulst e Gompertz. Segundo o autor, a maior parte das equações diferenciais pode ser resolvida por separação de variáveis nesta seção, mostrando que sua preocupação maior está nos métodos de resolução de equações diferenciais.

Zill (2003) argumentando que a taxa de crescimento de uma população depende do número de indivíduos presentes, apresenta o modelo logístico conforme mostra o Quadro 4.6.

Quadro 4.6 – Discussão do crescimento populacional proposto por Verhulst e apresentado por D. G. Zill.

Dinâmica Populacional *Se* $P(t)$ *denota o tamanho da população no instante t, o modelo de crescimento exponencial começa com a hipótese de que* $\frac{dP}{dt} = kP$ *para algum* $k > 0$. *Nesse modelo, supõe-se que a taxa de* ***crescimento relativa*** *ou* ***específica****, definida por*

$$\frac{dP/dt}{P}, \tag{4.30}$$

seja uma constante k. *Casos reais de crescimento exponencial por um longo período são difíceis de encontrar, pois os recursos limitados do meio ambiente vão em algum momento restringir o crescimento da população. Assim sendo, espera-se que (4.30) possa decrescer à medida que P cresce.*

A hipótese de que a taxa de crescimento (ou decrescimento) de uma população depende somente do número de indivíduos presentes e não de um mecanismo dependente do tempo pode ser escrita como

$$\frac{dP/dt}{P} = f(P) \text{ ou } \frac{dP}{dt} = Pf(P). \tag{4.31}$$

A equação diferencial em (4.31), largamente usada em modelos de população de animais, é chamada de ***hipótese da dependência da densidade****.*

Equação Logística *Suponha que um determinado meio ambiente seja capaz de sustentar não mais do que um número fixo* K *de indivíduos em sua população. A quantidade* K *é chamada de* ***capacidade de suporte*** *do meio ambiente. Logo, para a função* f *em (4.31), temos* $f(K) = 0$ *e estabelecemos simplesmente* $f(0) = r$. *[...] A hipótese mais simples possível é de que* $f(P)$ *é linear – isto é,* $f(P) = c_1P + c_2$. *Se usarmos as condições* $f(0) = r$ *e* $f(K) = 0$, *resulta que* $c_2 = r$ *e* $c_1 = -\frac{r}{K}$ *e, assim sendo,* f *assume a forma* $f(P) = r - \frac{r}{K}P$. *A Equação (4.31) então torna-se*

$$\frac{dP}{dt} = P\left(r - \frac{r}{K}P\right). \tag{4.32}$$

Renomeando as constantes, a equação não-linear (4.32) é a mesma que

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP). \tag{4.33}$$

Por volta de 1840, o matemático e biólogo belga P. F. Verhulst interessou-se por modelos matemáticos para predizer a população humana de vários países. Uma das equações estudadas por ele foi a equação (4.33), onde $a > 0$ *e* $b > 0$. *A Equação (4.33) ficou conhecida como* ***equação logística****. Sua solução é chamada de* ***função logística****. O gráfico dessa função é chamado de* ***curva logística****.*

A equação diferencial $\frac{dP}{dt} = kP$ *não fornece um modelo preciso para populações quando a população é muito grande. Em casos de superpopulação, considerando os efeitos prejudiciais sobre o meio ambiente, como poluição e alta demanda (e competição) por alimento e combustível, pode haver um efeito inibidor no crescimento populacional. Como podemos ver, a solução de (4.33) é limitada quando* $t \to \infty$. *Se reescrevermos (4.33) como* $\frac{dP}{dt} = aP - bP^2$, $b > 0$ *pode ser interpretado como um termo de "inibição" ou "competição". E muitas aplicações, a constante positiva* a *é muito maior que* b.

[...]

Quadro 4.6 – Discussão do crescimento populacional proposto por Verhulst e apresentado por D. G. Zill. (continuação)

Solução da Equação Logística *Um método de resolução de (4.33) é a separação de variáveis. Decompondo o lado esquerdo de* $\frac{dP}{P(a-bP)} = dt$ *em frações parciais e integrando obtemos*

$$\left(\frac{1/a}{P} + \frac{b/a}{a-bP}\right)dP = dt$$

$$\frac{1}{a}\ln|P| - \frac{1}{a}\ln|a-bP| = t + c$$

$$\ln\left|\frac{P}{a-bP}\right| = at + ac$$

$$\frac{P}{a-bP} = c_1 e^{at}.$$

Segue da última equação que

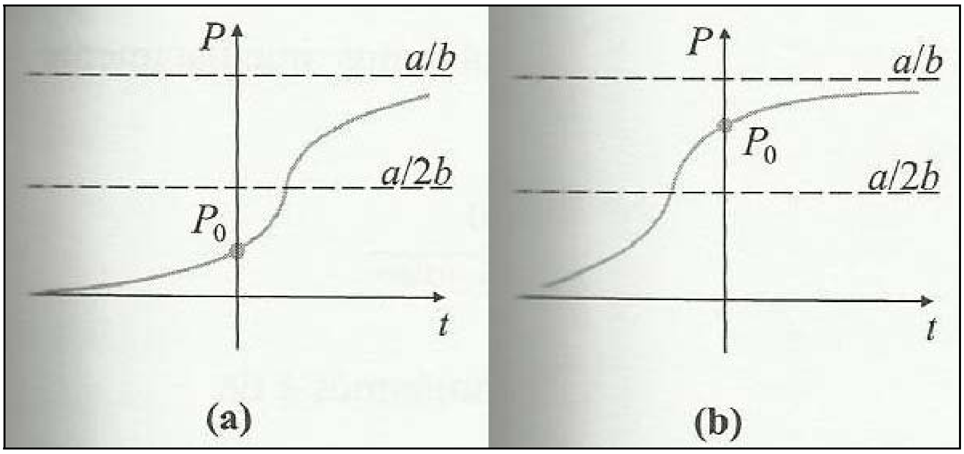
$$P(t) = \frac{ac_1e^{at}}{1+bc_1e^{at}} = \frac{ac_1}{bc_1 + e^{-at}}.$$

Se $P(0) = P_0$, $P_0 \neq \frac{a}{b}$, *obtemos* $c_1 = \frac{P_0}{a - bP_0}$ *e, assim, depois de substituirmos e simplificarmos, a solução torna-se*

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a-bP_0)e^{-at}}. \tag{4.34}$$

A partir desse momento Zill (2003) obtém os gráficos da função logística, como mostrado na Figura 4.15, identificando o limite máximo da população bem como o ponto de inflexão, que como já mencionamos em seção anterior, tem importância para a análise do fenômeno descrito pelo modelo.

Figura 4.15 – Gráficos da função logística.



Fonte: ZILL (2003, p.111).

A abordagem de Zill, no que se refere ao modelo de Gompertz, é mostrada no Quadro 4.7.

Quadro 4.7 – Discussão do crescimento populacional proposto por Gompertz e apresentado por D. G. Zill.

Modificações da Equação Logística *[...] Uma outra equação da forma dada em (4.31),*

$$\frac{dP}{dt} = P(a - b\ln P), \qquad (4.35)$$

é uma modificação da equação logística conhecida como **equação diferencial de Gompertz**. *Essa ED é usada algumas vezes como modelo no estudo de crescimento ou declínio de populações, crescimento de tumores malignos e determinado tipo de predição atuarial.*

Vale chamar atenção que o livro considera o modelo de Gompertz como resultante de uma "modificação" do modelo logístico quando, na verdade, historicamente a modelagem de Gompertz precede os trabalhos de Verhulst.

Após a apresentação do modelo logístico e sua modificação, Zill (2003) propõe quatro problemas, sendo que em um destes deve-se encontrar um modelo logístico para a população dos Estados Unidos por meio de três dados de uma tabela dada e realizar a validação deste modelo, similar a um processo de Modelagem Matemática.

Figura 4.16 – Problemas 1 a 4 da seção 3.2.

1. O número $N(t)$ de supermercados em todo o país que usam um sistema de caixa computadorizado é descrito pelo problema de valor inicial

$$\frac{dN}{dt} = N(1 - 0{,}0005N), \quad N(0) = 1.$$

(a) Use o conceito de retrato de fase da Seção 2.1 para prever quantos supermercados adotarão esse novo procedimento a longo prazo. Esboce à mão uma curva integral do problema de valor inicial dado.

(b) Resolva o problema de valor inicial e use um programa de computador para verificar a curva integral do item (a). Qual é a previsão do número de supermercados que adotarão essa nova tecnologia quando $t = 10$?

2. O número $N(t)$ de pessoas em uma comunidade expostas a um determinado anúncio é governado pela equação logística. Inicialmente, $N(0) = 500$, e foi observado que $N(1) = 1000$. Prevê-se que o número máximo de pessoas na comunidade que verão o anúncio será 50.000. Determine $N(t)$ em qualquer tempo.

3. O modelo de população $P(t)$ suburbana de uma grande cidade é dado pelo problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = P(10^{-1} - 10^{-7}P), \quad P(0) - 5.000,$$

onde t é medido em meses. Qual é o valor-limite da população? Em que instante a população será igual à metade desse valor-limite?

4. (a) Dados do censo dos Estados Unidos entre 1790 a 1950 são apresentados na Tabela 3.1. Construa um modelo logístico de população usando os dados de 1790, 1850 e 1910.

Tabela 3.1

Anos	População (em milhões)
1790	3,929
1800	5,308
1810	7,240
1820	9,638
1830	12,866
1840	17,069
1850	23,192
1860	31,433
1870	38,558
1880	50,156
1890	62,948
1900	75,996
1910	91,972
1920	105,711
1930	122,755
1940	131,669
1950	150,697

Fonte: ZILL (2003, p.115).

O problema 1 exige uma abordagem qualitativa e a utilização de métodos já conhecidos para resolver a equação diferencial. A abordagem nos problemas 2 e 3 também exige a utilização de métodos de resolução da equação diferencial específica. O problema 4 é essencialmente diferente dos outros problemas. Nele, embora o uso do modelo logístico já esteja indicado, o modelo matemático não está posto, exigindo que o estudante encontre os parâmetros do modelo, aproximando-se de uma atividade de Modelagem Matemática.

4.3.3 As Práticas Sociais e a Matemática Escolar nos Livros Didáticos

O autor de um livro didático influencia nas práticas de professores e alunos de forma intencional. Segundo Oliveira, no processo de produção da obra,

> "o autor" constitui "um leitor" tipo, para o qual escreve e "quer dizer". A constituição do "um leitor" não é, também, ingênua, mas intencional. Por isso, o "um leitor", constituído pelo "o autor", é determinante da forma e do conteúdo do "dito" no texto. Por outro lado, ao ler, "o leitor" constitui "um autor" tipo, o qual "escuta". Também a formação do "um autor" pelo "o leitor" influencia e condiciona seu modo de reagir ao texto (OLIVEIRA, 2008, p.33).

O leitor, portanto, interpreta o livro didático, com a intenção de se aproximar da expectativa do autor. Deste modo, o livro didático é uma prática social que outorga uma estrutura ao que professores e alunos devem fazer e como devem fazer.

Do ponto de vista histórico, o livro dos autores W. E. Boyce e R. C. DiPrima e o livro de D. G. Zill, se referem aos 'autores' dos modelos de crescimento populacional apresentados (Malthus, Gompertz e Verhulst) fazendo menção a práticas sociais associadas ao desenvolvimento destes modelos, embora de maneira abreviada.

De modo geral, abordam a ideia do modelo de Malthus de que populações crescem a uma taxa proporcional à população e se referem ao trabalho deste autor de 1798. No que concerne ao modelo logístico, utilizam apenas o trabalho de 1838 de Verhulst para apresentar suas considerações.

Boyce e DiPrima (2002) colocam em nota de rodapé que Verhulst não foi capaz de testar a precisão de seu modelo de 1838 devido a dados inadequados de censo. Historicamente, por meio de um exame mais detalhado, Verhulst examinou e validou tal modelo de modo que sugeriu um novo modelo para a projeção da população em 1846.

Com relação ao modelo de Gompertz, de uma forma abreviada, colocam como uma modificação da equação logística. Contudo, como abordado em subseções anteriores tal modelo não advém de uma modificação do modelo logístico, mas de hipóteses de Gompertz sobre a mortalidade, transformadas em linguagem matemática fundamentada em Newton.

Do ponto de vista epistemológico, os autores apresentam os modelos já estruturados e com a notação e linguagem matemática como atualmente convencionada. As práticas matemáticas, nesse sentido, visam indicar as aplicações que as equações diferenciais ordinárias podem gerar, no que diz respeito ao crescimento (ou decrescimento) de populações de diferentes espécies.

Assim, os livros podem resumir a abordagem da dinâmica populacional em ambiente escolar, como uma aplicação de equações diferenciais, dando pouca atenção às práticas sociais e matemáticas associadas a esta dinâmica.

De acordo com um modelo matemático estruturado pela dinâmica populacional, por meio de métodos como a separação de variáveis, obtém-se a solução matemática. Tal solução se trata de aplicações de equações diferenciais (Figura 4.17). Deste modo, os livros didáticos determinam previamente os significados para seus leitores estudantes.

Figura 4.17 – Esquema do tratamento escolar sobre Dinâmica Populacional.

	Aplicação de Fórmulas		Aplicações	
Modelo Matemático	→	Solução Matemática	→	Situação do Mundo Real

Considerando que atualmente, nas universidades brasileiras, o ensino chamado tradicional passa por uma reformulação, faz-se necessário que, para além do uso de um livro didático, haja a articulação dos saberes para contribuir para a formação do aluno. Não se trata de ignorar os saberes das comunidades tradicionais.

> Esses saberes devem ser tomados, analisados, refletidos em seus significados e inter-relacionados aos saberes acadêmicos sempre numa perspectiva problematizadora, pois assim poderá ser possível solucionar dificuldades e resolver problemas da comunidade (GAZZETA *apud* MENDES, 2010, p.585).

Nesse sentido, atividades de Modelagem Matemática podem ajudar na articulação dos saberes. Quando envolvidos neste tipo de atividade, tanto professor quanto aluno se tornam agentes da construção do conhecimento, considerando que as ‘matemáticas’ se constituem em diferentes práticas sociais e seus usos dependem do contexto em que são abordadas.

4.4 Modelagem Matemática do Crescimento Populacional em Livro de Modelagem Matemática

O livro que analisamos é “Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia” do autor R. C. Bassanezi, publicado em 2010. Segundo o autor, este livro começou a ser escrito em meados da década de 90, cujo plano original sofreu modificações contínuas. Ele “deve ser visto como um projeto de ensino-aprendizagem de matemática onde o leitor, sem muito esforço, poderá aventurar-se na construção de seus próprios modelos” (BASSANEZI, 2010, apresentação). Os projetos propostos contidos neste livro destinam-se a verificar o aprendizado das técnicas e conceitos e, além disso, a levar o leitor a formular e analisar seus modelos.

A prática social associada a este livro refere-se a propor um tratamento alternativo ao que é notado nos cursos universitários em diferentes disciplinas bem como no Ensino Fundamental e Médio em relação à Matemática.

O crescimento populacional especificamente é tratado no capítulo 6, onde o autor faz uma análise evolutiva de alguns modelos. D’Ambrosio no prefácio deste livro argumenta que

> não existem modelos definitivos. A modelagem é um processo. Um modelo de um fato ou de um fenômeno real sempre pode ser melhorado. Assim justifica-se a discussão do último capítulo intitulado “Evolução de Modelos”. (BASSANEZI, 2010, prefácio).

Particularmente, na seção 6.2 o autor aborda o modelo malthusiano e o modelo logístico, apresentando a discussão do crescimento exponencial proposta por Malthus conforme mostra o Quadro 4.8.

Quadro 4.8 – Discussão do crescimento exponencial proposto por Malthus e apresentado por R. C. Bassanezi.

Uma população raramente pode ser considerada isolada, a não ser em condições ideais de laboratório ou quando não é possível individualizar no biossistema outra população interagindo com a primeira. Mesmo na análise de populações isoladas, muitos fatores podem contribuir com sua dinâmica – fatores abióticos (temperatura, vento, humidade etc.) e fatores de auto-regulação (espaço, alimento, idade, guerra etc.).

[...]

A proposta de utilização da matemática para estabelecer um modelo para o crescimento de uma população humana começou com o economista inglês T. R. Malthus (An Essay on the Principle of Population, 1798).

Seu “modelo” é baseado em dois postulados:

1. “O alimento é necessário à subsistência do homem”;

2. “A paixão entre os sexos é necessária e deverá permanecer aproximadamente em seu estado permanente”.

Supondo, então, que tais postulados estejam garantidos, Malthus afirma que “a capacidade de reprodução do homem é superior à capacidade da terra de produzir meios para sua subsistência e, a inibição do crescimento populacional é devida à disponibilidade de alimentos. A população quando não obstaculizada (unchecked), aumenta a uma razão geométrica. Os meios de subsistência aumentam apenas a uma razão aritmética. Pela lei de nossa natureza, que torna o alimento necessário à vida do homem, os efeitos dessas duas diferentes capacidades devem ser mantidos iguais”.*

Atualmente, em dinâmica populacional, o que se convencionou chamar de modelo de Malthus assume que o crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante *(progressão geométrica ou crescimento exponencial), e desta forma, a população humana deveria crescer sem nenhuma inibição. Assim, o modelo de Malthus propõe um crescimento de vida otimizada, sem fome, guerra, epidemia ou qualquer catástrofe, onde todos os indivíduos são idênticos, com o mesmo comportamento. A formulação deste modelo em termos de uma equação diferencial não foi feita por Malthus, apesar de ser muito simples, mesmo para a época em que foi postulado.*

"O homem malthusiano é uma abstração vazia ou um recurso do pensamento para analisar e sintetizar os conflitos reais que as classes mais empobrecidas viviam? Malthus em sua primeira versão do princípio da população, polemiza com os chamados socialistas utópicos – Condorcet, Godwin , Wallace – cujas obras, de modo geral, propunham uma sociedade igualitária como alternativa à situação de miséria vivida. Segundo ele, a causa verdadeira dessa miséria humana não era a sociedade dividida entre proprietários e trabalhadores, entre ricos e pobres. A miséria seria, na verdade, um obstáculo positivo, que atuou ao longo de toda a história humana, para reequilibrar a desproporção natural entre a multiplicação do homem – o crescimento populacional – e a produção dos meios de subsistência – a produção de alimentos. A miséria e o vício são obstáculos positivos ao crescimento da população. Eles reequilibram duas forças tão desiguais. A miséria para Malthus, é, portanto, necessária. Ao se ampliarem os meios de subsistência, invariavelmente a população volta a crescer, e, assim, os pobres vivem em perpétuo movimento oscilatório entre o progresso e o retrocesso da felicidade humana". (Amélia Damiani, População e Geografia, Ed. Contexto, 1992).

A previsão da população mundial, segundo o modelo malthusiano, atingia números astronômicos em pouco tempo o que tornaria a Terra um planeta superlotado e inabitável, o que não ocorreu. Também as suas previsões drásticas em relação à alimentação estavam erradas pois não se supunha o grande salto que ocorreu na produção mundial de alimentos entre os anos de 1950 e 1998.

**Malthus: Economia, Textos de Malthus organizado por T. Szmrecsányi, Ed. Ática, 56-57.*

O que pode ser verificado neste trecho do livro é uma adequada explanação sobre a problemática da época em que Malthus se inseria. O aumento da miséria e da população foi uma prática social que, em discussão com socialistas utópicos como Condorcet, Godwin, Wallace, levou Malthus a escrever a sua obra em 1798.

Bassanezi (2010, p.327) apresenta em seu livro os postulados que convencionalmente constituem o chamado modelo de Malthus e as consequências deste modelo, em consonância aos documentos originais de Malthus apresentados na seção 4.2.1. Segundo o autor, os modelos para descrever o crescimento populacional evoluíram após Malthus, sendo um dos mais importantes o modelo de Verhulst.

> A modelagem matemática para descrever o crescimento populacional evoluiu, passando por várias modificações após Malthus. Um dos modelos mais importante e conhecido é do sociólogo belga P. F. Verhulst (1838) que supõe que toda população é predisposta a sofrer inibições naturais em seu crescimento, devendo tender a um valor limite constante quando o tempo cresce. É um modelo de crescimento mais significativo, do ponto de vista biológico e realístico (BASSANEZI, 2010, p.328).

A partir destas colocações, Bassanezi (2010) trata de explorar matematicamente tais modelos determinísticos, com vistas a analisar a evolução da população brasileira, a partir de dados da tabela descrita na Figura 4.18.

Figura 4.18 – Censos Demográficos do Brasil de 1940 a 1991.

Períodos	População	Taxas de Crescimento (% a.a.)	Crescimento Absoluto	Distribuição Etária (%)		
				0–14	15–64	65 e mais
1940	41.236.315			42.6	55.0	2.4
		2.3	10.708.082			
1950	51.944.397			41.9	55.5	2.6
		3.2	19.047.946			
1960	70.992.343			43.2	54.3	2.5
		2.8	22.146.694			
1970	93.139.037			42.6	54.3	3.1
		2.5	25.863.669			
1980	119.002.706			38.8	57.2	4.0
		1.9	27.822.769			
1991	146.825.475			35.0	60.2	4.8

Fonte: FIBGE. Censos Demográficos do Brasil de 1940 a 1991. NEPO/UNICAMP

Fonte: BASSANEZI (2010, p.330).

Neste momento o autor apresenta a formulação do modelo de Malthus exatamente como a descrevemos na seção 4.2.1. Usando a expressão $P_t = (\alpha + 1)^t P_0$ e os dados da Figura 4.18, o autor escreve o modelo $P(t) = 41.236e^{0.0249t}$.

No entanto, o autor remete sua análise aos dados da Figura 4.18 e indica ao leitor que o modelo malthusiano não é o mais indicado para descrever a dinâmica do crescimento dessa população e inicia então suas apresentações em relação ao modelo de Verhulst conforme mostra o Quadro 4.9.

Quadro 4.9 – Discussão do crescimento exponencial proposto por Verhulst e apresentado por R. C. Bassanezi.

O modelo de Verhulst é, essencialmente, o modelo de Malthus modificado, considerando a taxa de crescimento como sendo proporcional à população em cada instante. Assim,

$$\frac{dP}{dt} = \beta(P)P \qquad (4.36)$$

com $\beta(P) = r\left(\frac{P_\infty - P}{P_\infty}\right)$, $r > 0$ *e* P_∞ *sendo o valor limite da população. Desta forma* $\beta(P)$ *tende a zero quando* $P \to P_\infty$.

Explicitando $\beta(P)$ *na equação (4.36), e supondo que* $P(0) = P_0$ *seja dado, temos o modelo clássico de Verhulst ou modelo logístico:*

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = rP\left(1 - \dfrac{P}{P_\infty}\right) \\ P(0) = P_0, \quad r > 0. \end{cases} \qquad (4.37)$$

Observamos que $P(t) \equiv 0$ *e* $P(t) \equiv P_\infty$ *são soluções da equação diferencial dada em (4.37). A solução analítica de (4.37) é obtida por integração após a separação das variáveis, isto é,*

$$\int \frac{dP}{P(1 - P/P_\infty)} = \int r\,dt\,.$$

Usando a técnica das frações parciais para resolver a integral do 1° membro, obtemos

$$\int \frac{dP}{P(1 - P/P_\infty)} = \int \left(\frac{1}{P} + \frac{1/P_\infty}{1 - P/P_\infty}\right) dp = ln|P| - ln\left|1 - \frac{P}{P_\infty}\right|.$$

Logo,

$$ln\left|\frac{P(t)}{1 - P(t)/P_\infty}\right| = rt + c\,.$$

Usando a condicional $P(0) = P_0$, *podemos determinar o valor da constante de integração c:*

$$c = ln\left|\frac{P_0}{1 - P_0/P_\infty}\right| = ln\left|\frac{P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0}\right|.$$

Portanto

$$ln\left|\frac{P(t)P_\infty}{P_\infty - P(t)}\right| = rt + ln\left|\frac{P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0}\right|,$$

ou seja,

$$ln\left|\frac{P(P_\infty - P_0)}{P_0(P_\infty - P)}\right| = rt \Rightarrow \frac{P}{P_\infty - P} = \frac{P_0}{P_\infty - P_0} e^{rt}\,.$$

Explicitando $P(t)$, *temos*

$$P(t) = \frac{P_\infty}{(P_\infty/P_0 - 1)e^{-rt} + 1} = \frac{P_\infty P_0}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0}\,. \qquad (4.38)$$

A curva $P(t)$ *é denominada logística.*

Segundo Bassanezi (2010), para usar o modelo (4.38) para projetar a população brasileira é preciso estimar os valores de P_∞ e r. Verifica-se tal desenvolvimento no Quadro 4.10.

Quadro 4.10 – Discussão do crescimento exponencial proposto por Verhulst e apresentado por R. C. Bassanezi.

Agora, como o modelo logístico pressupõe que a taxa decai linearmente, em função da população, podemos ajustar os valores r_i médios (estimados entre os censos consecutivos i e i+1) com as respectivas populações médias P_i (estimadas através de um modelo exponencial):

$$r_i = \left(\frac{P_i}{P_{i-1}}\right)^{\frac{1}{i}} - 1.$$

$$r_1 = \sqrt[10]{\frac{70992343}{51944397}} - 1 = 0.03173 \Rightarrow P_1 = P(1955) = 51.994.397e^{0.03173\times 5} = 60.934.500$$

$$r_2 = \sqrt[10]{\frac{93139037}{70992343}} - 1 = 0.02752 \Rightarrow P_2 = P(1965) = 70.992.343e^{0.02752\times 5} = 81.466.500$$

$$r_3 = \sqrt[10]{\frac{119002706}{93139037}} - 1 = 0.02481 \Rightarrow P_3 = P(1975) = 93.139.037e^{0.02481\times 5} = 105.439.088$$

$$r_4 = \sqrt[10]{\frac{146825475}{119002706}} - 1 = 0.01928 \Rightarrow P_4 = P(1985.5) = 119.002.706e^{0.01928\times 5} = 132.315.104$$

Consideremos os valores de P_i em milhões de habitantes, então a equação da reta que ajusta r_i e P_i é dada por:

$$r = -0.0001682\ P + 0.0418 \qquad (4.39)$$

O modelo de Verhulst será, neste caso, dado por

$$\frac{dP}{dt} = r(P)P = 0.0418P - 0.0001682P^2$$

Ou

$$\frac{dP}{dt} = 0.0418\,P\left(1 - \frac{P}{248.656}\right) \qquad (4.40)$$

onde $P_\infty = 248.656$ é a população limite, isto é, P_∞ é o valor de P quando r=0 em (4.39). A solução de (4.40) é a curva logística dada por:

$$P(t) = \frac{248.656}{3.787\exp[-0.0418(t-1950)+1]}$$

onde $3.787 = \frac{P_\infty}{P_0} - 1$, *considerando* $P_0 = P(1950) = 51.944$.

Bassanezi (2010) determina o valor de r de outra maneira, por meio de um programa computacional do tipo Excel, faz a validação do modelo matemático encontrado e conclui dizendo que este modelo é bastante razoável para reproduzir os valores das populações dos censos desde 1950. Segundo ele, é possível conjecturar que se não houver nenhuma fatalidade provocada por guerras, epidemias, controles forçados de natalidade etc., o modelo deve ser razoável para projetar populações futuras.

Bassanezi (2010) conclui dizendo que uma das limitações do modelo de Verhulst consiste no fato de que o ponto de inflexão (ou de crescimento máximo) da curva está sempre localizado no ponto $P_m = \frac{P_\infty}{2}$, o que nem sempre acontece na maioria das variáveis relacionadas a fenômenos com tendência assintótica. Diante desta limitação, o autor apresenta o modelo de Gompertz como uma alternativa à dinâmica populacional, visto que o ponto de inflexão está localizado bem no início da curva de crescimento, como mostramos em seções anteriores.

Segundo Bassanezi (2010), o modelo de Gompertz utiliza uma taxa de inibição da variável de estado proporcional ao logaritmo desta variável. Isto significa que a taxa de crescimento é grande no início do processo, mudando rapidamente para um crescimento mais lento, conforme mostra o Quadro 4.11.

Quadro 4.11 – Discussão do crescimento exponencial proposto por Gompertz e apresentado por R. C. Bassanezi.

O modelo de Gompertz é dado pelo problema de Cauchy (equação diferencial com condição inicial):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bx\ln x = x(a - b\ln x) \\ x(0) = x_0 \text{ com } a > 0 \text{ e } b > 0. \end{cases} \tag{4.41}$$

A taxa de crescimento $r(x) = a - b\ln x > 0$ *decresce com x e o valor de estabilidade de x é obtido considerando-se* $r(x) = 0$ *, isto é,*

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow (a - b\ln x) = 0 \Leftrightarrow x_\infty = e^{a/b}, \text{ com } x > 0 .$$

Observamos que quando x é muito pequeno, $r(x)$ *é muito grande pois*

$$\lim_{x \to 0^+} r(x) = +\infty .$$

Agora, como $0 = a - b\ln x_\infty$ *, podemos tomar* $a = b\ln x_\infty$ *na equação (4.41) e reescrevê-la como*

$$\frac{dx}{dt} = bx\ln x_\infty - bx\ln x = bx\ln\left(\frac{x_\infty}{x}\right) = x\ln\left(\frac{x_\infty}{x}\right)^b \tag{4.42}$$

e neste caso, $r(x) = \ln\left(\frac{x_\infty}{x}\right)^b$.

A solução de (4.41) é obtida considerando-se a mudança de variável $z = \ln x$*:*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = a - bz .$$

Integrando,

$$\int \frac{dz}{a - bz} = \int dt \Leftrightarrow -\frac{1}{b}\ln|a - bz| = t + c .$$

Para $t = 0$*, obtemos* $c = -\frac{1}{b}\ln|a - b\ln x_0|$*. Portanto,* $\ln|a - bz| = -bt + \ln|a - b\ln x_0|$,

$$a - bz = (a - b\ln x_0)e^{-bt} \quad \Leftrightarrow \quad z(t) = \tfrac{1}{b}\left[a - (a - b\ln x_0)e^{-bt}\right].$$

Voltando à variável $x = e^z$*, obtemos*

$$x(t) = e^{a/b} \cdot \exp\left[-\left(\tfrac{a}{b} - \ln x_0\right)e^{-bt}\right], \text{ ou}$$

$$x(t) = x_\infty \left(\frac{x_0}{x_\infty}\right)^{e^{-bt}} .$$

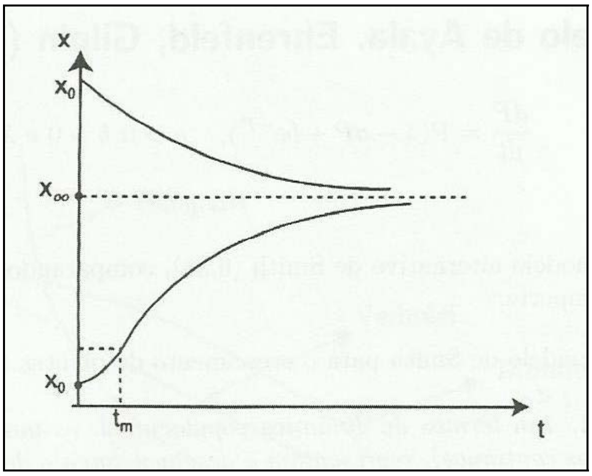
A curva $x(t)$ *tem um ponto de inflexão quando*

$$t = t_m = \tfrac{1}{b}\ln\left(\tfrac{a}{b} - \ln x_0\right)$$

$$x(t_m) = \tfrac{1}{e}x_\infty = \tfrac{1}{e}e^{a/b} = e^{\frac{a-b}{b}} .$$

As soluções do modelo de Gompertz apresentadas pelo autor estão descritas na Figura 4.19.

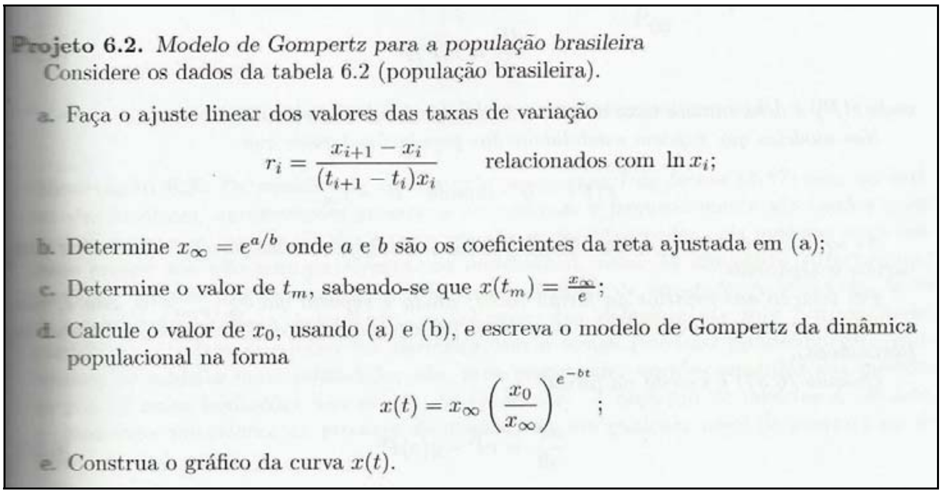
Figura 4.19 – Soluções do modelo de Gompertz.



Fonte: BASSANEZI (2010, p.345).

Pode-se verificar que o modelo de Gompertz neste livro não é abordado do mesmo modo que o trabalho de Gompertz de 1825. Bassanezi deixa como um projeto a estimativa populacional para a população brasileira, utilizando o modelo de Gompertz (Figura 4.20).

Figura 4.20 – Projeto – Modelo de Gompertz para a população brasileira.



Projeto 6.2. *Modelo de Gompertz para a população brasileira*
Considere os dados da tabela 6.2 (população brasileira).

a. Faça o ajuste linear dos valores das taxas de variação

$$r_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{(t_{i+1} - t_i)x_i} \qquad \text{relacionados com } \ln x_i;$$

b. Determine $x_\infty = e^{a/b}$ onde a e b são os coeficientes da reta ajustada em (a);

c. Determine o valor de t_m, sabendo-se que $x(t_m) = \frac{x_\infty}{e}$;

d. Calcule o valor de x_0, usando (a) e (b), e escreva o modelo de Gompertz da dinâmica populacional na forma

$$x(t) = x_\infty \left(\frac{x_0}{x_\infty}\right)^{e^{-bt}} \quad ;$$

e. Construa o gráfico da curva $x(t)$.

Fonte: BASSANEZI (2010, p.345).

Diante do que foi exposto neste livro de Modelagem Matemática, o que se percebe é a utilização de estratégias variacionais para se encontrar a população brasileira em um instante posterior t.

4.4.1 As Práticas Sociais e Matemáticas no Livro de Modelagem Matemática

O surgimento da Modelagem na Educação Matemática como um campo de pesquisa é devido às atividades de alguns professores e pesquisadores como Rodney Carlos Bassanezi. Esse pesquisador teve um grande incentivo de Ubiratan D'Ambrosio para consolidação e divulgação da modelagem como método de ensino. Desde o início da década de 1980, Bassanezi já vinha utilizando a modelagem no ensino de Cálculo (SILVEIRA, 2007).

Bassanezi desenvolveu seus trabalhos em um contexto das equações diferenciais já consolidadas. Um de seus objetivos foi propor um tratamento alternativo aos métodos e técnicas apresentados em livros didáticos como o de Boyce e DiPrima e o de Zill. Por sua vez, tais livros foram escritos do ponto de vista do matemático aplicado. Percebe-se aqui uma tensão entre os livros didáticos e o de Modelagem Matemática.

Do ponto de vista histórico, no que se refere aos autores dos modelos de crescimento populacional (Malthus e Verhulst), o livro do autor Bassanezi menciona práticas sociais relacionadas ao desenvolvimento destes modelos.

No que se refere ao modelo de Malthus, o autor explana os postulados que convencionalmente constituem tal modelo, inserindo-o na problemática de sua época. Além disso, coloca que seu trabalho teve influência devido ao aumento da população e da miséria e leituras dos trabalhos de socialistas utópicos como Condorcet, Godwin, Wallace.

Com relação ao modelo de Verhulst, o autor coloca de forma abreviada que em 1838, Verhulst assumiu que a população estaria predisposta a sofrer inibições em seu crescimento e que seu modelo se trata de uma modificação de Malthus.

Contudo, no que se refere ao modelo de Gompertz, coloca em uma notação ao que hoje é convencionada e não aponta seu desenvolvimento histórico.

Do ponto de vista epistemológico, Bassanezi (2010) apresenta a formulação do modelo de Malthus como apresentado na seção 4.2.1 e a formulação do modelo logístico como apresentado na seção 4.2.2, como uma alternativa ao que é notado nos livros didáticos analisados. O projeto proposto de Gompertz destina-se a levar o leitor a formular e analisar seus modelos.

As práticas matemáticas, nesse sentido, visam por meio de equações diferenciais ordinárias, a construção de modelos de crescimento (ou decrescimento) de populações. E, portanto, o livro de Modelagem Matemática aqui analisado, enfatiza práticas sociais e matemáticas associadas a esta temática, o que é importante para a construção do conhecimento matemático.

4.5 O Crescimento Populacional em Sala de Aula: As Práticas Sociais e Matemáticas dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática

Para investigar as práticas sociais e matemáticas de estudantes em relação à modelagem do crescimento populacional, analisamos duas atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina no âmbito da disciplina de “Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática”. Uma atividade estuda o crescimento da população da cidade de Londrina - PR e a outra atividade trata da evolução da população brasileira. Vale a pena ressaltar que estas atividades foram desenvolvidas seguindo os diferentes momentos[4] da Modelagem Matemática.

4.5.1 Atividade 1: Estimativa para a População da Cidade de Londrina

Esta atividade consta na dissertação de mestrado “Contribuições da Modelagem Matemática para o Pensamento Reflexivo: Um Estudo” de Fidelis (2005) e corresponde ao primeiro momento da Modelagem Matemática, de modo que as informações e os dados foram apresentados pela professora[5]. Segundo Fidelis (2005), esta atividade foi introduzida com o objetivo de trabalhar o método de Ford-Walford e teve duração de quatro aulas de cinquenta minutos. Com a intenção de identificar e analisar práticas sociais e matemáticas dos alunos (e mesmo do professor), mostramos recortes da descrição da atividade bem como recortes de falas dos alunos e/ou professor, a partir da descrição detalhada da atividade que consta em Fidelis (2005). No Quadro 4.12 apresentamos a situação-problema “Estimativa para a população da cidade de Londrina” conforme consta em Fidelis (2005).

[4] No primeiro momento há o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática já estabelecidas. No segundo momento o professor sugere uma situação-problema e cabem aos alunos a formulação das hipóteses, o estabelecimento do modelo matemático e sua validação. No terceiro momento, os alunos, assessorados pelo professor, escolhem a situação-problema e fazem o estudo da mesma por meio da Modelagem Matemática.

[5] A professora da disciplina é a orientadora do trabalho de Fidelis (2005) e também desta dissertação.

Quadro 4.12 – Situação-problema "Estimativa para a população da cidade de Londrina" retirada da dissertação de Fidelis (2005).

Londrina foi fundada no ano de 1929 sendo elevada a condição de município no ano de 1934, sendo, portanto, uma cidade relativamente jovem, mas que teve um crescimento populacional rápido, atingindo atualmente uma população superior 446.849 habitantes (dados do censo 2000, IBGE). Sendo considerada a terceira cidade do sul do Brasil em importância econômica e em população.

A cidade foi criada pela Companhia de Terras Norte do Paraná, com o intuito de colonização do norte do estado do Paraná, onde realizou um planejamento da formação de cidades que obedeceriam a funções diferenciadas de acordo com a sua localização, distribuídas num intervalo de 20 Km de distância, cidades menores e a cada 100 Km cidades de função centralizadoras. Londrina foi inicialmente projetada para comportar 20.000 habitantes, mas este número foi rapidamente superado ainda nos seus primeiros 20 anos de existência. Este crescimento do município se deveu basicamente pela forte produção agrícola, principalmente, da economia cafeeira que gerou uma atração de capitais para a região de Londrina e que serviu de base da econômica até os anos de 1970.

Após esta década sentiu-se a modificação na estrutura econômica brasileira, que se ampliou nos anos posteriores a 1955, em que se teve uma mudança de privilegiamento dos investimentos do Estado para a economia urbano-industrial em detrimento da economia agrário-exportadora. Isto se deu pela demanda de mercado consumidor, a qual necessitavam as indústrias multinacionais que se instalaram no Brasil após o período do Governo de Juscelino Kubitschek (1955-1960), em que realizou a internacionalização da economia brasileira, facilitando a entrada de capital estrangeiro no país.

Figura 4.21 – Evolução da população de Londrina.

Ano	Pop. urbana	Pop. Rural	Total
1935	4.000	11.000	15.000
1940	19.531	64.765	75.296
1950	33.707	33.144	66.851
1960	77.382	57.439	132.821
1970	163.871	64.661	288.532
1980	267.102	34.647	301.749
1991	376.676	23.424	390.100
1996	396.530	16.364	412.894
2000	433.243	13.579	446.822

Fonte: Censos Demográficos do IBGE

Fonte: FIDELIS (2005, p.66).

Observando a Figura 4.21, percebe-se que após o ano de 1970, o percentual de população rural decaiu rapidamente em decorrência do acelerado crescimento da população urbana. Isto ocorreu em função de vários fatores, dentre eles, a passagem do cultivo de café (com baixa mecanização e grande quantidade de mão-de-obra) para culturas como soja, trigo, milho e algodão (que praticamente exigem uma mecanização intensa e conseqüentemente dispensam o emprego de mão-de-obra abundante). Aliado a forte concentração de terras que foi ampliada nesta época devido aos intensos custos para mecanização do campo que levou os produtores a se endividarem junto ao capital financeiro e perderem suas terras, e ainda, e principalmente, pela necessidade mão-de-obra no crescente setor terciário e na nascente indústria de Londrina. Houve, então, uma intensa migração rural-urbana que culminou com o crescimento acelerado e complexificação do espaço urbano de Londrina.

Desta forma, através das mudanças capitalistas no campo, é que as migrações foram motivadas, onde àqueles que foram destituídos/expulsos/expropriados de suas vidas no campo, se dirigem às cidades em busca de oportunidades, transformando-se assim, gradativamente em proletários urbanos. A chegada dos imigrantes à cidade trouxe várias dificuldades de adaptação

Quadro 4.12 – Situação-problema "Estimativa para a população da cidade de Londrina" retirada da dissertação de Fidelis (2005). (continuação)

devido a não possuírem uma qualificação para o trabalho urbano e devido à baixa oferta de empregos.Desta forma, teve-se a pauperização destas pessoas, que não conseguiram encontrar moradias que pudessem pagar e não tiveram ajuda efetiva do poder público municipal. Com isso, estas pessoas tiveram que procurar áreas da cidade em que pudessem se instalar, terminando na ocupação de áreas públicas ou privadas, que por muitas vezes não estavam sendo almejadas pelo capital imobiliário e de incorporação, pela localização distanciada da área central, ou por características naturais impróprias para habitação, como fundos de vales, encostas, etc, que se constituíram nas habitações precárias, as favelas, que fazem parte da realidade de praticamente todas as cidades do Brasil e da América Latina.

Conforme consta em Fidelis (2005) a leitura e discussão deste texto com os alunos conduziram a argumentações dos alunos:

- *"Esse tema é muito legal. Imagina se a prefeitura não tivesse feito um estudo desse tipo o caos que seria a cidade. A SANEPAR também deve ter estudos desse tipo, para se prevenir e não faltar água para a população". (aluno)*
- *"Qual problema matemático nós podemos estudar?" (aluno)*
- *"Ver como é o crescimento da população?" (aluno)*

O Quadro 4.13 descreve como ocorreu o desenvolvimento dessa atividade em sala de aula.

Quadro 4.13 – Modelagem Matemática "Estimativa para a população da cidade de Londrina" retirada da dissertação de Fidelis (2005).

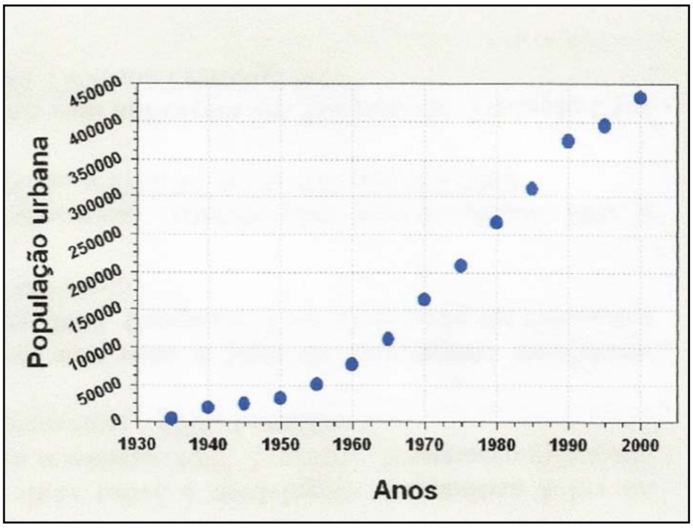
Para a elaboração do modelo optamos em trabalhar com intervalos de 5 em 5 anos, a partir de 1935. Os anos faltantes foram completados usando uma função exponencial (modelo de Malthus), ficando da seguinte forma:

Figura 4.22 – População de Londrina.

Ano	t_n	Pop. urbana
1935	0	4.000
1940	1	19.531
1945	2	25.658
1950	3	33.707
1955	4	51.458
1960	5	77.382
1965	6	112.490
1970	7	163.871
1975	8	209.939
1980	9	267.102
1985	10	312853
1990	11	376.676
1995	12	396.530
2000	13	433.243

Fonte: FIDELIS (2005, p.68).

Figura 4.23 – Curva de Tendência.



Fonte: FIDELIS (2005, p.68).

Quadro 4.13 – Modelagem Matemática "Estimativa para a população da cidade de Londrina" retirada da dissertação de Fidelis (2005). (continuação)

Observando os dados da Figura 4.22, pudemos verificar que na cidade de Londrina a população urbana relativa aos anos de 1935 até 2000 é crescente. Por outro lado, podemos supor que este crescimento é limitado, ou seja, a população não será infinitamente grande, mas irá se estabilizar ao longo do tempo. Isto denota um comportamento assintótico dos dados no decorrer do tempo.

"O Reginaldo [pesquisador], mas como a gente vai ajustar uma curva nesse conjunto de pontos" (aluno).

"Será que é só digitar os dados no Curve [software Curve Expert] e pedir a função?" (pesquisador). Essa pergunta foi feita para que os pudessem analisar os dados e não simplesmente encontrar a função correspondente.

"Não pode, quem me garante que ela será boa para prever alguma coisa, ela só é boa para descrever os dados que a gente tem" (aluno).

Os alunos observaram, pela Curva de Tendência 4.23, que a população urbana de Londrina têm um maior crescimento entre os anos de 1935 e 1970, do que entre os anos 1970 e 2000. Desta forma podemos separar o conjunto de dados em duas partes. De 1935 até 1970 e de 1970 até 2000.

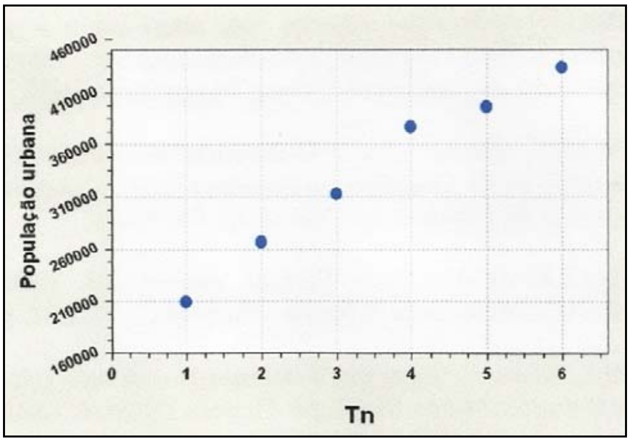
Para os dados da população urbana de Londrina entre os anos de 1970 e 2000, os alunos fizeram a curva de tendência, e como mencionada anteriormente a população urbana de Londrina não pode crescer indefinidamente, logo é muito importante determinar o valor assintótico (valor de estabilidade).

Figura 4.24 – População de Londrina a partir de 1970.

Ano	T_n	Pop. urbana – P_n
1970	0	163.871
1975	1	209.939
1980	2	267.102
1985	3	312853
1990	4	376.676
1995	5	396.530
2000	6	433.243

Fonte: FIDELIS (2005, p.69).

Figura 4.25 – Curva de Tendência.



Fonte: FIDELIS (2005, p.69).

Os alunos deduziram que nesta circunstância o crescimento populacional urbano de Londrina é crescente e limitado. Trabalhamos, então, com os alunos o método de Ford Walford para a obtenção do ponto de estabilidade.

Os alunos fizeram algumas colocações:

"Gostei do método de Ford Walford, porque esse método se baseia em alguns teoremas de análise". (aluno)

"Foi o método de Ford Walford, este método não funciona quando os dados não apresenta um crescimento exponencial, ou um crescimento exponencial com muita discrepância nos dados".(aluno)

"Foi o método de Ford Walford, porque ele é adequado em todas as situações que temos pontos todos crescentes, sendo que não possa ter inúmeros pontos também, seguindo estas duas exigências

Quadro 4.13 – Modelagem Matemática "Estimativa para a população da cidade de Londrina" retirada da dissertação de Fidelis (2005). (continuação)

podemos aplicar o método e obter grande sucesso". (aluno)

O próximo passo para a obtenção do modelo consistiu em analisar o P (o ponto de estabilidade) e P_n ao longo dos anos.*

Os alunos perceberam que a diferença P - P_n diminuía no decorrer do tempo, mas nunca seria zero. Logo uma função que poderia representar esse comportamento seria uma função exponencial, $P^* - P_n = \alpha e^{\beta T_n}$. Para a obtenção do modelo os alunos linearizaram essa função exponencial, encontrando:*

$$P(T) = 895054 - 734255e^{-0,0781T} \qquad (4.43)$$

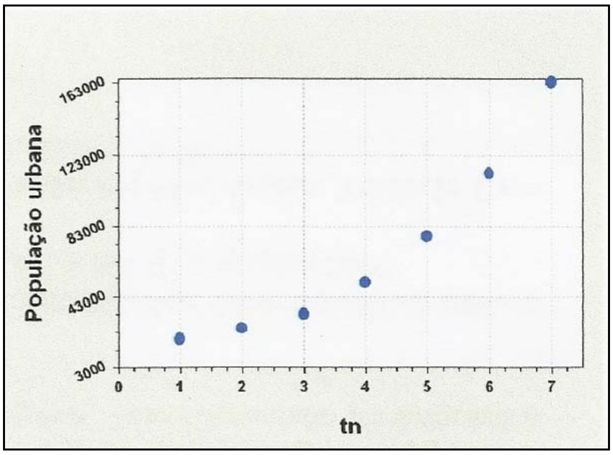
Para a população urbana de Londrina entre os anos de 1935 e 1970, observando a curva de tendência os aluno perceberam que poderia ser usada uma função do segundo grau para ajustar uma curva, já que nosso propósito era apenas o de descrever os dados.

Figura 4.26 – População de Londrina entre 1935 e 1970.

	ANO	t_n	Pop. urbana - P
B_1	1935	0	4000
B_2	1940	1	19531
B_3	1945	2	25658
B_4	1950	3	33707
B_5	1955	4	51458
B_6	1960	5	77382
B_7	1965	6	112490
B_8	1970	7	163871

Fonte: FIDELIS (2005, p.71).

Figura 4.27 – Curva de Tendência.



Fonte: FIDELIS (2005, p.71).

"Que legal é só a gente pedir para o curve, que ele daria essa função" (aluno).

Fizemos algumas observações a esse respeito, pois todos os alunos tinham concordado com essa afirmação.

"Não podemos esquecer que o modelo que descreve a população urbana de Londrina é uma função contínua. Logo precisamos adaptar o valor para a população no ano de 1970, isto é, vamos considerar a população urbana de Londrina de 1970 sendo 160.799 pessoas ($P(0) = 895054 - 734255e^{-0,0781*0}$)". (pesquisador)

"Para que o nosso modelo seja contínuo em 1970, poderemos fixar três pontos".

Os alunos trabalharam com o ponto que correspondia aos anos de 1935, 1950 e 1970. O resultado encontrado não foi satisfatório, pois o restante dos pontos ficava distante dos dados reais.

"como a gente vai fazer isso então?". (aluno)

Para ajustar a função quadrática foram usados os seguintes pontos:

- *A média das coordenadas dos pontos B_1, B_2, B_3 e B_4 da Figura 4.26 nos conduziu a um dos pontos.*

Quadro 4.13 – Modelagem Matemática "Estimativa para a população da cidade de Londrina" retirada da dissertação de Fidelis (2005). (continuação)

- *A média das coordenadas dos pontos B_4, B_5, B_6 e B_7 da Figura 4.26 nos conduziu ao segundo ponto.*
- *E o terceiro ponto foi usado a partir do modelo (4.43) como sendo (7.160799)*

Utilizando o software Curve Expert, encontramos a função:

$$P(t_n) = 3782{,}5727t^2 - 6683{,}6864t + 22238{,}741 \qquad (2)$$

Dessa forma, podemos representar a população urbana de Londrina pelo modelo:

$$P(t) = \begin{cases} 22238{,}741 + 6683{,}6864t + 3782{,}5727t^2 & \text{se } 0 \leq t \leq 7 \\ 895054 - 734255e^{-0{,}0781(t-7)} & \text{se } t > 7 \end{cases}$$

Em relação a validação do modelo os alunos acharam que os resultados encontrados pelo modelo eram muito próximos dos reais.

*Dessa forma, Londrina alcançará seu limite em aproximadamente t = 42. Como 2000 corresponde a t=13 e (42-13)*5=145, então Londrina alcançará seu limite em aproximadamente no ano de 2145.*

Alguns comentários posteriores dos alunos:

"Acho que o que foi mais marcante foi a surpresa que tive ao validar o modelo e ver que através da matemática pode chegar a resultados bem aproximados dos reais". (aluno)

"A gente usou a idéia intuitiva [sem fundamentação matemática] somente para dar uma direção no trabalho, é necessário também que essa idéia seja validada e para isso precisamos desenvolver o problema usando a matemática" (aluno).

"Através da validação feita podemos perceber que o modelo é bastante confiável" (aluno).

4.5.2 Atividade 2: Estimativa para a População do Brasil

Esta atividade foi desenvolvida por um grupo de alunos do quarto ano de Licenciatura em Matemática durante a disciplina "Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática" e corresponde ao terceiro momento da Modelagem Matemática, na qual os próprios alunos são responsáveis por conduzir a atividade, desde a escolha da situação-problema até a comunicação de seus resultados.

O intuito dos alunos nesta atividade está em encontrar um modelo que forneça o número de habitantes no Brasil com o decorrer do tempo. Para obter tal modelo, utilizaram os dados obtidos no site do IBGE em 2005, conforme descritos na Figura 4.28.

Figura 4.28 – Dados obtidos.

anos	População do Brasil (milhões de habitantes)
1990	146 592 579
1991	149 094 266
1992	151 546 843
1993	153 985 576
1994	156 430 949
1995	158 874 963
1996	161 323 169
1997	163 779 827
1998	166 252 088

Fonte: Trabalho não publicado.

Os alunos definiram como variáveis P_n a população do Brasil, n o ano, t_n o tempo em anos, como na Figura 4.29.

Figura 4.29 – Variáveis do problema.

n (anos)	t_n	P_n
1990	0	146 592 579
1991	1	149 094 266
1992	2	151 546 843
1993	3	153 985 576
1994	4	156 430 949
1995	5	158 874 963
1996	6	161 323 169
1997	7	163 779 827
1998	8	166 252 088

Fonte: Trabalho não publicado.

O Quadro 4.14 descreve como ocorreu o desenvolvimento dessa atividade.

Quadro 4.14 – Modelagem Matemática "Estimativa para a população do Brasil".

Hipóteses:

- *Observando os dados da Figura 4.28, podemos verificar que a população no Brasil nos anos de 1990 a 1998 é crescente.*
- *No entanto, podemos supor que tal população é limitada, ou seja, que ela irá se estabilizar ao longo do tempo. Desse modo teremos um comportamento assintótico do número de habitantes no decorrer do tempo. Então para a dedução do nosso modelo iremos determinar o ponto de estabilidade dessa população que denotaremos por P*.*

Encontrando o valor de P*:

Baseados nos dados da Figura 4.29, vamos considerar que o crescimento da população em tais anos determina uma sequência, que denotaremos por (P_n) *que é monótona crescente e limitada já que* (P_n) *com o decorrer do tempo terá um comportamento assintótico.*

Sabendo que uma sequência monótona limitada é convergente, temos que (P_n) *é convergente. Desta maneira, existe um limite para* (P_n)*, ou seja, existe um número real* P^* *tal que*

$$\lim P_n = P^*.$$

Para determinar tal valor, utilizaremos o método de Ford-Walford.

Dada a sequência (P_n) *da Figura 4.29, a existência de um ponto de estabilidade é descrita pela condição*

Quadro 4.14 – Modelagem Matemática “Estimativa para a população do Brasil”. (continuação)

$$P_{n+1} \cong P_n \,,$$

isto é, quando o número de habitantes de um ano é, aproximadamente igual ao número de habitantes do ano anterior.

Consideremos as sequências monótonas crescentes e limitadas (P_n) *e* (P_{n+1}).

Figura 4.30 – Sequências $\mathbf{P_n}$ e $\mathbf{P_{n+1}}$.

(P_n)	(P_{n+1})
146 592 579	149 094 266
149 094 266	151 546 843
151 546 843	153 985 576
153 985 576	156 430 949
156 430 949	158 874 963
158 874 963	161 323 169
161 323 169	163 779 827
163 779 827	166 252 088
166 252 088	

Fonte: Trabalho não publicado.

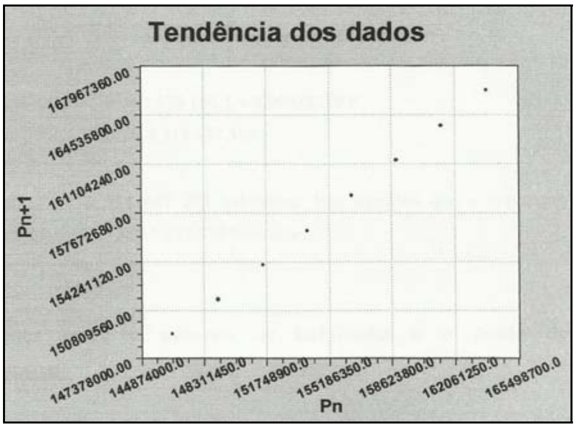
Temos que

$$\lim P_n = \lim P_{n+1} = P^* \,.$$

Agora, vamos considerar os pontos do plano formados pelos pares (P_n, P_{n+1}) *e determinar uma função capaz de ajustar tais pares de pontos, ou seja, vamos determinar uma função contínua* g *de modo que* $P_{n+1} = g(P_n)$.

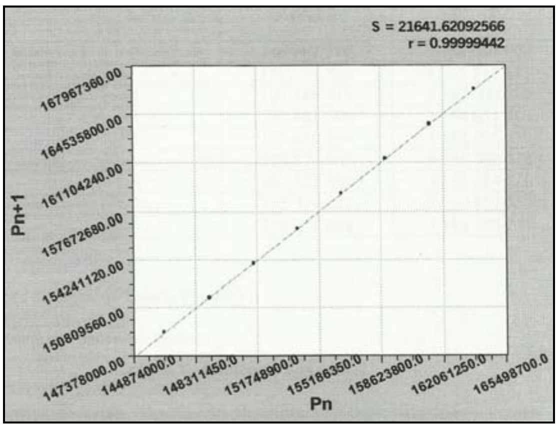
Utilizando o programa Curve obtemos a tendência dos dados e o ajuste linear

Figura 4.31 – Tendência dos dados



Fonte: Trabalho não publicado.

Figura 4.32 – Ajuste linear



Fonte: Trabalho não publicado.

Além disso, obtemos a seguinte equação

$$P_{n+1} = 2\,578\,158.1 + 0{,}99922219\,P_n\,.$$

Fazendo $P_{n+1} = P_n \cong P^*$ *encontramos o ponto de estabilidade* P^**:*

$$P^* = 2\,578\,158.1 + 0{,}99922219\,P^*$$

$$P^* = 3\,314\,637\,379\,.$$

Logo, P^* *é* $3\,314\,637\,379$ *habitantes. Isto significa que a população brasileira não ultrapassará os* $3\,314\,637\,379$ *habitantes.*

Quadro 4.14 – Modelagem Matemática "Estimativa para a população do Brasil". (continuação)

Diferença entre o número de habitantes e o ponto de estabilidade:

Agora vamos analisar a diferença entre P^* *e* P_n*, ou seja, entre o ponto de estabilidade e o número de habitantes no Brasil de 1990 a 1998.*

Figura 4.33 – Diferença entre $\mathbf{P^*}$ e $\mathbf{P_n}$.

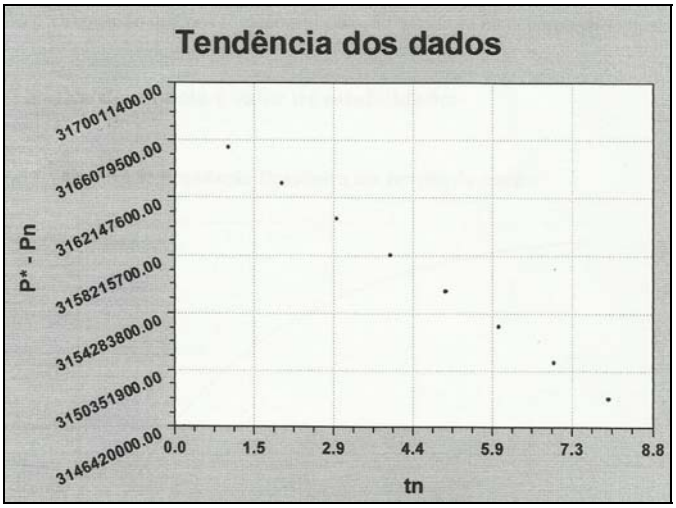
Ano	t_n	(P_n)	$P^* - P_n$
1990	0	146 592 579	3 168 044 800
1991	1	149 094 266	3 165 543 113
1992	2	151 546 843	3 163 090 536
1993	3	153 985 576	3 160 651 803
1994	4	156 430 949	3 158 206 430
1995	5	158 874 963	3 155 762 416
1996	6	161 323 169	3 153 314 210
1997	7	163 779 827	3 150 857 552
1998	8	166 252 088	3 148 385 291

Fonte: Trabalho não publicado.

Observando os dados da Figura 4.33, temos

- *Tendência dos dados em gráfico:*

Figura 4.34 – Tendência dos dados



Fonte: Trabalho não publicado.

- *A diferença* $P^* - P_n$ *vai diminuindo no decorrer do tempo e essa diferença é sempre positiva.*
- $\lim(P^* - P_n) = 0$

Modelo obtido:
Os itens acima nos levam a fazer um ajuste exponencial para os pares $(t_n, P^* - P_n)$. *Utilizando o Curve obtemos*

$$P^* - P_n = 3\,168\,024\,200 e^{-0.00077647888\, t_n}.$$

Agora, como $P^* = 3\,314\,637\,379$, *então*

$$3\,314\,637\,379 - P_n = 3\,168\,024\,200 e^{-0.00077647888\, t_n}.$$

Logo,

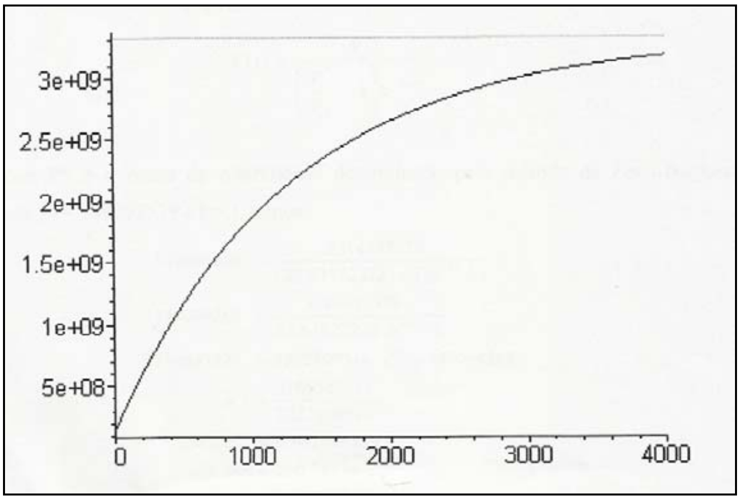
$$P_n = 3\,314\,637\,379 - 3\,168\,024\,200 e^{-0.00077647888\, t_n}.$$

Essa é a expressão que nos fornece a população brasileira no decorrer dos anos.

Quadro 4.14 – Modelagem Matemática "Estimativa para a população do Brasil". (continuação)

Gráfico do modelo e valor de estabilidade:

Figura 4.35 – População brasileira em função do tempo.



Fonte: Trabalho não publicado.

Validação do modelo encontrado:

Figura 4.36 – População real e população estimada.

anos	População real do Brasil (milhões de habitantes)	População estimada do Brasil (milhões de habitantes)
1990	146 592 579	146 613 179
1991	149 094 266	149 072 128
1992	151 546 843	151 529 168
1993	153 985 576	153 984 302
1994	156 430 949	156 437 529
1995	158 874 963	158 888 853
1996	161 323 169	161 338 254
1997	163 779 827	163 785 794
1998	166 252 088	166 231 141

Fonte: Trabalho não publicado.

Podemos verificar que os valores da população obtidos por meio do modelo encontrado estão próximos dos valores da população real.

Desse modo, chegamos a conclusão que tal modelo é válido.

Outro modelo encontrado:

Vamos estimar a população brasileira por meio do modelo de Verhulst

$$P(t)=\frac{P^*}{\left(\frac{P^*}{P_0}-1\right)e^{-\lambda t}+1},$$

em que P^* *é o ponto de estabilidade determinado pelo método de Ford-Walford. Usando* $P_0=146\,592\,579$ *e* $t=1$, *temos*

$$149\ 094\ 266=\frac{3\,314\,637\,379}{(22.61122222-1)e^{-\lambda\cdot 1}+1},$$

ou seja, $\lambda=0.017711551$.

Quadro 4.14 – Modelagem Matemática "Estimativa para a população do Brasil". (continuação)

Desse modo, temos que a população em função do tempo é dada por:

$$P(t)=\frac{3\,314\,637\,379}{21.61122222\ e^{-0.017711551\,t}+1}.$$

Assim temos

Figura 4.37 – População real e população estimada.

anos	População real do Brasil (milhões de habitantes)	População estimada do Brasil (milhões de habitantes)
1990	146 592 579	146 592 579
1991	149 094 266	149 094 864
1992	151 546 843	151 637 818
1993	153 985 576	154 222 031
1994	156 430 949	156 848 100
1995	158 874 963	159 516 629
1996	161 323 169	162 228 226
1997	163 779 827	164 983 507
1998	166 252 088	167 783 093

Fonte: Trabalho não publicado.

Os valores obtidos por meio desse modelo, também estão próximos dos valores reais. Comparando as tabelas das Figuras 4.36 e 4.37, verificamos que os dados da tabela da Figura 4.36 são mais precisos.

Segundo os alunos, a Modelagem Matemática como alternativa pedagógica, mostra-se importante em seu caráter investigativo. Aprende-se a interpretar e a resolver com mais habilidade os problemas propostos, desenvolver o raciocínio, além de articular os saberes aprendidos durante a graduação (como limites, sequências e funções). Segundo eles, esta modelagem pode ser desenvolvida com alunos do Ensino Médio, desde que seja dada uma noção de limite, e no Ensino Superior.

4.5.3 As Práticas Matemáticas Escolares nas Atividades de Modelagem Matemática

O desenho das atividades de Modelagem Matemática dispõe ao professor e ao aluno, espaço para a discussão de informações alternativas de como, por exemplo, os resultados matemáticos foram gerados e capturados pelas teias conceituais que fazem parte das práticas pedagógicas nas quais estão inseridos. Este desenho também favorece o desenvolvimento e construção de recursos de natureza preditiva e permite questionamentos similares ao dos matemáticos aqui estudados. Os alunos nesta perspectiva não são considerados como "tabulas rasas", os mesmos possuem conhecimentos acumulados, que são decisivos ao trabalhar em uma atividade de Modelagem Matemática.

Nas duas atividades selecionadas não havia uma resposta estabelecida ao problema, uma vez que não estava definida uma relação entre as variáveis. Deste modo, nestes tipos de atividades, os conteúdos são introduzidos à medida que se fazem necessários. No caso da primeira atividade de acordo com a condução da atividade, foram introduzidos conteúdos como função por partes, função exponencial e quadrática. No caso da segunda atividade foram trabalhados conteúdos como limites, sequências e funções.

Em cada atividade houve a necessidade de se conhecer o desconhecido, ou seja, de se conhecer o valor da população em um instante posterior, fazendo-se o uso de ferramentas pouco comuns em sala de aula.

No caso da atividade "Estimativa para a população da cidade de Londrina", professor e alunos a partir da situação-problema, que no caso diz respeito ao crescimento populacional de Londrina, fizeram simplificações e formularam hipóteses. O modelo matemático por eles elaborado, uma função por partes, surgiu da hipótese de que o crescimento é crescente e limitado. Isso depende das condições que se encontra professor e alunos naquele momento histórico, pois outros alunos e outro professor poderiam ter encontrado outro modelo matemático de acordo com as ferramentas disponíveis.

Nesta atividade nem professor, nem alunos fizeram menção aos modelos já estruturados em relação às estimativas para o crescimento populacional como é o caso dos modelos de Malthus, Verhulst e Gompertz que abordamos em seções anteriores deste texto. A opção de alunos e professor, neste caso, foi pela "construção" de um modelo – a função definida por partes – ao invés de remeter-se e usar um modelo já conhecido. Neste sentido, a prática dos alunos, quer do ponto de vista matemático, quer do ponto de vista social, parece mesmo assemelhar-se ao que faziam Malthus, Gompertz e Verhulst, ou seja, a ideia era “construir” um modelo.

Por exemplo, no caso da atividade “Estimativa para a população do Brasil” os alunos dispunham de outros dados populacionais, mas com as hipóteses de que o crescimento é crescente e limitado. Tais alunos, por sua vez, não adotaram como modelo matemático uma função por partes e utilizaram outras ferramentas matemáticas.

Isso significa que a aprendizagem pode variar de acordo com os jogos de linguagem de que alunos e professor participam. O conhecimento é construído e, como pode ser observado nas atividades de Modelagem Matemática, existe outro conhecimento além daqueles propostos por Verhulst, Gompertz e Malthus. Isto porque os conhecimentos matemáticos que são aceitos como verdadeiros são relativos ao tempo e dependem da cultura na qual estão inseridos.

Os alunos neste caso se apropriaram de diferentes “matemáticas” para estudar a dinâmica da população brasileira. Por um lado, a modelagem também tinha como intuito construir um modelo, momento em que optaram pelo uso do método de Ford-Walford para essa construção. Por outro lado, usar modelo já reconhecido por eles mesmos como “referência” para a modelagem do crescimento populacional, também parecia importante para o grupo, de modo que usaram o modelo de Verhulst, determinando seus parâmetros para a situação em estudo.

Estas “modelagens” dos dois grupos revelam que a construção do conhecimento matemático tem um profundo caráter social e se justifica pela interação que ocorre entre professor e aluno ao resolver este tipo de atividade, ao compartilhar, confrontar, argumentar e negociar opiniões.

Podemos citar como exemplo, o confronto e negociações de opiniões, quando na primeira atividade os alunos escolheram a situação-problema a ser estudada, optaram em ajustar o modelo matemático por uma função definida por partes e o alerta por parte do professor de que o modelo deveria ser uma função contínua. Essa negociação entre alunos e professor fez com que se direcionasse a atividade. A segunda atividade possui um caráter que difere da primeira, visto que sem a escolha da situação-problema pelo professor, os alunos realizaram um processo de Modelagem Matemática. Tal atividade permitiu o confronto de opiniões entre os próprios alunos em realizar suas escolhas, desde a escolha da situação-problema, a opção pelas ferramentas matemáticas que deveriam utilizar durante a resolução e as conclusões obtidas que, por exemplo, o primeiro modelo matemático por eles encontrado era mais preciso para estimar populações do que o segundo modelo matemático.

As práticas sociais que envolvem este tipo de atividades de Modelagem Matemática (relacionadas aos modelos de crescimento populacional) são importantes na medida em que favorecem a construção do conhecimento matemático e permitem desenvolvimento de estratégias e habilidades próprias de atividades de Modelagem Matemática. Elas levam os envolvidos a perceber a necessidade de utilizar seus próprios recursos de modo a resolver a situação em estudo.

Tais práticas sociais e matemáticas devem ser potencializadas na escola por meio de atividades que permitam aos estudantes mais do que acumular “conhecimentos” e reproduzir procedimentos, de modo que desenvolva noções e formas de pensamento matemático similares à produção matemática em estado nascente.

CAPÍTULO 5
CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde o início de nossa pesquisa, nossa preocupação estava em encontrar elementos que pudessem nos auxiliar na investigação da Modelagem Matemática do crescimento populacional. Para isso, nos apropriamos da perspectiva teórica chamada de Socioepistemologia.

Esta perspectiva teórica articula em uma mesma unidade de análise as interações entre a componente epistemológica, a componente didática, a componente cognitiva e a componente social, exercendo influências sobre as demais componentes. O interesse em enfatizar a importância das práticas sociais na construção do conhecimento, faz com que a componente social seja como um “pano de fundo” para as componentes associadas à perspectiva socioepistemológica.

A partir de nossas reflexões, tendo em vista os aspectos específicos citados na seção 1.2, retomamos aqui algumas das compreensões construídas ao longo da pesquisa, que são oriundas de nossas reflexões realizadas por meio da componente epistemológica e didática. Relembramos que pela própria estrutura desta pesquisa, não foi permitido a análise da componente cognitiva, pois não seria possível compreender como estudantes constroem sua própria cognição em sala de aula, uma vez que não tínhamos contato com eles.

Neste trabalho, compreendemos que a componente epistemológica é constituída pelas práticas matemáticas e a componente didática tem como objeto de análise a relação entre as práticas matemáticas escolares e as práticas sociais.

No que concernem as práticas matemáticas, verificamos o caráter evolutivo dos modelos de crescimento populacional (Thomas Robert Malthus em 1798, Benjamin Gompertz em 1825, Pierre-François Verhulst em 1838, Frederick E. Smith em 1963, Elliott W. Montroll em 1971, dentre outros) e a importância que modelos mais sofisticados têm para o planejamento econômico social e econômico de um país. Além disso, foi possível observar que cada momento histórico, em que se inseriam os modelos, exerceu influência sobre os mesmos. Cabe aqui citar os trabalhos de Augustin Louis Cauchy que delimitaram o Cálculo Diferencial e Integral e acabaram outorgando uma estrutura aos modelos de crescimento populacional aqui estudados.

Mais especificamente, foi possível inferir dos trabalhos de Malthus, as práticas sociais relacionadas às relações de poder da classe dominante, as idéias utópicas devido a Revolução Francesa e/ou a própria necessidade de alertar o crescimento da população e da pobreza por meio da previsão desse crescimento. No que se refere ao trabalho de Gompertz, pode-se inferir que as práticas sociais que o influenciaram estão relacionadas aos trabalhos de Isaac Newton. Por sua vez, nos trabalhos de Verhulst, o interesse em estudar a previsão do crescimento da população devido as suas relações com Quetelet e/ou o interesse em responder a problemática do crescimento exponencial de Malthus, se apresentaram como práticas sociais que outorgaram significado as práticas de Verhulst.

Isso demonstra que as matemáticas se constituem em diferentes práticas sociais e que elas diferem de acordo com o contexto histórico. Tais práticas propiciaram a construção de conhecimentos e o desenvolvimento de estratégias e habilidades como a simplificação e a formulação de hipóteses, a dedução de modelos matemáticos e outros procedimentos matemáticos ou não matemáticos.

No que concernem as práticas matemáticas escolares verificamos a existência de práticas diversas. Uma é proposta pelos autores de livros didáticos que influenciam o que os estudantes devem fazer, na medida em que se expõem os métodos e as regras. Outra é proposta por meio de atividades de Modelagem Matemática que influenciam os estudantes a conhecer o desconhecido, já que para a situação-problema não há resposta estabelecida. Não se trata de considerar a prática matemática escolar como parte da prática matemática científica, nem tampouco considerá-la como autossuficiente, visto que há relações complexas entre as práticas matemáticas científicas e as práticas matemáticas escolares.

Entendemos que a abordagem dos livros aqui abordados não é estanque, já que se trata de livros mais adotados em programas de curso de graduação de Matemática do Paraná. Os livros dão pouca atenção às práticas sociais e matemáticas associadas ao crescimento populacional, resumindo sua abordagem a uma aplicação de equações diferenciais. Nesse sentido, podemos dizer que o foco dos livros abordados dista de sua epistemologia.

No que se referem às atividades de Modelagem Matemática, que de modo geral, envolvem a obtenção de um modelo matemático, não há uma prescrição rigorosa das etapas que constituem uma atividade de Modelagem Matemática, visto que tais etapas podem ser modificadas e/ou ignoradas. As hipóteses adotadas pelo modelador, a teoria abordada (que depende do contexto histórico), assim como suas limitações mostram o caráter humano deste tipo de atividade. Trata-se, portanto, de um procedimento criativo, que pode dar margens à dúvida e ao acerto. As práticas de estudantes, quando envolvidos em atividades de Modelagem Matemática, apresentam semelhanças entre as práticas dos autores de crescimento populacional do final do século XVIII e início do século XIX. Assim, tanto educador quanto aluno tornam-se agentes da construção do conhecimento, considerando que a base desta construção seja a interação social.

Consideramos assim, que os significados não estão determinados previamente, como apresentam os livros didáticos, mas se encontram no uso da linguagem, como apresentados pelas atividades de Modelagem Matemática. Deste modo, as práticas matemáticas podem apresentar, no máximo, semelhanças de família, como abordado por Wittgenstein. Assume-se aqui que as matemáticas se constituem em diferentes práticas sociais e seus usos dependem do contexto em que é abordado, neste sentido, podem variar de acordo com o jogo de linguagem de que participam.

Para concretizar as ideias tomemos como exemplo a curva logística de Verhulst. Pode-se considerar como algo criado com a finalidade de responder a uma necessidade humana. A existência desta curva só tem sentido para os alunos na medida em que seu uso faz manifesto. Contudo, embora possam apresentar semelhanças de família, seus usos dependem do contexto em que foram abordados, da situação-problema proposta, das ferramentas matemáticas disponíveis. Por outro lado, se considerarmos as ideias referentes ao crescimento populacional de Malthus, há significações diferentes de acordo com o jogo de que participam, com o contexto histórico, por exemplo, Malthus associou tais ideias a uma linguagem matemática, que não estava rigorosamente estruturada, contudo, atualmente, associa-se a uma equação diferencial. Por isso, conhecer uma matemática implica em conhecer o jogo de linguagem em que está inserida.

Essas considerações trazem implícitas a ideia de práticas condicionadas por atividades sociais situadas no tempo e no espaço, realizadas por comunidades de prática determinadas, ou seja, os conhecimentos matemáticos encontram sua origem na atividade humana, por meio da interação entre indivíduos. Faz-se importante que alunos e professor compreendam que os mesmos são capazes de construir um novo conhecimento além daquele apresentado pelo sistema escolar.

Não se trata de ignorar os livros didáticos, mas de potencializar os saberes propostos, por meio de atividades de Modelagem Matemática, de modo a ser possível solucionar dificuldades e contribuir para a formação do aluno. O livro se faz importante como fonte de conhecimento e suporte técnico.

Esperamos que a análise das componentes epistemológica e didática (e consequentemente da componente social) tragam contribuições no sentido de perceber a matemática como construída, e a existência de uma pluralidade de matemáticas. E que, além disso, as atividades de Modelagem Matemática apresentadas neste trabalho possam estimular o uso da Modelagem Matemática como alternativa pedagógica em sala de aula.

Como sugestão para um posterior trabalho, sugerimos a análise da componente cognitiva relativa aos modelos de crescimento populacional e sua relação com as outras componentes, a saber, a componente epistemológica, a componente didática e a componente social. Sugerimos também uma análise socioepistemológica de outros modelos de crescimento populacional, como o proposto pelo IBGE, por composição de sexo e idade e indicadores sociodemográficos referentes aos grupos populacionais.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké**, Campinas, v.18, Número Temático 2010, p.387-414, 2010.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; BRITO, Dirceu dos Santos. Atividades de Modelagem Matemática: Que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência & Educação**, v.11, n.3, p.483-498, 2005.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; FERRUZZI, Elaine Cristina. Uma Aproximação Socioepistemológica para a Modelagem Matemática. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.117-134, jul.2009.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Perspectiva educacional e perspectiva cognitivista para a Modelagem Matemática: um estudo mediado por representações semióticas. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, v.1, n.1, p.28-42, 2010.

ARRIETA, Jaime Lorenzo. **Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.** 2003. México, Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigação e Estudos Avançados, México.

BACAËR, Nicolas. **A Short History of Mathematical Population Dynamics**. Springer, 2011.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.69-85, jul.2009.

BASSALO, José Maria Filardo. A Crônica do Cálculo: II. Na época de Newton e Leibniz. **Revista Brasileira de Física**, v.18, n.3, p.181-190, set.1996a.

BASSALO, José Maria Filardo. A Crônica do Cálculo: III. Contemporâneos de Newton e Leibniz. **Revista Brasileira de Física**, v.18, n.4, p.328-336, dez.1996b.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2010.

BELLO, Samuel Edmundo Lopez. Jogos de linguagem, práticas discursivas e produção de verdade: contribuições para a educação (matemática) contemporânea. **Zetetiké**, Campinas, v.18, Número Temático 2010, p.545-588, 2010.

BERNOULLI, Johanne. Modus generalis construendi omnes aequationes differentiales primi gradus. **Acta Eruditorum**, Lípsia, p.435-437, v.3, n.11, nov.1694.

BERNOULLI, Jacob. Explicationes, Annotationes et Additiones ad ea, quae in Actis sup. Anni de Curva Elastica, Isochrona Paracentrica & Velaria, hinc inde memorata & partim controversa leguntur; ubi de Linea mediarum directionum, aliisque novis. **Acta Eruditorum**, Lípsia, p.537-553, v.4, n.11, nov.1695.

BERNOULLI, Jacob. Problema Beaunianum universalius conceptum, sive Solutio Aequationis nupero Decembri propositae: $ady = ypdx + by^n qdx$, cum aliis quibusdam annotatis**. Acta Eruditorum**, Lípsia, p.332-337, v.5, n.7, jul.1696.

BERNOULLI, Johanne. De Conoidibus et Sphaeroidibus quaedam. Solutio analytica Aequationis in Actis A. 1695, pag. 553 propositae. Notatiunculae in Responsionem a Nob. D.T. nupero Novembri editam &c. **Acta Eruditorum**, Lípsia, p.113-118, v.6, n.3, mar.1697.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem matemática e implicações no ensino e aprendizagem de matemática**. Blumenau: Ed. da Furb, 1999.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação**. Portugal: Porto Editora, 1994.

BORROMEO FERRI, Rita. On the Influence of Mathematical Thinking Styles on Learners' Modeling Behavior. **J Math Didakt**, v.31, p.99–118, 2010.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 7.ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2002.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BUENDÍA, Gabriela. Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. **Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa**, México, v.9, n.2, p.227-251, jul.2006.

BURAK, Dionísio. **Modelagem Matemática:** ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. 1992. Campinas, Tese (Doutorado em Psicologia Educacional) – UNICAMP, Campinas.

CALDEIRA, Ademir Donizeti. Modelagem Matemática: um outro olhar. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.33-54, jul.2009.

CANTORAL, Ricardo. La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: uma mirada emergente. XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática. Tema: Educación Matemática & Desafíos y Perspectivas. Blumenau: Universidade Regional de Blumenau, **Anales ...** 2003. CDROM.

CANTORAL, Ricardo. Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, México, v.17, p.1-9, jun.2004.

CANTORAL, Ricardo; FARFÁN, Rosa María. Socioepistemología y Matemáticas. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, México, v.21, p.740-753, 2008.

CAJORI, Florian. **Uma história da matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

CHEVALLARD, Yves. **La transposition didactique:** du savoir savant au savoir ensigné. grenoble: la pensée Sauvage, 1991.

CIRILO, Kassiana Schmidt Surjus. **Livros didáticos e modelagem matemática:** uma caracterização da Transposição Didática do conteúdo de integral nestes ambientes. 2008. Londrina, Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – UEL, Londrina.

COVIÁN, Olda Nadinne. **El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional:** el caso de la Cultura Maya. 2005. Dissertação (Mestrado de Ciências na especialidade da Educação Matemática) - CICATA-IPN, México.

CUNHA, Antônio Geraldo da. **Dicionário etimológico nova fronteira da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Mathematical Modeling: Cognitive, Pedagogical, Historical And Political Dimensions. **Journal of mathematical modelling and application**, v.l, n.1, p.89-98, 2009.

DELMAS, B. Pierre-François Verhulst et la loi logistique de la population. **Math. & Sci. hum. / Mathematics and Social Sciences**, v.42, n.167, p.51-81, 2004.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo Aurélio século XXI:** o dicionário da língua portuguesa. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.

FERRUZZI, Elaine Cristina. **Modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do cálculo diferencial e integral nos cursos superiores de tecnologia**. 2003. Florianópolis, Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas) – UFSC, Santa Catarina.

FIDELIS, Reginaldo. **Contribuições da modelagem matemática para o pensamento reflexivo:** um estudo. 2005. Londrina, Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – UEL, Londrina.

GIL-PÉREZ, Daniel et al. Para uma imagem não deformada do trabalho científico. **Ciência & Educação**, Bauru, v.7, n.2, p.125-153, ago.2001.

GOMPERTZ, Benjamin. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of Life Contingencies. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v.115, p.513-583, 1825.

HENRY, John; PARKER, James. **The gentleman's magazine, and historical review**. Londres, jul.1865.

HERNÁNDEZ, Miguel Ángel; ARRIETA, Jaime Lorenzo. Las Prácticas Sociales de Modelación y la Emergencia de lo Exponencial. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, México, v.18, p. 537-542, jun.2005.

HOUAISS, Antônio. **Dicionário eletrônico houaiss da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Ed. Objetiva Ltda., jun.2009.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. Notatiuncula ad Acta Decemb. **Acta Eruditorum**, Lípsia, p.145-147, v.5, n.7, jul.1696.

MALTHUS, Thomas Robert. **An Essay on the principle of population**. 1 ed. London: J. Johnson, 1798. Disponível em: <http://www.esp.org/books/malthus/population/malthus.pdf>. Acesso em: 17dez. 2010.

MALTHUS, Thomas Robert. **An Essay on the principle of population**. 6 ed. London: John Murray, 1826.

MANTOUX, Paul. **A Revolução Industrial no Século XVIII**. São Paulo: Editora Hucitec, sd., tradução da edição de 1927.

MARTÍNEZ, Gustavo. Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v.8, n.2, p.195-218, jul.2005.

MARTÍNEZ RODRÍGUEZ, Elena. Logit Model como modelo de elección discreta: origen y evolución. **Anuario Jurídico y Económico Escurialense**, v. 41, n. 1, p. 469-484, 2008.

MARTINS, Isabel. Analisando livros didáticos na perspectiva dos Estudos do Discurso: compartilhando reflexões e sugerindo uma agenda para a pesquisa. **Pro-Posições**, Campinas, v.17, n.49, jan./abr.2006.

MENDES, Iran Abreu. O estudo da realidade como eixo da formação matemática dos professores de comunidades rurais. **Bolema**, Rio Claro, v.23, n.36, p.571-595, 2010.

MÉNDEZ, Maria Esther Magali; ARRIETA, Jaime Lorenzo. Las prácticas sociales de modelación multilineal de fenómenos en el aula. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, México, v.18, p.575–582, jun.2005.

MONTIEL, Gisela. **Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica.** 2005. México, Tese (Doutorado Educação Matemática) – Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigação em Ciência Aplicada e Tecnologia Avançada, México.

MOREIRA, Plinio; DAVID. M. Manuela. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. **Zetetiké** ,v.11, n.19, p. 57-80, jan./jun. 2003.

NÁPOLES VALDÉS, Juan Eduardo. El legado Histórico de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Consideraciones (Auto)Críticas. **Boletín de Matemáticas**, Nueva Serie, v.5, p.53–79, 1998.

NÁPOLES VALDÉS, Juan Eduardo; NEGRÓN SEGURA, Carlos. La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contadas por sus libros de texto. **Xixím: Revista electrónica de didáctica de las matemáticas**, México, v.3, n.2, p.33-57, out.2002.

NEVES, Késia Caroline Ramires. **Um exemplo de transposição didática:** o caso das matrizes. 2009. Maringá, Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – UEM, Maringá.

NORTON, Larry. Conceptual and Practical Implications of Breast Tissue Geometry: Toward a More Effective, Less Toxic Therapy. **The Oncologist**, v.10, n.6, p.370-381, 2005.

OLIVEIRA, Fábio Donizeti de. **Análise de textos didáticos:** três estudos. 2008. Rio Claro, Dissertação (Mestrado em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos) – UNESP, São Paulo.

PIRES, José Agostinho Lopes. **Cálculo Diferencial:** estudo histórico sobre a evolução do cálculo diferencial no século xvii. 2004. Vila Real, Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real.

QUETELET, Adolphe. Notice sur Pierre-François Verhulst, membre de l'Académie Royale. **Annuaire de l'Académie Royale de Belgique**, p.96-124, 1850.

SERNA MARTÍNEZ, Luís Arturo. **Estudio Socioepistemológico de la Tangente**. 2007. México, Dissertação (Mestrado em Ciências na especialidade de Educação Matemática) – CICATA-IPN, México.

SILVEIRA, Everaldo. **Modelagem matemática em educação no Brasil:** entendendo o universo de teses e dissertações. 2007. Curitiba, Dissertação (Mestrado no Setor de Educação) – UFPR, Curitiba.

SILVA, Clovis Antonio da. Malthus volta à aula de matemática. **Famat em Revista**, n.5, p.277-282, set.2005.

STILLMAN, Gloria et al. A framework for success in implementing mathematical modelling in the secondary classroom. In: Watson, J. and Beswick, K., Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia. **Mathematics: essential research, essential practice**, Wrest Point Hotel Casino, Hobart, TAS, p.688-697, jul.2007.

SZMRECSÁNYI, Tamás. **Thomas Robert Malthus:** economia. São Paulo: Editora Ática, 1982.

VERHULST, Pierre-François. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. **Correspondance Mathématique et Physique**, Bruxelas, v.10, p.113-121, 1838.

VERHULST, Pierre-François. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. **Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles**, Bruxelas, v.18, p.1-41, 1845.

VERHULST, Pierre-François. Note sur la loi d'accroissement de la population. **Bulletins de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique**, Bruxelas, v.13, p.226-227, 1846.

VERHULST, Pierre-François. Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. **Mémoires de l'Académie Royale des Sciences des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique**, Bruxelas, v.20, p.1-32, 1847.

VIANNA, Rubem Nunes Galvarro. **Um estudo do cours d'analyse algébrique de Cauchy em face das demandas do ensino superior científico na École Polytechnique**. 2010. Rio de Janeiro, Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – UFRJ, Rio de Janeiro.

VILELA, Denise Silva. **Matemáticas nos usos e jogo de linguagem:** ampliando concepções na Educação Matemática. 2007. Campinas, Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação, Unicamp, São Paulo.

VILELA, Denise Silva. Práticas matemáticas: contribuições sóciofilosóficas para a Educação Matemática. **Zetetiké**, Campinas, v.17, n.31, p.191-212, jan./jun.2009.

WINSOR, Charles P. The Gompertz Curve as a Growth Curve. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v.18, n.1, p.1-8, jan.1932.

ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. Tradução de: Cyro de Carvalho Patarra. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

APÊNDICES

APÊNDICE A

A equação de John Bernoulli

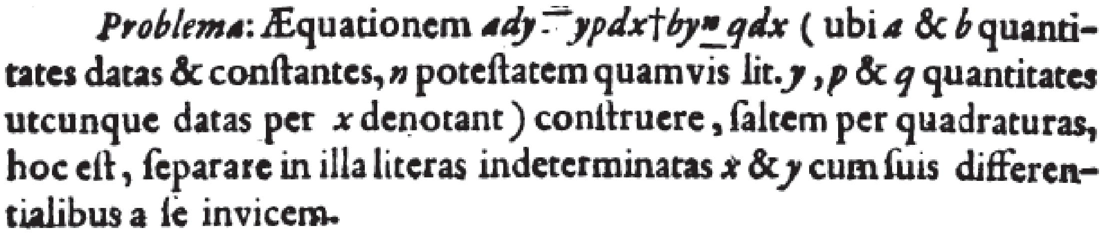
Acta Eruditorum foi fundada em 1682 em Leipzig com o intuito de fornecer pesquisas da época. Suas edições mensais, escritas em língua latina, continham trechos, resenhas, ensaios e pequenas notas de pesquisas. A maioria delas estava relacionada às ciências naturais e a matemática. John Bernoulli, assim como Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, publicou muitas de suas pesquisas nesta revista.

Ao discutir as propriedades dos pontos de inflexão das curvas que representam as soluções de equações diferenciais de primeira ordem, John Bernoulli considerou a equação xxdx+yydy=aady, e declarou que ele não tinha tentado resolver: <<Esto proposita aequatio differentialis haec xxdx+yydy=aady, quae an per separationem indeterminatarum construí possit nondum tentavi>> (BERNOULLI, 1694, p.436). Em 1695, James propôs o problema da equação diferencial, como pode ser visto na Figura A.1,

$$ady = ypdx + by^n qdx\,, \qquad (A.1)$$

onde a, b são constantes e p, q funções de x (BERNOULLI, 1695, p.553), e o discutiu em um artigo de 1696 (BERNOULLI, 1696, p.332). Em 1697, John apresentou a solução analítica da equação (A.1) (BERNOULLI, 1697, p.113).

Figura A. 1 – Problema colocado por Jacob Bernoulli em 1695.



Problema: Æquationem $ady = ypdx + by^n qdx$ (ubi *a* & *b* quantitates datas & conſtantes, *n* poteſtatem quamvis lit. *y*, *p* & *q* quantitates utcunque datas per *x* denotant) conſtruere, ſaltem per quadraturas, hoc eſt, ſeparare in illa literas indeterminatas *x* & *y* cum ſuis differentialibus a ſe invicem.

Fonte: BERNOULLI (1695, p.553).

A equação (A.1), atualmente é escrita na forma:

$$y' + P(x)y + Q(x)y^n = 0\,, \qquad (A.2)$$

com $(n > 0,\ n \neq 1)$ e conhecida como a equação de Bernoulli.

Leibniz em 1696 (LEIBNIZ, 1696, p.147) observou que a equação (A.1) poderia ser reduzida à forma

$$...du + ...udz + ...dz = 0\,. \qquad (A.3)$$

Por meio da substituição de $y^n = u^{\frac{n}{1-n}}$ na equação (A.1), John Bernoulli em 1697 (BERNOULLI, 1697, p.115), encontrou

$$\frac{1}{(1-n)} adu = updx + bqdx\ , \tag{A.4}$$

que corresponde a forma (A.3) observada por Leibniz. Foi neste contexto que John Bernoulli afirmou que este se tornou o método de reduzir a forma (A.1) de forma linear. <<Sed hac depressione potestatis mihi non opus est>>.

Contudo, em vez desta substituição, para resolvê-la <<immediately>> ele substituiu $y = mz$ na equação (A.1), com m e z funções de x. Ele assim obteve

$$azdm + amdz = mzpdx + bm^n z^n qdx\ . \tag{A.5}$$

Supondo

$$amdz = mzpdx\ , \tag{A.6}$$

ele obteve z em função de x, digamos $z = \xi(x)$. Nesse sentido, a equação (A.5) reduziu-se para

$$azdm = bm^n z^n qdx\ , \tag{A.7}$$

e após a substituição de $z = \xi(x)$ tornou-se

$$a\xi dm = bm^n \xi^n qdx\ . \tag{A.8}$$

A equação (A.8) pode ser facilmente resolvida pela quadratura

$$a\frac{1}{1-n} m^{1-n} = b\int \xi^{n-1} qdx\ , \tag{A.9}$$

e substituindo m = X, John Bernoulli obteve a solução $y = (zm) = \xi X$.

ANEXOS

ANEXO A

Programa da disciplina de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias da Universidade Estadual de Londrina – Matemática: Licenciatura

Centro de Ciências Exatas	Ano Letivo
Departamento de Matemática	**2010**

PLANO DE CURSO DA DISCIPLINA

Código	Nome
6MAT021	**Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias**

Curso	Série
Matemática	**3ª**

Carga Horária		
T	**P**	Total
68	-	68

Oferta	Semestre
☐ Anual	☒ 1º
☒ Semestral	☐ 2º

Habilitação(ões)
Licenciatura

1. EMENTA

Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem e de Ordem Superior. Teoremas de Existência e Unicidade.

2. OBJETIVOS

- Mostrar técnicas de solução de equações diferenciais
- Introduzir o resultado de existência e unicidade de soluções de Equações Diferenciais Ordinárias.

3. CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

3.1. Definições iniciais: equação diferencial, ordem de uma equação diferencial, equações lineares e não lineares; soluções.

3.2. Equações Diferenciais de Primeira Ordem. Conceitos fundamentais. Equações Separáveis. Equações Exatas. Fator integrante. Equações Lineares de Primeira Ordem.. Aplicações das equações diferenciais de 1ª ordem. Prova do Teorema de Existência e Unicidade pelo método de Picard.

3.3. Equações diferenciais de Segunda Ordem Homogêneas. Equações não-homogêneas. Equações de Segunda Ordem Lineares com Coeficientes Constantes. Solução Geral. Bases de Soluções. Operadores Diferenciais. Espaço de soluções. Método da variação dos parâmetros. Aplicações.

3.4. Casos especiais de equações de ordem superior; Introdução aos Sistemas de Equações Diferenciais.

4. METODOLOGIA

- Aulas expositivas, Resolução de exercícios; Realização de atividades individuais ou em grupos na sala de aula.

5. CRONOGRAMA

Bimestre	Itens do programa
1º	3.1 e 3.2
2º	3.3 e 3.4

6. AVALIAÇÃO

Provas Bimestrais; Entrega e apresentação de problemas resolvidos.
Nota final: média aritmética das duas notas bimestrais.

7. BIBLIOGRAFIA

1. BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C., *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno,* 6. ed., Rio de Janeiro: LTC, 1998.
2. EDWARDS Jr, C. H., PENNEY, D. E., *Equações Diferenciais Elementares (com problemas de contorno).* 3. ed., Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1995.
3. ZILL, D. G. *Equações Diferenciais com aplicações em Modelagem. Tradução Ciro de Carvalho Patarra.* São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

Lourdes Maria Werle de Almeida
Professora responsável pelo programa.

Aprovado pelo Deptº em ___/___/___ Aprovado pelo Colegiado em ___/___/____

______________________________ ______________________________

Assinatura do Chefe do Departamento Assinatura do Coordenador do Colegiado

ANEXO B

Programa da disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias da Universidade Estadual de Londrina – Matemática: Bacharelado

Centro de Ciências Exatas	Ano Letivo
Departamento de Matemática	**2010**

PLANO DE CURSO DA DISCIPLINA

Código	Nome
6MAT030	**Equações Diferenciais Ordinárias**

Curso	Série
Matemática	**3ª**

Carga Horária		
T	**P**	Total
68	68	136

Oferta	Semestre
☒ Anual	☐ 1º
☐ Semestral	☐ 2º

Habilitação(ões)
Bacharelado

1. EMENTA

Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem e de Ordem Superior. Equações Diferenciais com coeficientes variáveis. Soluções em séries. A Transformada de Laplace. Matrizes e Sistemas de Equações Diferenciais Lineares. Teoremas de Existência e Unidade. Estabilidade de EDO's.

2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudar modelos Matemáticos e analisar as suas relações com as ciências.
- Aplicar o Cálculo Diferencial nas Equações Diferenciais.
- Adquirir as técnicas para a resolução de equações diferenciais ordinárias.
- Adquirir habilidades para equacionar problemas da natureza.

3. CONTEÚDO PROGRAMÁTICO / CRONOGRAMA

1. MÉTODOS ELEMENTARES PARA EDO'S DE 1ª ORDEM

- Modelos matemáticos básicos.
- Classificação das equações diferenciais.
- Equações diferenciais separáveis.
- Equações diferenciais lineares de 1ª ordem.
- Equações diferenciais exatas de 1ª ordem e a existência do fator integrante.
- Diferenças entre equações lineares e não-lineares.
- Diferenças entre equações diferencias autônomas e não-autônomas.
- O Teorema de Existência e Unicidade e a dependência contínua.
- Interpretação geométrica da equação $y' = f(x, y)$.
- Campos vetoriais e formas diferenciais.

2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE 2ª ORDEM

- Equações homogêneas com coeficientes constantes.

- Aspectos gerais: solução geral e particular. Wronskiano.
- Polinômio característico, auto funções e autovalores.
- Autovalores reais e complexos.
- Equações diferenciais não-homogêneas.
- Equações diferenciais com coeficientes variáveis. Métodos.
- Aplicações às equações diferenciais de 2ª ordem.

3. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE ORDEM SUPERIOR
- Abordagem geral ao Teorema Fundamental de Existência.
- Aplicações.

4. SOLUÇÕES EM SÉRIES PARA EQUAÇÕES LINEARES DE 2ª ORDEM
- Revisão de séries de potências.
- Solução em série na vizinhança de um ponto ordinário. Equação de Euler.
- O Método de Frobenius.
- Solução em série na vizinhança de um ponto singular regular. Equação de Bessel.
- Aplicações.

5. A TRANSFORMADA DE LAPLACE
- Definição da Transformada de Laplace.
- Propriedades da Transformada de Laplace.
- Produto e convolução da Transformada de Laplace.
- Solução de problemas de valores iniciais.
- Funções descontínuas tipo degrau e funções tipo impulso.
- Equações diferenciais com forçamentos tipo impulso.
- Equações diferenciais com forçamento ou condições inicias do tipo degrau.

6. SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES
- Revisão de matrizes.
- Sistema de equações lineares algébricas. Independência. Autovalores e autovetores.
- Teoria básica de sistemas de equações lineares de 1ª ordem.
- O Teorema de Existência e Unicidade. Teorema fundamental de soluções.
- Sistemas lineares com coeficientes constantes e autovalores reais.
- Sistemas lineares com coeficientes constantes e autovalores complexos.
- Exponencial de matrizes.

7. SISTEMAS AUTÔNOMOS NO PLANO E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO-LINEARES
- Espaço de fase.
- Sistemas autônomos.
- Estabilidade
- Sistemas quase-lineares.
- Análise das soluções a partir dos autovalores.
- Soluções de sistemas de EDO’s não-lineares em torno dos pontos de equilíbrio.
- Modelagem de espécies em competição.
- Modelagem do problema predador-presa.

4 METODOLOGIA

4.1 Procedimentos de Ensino

- Aulas teóricas tipo expositivas.
- Aulas práticas de exercícios e de utilização de programas matemáticos-computacionais para construção gráfica, analítica e numérica de soluções de equações diferenciais.
- Em ambas as modalidades (T/P), deverão, sempre que possível, ser abordados aspectos históricos e aplicações.

4.2 Atividades Discentes

- Participar das aulas teóricas e práticas.
- Cumprir as atividades propostas pelo docente.

5. CRONOGRAMA

Bimestre	Itens do conteúdo programático
1º	1 – 2
2º	3 – 4
3º	5 – 6
4º	6 - 7

6. FORMAS E CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO

No total serão quatros provas, uma por bimestre, com valor de zero a dez pontos. A média final será a média aritmética das quatro provas bimestrais.

7. BIBLIOGRAFIA BÁSICA

- **W. E. Boyce e R. C. DiPrima - Título: *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. LTC Editora. Rio de Janeiro, R.J.**
- D. G. de Figueiredo e ª F. Neves – Título: *Equações diferenciais aplicadas.* Coleção Matemática Universitária – IMPA. Rio de Janeiro, R.J.
- D. G. Zill – Título: *Equações diferenciais com aplicações em Modelagem.* WEditora Thomson Pioneira.
- R. Bronson, Título: *Moderna introdução às equações diferenciais.* McGraw-Hill, São Paulo, SP.

Nelson Fernando Inforzato
Professor responsável pelo programa.

Aprovado pelo Deptº em ___/___/___ Aprovado pelo Colegiado em ___/___/____

Assinatura do Chefe do Departamento Assinatura do Coordenador do Colegiado

ANEXO C

Programa da disciplina de Introdução às Equações Diferenciais da Universidade Estadual de Maringá – Curso de Matemática

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE DISCIPLINA

Disciplina: Introdução às Equações Diferenciais	Código: 4994
Carga Horária: 68 horas	Ano Letivo: 2007
Curso: Matemática	

1. EMENTA: Equações diferenciais de primeira ordem. Teoremas de existência e unicidade. Sistemas de Equações Diferenciais. Equações Diferenciais de ordem n. Transformadas de Laplace. Séries de Fourier.

2. OBJETIVOS: Compreender de uma forma concisa métodos elementares de resolução de equações diferenciais ordinárias. Utilizar técnicas de álgebra linear para resolver sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias. Utilizar a transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais ordinárias. Utilizar séries de Fourier na resolução de equações diferencias parciais.

3. PROGRAMA:

1.Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª ordem
- 1.1- Definições
- 1.2- Existência e Unicidade de Soluções
- 1.3- Equação com Variáveis Separáveis
- 1.4- Equação com Coeficientes Homogêneos
- 1.5- Equação com Coeficientes Lineares
- 1.6- Equação Exata
- 1.7- Fatores Integrantes
- 1.8- Equação Linear
- 1.9- Equação de Bernoulli
- 1.10- Equação de Riccati
- 1.11- Equação de Clairaut
- 1.12- Aplicações

2.Equações Diferenciais Lineares de Ordem n, n>1
- 2.1- Existência e Unicidade de Soluções
- 2.2- Solução Complementar
- 2.3- Independência Linear e Wronskiano
- 2.4- Solução Particular
- 2.5- Soluções de Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes
- 2.6- Método dos Coeficientes a Determinar
- 2.7- Método de Variação dos Parâmetros
- 2.8- Equação de Euler

2.9- Aplicações

3.Sistemas de Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

3.1- Teoria básica dos sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem
3.2- Sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes
3.3- Autovalores complexos
3.4- Autovalores repetidos
3.5- Matrizes fundamentais
3.6- Sistemas lineares não-homogêneos

4.A Transformada de Laplace

4.1- Definição da transformada de Laplace
4.2- Propriedades da transformada de Laplace
4.3- Produto de transformadas e convolução
4.4- Obtenção de uma solução particular de uma equação não-homogênea

5.Equações Diferenciais Parciais e Séries de Fourier

5.1- Separação de variáveis; condução do calor
5.2- Séries de Fourier
5.3- O Teorema de Fourier
5.4- Funções pares e ímpares
5.5- A equação da onda: vibrações de uma corda elástica

4. BIBLIOGRAFIA:

BASSANEZI, Rodney C. & Outros. ***Equações Diferenciais com Aplicações***. Ed. Harbra. São Paulo, 1988.

BOYCE, W. & Kiprima, R. ***Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno***. Editora Guanabara Dois. Rio de Janeiro, 1979.

BRAUN, Martin. ***Equações Diferenciais e suas Aplicações***. Editora Campus. Rio de Janeiro, 1979.

BRONSON, Richard. ***Moderna Introdução às Equações Diferenciais***. Coleção Schaum. Editora MacGraw-Hill do Brasil Ltda. São Paulo, 1976.

FIGUEIREDO, Djairo G. ***Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais***. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, (Projeto Euclides), 1977.

GUIDORIZZI, Hamilton L. ***Um Curso de Cálculo***. Volume 4, Livros Técnicos e Científicos Editora S/A. Rio de Janeiro, 1985.

KAPLAN, W. ***Cálculo Avançado***, Volume 2. Edgard Blücher Ltda & Editora da USP. São Paulo, 1972.

KLINE, M. ***Mathematical Thought from Ancient to Modern Times***. Oxford University Press. New York, 1984.

KREIDER, Donald L. & Outros. ***Equações Diferenciais***. Ed. Edgard Bl:ucher Ltda. São Paulo, 1972.

SIMMONS, Georg F. ***Ecuaciones Diferenciales com Aplicaciones y Notas Historicas***. Libros McGraw-Hill. México, DF, 1977.

APROVAÇÃO DO DEPARTAMENTO Assinatura do Chefe	APROVAÇÃO DO COLEGIADO Assinatura do Coordenador

ANEXO D

Programa da disciplina de Equações Diferenciais da Universidade Estadual de Maringá – Curso de Matemática

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO

PROGRAMA DE DISCIPLINA

Curso:	Matemática		
Departamento:	Departamento de Matemática - DMA		
Centro:	Centro de Ciências Exatas - CCE		
COMPONENTE CURRICULAR			
Nome: Equações Diferenciais			Código: 3311
Carga Horária: 102 h/a	Periodicidade: Semestral	Ano de Implantação: 2009	

1. EMENTA

Teorema de Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias, Sistemas Com Coeficientes Constantes, Equações Diferenciais Parciais Lineares, Soluções Analíticas, Teorema de Cauchy- Kovalevskaia, Problema de Dirichlet para o Potencial; Funções Harmônicas, Princípio do Máximo, Lema de Weyl; Problema de Cauchy Bem Posto, Equação da Onda, Equação da Transferência de Calor, Noções de Equações do Tipo Misto, Método de Schauder.

2. OBJETIVOS

Desenvolver a arte de investigar em Matemática e compreender o processo de construção do conhecimento em Matemática. Assimilar e manipular os principais fundamentos e conceitos da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais.

3. CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

1. Existência, Unicidade e Dependência de Soluções das Equações Diferenciais Ordinárias.
   1.1. Definição de Solução de uma Equação Diferencial;
   1.2. O Problema de Cauchy, exemplos;
   1.3. Teoremas de Picard e de Peano;
   1.4. Soluções Máximas;
   1.5. Sistemas de Equações Diferenciais e Equações de Ordem Superior;

1.6. Dependência das Soluções em Relação às Condições Iniciais e Parâmetros – Continuidade e Diferenciabilidade.

2. Sistemas Autônomos no Plano.
   2.1. Conseqüências do Teorema de Existência e Unicidade;
   2.2. Pontos de Equilíbrio e Singularidades;
   2.3. Sistemas Bidimensionais Simples;
   2.4. O Teorema de Poincaré-Bendixon.

3. Sistemas Autônomos e Estabilidade.
   3.1. Definição e Exemplo;
   3.2. Estabilidade no Sentido de Liapounov.

4. Equações Diferenciais Parciais de Primeira Ordem.
   5.1. Definições e Exemplos;
   5.2. O Problema de Cauchy;
   5.3. O Método das Características;
   5.4. O Teorema de Cauchy-Kovalevskaia.

5. Equações Diferenciais Parciais de Segunda Ordem.
   6.1 Classificação e Formas Canônicas;
   6.2 Problemas de Cauchy e de Contorno;
   6.3 Equação da Onda;
   6.4 Equação da Transferência de Calor;
   6.5 Equação de Laplace.

6. Separação de Variáveis e Séries de Fourier.
   7.1 O Método da Separação de Variáveis;
   7.2 Os Coeficientes de Fourier;
   7.3 Convergência das Séries de Fourier

4. REFERÊNCIAS

4.1- Básicas (Disponibilizadas na Biblioteca ou aquisições recomendadas)

[01] FIGUEIREDO, D. C.. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais.** 2ª Edição. Instituto de Matemática Pura e Aplicada – Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1977.

[02] FIGUEIREDO, D. G. e NEVES, A. F.. **Equações Diferenciais Aplicadas.** Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 1997.

[03] HALE, J. K.. **Ordinary Differential Equations**. J. Wesley, 1964.

[04] IÓRIO, V.. **EDP – Um Curso de Graduação**. Coleção Matemática Universitária,IMPA, Rio de Janeiro, 1991.

[05] MEDEIROS, L. A. e ANDRADE, N. C.. Iniciação **às Equações Diferenciais Parciais**. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. Rio de Janeiro, 1978.

4.2- Complementares

[01] BOYCE, W. E. e DI PRIMA, R.C.. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** 5ª Edição. Livros Técnicos e Científicos S.A., Rio de Janeiro, 1994.

[02] BRAUER, F. e NOHEL, J. A.. **Ordinary Differential Equations: A First Course. Second Edition.** W. A. Benjamin Inc. Califórnia, 1973.

[03] CODDINGTON, E. A.. **An Introduction to Ordinary Differential Equations.** Prentice Hall, 1968.

[04] EVANS, L. C.. **Partial Differential Equations.** American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.

[05] HUREWICZ, W.. **Lectures in Ordinary Differential Equations.** The Massachusetts Institute of Tchnology. Massachusetts, 1958.

[06] MILLER, R. K. e MICHEL, A. N.. **Ordinary Differencial Equations.** Academic Press. New York, 1982.

[07] SOBOLEV, S.. **Partial Differential Equations of Mathematical Physics.** Pergamon Press. New York, 1964.

[08] SOTOMAYOR, J.. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.** Coleção Projeto Euclides, CNPq, 1979.

Aprovado em 16/12/2008

APROVAÇÃO DO DEPARTAMENTO

APROVAÇÃO DO COLEGIADO

ANEXO E

Programa da disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Matemática: Licenciatura

PLANO DE ENSINO

PERÍODO LETIVO/ANO: Anual/2009
ANO DO CURSO: 3º ano
Curso: Matemática   Modalidade: licenciatura   Turno: Noturno
Centro: Ciências Exatas e Tecnológicas
Campus: Cascavel

Disciplina

Código	Denominação	Carga horária				
		AT[1]	AP[2]	APS[3]	APCC[4]	Total
MAT 23	Equações diferenciais ordinárias	68	-	-	-	68

([1] Aula Teórica; [2] Aula Prática; [3] Atividade Prática Supervisionada; [4] Atividade Prática como Componente Curricular)

Docente: Sandro Marcos Guzzo

Ementa
(constante no PPP vigente)

Equações diferenciais ordinárias.

Objetivos

- Estudar os conceitos envolvendo as equações diferenciais ordinárias.
- Relacionar os conteúdos da disciplina com fenômenos naturais e físicos.

Conteúdo Programático

1 – Introdução
- Definições e terminologia
- Problema de valor inicial (PVI)

2 – Equações diferenciais de primeira ordem
- Teoria geral
- Equações separáveis
- Equações exatas
- Algumas aplicações

3 – Equações diferenciais de ordem superior
- Teoria geral
- Equações com coeficientes constantes
- Método da variação dos parâmetros
- Método dos coeficientes indeterminados
- Algumas aplicações

4 – Equações diferenciais a coeficientes variáveis
- Soluções por séries de potência

5 – Sistemas de equações diferenciais
- Teoria geral para sistemas de equações diferenciais
- Sistemas lineares

Atividades Práticas - Grupos de ____ alunos

Não há

Atividades Práticas Supervisionadas - Grupos de ____ alunos

Não há

Metodologia

Aulas expositivas com possível auxílio de softwares matemáticos.

Avaliação

(critérios, notas, pesos, procedimentos, instrumentos e periodicidade)

O sistema de avaliação compreenderá quatro provas escritas com valor máximo 100 pontos cada, e pesos iguais. A média final será obtida por média aritmética das quatro notas das provas.

Bibliografia básica

Zill, Dennis & Cullen, Michael. *Equações diferenciais*. Volumes I e II. 3ª Edição, Makron Books, 2000.

Bibliografia complementar

Cassago Jr, Hermínio & Crema, Janete & Ladeira, Luiz Augusto. *Equações diferenciais ordinárias*. Editora do ICMC-USP, São Carlos, 2006.

Zill, Dennis. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. São Paulo, Pioneira Thomson Learning, 2003.

Data: 04/03/2009

Assinatura do docente proponente