



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

CAMILA FOGAÇA DE OLIVEIRA

**A TERAPIA DE WITTGENSTEIN E O CONCEITO DE FUNÇÃO:  
UMA INVESTIGAÇÃO COM MODELAGEM MATEMÁTICA**

CAMILA FOGAÇA DE OLIVEIRA

**A TERAPIA DE WITTGENSTEIN E O CONCEITO DE FUNÇÃO:  
UMA INVESTIGAÇÃO COM MODELAGEM MATEMÁTICA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina como requisito à obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina  
2018

CAMILA FOGAÇA DE OLIVEIRA

**A TERAPIA DE WITTGENSTEIN E O CONCEITO DE FUNÇÃO:  
UMA INVESTIGAÇÃO COM MODELAGEM MATEMÁTICA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina como requisito à obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Lourdes Maria Werle  
de Almeida  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Cláudia Regina Flores  
Universidade Federal de Santa Catarina -UFSC

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Mirian Donat  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Bárbara N. Palharini Alvim Sousa  
Universidade Estadual do Norte do Paraná - UENP

---

Prof. Dr. Rudolph dos Santos Gomes Pereira  
Universidade Estadual do Norte do Paraná - UENP

Londrina, 13 de novembro de 2018.

**À todos que de alguma forma contribuíram  
para a realização deste trabalho.**

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus por tornar esse sonho possível, por ter me permitido concluir este trabalho da melhor maneira possível e por ter me dado forças mesmo quando as ideias não pareciam ser claras. Agradeço a Ele por ter me dado a oportunidade de tornar mãe em meio a construção deste trabalho.

Agradeço a minha família, principalmente, ao meu marido, ao meu enteado, a minha mãe e irmã, pela compreensão deste trabalho árduo, pelas palavras de incentivo e por estarem sempre ao meu lado.

Agradeço a minha orientadora Lourdes Maria Werle de Almeida, por ter me dado a oportunidade de estudar durante quase uma década, enquanto aluna de mestrado e doutorado, por compartilhar de sua experiência e seus conhecimentos, pelo apoio e pela paciência por todas as horas de orientação que tornaram possível a conclusão deste trabalho.

Agradeço à Faculdade de Tecnologia Senai Londrina pelo apoio e incentivo a qualificação profissional e por me permitir realizar pesquisa com os alunos da graduação. Agradeço aos meus queridos alunos que não poupavam tempo para estudar e fazer o melhor para a pesquisa. Agradeço a Universidade Kroton pelo apoio concedido para o término deste trabalho.

Agradeço à comissão examinadora Cláudia Regina Flores, Mirian Donat, Bárbara N. Palharini Alvim Sousa e Rudolph dos Santos Gomes Pereira pelas sugestões e críticas apresentadas para o aprimoramento deste trabalho.

Finalmente, gostaria de agradecer a todos os meus amigos, tanto aqueles que construí durante o curso de graduação, mestrado e doutorado, como aqueles que permaneceram comigo mesmo com a distância provocada por este curso. Em particular, agradeço aos amigos do Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT) pelo tempo que estivemos juntos durante estes anos de curso; aos amigos da Faculdade de Tecnologia Senai Londrina e da Universidade Kroton.

OLIVEIRA, Camila Fogaça de. **A terapia de Wittgenstein e o conceito de função**: uma investigação com Modelagem Matemática. 2018. 215 p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

## RESUMO

Esta pesquisa teve o objetivo de investigar como se dão os efeitos terapêuticos do conceito de funções em atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos de um curso de tecnologia. Para isso utiliza da terapia de Wittgenstein tratando conceitos em novo contextos, utilizando de diferentes percepções sobre o conteúdo ensinado de acordo com os seus usos. Para o direcionamento da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral em uma Faculdade de Tecnologia foi aplicada uma avaliação diagnóstica que sinalizou dificuldades apresentadas pelos alunos com relação aos usos do conteúdo de funções. O processo terapêutico da pesquisa teve como intenção tratar essas dificuldades por meio do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, implementadas de acordo com os três momentos de familiarização propostos por Almeida e Dias (2004). A busca por efeitos terapêuticos se delineou de acordo com o desenvolvimento das atividades propostas e apontou que os cinco aspectos, que indicavam as dificuldades apresentadas pelos alunos com relação ao conteúdo de funções, foram tratados por meio do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Da perspectiva de Wittgenstein, não há o ‘esclarecimento completo’ de um conceito e este é sempre relativo ao uso da linguagem. Nesse contexto, foi possível inferir que os alunos participantes da pesquisa, gradualmente, ampliaram a gramática arbitrária do conceito de funções em sala de aula e que a terapia proposta não se completa com o término deste trabalho, à medida que esse conceito se torna mais complexo por meio de sua utilização em outras disciplinas, em outros contextos.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Modelagem Matemática. Terapia de Wittgenstein. Filosofia de Wittgenstein. Educação Tecnológica.

OLIVEIRA, Camila Fogaça de. **Wittgenstein's therapy and the concept of function: an investigation with Mathematical Modeling**. 2018. 215 s. Thesis (Doctorate on the Teaching of Sciences and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina, 2018.

## **ABSTRACT**

The objective of this research was to investigate how the therapeutic effects of the concept of functions are reflected in mathematical modeling activities developed by students of a technology course. For this it is used Wittgenstein's therapy treating concepts in new contexts, using different perceptions about the content taught according to its uses. In order to direct the discipline of Differential and Integral Calculus in a Faculty of Technology, a diagnostic evaluation was applied that indicated difficulties presented by the students regarding the uses of the content of functions. The therapeutic process of research was intended to treat these difficulties through the development of mathematical modeling activities, implemented according to the three familiarization moments proposed by Almeida and Dias (2004). The search for therapeutic effects was delineated according to the development of the proposed activities and pointed out that the five aspects, which indicated the difficulties presented by the students in relation to the content of functions, were treated through the development of mathematical modeling activities. From Wittgenstein's perspective, there is no 'complete enlightenment' of a concept and it is always relative to the use of language. In this context, it was possible to infer that the students participating in the research, gradually, extended the arbitrary grammar of the concept of functions in the classroom and that the proposed therapy does not complete with the end of this work, as this concept becomes more complex through its use in other disciplines, in other contexts.

**Keywords:** Mathematics Education. Mathematical Modelling. Wittgenstein's Therapy. Philosophy of Wittgenstein. Technological Education.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 3.1: ESQUEMA DE MODELAGEM MATEMÁTICA .....	44
FIGURA 5.1: QUESTÃO 1 DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA: LEI DO USO DE FAROL BAIXO .....	59
FIGURA 5.2: QUESTÃO 2 DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA: VAZAMENTO DE UMA TORNEIRA .....	61
FIGURA 5.3: QUESTÃO 3 DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA: RELAÇÃO ENTRE TENSÃO E CORRENTE DE UMA LÂMPADA INCANDESCENTE .....	63
FIGURA 5.4: QUESTÃO 4 DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA: CHUVEIRO NO MODO ‘VERÃO’ OU ‘INVERNO’ .....	65
FIGURA 5.5: REGISTRO DO ALUNO A1 - LEI DO USO DE FAROL BAIXO .....	68
FIGURA 5.6: REGISTRO DO ALUNO A1 - LEI DO USO DE FAROL BAIXO .....	68
FIGURA 5.7: REGISTRO DO ALUNO A11 - LEI DO USO DE FAROL BAIXO .....	69
FIGURA 5.8: REGISTRO DO ALUNO A11 - LEI DO USO DE FAROL BAIXO .....	69
FIGURA 5.9: REGISTRO DO ALUNO A14 - LEI DO USO DE FAROL BAIXO .....	70
FIGURA 5.10: REGISTRO DO ALUNO A6 - LEI DO USO DE FAROL BAIXO .....	72
FIGURA 5.11: REGISTRO DO ALUNO A6 - LEI DO USO DE FAROL BAIXO .....	72
FIGURA 5.12: EXPLICAÇÃO DO GRUPO 4 - CUSTO ANTES DA APROVAÇÃO DA LEI .....	73
FIGURA 5.13: REVISÃO DOS MODELOS OBTIDOS - CUSTO ANTES E APÓS A APROVAÇÃO DA LEI .....	75
FIGURA 5.14: CUSTO DE UTILIZAÇÃO DA LÂMPADA ANTES E APÓS A APROVAÇÃO DA LEI .....	77
FIGURA 5.15: REGISTRO DO ALUNO A2 - VAZAMENTO DE UMA TORNEIRA .....	77
FIGURA 5.16: REGISTRO DO ALUNO A8 - VAZAMENTO DE UMA TORNEIRA .....	78
FIGURA 5.17: REGISTRO DO ALUNO A12 - VAZAMENTO DE UMA TORNEIRA .....	78
FIGURA 5.18: REGISTRO DO ALUNO A14 - VAZAMENTO DE UMA TORNEIRA .....	78
FIGURA 5.19: REGISTRO DO ALUNO A16 - VAZAMENTO DE UMA TORNEIRA .....	79
FIGURA 5.20: REGISTRO DO ALUNO A9 - VAZAMENTO DE UMA TORNEIRA .....	79
FIGURA 5.21: REGISTRO DO ALUNO A1 - VAZAMENTO DE UMA TORNEIRA .....	81
FIGURA 5.22: REGISTRO DO ALUNO A2 - TENSÃO E CORRENTE DE UMA LÂMPADA INCANDESCENTE ..	82
FIGURA 5.23: REGISTRO DO ALUNO A8 - TENSÃO E CORRENTE DE UMA LÂMPADA INCANDESCENTE ..	82
FIGURA 5.24: REGISTRO DO ALUNO A12- TENSÃO E CORRENTE DE UMA LÂMPADA INCANDESCENTE ..	83
FIGURA 5.25: REGISTRO DO ALUNO A9 - TENSÃO E CORRENTE DE UMA LÂMPADA INCANDESCENTE ..	84
FIGURA 5.26: REGISTRO DO ALUNO A6 - TENSÃO E CORRENTE DE UMA LÂMPADA INCANDESCENTE ..	84
FIGURA 5.27: REGISTRO DO ALUNO A1 - CHUVEIRO NO MODO ‘VERÃO’ OU ‘INVERNO’ .....	87
FIGURA 5.28: REGISTRO DO ALUNO A2 - CHUVEIRO NO MODO ‘VERÃO’ OU ‘INVERNO’ .....	87
FIGURA 5.29: REGISTRO DO ALUNO A12 - CHUVEIRO NO MODO ‘VERÃO’ OU ‘INVERNO’ .....	88
FIGURA 5.30: REGISTRO DO ALUNO A4 - CHUVEIRO NO MODO ‘VERÃO’ OU ‘INVERNO’ .....	88
FIGURA 5.31: REGISTRO DO ALUNO A14 - CHUVEIRO NO MODO ‘VERÃO’ OU ‘INVERNO’ .....	89
FIGURA 5.32: REGISTRO DO ALUNO A9 - CHUVEIRO NO MODO ‘VERÃO’ OU ‘INVERNO’ .....	89
FIGURA 5.33: REGISTRO DO ALUNO A16 - CHUVEIRO NO MODO ‘VERÃO’ OU ‘INVERNO’ .....	90
FIGURA 5.34: REDE DE DIFICULDADES APRESENTADAS PELOS ALUNOS DO CURSO DE TECNOLOGIA PARA O ESTUDO DA DISCIPLINA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.....	96
FIGURA 6.1: ATIVIDADE DE PRIMEIRO MOMENTO: QUAL O MELHOR TIPO DE LÂMPADA: HALÓGENA, FLUORESCENTE OU LED?.....	99
FIGURA 6.2: REGISTRO DO ALUNO A10 - TEMPO DE USO E CUSTO PARA A LÂMPADA HALÓGENA.....	104
FIGURA 6.3: REGISTRO DO ALUNO A4 - REGISTRO GRÁFICO PARA O TEMPO DE USO E CUSTO DA LÂMPADA HALÓGENA .....	106



FIGURA 6.4: REGISTRO DO ALUNO A10 - MODELO MATEMÁTICO DO CUSTO DA LÂMPADA HALÓGENA .....	107
FIGURA 6.5: DIFERENÇA ENTRE A FUNÇÃO MENOR INTEIRO E MAIOR INTEIRO .....	110
FIGURA 6.6: REGISTRO DO ALUNO A11 - MODELO MATEMÁTICO PARA OS DIFERENTES TIPOS DE LÂMPADA .....	112
FIGURA 6.7: REGISTRO DO ALUNO A6 - MODELO MATEMÁTICO DO CUSTO DA LÂMPADA FLUORESCENTE .....	112
FIGURA 6.8: REGISTRO DO ALUNO A2 - MODELO MATEMÁTICO DO CUSTO DA LÂMPADA FLUORESCENTE .....	112
FIGURA 6.9: REGISTRO DO ALUNO A6 - MODELO MATEMÁTICO DO CUSTO DA LÂMPADA LED .....	113
FIGURA 6.10: REGISTRO DO ALUNO A2 - MODELO MATEMÁTICO DO CUSTO DA LÂMPADA LED .....	113
FIGURA 6.11: REGISTROS ESCRITOS DO ALUNO A6 - VALIDAÇÃO DOS MODELOS MATEMÁTICOS PARA AS LÂMPADAS FLUORESCENTE E LED .....	114
FIGURA 6.12: REGISTRO DO ALUNO A4 - REGISTRO GRÁFICO PARA O TEMPO DE USO E CUSTO DAS LÂMPADAS FLUORESCENTE E LED .....	115
FIGURA 6.13: REGISTRO DO ALUNO A10 - RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR .....	118
FIGURA 6.14: REGISTRO DO ALUNO A1 - RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR .....	119
FIGURA 6.15: REGISTRO DO ALUNO A2 - RESPOSTA AO PROBLEMA ‘QUAL O MELHOR TIPO DE LÂMPADA: HALÓGENA, FLUORESCENTE OU LED?’ .....	120
FIGURA 6.16: REGISTRO DO ALUNO A6 - RESPOSTA AO PROBLEMA ‘QUAL O MELHOR TIPO DE LÂMPADA: HALÓGENA, FLUORESCENTE OU LED?’ .....	120
FIGURA 6.17: REGISTRO DO ALUNO A1 - EFICIÊNCIA LUMINOSA DAS LÂMPADAS HALÓGENA, FLUORESCENTE E LED .....	121
FIGURA 6.18: IDENTIFICAÇÃO DE USO DE CONCEITOS RELATIVOS À ÁREA DO CURSO DURANTE A ATIVIDADE ‘QUAL O MELHOR TIPO DE LÂMPADA: HALÓGENA, FLUORESCENTE OU LED?’ .....	125
FIGURA 6.19: INSTRUMENTOS UTILIZADOS PARA COLETA DE DADOS .....	127
FIGURA 6.20: ATIVIDADE DE SEGUNDO MOMENTO: FUNCIONAMENTO DE UM CIRCUITO ELÉTRICO: UM ESTUDO SOBRE A RESISTÊNCIA ELÉTRICA E TEMPERATURA DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS. ...	128
FIGURA 6.21: REGISTRO DO ALUNO A7 - REGISTRO GRÁFICO PARA CORRENTE E TENSÃO DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS .....	131
FIGURA 6.22: REGISTRO DO ALUNO A2 - REGISTRO TABULAR PARA CORRENTE E TENSÃO DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS .....	133
FIGURA 6.23: REGISTRO DO ALUNO A11 - MODELO MATEMÁTICO QUE RELACIONA A TENSÃO E CORRENTE DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS .....	133
FIGURA 6.24: REGISTRO DO ALUNO A2 - MODELO MATEMÁTICO QUE RELACIONA A TENSÃO E CORRENTE DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS .....	134
FIGURA 6.25: REGISTRO DO ALUNO A9 – TAXA DE VARIAÇÃO DOS VALORES DE TENSÃO E CORRENTE DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS .....	134
FIGURA 6.26: REGISTRO DO ALUNO A9 - MODELO MATEMÁTICO QUE RELACIONA A TENSÃO E CORRENTE DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS .....	135
FIGURA 6.27: REGISTRO DO ALUNO A2 - VALIDAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO .....	136
FIGURA 6.28: REGISTRO DO ALUNO A2 - COMPREENSÃO DE CONCEITOS DA LEI DE OHM .....	136
FIGURA 6.29: UTILIZAÇÃO DE SOFTWARES DURANTE ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA.....	137
FIGURA 6.30: REGISTRO DO ALUNO A2 - REGISTRO GRÁFICO PARA TENSÃO E TEMPERATURA DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS .....	140
FIGURA 6.31: REGISTRO DO ALUNO A2 - CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA ATIVIDADE: UM ESTUDO SOBRE A TEMPERATURA DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS .....	141

FIGURA 6.32: REGISTRO DO ALUNO A2 - MODELO MATEMÁTICO QUE RELACIONA A TENSÃO E TEMPERATURA DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS .....	142
FIGURA 6.33: REGISTRO DO ALUNO A9 - MODELO MATEMÁTICO QUE RELACIONA A TENSÃO E TEMPERATURA DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS .....	142
FIGURA 6.34: REGISTRO DO GRUPO 2 - MODELO MATEMÁTICO QUE RELACIONA A TENSÃO E TEMPERATURA DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS .....	143
FIGURA 6.35: REGISTRO DO ALUNO A2 - VALIDAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO .....	143
FIGURA 6.36: REGISTRO DO ALUNO A9 - VALIDAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO .....	144
FIGURA 6.37: REGISTRO DO GRUPO 2 - VALIDAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO .....	144
FIGURA 6.38: REGISTRO DO GRUPO 1 - REGISTRO GRÁFICO DA TEMPERATURA LIMITE DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS .....	144
FIGURA 6.39: REGISTRO DO GRUPO 3 - REGISTRO GRÁFICO DA TEMPERATURA LIMITE DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS .....	144
FIGURA 6.40: REGISTRO DO GRUPO 4 - REGISTRO GRÁFICO DA TEMPERATURA LIMITE DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS .....	145
FIGURA 6.41: REGISTRO DO GRUPO 2 - REGISTRO GRÁFICO DA TEMPERATURA LIMITE DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS .....	145
FIGURA 6.42: REGISTRO DO ALUNO A4 - CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA ATIVIDADE: UM ESTUDO SOBRE A TEMPERATURA DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS .....	146
FIGURA 6.43: REGISTRO DO ALUNO A9 - CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA ATIVIDADE: UM ESTUDO SOBRE A TEMPERATURA DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS .....	146
FIGURA 6.44: UTILIZAÇÃO DE SOFTWARES ESPECÍFICOS PARA O ESTUDO DO CONTEÚDO DE FUNÇÕES NA ATIVIDADE ‘FUNCIONAMENTO DE UM CIRCUITO ELÉTRICO: UM ESTUDO SOBRE A TEMPERATURA DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS’ .....	150
FIGURA 6.45: UTILIZAÇÃO DE CONCEITOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA ATIVIDADE ‘FUNCIONAMENTO DE UM CIRCUITO ELÉTRICO: UM ESTUDO SOBRE A TEMPERATURA DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS’ .....	151
FIGURA 6.46: IDENTIFICAÇÃO DE USO DE CONCEITOS RELATIVOS À ÁREA DO CURSO DURANTE A ATIVIDADE ‘FUNCIONAMENTO DE UM CIRCUITO ELÉTRICO: UM ESTUDO SOBRE A RESISTÊNCIA ELÉTRICA E TEMPERATURA DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS’ .....	151
FIGURA 6.47: ATIVIDADE DE SEGUNDO MOMENTO: UM ESTUDO SOBRE RESISTÊNCIA ELÉTRICA E TEMPERATURA DE UMA LÂMPADA INCANDESCENTE.....	154
FIGURA 6.48: INSTRUMENTOS UTILIZADOS PARA COLETA DE DADOS .....	156
FIGURA 6.49: REGISTRO DO GRUPO 3 - REGISTRO TABULAR PARA CORRENTE E TENSÃO DE UMA LÂMPADA INCANDESCENTE.....	159
FIGURA 6.50: REGISTRO DO GRUPO 4 - REGISTRO GRÁFICO PARA CORRENTE E TENSÃO DE UMA LÂMPADA INCANDESCENTE.....	160
FIGURA 6.51: REGISTRO DO GRUPO 4 - MODELO MATEMÁTICO QUE RELACIONA A TENSÃO E CORRENTE DE UMA LÂMPADA INCANDESCENTE .....	160
FIGURA 6.52: REGISTRO DO GRUPO 4 - VALIDAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO .....	161
FIGURA 6.53: INSTRUMENTOS UTILIZADOS PARA COLETA DE DADOS .....	167
FIGURA 6.54: APRESENTAÇÃO DE TRABALHO DURANTE A SEMANA CIENTÍFICA .....	169
FIGURA 6.55: COLETANDO DADOS DO EXPERIMENTO.....	171
FIGURA 6.56: APRESENTAÇÃO DE TRABALHO DURANTE A SEMANA CIENTÍFICA .....	172
FIGURA 6.57: DADOS DO CURVE EXPERT SOBRE A RELAÇÃO ENTRE CORRENTE E FATOR DE POTÊNCIA EM UM TRANSFORMADOR ABAIXADOR.....	174
FIGURA 6.58: KIT DIDÁTICO DE EMULADOR DE CARGA APLICADO A UM MOTOR DE INDUÇÃO TRIFÁSICO .....	176

FIGURA 6.59: RELAÇÃO ENTRE CARGA ( $N \cdot M$ ) E FATOR DE POTÊNCIA DE UM MOTOR ELÉTRICO.....	180
FIGURA 7.1: USOS DE DIFERENTES CONCEITOS DE FUNÇÕES NAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA .....	196
FIGURA 7.2: UTILIZAÇÃO DE CONCEITOS DE ELETRICIDADE BÁSICA NAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA .....	198

## LISTA DE QUADROS

QUADRO 4.1: COMPETÊNCIAS REQUERIDAS AO FINAL DO CURSO DE TECNOLOGIA EM MANUTENÇÃO INDUSTRIAL .....	51
QUADRO 6.1: ENCAMINHAMENTO DOS ALUNOS PARA A ATIVIDADE ‘QUAL O MELHOR TIPO DE LÂMPADA: HALÓGENA, FLUORESCENTE OU LED?’ .....	123
QUADRO 6.2: ABORDAGEM DA ATIVIDADE ‘QUAL O MELHOR TIPO DE LÂMPADA: HALÓGENA, FLUORESCENTE OU LED?’ TENDO EM VISTA AS DIFICULDADES APRESENTADAS PELOS ALUNOS .....	126
QUADRO 6.3: ENCAMINHAMENTO DOS ALUNOS PARA A ATIVIDADE ‘FUNCIONAMENTO DE UM CIRCUITO ELÉTRICO: UM ESTUDO SOBRE A RESISTÊNCIA ELÉTRICA E TEMPERATURA DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS’ .....	147
QUADRO 6.4: ABORDAGEM DA ATIVIDADE ‘FUNCIONAMENTO DE UM CIRCUITO ELÉTRICO: UM ESTUDO SOBRE A RESISTÊNCIA ELÉTRICA E TEMPERATURA DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS’ TENDO EM VISTA AS DIFICULDADES APRESENTADAS PELOS ALUNOS .....	152
QUADRO 6.5: IDENTIFICAÇÃO DE USO DE CONCEITOS RELATIVOS À ÁREA DO CURSO DURANTE A ATIVIDADE ‘UM ESTUDO SOBRE RESISTÊNCIA ELÉTRICA E TEMPERATURA DE UMA LÂMPADA INCANDESCENTE’ .....	162
QUADRO 6.6: ENCAMINHAMENTO DOS ALUNOS PARA A ATIVIDADE ‘UM ESTUDO SOBRE RESISTÊNCIA ELÉTRICA E TEMPERATURA DE UMA LÂMPADA INCANDESCENTE’ .....	163
QUADRO 6.7: ABORDAGEM DA ATIVIDADE ‘UM ESTUDO SOBRE RESISTÊNCIA ELÉTRICA E TEMPERATURA DE UMA LÂMPADA INCANDESCENTE’ TENDO EM VISTA AS DIFICULDADES APRESENTADAS PELOS ALUNOS.....	164
QUADRO 6.8: ABORDAGEM DAS ATIVIDADES DE TERCEIRO MOMENTO TENDO EM VISTA AS DIFICULDADES APRESENTADAS PELOS ALUNOS .....	185
QUADRO 7.1: AS AÇÕES DOS ALUNOS NOS DIFERENTES MOMENTOS DE FAMILIARIZAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA.....	189
QUADRO 7.2: O CAMINHO TERAPÊUTICO ABORDADO NA PESQUISA TENDO EM VISTA AS DIFICULDADES APRESENTADAS PELOS ALUNOS .....	190
QUADRO 7.3: CAPACIDADES DESENVOLVIDAS PELOS ALUNOS DURANTE AS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA.....	199

## LISTA DE TABELAS

TABELA 4.1: RESOLUÇÃO E DISCUSSÃO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA .....	54
TABELA 4.2: COLETA DE DADOS E ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DESENVOLVIDAS .....	55
TABELA 5.1: COMPOSIÇÃO DOS GRUPOS PARA DISCUSSÃO DAS ATIVIDADES DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA .....	57
TABELA 5.2: CLASSIFICAÇÃO DOS PROCEDIMENTOS UTILIZADOS DURANTE A RESOLUÇÃO INDIVIDUAL DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA.....	58
TABELA 5.3: COMPOSIÇÃO DOS GRUPOS PARA DISCUSSÃO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA .....	67
TABELA 5.4: MODELOS OBTIDOS - CUSTO ANTES E APÓS A APROVAÇÃO DA LEI .....	74
TABELA 5.5: VALIDAÇÃO DOS MODELOS OBTIDOS - CUSTO ANTES E APÓS A APROVAÇÃO DA LEI .....	75
TABELA 5.6: CUSTO E TEMPO EM INTERVALOS - LEI DO USO DE FAROL BAIXO.....	76
TABELA 6.1: COMPOSIÇÃO DOS GRUPOS PARA DISCUSSÃO DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA.....	97
TABELA 6.2: COLETA DE DADOS E ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DESENVOLVIDAS .....	98
TABELA 6.3: DADOS OBSERVADOS REFERENTE AO FERRO DE PASSAR ROUPAS .....	130
TABELA 6.4: DADOS OBSERVADOS REFERENTE A LÂMPADA INCANDESCENTE .....	156
TABELA 6.5: DADOS RETIRADOS DE UM MOTOR TRIFÁSICO DE 0,5 CV UTILIZANDO INVERSOR FREQUÊNCIA .....	167
TABELA 6.6: VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS - ANÁLISE DE FREQUÊNCIA E ROTAÇÃO EM UM MOTOR	168
TABELA 6.7: VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS - RELAÇÃO ENTRE TENSÃO E FREQUÊNCIA EM UM MOTOR.....	170
TABELA 6.8: DADOS EXTRAÍDOS DO EXPERIMENTO EM UM TRANSFORMADOR ABAIXADOR .....	173
TABELA 6.9: VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS - ANÁLISE DE CORRENTE E FATOR DE POTÊNCIA EM UM TRANSFORMADOR ABAIXADOR .....	175
TABELA 6.10: DADOS COLETADOS DE CARGA ( $N \cdot m$ ) E FATOR DE POTÊNCIA DE UM MOTOR ELÉTRICO .....	177
TABELA 6.11: VALIDAÇÃO DOS DADOS - RELAÇÃO ENTRE CARGA E FATOR DE POTÊNCIA EM UM MOTOR ELÉTRICO .....	179

# SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>15</b>
INTRODUÇÃO.....	15
1.1 Filosofia de Wittgenstein e Terapia .....	15
1.2 Delineamentos da pesquisa .....	20
1.3 Estrutura da tese .....	24
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>25</b>
FILOSOFIA DE WITTGENSTEIN .....	25
2.1 Proposições, jogos de linguagem, regras e formas de vida na filosofia de Wittgenstein .....	25
2.2 Significado e uso na linguagem .....	30
2.3 A perspectiva wittgensteiniana de linguagem e o contexto educacional .....	32
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>37</b>
MODELAGEM MATEMÁTICA.....	37
3.1 Modelos e modelagem .....	37
3.2 Uso da modelagem matemática em contextos escolares.....	39
3.3 Princípios para o planejamento e encaminhamento de atividades de modelagem matemática .....	45
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>49</b>
O CONTEXTO DA PESQUISA .....	49
4.1 Curso superior de tecnologia em Manutenção Industrial da Faculdade de Tecnologia Senai Londrina .....	49
4.2 O perfil dos alunos que participaram da pesquisa.....	52
4.3 O processo terapêutico da pesquisa.....	53
4.3.1 A identificação do problema por meio da avaliação diagnóstica.....	53
4.3.2 A intervenção terapêutica mediada por atividades de modelagem matemática.....	54
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>57</b>
A IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA POR MEIO DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA .....	57
5.1 Resolução individual da avaliação diagnóstica .....	57
5.1.1 Questão 1 - Lei do uso de farol baixo .....	59
5.1.2 Questão 2 - Vazamento de uma torneira .....	61
5.1.3 Questão 3 - Relação entre tensão e corrente de uma lâmpada incandescente.....	63
5.1.4 Questão 4 - Chuveiro no modo ‘verão’ ou ‘inverno’ .....	65
5.2 Discussão em grupos e com a professora das questões presentes na avaliação diagnóstica.....	67
5.2.1 Questão 1 - Lei do uso de farol baixo .....	67

5.2.2 Questão 2 - Vazamento de uma torneira .....	77
5.2.3 Questão 3 - Relação entre tensão e corrente de uma lâmpada incandescente.....	82
5.2.4 Questão 4 - Chuveiro no modo ‘verão’ ou ‘inverno’ .....	86
5.3 Dificuldades no Cálculo Diferencial e Integral em um curso de tecnologia.....	91
<b>CAPÍTULO 6 .....</b>	<b>97</b>
A INTERVENÇÃO TERAPÊUTICA MEDIADA POR ATIVIDADES DE MODELAGEM	
MATEMÁTICA .....	97
6.1 As atividades desenvolvidas.....	97
6.2 Atividade 1: Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?.....	99
6.2.1 Análise específica da atividade de modelagem: Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED? .....	121
6.3 Atividade 2: Funcionamento de um circuito elétrico: um estudo sobre a resistência elétrica e temperatura de um ferro de passar roupas .....	127
6.3.1 Análise específica da atividade modelagem: Funcionamento de um circuito elétrico: um estudo sobre a resistência elétrica e temperatura de um ferro de passar roupas .....	146
6.4 Atividade 3: Um estudo sobre resistência elétrica e temperatura de uma lâmpada incandescente .....	154
6.4.1 Análise específica da atividade modelagem: Um estudo sobre resistência elétrica e temperatura de uma lâmpada incandescente.....	161
6.5 Atividades de terceiro momento de familiarização.....	165
6.5.1 Análise de frequência e rotação em um motor.....	166
6.5.2 Análise de corrente e fator de potência em um transformador abaixador.....	171
6.5.3 Relação entre carga e fator de potência em um motor elétrico .....	175
6.5.4 Análise específica das atividades de terceiro momento.....	180
<b>CAPÍTULO 7 .....</b>	<b>187</b>
A BUSCA POR EFEITOS TERAPÊUTICOS .....	187
7.1 O resultado da terapia.....	187
7.2 Considerações Finais.....	195
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>202</b>
APÊNDICE A .....	209
APÊNDICE B .....	210
APÊNDICE C .....	215

# CAPÍTULO 1

## *Introdução*

*“A filosofia não deve, de forma alguma, tocar o uso real da linguagem; o que pode, enfim, é apenas descrevê-lo”  
(WITTGENSTEIN, 2013, § 124, p. 74).*

### *1.1 Filosofia de Wittgenstein e Terapia*

Questões relativas ao ensino e aprendizagem têm sido objeto de investigação sob um olhar filosófico em diferentes áreas de pesquisa, dentre elas a Educação Matemática, com diferentes acepções, desafiando ainda hoje o campo educacional.

Uma parte das investigações fundamenta-se em teorias epistemológicas que atribuem pouca importância ao papel da linguagem na constituição de significados pelo aluno, apresentando a crença de que sentidos devem ser alcançados, descobertos ou construídos pelos alunos.

Nossa pesquisa, entretanto, se orienta por alguns aspectos do pensamento do filósofo austríaco Ludwig Josef Johann Wittgenstein (1889-1951). Se levarmos em consideração algumas reflexões apresentadas por Wittgenstein (2013) parece configurar-se um encaminhamento em que se pode ponderar que o nosso aparato conceitual é efetivamente ensinado e aprendido.

Wittgenstein foi um filósofo cujo pensamento pode ser dividido em duas fases de acordo com Sombra (2012): a do ‘primeiro Wittgenstein’, cuja obra central é o *Tractatus Logico-Philosophicus*, e a do ‘segundo Wittgenstein’, cuja obra central é o *Investigações Filosóficas*.

Os temas do *Tractatus* estão estruturados por meio de proposições com nível crescente de complexidade e compõem toda a sua estrutura. Boa parte da obra pode ser resumida na



tentativa de Wittgenstein de “apresentar formulações lógicas, como símbolos formais que representam as proposições” (SOMBRA, 2012, p. 21).

Wittgenstein aos poucos, após a construção do *Tractatus*, foi desenvolvendo uma mudança em seu ponto de vista, quando considera que suas primeiras reflexões não eram capazes de elucidar todos os problemas da linguagem. Wittgenstein (1929, p. 3), em sua publicação de 1929, denominada de *Some Remarks on logical form*, argumenta que em seu *Tractatus* “encontramos formas lógicas que guardam muito pouca semelhança com as normas da linguagem comum”.

Na construção da obra *Investigações filosóficas*, Wittgenstein (2013, p. 12). pretendia publicar aqueles antigos pensamentos sob um outro olhar “pelo confronto com os pensamentos mais antigos e tendo-os como pano de fundo”. É sob esse contexto que Wittgenstein objetivou desconstruir ao longo de sua obra a teoria representativista<sup>1</sup> da linguagem.

Wittgenstein (2013) inicia suas *Investigações Filosóficas* com uma citação de *Confissões* proferida por Santo Agostinho, argumentando que, ao que parece, os objetos podem ser determinados pelas palavras da linguagem:

Quando os adultos nomeavam um objeto qualquer voltando-se para ele, eu o percebia e compreendia que o objeto era designado pelos sons que proferiam, uma vez que queriam chamar a atenção para ele. Deduzia isto, porém, de seus gestos, linguagem natural de todos os povos. [...] Assim, pouco a pouco eu aprendia a compreender o que designam as palavras que eu sempre de novo ouvia proferir nos seus devidos lugares, em diferentes sentenças (WITTGENSTEIN, 2013, § 1, p. 15).

Trazendo para o âmbito do ensino da matemática essa concepção de Wittgenstein, parece que em todas as situações, quando o professor nomeia uma palavra, apontando para ela, o aluno repete a palavra proferida. De acordo com Vargas (2009, p. 152), “parece dissipar-se a névoa que pairava sobre a relação entre nome e nomeado, pois o objeto é claramente identificado pelo gesto indicativo. Designar, colocar um nome em um objeto, apareceria então como um ‘colocar nele um rótulo’, uma etiqueta”. Segundo Miguel (2016, p. 371), essa concepção de linguagem está reduzida a ideia de que é função essencial das palavras referir-se a objetos, de forma autônoma, “independentemente dos usos ordinários da linguagem”.

---

<sup>1</sup> Teoria representativista da linguagem, também pode ser compreendida por teoria denominativa em que as palavras representam ou denominam os objetos.

Para Wittgenstein (2013), essa situação linguística que estabelece o vínculo entre nome e nomeado seria apenas um jogo de linguagem entre as muitas situações possíveis. Segundo o filósofo, Agostinho transfere essa “descrição do aprendizado da linguagem para todas as situações linguísticas, pretendendo descrever assim o que seria uma ‘essência’ da linguagem” (VARGAS, 2009, p. 152).

Nessa perspectiva, Wittgenstein (2013) considerou que é a própria prática com a linguagem que constitui o significado das palavras, por meio de seu uso em diferentes contextos. Não existe, portanto, uma única linguagem, que deveria ser descoberta, revelada, mas existe a nossa linguagem que é constituída de acordo com as circunstâncias que acompanham um fato ou uma situação.

Segundo sua filosofia, a linguagem é, na verdade, um conjunto de ‘jogos de linguagem’, que apresentam certas semelhanças, certo ‘ar de família’. Para Wittgenstein (2013), a linguagem faz parte de uma forma de vida, em que os diferentes usos de uma palavra na linguagem são regulamentados por regras, as quais nem sempre são definidas *a priori*.

Com o objetivo de esclarecer confusões de natureza conceitual, Wittgenstein (2013) conduz o que ele denomina de terapia filosófica. A terapia em sua obra *Investigações Filosóficas* recorreu a

exemplos (método da exemplificação), diálogos polifônicos com interlocutores representantes de posições filosóficas mentalistas ou behavioristas, dentre outras; emprego de analogias e metáforas, entre outros recursos terapêuticos, que mostram os preconceitos a que estamos submetidos devido a uma concepção referencial da linguagem, ou seja, quando estamos presos à imagem agostiniana de que haveria significados extralinguísticos por trás do uso de nossas palavras (GOTTSCHALK, 2015, p. 307).

É fundamentalmente contra esta teoria representativista da linguagem que se manifesta a terapia filosófica de Wittgenstein<sup>2</sup>.

A atividade terapêutica dos usos das palavras é explicitada por Moreno (2012, p. 74) como um “indicativo de um campo esclarecedor da atividade epistêmica de constituição da significação”.

---

<sup>2</sup> Wittgenstein (2013) sugere utilizar sistemas de referência somente como ‘objetos de comparação’, ou melhor, como critérios de natureza *convencional*, e não mais como pré-juízos normativos” como o fez no *Tractatus* (MORENO, 2005, p. 253).

Parece, então, que, ainda que a Filosofia quase nada possa fazer, pode ainda fazer alguma coisa. O quê? Levar-se e levar ao divã todos os discursos que façam “maus usos da linguagem” e submetê-los a diferentes terapias locais que os tratem diferentemente como “doenças” diferentes (MIGUEL, 2016, p. 370).

Nesse caso, por terapia pode-se compreender como o cuidado e o tratamento desses ‘maus usos da linguagem’, em que se emprega conceitos de forma independente do seu uso em contextos específicos. De fato, conforme afirma Moreno (2005, p. 252), “parece ser difícil evitar o dogmatismo *em geral*, uma vez que toda descrição supõe a aplicação de um sistema de referência”.

O caminho terapêutico abordado por Wittgenstein propõe o olhar para as semelhanças e diferenças entre as aplicações dos jogos de linguagem e suas diversas relações, “constituindo-se, assim, gradualmente, a ‘robustez’ do conceito” (GOTTSCHALK, 2010, p. 69).

Os jogos de linguagem serão usados como critérios arbitrários, dentre outros, em que o terapeuta sugere para produzir analogias e ressaltar diferenças entre as significações descritas, a partir das significações que nos confundem. [...] O elemento *terapêutico* da descrição orienta Wittgenstein na escolha dos jogos de linguagem, seus sistemas de referência, em cada caso de uso de palavras a ser esclarecido (MORENO, 2005, p. 253).

Para Miguel (2016, p. 372), os jogos de linguagem indicam “em cada situação contextual em que são praticados, os sentidos variáveis de palavras, objetos e das próprias ações corporais que esses jogos encenam”.

A terapia permite variar as circunstâncias e possibilidades de aplicação dos conceitos, inserindo os conceitos que são familiares e que causam confusões, por exemplo, discursos que fazem ‘maus usos da linguagem’, em novos contextos ou novas maneiras de ver. Segundo Moreno (2005), a dimensão dialógica da terapia proporciona o movimento da terapia, não tendo como finalidade atingir um resultado definitivo, no sentido ao forçar o pensamento em uma única direção, mas visa, como resultado esperado, o esclarecimento ou aprofundamento desses conceitos. Conforme afirma Donat (2008, p. 20), um dos resultados da terapia “é nos libertar destas imagens que nos mantêm presos, não nos permitindo perceber como realmente funciona a linguagem”.

Segundo Gottschalk (2015), a ‘inovação’ da política educacional tão exigida pelos governos atuais, pode vir de uma abordagem terapêutica deste complexo uso de conceitos educacionais, mas não de uma nova teoria educacional.

Penso que é este aspecto positivo do estilo terapêutico de Wittgenstein que interessa ao filósofo da educação, quando nos debruçamos sobre os conceitos, não com o objetivo de revelar/descrever sua gramática interna, aos moldes da filosofia analítica, mas tendo em vista esclarecer confusões que decorrem de uma abordagem dogmática de nossos conceitos mais fundamentais (GOTTSCHALK, 2015, p. 308).

Desse modo, é possível um outro olhar em Educação Matemática para o papel do processo de aprendizagem: “não como um procedimento que conduz o aluno a verdades prévias, mas como meio de apresentação de nossas convenções linguísticas” (GOTTSCHALK, 2010, p. 64).

A terapia wittgensteiniana opera tratando os mesmos conceitos em novo contextos e auxiliando em diferentes percepções sobre o conteúdo ensinado de acordo com os seus usos. Desse modo, é a linguagem que fornece significados, de acordo com as diversas situações em que é empregada.

Uma vez que aplicamos uma palavra, vão sendo incorporadas novas regras de uso, em que não há um limite *a priori* para suas possíveis aplicações. Assim sendo, de modo gradual, “se estabelece, dentro de nós, uma gramática arbitrária, uma vez que adquire total autonomia em relação ao que está fora da linguagem” (GOTTSCHALK, 2015, p. 111).

Segundo Gottschalk (2015), ensinar deve pressupor a inserção do aluno em novos jogos de linguagem (treinamento) e apresentação de técnicas linguísticas envolvidas com a linguagem. Aprender se relaciona ao domínio dessas técnicas e ao seu desenvolvimento em novas situações. Sob essa mesma perspectiva, Silveira, Silva e Júnior (2018) argumentam que para os alunos compreenderem conteúdos matemáticos é necessário conhecer diversos jogos de linguagem. Assim, com seu uso constante, os alunos vão alargando conceitos e ampliando a gama de significados.

Do mesmo modo que, Wittgenstein propõe em sua obra *Investigações Filosóficas* uma terapia de uma concepção referencial da linguagem, no campo da Educação Matemática, é importante olhar para as dificuldades apresentadas pelos alunos e apresentar diferentes pontos de vista desses conceitos, de modo a *persuadi-lo* e ampliar seu leque de significados.

Esta pesquisa tem como intenção de orientar-se pelo pensamento terapêutico de Wittgenstein e olhar para as dificuldades dos alunos em uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

## 1.2 *Delimitações da pesquisa*

É crescente o número de pesquisas que utilizam a modelagem matemática na Educação Matemática na perspectiva de Wittgenstein (SOUZA, 2012; SOUSA, 2017; TORTOLA, 2016; SOUZA, 2018). Nessas pesquisas, foram abordadas a aprendizagem matemática na modelagem matemática (SOUZA, 2012), a matemática em atividades de modelagem matemática (SOUSA, 2017), o seguir regras no fazer modelagem matemática em atividades que utilizam recursos das tecnologias digitais (SOUZA, 2018) e as configurações as atividades de modelagem matemática podem assumir anos iniciais do Ensino Fundamental (TORTOLA, 2016).

Nesta pesquisa, pretendemos tratar dificuldades do conteúdo de *funções* apresentadas por alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I de um curso de tecnologia, por meio do uso de atividades de modelagem matemática, de forma a:

*Investigar como se dão os efeitos terapêuticos do conceito de funções em atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos de um curso de tecnologia em Manutenção Industrial.*

A pesquisa tem natureza qualitativa e, mais especificamente, pode ser caracterizada como estudo de caso, pois sua investigação pretende compreender um fenômeno em profundidade e para seu entendimento considera condições contextuais.

O estudo de caso é uma investigação empírica que investiga um fenômeno contemporâneo em profundidade e em seu contexto de vida real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto não são claramente evidentes (YIN, 2010, p. 39).

Neste sentido, questões do tipo ‘como’ são o enfoque do estudo. Essas questões segundo Yin (2010, p. 30), “lidam com os vínculos operacionais que necessitam ser traçados ao longo do tempo, mais do que as meras frequências ou incidências”.

A pesquisa foi desenvolvida com dezesseis alunos do segundo período do curso de Tecnologia em Manutenção Industrial da Faculdade de Tecnologia Senai em Londrina durante a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no primeiro semestre do ano de 2017. Visando investigar os efeitos terapêuticos do conceito de funções em atividades de

modelagem matemática, a pesquisa vem delineada por um processo terapêutico que compreende:

- A identificação dos modos como alunos de um curso de tecnologia lidam com o uso do conteúdo de funções na disciplina de Cálculo Diferencial Integral I. O meio utilizado para essa identificação é uma avaliação diagnóstica.
- Desenvolvimento de atividades de modelagem matemática com alunos de um curso de tecnologia. Estas atividades representam uma intervenção terapêutica em relação as dificuldades dos alunos.
- A busca por efeitos terapêuticos das atividades de modelagem matemática em relação ao conteúdo de funções.

Para a identificação do problema, relacionado ao conteúdo de *funções*, foi utilizada uma avaliação diagnóstica. A função diagnóstica da avaliação permitiu identificar possíveis dificuldades de aprendizagem, determinar a presença ou a ausência de conhecimentos prévios ou outros problemas específicos, ao mesmo tempo em que se procurou planejar intervenções iniciais, propondo procedimentos para auxiliar o aluno em seu processo de aprendizagem.

A avaliação diagnóstica foi estruturada com quatro questões discursivas:

*- A primeira questão informou sobre a lei que torna obrigatório o uso do farol baixo aceso durante o dia nas rodovias. Os alunos foram convidados a construir um gráfico comparativo do custo de utilização de uma lâmpada Osram antes e após a aprovação da lei a partir de informações do enunciado.*

*- A segunda questão indicou um gráfico que apresenta o volume de vazamento (litros) de uma torneira pingando um filete de 1 mm em função do tempo transcorrido. Neste caso, os alunos foram convidados a realizar uma previsão do volume de vazamento ( $m^3$ ) após um ano.*

*- A terceira questão relacionou as variáveis tensão e corrente de uma lâmpada incandescente em uma tabela. Os alunos foram convidados a construírem um gráfico que relaciona essas duas variáveis e a tecer reflexões a respeito da lei de Ohm.*

*- A quarta questão mostrou que o chuveiro no modo 'verão' ou 'inverno' faz diferença na conta de luz. Neste caso, os alunos foram convidados a calcular a economia de gasto mensal*

*de energia elétrica do chuveiro 'Super Ducha Quattro' quando utilizado na posição nominal e na posição econômica durante 1 hora por dia.*

Em um primeiro momento, os alunos foram convidados a realizar de forma individual a avaliação diagnóstica, com um tempo de duração da avaliação de 70 minutos. Em um momento posterior, após a resolução individual da avaliação diagnóstica, os alunos responderam um questionário para que fossem identificadas dificuldades na resolução de cada questão (10 minutos) e tiveram a oportunidade de discutir com os colegas com o intuito de complementar ou modificar sua resolução (50 minutos).

Após a resolução da avaliação diagnóstica e alinhamento com os colegas, a professora da disciplina e os alunos conjuntamente discutiram as resoluções obtidas nas avaliações (120 minutos), o que permitiu inferir a identificação do problema: dificuldades no uso do conteúdo de *funções* na disciplina de Cálculo Diferencial Integral I.

Silveira, Silva e Júnior (2018, p. 165) destacam que “não se pode esperar que aprendizes que não conhecem determinados usos de símbolos ou práticas (algoritmos ou determinadas formas de exercícios) possam descobrir<sup>3</sup> ou deduzir por conta própria o que são ou o que fazer em determinadas situações”.

Desse modo, é durante o uso da linguagem por meio da apresentação de diferentes regras do conteúdo de *funções*, que os alunos irão compreender o conceito e suas aplicações, por meio das “explicações e instruções” do professor (GLOCK, 1998, p. 316). Essa capacidade de compreender as regras das palavras “não está em um potencial natural humano, ou tal propriedade não é uma referência linguística de conhecimento metafísico, ideal ou empírico, mas é uma possibilidade que a linguagem oferece” (SILVEIRA; SILVA; JÚNIOR, 2018, p. 165).

A avaliação diagnóstica foi utilizada como forma de direcionamento e acompanhamento de conteúdos retidos pelos alunos, durante sua formação acadêmica ou experiências pessoais, tendo como guia a ementa e objetivos da disciplina (SENAI, 2013, 2014). A sua aplicação delineou a intervenção terapêutica da pesquisa, por meio do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

---

<sup>3</sup> O que os autores compreendem por descoberta é a crença de que os alunos descubram algum conhecimento que já exista a priori.

A intervenção terapêutica da pesquisa foi mediada pelo desenvolvimento de atividades de modelagem matemática com alunos de um curso de tecnologia e está de acordo com os três momentos de familiarização propostos por Almeida e Dias (2004)<sup>4</sup>. No decorrer desse desenvolvimento foram coletados dados relativos aos usos do conteúdo de *funções* nessas atividades. Distribuídos em quatro grupos, os dezesseis alunos desenvolveram as atividades de modelagem matemática:

*- A partir de informações referentes a três tipos de lâmpadas, a saber, halógena, fluorescente e LED, a primeira atividade investigou o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED e corresponde a atividade de primeiro momento da modelagem matemática. Essa atividade teve um tempo de duração de 360 minutos.*

*- A partir da coleta de dados de corrente, tensão, resistência e temperatura de um ferro de passar roupas, a segunda atividade investigou a resistência elétrica e temperatura de um ferro de passar roupas e corresponde a atividade de segundo momento da modelagem matemática. Essa atividade teve um tempo de duração de 360 minutos.*

*- A partir da coleta de dados de corrente, tensão, resistência e temperatura de uma lâmpada incandescente, a terceira atividade investigou a resistência elétrica e temperatura de uma lâmpada incandescente e corresponde a atividade de segundo momento da modelagem matemática. Essa atividade teve um tempo de duração de 180 minutos.*

*- Foram desenvolvidas pelos alunos três atividades de terceiro momento da modelagem matemática, a saber: Análise de frequência e rotação em um motor; Análise de corrente e fator de potência em um transformador abaixador; Relação entre carga e fator de potência em um motor elétrico.*

A busca por efeitos terapêuticos visa, a partir das dificuldades identificadas, a análise das atividades desenvolvidas, utilizando-se de diferentes usos do conteúdo de *funções* nas atividades de modelagem matemática na Educação Tecnológica.

Neste caso, para explicar para os alunos o que é uma função, foi necessário descrever diferentes usos desse conceito (algébrico, gráfico e tabular) de forma não fragmentada e

---

<sup>4</sup> Em Almeida e Dias (2004), as autoras propõem três momentos de familiarização para inserção de atividades de modelagem matemática em sala de aula. Esses momentos serão explicitados no capítulo 3.



utilizar de suas conexões para ampliar a gramática desse conceito. A aprendizagem consistiu em ampliar horizontalmente as possibilidades do uso desse conteúdo para que novos aspectos fossem percebidos por meio de aplicação em novas situações.

O meio utilizado na pesquisa para o tratamento das dificuldades apresentadas foi o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática e, neste processo, o uso de tecnologias digitais foi necessário para compreensão da situação-problema, apreensão de conteúdos matemáticos e ampliação do leque de aplicações referentes ao conteúdo de *funções*.

De modo geral, a pesquisa teve como foco a modelagem matemática como conteúdo para capacitar os alunos a resolverem problemas e outras capacidades associadas ao tecnólogo em Manutenção Industrial. Além disso, foi necessário, por vezes, da utilização da modelagem matemática como veículo para fornecer subsídios para a introdução de conteúdos matemáticos em sala de aula.

### 1.3 *Estrutura da tese*

A estrutura da tese compreende de sete capítulos. A introdução em que apresentamos o processo terapêutico adotado na pesquisa, bem como o problema de pesquisa e seus delineamentos. Dois capítulos relativos à fundamentação teórica para a pesquisa, em que apresentamos considerações a respeito da filosofia da linguagem, da modelagem matemática na Educação Matemática e focamos nosso olhar para atividades desenvolvidas em sala de aula à luz da terapia de Wittgenstein. Um capítulo relativo a apresentação do contexto da pesquisa e os aspectos metodológicos utilizados. Três capítulos dedicados a descrição do processo terapêutico da pesquisa, a dizer, a identificação do problema, a intervenção mediada por atividades de modelagem matemática e a busca por resultados em que tecemos reflexões a respeito dos objetivos da pesquisa à luz da terapia de Wittgenstein. Por fim, sinalizamos contribuições da tese para a Modelagem Matemática na Educação Matemática e apontamos para perspectivas de pesquisas futuras.

Prosseguem esses capítulos as referências e apêndices.

## CAPÍTULO 2

### *Filosofia de Wittgenstein*

*“A filosofia é uma luta contra o enfeitiçamento de nosso intelecto pelos meios de nossa linguagem”  
(WITTGENSTEIN, 2013, § 109, p. 71).*

Neste capítulo apresentamos elementos da perspectiva filosófica de linguagem de Wittgenstein. Inicialmente tratamos de jogos de linguagem, regras e sua associação com formas de vida. A seguir, dirigimos nossa atenção para significado e uso na linguagem. Por fim, focamos nosso olhar para atividades desenvolvidas em sala de aula à luz da terapia de Wittgenstein.

#### *2.1 Proposições, jogos de linguagem, regras e formas de vida na filosofia de Wittgenstein*

A terapia filosófica da segunda fase dos escritos de Wittgenstein se manifesta na luta contra o ‘enfeitiçamento’ de nossa linguagem, reflexo da concepção referencial da linguagem, que nos induz a “oferecer uma dissecação definitiva das proposições para estabelecer claramente todas as ligações e remover todas as possibilidades de incompreensão” (WITTGENSTEIN, 2010, p. 162).

Por muito tempo, o significado da palavra *proposição* ocupou Wittgenstein em seu *Tractatus*. Donat (2008) argumenta que Wittgenstein, procurou mostrar que a linguagem era compreendida por uma totalidade de proposições, abstraindo o uso que dela é feito por meio da relação linguagem-mundo. Nesse caso, a linguagem teria uma única função: descrever os fatos do mundo utilizando-se de proposições verdadeiras ou falsas.

Aparentemente, é como se a explicação-proposição é tudo o que pode ser verdadeiro ou falso – determinasse o que uma proposição é, ao dizer: o que se encaixa no conceito “verdadeiro”, ou em que o conceito “verdadeiro” se encaixa, é uma proposição. Portanto, é como se tivéssemos um conceito de

verdadeiro e de falso, com o auxílio do qual podemos determinar então o que é uma proposição e o que não é uma proposição. O que *engrena* no conceito (como na roda dentada), é uma proposição. Mas esta é uma imagem ruim (WITTGENSTEIN, 2013, § 136, p. 78).

Considerando que as proposições são constituídas de nomes cujo significado são os objetos a que se referem, Wittgenstein, em seu *Tractatus*, possuía uma “imagem falsa e idealizada do uso da linguagem” (WITTGENSTEIN, 2010, p. 162). Contudo, segundo Vargas (2009, p. 148), “os nomes não representam os objetos, mas apenas elucidam o seu uso e significado num determinado jogo de linguagem, que tem suas regras determinadas previamente”.

Em sua obra *Investigações Filosóficas*, Wittgenstein reconhece que uma proposição pode ser entendida como uma “família de estruturas mais ou menos aparentados entre si. – Mas o que será então da lógica? Seu rigor parece aqui desfazer-se” (WITTGENSTEIN, 2013, § 108, p. 70).

Para compreender esse conceito de proposição, Wittgenstein (2013) revela que não pode ser compreendida como um ato mental, mas algo que pode se mostrar no uso da linguagem nas diversas situações em que é empregada. Segundo ele, não há uma única função comum nas expressões da linguagem, mas uma variedade de usos que ele denomina de jogos de linguagem.

A noção de jogo de linguagem é o argumento que coloca Wittgenstein afastado do essencialismo, pois perde-se a ideia de um mesmo fundamento para o conhecimento, bem como traz para as diversas atividades linguísticas a possibilidade de terapia dos males provocados pelas filosofias essencialistas (SILVEIRA; SILVA; JÚNIOR, 2018, p. 163).

Wittgenstein salienta que um jogo de linguagem constitui a “totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada” (WITTGENSTEIN, 2013, § 7, p. 19). Segundo Gottschalk (2004a, p. 318), “a palavra jogo vem ressaltar as diversas atividades com as quais a linguagem se vincula”.

Essa relação que Wittgenstein estabelece entre a linguagem e os jogos, mostra que a linguagem é uma atividade, à semelhança dos jogos, e que também é guiada por regras. A respeito dessa relação Donat (2008) afirma que “o significado da palavra é determinado pelo conjunto de regras que condicionam seu uso; são as regras da gramática que constituem o jogo de linguagem em questão”.

Falar uma língua significa seguir regras. Mas seguir uma regra é um hábito ou uma prática. Consequentemente, saber falar uma língua não é simplesmente uma questão de saber usar as palavras e frases, acompanhadas de atividades e processos mentais, mas é também, e sobretudo, "dominar uma técnica" (IF § 199). E na medida em que a linguagem se diversifica em inúmeros jogos de linguagem, poderíamos falar do domínio de inúmeras técnicas (SPANIOL, 1990, p. 22).

Para o filósofo Wittgenstein, a palavra *regra* indica aquilo que regula, como uma norma ou um caminho que orienta como se deve agir em determinados contextos. Em um jogo, uma regra pode ser um recurso de orientação: “Ela é transmitida ao aprendiz e sua aplicação é treinada. – Ou é um instrumento do próprio jogo. – Ou: uma regra não encontra uma aplicação nem na instrução nem no jogo; nem está assentada num catálogo de regras” (WITTGENSTEIN, 2013, § 54, p. 45).

Nesse sentido, não é possível delimitar por regras em toda parte, mas é possível traçar alguns de seus limites. Por exemplo, conforme salienta Wittgenstein (2013, § 68, p. 53), em um jogo de tênis não há nenhuma regra que prescreva “a que altura ou com que força se é permitido arremessar a bola, mas o tênis é de fato um jogo, e também possui regras”.

Há diversos exemplos de situações em que seguimos regras, como fazer uma comunicação, dar uma ordem, jogar um jogo, desenvolver uma operação matemática, entre outras. Segundo Donat (2008, p. 71), o que evidencia nessas situações é que as regras direcionam as ações dos participantes, “no sentido de que certo comportamento é esperado de quem participa delas. Ao seguir a regra, pratica-se uma ação, age-se de acordo com o que é esperado, porque a regra obriga a agir assim. A regra informa que ações são esperadas”.

Por exemplo, suponha dados descritos como uma série de números elevados ao quadrado, dispostos em uma tabela e distribuídos em linhas e colunas de modo ordenado. Um aluno aprende a realizar a leitura da tabela, por meio de treinamento. Segundo Wittgenstein (2013, § 86, p. 62), “a tabela é, portanto, uma regra pela qual ele se orienta ao executar a ordem”.

Suponha que alguém diga a série 1, 3, 5, 7, ... enquanto escreve a série  $2x + 1$ . E se pergunta: ‘Mas faço sempre a mesma coisa ou faço cada vez algo diferente?’  
[...] Teria sentido dizer: ‘Se ele cada vez fizesse algo diferente, não diríamos: ele segue uma regra?’ Isto não tem sentido algum (WITTGENSTEIN, 2013, § 226 - 227, p. 120).

Quando o aluno escreve a série  $2x + 1$ , ele usa uma regra que faz parte de nossas certezas e não podemos seguir uma regra privadamente. Nesse sentido, seguir uma regra é a concordância entre a regra e sua aplicação e pode ser considerada como uma *práxis*, na medida em que há um costume, um hábito, um uso constante.

As regras matemáticas, de modo particular, são, de certo modo, uma doutrina, mas também um fazer que se movimenta nas regras de nossa linguagem. Para Wittgenstein (2013), essas proposições são ditas gramaticais, sendo determinadas pelo seu uso no jogo de linguagem. Os axiomas, postulados e definições matemáticas:

são certezas que não são passíveis de ser revisadas pela experiência. Embora estejam enraizadas em determinadas práticas e formas de vida, em um background em que são constituídos suas definições, axiomas e postulados, essas proposições não descrevem entidades abstratas, ou a realidade empírica e tampouco são produto de uma negociação interpessoal. Fazem parte de nossas certezas, constituindo também uma imagem do mundo (GOTTSCHALK, 2004a, p. 323).

O que denomina uma proposição ser gramatical é a sua função, como uma convenção, “cujo valor de verdade não convém verificar, porque elas têm uma outra função, a saber, a de norma a ser seguida, análoga à de uma regra ou de uma ordem” (GOTTSCHALK, 2018, p. 114). Como proposições matemáticas, podemos citar: as proposições aritméticas, geométricas, algébricas, etc.

É no momento do uso de uma proposição em determinado contexto que é possível distinguir entre seus usos gramatical e empírico. Nesse caso, segundo Gottschalk (2010, p. 64), uma proposição empírica consiste em uma “atividade que envolve justificação, questionamentos e experimentação empírica”.

Por exemplo, embora a segunda lei de Newton desempenhe um papel normativo, pela experiência, pode ocorrer uma situação em que isto não ocorra. Com relação as proposições matemáticas, tais como ‘entre dois pontos sempre é possível traçar uma reta’, não convém verificar seu valor de verdade, porque não pode ser refutada pela experiência.

Quando um professor de física afirma que todo corpo cai segundo a lei da gravidade de Newton, esta é uma afirmação que é possível verificar empiricamente; inclusive, podemos imaginar uma situação em que isto não ocorra, como, por exemplo, corpos que flutuassem em determinadas condições. Assim, embora a lei de Newton fundamente nossas proposições empíricas, uma vez que é possível, a partir dela, descrevermos fatos contingentes da experiência, esta última pode refutá-la. Já uma afirmação como “entre dois pontos sempre é possível traçar uma reta” não é verificável pela experiência, não é através de experimentações que iremos (ou não)

constatar sua evidência. Pelo contrário, a aceitação de sua evidência – ou de sua independência em relação à experiência – é a condição para o uso da proposição como axioma. E isto faz parte do ensino dos axiomas (GOTTSCHALK, 2010, p. 76).

Desse modo é a aceitação de determinadas regras que dão sentido à experimentação empírica, as regras matemáticas.

Para Wittgenstein (2013), esse complexo conjunto de regras é denominado de gramática, cuja finalidade é a finalidade da linguagem. Wittgenstein argumenta que a gramática descreve o conjunto de usos das palavras, estes, por sua vez, orientam a significação de conceitos. Para Wittgenstein (2013, § 497, p. 186) “se a nossa linguagem não tivesse essa gramática, ela não poderia expressar esses fatos”

A terapia de Wittgenstein nos mostra que as regras direcionam o uso das palavras que estão presentes em nossas formas de vida, na medida em que houver um costume, um hábito. Segundo Donat (2008, p. 91), “o conceito de forma de vida está ligado a uma característica cultural mais do que às características biológicas do homem”, nesse caso, as diferentes formas de vida estão relacionadas a características de diferentes culturas e épocas.

É nesse sentido que a expressão ‘jogo de linguagem’ também está associada a variedade de usos dos instrumentos da linguagem em nossas formas de vida, como por exemplo, fazer suposições, relatar um acontecimento, resolver uma tarefa, dar ordens, etc. Segundo Wittgenstein (2013), essa variedade não é algo fixo, na medida em que há jogos que envelhecem, outros que são esquecidos e novos tipos de linguagem que surgem.

As formas de vida fornecem uma certa regularidade entre as ações e as palavras nos jogos de linguagem em que os participantes estão inseridos. Como exemplo, Donat (2008, p. 40) sugere a relação entre ação e reação quando se realiza um pedido ou a uma ordem: “essa reação, esse comportamento é comum a todos que participam desse jogo de linguagem; faz parte da forma de vida em que se insere este jogo de linguagem”.

A este aspecto, Wittgenstein (2013) chama a atenção para o aspecto público da linguagem, em que seguir uma regra é uma ação junto à uma comunidade. “Não é possível um único homem ter seguido uma regra uma única vez. Não é possível uma única comunicação ter sido feita, uma única ordem ter sido dada ou entendida uma única vez, etc.” (WITTGENSTEIN, 2013, § 199, p. 113).

A concordância na forma de vida serve como sustentação para o seguir regras (SPANIOL, 1990) e não é separável da concordância nos juízos. Para Wittgenstein (2013, § 241, p. 123), “assim você está dizendo, portanto, que a concordância entre os homens decide o que é certo e o que é errado? - Certo e errado é o que os homens dizem; e os homens estão concordes na linguagem. Isto não é uma concordância de opiniões, mas da forma de vida”.

É a linguagem que determina a maneira em que devem ser utilizadas as palavras e as regras direcionam como se deve agir em determinados contextos. O significado de uma palavra corresponde ao modo em que se usa na linguagem e essa aplicação é determinada pelo jogo de linguagem em que se está inserido.

## 2.2 *Significado e uso na linguagem*

Em sua visão mais tardia, Wittgenstein (2013) argumenta que o conceito filosófico de *significado* em que os objetos são denominados pelas palavras da linguagem é comum em uma representação primitiva de linguagem.

Imaginemos uma linguagem para a qual a descrição dada por Santo Agostinho esteja correta: a linguagem deve servir ao entendimento de um construtor A com um ajudante B. A constrói um edifício usando pedras de construção. Há blocos, colunas, lajes e vigas. B tem que lhe passar as pedras na sequência em que A delas precisa. Para tal objetivo, eles se utilizam de uma linguagem constituída das palavras: ‘bloco’, ‘coluna’, ‘laje’, ‘viga’. A grita as palavras; - B traz a pedra que aprendeu a trazer ao ouvir esse grito. – Conceba isto como uma linguagem primitiva completa (WITTGENSTEIN, 2013, § 2, p. 16).

De acordo com Wittgenstein (2013, § 1, p. 15), “nesta imagem da linguagem encontramos as raízes da ideia: toda palavra tem um significado. Este significado é atribuído à palavra. Ele é o objeto que a palavra designa”. Deste modo, parece se afigurar que o *significado* corresponde ao signo linguístico que designa ao objeto.

Uma criança, ao aprender a falar, emprega tais formas primitivas da linguagem. Neste caso, segundo Wittgenstein (2013, § 5, p. 17), “ensinar a linguagem aqui não é explicar, mas treinar”. E, assim, aos poucos a criança constitui uma gramática dessas palavras, permeada de regras que guiam o seu pensamento e ação.

Uma parte do treinamento denomina-se ‘ensino ostensivo das palavras’ que consistirá em estabelecer uma ligação entre a palavra e a coisa. Segundo Donat (2008), a definição ostensiva não está sujeita a nenhuma interpretação, deste modo, expressa de modo mais autêntico possível o significado da palavra.

Considere um jogo de linguagem sobre a construção de um edifício, em que houvesse somente palavras de ordens e obediência entre um construtor e um ajudante, com sua gramática constituída das palavras ‘bloco’, ‘coluna’, ‘laje’ e ‘viga’. Quando o construtor grita, por exemplo, ‘Laje!’, esta palavra nomeia uma pedra e, também, funciona como uma solicitação ou pedido para que o ajudante traga a pedra solicitada.

Segundo Vargas (2009, p. 153) seria plenamente compreensível esse jogo de linguagem, “porque não teria no seu desenrolar interno a necessidade de outras palavras. Não existe, portanto, a linguagem, que existisse anterior a nós, [...]; na verdade, existe somente a ‘nossa’ linguagem, instituída de acordo com as necessidades que se apresentam”. Para o autor,

a relação de nomeação só pode ser compreendida no interior da linguagem; ela não é anterior à linguagem e não a institui, como se fosse o seu começo. O nomear apenas *‘elucida o uso – a significação – da palavra quando já está claro qual papel a palavra deve desempenhar na linguagem’*. [...] Pois a linguagem é uma atividade, uma conexão de muitas palavras, e estas só têm sentido no contexto mais amplo daquela. Por isso mesmo, não existe a relação entre nome e nomeado; existem sim muitas possibilidades de relação, conforme o contexto e as circunstâncias em que está situada essa relação (VARGAS, 2009, p. 154).

Nesse contexto, essa relação entre as palavras e o objeto só pode ser compreendida no interior da linguagem. Mas é importante considerar as múltiplas possibilidades de relação das palavras na linguagem. É durante o seu uso que determina seu significado.

Para Wittgenstein (2013) podemos dar nome às coisas, discursar e fazer referência a essas coisas, “enquanto que com nossas frases fazemos as coisas mais diversas. Pensemos apenas nas exclamações, com suas funções tão diferentes. Água! Fora! Ai! Socorro! Lindo! Não! Você ainda está inclinado a chamar essas palavras de ‘denominações de objetos?’” (WITTGENSTEIN, 2013, § 27, p. 29).

Nesse caso, não precisamos explicar o significado das palavras, ou o que é proposição ou linguagem, mas é necessário analisar o seu uso, o seu funcionamento, os jogos de



linguagem. Segundo esta abordagem, o significado de uma palavra é determinado no uso da linguagem em diferentes contextos.

Um exemplo banal, mas bastante ilustrativo, é o conceito de triângulo na linguagem cotidiana. Dependendo do contexto em que essa palavra é dita, pode ser compreendida como um instrumento musical ou mesmo como um sinal de trânsito. Já no contexto de uma aula de geometria, esse mesmo termo é introduzido com um significado radicalmente diferente, pois agora é todo um sistema geométrico que passa a lhe atribuir um novo significado. Da mesma forma que as definições e os axiomas são os responsáveis pelos padrões iniciais da significação na matemática, parte dessas definições e axiomas, embora transpostos em outra forma para a linguagem escolar, também dará sentido à atividade matemática em sala de aula (GOTTSCHALK, 2004b, p. 6).

O significado do conceito do triângulo não está pré-determinado e corrobora com Wittgenstein (2013, § 432, p. 173) quando diz que “todo signo, sozinho, parece morto. O que lhe confere vida? – Ele está vivo no uso”. Nada que não faça parte desse pano de fundo pode servir como critério de significação linguística.

A terapia nos mostra que as regras direcionam o nosso uso das palavras em nossas formas de vida, estabelecendo relação entre a gramática e a significação. Dessa forma, com o domínio de regras e técnicas em uma determinada situação, é possível que se estabeleça a compreensão de um conceito.

### *2.3 A perspectiva wittgensteiniana de linguagem e o contexto educacional*

Segundo o filósofo Wittgenstein (2013) toda atividade é guiada por regras, que possuem o papel de orientar nossas expressões linguísticas, mas que não as determinam. Desse modo, Wittgenstein procura esclarecer confusões da linguagem quando não percebemos como as nossas palavras e expressões linguísticas funcionam.

Por exemplo, para uma criança constituir a gramática da cor ‘azul’, de forma gradual, deve se aplicar essa palavra em diferentes contextos. Segundo Gottschalk (2004), por meio de uma tabela de cores ou pela apresentação do objeto que possui essa cor, é possível associar essas imagens de cores e dizer: “isto é azul”. Contudo, essa gramática da cor ‘azul’ só é constituída à medida em que se estabelece relações conceituais por meio de jogos de linguagem.

Wittgenstein (2013) propõe a descrição dos objetos, atribuindo-lhes características e propriedades, além do nível da nomeação, quando diz como exemplos ‘este azul aqui é o mesmo que o de lá?’, ‘o tempo está melhorando, já se vê novamente o céu azul!’, ‘como se chama este azul? – é índigo?’. Essas descrições possuem diversas finalidades, pois não se faz a mesma coisa quando se dirige sua atenção para a cor ‘azul’.

Dessa forma, como é possível uma criança ou um aluno, aprender uma palavra que não havia sido ensinado antes?

Segundo Gottschalk (2015, p. 311), a terapia filosófica aponta para o processo de aprendizagem que “pressupõem treinamento e apresentação de técnicas<sup>5</sup> envolvidas com a linguagem, e aprender passa a ter um novo sentido: ser capaz de dominar estas técnicas e aplicá-las em novas situações”. Neste caso, segundo Wittgenstein (2013, § 5, p. 17), “ensinar a linguagem aqui não é explicar, mas treinar”.

Esse treinamento consiste, em linhas gerais, na inserção do aluno em novos jogos de linguagem, uma vez que para Wittgenstein (2013) seu significado pode ser compreendido no uso da linguagem em diferentes contextos.

Uma parte do treinamento denomina-se de ‘ensino ostensivo das palavras’ em que o uso das palavras estabelece uma relação com os objetos aos quais denominam. Para isso, diversas técnicas podem ser utilizadas, tais como, “o gesto ostensivo, a repetição de sons acompanhada de gestos, a apresentação de tabelas associando palavras e amostras dos objetos, a apresentação de paradigmas, etc” (MORENO, 1996, p. 14). Contudo, essa ligação entre nome e objeto é apenas um jogo de linguagem.

Moreno (2005) argumenta que é necessário explicitar as ligações internas entre os diferentes usos das palavras e suas analogias, tendo em vista reconhecer a extensão do domínio da significação conceitual.

Do ponto de vista terapêutico, descrever corresponde a inserir o objeto a ser descrito [...] em contextos de aplicação efetiva das respectivas palavras, em

---

<sup>5</sup> A partir desse momento, iremos nos referir no texto às técnicas linguísticas como técnicas. Segundo Gottschalk (2015, p. 310), as técnicas são as condições para a constituição de sentido na própria linguagem “como o gesto ostensivo, objetos e sensações que passam a ser empregados como amostras ou paradigmas de uso das palavras, criação de novas analogias e comparações, entre outros recursos que a linguagem dispõe como condições para a constituição dos sentidos que atribuímos aos fatos do mundo”.

contextos que serão apresentados, e sucessivamente explorados, tendo como fundamento simples ligações analógicas ainda consideradas pertinentes para as aplicações das palavras. As ligações analógicas assim reveladas [...] indicam a extensão do domínio da significação conceitual. A descrição terapêutica deve conduzir, assim, segundo Wittgenstein, ao esclarecimento daquilo que nos aparece quando olhamos, sem a intermediação de qualquer teoria (MORENO, 2005, p. 294).

A significação do conceito supõe, então, apresentação e treinamento de diferentes técnicas envolvidas com a linguagem tendo como objetivo que o aprendiz perceba novas regras, novos aspectos, com o intuito de ampliar seu domínio por meio de aplicação em novas situações.

Para realizar uma operação de soma, por exemplo, é necessário que o aluno saiba identificar números, tenha noções de quantidade, domine a técnica da contagem. Essas técnicas/regras precisam ser ensinadas por meio de treinamento e não se deve naturalizar esse processo de ensino e aprendizagem. De modo geral, as regras matemáticas são certas e indicam como seguir de acordo com as regras de nossa linguagem.

Em uma aula de geometria euclidiana, um professor introduz o axioma da existência e unicidade das retas paralelas: *Dado uma reta e um ponto P fora dela, existe uma única reta paralela a essa reta, passando pelo ponto dado.* Segundo Gottschalk (2010, p. 74), “com o mesmo tom de certeza que dizemos a uma criança que está aprendendo o nome das cores que tal cor é azul e não verde, o professor afirma que pelo ponto P só é possível traçar uma única reta”.

É claro que o aluno pode não querer aceitar o axioma das paralelas, do mesmo modo que podemos imaginar que tenha se recusado a aceitar que um determinado objeto fosse azul, e não verde, quando introduzido aos nomes das cores. Neste sentido, o ensino de regras se aproxima muito mais de uma tarefa de persuasão do que de convencimento. Não há neste nível outro fundamento que o da ação: é *assim* que agimos no interior deste jogo de linguagem (GOTTSCHALK, 2010, p. 74).

Uma vez que os alunos aceitem esse axioma, essa regra matemática terá função normativa, uma vez que indica como esta proposição deve ser usada em suas práticas linguísticas.

Segundo Moreno (1996, p. 14), “o conhecimento e a familiaridade com estas técnicas e com estes resultados levam-nos a construir novas técnicas, integrando ou não as anteriores, ampliando seu campo de aplicação”.

Gottschalk (2015) destaca que a compreensão de um conceito se aproxima do domínio de uma ou mais técnicas em uma determinada situação, inclusive àquelas não previstas inicialmente. Segundo Wittgenstein (2013, § 150, p. 86), compreender significa “dominar uma técnica”.

E é dessa forma que, gradualmente, os alunos estabelecem uma gramática arbitrária, um complexo conjunto de regras, por meio do uso da linguagem em diferentes contextos. Sendo assim, é a maneira como os alunos usam a linguagem que dirá como eles a compreendem.

Wittgenstein salienta que a gramática da palavra ‘saber’ apresenta estreita relação com a gramática das palavras ‘ser capaz’ e ‘compreender’ (WITTGENSTEIN, 2013, § 150, p. 86). Podemos afirmar que quando um aluno compreende um conceito é capaz de usar conhecimento para agir corretamente em novas situações.

Reconhecendo novos olhares a respeito da significação, possibilidades que são imprevisíveis *a priori*, apenas é possível traçar alguns limites. Diz Wittgenstein (2013):

Quando demarco um local com uma cerca, com um fio ou com qualquer outra coisa, a finalidade pode ser não permitir que alguém entre ou saia; mas pode também fazer parte de algum jogo em que, por exemplo a linha demarcatória deve ser ultrapassada pelos jogadores; ou pode indicar onde termina a propriedade de uma pessoa e começa a de outra etc. (WITTGENSTEIN, 2013, § 499, p. 187).

A dimensão dialógica da terapia proporciona o movimento da terapia, não tendo como finalidade atingir um resultado definitivo, no sentido ao forçar o pensamento em uma única direção, mas visa, como resultado esperado, segundo Moreno (2005), o esclarecimento ou aprofundamento desses conceitos.

Neste caso, seria possível “uma análise que compare e estabeleça relações entre estes diferentes usos, tendo em vista o esclarecimento de confusões e, eventualmente, apontando-se para a possibilidade de novas significações dos conceitos fundamentais da educação” (GOTTSCHALK, 2015, p. 304).

Diz Wittgenstein (2013, § 130, p. 75), “os jogos de linguagem estão aí muito mais como objetos de comparação, os quais, por semelhança e dessemelhança, devem lançar luz nas relações de nossa linguagem”. Para Wittgenstein (2013) não há algo que seria comum a todos estes jogos.

Observe, por exemplo, os processos a que chamamos de “jogos”. Tenho em mente os jogos de tabuleiro, os jogos de cartas, o jogo de bola, os jogos de combate etc. O que é comum a todos estes jogos? - Não diga: “Tem que haver algo que lhes seja comum, do contrário não se chamariam ‘jogos’”, - mas olhe se há algo que seja comum a todos. - Porque, quando olhá-los, você não verá algo que seria comum a todos, mas verá semelhanças, parentescos, aliás, uma boa quantidade deles. [...] E assim podemos percorrer os muitos, muitos outros grupos de jogos, ver as semelhanças aparecerem e desaparecerem (WITTGENSTEIN, 2013, § 66, p. 51-52).

A essas semelhanças Wittgenstein caracteriza com a expressão ‘semelhanças de família’ e, segundo ele, os jogos estão aparentados uns com os outros, formando uma família. Para Wittgenstein (2013), essas semelhanças podem ser em grande ou em pequena escala, em que não há a todos a estes jogos, um traço definidor comum.

Neste caso, o processo terapêutico da pesquisa visa, a partir da identificação do problema, tratar as dificuldades dos alunos com relação ao conteúdo de *funções* e propõe que olhemos para os diferentes jogos de linguagem e observemos que gradualmente vai se construindo a robustez desse conteúdo por meio de sua aplicação em diferentes contextos.

Segundo Gottschalk (2004b, p. 7), “também na matemática, o significado de um conceito não vai sendo ‘construído’ verticalmente (um potencial matemático que vai se desenvolvendo até atingir as representações matemáticas convencionais), mas horizontalmente”. Dessa forma, propõe que o significado de um conceito (por exemplo de funções) se torne mais complexo à medida em que seus usos vão se modificando para que novos aspectos possam ser percebidos nos diferentes jogos de linguagem.

É esse olhar para a Educação Matemática na perspectiva de Wittgenstein que buscamos abordar nesta pesquisa.

## CAPÍTULO 3

### *Modelagem Matemática*

*“O aprendizado de modelagem não se restringe ao aprendizado de técnicas padronizadas ou procedimentos sequenciais tal como um protocolo cirúrgico. Da mesma forma que só se pode aprender a jogar futebol, jogando, só se aprende modelagem, modelando!” (BASSANEZI, 2010, p. 43).*

Neste capítulo apresentamos considerações a respeito da modelagem matemática na Educação Matemática, explicitamos o entendimento sobre modelos e modelagem e uso da modelagem matemática em contextos escolares. Por fim, apresentamos princípios para o planejamento e encaminhamento de atividades de modelagem matemática na sala de aula.

#### *3.1 Modelos e modelagem*

A modelagem matemática teve sua origem no âmbito da área da Matemática Aplicada. Neste contexto, pode ser compreendida como um método científico que está subordinada a uma relação entre um modelador profissional e ao conhecimento matemático (KLÜBER, BURAK, 2009).

Bassanezi (2010) destaca a relevância da modelagem enquanto método científico, argumentando que pode estimular a construção de novas ideias, preencher lacunas onde há falta de dados experimentais, compreender a realidade e eventuais tomadas de decisões. Todavia, revela-se nesse âmbito para uma visão cartesiana de conhecimento, tendo como objetivo a produção ou aplicação de conhecimento matemático, por meio de troca entre teorias e práticas visando melhorar interpretações do que se quer modelar. Uma orientação epistemológica dessa natureza não possui preocupações de como o sujeito que faz a modelagem pode aprender (KLÜBER; BURAK, 2009).

Com a expectativa de levar em consideração discussões relativas à produção de conhecimento matemático no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, a sua introdução em sala de aula foi ganhando atenção pelos professores e pesquisadores da área de Educação Matemática desde as últimas décadas do século XX.

No âmbito da Educação Matemática, o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática visa também considerar o ensino e a aprendizagem da matemática.

Segundo Almeida e Vertuan (2014), a modelagem matemática refere-se a busca de soluções para problemas por meio da construção de modelos matemáticos e, de modo geral, Almeida (2010) salienta que uma atividade de modelagem matemática:

pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a final. Nesse sentido, realidade (origem da situação inicial) e matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão fundamentados) são domínios diferentes que passam a se integrar, e, em diferentes momentos, conhecimentos matemáticos e não matemáticos são acionados e/ou produzidos e integrados. A esta situação inicial problemática a literatura costuma se referir como situação-problema; à situação final desejada é associada, de modo geral, uma representação matemática, um modelo matemático (ALMEIDA, 2010, p. 399).

O que podemos considerar então é que um problema constitui o ponto de partida de uma atividade de modelagem e as suposições determinam o encaminhamento da atividade de modelagem e indicam diferentes direções em que podem ser empreendidas as resoluções matemáticas. A construção de um modelo matemático está associada à situação final desejada. Por *modelo*, Lesh e Harel (2003) se referem a um sistema conceitual que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, como por exemplo, o sistema não matemático:

Sistemas conceituais que geralmente tendem a ser expressos usando uma variedade de interação média representacional, que pode envolver escritos, símbolos, língua falada, gráficos baseados em computador, diagramas baseados em papel ou gráficos ou metáforas baseados na experiência. Seus fins são para construir, descrever ou explicar outros sistemas (LESH; HAREL, 2003, p. 159).

Nesse caso, um modelo matemático pode ser expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática. Sua formulação não tem um fim em si mesmo, mas visa resolver algum problema.

### 3.2 *Uso da modelagem matemática em contextos escolares*

Kaiser e Sriraman (2006) apontam em sua pesquisa que não há um entendimento homogêneo sobre modelagem matemática, podendo ser caracterizada sob diferentes perspectivas. Sob esse contexto Stillman (2012) considera que a modelagem matemática implica em algum processo que envolve formulação, matematização, resolução, interpretação e avaliação. Esse conjunto de procedimentos estão relacionados as fases de inteiração, matematização, resolução e interpretação de resultados e validação descritas por Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Neste processo, segundo Rosa e Orey (2015), a modelagem matemática tem como intenção desenvolver habilidades para interpretar fenômenos, formular e testar suposições, desenvolver e analisar modelos matemáticos. Para isso, é importante expor os alunos a uma ampla variedade de problemas ou jogos de linguagem.

- *Inteiração*

Em uma atividade de modelagem, uma *situação-problema* trata de uma situação inicial (problemática) em que se pretende estudar (fenômeno). A escolha do tema e a busca de informações são relevantes na escolha da situação-problema e para a *inteiração da situação*. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), o termo ‘inteiração’ refere-se ao ato de informar-se e conhecer características da situação-problema e, além disso, representa um primeiro contato com a situação.

A inteiração conduz a formulação do problema, que é de fundamental importância para permitir a elaboração de um modelo matemático e se refere a uma questão não resolvida e que é objeto de discussão. Um problema também pode ser compreendido por uma situação na qual o indivíduo não possui esquemas de resolução a priori.

Em uma atividade de modelagem, a formulação do problema é orientada pela falta de compreensão e de entendimento da solução. Todavia, resolver um problema consiste na busca de uma resposta para a questão investigada.

Segundo Sousa (2017, p. 246), “a partir de uma cadeia de proposições empíricas que juntas formam uma problemática associada à situação-problema, os alunos formulam uma



proposição que visa dar início aos estudos”, ou seja, formulam um problema. Essa percepção da realidade está associada a certos parâmetros que têm um caráter de estrutura matemática.

A problematização pressupõe uma seleção de elementos daquela realidade inicial, os dados, passíveis de serem captados pela percepção e intuição do indivíduo, mas que, por tal motivo, supõe uma interpretação. Portanto, a problematização não é um processo puramente lógico. Novamente, ficam evidenciadas as características qualitativas do processo.

Essa percepção-interpretação da realidade, segundo Poincaré (1946), vem acompanhada de certos parâmetros de seleção como homogeneidade, simplicidade, regularidade, dentre outros, que, no fundo, têm um caráter de estrutura matemática (CIFUENTES; NEGRELLI, 2012, p. 799).

Considerando que a busca de novas informações pode emergir durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, pode ser necessário que o aluno revise essa fase de inteiração durante o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Além disso, o problema adquire significado durante o uso da linguagem em um determinado contexto social. Como inferiram Japiassú e Marcondes (2001, p. 157), uma situação-problema se “constitui a partir do estado atual de uma questão ou questões teóricas em um momento histórico determinado e está relacionada a práticas teóricas e científicas de uma época”.

- *Matematização*

A *matematização* é uma ação que permite a transição da linguagem natural (situação-problema) para uma linguagem matemática e segundo Almeida (2018) essa transição é mediada pelo conhecimento matemático e extramatemático.

Durante a *matematização*, ações como simplificar informações, formular suposições e selecionar variáveis orientam os encaminhamentos dos alunos e auxiliam na construção de um modelo matemático. Quando é realizada uma simplificação, formulação de suposições e estruturação da tarefa, “a intuição matemática tem um papel fundamental nesse momento de seleção, o que revela o papel decisivo do sujeito epistêmico no processo de modelagem” (CIFUENTES; NEGRELLI, 2012, p. 800).

Nesse caso, a intuição matemática e o conhecimento extramatemático que os alunos possuem a respeito da situação-problema, orientam o próprio trabalho matemático. Segundo Almeida e Silva (2015, p. 225), “o sucesso ou o insucesso dos alunos na atividade, no que se

refere à obtenção de uma solução adequada, está em grande medida associado ao sucesso ou ao insucesso da matematização que realiza”. A matematização define como ocorre essa relação entre a situação-problema e as regras matemáticas que são utilizadas na resolução da atividade.

Segundo Stillman (2012, p. 793), um aluno “deve possuir recursos suficientes para compreender a situação descrita em conjunto com as estratégias adequadas para gerar as inferências e elaborações necessárias para especificar a situação que está sendo modelada ou matematizada”. Desse modo, o que o aluno já sabe a partir de seu conhecimento acadêmico, suas experiências pessoais e profissionais auxiliam nessa compreensão.

O dicionário Houaiss (2009), define *hipótese* como uma “proposição que se admite, independentemente do fato de ser verdadeira ou falsa, como um princípio a partir do qual se pode deduzir um determinado conjunto de consequências”.

Essa definição de *hipótese* como “modo de determinar se algo satisfaz o conceito X ou evidência que corrobora que algo é X” (GLOCK, 1998, p. 116), é abordada por Wittgenstein em seus escritos no início da década de 1930. Segundo o autor, *hipóteses* são regras para a construção de proposições e para formar expectativas (WITTGENSTEIN, 2005, § 228, p. 236).

Essa relevância das hipóteses em uma atividade de modelagem matemática é referenciada por diversos autores. Bean (2001) aponta a exigência para a construção de um modelo matemático a formulação de hipóteses e de aproximações simplificadoras. Bassanezi (2010) argumenta que essa formulação direciona a investigação. Almeida, Sousa e Tortola (2015, p. 4) sob essa perspectiva, ponderam que “a formulação de hipóteses em atividades de modelagem matemática, ao mesmo tempo em que requer algum conhecimento sobre o fenômeno, também funciona como a linha diretiva para a leitura ou a descrição desse fenômeno”.

Em termos linguísticos, essa compreensão do termo *hipótese* vai além do que um conjunto de regras para a construção de proposições. Segundo Almeida, 2014, p. 109), “no jogo de linguagem da atividade de modelagem, parece que o termo está mais relacionado ao

que se poderia chamar de uma suposição bem fundamentada<sup>6</sup>, uma espécie de guia para a pesquisa”.

Sob esse contexto uma suposição em uma atividade de modelagem matemática se relaciona a noção de critérios abordada por Wittgenstein em sua obra *Investigações Filosóficas*. Wittgenstein apresenta a noção de *critérios*, indicando que, assim como suas *hipóteses*, são regras para a construção de proposições, mas são definidos pela *gramática*.

O que são critérios? São as especificações linguísticas em termos de quais falantes competentes julgam se algo se enquadra em um conceito específico; por conseguinte ligam os seres humanos entre si e os alinham com o mundo. Contudo critérios não simplesmente controlam a maneira de que falamos dos objetos: eles também determinam sua natureza essencial. [...] e já que os critérios determinam o que é algo ser água, um carro, uma cadeira e assim por diante – já que a essência é expressa pela gramática de acordo com Wittgenstein – uma investigação gramatical pode-nos dizer tanto sobre o mundo quanto sobre a linguagem (MULHALL, 1996, p. 5 apud REBELLO, 2006, p. 63).

Neste caso, em suas *Investigações*, Wittgenstein salienta um novo lugar para as “essências” e afirma que “a *essência* se expressa na gramática” (WITTGENSTEIN, 2013, § 371, p. 158). Para Wittgenstein (2013, § 497, p. 186), “se a nossa linguagem não tivesse essa gramática, ela não poderia expressar esses fatos”.

Essa noção de *critérios*, como algo que determina “o significado das palavras” e como “modos de determinar como sabemos alguma coisa” (GLOCK, 1998, p. 118) envolve o que compreendemos do conceito de *suposição* em uma atividade de modelagem matemática.

Em uma atividade de modelagem matemática, uma *suposição* consiste de uma conjectura, o que é suposto para o problema e pode ser compreendida como uma regra que delinea a exploração matemática do problema, sendo definida pela *gramática*.

Segundo Sousa (2017, p. 246), uma suposição em modelagem matemática pode ser considerada como uma proposição empírica que orienta os alunos no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática e que a partir dela “os alunos justificam seus procedimentos por meio de proposições matemáticas”.

É a partir da formulação de suposições “que os alunos sinalizam seu entendimento da situação-problema, as condições de verdade que podem ser assumidas e os conceitos

---

<sup>6</sup> A partir desse momento utilizaremos a palavra suposição para se referir a uma suposição bem fundamentada.

matemáticos que lhes são possíveis em cada atividade de modelagem matemática” (SOUSA, 2017, p. 278). Neste caso, o uso de suposições vai além do que os dados explicitam e determina o encaminhamento de uma atividade de modelagem. Por vezes, pode ser revogável, quando, por exemplo, verifica-se na interpretação de resultados e validação que essas suposições estabelecidas não se relacionam com a situação-problema, havendo a necessidade de revisar o modelo matemático encontrado.

Stillman (2012, p. 800) pontua que a concepção a respeito de suposições evoluiu de acordo com o tempo. Segundo a autora, as suposições são fundamentais “em proporcionar escolhas globais para o modelador e em determinar como a direção de um caminho de uma solução pode mudar”. Desse modo, as suposições auxiliam quando ocorre um ‘impasse matemático’ ou durante a validação do modelo. Por exemplo, quando em uma atividade ocorre um resultado fisicamente impossível, isso pode sugerir que houve uso do modelo físico de forma incorreta, a necessidade de reformular o problema ou a revisão das suposições utilizadas.

A linguagem possibilita essa transição entre o problema e a construção do modelo matemático. Neste caso, pautados à luz da filosofia de Ludwig Wittgenstein, não faz sentido assegurar que os significados dos objetos matemáticos estão fora da realidade, tendo existência autônoma. É durante o uso da linguagem nas atividades de modelagem matemática que os alunos dão significado as atividades, desse modo, devemos considerar a linguagem como uma construção humana, relacionada ao contexto social.

- *Resolução*

Na *resolução da atividade*, os alunos trabalham matematicamente, utilizando diferentes linguagens matemáticas, tendo em vista as regras matemáticas. Neste caso, regras matemáticas são utilizadas durante essa construção de um modelo matemático e constituem um indicador de direção para a atividade.

De maneira particular, nosso interesse está em um tipo de modelo denominado *modelo matemático*. Segundo Bassanezi (2010), um modelo matemático pode ser entendido como um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura exprimir, de alguma forma, o fenômeno em estudo.

Atividades de modelagem matemática frequentemente envolvem uma variedade de relações matemáticas, que podem ser expressas em linguagem falada e símbolos escritos, por meio de equações, tabelas e gráficos. É o uso desses símbolos e relações matemáticas que compõe as condições para a constituição de sentido em uma atividade de modelagem matemática.

Nessa fase, o modelo matemático construído pode permitir a descrição da situação-problema, realização de previsões ou a condução à tomada de decisões, tendo em vista o problema. Segundo Blum (2015), esse modelo matemático pode ser formulado tendo em vista a descrição, explicação e predição de algum fenômeno, denominando de ‘modelos descritivos’ e ‘modelos normativos’.

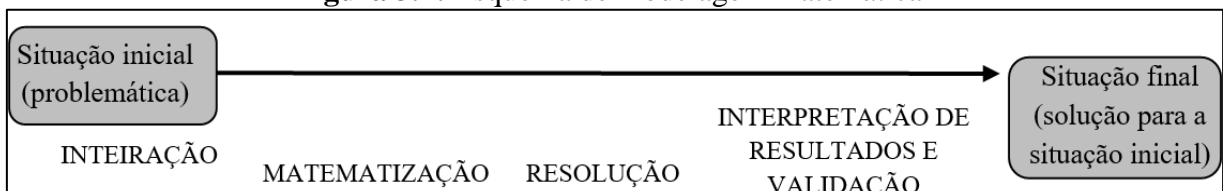
- *Interpretação de Resultados e Validação*

Por meio da *interpretação* da solução matemática, busca-se uma resposta ao problema. A *validação* dos resultados consiste em aceitar ou não o modelo matemático, devido as características da situação-problema, os critérios que foram atribuídos, procedimentos matemáticos e adequação do modelo matemático para a situação.

Segundo Bassanezi (2010), um modelo matemático pode não ser adequado, dentre outras razões, devido a uma simplificação drástica da situação-problema, *suposições* e dados insuficientes, além de variáveis não utilizadas na construção do modelo teórico.

Desse modo, o encaminhamento de uma atividade de modelagem matemática envolve fases referentes ao conjunto de procedimentos necessários para configuração, estruturação e resolução de determinada situação-problema, conforme indica a Figura 3.1.

**Figura 3.1:** Esquema de modelagem matemática



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15).

Quando um aluno se depara com uma situação inicial (problemática), utiliza de diferentes usos da linguagem na busca de uma situação final (uma resposta ao problema).

Nesse contexto, um modelo matemático não deve ser considerado como definitivo, podendo sempre ser melhorado, pois, um modelo matemático pode ter um caráter diferente em contextos diferentes. O resultado final, a busca de dar uma resposta ao problema, depende do aluno que desenvolve a atividade e dos procedimentos utilizados.

Embora as fases da modelagem matemática indiquem procedimentos para a sua realização, muitas vezes, não decorrem de forma linear, sendo necessários movimentos de “ida e vinda”.

Blum (2015) aponta que a introdução de atividades de modelagem matemática em sala de aula deve considerar os seguintes aspectos, tendo em vista resultados empíricos:

- ✓ a necessidade de construção de atividades adequadas de acordo com a turma de alunos, com uma diversidade de contextos e tópicos abordados;
- ✓ a importância do trabalho em grupo, mas com o incentivo de soluções individuais durante a resolução dos problemas;
- ✓ a necessidade de reflexões dos alunos durante as atividades desenvolvidas.

Considerando estes aspectos apontados por Blum (2015) é relevante refletir sobre a elaboração de atividades de modelagem matemática e o encaminhamento dessas atividades em sala de aula.

### *3.3 Princípios para o planejamento e encaminhamento de atividades de modelagem matemática*

Atividades de modelagem matemática foram projetadas para confrontar os alunos com a necessidade de resolução de situações-problema do cotidiano (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012; ÄRLEBÄCK; DOERR, 2015; BASSANEZI, 2010; DOERR; ÄRLEBÄCK; O’NEIL, 2013; WESSELS, 2014).

Diversas pesquisas (LESH et al., 2003; DIESER-DUX et al., 2004; HAMILTON et al., 2008) têm se dedicado ao estudo e planejamento de atividades de modelagem matemática, estabelecendo seis princípios para a sua elaboração:

1. *O princípio da pertinência pessoal:* A situação-problema pode ocorrer em situações do cotidiano? Os alunos serão incentivados a compreender a situação tendo como base suas próprias experiências e conhecimento pessoal?

O princípio da pertinência pessoal exige que os alunos interpretem a situação-problema a partir de sua habilidade matemática, formação acadêmica e experiências pessoais.

2. *O princípio da construção do modelo:* A atividade envolve a necessidade de se construir um modelo (ou modificar, expandir ou refinar)? Envolve a descrição, predição ou prescrição de uma situação-problema?

O princípio da construção do modelo assegura que a atividade envolva a descrição de um fenômeno, previsão do que vai acontecer ou a condução à tomada de decisões ou à ação humana (DAVIS; HERSH, 2005; NISS, 2015; SOUZA; OLIVEIRA; ALMEIDA, 2016).

3. *O princípio da autoavaliação:* Os alunos serão capazes de julgar por si mesmos se suas respostas são válidas? Qual a finalidade dos resultados encontrados?

O princípio da autoavaliação garante que os alunos devem ser capazes de testar e rever o seu modelo matemático e medir a utilidade de suas soluções.

4. *O princípio da documentação do modelo:* As respostas exigem que os alunos expressem suas formas de pensamento sobre a situação-problema e possíveis caminhos de solução? Quais objetos matemáticos, relações, operações envolvem a construção do modelo?

O princípio da documentação do modelo exige que os alunos expressem como estão pensando sobre a situação-problema. Dessa forma, a documentação da atividade parece uma parte natural da resolução do problema, uma espécie de memorando, revelando suas metas, *critérios* e métodos utilizados para responder o problema.

5. *O princípio do modelo simples:* A situação-problema é tão simples quanto possível e assegura a necessidade de criação de um modelo adequado?

O princípio do modelo simples garante que o modelo produzido é viável e adequado matematicamente.

6. *O princípio da generalização do modelo:* O modelo matemático construído aplica-se a problemas específicos ou pode ser modificado e reutilizado em outras situações?

O princípio da generalização do modelo exige que os alunos produzam soluções que sejam comunicáveis de forma clara e compreensível, permitindo ser compartilhadas com outros e que se adaptam facilmente para uma situação problemática semelhante.

Segundo Galbraith (2012), a modelagem matemática em sala de aula, pode ser utilizada, tendo em vista dois gêneros que podem ser acoplados: como conteúdo e como veículo. Segundo o autor, a modelagem que atua como um ‘veículo’ pode introduzir conteúdos curriculares, bem como pode ser utilizada para aperfeiçoar o ensino de conceitos matemáticos. A modelagem que atua como ‘conteúdo’ propõe capacitar os alunos para usar seu conhecimento matemático para resolver problemas e a desenvolver essa capacidade ao longo do tempo.

Esses gêneros podem, por vezes, se complementar, pois, de acordo com Galbraith (2012), contextos da situação inicial podem fornecer subsídios para a introdução de conteúdos matemáticos em sala de aula. Assim, é importante considerar a modelagem matemática como uma alternativa pedagógica para resolver problemas provenientes do ambiente de trabalho, contextos pessoais e da sociedade, por meio da utilização da modelagem como conteúdo.

Considerando as fases de inteiração, matematização, resolução e interpretação dos resultados, já definidas na seção anterior, é importante também levar em consideração a maneira que essas atividades devem ser incorporadas em sala de aula.

O encaminhamento de atividades de modelagem matemática em sala de aula pode ocorrer de diferentes maneiras. Almeida e Dias (2004) sugerem que, para que haja familiaridade com a modelagem matemática, a introdução deste tipo de atividade ocorra de forma gradativa com os alunos, respeitando diferentes momentos.

- ✓ Em um primeiro momento há o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em que a situação inicial (problemática) é apresentada pelo professor. A formulação do problema e sua investigação, na busca de uma resposta ao problema, são realizadas em conjunto com todos os alunos e o professor.
- ✓ Em um segundo momento o professor sugere uma situação inicial (problemática) já reconhecida e cabe aos alunos, assessorados pelo professor, a formulação do problema e sua investigação, na busca de uma resposta ao problema.



- ✓ Em um terceiro momento, os alunos, assessorados pelo professor, escolhem a situação inicial (problemática) e são incentivados a conduzirem uma atividade de modelagem matemática, na busca de uma resposta ao problema.

Neste caso, a partir da familiaridade com a prática de fazer modelagem, os alunos adquirem segurança e autonomia para conduzir uma atividade de modelagem matemática. E, essa familiaridade torna possível a construção de novas técnicas, novos aspectos, com o intuito de ampliar seu domínio, inclusive de situações não previstas inicialmente.

No próximo capítulo apresentamos o contexto em que ocorreu a pesquisa.

## CAPÍTULO 4

### *O contexto da pesquisa*

*“Uma quantidade de sendas bem conhecidas conduz, a partir dessas palavras, a todas as direções”  
(WITTGENSTEIN, 2013, § 534, p. 194).*

Neste capítulo descrevemos o contexto em que a pesquisa foi realizada e explicitamos os encaminhamentos que caracterizam o processo terapêutico que orienta a nossa investigação.

#### *4.1 Curso superior de tecnologia em Manutenção Industrial da Faculdade de Tecnologia Senai Londrina*

O curso superior de tecnologia em Manutenção Industrial da Faculdade de Tecnologia Senai Londrina é um curso com características especiais e que conduz a obtenção de diploma de tecnólogo, abrangendo:

métodos e teorias orientadas a investigações, avaliações e aperfeiçoamentos tecnológicos com foco nas aplicações dos conhecimentos a processos, produtos e serviços. Desenvolve competências profissionais, fundamentadas na ciência, na tecnologia, na cultura e na ética, tendo em vista ao desempenho profissional responsável, consciente, criativo e crítico (BRASIL, 2010, p. 126).

Após a sua conclusão, o aluno pode prosseguir em cursos de especialização, inclusive mestrado e doutorado, desde que atenda aos critérios estabelecidos pelos programas de Pós-Graduação. Um ponto importante a destacar é que um curso superior de tecnologia requer também a indissociabilidade entre teoria e prática, tendo como princípio educativo a centralidade do trabalho (BRASIL, 2004).

A palavra *tecnologia* provém da composição do termo *técnica*, do grego *techné*, e do termo *logia*, do grego *logos*, que exprime a noção de estudo. Etimologicamente, *tecnologia*

significa “o estudo da técnica”. Para Abbagnano (2007), consiste do “estudo dos processos técnicos de determinado ramo da produção industrial ou de vários ramos”.

Segundo esta concepção, Houaiss (2009) compreende por *tecnologia* a “teoria geral e/ou estudo sistemático sobre técnicas, processos, métodos, meios e instrumentos de um ou mais ofícios ou domínios da atividade humana”. Veraszto et al. (2008, p. 78) afirmam que:

o conhecimento tecnológico é o conhecimento de como fazer, saber fazer e improvisar soluções, e não apenas um conhecimento generalizado embasado cientificamente. Para a tecnologia é preciso conhecer aquilo que é necessário para solucionar problemas práticos (saber fazer para quê), e assim, desenvolver artefatos que serão usados, mas sem deixar de lado todo o aspecto sociocultural em que o problema está inserido.

Poderíamos afirmar que a *tecnologia* vai além do estudo das *técnicas*, do domínio operacional de uma determinada técnica de trabalho.

Dessa maneira, um curso superior de tecnologia requer, também, a compreensão global do processo produtivo com a mobilização dos valores necessários à tomada de decisões profissionais e ao monitoramento de suas práticas, e “com a apreensão do saber tecnológico e do conhecimento que dá forma ao saber técnico e ao ato de fazer, com a valorização da cultura do trabalho” (BRASIL, 2002, p. 352).

A educação tecnológica está orientada também para o mundo do trabalho no que ele possui de determinante ao saber, ao fazer, ao como fazer e ao fazer saber, especialmente no que se refere às transformações que estão ocorrendo na organização dos processos de trabalho, na fabricação de produtos e na gestão das relações de produção (BASTOS, 1997, p. 24).

Segundo Bastos (1997), a formação no âmbito tecnológico, não está vinculada à competência para exercer tarefas fixas e previsíveis, mas orientada para o imprevisível e a compreensão da totalidade do processo de produção.

Neste caso, um curso superior de tecnologia vislumbra “formar profissionais capazes de formular e resolver problemas, modelar situações e analisar de forma crítica os resultados obtidos” (FERRUZZI, 2003, p. 7). É esse o contexto que se insere o presente texto.

O curso de Tecnologia em Manutenção Industrial da Faculdade de Tecnologia Senai Londrina, foco deste trabalho, abrange o eixo *Controle e Processos Industriais* disponibilizado no Catálogo Nacional de Cursos Superiores de Tecnologia e “compreende tecnologias associadas à infraestrutura e processos mecânicos, elétricos e eletroeletrônicos, em atividades produtivas” (BRASIL, 2016, p. 19).

Neste caso, fundamenta-se nas tecnologias na área de processos de manutenção industrial, planejando e inspecionando os serviços tecnológicos na área, gerenciando equipes de trabalho, agindo corretivamente, preventivamente e preditivamente, conforme assinala Brasil (2016).

Na Faculdade de Tecnologia Senai Londrina, o curso de tecnologia em Manutenção Industrial possui carga horária de 2400 horas e sua matriz curricular contempla desde disciplinas bases, como disciplinas específicas de Gestão, Automação e Mecânica. O curso pretende que o estudante desenvolva competências ao final do curso, apoiadas em bases científicas, tecnológicas e em atributos humanos, como descritas no Quadro 4.1.

**Quadro 4.1:** Competências requeridas ao final do curso de Tecnologia em Manutenção Industrial

- a) ter clareza do processo produtivo, sua relação, organização, papel da tecnologia e o papel do cidadão trabalhador;
- b) permanecer motivado para estar sempre aprendendo na busca do seu contínuo aperfeiçoamento e na perspectiva de uma visão empreendedora;
- c) entender a empregabilidade como uma condição para competir eticamente na busca de trabalho técnico;
- d) produzir e aplicar os conhecimentos próprios da área, levando em consideração as questões de saúde, segurança do trabalho e preservação do meio ambiente;
- e) conviver em grupos para solucionar problemas e tomar decisões;
- f) atuar na gestão de recursos humanos, ligados aos setores administrativo, financeiro e técnico;
- g) atuar de forma ética, crítica e criativa nos processos de manutenção industrial;
- h) identificar e avaliar as causas de eventuais problemas com vistas à proposição de soluções e/ou alterações no processo industrial;
- i) elaborar relatórios e projetos voltados para o equacionamento de problemas relativos ao uso de materiais no setor produtivo.

Fonte: Senai (2014b, p. 16).

No que consiste nas disciplinas de matemática, o curso contempla de disciplinas denominadas de Cálculo I e Cálculo II, mas que em suas ementas correspondem a disciplinas de Matemática Básica e Cálculo Diferencial e Integral I, respectivamente. A disciplina de Cálculo II, cuja ementa é conceitos e aplicações de limites, derivadas e integrais, é o foco deste trabalho.

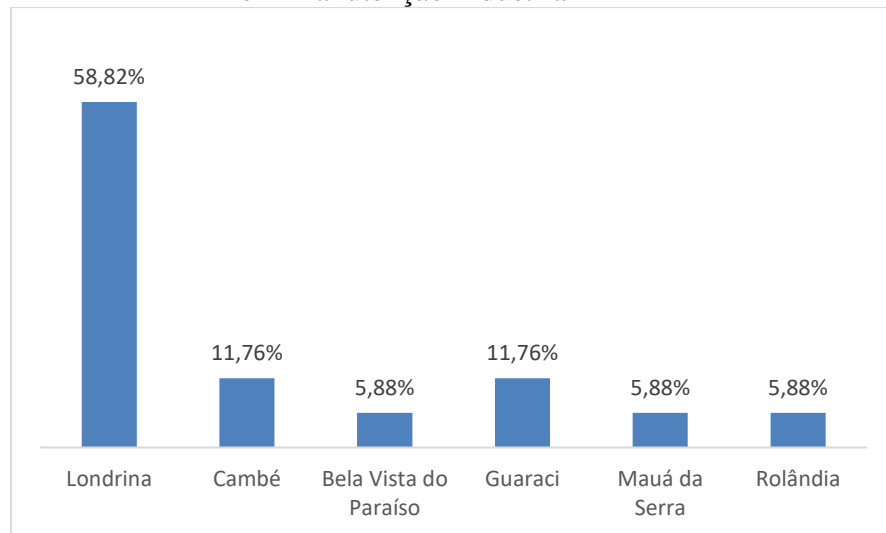
Pretendemos compreender como os alunos utilizam o conteúdo de *funções*, que é o pré-requisito para a disciplina de Cálculo, em diferentes contextos tendo em vista o perfil profissional de conclusão do tecnólogo em Manutenção Industrial descrito no Quadro 4.1.

## 4.2 O perfil dos alunos que participaram da pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida no primeiro semestre do ano de 2017, com dezesseis alunos do segundo período do curso de Tecnologia em Manutenção Industrial da Faculdade de Tecnologia Senai em Londrina durante a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

O questionário de identificação de perfil (Apêndice B) está estruturado de acordo com os seguintes focos: Dados pessoais; Formação acadêmica; Vínculo empregatício; Perspectivas futuras. As respostas ao questionário indicam que 59% dos alunos residem na cidade de Londrina e 41% residem em outras cidades da região (Gráfico 4.1).

**Gráfico 4.1:** Cidades em que residem os alunos do segundo período do curso de Tecnologia em Manutenção Industrial



Fonte: Dos autores.

A pesquisa identificou que 59% dos alunos possuem idade entre 17 a 21 anos, 12% possuem idade entre 22 a 26 anos, 23% possuem entre 27 a 31 anos e 6% possuem 32 ou mais anos.

Uma vertente observada deste perfil é o percentual de alunos (71%) que já cursaram algum curso técnico relacionado à área de Tecnologia em Manutenção Industrial (Eletromecânica, Automação, Eletrônica, Manutenção Automotiva) ou outro curso relacionado a área (Eletrotécnica, Manutenção Mecânica, Instalador Predial, Eletricista Industrial). Destaca-se dentre essa porcentagem, 41,18% dos alunos que realizaram curso técnico em Eletromecânica e 11,76% curso técnico em Automação.

Verifica-se que 76% dos alunos são provenientes de empresas focadas em sua área de atuação e relacionada ao curso de Tecnologia em Manutenção Industrial da Faculdade de Tecnologia Senai Londrina, as quais podemos citar: Adram S/A Indústria e Comércio, Café 3 Corações, Econorte, Kobra Indústria e Tecnologia Ltda., JBS Foods, Pado S/A, Senai, Spoller, Tectrol, Vzan e Wi House Automação.

Destacam-se, como benefícios que o curso de Tecnologia em Manutenção Industrial ofereceu desde a entrada no curso, a melhoria no desempenho profissional e a oferta de novos conhecimentos a respeito da profissão. Com relação à expectativa futura dos alunos pesquisados, percebe-se a preferência em continuar estudando por meio de um curso de pós-graduação (65%) ou outro curso de graduação (29%) e trabalhar exclusivamente na área em que se graduou (53%).

### 4.3 *O processo terapêutico da pesquisa*

#### 4.3.1 A identificação do problema por meio da avaliação diagnóstica

De modo geral, os estudantes têm dificuldades em conceitos que são relevantes para a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral I. Com interesse de observar nesta disciplina o que os alunos seriam capazes de resolver, um conjunto de problemas foi proposto aos alunos. Esses problemas abordaram propriedades e características de diferentes tipos de *funções*.

A avaliação diagnóstica foi estruturada com quatro questões discursivas abordando conceitos da função linear, quadrática e menor inteiro.

Inicialmente, os alunos foram convidados a realizar a avaliação diagnóstica de forma individual. Em seguida, responderam um questionário (Apêndice C) para identificação de dificuldades em sua resolução. A aplicação desse questionário complementou os registros dos alunos e as observações da pesquisadora: se referem aos conteúdos trabalhados, estratégias escolhidas e as impressões das atividades propostas.

Os alunos também tiveram a oportunidade de examinar detalhadamente as suas resoluções junto aos colegas com o intuito de complementá-las ou modificá-las. Por fim, houve a discussão da avaliação diagnóstica em conjunto com a professora. Esse procedimento está descrito na Tabela 4.1.

**Tabela 4.1:** Resolução e discussão da avaliação diagnóstica

Atividade	Data	Tempo de Duração
Resolução individual da avaliação diagnóstica	06/02/2017	70 minutos
Resposta ao questionário após a resolução individual da avaliação diagnóstica	08/02/2017	10 minutos
Discussão em grupos da avaliação diagnóstica	08/02/2017	50 minutos
Discussão da avaliação diagnóstica em conjunto com a professora	13/02/2017 22/02/2017	120 minutos

Fonte: Dos autores.

Essa discussão das questões presentes na avaliação diagnóstica, permitiu tecer as primeiras considerações a respeito dos fatores que indicaram dificuldades no desenvolvimento das atividades e, mais especificamente, no desenvolvimento da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

A partir da análise das resoluções dos alunos e da discussão em sala de aula foi possível realizar um ‘diagnóstico’ com relação ao conhecimento dos alunos sobre o conceito e uso de *funções*. Os resultados dessa análise serão apresentados no capítulo 5.

#### 4.3.2 A intervenção terapêutica mediada por atividades de modelagem matemática

Levando em consideração o levantamento diagnóstico, podemos inferir que o conhecimento dos alunos em relação ao conceito e uso de funções precisa ainda ser incrementado. Com esta finalidade foi proposta uma intervenção terapêutica em que atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas com os alunos.

A introdução das atividades de modelagem matemática seguiu os momentos da modelagem conforme apresentamos na seção 3.3 do capítulo 3. Assim foi proposto aos alunos

uma atividade do primeiro momento e duas no segundo momento. Para as atividades do terceiro momento, foram considerados os trabalhos desenvolvidos por três grupos<sup>7</sup> de alunos.

Tendo em vista o perfil dos alunos, a temática escolhida para a elaboração das atividades está relacionada a disciplina de Eletricidade Básica, mais especificamente, para o estudo de conceitos referentes a Grandezas Elétricas, como, por exemplo, as unidades fundamentais do Sistema Internacional de Unidades (SI) de corrente elétrica, temperatura, intensidade luminosa e tempo, e as unidades derivadas do SI de potência, tensão e resistência, cumprindo o princípio da pertinência pessoal.

Desse modo, os modelos matemáticos desenvolvidos na pesquisa se adaptam facilmente para situações problemáticas semelhantes e podem ser reutilizadas em outras situações, garantindo o princípio da generalização do modelo. As temáticas das atividades desenvolvidas na pesquisa constam na Tabela 4.2.

**Tabela 4.2:** Coleta de dados e atividades de modelagem matemática desenvolvidas

Momento da modelagem matemática	Atividade	Alunos
1°	Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?	Todos
2°	Funcionamento de um circuito elétrico: Um estudo sobre a resistência elétrica e temperatura de um ferro de passar roupas.	Todos
2°	Funcionamento de um circuito elétrico: Um estudo sobre a resistência elétrica e temperatura de uma lâmpada incandescente.	Todos
3°	Análise de frequência e rotação em um motor	A1, A2, A10 e A15
3°	Análise de corrente e fator de potência em um transformador abaixador	A5, A8, A11 e A12
3°	Relação entre carga e fator de potência em um motor elétrico	A6, A7, A9 e A16

Fonte: Dos autores.

<sup>7</sup> As atividades de terceiro momento foram iniciadas no decorrer da disciplina, mas finalizadas no outro semestre durante a Semana Científica da faculdade em que os alunos estão inseridos. Durante a disciplina havia quatro grupos, mas no outro semestre houve reprovação do aluno A3 e desistência do aluno A13. Como havia diferentes perfis de alunos no mesmo grupo, forneceria dois trabalhos distintos nesse grupo: um trabalho composto pelos alunos A3, A4 e A13 e outro pelo aluno A14. O aluno A14 desenvolveu o trabalho com conceitos específicos da área, mas não detalhou os modelos matemáticos por ele determinados. Neste trabalho o registro gráfico não possuía relação com os modelos matemáticos. Quando questionado com relação a planilha de dados e os registros apresentados, A14 não mostrou pré-disposição em sua correção. Dessa forma, optamos em retirar esse trabalho da análise dos dados.



Para a coleta de dados foram realizadas gravações de áudio e vídeo durante o desenvolvimento das atividades.

Os arquivos de áudio e vídeo permitiram captar as atitudes e ações dos alunos durante o desenvolvimento das atividades e ofereceram oportunidade de análise de dados que não se encontram em registros manuscritos, impressos ou arquivos eletrônicos. Esses arquivos captaram ações e falas dos alunos, por meio de utilização de linguagem própria, durante conversas informais, com maior flexibilidade.

Essa diversidade de instrumentos de coleta de dados permitiu a observação, descrição e análise dos usos do conceito de *funções* na Educação Tecnológica, exigindo que os alunos expressassem seus caminhos de resolução dos problemas (princípio da documentação do modelo). Além disso, as informações obtidas buscaram conhecer as diversas situações, relações matemáticas envolvidas e as características desses usos, assegurando os princípios do modelo simples e da construção do modelo.

As atividades propostas também garantiram o princípio da autoavaliação, em que os alunos deveriam ser capazes de julgar os modelos matemáticos e a coerência de suas respostas

Para o desenvolvimento das atividades de terceiro momento, os grupos de alunos escolheram a temática e, em seguida, conduziram as atividades de modelagem matemática. Os dados selecionados para a análise evidenciaram como os alunos desenvolveram as atividades durante as fases de inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação. Os resultados dessa análise serão apresentados no capítulo 6.

## CAPÍTULO 5

### *A identificação do problema por meio da avaliação diagnóstica*

*“Qual é o seu objetivo na filosofia? – Mostrar à mosca a saída  
do apanha-moscas”  
(WITTGENSTEIN, 2013, § 309, p. 141).*

Neste capítulo apresentamos as atividades presentes na avaliação diagnóstica. A análise das resoluções dos alunos subsidiou o planejamento de intervenções para o desenvolvimento da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I e forneceu elementos para a orientação aos alunos.

#### 5.1 *Resolução individual da avaliação diagnóstica*

Para auxiliar na identificação dos alunos, construímos a Tabela 5.1, que indica a composição dos grupos para discussão das atividades desenvolvidas durante esta etapa da pesquisa.

**Tabela 5.1:** Composição dos grupos para discussão das atividades da avaliação diagnóstica

Grupo	Alunos
1	A1, A2, A10 e A15
2	A5, A8, A11 e A12
3	A3, A4, A13 e A14
4	A6, A7, A9 e A16

Fonte: Dos autores.

A avaliação diagnóstica foi estruturada com quatro questões discursivas:

- *A primeira questão informou sobre a lei que torna obrigatório o uso do farol baixo aceso durante o dia nas rodovias. Os alunos foram convidados a construir um gráfico comparativo do custo de utilização de uma lâmpada Osram antes e após a aprovação da lei a partir de informações do enunciado.*

- A segunda questão indicou um gráfico que apresenta o volume de vazamento (litros) de uma torneira pingando um filete de 1 mm em função do tempo transcorrido. Neste caso, os alunos foram convidados a realizar uma previsão do volume de vazamento ( $m^3$ ) após um ano.

- A terceira questão relacionou as variáveis tensão e corrente de uma lâmpada incandescente em uma tabela. Os alunos foram convidados a construir um gráfico que relaciona essas duas variáveis e a tecer reflexões a respeito da lei de Ohm.

- A quarta questão mostrou que o chuveiro no modo 'verão' ou 'inverno' faz diferença na conta de luz. Neste caso, os alunos foram convidados a calcular a economia de gasto mensal de energia elétrica do chuveiro 'Super Ducha Quattro' quando utilizado na posição nominal e na posição econômica durante 1 hora por dia.

Inicialmente, as respostas dadas pelos alunos às questões da avaliação diagnóstica foram classificadas como completas, incompletas, incorretas e branco de modo a possibilitar a análise das dificuldades apresentadas.

A resolução individual da avaliação diagnóstica foi realizada por 88% da turma da disciplina. A Tabela 5.2 indica a porcentagem de procedimentos completos, incompletos e incorretos no desenvolvimento de cada questão.

**Tabela 5.2:** Classificação dos procedimentos utilizados durante a resolução individual da avaliação diagnóstica

Resolução	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4
COMPLETO	0 %	42,86%	14,29%	42,86%
INCOMPLETO	50,00%	21,43%	21,43%	21,43%
INCORRETO	7,14%	28,57%	42,86%	7,14%
BRANCO	42,86%	7,14%	21,43%	28,57%
<b>SOMA</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>	<b>100,00%</b>

Fonte: Dos autores.

Esses procedimentos completos, incompletos e incorretos no desenvolvimento de cada questão estão descritos nas seções a seguir.

### 5.1.1 Questão 1 - Lei do uso de farol baixo


A primeira questão da avaliação diagnóstica, a partir de informações do enunciado, consistiu na elaboração um gráfico comparativo do custo de utilização de uma lâmpada Osram antes e após a aprovação da lei do uso do farol baixo (Figura 5.1).

**Figura 5.1:** Questão 1 da avaliação diagnóstica: Lei do uso de farol baixo<sup>8</sup>

1) A lei nº 13.290 que torna obrigatório o uso de farol baixo aceso durante o dia nas rodovias, sancionada no dia 23 de maio de 2016 pelo presidente da República, Michel Temer, foi um assunto de muitas rodas de conversa.

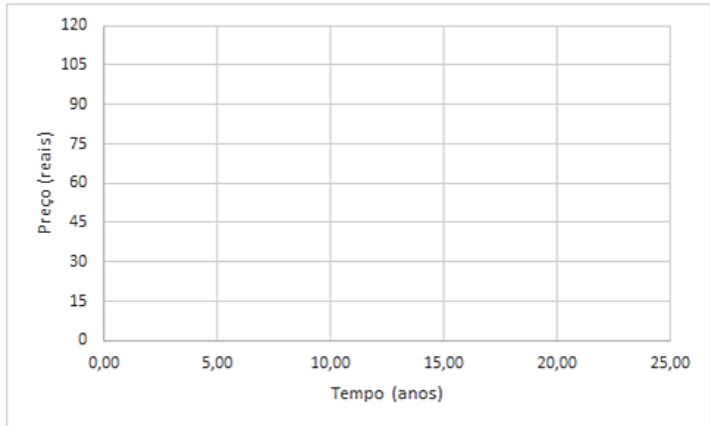
Com o aumento do uso do farol baixo, a durabilidade da lâmpada deve cair e fará que precise ser trocada com maior frequência.

O motorista que for flagrado desrespeitando a lei pode receber multa no valor de R\$ 130,16 e quatro pontos na carteira.



OSRAM ORIGINAL LINE 64150	
Potência nominal	55,00 W
Fluxo luminoso	1550 lm
Vida estimada Tc	650 h
Preço	RS15,00

Segundo Miragaya (2016), “se até aqui o brasileiro trafegava de 150 a 200 horas por ano com os faróis acesos, agora a média subirá a ser de 350 a 400 horas/ano”. Considerando essa informação, construa um gráfico que compare o custo de utilização de uma lâmpada Osram antes e após a aprovação da lei.



Fonte: Dos autores.

Durante a correção desta questão, percebemos que nenhum aluno apresentou procedimentos completos para o seu desenvolvimento. A seguir apresentamos os procedimentos incompletos e incorretos para o seu desenvolvimento.

Procedimentos incompletos no desenvolvimento da questão (*Os alunos interpretaram o contexto da questão e iniciaram a resolução por procedimentos corretos*).

<sup>8</sup> MIRAGAYA, F. Lei do farol baixo faz lâmpada durar metade do tempo e complica troca. Disponível em: <<https://carros.uol.com.br/noticias/redacao/2016/07/12/lei-do-farol-baixo-em-rodovia-faz-lampada-durar-menos-e-complica-troca.htm>>. Acesso em: 23/01/2017.

Aluno 6: Verificou corretamente o tempo de durabilidade da lâmpada antes e após a implantação da lei em relação a seu custo, utilizando-se de regra de três. Concluiu a construção do gráfico comparativo e respondeu que o custo de sua utilização após a implantação da lei será o dobro do que o custo antes da implantação. Contudo, não percebeu que o gráfico se tratava de uma função maior inteiro.

Aluno 7: Verificou corretamente o tempo de durabilidade da lâmpada antes e após a implantação da lei em relação a seu custo, utilizando-se de regra de três. Concluiu a construção do gráfico comparativo e respondeu em porcentagem o aumento do custo de sua utilização após a implantação da lei. Contudo, não percebeu que o gráfico se tratava de uma função maior inteiro.

Aluno 14: Verificou corretamente o tempo de durabilidade da lâmpada antes e após a implantação da lei em relação a seu custo, utilizando-se de uma função para o custo. Concluiu a construção do gráfico comparativo e respondeu quantas vezes foi o aumento do custo de sua utilização após a implantação da lei. Contudo, não percebeu que o gráfico se tratava de uma função maior inteiro.

Nesta categoria, A14 argumenta que sua maior dificuldade foi “*determinar qual a melhor maneira de apresentar o gráfico*”. A6 argumenta: “*Gostei da questão. Simples, porém, complexa. Exige atenção do aluno*”. A7 salienta “*dificuldade em saber o que aplicar para a resolução do problema*” [em questionário após a resolução individual da avaliação diagnóstica].

Aluno 1: Verificou corretamente o tempo de durabilidade da lâmpada antes e após a implantação da lei em relação a seu custo, utilizando-se o algoritmo da divisão. Contudo iniciou a construção do gráfico comparativo, mas não concluiu. Respondeu que o custo de sua utilização após a implantação da lei será o dobro do que o custo antes da implantação.

Aluno 8: Verificou corretamente o tempo de durabilidade da lâmpada antes e após a implantação da lei em relação a seu custo, utilizando-se o algoritmo da divisão. Concluiu a construção do gráfico comparativo, mas não percebeu que o gráfico se tratava de uma função maior inteiro e não teceu considerações matemáticas ou de contexto a respeito da taxa de crescimento do custo de utilização da lâmpada.

Alunos 9 e 13: Verificaram corretamente o tempo de durabilidade da lâmpada antes da implantação da lei em relação a seu custo, utilizando-se regra de três / algoritmo da divisão. Contudo iniciaram a construção do gráfico comparativo, mas não concluíram e não teceram considerações matemáticas ou de contexto a respeito da taxa de crescimento do custo de utilização da lâmpada.

Menciona A1: “*Entendi a questão, procurei maneiras alternativas para resolução, porém faltou processos matemáticos para tornar mais rápido e eficaz*”. A8 argumenta que não conseguiu compreender totalmente essa atividade, o que corrobora com A13 quando diz: “*demorei para compreender o exercício e senti dificuldade para resolver*”. Segundo A9, a atividade é “*bem interessante. Não consegui finalizar pois exige bastante raciocínio*” [em questionário após a resolução individual da avaliação diagnóstica].

Procedimentos incorretos no desenvolvimento da questão (Possivelmente, os erros dos alunos foram devido a não compreensão do conteúdo matemático, contexto da questão ou pela falta de tempo em concluí-la).

Aluno 2: Não verificou o tempo de durabilidade da lâmpada antes e após a implantação da lei em

relação a seu custo. Iniciou a construção do gráfico comparativo de forma equivocada e não teceu considerações matemáticas a respeito da taxa de crescimento do custo de utilização da lâmpada. Apenas respondeu que o custo de sua utilização após a implantação da lei será o dobro do que o custo antes da implantação.

A2 argumenta que “*essa questão deixei por último, assim, faltou pouco tempo para responder e não deu tempo de terminar*” [em questionário após a resolução individual da avaliação diagnóstica].

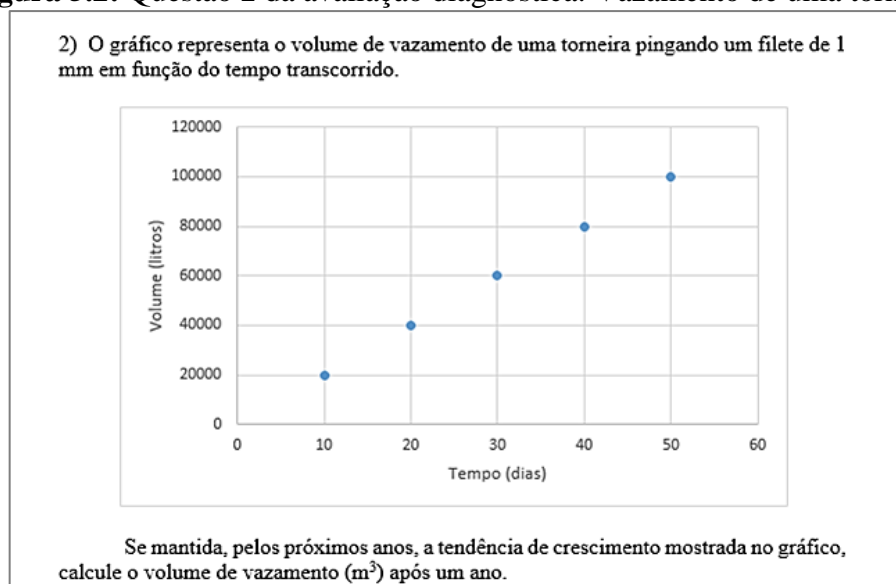
Questão em branco (*Possivelmente, os alunos não iniciaram a questão devido a não compreensão do conteúdo matemático, contexto da questão ou pela falta de tempo em concluí-la*) (Alunos 3, 4, 5, 12, 15 e 16).

A4 argumenta que teve dificuldade de “*compreender o contexto*”. A3 relata que teve dificuldade de “*relembrar a matéria e começar a resolver*”. A5 argumenta que a questão é “*complicada*” [em questionário após a resolução individual da avaliação diagnóstica].

### 5.1.2 Questão 2 - Vazamento de uma torneira

A segunda questão da avaliação diagnóstica, a partir de informações do registro gráfico, consistiu na previsão do volume de vazamento ( $m^3$ ) após um ano de uma torneira pingando um filete de 1 mm (Figura 5.2).

**Figura 5.2:** Questão 2 da avaliação diagnóstica: Vazamento de uma torneira



Fonte: Dos autores.

Durante a sua correção, percebemos que 42,86% apresentaram procedimentos completos para o desenvolvimento da questão. A seguir apresentamos esses procedimentos, bem como os procedimentos incompletos e incorretos para o seu desenvolvimento.

Procedimentos completos no desenvolvimento da questão (*Os alunos compreenderam o contexto da questão e utilizaram corretamente as regras matemáticas*).

Aluno 1: Verificou corretamente o volume de vazamento ( $m^3$ ) de uma torneira pingando um filete de 1 mm após um ano. Utilizou-se de diferentes resoluções (regra de três, divisão e multiplicação) para os cálculos.
---

Alunos 2, 4, 5, 8, 9: Verificaram corretamente o volume de vazamento ( $m^3$ ) de uma torneira pingando um filete de 1 mm após um ano. Utilizaram-se de regra de três / algoritmo de divisão e multiplicação para os cálculos.
--

A2 menciona: “*não tive dificuldade nessa questão, acho que acertei. Fiz a regra de três e foi bem tranquilo*”. Embora tenha resolvido a questão, A8 argumenta que “*demorei para resolver e entender*”. A9 diz que a resolução foi “*bem tranquila, porém exige atenção*” [em questionário após a resolução individual da avaliação diagnóstica].

Procedimentos incompletos no desenvolvimento da questão (*Os alunos interpretaram o contexto da questão e resolveram por procedimentos corretos, mas não concluíram a questão*).

Alunos 3, 12 e 13: Verificaram corretamente o volume de vazamento (litros) de uma torneira pingando um filete de 1 mm após um ano. Utilizaram-se de regra de três / algoritmo de divisão e multiplicação para os cálculos.
--

A3, A12 e A13 mesmo relatando que não tiveram dificuldades na resolução, não interpretaram o enunciado que exigia a conversão de unidades de medida para o volume de vazamento [em questionário após a resolução individual da avaliação diagnóstica].

Procedimentos incorretos no desenvolvimento da questão (*Possivelmente, os erros dos alunos foram devido a não compreensão do conteúdo matemático, contexto da questão ou pela falta de tempo em concluí-la*).

Alunos 6 e 16: Verificaram incorretamente o volume de vazamento ( $m^3$ ) de uma torneira pingando um filete de 1 mm após um ano. Utilizaram-se de regra de três / algoritmo da adição para os cálculos.
--

Aluno 14: Calculou corretamente o volume de vazamento ( $m^3$ ) de uma torneira pingando um filete de 1 mm após 364 dias, utilizando-se de uma função para o custo.
---

Aluno 15: Efetuou de forma incorreta a multiplicação de 20000 por 365 dias e determinou que o volume de vazamento ( $m^3$ ) era o valor esperado.
---

A6 relata que não teve dificuldade em resolver a questão, quando diz: “*Esta questão também exige atenção do aluno, porém é de fácil entendimento*”. Neste caso, o aluno não percebeu que calculou o volume de vazamento após três anos. A14 e A16 mencionam que não tiveram dificuldades para resolver a questão. A14 não percebeu que realizou o cálculo para 364 dias e A16 não percebeu que considerou de forma incorreta que o volume de vazamento em 65 dias é de 13000 litros. A15 relata que embora tenha feito o cálculo, não sabe se transformou o volume de litros em  $m^3$  de maneira correta [em questionário após a resolução individual da avaliação diagnóstica].

Questão em branco (*Possivelmente, os alunos não iniciaram a questão devido a não compreensão do conteúdo matemático, contexto da questão ou pela falta de tempo em concluí-la*) (Aluno 7).

A7 argumenta que “*não lembrava a aplicação de cálculos*” [em questionário após a resolução individual da avaliação diagnóstica].

### 5.1.3 Questão 3 - Relação entre tensão e corrente de uma lâmpada incandescente

A terceira questão da avaliação diagnóstica, a partir de informações do registro tabular, consistiu na construção de um registro gráfico por meio da relação entre tensão e corrente de uma lâmpada incandescente (Figura 5.3).

**Figura 5.3:** Questão 3 da avaliação diagnóstica: Relação entre tensão e corrente de uma lâmpada incandescente

3) Para monitorar as tensões aplicadas a uma lâmpada incandescente e as correntes correspondentes foram utilizados um voltímetro e amperímetro digital. A tensão aplicada a lâmpada foi variada gradualmente entre 0 e 121 V, conforme indica tabela.

Tabela: Dados coletados de tensão e corrente de uma lâmpada incandescente

Tensão (V)	Corrente (A)
30	0,2
50	0,3
70	0,35
90	0,39
110	0,42
121	0,45

Fonte: Relatório dos Alunos

a) Use as informações da tabela para fazer o gráfico dessa função.  
 b) Quais são as variáveis envolvidas?  
 c) Como se comporta o fenômeno representado?  
 d) De acordo com a lei de Ohm, a relação entre tensão e corrente elétrica são diretamente proporcionais. Na situação-problema apresentada, essa relação é descrita pela lei de Ohm? Justifique.

Fonte: Dos autores.



Essa questão requeria também interpretações do problema por meio de considerações a respeito da lei de Ohm. Durante a correção percebemos que 14,29% apresentaram procedimentos completos para o seu desenvolvimento. A seguir apresentamos esses procedimentos, bem como os procedimentos incompletos e incorretos para o seu desenvolvimento.

Procedimentos completos no desenvolvimento da questão (*Os alunos compreenderam o contexto da questão e utilizaram corretamente as regras matemáticas*).

Alunos 9 e 12: Construíram corretamente o gráfico de dispersão de tensão e corrente de uma lâmpada incandescente e identificaram as variáveis. Informaram que a função que descreve a relação entre tensão e corrente é crescente, verificaram que para cada valor de tensão e corrente há uma resistência, tecendo considerações de que a situação não é descrita pela lei de Ohm.

A9 salienta: “*tive certa dificuldade em entender a questão D, mas consegui resolver*” [em questionário após a resolução individual da avaliação diagnóstica].

Procedimentos incompletos no desenvolvimento da questão (*Os alunos interpretaram o contexto da questão e resolveram por procedimentos corretos, mas não concluíram a questão*).

Alunos 2 e 3: Construíram corretamente o gráfico de dispersão de tensão e corrente de uma lâmpada incandescente e identificaram as variáveis. Informaram que a função que descreve a relação entre tensão e corrente é crescente, mas não teceram considerações a respeito da lei de Ohm.

Aluno 8: Construiu corretamente o gráfico de dispersão de tensão e corrente de uma lâmpada incandescente e identificou as variáveis. Informou que a função que descreve a relação entre tensão e corrente é crescente e verificou que para cada valor de tensão e corrente há uma resistência, mas não tecu considerações a respeito da lei de Ohm.

A2 menciona que perdeu “*um tempo para lembrar do assunto e seguir o raciocínio*” [em questionário após a resolução individual da avaliação diagnóstica].

Procedimentos incorretos no desenvolvimento da questão (*Possivelmente, os erros dos alunos foram devido a não compreensão do conteúdo matemático, contexto da questão ou pela falta de tempo em concluí-la*).

Alunos 1, 5 e 14: Construíram corretamente o gráfico de dispersão de tensão e corrente de uma lâmpada incandescente e identificaram as variáveis. Informaram que a função que descreve a relação entre tensão e corrente é crescente, mas não compreenderam que a situação não é descrita pela lei de Ohm.

Alunos 6 e 13: Construíram corretamente o gráfico de dispersão de tensão e corrente de uma lâmpada incandescente e identificaram as variáveis. Informaram que a função que descreve a relação entre tensão e corrente é crescente, verificaram que para cada valor de tensão e corrente há uma resistência,

mas não compreenderam que a situação não é descrita pela lei de Ohm.

Aluno 16: Construiu corretamente o gráfico de dispersão de tensão e corrente de uma lâmpada incandescente e identificou as variáveis. Informou que a função que descreve a relação entre tensão e corrente é decrescente, verificou que para cada valor de tensão e corrente há uma resistência, mas não compreendeu que a situação não é descrita pela lei de Ohm.

A1 diz que “a maior dificuldade foi compreender o que o exercício pedia, ou seja, foi realmente entender o contexto da questão”. A14 argumenta que “não lembrei de levar em consideração a temperatura do filamento”, o que demonstra sua compreensão posterior do contexto [em questionário após a resolução individual da avaliação diagnóstica].

Questão em branco (Possivelmente, os alunos não iniciaram a questão devido a não compreensão do conteúdo matemático, contexto da questão ou pela falta de tempo em concluí-la) (Alunos 4, 7 e 15).

A4, A7 e A15 relatam falta de tempo em resolver a questão [em questionário após a resolução individual da avaliação diagnóstica].

#### 5.1.4 Questão 4 - Chuveiro no modo ‘verão’ ou ‘inverno’

A quarta questão da avaliação diagnóstica consistiu no cálculo do custo mensal de um chuveiro na posição nominal e econômica quando usado por 1 hora por dia (Figura 5.4).

**Figura 5.4:** Questão 4 da avaliação diagnóstica: Chuveiro no modo ‘verão’ ou ‘inverno’

4) O chuveiro elétrico é um dos equipamentos domésticos de maior potência e é um dos que mais consome energia dentro das casas. Você sabia que o chuveiro no modo ‘verão’ ou ‘inverno’ faz diferença na conta de luz? As posições ‘inverno’ e ‘verão’ regulam a passagem da corrente elétrica, necessária para aquecer a água.

A energia consumida de eletrodomésticos é calculada tendo por base a potência  $P$  de cada aparelho e a quantidade de uso mensal em horas, ou seja,

$$E = P \cdot \Delta t$$


onde  $E$  é a energia consumida (em  $kWh$ ),  $P$  é a potência (em  $kW$ ) e  $\Delta t$  é a quantidade de uso mensal (em horas  $h$ ).

O custo mensal de uso de cada aparelho é o resultado da multiplicação do consumo mensal do eletrodoméstico pela tarifa residencial de energia. Assim,

$$C = \alpha \cdot E$$

onde  $C$  é o custo mensal (em R\$) e  $\alpha$  é a tarifa. Considere para o cálculo, a tarifa residencial convencional B1 de R\$ 0,64543 de 01/2017.

Marca: Fame  
Modelo: Super Ducha Quattro  
Tensão: 127V



Potência Nominal: 5.400W  
Potência Intermediária: 3.400W  
Potência Econômica: 2.200W

Calcule a economia mensal de gasto de energia elétrica do chuveiro *Super Ducha Quattro* quando utilizado na posição nominal e na posição econômica durante 1 hora por dia.

Fonte: Dos autores.

Durante a sua correção, percebemos que 42,86% apresentaram procedimentos completos para o desenvolvimento da questão. A seguir apresentamos esses procedimentos, bem como os procedimentos incompletos e incorretos para o seu desenvolvimento.

Procedimentos completos no desenvolvimento da questão (*Os alunos compreenderam o contexto da questão e utilizaram corretamente as regras matemáticas*).

Aluno 1: Calculou a energia consumida na potência nominal e econômica quando utilizado por um mês e calculou a diferença destes valores. Em seguida, calculou o custo mensal dessa diferença.
---

Alunos 2, 8, 9, 12 e 14: Calcularam o custo mensal do chuveiro quando utilizado na potência nominal e na potência econômica quando utilizado por um mês e, em seguida, calcularam a diferença destes valores.
---

Para A1: “a questão foi bem elaborada, com base em conhecimentos de outras disciplinas do curso”. A9 relata que a questão “é bastante complexa, porém com um pouco de atenção deu tudo certo”. Já A12 e A14 relatam que conseguiram resolver a questão com tranquilidade, sem apresentar dificuldade [em questionário após a resolução individual da avaliação diagnóstica].

Procedimentos incompletos no desenvolvimento da questão (*Os alunos interpretaram o contexto da questão e resolveram por procedimentos corretos, mas não concluíram a questão*).

Aluno 4: Calculou o custo mensal do chuveiro quando utilizado na potência nominal e econômica em uma hora por dia e multiplicou o resultado por 30 dias. Contudo, não calculou qual a economia mensal do gasto de energia elétrica.
---

Alunos 13 e 16: Calcularam o custo mensal do chuveiro quando utilizado na potência nominal e na potência econômica quando utilizado por um mês. Contudo, não calcularam a diferença destes valores.
---

A4, 13 e 16 relatam que não tiveram dificuldade em resolver a questão [em questionário após a resolução individual da avaliação diagnóstica], mas não calcularam a economia mensal do gasto de energia, ou seja, não responderam o problema.

Procedimentos incorretos no desenvolvimento da questão (*Possivelmente, os erros dos alunos foram devido a não compreensão do conteúdo matemático, contexto da questão ou pela falta de tempo em concluí-la*).

Aluno 5: Para calcular a energia consumida na potência nominal e econômica quando utilizado por um mês, transformou o tempo de uma hora em 60 minutos. Não utilizou de forma adequada a fórmula de custo mensal.
--

A5 menciona que “foi difícil lembrar as fórmulas para resolver o exercício” [em questionário após a resolução individual da avaliação diagnóstica].

Questão em branco (Possivelmente, os alunos não iniciaram a questão devido a não compreensão do conteúdo matemático, contexto da questão ou pela falta de tempo em concluí-la) (Alunos 3, 6, 7 e 15).

A3 relata que demorou para “relembrar o modo de resolver o exercício” e A7 que “não lembrava da aplicação dos cálculos”. A6 e A15 argumentam que não resolveram a questão por falta de tempo [em questionário após a resolução individual da avaliação diagnóstica].

## 5.2 Discussão em grupos e com a professora das questões presentes na avaliação diagnóstica

Após a resolução individual da avaliação diagnóstica, os alunos foram convidados a discutir em grupos as questões presentes nessa avaliação. Para essa discussão participaram 81% da turma da disciplina. Foram formados 4 grupos e a composição de cada grupo está descrita na Tabela 5.3.

**Tabela 5.3:** Composição dos grupos para discussão da avaliação diagnóstica

Grupo	Alunos
1	A1, A2 e A15
2	A5, A8, A11 e A12
3	A3, A4 e A14
4	A6, A9 e A16

Fonte: Dos autores.

Cabe salientar que A11 não esteve presente durante a resolução individual da avaliação, mas participou da discussão com o grupo 2. A discussão da resolução de cada questão foi registrada em áudio por cada grupo.

### 5.2.1 Questão 1 - Lei do uso de farol baixo

Discussão do grupo 1 [em áudio após a resolução individual da avaliação diagnóstica]

A2: Você fez o cálculo da questão 1?

A1: Então cara, a questão 1 eu não consegui entender... [...]

A1: Eu fiz assim, na verdade eu tentei explicar o que entendi: Uma lâmpada, custa R\$ 15,00 e dura 650 horas. Então, antes da lei, o veículo andava 200 horas por ano, o que quer dizer que uma lâmpada dura em média 3,25 anos [Figura 5.5].

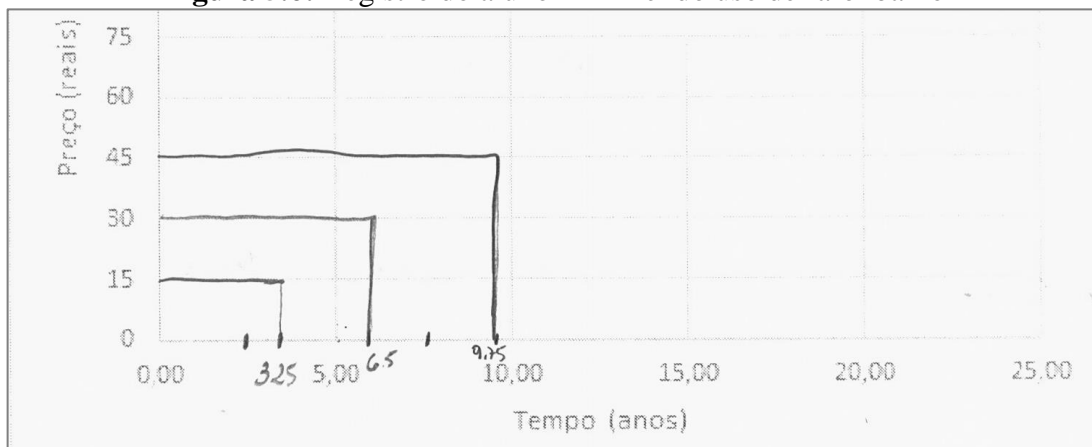
**Figura 5.5:** Registro do aluno A1 - Lei do uso de farol baixo

durabilidade antes implantes a lei  
se 01 lâmpada dura 650 h/ano e  
Brasilis andava em média 200 h/ano :  
 $650 \div 200 = 3,25 \text{ anos}$

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

A1: Então eu inseri no gráfico. Neste caso, uma lâmpada custa R\$ 15,00 e dura 3,25 anos. Com a mesma proporção eu fui inserindo para os outros dados: duas lâmpadas, duram 6,5 anos; três lâmpadas duram 9,75 anos [Figura 5.6].

**Figura 5.6:** Registro do aluno A1 - Lei do uso de farol baixo



Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

A1: Mas na verdade, o gráfico é uma reta. Particularmente essa questão eu não entendi direito... [...]

A2: Essa questão eu não consegui entender...

A1: Como eu fiquei com bastante dúvida, acabei fazendo as outras questões. [...]

A1: Esse é um assunto legal, porque envolve muita coisa: a lei do farol aceso aumenta o custo de manutenção do carro, etc. [...]

Discussão do grupo 2 [em áudio após a resolução individual da avaliação diagnóstica]

A12: Agora a primeira questão eu não lembrava. E também faltou tempo para resolver.

A8: O jeito que eu fiz, mas também não sei se deu certo. [...]

A11: Bom, 200 horas por ano, em 5 anos, corresponde a 1000 horas. Dividi esse valor por 650 horas, que é a vida estimada e multipliquei pelo preço. O valor encontrado é o custo em 5 anos (R\$ 23,00). Como dez anos é o dobro, então eu fui multiplicando [Figura 5.7].

**Figura 5.7:** Registro do aluno A11 - Lei do uso de farol baixo

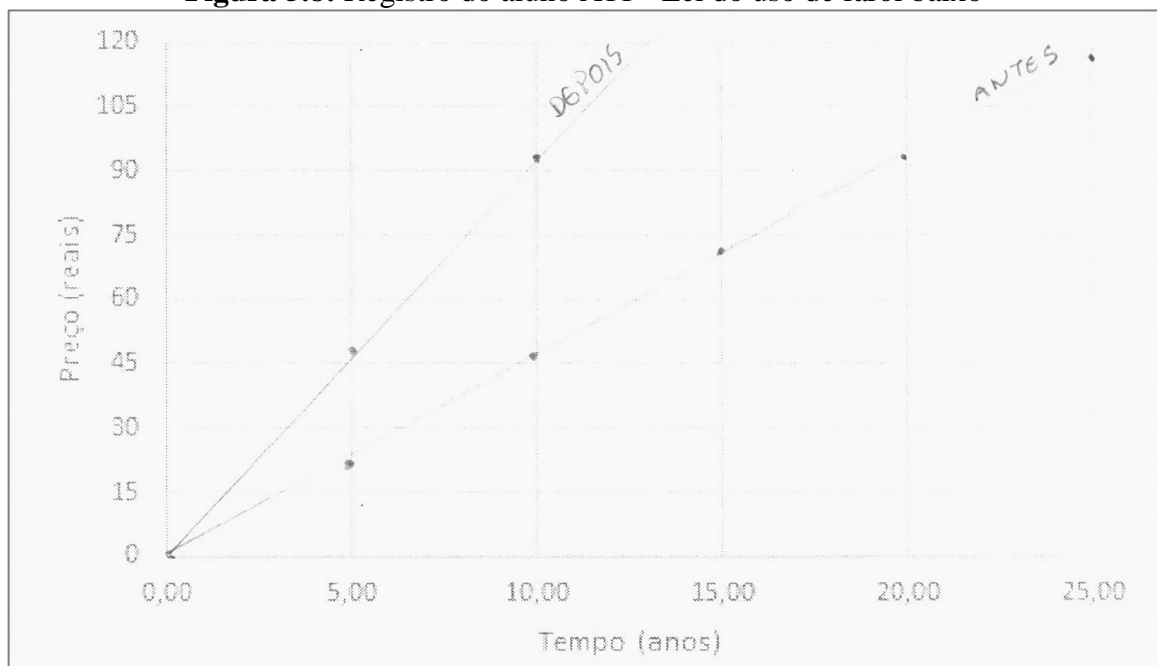
Handwritten calculations showing the cost of low beam use over time:

$$\begin{aligned} \text{custo antes} \\ 5 \text{ anos} &= \frac{1000 \cdot 15}{650} \\ &= \text{R\$ } 23,00 \\ 10 \text{ anos} &= \frac{2000 \cdot 15}{650} = 46,15 \\ 15 \text{ anos} &= 69,23 \end{aligned}$$

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

A11: Temos 200 horas por ano. Então, em 5 anos é um tanto, em 10 anos será o dobro e em 15 anos será o triplo. [...] Normalmente para fazer os cálculos nós usamos os valores que estão no eixo x [Figura 5.8].

**Figura 5.8:** Registro do aluno A11 - Lei do uso de farol baixo



Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

A8: Então depois da lei, você utilizou a quantidade de anos, por exemplo, 400 horas por ano e multiplicou por 5 para saber quantas horas seriam utilizadas por 5 anos. Depois, como a vida estimada é de 650 horas, você dividiu o resultado anterior por 650 horas para saber quantas lâmpadas seriam usadas em 5 anos.

A11: Depois o resultado multiplica pelo custo de cada lâmpada. [...]

A8: Entendi. [...] Entendeu A5?

A5: Mais ou menos.

A8: Bom, por ano gastava 400 horas. Como queremos saber o custo em 5 anos, multiplica-se 5 por 400 e obtemos 2000 horas em 5 anos. Sabemos que a vida estimada de cada lâmpada é de 650 horas e queremos determinar quantas lâmpadas usaria em 5 anos, por meio da divisão 2000 por 650, o que resulta em 3,07 lâmpadas. [...] Esse resultado multiplica-se pelo preço.

A5: Esse 46,15 é o custo em reais?

A11: Sim. Mas não tem como gastar isso, porque não tem como comprar 3,07 lâmpadas.

A8: Sim. Mas é estimado né?

A5: Agora precisa fazer para 10, 15, 20 e 25 anos? [...]

A8: Depois você só foi dobrando os valores (para 10 anos)?

### Discussão do grupo 3 [em áudio após a resolução individual da avaliação diagnóstica]

P: O que você pensou para construir essa fórmula?

A14: Eu usei o tempo que ela ficava ligada durante um ano, para fazer um cálculo do custo de utilização. Então, aqui o tempo de duração de uma lâmpada, é a vida estimada, de 650 horas. Certo?

A4: Certo.

A14: O raciocínio que eu utilizei foi: [...] Em cinco anos, ela sendo utilizada 150 horas por ano, o gasto seria de: O valor de 150 multiplicado pela quantidade de anos dividido pela vida estimada. O resultado você multiplica pelo preço de cada lâmpada. Você teria o valor gasto naquele período [Figura 5.9].

**Figura 5.9:** Registro do aluno A14 - Lei do uso de farol baixo

Handwritten work showing two formulas for calculating the cost of a lamp over time:

Left side (150 h):

$$f(x) = \left( \frac{150 \cdot x}{650} \right) \cdot 15$$

$$f(5) = \left( \frac{150 \cdot 5}{650} \right) \cdot 15 = 17,31$$

Right side (350 h):

$$f(x) = \left( \frac{350 \cdot x}{650} \right) \cdot 15$$

$$f(5) = \left( \frac{350 \cdot 5}{650} \right) \cdot 15 = 40,38$$

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

A3: Isso que eu não sei fazer, construir uma fórmula.

A14: Antes da lei, em cinco anos, gastaria R\$ 17,31. Na nova lei, em cinco anos, gastaria R\$ 40,38.

A3: Eu ia fazer de outro jeito, na verdade. [...]

A4: E se fizesse assim: Multiplicar esse valor de 650 horas, que é a vida útil da lâmpada, por cinco vezes?

A14: Multiplicar por cinco?

A4: Por que não é uma vez por ano que realiza a troca?

A14: Não. Acabou a vida útil da lâmpada, você vai precisar trocar, porque vai queimar. O período da troca, no caso dessa questão, está estimado: de 150 a 200 horas por ano. Então em um ano, ela não atinge sua vida útil. Você não vai trocar todo ano, você vai trocar quando queimar.

A4: Aham.

A14: Aqui na primeira função, em cinco anos, o valor gasto inclui uma lâmpada completa, mais quinze por cento de uma segunda lâmpada.

A3: Qual foi o custo em um ano?

A14: R\$ 17,31.

A3: Em um ano?

A14: Não. Eu fiz o cálculo de 5, 10 e 15 anos.

A3: Mas, qual será o custo de um ano?

A14: Um ano? R\$ 3,46. [...]

A14: O mais difícil aqui é como construir o gráfico. Precisa determinar os pontos, mas podem ser estimados. Por exemplo, em cinco anos eu gastei R\$ 17,31.

A4: Deu 31 centavos? O meu resultado deu errado!

A14: Será que não é do modo que você está arredondando o número?

A4: [Digitando na calculadora] O meu resultado não arredondou.

A14: O resultado ficou R\$ 17,307. O último algarismo é 7, você arredonda para R\$ 17,31.

A4: Ah, é mesmo! E esse outro ponto? [Apontando para o custo de cinco anos correspondente a nova lei]

A14: Esse resultado foi calculado tendo como base o valor de 350 horas. No mesmo período, o gasto foi bem maior.

A4: E para 10 anos? [...]

A14: É preciso calcular  $f(x)$  com  $x=5$ ,  $x=10$  e  $x=15$ .

#### Discussão do grupo 4 [em áudio após a resolução individual da avaliação diagnóstica]

A9: Eu não fiz a primeira! Na verdade, eu comecei a primeira, mas não consegui concluir devido ao tempo.

A16: Também não consegui fazer a primeira questão!

A9: Eu comecei usando a regra de três.

A6: Eu usei regra de três também.

A9: É regra de três. Só que precisa realizar o cálculo por várias vezes.

A6: Eu só encontrei um resultado, pois como é de 5 em 5 anos, é só multiplicar o valor. Por exemplo, em 5 anos, o custo é de R\$ 22,50, então em 10 anos é o dobro desse resultado. Entendeu? Eu só encontrei um resultado e multipliquei.

A9: Eu tinha feito o cálculo para um ano, na verdade. Encontrei esse resultado e marquei o ponto para um ano no gráfico.

A6: Entendi. Eu fiz assim: Um ano equivale a 200 horas então cinco anos equivale a  $x$ . Então eu encontrei 1000 horas. Como a vida estimada da lâmpada é de 650 horas, eu dividi 1000 horas por 650 e encontrei 1,5 lâmpadas. Desta maneira, 1,5 multiplicado pelo valor da lâmpada, equivale a R\$ 22,50. Entendeu? [Figura 5.10].

A6: [...] Neste caso precisaria construir o gráfico [Figura 5.11].

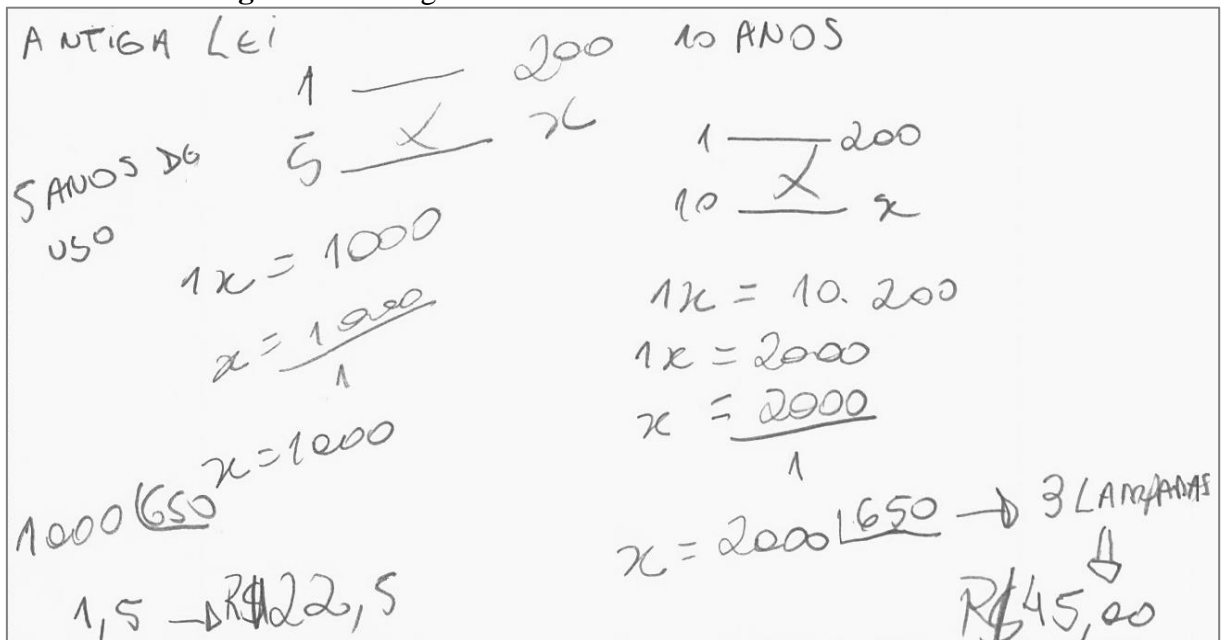
[Após A9 fazer os cálculos para 200 horas]

A6: Você viu que era o dobro? Antes da lei era 200 horas e agora 400 horas. Como é o dobro, é só multiplicar por 2.

A9: Entendi. Não precisava fazer os cálculos.

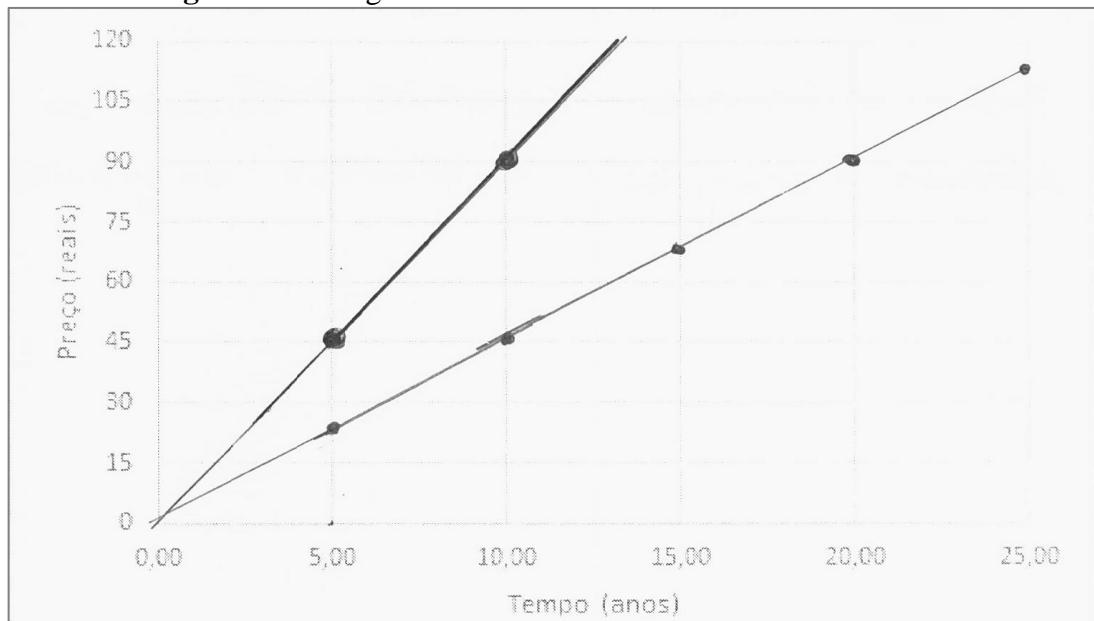


**Figura 5.10:** Registro do aluno A6 - Lei do uso de farol baixo



Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

**Figura 5.11:** Registro do aluno A6 - Lei do uso de farol baixo



Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

### Discussão da atividade com a professora (Lei do uso de farol baixo)

A resolução desta questão nos permite inferir que os alunos apresentaram dificuldades com o conteúdo matemático “função menor inteiro”<sup>9</sup>. Verifica-se essa dificuldade durante sua correção, em que 50% dos alunos que realizaram a avaliação, apresentaram solução

<sup>9</sup> Cabe destacar que essa discussão do conteúdo matemático “função menor inteiro” será realizada durante a primeira atividade de modelagem matemática descrita no Capítulo 6.

incompleta (Tabela 5.2). Ao estabelecerem o critério de que a relação entre custo e tempo é proporcional ou apresentada por uma função linear, os grupos teceram considerações de que “1,5 lâmpadas corresponde um custo de R\$22,50” e “3,07 lâmpadas corresponde um custo de R\$ 46,15”. Porém, com a resolução dos alunos, ficou aparente que intuitivamente os mesmos de alguma maneira entendem a estrutura da função, quando A11 (grupo 2) diz, “Mas não tem como gastar isso, porque não tem como comprar 3,07 lâmpadas”.

Vale a pena destacar outros critérios adotados pelos grupos durante as discussões: os grupos 1, 2 e 4 utilizaram que o brasileiro trafegava 200 horas por ano com os faróis acesos antes da aprovação da lei e trafega 400 horas por ano na nova lei; o grupo 3 utilizou que o brasileiro trafegava 150 horas por ano com os faróis acesos antes da aprovação da lei e trafega 350 horas por ano na nova lei.

Os registros escritos dos alunos nos mostram que há diferentes maneiras de verificar que a relação entre custo e tempo é proporcional ou apresentada por uma função linear, quando utilizam para responder ao problema proposto de operações de multiplicação e divisão (grupos 1 e 2), regra de três (grupo 4) ou uma função para o custo (grupo 3).

O aluno A6 (grupo 4), quando estava em discussão a respeito de sua resolução com a turma, mostrou a utilização de regra de três para determinar o custo em cinco anos, conforme indica a Figura 5.12.

**Figura 5.12:** Explicação do grupo 4 - Custo antes da aprovação da lei [discussão em lousa da avaliação diagnóstica]

Handwritten mathematical work on a chalkboard:

VIDA ESTIMADA 650 h

CUSTO R\$ 15,00

ANTIGA LEI (CERRA DE)

↑ ANO	200h	1000	650
5 ANOS	x	x	1,5

1 x = 1000

x = 1000

x = 1000h

1000 | 650

15 1,5

x 1,5

R\$ 22,50

Fonte: Dos autores.

Cabe salientar que, em sua resolução, utilizou de simplificações do número utilizado, por exemplo, quando realiza a divisão de “1000 horas por 650 e encontra 1,5 lâmpadas”, o que interfere na resposta ao problema.

Em conjunto com a professora, foi possível determinar uma tabela relacionando o tempo (anos) e o custo de utilização da lâmpada Osram antes e após a aprovação da lei (Tabela 5.4), e um modelo que relaciona o custo e o tempo antes e após a lei.

**Tabela 5.4:** Modelos obtidos - Custo antes e após a aprovação da lei

tempo (anos)	custo (reais) Antes da lei	custo (reais) Após a lei
5	R\$ 22,50	R\$ 45,00
10	R\$ 45,00	R\$ 90,00
15	R\$ 67,50	R\$ 135,00
20	R\$ 90,00	R\$ 180,00
$t$	$C(t) = 4,5 \cdot t$	$C(t) = 9 \cdot t$

Fonte: Dos autores.

Como em 5 anos, o custo de utilização é de R\$ 22,50; em 10 anos, o custo será de R\$ 22,50 multiplicado por 2; em 15 anos, o custo será de R\$ 22,50 multiplicado por 3, e assim sucessivamente.

*P: Como será possível construir uma função que relaciona custo e tempo antes da aprovação da lei? [...]*

*P: R\$ 22,50 multiplicado pelo valor do ...*

*A9: tempo*

*P: Contudo esse valor corresponde ao tempo múltiplo de 5 anos. [...]*

*P: Como podemos determinar o valor do tempo múltiplo de 1 ano?*

*A6: Ao tempo equivalente a 1 ano?*

*A9: Divide o valor por 5!*

*A9: R\$ 4,50.*

*P: Então o custo será R\$ 4,50 multiplicado pelo valor do tempo, ou seja,  $C(t) = 4,5 \cdot t$ .*

*P: Vamos verificar se está correto: 4,5 multiplicado por 5 resulta em R\$ 22,50? 4,5 multiplicado por 10 resulta em R\$ 45,00? E assim sucessivamente. Ou seja, encontramos uma função que descreve antes da aprovação da lei.*

*P: Vamos tentar determinar uma função que relaciona custo e tempo após a aprovação da nova lei?*

*P: Lembrando que na tabela temos o custo correspondente a 5 anos e queremos determinar o custo equivalente a 1 ano. O que devemos fazer?*

*A9: Dividimos o valor de R\$ 45,00 por 5, o que resulta em R\$ 9,00.*

*P: Assim, o custo será R\$ 9,00 multiplicado pelo valor do tempo, ou seja,  $C(t) = 9 \cdot t$ .*

[em vídeo após a discussão em grupos da avaliação diagnóstica]

Neste caso, quando o grupo 4 estabeleceu o critério de que a relação entre custo e tempo é proporcional, os dados deveriam se ajustar aos valores do tempo em anos múltiplos

de 3,25 (antes da lei) e múltiplos de 1,625 (após a aprovação da lei), pois equivalem ao tempo de aquisição de uma nova lâmpada. Tendo em vista os modelos,  $C(t) = 4,5 \cdot t$  para antes da lei e  $C(t) = 9 \cdot t$  após a lei, verificamos que há erros de aproximação no custo calculado devido a simplificações utilizadas na resolução da atividade (Tabela 5.5).

**Tabela 5.5:** Validação dos modelos obtidos - Custo antes e após a aprovação da lei

tempo 1 (anos) Antes da lei	tempo 2 (anos) Após a lei	custo (reais) observado	custo calculado Antes e após a lei
3,25	1,625	R\$ 15,00	R\$ 14,63
6,50	3,25	R\$ 30,00	R\$ 29,25
9,75	4,875	R\$ 45,00	R\$ 43,88
13,00	6,50	R\$ 60,00	R\$ 58,50
16,25	8,125	R\$ 75,00	R\$ 73,13
19,50	9,75	R\$ 90,00	R\$ 87,75
22,75	11,375	R\$ 105,00	R\$ 102,38

Fonte: Dos autores.

Utilizando-se de quatro casas decimais podemos definir um novo modelo matemático para os valores do tempo em anos múltiplos de 3,25 (antes da lei) e múltiplos de 1,625 (após a aprovação da lei), como sugere a Figura 5.13.

**Figura 5.13:** Revisão dos modelos obtidos - Custo antes e após a aprovação da lei [discussão em lousa da avaliação diagnóstica]

<p><u>Antiga Lei</u></p> <p>1000   650</p> <p>1,5385 lâmpadas</p> <p><math>1,5385 \cdot 15 = 23,0775</math> reais</p> <p><math>23,0775 \div 5 = 4,6155</math> reais por lâmpada</p> <p><math>C(t) = 4,6155t</math></p>	<p><u>nova Lei</u></p> <p>2000   650</p> <p>3,0769 lâmpadas</p> <p><math>3,0769 \cdot 15 = 46,1535</math> reais</p> <p><math>46,1535 \div 5 = 9,231</math> reais por lâmpada</p> <p><math>C(t) = 9,231t</math></p>
--	--

Fonte: Dos autores.

Cabe salientar que em discussão nesta seção priorizamos uma das discussões em quadro negro, no caso do grupo 4. Contudo, há também outras maneiras de determinar os mesmos modelos, por exemplo, ao determinar a taxa de crescimento efetuando a divisão do custo pelo tempo correspondente. Durante a discussão da questão também foi levantado outro

critério (grupo 3) de que o brasileiro trafegava 150 horas por ano com os faróis acesos antes da lei e trafega 350 horas por ano após a aprovação da lei (Figura 5.9), utilizando-se para representar a situação-problema os modelos:

$$C_{antes}(t) = \left(\frac{150 \cdot t}{650}\right) \cdot 15 \quad \text{e} \quad C_{após}(t) = \left(\frac{350 \cdot t}{650}\right) \cdot 15 \quad (1)$$

Assim, os modelos matemáticos (1) apresentam semelhanças com os modelos matemáticos indicados na Figura 5.13, embora sejam definidos por meio de critérios diferentes. Neste caso, tais modelos matemáticos permitem encontrar os custos das lâmpadas somente quando há necessidade de trocas.

Vale a pena destacar que a questão em estudo não tinha como intenção determinar um modelo matemático que se ajusta aos dados. Contudo, em conjunto com a professora, foi possível discutir alguns aspectos de uma atividade de modelagem matemática.

Na discussão do grupo 1, A1 menciona que antes da aprovação da lei “*uma lâmpada custa R\$ 15,00 e dura 3,25 anos; [...] duas lâmpadas, duram 6,5 anos; três lâmpadas duram 9,75 anos*”. Logo, para compreender o problema proposto é importante perceber que uma lâmpada dura até 3,25 anos e tem um custo de R\$ 15,00; duas lâmpadas duram entre 3,25 anos e 6,5 anos e tem um custo de R\$ 30,00; três lâmpadas duram entre 6,5 anos e 9,75 anos e tem um custo de R\$ 45,00 e assim sucessivamente.

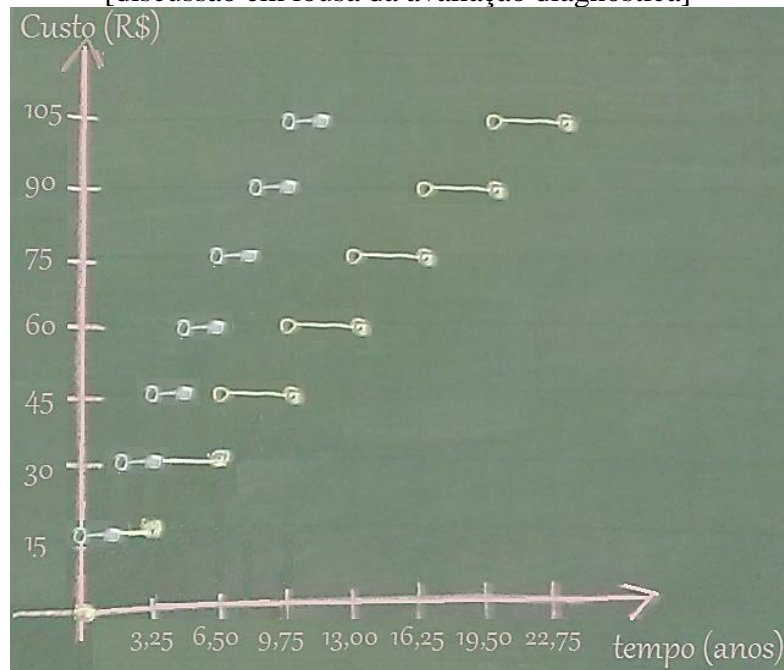
Para construir a Tabela 5.6, é importante acrescentar os intervalos para o tempo (anos) na Tabela 5.5. Da Tabela 5.6, podemos fazer a tendência dos dados do custo em relação ao tempo que corresponde a Figura 5.14.

**Tabela 5.6:** Custo e tempo em intervalos - Lei do uso de farol baixo

quant. lâmpada	tempo (anos)		custo (reais)
	Antes da lei	Após a lei	
1	(0; 3,25]	(0; 1,625]	R\$ 15,00
2	(3,25; 6,50]	(1,625; 3,25]	R\$ 30,00
3	(6,50; 9,75]	(3,25; 4,875]	R\$ 45,00
4	(9,75; 13,00]	(4,875; 6,50]	R\$ 60,00
5	(13,00; 16,25]	(6,50; 8,125]	R\$ 75,00
6	(16,25; 19,50]	(8,125; 9,75]	R\$ 90,00
7	(19,50; 22,75]	(9,75; 11,375]	R\$ 105,00

Fonte: Dos autores.

**Figura 5.14:** Custo de utilização da lâmpada antes e após a aprovação da lei [discussão em lousa da avaliação diagnóstica]



Fonte: Dos autores.

A validação dos resultados se deu no decorrer do desenvolvimento da investigação, interpondo os critérios estabelecidos e as informações do enunciado.

### 5.2.2 Questão 2 - Vazamento de uma torneira

Discussão do grupo 1 [em áudio após a resolução individual da avaliação diagnóstica]

A1: E a questão 2, o que achou?

A2: Eu fiz regra de três e encontrei que o volume de vazamento é de 730.000 litros. Esse resultado dividi por 1000 e encontrei o valor de 730 m<sup>3</sup> [Figura 5.15].

**Figura 5.15:** Registro do aluno A2 - Vazamento de uma torneira

DIAS	LITROS
50	= 100000
365	= X
$50 \cdot X = 100000 \cdot 365$	
$50 \cdot X = 36.500.000$	
$X = \frac{36.500.000}{50} \Rightarrow X = 730.000 \text{ L} \div 1.000$	
$\Rightarrow 730 \text{ m}^3$	

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

A15: Eu peguei 20000 e multipliquei por 365 dias.

A1: Deu certo? [...] Aqui deu 7 milhões, 300 mil [Digitando na calculadora].

Discussão do grupo 2 [em áudio após a resolução individual da avaliação diagnóstica]

A12: Qual foi o resultado dessa questão? São 365 dias em um ano...

A8:  $730 \text{ m}^3$ . O que eu não estava lembrando era a transformação das unidades [Figura 5.16].

**Figura 5.16:** Registro do aluno A8 - Vazamento de uma torneira

$$20000 \text{ L} \div 10 \text{ dias} = 2000 \text{ L/dia}$$

$$2000 \text{ L/dia} \times 365 \text{ dias ano} = 730000 \text{ L/ano}$$

$$730000 \div 1000 = 730 \text{ m}^3/\text{ano}$$

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

A12: Então em 10 dias, consome 20000 litros. Eu dividi 20000 por 10 e encontrei que o vazamento é de 2000 litros por dia. O resultado eu multipliquei por 365. Agora não sei se está certo [Figura 5.17].

**Figura 5.17:** Registro do aluno A12 - Vazamento de uma torneira

$$10 \text{ Dias} = 20000 \quad 1 \text{ Dia e gasto de água chega a } 2000 \text{ L}$$

$$365 \text{ Dias} = 365 \times 2000 \text{ L, sabendo que temos um crescimento proporcional}$$

$$= 730000 \text{ L/ano}$$

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

A8: E se for um ano bissexto?

A12: Ah, é um ano normal né?

Discussão do grupo 3 [em áudio após a resolução individual da avaliação diagnóstica]

A14: Aqui entrou de novo a questão da precisão. O que eu fiz: Peguei 20000 litros e dividi por 10 dias. Neste caso eu encontrei o volume de vazamento por dia. Multipliquei por 364 dias e dividi por 1000 para realizar a conversão para  $\text{m}^3$  [Figura 5.18].

**Figura 5.18:** Registro do aluno A14 - Vazamento de uma torneira

$$P(x) = \left( \frac{20 \cdot 10^3}{10} \right) \cdot 364 = 728 \text{ m}^3$$

$$\frac{\quad}{1 \cdot 10^3}$$

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

Discussão do grupo 4 [em áudio após a resolução individual da avaliação diagnóstica]

A16: Na minha opinião, a maneira que eu respondi a questão 2, ninguém mais respondeu.

A9: A16 a minha resposta e a sua não coincidem.

A16: Eu pensei 20000 litros em 10 dias. Dessa forma, verifiquei que o volume de vazamento em 300 dias é de 600000 litros. Como em um ano há 365 dias, para o cálculo de 65 dias, verifiquei no gráfico que houve um vazamento de 13000 litros [Figura 5.19].

**Figura 5.19:** Registro do aluno A16 - Vazamento de uma torneira

$70 \text{ dias} = 140000$   
 $80 \text{ dias} = 160000$   
 $90 \text{ dias} = 180000$   
 $100 \text{ dias} = 200000$

$200000 = 100 \text{ dias}$   
 $+ 200000 = 100 \text{ dias}$   
 $\hline 400000$   
 $+ 200000 = 100 \text{ dias}$   
 $\hline 600000$   
 $+ 13000 = 65 \text{ dias}$   
 $\hline 613000$

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

A9: Não sei se a minha resolução ou a sua está errada, mas o nosso raciocínio foi diferente [Figura 5.20].

**Figura 5.20:** Registro do aluno A9 - Vazamento de uma torneira

$\frac{20000}{10} = 2000 \text{ litros/dia}$

$2000$   
 $\times 365$   
 $\hline 730.000 \text{ litros/ano.}$

$\frac{730000}{1000} = 730 \text{ m}^3$

Sabendo que 1000 Litros Equivale à  $1 \text{ m}^3$ ,  
 TOTAL Em metros cúbicos é de  $730 \text{ m}^3$

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

A6: Eu resolvi essa questão por regra de três.

A9: O volume de vazamento em 10 dias é de 20000 litros. Dessa maneira, eu dividi 20000 por 10 e cheguei a conclusão que o volume de vazamento é de 2000 litros por dia. Assim, multipliquei 2000 litros por 365 dias.

A6: A minha resposta também foi diferente!



A6: *[Após tentar entender sua própria resolução] Ahh, eu fiz errado! Eu calculei para três anos e não somente para um ano.*

P: *[Conversando com A16] Qual foi o volume de vazamento em 65 dias? Se 60 dias corresponde a 120000 litros, quanto corresponde 70 dias?*

A16: *140000 litros.*

P: *Então 65 dias corresponde a quantos litros?*

A16: *130000 litros.*

A16: *Nossa professora, eu não considerei o volume de 130000 litros.*

#### Discussão da atividade com a professora (Vazamento de uma torneira)

A resolução desta questão nos permite inferir que os alunos apresentaram maior familiaridade com o conteúdo matemático “função linear”, pois 64,29% dos alunos que realizaram a avaliação apresentaram respostas completas ou incompletas (Tabela 5.2). A maior dificuldade apresentada dentre os alunos que apresentaram resposta incompleta foi em realizar a conversão de unidades de medida (litros para  $m^3$ ).

As respostas categorizadas como incorretas (28,57%), são aquelas que efetuaram de forma incorreta operação de multiplicação (A15), não interpretaram de forma correta dados do enunciado (A16) ou estabeleceram critérios não adequados para a questão (A6 e A14). Do restante, 7,14 % dos alunos não iniciaram a questão devido a não compreensão do conteúdo matemático, contexto da questão ou pela falta de tempo em concluí-la.

Os registros escritos dos alunos ilustram que há diferentes maneiras de mostrar que a relação entre o volume de vazamento de uma torneira pingando um filete de 1 mm em função do tempo transcorrido é proporcional ou apresentada por uma função linear, quando utilizam para responder ao problema proposto de operações de multiplicação e divisão (grupos 1, 2 e 4), regra de três (grupo 1) ou uma função para o custo (grupo 3).

Um critério importante para a questão é considerar que um ano tem 365 dias e não é um ano bissexto como menciona A8. O aluno A14 considerou em sua resolução, de forma incorreta, que um ano possui 364 dias e A6 considerou que a questão se tratava de 3 anos. Contudo, A14 utilizou-se de uma função para representar a situação-problema, conforme indica a Figura 5.18. No numerador da fração, A14 indicou o volume em litros por dia e no denominador, ao efetuar a divisão por  $10^3$ , realizou a conversão de unidades de medida de litros para  $m^3$ . Neste caso, deve-se multiplicar o resultado dessa operação pela quantidade de dias, ou seja, 365 dias:

$$f(t) = \frac{\left(\frac{20 \cdot 10^3}{10}\right)}{1 \cdot 10^3} \cdot t, \quad (2)$$

em que  $t$  é o tempo em horas e  $f(t)$  é o volume de vazamento ( $m^3$ ).

O aluno A1 (grupo 1), quando estava em discussão a respeito de sua resolução com a turma, mostrou que utilizou de diferentes maneiras para determinar o volume de vazamento em um ano, conforme indica a Figura 5.21. Podemos observar que o modelo matemático (2) apresenta semelhanças com o modelo matemático indicado na Figura 5.21.

**Figura 5.21:** Registro do aluno A1 - Vazamento de uma torneira  
[discussão em lousa da avaliação diagnóstica]

Handwritten work on a chalkboard showing two methods to solve for the volume of water leakage.

**Left side (Proportion method):**

$$\begin{array}{l} 30 \text{ dias} \quad \text{---} \quad 60.000 \text{ litros} \\ 365 \text{ dias} \quad \text{---} \quad x \\ 30x = 60k \times 365 \\ 30x = 21.900.000 \\ x = \frac{21.900.000}{30} \\ x = 730.000 \text{ litros} \\ \text{730 m}^3 \text{ de água} \end{array}$$

**Right side (Rate method):**

$$\begin{array}{l} 20.000 \div 10 \\ \downarrow \\ 2.000 \text{ litros/dia} \\ 365 \times 2.000 \\ \downarrow \\ 730.000 \text{ litros} \\ f(t) = 2000t \end{array}$$

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

Tendo em vista a discussão dessa atividade em lousa, em conjunto com a professora, foi possível discutir como determinar um modelo matemático que se ajusta aos dados.

*P: Como poderíamos determinar um modelo (fórmula) que relaciona o volume de vazamento em função do tempo?*

*A6: 2000 multiplicado pelo tempo?*

*P:  $f(t) = 2000 \cdot t$ , ou seja, o vazamento é de 2000 litros por dia. Dessa maneira, 2000 multiplicado por 10, resulta em 20000? [...] Assim, para qualquer valor do tempo (dias), podemos determinar o volume (litros).*

*P: Encontramos, um modelo matemático que descreve a tendência dos dados [em vídeo após a discussão em grupos da avaliação diagnóstica].*

## 5.2.3 Questão 3 - Relação entre tensão e corrente de uma lâmpada incandescente

Discussão do grupo 1 [em áudio após a resolução individual da avaliação diagnóstica]

A2: A questão 3 foi complicada. Com relação ao gráfico, não há dúvidas. [...]

A1: As variáveis envolvidas são a tensão e a corrente.

A1: Como se comporta o fenômeno apresentado?

A2: Eu respondi que a cada vez que aumenta a tensão da lâmpada, aumenta a corrente, o que corresponde com o gráfico. Mas, não sei se isso responde a pergunta... [Figura 5.22]

A1: Isso é verdade. [...]

A2: Agora com relação a lei de Ohm, eu esqueci. [...]

**Figura 5.22:** Registro do aluno A2 - Tensão e corrente de uma lâmpada incandescente

c) Está sendo aplicado uma tensão em uma lâmpada incandescente, tensão que está variando de 0 a 120V. Conforme aumenta a tensão, aumenta a corrente como podemos observar no exemplo acima.

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

A1: Então, a questão diz que de acordo com a lei de Ohm, a relação entre tensão e corrente são proporcionais. Na situação-problema apresentada essa relação é descrita pela lei de Ohm? Eu respondi que sim, pois quando varia a tensão, a corrente sofre alteração. [...]

A2: Como assim?

A1: Na lei de Ohm, o valor da corrente é igual ao valor da tensão dividido pelo valor da resistência. Se você mudar aqui, ela vai modificar aqui também. Por exemplo, cada vez que eu aumento a corrente, eu aumento a tensão. Se eu aumentar a tensão, também aumento a corrente. Se eu aumentar a resistência, eu diminuo o valor da corrente. [...]

A1: Vamos olhar para a tabela. Uma tensão de 30 volts, eu tenho 0,2 ampères de corrente. Para uma tensão de 50 volts, já aumentou o valor da corrente. Então, quanto mais eu for aumentando o valor da tensão, maior será o valor da corrente. Portanto, quer dizer, que a lei de Ohm é verdadeira aqui, pois quando varia a tensão, a corrente também sofre alteração.

A2: Acho que é isso mesmo.

Discussão do grupo 2 [em áudio após a resolução individual da avaliação diagnóstica]

A12: Essa questão eu acho que está errada!

A8: Essa da lei de Ohm? Eu fiz assim [Apontando para os cálculos] [Figura 5.23]

A12: Eu também fiz assim! [Figura 5.24]

**Figura 5.23:** Registro do aluno A8 - Tensão e corrente de uma lâmpada incandescente

$$R = \frac{V}{I}$$

$$\textcircled{a} R = \frac{30}{0,2} = 150 \Omega \quad \textcircled{b} R = \frac{50}{0,3} = 166,66 \Omega$$

$$\textcircled{c} R = \frac{70}{0,35} = 200 \Omega \quad \textcircled{d} R = \frac{90}{0,39} = 230,76 \Omega$$

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

**Figura 5.24:** Registro do aluno A12- Tensão e corrente de uma lâmpada incandescente

B, temos uma variável de tensão e outra de corrente  
 C) É um gráfico que não apresenta um crescimento proporcional de acordo com a lei de Ohm. Quanto maior for a tensão, maior vai ser a corrente. No situação apresentada temos uma desproporção quando comparado com a resistência.

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

A8: Quais foram seus resultados?

A12: 150 ohms, 200 ohms...

A8: 166 ohms, 200 ohms e eu também encontrei 230 ohms.

A12: Não está proporcional, não é?

A8: Não. Então quer dizer que a tabela está errada! Tinha que ter uma única resistência! [...] [Conversando sobre o triângulo da lei de Ohm]

A8: Eu esqueci desse triângulo! Eu lembrei que  $V=R.I$ , por meio das operações inversas, então  $R=V/I$ . [...]

P: Nessa questão vale a lei de Ohm?

A8: Não sei. Está estranho.

P: Por que vocês realizaram esse cálculo de resistência para cada valor de tensão e corrente?

A8: Para saber qual é o valor da resistência...

P: Por quê?

A8: Para verificar se o resultado é constante.

P: É constante?

A8: Não é constante.

P: O que significa?

A8: Não vale a lei de Ohm. [...]

A12: A resistência teria que ser uma só, não é?

A11: Conforme aumenta a corrente, a temperatura também aumenta. Então, conforme a temperatura vai aumentando, a resistência também aumenta.

P: Por que está ocorrendo essa alteração dos dados? Por conta da temperatura. Quando a temperatura não influencia no valor da corrente e tensão, podemos falar que os dados se comportam de acordo com a lei de Ohm, é chamado de resistor ôhmico. No caso desta questão é denominado resistor não-ôhmico.

### Discussão do grupo 3 [em áudio após a resolução individual da avaliação diagnóstica]

A4: Com relação a questão 3, quais são as variáveis envolvidas?

A14: As variáveis são a tensão e a corrente. Além dessas variáveis quais outras estão influenciando no comportamento da situação?

A4: Resistência?

A14: Existe mais uma. Foi a variável que eu esqueci quando resolvi.

A4: Não sei.

A14: Temperatura, porque conforme a lâmpada incandescente vai acendendo, o filamento fica mais quente e influencia na resistência.

A4: Então, as variáveis são: tensão, corrente, resistência e temperatura?

A14: Sim, a temperatura influencia no valor na resistência.

A4: Com relação a essa questão: Como se comporta o fenômeno representado?

A14: Mais ou menos isso: A temperatura do filamento aumenta o valor da resistência.

A14: [Digitando na calculadora] Com a tensão de 30 V, a resistência é de 150 ohms. Com a tensão de 121 V, a resistência é de 268 ohms.

A4: Não entendi o que você quis dizer!

A14: O aumento da temperatura aumentou o valor da resistência.[...] O valor da tensão, corrente e resistência ainda seguem a lei de Ohm.

Discussão do grupo 4 [em áudio após a resolução individual da avaliação diagnóstica]

A16: A questão da lâmpada temos corrente e tensão... [confuso]

P: O que aconteceu na questão A9?

A9: Na verdade a resistência não varia de forma proporcional. Em um momento é uma quantidade e no outro, outra quantidade [Figura 5.25].

**Figura 5.25:** Registro do aluno A9 - Tensão e corrente de uma lâmpada incandescente

B - TENSÃO EM VOLTS, CORRENTE EM AMPÈRES E RESISTÊNCIA EM OHMS

C - QUANTO MAIOR A TENSÃO APLICADA MAIOR A CORRENTE ELÉTRICA FOR TER UM AUMENTO NA RESISTÊNCIA.

D - NÃO, POIS A VARIAÇÃO ENTRE TENSÃO E CORRENTE NÃO VARIA DE FORMA PROPORCIONAL.

$V = R \cdot I$	$R = \frac{V}{I}$	$R = \frac{V}{I}$	$R = \frac{V}{I}$	$R = \frac{V}{I}$	$R = \frac{V}{I}$
$R = \frac{V}{I}$	$R = \frac{30}{0,3}$	$R = \frac{70}{0,35}$	$R = \frac{90}{0,39}$	$R = \frac{110}{0,42}$	$R = \frac{121}{0,45}$
$R = \frac{30}{0,2}$	$R = 166 \Omega$	$R = 200 \Omega$	$R = 230 \Omega$	$R = 261 \Omega$	$R = 268 \Omega$
$R = 150 \Omega$					

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

**Figura 5.26:** Registro do aluno A6 - Tensão e corrente de uma lâmpada incandescente

121 — 0,45

120 — x

121x = 58,5

x = 58,5

121

x = 0,48

B - CORRENTE (A)  
TENSÃO (V)

C - DE FORMA CRESCENTE

D -  $R = \frac{V}{I}$

$R = \frac{30}{0,2} = 150 \Omega$

$R = \frac{50}{0,3} = 166 \Omega$

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

*P: Você começou a fazer as suas contas A6, mas não concluiu. Você utilizou regra de três nessa questão, pode utilizar? [Figura 5.26]*

*A6: Não.*

*A16: Então a lei de Ohm só pode ser utilizada se fosse proporcional?*

*P: Sim.*

*A6: Nossa professora, eu errei essa questão. Eu disse que vale a lei de Ohm!*

*A9: Nesse caso, quando você utiliza de uma regra de três, você está supondo que a variação é de forma igual.*

*A16: Então as minhas contas estão certas, mas o que eu errei foi a resposta?*

*A9: Os dados estão crescendo na verdade, porém a resistência não varia da mesma forma, e por isso não é proporcional.*

*A16: As variáveis são tensão e corrente?*

*A9: Eu respondi assim: tensão (volts), corrente (ampères), resistência (ohms).*

*A6: Ahh!*

*A16: Como se comporta o fenômeno representado? Eu coloquei de forma crescente, mas não de forma linear.*

*A9: Eu respondi que quanto maior a tensão aplicada, maior a corrente por ter um aumento na resistência.*

*A16: Você colocou uma resposta mais técnica!*

*A6: Eu respondi de forma crescente.*

#### Discussão da atividade com a professora (Relação entre tensão e corrente de uma lâmpada incandescente)

A resolução desta questão nos permite inferir que os alunos apresentaram dificuldades em compreender uma situação-problema que envolve uma função que não é linear. Verificase essa dificuldade durante sua correção, em que 35,72% dos alunos que realizaram a avaliação, apresentaram solução completa ou incompleta (Tabela 5.2) e 42,86% dos alunos estabeleceram o critério de que a relação entre tensão e corrente é descrita pela lei de Ohm. Nesse caso, ao assumir como critério que essa relação é proporcional, os alunos estão assumindo que a razão entre o valor da tensão pelo valor da corrente é uma constante.

A1 menciona que “quando varia a tensão, a corrente sofre alteração”, ou seja, “cada vez que eu aumento a corrente, eu aumento a tensão. Se eu aumentar a tensão, também aumento a corrente [...]. Vamos olhar para a tabela. Uma tensão de 30 volts, eu tenho 0,2 ampères de corrente. Uma tensão de 50 volts já aumentou o valor da corrente. Então, quanto mais eu for aumentando o valor da tensão, maior será o valor da corrente. Portanto, quer dizer, que a lei de Ohm é verdadeira aqui”. Neste caso, A1 estabelece uma relação entre as variáveis de corrente e tensão, contudo não compreende que essa relação não é proporcional, ou seja, não compreende o significado da lei de Ohm.

A12 também salienta que “quanto maior a tensão, maior vai ser a corrente”, contudo, verifica que o “gráfico não apresenta um crescimento proporcional” e, deste modo, “na situação apresentada temos uma desproporção”, ou seja, para diferentes valores de corrente e tensão não se obtém os mesmos valores para a resistência. Na discussão com o grupo, A12 completa, “a resistência teria que ser uma só, não é?”.

Na situação-problema apresentada, como a lâmpada incandescente utiliza um filamento de tungstênio, menciona A14, “conforme a lâmpada incandescente vai acendendo, o filamento fica mais quente e influencia na resistência”. Sendo assim, segundo A11, “conforme aumenta a corrente, a temperatura também aumenta. Então, conforme a temperatura vai aumentando, a resistência também aumenta”. Neste caso, podemos falar que os dados não se comportam de acordo com a lei de Ohm<sup>10</sup>.

Com relação as variáveis envolvidas, A14 menciona que “as variáveis são a tensão e a corrente”, mas além dessas variáveis há outras que estão influenciando no comportamento da situação, ou seja, a resistência e a temperatura. Neste caso, segundo A14, “a temperatura influencia no valor na resistência”.

Cabe salientar que é frequente o uso da regra de três em atividades de matemática, contudo esse uso depende da situação-problema em estudo. Nesse caso, quando A6 utiliza regra de três para estimar um outro valor que não está descrito na atividade, está supondo que a variação entre tensão e corrente ocorre de forma igual, o que mostra que não interpretou o problema.

#### 5.2.4 Questão 4 - Chuveiro no modo ‘verão’ ou ‘inverno’

Discussão do grupo 1 [em áudio após a resolução individual da avaliação diagnóstica]

*A1: Primeiro, precisava encontrar a quantidade de tempo que o chuveiro fica ligado durante o mês. Calcula-se a energia na potência nominal e na potência econômica e, em seguida, calcula-se a diferença. A parte mais difícil é entender o que pedia e transformar as unidades, por exemplo, watts em quilowatts [Figura 5.27].*

---

<sup>10</sup> Cabe destacar que essa discussão a respeito do valor da resistência de uma lâmpada incandescente será realizada durante a terceira atividade de modelagem matemática descrita no Capítulo 6.

**Figura 5.27:** Registro do aluno A1 - Chuveiro no modo 'verão' ou 'inverno'

Verão 2.200 W	Inverno 5.400 W		
$E = P \cdot \Delta t$	$E = P \cdot \Delta t$	diferença:	$C = \alpha \cdot E$
$E = 2.200 \text{ W} \cdot 30 \text{ h}$	$E = 5.400 \text{ W} \cdot 30 \text{ h}$	162 kW/h	$C = 0,64543 \cdot 96 \text{ kW/h}$
$E = 2,2 \text{ kW} \cdot 30 \text{ h}$	$E = 5,4 \text{ kW} \cdot 30 \text{ h}$	- 66 kW/h	$C = 61,96 \text{ reais/mês}$
$E = 66 \text{ kW/h}$	$E = 162 \text{ kW/h}$	96 kW/h	

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

A2: Foi a mais tranquila. Se não tivesse as fórmulas, seria mais complicado [Figura 5.28].

**Figura 5.28:** Registro do aluno A2 - Chuveiro no modo 'verão' ou 'inverno'

NOMINAL $E = P \cdot \Delta t$	ECONÔMICA $E = P \cdot \Delta t$
$E = 5.400 \text{ W} \cdot 1 \cdot 30$	$E = 2.200 \text{ W} \cdot 1 \cdot 30$
$E = 162.000 \text{ W}$	$E = 66.000 \text{ W}$
$E = 162 \text{ kWh}$	$E = 66 \text{ kWh}$
$C = \alpha \cdot E$	$C = \alpha \cdot E$
$C = 0,645 \times 162$	$C = 0,645 \times 66$
$C = 104,49$	$C = 42,57$
<u>R\$ 104,49</u>	<u>R\$ 42,57</u>
Quando no modo econômica você economiza R\$ 61,92	

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

A1: Dá uma diferença de R\$ 61,00 na conta de luz, por isso que a conta de luz é alta. O chuveiro é o principal equipamento de uma casa.

Discussão do grupo 2 [em áudio após a resolução individual da avaliação diagnóstica]

A12: A questão 4 eu achei fácil porque era só inserir na fórmula.

A12: Deixa eu perguntar uma coisa para vocês: O custo da potência nominal deu R\$ 104,00? O custo da potência econômica deu R\$ 42,59 [Figura 5.29].

A5: Está diferente do meu resultado!

A12: Eu lembrei de um exercício que já tínhamos trabalhado e precisava fazer a conversão de watts para quilowatts.

A5: Eu esqueci disso!



**Figura 5.29:** Registro do aluno A12 - Chuveiro no modo 'verão' ou 'inverno'

$$\begin{aligned}
 E &= P \cdot \Delta T & C &= \alpha \cdot E \\
 E &= 5,4 \text{ k} \cdot 30 & P &= 5.400 \text{ W} & C &= 0,64543 \cdot 362 \text{ Kwh} \\
 E &= 362 \text{ Kwh} & \Delta T &= 30 \text{ h/mes} & C &= 304,55 \text{ Reais} \\
 R &= \text{Temos que, P. N.} = 304,55 \text{ Reais} \\
 \\
 E &= P \cdot \Delta T & C &= \alpha \cdot E \\
 E &= 2,2 \text{ K} \cdot 30 & P &= 2.200 \text{ W} & C &= 0,64543 \times 66 \text{ Kwh} \\
 E &= 66 \text{ Kwh} & \Delta T &= 30 \text{ h/mês} & C &= 42,59 \text{ Reais} \\
 R &= \text{Temos que, } P_c = 42,59 \text{ Reais} \\
 \\
 R &= \text{temos uma diferença de economia de } \underline{61,96 \text{ Reais}}.
 \end{aligned}$$

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

A12: Uma hora por dia, durante 30 dias, então o uso mensal será de 30 horas.

A8: Essa quantidade você não altera, somente a potência que foi utilizada.

A5: Essa questão eu preciso corrigir!

Discussão do grupo 3 [em áudio após a resolução individual da avaliação diagnóstica]

A14: E a questão 4?

A4: Consegui resolver! [Figura 5.30]

**Figura 5.30:** Registro do aluno A4 - Chuveiro no modo 'verão' ou 'inverno'

posição nominal	posição econômica
$E = P \cdot \Delta T$	$E = P \cdot \Delta T$
$E = 5400 \cdot 1$	$E = 2200 \cdot 1$
$E = 5400 \text{ kwh}$	$E = 2200 \text{ kwh}$
$C = \alpha \cdot E$	$C = \alpha \cdot E$
$C = 0,64 \cdot 5400$	$C = 0,64 \cdot 2200$
$C = 3,45 \text{ R\$ por dia}$	$C = 1,408 \text{ R\$ por dia}$
$C = 3,45 \cdot 30 = 103,5 \text{ R\$ por mês}$	$C = 1,408 \cdot 30 = 42,24 \text{ R\$ por mês}$
Um chuveiro ligado na posição nominal durante 1 hora por dia em 30 dias no mês, terá um gasto de 103,5 R\$ e se o chuveiro estiver ligado na posição econômica seu custo mensal será de 42,24 R\$.	

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

A14: [Após realizar leitura da questão 4] Está certo, mas existem algumas coisas que você pode levar em consideração: No cálculo a companhia de energia utiliza cinco casas decimais e esse resultado é um pouco diferente do que eu encontrei: R\$ 103,00 e R\$ 108,00.

A4: Ah, bastante!

A14: Outra coisa que você pode fazer é juntar a fórmula do custo e da energia em uma única fórmula, porque quando realizamos de forma separada, acabamos arredondando os valores. Quanto mais coisas conseguir fazer em uma fórmula só é melhor, porque a calculadora não vai arredondar tanto quanto você. Neste caso, você teria um resultado mais preciso no final. [...]

A14: Por exemplo, ao dimensionar um quadro elétrico, se você fica arredondando os valores demais, fica caindo o disjuntor a toda hora [Figura 5.31].

**Figura 5.31:** Registro do aluno A14 - Chuveiro no modo 'verão' ou 'inverno'

$$C_N = 0,64543 \cdot (5,4 \cdot 31) = 108$$

$$C_E = 0,64543 \cdot (2,2 \cdot 31) = 44,02$$

$$\frac{108}{44,02} = 2,453$$

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

Discussão do grupo 4 [em áudio após a resolução individual da avaliação diagnóstica]

A9: Na questão 4, já temos as fórmulas para cálculo. Assim, é só aplicar os dados. Transformando 5400 W em kW temos 5,4 kW. Desta forma, o consumo para um dia é calculado por: 5,4 kW x 1 hora = 5,4 kWh. Por mês, podemos calcular 5,4 kWh x 30 dias = 162 kWh. Usando a outra fórmula, o custo será 0,64 x 162 kWh = R\$ 103,68. Portanto, o custo mensal na potência nominal é de R\$ 103,68 por mês [Figura 5.32].

**Figura 5.32:** Registro do aluno A9 - Chuveiro no modo 'verão' ou 'inverno'

POTÊNCIA NOMINAL	POSICÃO ECONÔMICA
$E = P \cdot \Delta t$	$E = P \cdot \Delta t$
$E = 5,4 \text{ kW} \cdot 1 \text{ h}$	$E = 2,2 \text{ kW} \cdot 1 \text{ h}$
$E = 5,4 \text{ kWh}$	$E = 2,2 \text{ kWh}$
$E = 5,4 \text{ kWh} \cdot 30$	$E = 2,2 \text{ kWh} \cdot 30$
$E = 162 \text{ kWh}$	$E = 66 \text{ kWh}$
$C = \alpha \cdot E$	$C = \alpha \cdot E$
$C = 0,64 \cdot 162 \text{ kWh}$	$C = 0,64 \cdot 66 \text{ kWh}$
$C = 103,68 \text{ R\$}$	$C = 42,24 \text{ R\$}$
$C = 103,68 \text{ R\$}$	$C = 42,24 \text{ R\$}$
CONSUMO MENSAL NA POTÊNCIA NOMINAL É IGUAL À	CONSUMO NA POTÊNCIA ECONÔMICA POR MÊS É IGUAL À
R\$ 103,68 por mês	R\$ 42,24
	103,68 42,24 61,44
	CASO SEJA USADO NA POTÊNCIA ECONÔMICA TERIA UMA ECONOMIA DE R\$ 61,44/mês.

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

A16: O meu resultado deu 104 reais! [Figura 5.33]

A9: Eu acho que você arredondou. Porque o meu resultado deu R\$ 103,68!

**Figura 5.33:** Registro do aluno A16 - Chuveiro no modo ‘verão’ ou ‘inverno’

$E = 5,400 \cdot 30 = 162,000 \text{ kWh}$   
 $C = 0,64543 \cdot 162,000 = \text{R\$ } 104,55$  } Potência nominal  
 $E = 2,200 \cdot 30 = 66,000 \text{ kWh}$   
 $C = 0,64543 \cdot 66,000 = \text{R\$ } 42,59$  } Potência econômica

Fonte: Registro da avaliação diagnóstica.

A9: Na posição econômica o cálculo será da mesma forma: Só mudar os valores.

A16: Qual foi seu resultado?

A9: R\$ 61,44.

A16: O meu resultado foi bem diferente: 42 reais.

A9: Então tem alguma coisa errada.

A16: Deixa eu ver sua resolução..., mas sua resposta também foi 42 reais! Ah, você calculou a economia. Eu não calculei a economia.

A9: Ah, na verdade a questão aborda a economia: Eu calculei o consumo na potência nominal e na potência econômica e realizei a subtração.

A16: Você arredondou seus números, utilizou somente duas casas após a vírgula. Por isso, que o meu resultado foi diferente! Eu utilizei todas as casas. Deixa eu calcular a economia [...] O meu resultado foi R\$ 61,96.

#### Discussão da atividade com a professora (Chuveiro no modo ‘verão’ ou ‘inverno’)

A resolução desta questão nos permite inferir que os alunos apresentaram maior familiaridade com o conteúdo matemático “função linear”, pois 64,29% dos alunos que realizaram a avaliação apresentaram respostas completas ou incompletas (Tabela 5.2). As respostas categorizadas como incompletas, são aquelas que não responderam o problema proposto de efetuar o cálculo da economia mensal de gasto de energia elétrica do chuveiro quando utilizado na posição nominal e econômica. Do restante, 35,71% dos alunos não iniciaram a questão devido a não compreensão do conteúdo matemático, contexto da questão ou pela falta de tempo em concluí-la.

Os registros escritos dos alunos nos mostram que há diferentes maneiras de calcular o custo mensal de uso de um chuveiro elétrico, quando: (i) calculam a energia consumida na potência nominal e econômica por um mês, calculam a diferença destes valores e, em seguida,

calculam o custo mensal (Grupo 1); (ii) calculam o custo mensal do chuveiro quando utilizado na potência nominal e na potência econômica por um mês e, em seguida, calculam a diferença destes valores (Grupo 1, 2, 3 e 4); (iii) calculam o custo mensal do chuveiro quando utilizado na potência nominal e na econômica em uma hora por dia e, em seguida, multiplicam o resultado por 30 dias (Grupo 3).

Um critério importante para a questão é considerar qual é a quantidade de dias que possui em um mês. Neste caso, o aluno A14 considerou em sua resolução que um mês possui 31 dias.

Além disso cabe destacar algumas das simplificações utilizadas pelos alunos, quando arredondam a tarifa residencial convencional R\$ 0,64543, o que interfere na resposta ao problema. Isso corrobora quando A16 diz para A9: *“Você arredondou seus números, utilizou somente duas casas após a vírgula. Por isso, que o meu resultado foi diferente! Eu utilizei todas as casas”*. Nesta situação em específico gera uma diferença de R\$ 0,87 para a potência nominal e de R\$ 0,35 para a potência econômica.

O aluno A14 também realiza essa discussão quando diz para A4: *“Está certo, mas existem algumas coisas que você pode levar em consideração: No cálculo, a companhia de energia utiliza cinco casas decimais e esse resultado é um pouco diferente do que eu encontrei: R\$ 103,00 e R\$ 108,00”*. Cabe salientar que como A14 estabeleceu um critério diferente de A4, não seria possível uma comparação dos resultados para o problema.

### *5.3 Dificuldades no Cálculo Diferencial e Integral em um curso de tecnologia*

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral está inserida em diferentes cursos do Ensino Superior, dentre eles, os cursos de tecnologia, bacharelados e licenciaturas. Devido a sua importância para a formação do aluno em relação a conteúdos gerais que, por sua vez, sustentarão aprendizagens posteriores em disciplinas específicas, se tornou objeto de estudo de muitos pesquisadores, por exemplo, Cavasotto e Viali (2011), Cury (2010), Garzella (2013), Lima et al. (2014), Oliveira (2006), Zarpelon, Resende e Pinheiro (2015), Zarpelon, Resende e Reis (2017).

A carência de conhecimentos matemáticos associados à Educação Básica é um fator relevante para o desenvolvimento de conteúdos de Cálculo. Garzella (2013, p. 110) sugere como alternativa de superação “a tomada de decisões acerca da concepção do plano de ensino, o qual deve prever seu ponto de partida considerando-se os saberes já adquiridos pelos alunos, bem como aqueles ainda não conquistados”. Corrobora com Lima et al. (2014) quando sugere a avaliação diagnóstica como um instrumento de avaliação para direcionamento da disciplina.

Na nossa investigação, essa é justamente a primeira etapa da pesquisa. Com a finalidade de identificar dificuldades desses alunos, analisamos as resoluções da avaliação diagnóstica que realizamos e buscamos identificar possíveis erros que provocaram dificuldades ao resolver as questões propostas. Sobre essas dificuldades apresentados por ingressantes no Ensino Superior, Cavasotto e Viali (2011) argumentam que inicialmente acreditavam ser conteúdos de Ensino Médio, entretanto, constataram que muitos dos erros ocorridos tinham sua origem no Ensino Fundamental.

Oliveira (2006) e Cury (2010) destacam a importância do estudo de funções e seus gráficos para o estudo do conteúdo de limites, continuidade, derivadas e integrais e ressaltam algumas dificuldades apresentadas pelos alunos em compreender funções não lineares, funções dadas por mais de uma sentença, funções constantes, dentre outras.

Na apresentação da disciplina de Cálculo, pode-se colocar aos alunos que muitos fenômenos reais são descritos por modelos matemáticos [...]. Os modelos matemáticos permitem realizar previsões e extrair importantes informações a respeito do fenômeno; informações que também podem ser obtidas a partir do estudo de limites e derivadas da função. Entretanto, para que seja possível a abordagem de limites e derivadas é necessário que o aluno tenha conhecimento prévio sobre funções (ZARPELON; RESENDE; PINHEIRO, 2015, p. 184).

Na nossa pesquisa, os resultados apresentados na avaliação diagnóstica revelam que as dificuldades apresentadas pelos alunos do curso de tecnologia para o estudo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I estão relacionadas principalmente ao conteúdo de *funções*. Esse conteúdo é uma regra gramatical, ou seja, é a condição de sentido para o desenvolvimento dessa disciplina.

A questão 1 exigia a construção de um gráfico comparativo entre o tempo de durabilidade da lâmpada antes e após a implantação da lei em relação a seu custo. Verificou-se que 50% dos alunos que realizaram a avaliação, apresentaram solução incompleta (Tabela 5.2). Ao estabelecerem o critério de que a relação entre custo e tempo é proporcional ou

apresentada por uma função linear, os grupos teceram considerações de que “1,5 lâmpadas corresponde um custo de R\$22,50” e “3,07 lâmpadas corresponde um custo de R\$ 46,15”.

Para sua resolução os alunos estabeleceram que os cálculos deveriam ser realizados de acordo com os “valores que estão no eixo  $x$ ”, sendo assim, determinaram o custo em cinco, dez, quinze anos, etc. Contudo, ao considerar estes cálculos, estão afirmando, por exemplo, que é possível comprar 1,5 lâmpadas, ou seja, os alunos não estão articulando o conteúdo matemático com o contexto.

Além disso, na primeira questão, quando realizaram o arredondamento de números, os alunos também não verificaram a precisão de sua resposta. Essa falta de compreensão de critérios adequados para a resolução da questão acarretou também a falta de compreensão de uma linguagem gráfica, quando sinalizaram que a função que representa a situação-problema é linear.

A14 argumenta que sua maior dificuldade foi “determinar qual a melhor maneira de apresentar o gráfico” e A7 salienta “dificuldade em saber o que aplicar para a resolução do problema”. Assim, verificamos que os alunos não apresentaram familiaridade com uma função que não é linear e apresentaram dificuldades na compreensão do contexto e no estabelecimento de critérios adequados para a resolução da atividade.

Acreditamos que essa falta de familiaridade está enraizada na estrutura principalmente de livros textos abordados na Educação Básica, conforme indica Oliveira (2006):

- i) Quando apresenta o conteúdo de *funções*, normalmente associa uma linguagem algébrica a uma linguagem gráfica, sem fazer o caminho inverso;
- ii) Cada capítulo apresenta de forma fragmentada um tipo de função, por exemplo, linear, quadrática, etc. e suas propriedades;
- iii) A maioria dos livros não incluem funções definida por partes.

A segunda questão exigia o cálculo do volume de vazamento ( $m^3$ ) de uma torneira pingando um filete de 1 mm após um ano. A quarta questão exigia o cálculo da economia mensal de um chuveiro na potência nominal e econômica. Verificou-se que em ambas as questões 64,29 % dos alunos que realizaram a avaliação apresentaram respostas completas ou incompletas (Tabela 5.2). Neste caso, como a resolução exigia a familiaridade com o

conteúdo matemático “função linear”, os alunos conseguiram proceder corretamente com as regras matemáticas.

Percebe-se que mesmo que o aluno A14 tenha demonstrado compreensão do contexto, de conceitos relativos à área do curso e das regras matemáticas, apresentou respostas não adequadas aos problemas ao assumir como critério (na segunda questão) que um ano possui 364 dias ou, na quarta questão que, de modo geral, um mês possui 31 dias.

A terceira questão exigia a construção do gráfico de dispersão entre tensão e corrente de uma lâmpada incandescente, a identificação de variáveis e o estabelecimento de critérios para a situação-problema. Verificou-se que 35,72% dos alunos que realizaram a avaliação, apresentaram solução completa ou incompleta (Tabela 5.2).

Ao assumir que a tabela indicada na questão não estava correta e que deveria “*ter uma única resistência*” ou afirmar que “*com o aumento da tensão, há o aumento da corrente de forma proporcional*”, os alunos não compreenderam o contexto da questão, conceitos matemáticos como proporcionalidade e relativos a área do curso de tecnologia como lei de Ohm. Além disso, essa falta de compreensão de critérios adequados permitiu o uso de regra de três com o intuito de realizar uma previsão para um dado valor de corrente.

Na primeira e terceira questões, os alunos por não apresentarem familiaridade com uma função que não é linear, não estabeleceram critérios adequados para o problema e, desta forma, não foi possível apresentar uma resposta adequada ao problema. Podemos verificar que, por vezes, os alunos não associaram conceitos matemáticos com o contexto relacionado às questões:

- “*encontrei 1,5 lâmpadas*” (não é possível a compra de 1,5 lâmpadas);
- “*eu peguei 20000 e multipliquei por 365 dias*” (20000 litros é o volume para dez dias e não somente um dia);
- “*para o cálculo de 65 dias, verifiquei no gráfico que houve um vazamento de 13000 litros*” (o volume de vazamento em 65 dias foi de 130000 litros);
- “*quer dizer que a lei de Ohm é verdadeira aqui, [...] pois quando varia a tensão, a corrente também sobre alteração*” (a tensão sofre alteração de forma não proporcional à corrente, desta forma, não é possível não utilizar a lei de Ohm na resolução da questão);

- “*usando a outra fórmula, o custo será  $0,64 \times 162 \text{ kWh}$* ” (neste caso, o arredondamento de números não permite definir com precisão o custo cobrado pela Companhia de Energia).

Podemos inferir que essas dificuldades apresentadas pelos alunos estão associadas principalmente:

- i. Os alunos estabeleceram como suposição que a relação entre as variáveis é, em geral, proporcional, ou seja, pode ser descrita por uma função linear.
- ii. A falta de compreensão de critérios adequados para a resolução das questões acarretou na falta de compreensão de uma linguagem gráfica, tabular ou algébrica, quando sinalizaram que a função que representa a situação-problema é linear.
- iii. O arredondamento de números realizado pelos alunos em seu registro algébrico influenciou na precisão da resposta para o problema.
- iv. Os alunos não identificaram e integraram o conceito de função em suas diferentes linguagens.
- v. A não articulação de conceitos matemáticos, mais especificamente de funções, com conceitos relativos à área do curso influenciou na resposta para o problema.

Considerando diferentes aspectos para o estudo do conteúdo de *funções*, Stewart (2016) sugere o estudo por meio de uma fórmula, uma tabela, um gráfico ou por meio de palavras. Neste caso, é importante que o aluno associe não somente uma linguagem algébrica a uma linguagem gráfica, mas a construção de um modelo matemático, por meio do caminho inverso, ou seja, que aprenda a utilizar de diferentes linguagens matemáticas, mas não de forma fragmentada. Assim, a integração dessas diferentes linguagens pode possibilitar aos alunos estabelecer uma gramática arbitrária, um conjunto de regras, por meio do uso da linguagem em diferentes situações.

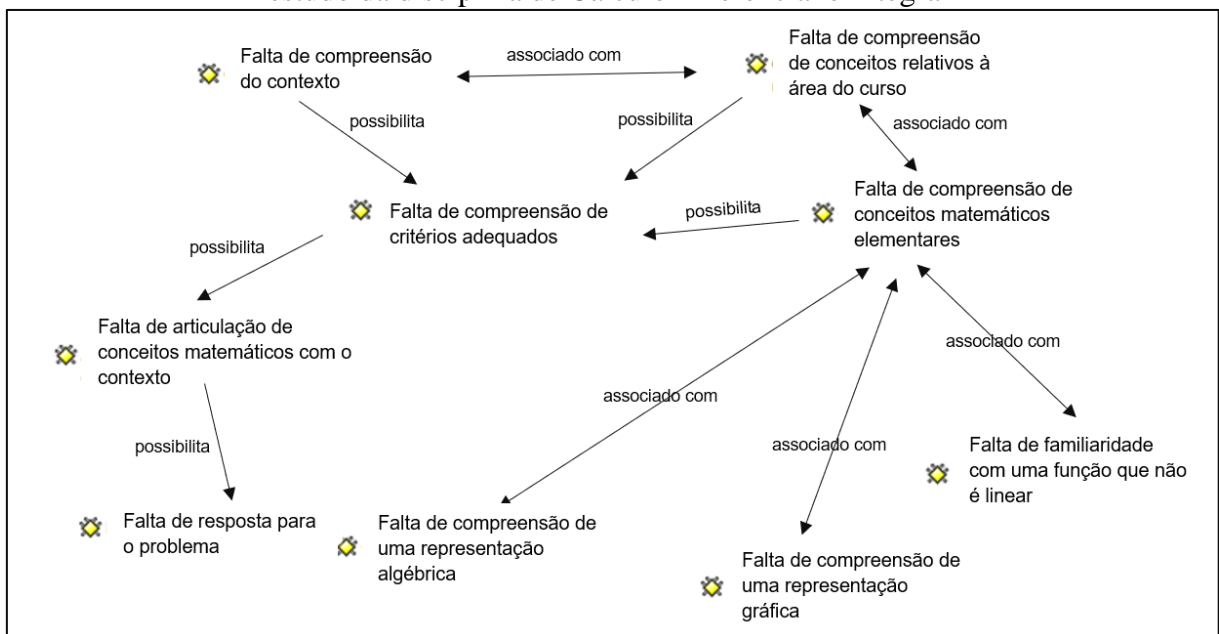
A compreensão do contexto (do enunciado da questão descrito por meio de palavras) associado aos conteúdos relativos à área do curso de tecnologia e conteúdos matemáticos provenientes da Educação Básica, como por exemplo, de funções, dão sentido as atividades propostas e determinam como os alunos sabem o conteúdo.



Nesse sentido, a intuição matemática tem um papel fundamental durante a resolução das questões, o que auxilia no direcionamento de cada atividade. Além disso, a falta de articulação de conceitos matemáticos com o contexto pode intervir em uma resposta adequada ao problema. A compreensão de critérios em uma atividade orienta os alunos em sua resolução e determina o que os alunos sabem a respeito de conceitos matemáticos ou relativos à área do curso.

A Figura 5.34 estabelece uma rede das dificuldades apresentadas pelos alunos do curso de tecnologia para o estudo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

**Figura 5.34:** Rede de dificuldades apresentadas pelos alunos do curso de tecnologia para o estudo da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral



Fonte: Dos autores.

Se faz necessário a inserção dos alunos em novos jogos de linguagem para que possam perceber novas regras e novos aspectos a respeito do conteúdo de *funções* (algebricamente, numericamente e visualmente), ou seja, ampliar seu domínio de conhecimento (para agir corretamente em novas situações), por meio de estudos provenientes do Cálculo Diferencial e Integral. E é essa a terapia que esta pesquisa propõe, por meio do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em curso superior de tecnologia.

## CAPÍTULO 6

### *A intervenção terapêutica mediada por atividades de modelagem matemática*

*“Os conceitos nos conduzem às investigações. Eles são a expressão de nosso interesse, e conduzem o nosso interesse”.*  
(WITTGENSTEIN, 2013, § 570, p. 203).

Neste capítulo tratamos das descrições dos usos do conteúdo de *funções* em atividades de modelagem matemática nos diferentes momentos de familiarização dos alunos e tecemos reflexões a respeito da pesquisa à luz da terapia de Wittgenstein. Assim, mostramos as possibilidades de uso desse conteúdo em atividades de modelagem e diferentes aspectos que são percebidos pelos alunos de acordo com o desenvolvimento dessas atividades.

#### 6.1 *As atividades desenvolvidas*

Com a finalidade de desenvolver com os alunos atividades que poderiam contribuir para a superação de dificuldades identificadas na avaliação diagnóstica, desenvolvemos com os alunos atividades de modelagem matemática. A introdução das atividades seguiu os momentos de familiarização dos alunos com a modelagem matemática, conforme discutimos no capítulo 3.

Para auxiliar na identificação dos alunos, foram mantidos os grupos da avaliação diagnóstica, como indica a Tabela 6.1.

**Tabela 6.1:** Composição dos grupos para discussão das atividades de modelagem matemática

Grupo	Alunos
1	A1, A2, A10 e A15
2	A5, A8, A11 e A12
3	A3, A4, A13 e A14
4	A6, A7, A9 e A16

Fonte: Dos autores.

As atividades do primeiro e segundo momentos foram desenvolvidas com todos os alunos conjuntamente, distribuídos em quatro grupos. Para as atividades de terceiro momento, os alunos desenvolveram três atividades de modelagem matemática, distribuídos em três grupos.

As atividades de terceiro momento foram iniciadas no decorrer da disciplina, mas finalizadas no outro semestre durante a Semana Científica da faculdade em que os alunos estão inseridos. Com a reprovação do aluno A3 e desistência do aluno A13, não houve a finalização do trabalho do grupo 3. Além disso, mesmo desenvolvendo o trabalho de forma individual, o aluno A14 não detalhou os modelos matemáticos por ele determinados e os registros gráficos por ele apresentados não possuíam relação com os modelos matemáticos. Quando questionado com relação a planilha de dados e os registros apresentados, A14 não mostrou pré-disposição em sua correção. Nesse sentido, optamos em retirar esse trabalho da análise dos dados.

A temática das atividades e os grupos constam na Tabela 6.2.

**Tabela 6.2:** Coleta de dados e atividades de modelagem matemática desenvolvidas

Momento da modelagem matemática	Atividade	Alunos
1°	Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?	Todos
2°	Funcionamento de um circuito elétrico: Um estudo sobre a resistência elétrica e temperatura de um ferro de passar roupas.	Todos
2°	Funcionamento de um circuito elétrico: Um estudo sobre a resistência elétrica e temperatura de uma lâmpada incandescente.	Todos
3°	Análise de frequência e rotação em um motor	A1, A2, A10 e A15
3°	Análise de corrente e fator de potência em um transformador abaixador	A5, A8, A11 e A12
3°	Relação entre carga e fator de potência em um motor elétrico	A6, A7, A9 e A16

Fonte: Dos autores.

A seguir apresentamos a descrição das atividades desenvolvidas nos diferentes momentos de familiarização.

## 6.2 Atividade 1: Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?

A atividade denominada “Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?”, corresponde a primeira atividade de modelagem matemática desenvolvida pelos alunos e foi desenvolvida no decorrer de 6 aulas (360 minutos) (Figura 6.1).

**Figura 6.1:** Atividade de primeiro momento: Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?

### QUAL O MELHOR TIPO DE LÂMPADA: HALÓGENA, FLUORESCENTE OU LED?

No decorrer dos anos, o consumo de energia vem aumentando e consequentemente necessita-se de uma demanda de potência maior e mais fontes geradoras de energias. Pensando nesses fatores, as indústrias que detêm de grandes tecnologias, vêm se aperfeiçoando e melhorando seu funcionamento, com o objetivo de manter a qualidade do produto, melhorar sua eficiência energética e reduzir o consumo de energia.

Sem sombra de dúvidas, uma das maiores invenções foi a criação das lâmpadas incandescentes, substituindo os lampiões a gás e abrindo caminhos para o desenvolvimento de outras posteriores tecnologias. Sua luz é produzida por meio de um filamento de carbono de alta resistência em alto vácuo contido em bulbo de vidro, porém apresenta consumo elevado de energia elétrica e possui menor durabilidade. Pode-se destacar um dos tipos de lâmpadas incandescentes, denominadas de lâmpadas halógenas, por conter elementos halógenos como iodo ou bromo em seu bulbo, apresentando maior eficiência.

Gradativamente, as lâmpadas incandescentes foram sendo substituídas pelas lâmpadas fluorescentes, cuja emissão de luz para o ambiente acontece quando é energizada uma reação química dentro de um tubo de vidro transparente, refletindo para o ambiente. Esse modelo, mais econômico que as lâmpadas incandescentes, dissipa menos energia em forma de calor para o ambiente.

Hoje em dia, existem lâmpadas mais modernas, como as LED ou as compactas fluorescentes, e que apresentam um baixo consumo de energia elétrica. Para seu funcionamento, as lâmpadas de LED, por exemplo, são basicamente constituídas de um diodo semicondutor.

Tipo	Lâmpada Halógena Osram	Lâmpada Fluorescente Osram	Lâmpada LED Lexman
Preço	RS 9,99	RS 15,69	RS 62,90
Potência	70W	23 W	15 W
Tensão	127V	127V	Bivolt
Temperatura de Cor	2700 K	2700 K	3000 K
Fluxo Luminoso	1450 lm	1449 lm	1521 lm
Abertura de fecho	360 °	180 °	360 °
Base	E27	E27	E27
Vida Mediana	1000 h	6000 h	25000 h
Fonte	Disponível em: < <a href="http://www.feroymerlin.com.br/lampada-halogeno-osram-bulbo-70w-amarela-127v--110v-89145182">http://www.feroymerlin.com.br/lampada-halogeno-osram-bulbo-70w-amarela-127v--110v-89145182</a> >. Acesso em: 19/01/2017.	Disponível em: < <a href="http://www.feroymerlin.com.br/lampada-fluorescente-osram-3u-23w-amarela-127-110v-89384372">http://www.feroymerlin.com.br/lampada-fluorescente-osram-3u-23w-amarela-127-110v-89384372</a> >. Acesso em: 19/01/2017.	Disponível em: < <a href="http://www.feroymerlin.com.br/lampada-led-lexman-bulbo-15w-amarela-bivolt_89280863">http://www.feroymerlin.com.br/lampada-led-lexman-bulbo-15w-amarela-bivolt_89280863</a> >. Acesso em: 19/01/2017.

Fonte: Dos autores.

Neste primeiro momento, a professora apresentou a situação-problema, em que a formulação do problema e sua investigação, na busca de uma resposta ao problema foram realizadas em conjunto entre alunos e a professora.

Cabe salientar que a orientação dada pela professora indicou possíveis caminhos de resolução, questionou procedimentos dos alunos, tirou dúvidas, oferecendo aos alunos o apoio necessário para o desenvolvimento da atividade.

A temática escolhida sobre lâmpadas está associada à disciplina de Eletricidade Básica do curso de Tecnologia em Manutenção Industrial. Tendo como intenção investigar uma situação-problema conhecida, foi apresentado aos alunos, um trecho de um vídeo que aborda características dos diferentes tipos de lâmpadas. O vídeo está disponível no YouTube, no canal Manual do Mundo<sup>11</sup>, indicando características dos diferentes tipos de lâmpadas (LED, fluorescente ou halógena) e mostra qual a melhor opção de lâmpada por meio de realização de testes.

Após a apresentação do vídeo foram discutidos alguns aspectos da situação-problema, na busca da definição de um problema. A transcrição a seguir indica aspectos relevantes desse diálogo.

*P: Vocês viram que a lâmpada halógena também esquenta como a lâmpada incandescente, devido ao seu filamento de tungstênio. Então o que a gente poderia investigar?*

*A6: Pode estudar qualquer coisa: preço, potência, tensão...*

*A7: Professora, a lâmpada halógena possui o quase mesmo preço que a fluorescente. Além disso gasta muito mais e sua durabilidade é menor.*

*P: Para podermos fazer uma comparação dos três tipos de lâmpadas, o que podemos calcular?*

*A6: Custo.*

*P: Sim, o custo de que?*

*A6: Custo da hora?*

*A8: Custo por dia?*

*A10: Precisa considerar o custo da lâmpada...*

*A9: Precisa considerar a vida útil da lâmpada...*

*P: Sim, mas o que eu vou calcular? Somente o custo da lâmpada?*

---

<sup>11</sup> Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=qtsYcq-u3J0>>. Acesso em: 30 fev. 2017.

*A7: Não. Quanto ela gasta também, quanto ela consome de energia...*

*A9: O consumo, o custo...*

Essas discussões constituíram o ponto de partida para a formulação do problema: *Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?* Isso indica que para a construção dos modelos para os diferentes tipos de lâmpadas, seria importante considerar o custo da energia elétrica e aquisição de cada lâmpada.

Visando resolver esse problema, são importantes ações como simplificar informações, formular suposições e selecionar variáveis. Neste caso, é importante selecionar as informações do enunciado, com o intuito de compreender o problema em estudo. Este detalhamento foi realizado na interlocução entre professora e alunos conforme indica parte de um diálogo.

*P: Nesta atividade estamos comparando uma lâmpada halógena de 70 W, uma fluorescente de 23W e uma LED de 15W. O método escolhido para comparação foi observar o mesmo fluxo luminoso e não utilizar de uma tabela pronta para comparação.*

*P: Quais são as informações necessárias para estudar o custo de cada tipo de lâmpada?*

*A4: Duração.*

*P: A duração que corresponde a vida mediana.*

*A: Preço.*

*A: Potência também!*

*A11: Precisa verificar o valor da energia também!*

As informações como fluxo luminoso, vida mediana, preço e potência de cada lâmpada foram obtidas do enunciado da atividade, contudo, para o cálculo do custo de energia elétrica deveria ser estabelecido como suposição o valor da tarifa residencial convencional fornecida pela Companhia de Energia Elétrica. Isso foi definido conforme indica a transcrição do diálogo a seguir.

*P: Como o valor da energia elétrica não está disponível na atividade, vamos inserir em nossas suposições. Deste modo, vamos supor o valor da energia tendo como base o valor cobrado pela Copel.*

*P: Vocês viram quanta coisa precisamos pensar quando resolvemos uma atividade?*

*A6: Ah, professora, confesso que não conseguiria pensar em tudo isso!*

A6: *Pensar é fácil, o difícil ...*

A9: *... é pensar da forma correta!*

P: *Mas o nosso pensamento não é tão linear assim! Poderíamos iniciar pelo problema, depois pelo desenvolvimento do modelo, as suposições...*

A6: *Eu usaria regra de três!*

A6: *Só sei usar regra de três professora!*

A9: *Tudo precisa se adequar na regra de três! [risos]*

P: *Para as suposições vamos utilizar o mesmo custo de tarifa daquela utilizada para a avaliação diagnóstica de janeiro de 2017. O valor do custo é de R\$ 0,64543.*

P: *É importante utilizar todas as casas decimais para o cálculo?*

A6: *Sim.*

A16: *Senão interfere no resultado!*

P: *Qual foi o critério utilizado para a comparação das lâmpadas?*

A9: *Lúmens.*

P: *Então vamos supor que todas as lâmpadas apresentam aproximadamente os mesmos níveis de luminosidade.*

P: *Existe também outra suposição bem importante, que diz respeito a durabilidade de cada lâmpada. Vamos supor que a lâmpada dura o mesmo tempo que sua vida útil, ou seja, que a lâmpada halógena dura 1000 horas, a fluorescente dura 6000 horas e a LED dura 25000 horas.*

A: *Não seria importante calcular o tempo por dia?*

P: *Por exemplo, se a gente supor que utilizaremos uma lâmpada halógena por ano, qual seria o tempo utilizado por dia?*

A: *2,7 horas.*

P: *São aproximadamente 3 horas por dia, que ficamos com uma lâmpada acesa.*

A6: *Em um ano, utilizamos cerca de 3 horas por dia.*

P: *Neste caso, a lâmpada halógena queima em um ano. A fluorescente queima em quanto tempo?*

A: *6 anos.*

P: *E a LED?*

A: *25 anos.*

P: *Alguma modificação nessas suposições, teríamos outra resolução, outro modelo matemático.*

Os alunos, em conjunto com a professora, definiram algumas suposições que guiaram o desenvolvimento da atividade: 1) Será considerado a tarifa residencial convencional B1 de 01/2017 no valor de R\$ 0,64543; 2) As lâmpadas halógena, fluorescente e LED apresentam níveis aproximados de luminosidade; 3) Considera-se que a durabilidade de cada lâmpada é a mesma que sua vida útil e que em um ano utiliza-se de 1000 horas de cada lâmpada.

Para a construção dos modelos para os diferentes tipos de lâmpadas, foram definidas como variáveis:  $t$  (tempo em horas),  $C_h$  (custo da lâmpada halógena em reais),  $C_f$  (custo da lâmpada fluorescente em reais) e  $C_L$  (custo da lâmpada LED em reais). Para a lâmpada halógena, foi considerada a vida útil da lâmpada de 1000 horas e potência de 0,07 kW.

Inicialmente, os alunos em conjunto com a professora se empenharam em construir uma tabela para relacionar as variáveis. O diálogo a seguir indica como se deu essa construção.

*P: Qual é o custo ao usar 1000 horas da lâmpada halógena?*

*A: R\$ 9,99*

*A6: mais ...*

*P: Vamos calcular o custo de energia elétrica de forma separada.*

*A11: 1000 horas multiplicado por 70 kW.*

*P: 70 W né?*

*P: Então na verdade o custo é o consumo multiplicado pela tarifa. Vamos construir uma fórmula só, para ficar mais fácil deduzirmos nosso modelo. Nas outras vezes que trabalhamos com o custo, estávamos trabalhando sempre com duas fórmulas...*

*P: Agora temos o raciocínio do A14 explicando para o A4. Você lembra A4?*

*A4: Que eu estava errado?*

*P: Não, você não estava errado!*

*P: Sabe por que deu bastante diferença no custo de energia elétrica da sua resolução e do aluno A14? Porque você utilizou 30 dias em sua resolução e o A14 utilizou de 31 dias.*

*A14: Teve o problema do arredondamento também!*

*P: Mas, mesmo com o arredondamento, o resultado não seria tão diferente! Você utilizou um dia a mais e interferiu no resultado!*

*P: Neste caso temos que o A4 utilizou uma suposição diferente do A14! Uma suposição melhor seria utilizar 30 dias...*



*P: A4, A6 apenas vocês devem tomar cuidado com o arredondamento de números, que de fato vocês fazem!*

*P: Pessoal, como podemos calcular o consumo?*

*A16: Potência vezes...*

*A9: potência em kW*

*A: tempo*

*P: Potência multiplicada pelo tempo de horas de uso.*

Nesse caso foi possível determinar que o custo da energia elétrica é igual a tarifa residencial multiplicada pelo consumo. A Figura 6.2 apresenta uma tabela que relaciona o tempo de uso e custo para a lâmpada halógena, considerando o custo de energia elétrica e seu valor de aquisição.

**Figura 6.2:** Registro do aluno A10 - Tempo de uso e custo para a lâmpada halógena

Tempo (HORAS)	CUSTO: CUSTO ENERGIA + AQUISIÇÃO DA LÂMPADA
1000	$0,64543 \cdot 0,07 \cdot 1000 + 1 \cdot 9,99 = 55,17$
2000	$0,64543 \cdot 0,07 \cdot 2000 + 2 \cdot 9,99 = 110,34$
3000	$0,64543 \cdot 0,07 \cdot 3000 + 3 \cdot 9,99 = 165,51$

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Com o intuito de construir um modelo matemático para a lâmpada halógena, foi necessário compreender a relação entre o tempo e o custo, conforme aponta aspectos relevantes do diálogo.

*P: Então em 1000 horas, temos o custo de  $0,64543 \times 0,07 \times 1000$ . Eu adquiri quantas lâmpadas em 1000 horas?*

*A6: Uma!*

*P: a um custo de R\$ 9,99.*

*P: Então em 1000 horas temos o valor de...*

*A6: R\$ 55,17.*

*P: E em 2000 horas?*

*A6: Só multiplicar por 2!*

*P: Mas e o custo de aquisição da lâmpada?*

*A7: Ah, não é. Não é!*

*P: A tarifa e a potência se mantêm, mas eu adquiri quantas lâmpadas?*

*A: 2!*

*P: Temos que a tarifa é multiplicada pela potência (que não se altera) pelo tempo de 2000 horas mais 2 vezes R\$ 9,99.*

*P: E em 3000 horas?*

*A7: R\$ 165,51.*

*P: Mas, para um tempo  $t$ , qual será o valor do custo?*

*P: Em 1000 horas, temos que o custo será de  $0,64543 \times 0,07 \times 1000$ ; em 2000 horas, temos que o custo será de  $0,64543 \times 0,07 \times 2000$  [apontando para a tabela]. Então no tempo  $t$ , temos que o custo será de  $0,64543$  multiplicado por  $0,07$  multiplicado por?*

*A9:  $t$ .*

*P: Vocês verificaram que a taxa multiplicada pela potência é fixa? Qual é o valor dessa multiplicação?*

*A: 0,0452.*

*A6: Precisa usar todas as casas decimais?*

*P: Seria bom utilizar de 4 a 5 casas decimais para essa multiplicação!*

Como o custo da energia elétrica é igual a tarifa residencial multiplicada pelo consumo e o consumo equivale a potência (em kW) multiplicada pelo tempo de uso (em horas) então podemos definir:

$$C_{energia}(t) = tarifa \cdot consumo$$

$$C_{energia}(t) = tarifa \cdot (potência \cdot tempo)$$

$$C_{energia}(t) = 0,64543 \cdot 0,07 \cdot t$$

$$C_{energia}(t) = 0,0452 \cdot t$$

Para determinar o modelo matemático para a lâmpada halógena, seria importante compreender primeiramente o registro gráfico dessa situação-problema (Figura 6.3). O diálogo aponta essa compreensão.

*P: Eu adquiri a lâmpada e comecei a gastar energia elétrica. Vocês estão percebendo que essa situação é um pouco diferente da ...*

*A9: Lâmpada do carro!*

*P: Naquele caso, eu não tinha influência do custo de energia, era sempre constante.*

*P: Neste caso, a partir do momento que eu adquiri uma lâmpada, o preço fixo aumenta de acordo com a energia elétrica.*

A11: *É uma escada com degrau inclinado! [...]*

P: *Sim! Vocês perceberam que o primeiro degrau vai até 1000 horas? Cada ponto que ocorre a compra de uma nova lâmpada, temos um 'salto'.*

A9: *Professora, você está considerando que todas as lâmpadas vão durar o mesmo tempo?*

P: *Sim. Está de acordo com as suposições: que a lâmpada halógena vai durar 1000 horas. Então, depois de 1000 horas eu adquiri uma nova lâmpada.*

Nesse sentido, A11 sinaliza indícios de compreensão do registro gráfico, quando salienta que “*é uma escada com degrau inclinado*”. Para a construção do gráfico, como aponta o diálogo, seria importante considerar os intervalos de durabilidade da lâmpada halógena.

P: *Para construir uma reta precisamos de quantos pontos?*

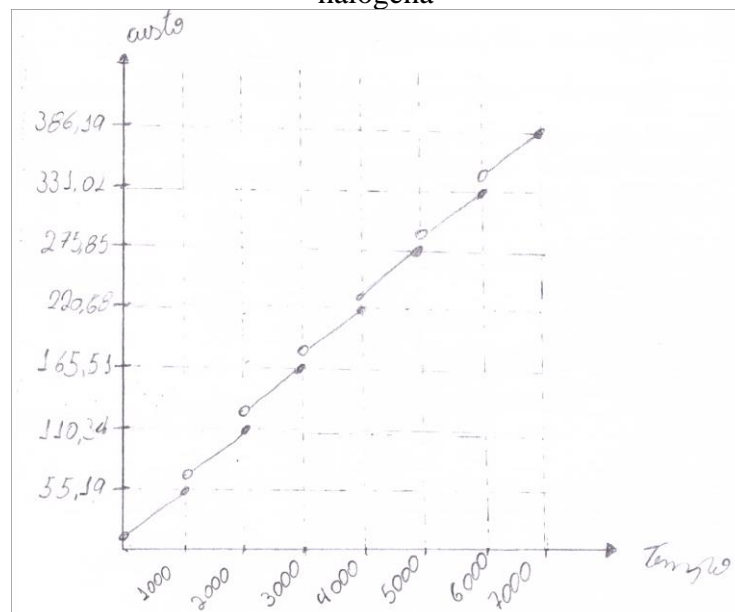
A7: *2 pontos.*

P: *Então nós temos que no intervalo de 0 até 1000 horas, o custo varia de R\$ 9,99 até R\$ 55,17. A partir desse ponto ( $t=1000$  horas) foi necessário a compra de uma nova lâmpada a um custo de R\$ 9,99.*

P: *Como podemos construir o gráfico?*

O registro gráfico que relaciona o tempo de uso e custo para a lâmpada halógena, considerando o custo de energia elétrica e seu valor de aquisição está indicada na Figura 6.3.

**Figura 6.3:** Registro do aluno A4 - Registro gráfico para o tempo de uso e custo da lâmpada halógena



Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Durante essa construção do registro gráfico, A11 argumenta no diálogo com a professora e os colegas, que “antes de utilizar uma lâmpada, nós teríamos que adquirir essa lâmpada”, ou seja, demonstra compreensão da situação-problema.

A11: Professora, não teríamos que pensar que antes de utilizar uma lâmpada, nós teríamos que adquirir uma lâmpada?

P: Então o que seria o  $t=0$ ?

A11: Seria R\$ 9,99. Porque já teríamos gasto com uma lâmpada.

A6: Sim. Não teríamos gasto de energia, mas já teríamos comprado uma lâmpada.

P: Então para construir o gráfico é importante considerar que no tempo  $t=0$  temos o custo de R\$ 9,99.

Para generalizar o modelo matemático do custo da lâmpada halógena, é importante perceber que durante o intervalo de 0 até 1000 horas, houve a aquisição de 1 lâmpada, do mesmo modo, durante o intervalo de 1000 a 2000 horas, houve a aquisição de 2 lâmpadas. Como estamos utilizando um objeto que pode ser contado, ou seja, a lâmpada, há a necessidade de utilização de uma função que é importante na matemática discreta, o que implica em considerar a função ‘menor inteiro’.

Em 500 horas, por exemplo, precisamos indicar a aquisição de uma única lâmpada. Consideramos então a divisão desse valor por 1000 (que significa a durabilidade da lâmpada) e o menor valor inteiro maior ou igual a esse resultado, ou seja, podemos utilizar a expressão  $\left\lceil \frac{500}{1000} \right\rceil = 1$ . Em 1000 horas, também há a aquisição de uma única lâmpada, pois  $\left\lceil \frac{1000}{1000} \right\rceil = 1$ . Em 1500 horas, temos  $\frac{1500}{1000} = 1,5$ , mas como sabemos que em 1500 horas, adquirimos duas lâmpadas, podemos utilizar a expressão  $\left\lceil \frac{1500}{1000} \right\rceil = 2$ . Neste caso, o modelo matemático que relaciona o tempo de uso e custo da lâmpada halógena está indicado na Figura 6.4.

**Figura 6.4:** Registro do aluno A10 - Modelo matemático do custo da lâmpada halógena

$$C_h(t) = \begin{cases} 0,0452t + \left\lceil \frac{t}{1000} \right\rceil \cdot 9,99 & \text{p/ } t > 0 \\ 9,99 & \text{p/ } t = 0 \end{cases}$$

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

A validação do modelo para a lâmpada halógena se deu no curso do desenvolvimento desta investigação, estabelecendo articulação de conceitos matemáticos com o contexto, com as suposições estabelecidas e de conceitos relativos à área do curso.

Em momento posterior<sup>12</sup>, os alunos distribuídos em grupos se empenharam em responder os problemas: i) *Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?*; ii) *A partir de quantas horas de utilização é mais vantajosa a lâmpada LED? Assim, o diálogo a seguir aponta essa discussão a respeito das informações e variáveis necessárias para o estudo dos problemas.*

*A1: Teremos que definir as variáveis como foram definidas para a outra lâmpada.*

*A2: Tempo em horas e o custo total (que é a soma do custo de energia e o custo de aquisição da lâmpada).*

*A2: Essa lâmpada vai ser diferente porque a vida útil é de 6000 horas.*

*A15: Sim, e a potência também é diferente: 23 W.*

*A1: Então podemos calcular para 6000 horas, 12000 horas, 18000 horas e t.*

*A15: A tarifa de energia é de 0,64543. A potência é  $23 \times 10^{-3}$ , ou seja, 0,023 kW.*

*A1: A gente precisa calcular a potência em kW, qual é o valor da potência?*

*A15: 23W.*

*A1: Então 23W dividido por 1000 resulta em 0,023 kW.*

*A1: Agora precisamos definir uma função.*

Na busca da construção de um modelo matemático adequado para a situação, os alunos iniciaram a construção de uma tabela, conforme indica a transcrição do diálogo a seguir, relacionando o tempo de uso e o custo para a lâmpada fluorescente, considerando o custo de energia elétrica e seu valor de aquisição.

*A7: Utilizamos para o cálculo, a tarifa, a potência e o tempo. Esse aqui [se referindo a potência] não será o mesmo do que na lâmpada halógena.*

*A7: Então 0,64543 (tarifa) multiplicado por 0,023 (potência em kW)... Professora, aqui eu posso escolher o tempo que eu posso utilizar? [se referindo ao tempo para determinar o modelo]*

---

<sup>12</sup> A partir desse momento, as atividades de modelagem foram realizadas em grupos de acordo com a Tabela 6.1, contudo, optou-se pela descrição de dados relevantes presentes em suas discussões, não sendo abordada a discussão de cada grupo de forma individual.

*P: Sim, vocês determinam o tempo que querem utilizar!*

*A7: Então 0,64543 multiplicado por 0,023 multiplicado por 1000 (que é um valor que estou chutando aqui) mais ... Professora!*

*A6: A7, espera, por que você fez assim?*

*A7: Só foi um exemplo.*

*A6: Ah, tá. Porque a vida útil é de 6000 horas!*

*A7: Por exemplo calculei com  $t=1000$ , depois vou calcular para 6000 horas, 10000 horas.*

*A7: A6 deixa eu te perguntar: Aqui já não vou utilizar a função menor inteiro?*

*A6: Não aqui você está representando para vários valores de tempo. Só na formalização do modelo você utiliza essa função.*

*A7: Entendi. Então nesse caso, a gente só comprou uma lâmpada.*

*A7: Esse cálculo vai ter como resultado R\$ 30,53 [0,64543 multiplicado por 0,023 multiplicado por 1000 mais 1 multiplicado por 15,69].*

*A7: A6 deu certo aí?*

*A7: A próxima vamos fazer com  $t=6000$  horas.*

Neste caso, a articulação de conceitos matemáticos com o contexto é realizada pelos alunos, quando calculam o custo da lâmpada fluorescente para diferentes valores. A11 demonstra compreensão de conceitos relativos à área do curso, quando sinaliza que o resultado da multiplicação da tarifa da Copel pela potência para a lâmpada fluorescente é menor que o da lâmpada halógena. Esse diálogo entre A11 e A8 é descrito a seguir.

*A8: Esse 0,0452 é o que?*

*A11: É o resultado da multiplicação da lâmpada halógena, mas agora você está calculando para a lâmpada fluorescente. Na lâmpada fluorescente, a potência é menor!*

*A11: Você terá outro resultado!*

Para generalizar o modelo matemático do custo da lâmpada fluorescente, os alunos precisavam considerar a função menor inteiro. Para isso, os alunos sentiram a necessidade de compreender a definição da função menor inteiro (indicada no diálogo) e sua diferença com a função maior inteiro (Figura 6.5).

*A13: Professora, qual é o nome da função que você havia falado?*

*P: Função menor inteiro.*

*A6: Professora, por que função menor inteiro, se a gente vai usar sempre o maior inteiro?*

A6: Não podia ser o maior inteiro, já que vai usar o maior inteiro?

A7: Mas professora, por que isso?

A7: Professora, você deve estar se equivocando...

P: É o menor inteiro maior ou igual a  $x$ ...

P: Por exemplo, o número 1,5. Qual é o menor inteiro, maior ou igual a 1,5?

P: O número 2, é o menor inteiro, maior ou igual a 1,5.

A6: Ahh, tá!! É o menor inteiro maior ou igual a esse valor!

A9: Entendi!!

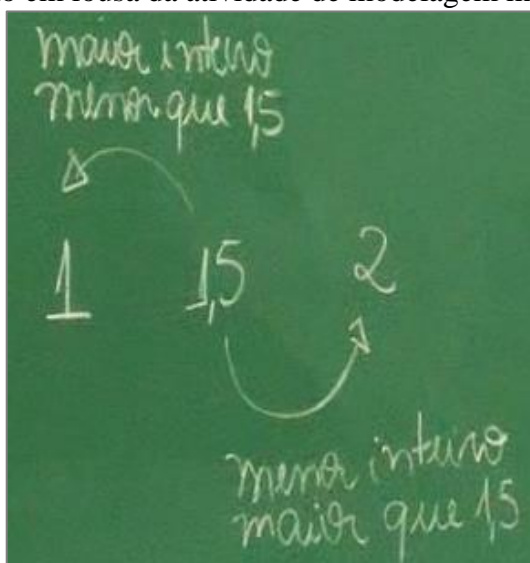
A7: Agora fala do outro: da função maior inteiro!

P: É o maior inteiro, menor ou igual a  $x$ .

A6: Professora, com relação ao número 1,5, seria o número 1?

P: Sim. O gráfico da função seria diferente, começaria com custo 0 e não de R\$ 9,99.

**Figura 6.5:** Diferença entre a função menor inteiro e maior inteiro  
[discussão em lousa da atividade de modelagem matemática]



Fonte: Dos autores.

O diálogo apresentado pelos alunos mostra a importância de compreender os intervalos de uso da lâmpada fluorescente para generalizar o modelo matemático.

A15: Vezes o tempo mais o tempo dividido pela hora?

P: Pela vida útil da lâmpada! Porque é exatamente nesse momento que preciso trocar a lâmpada novamente!

P: Depois de 1000 horas, precisei trocar a lâmpada novamente!

A15: Então nesse caso é  $t$  dividido por 6000!

*P: Sim, até 6000 horas eu utilizei uma lâmpada, depois de 6000 a 12000 horas utilizei duas lâmpadas.*

*A15: Se eu utilizar 9000 horas então eu vou precisar dessa fórmula? [se referindo a função menor inteiro]*

*A1: Por enquanto aqui sempre está dando certinho [se referindo aos valores de  $t=6000$ , 12000, 18000 que utilizaram]*

*P: Por exemplo se utilizarmos um valor entre 6000 e 12000, ou seja, 9000.*

*P: Então 9000 dividido por 6000 resulta em 1,5. Neste caso teríamos que arredondar para qual valor?*

*A15: É 1 ainda professora!*

*A1: Não, é 2.*

*P: É a segunda lâmpada.*

*A1: Arredondar para 2? Para cima?*

*A15: Sim, para cima. Porque já passou de uma lâmpada. É isso?*

*P: Sim, já passou de uma lâmpada.*

*A15: Não existe 1,5 lâmpadas.*

A11 estabelece essa articulação de conceitos matemáticos com o contexto e demonstra compreensão de conceitos relativos à área do curso, quando realiza a comparação entre a lâmpada halógena e fluorescente e diz: “*Você precisa ver: O que muda de uma função para outra? É a vida útil da lâmpada fluorescente*”, então consideramos a divisão de  $t$  por 6000 (Figura 6.6).

*A11: Você precisa ver: O que muda de uma função para outra? [Comparando a lâmpada halógena e fluorescente]*

*A8: É o valor de  $t$ ...*

*A11: Não, qual é a vida útil da lâmpada fluorescente?*

*A8: 6000!*

*A11: Então, menor inteiro  $t$  dividido por 6000! [...]*

*A11: No denominador, você precisa inserir a vida útil que varia de uma lâmpada para outra.*

*A potência e o custo também variam de uma lâmpada para outra.*



**Figura 6.6:** Registro do aluno A11 - Modelo matemático para os diferentes tipos de lâmpada

podemos calcular a quantidade em relação ao tempo através da fórmula  $\left[ \frac{t}{\text{vida útil}} \right]$

$$\text{Custo} = \text{Consumo} + \text{quant. preço (UN)}$$

$$\text{Custo} = \text{lâmpada (R\$)} \cdot \text{potência (kW)} \cdot \text{tempo (h)} + \text{quantidade de lâmpada} \cdot \text{preço (UN)}$$

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Dessa maneira, os alunos empreenderam na construção de diferentes registros tabulares para lâmpada fluorescente relacionando o tempo de uso e seu respectivo custo, conforme indicam as Figuras 6.7 e 6.8.

**Figura 6.7:** Registro do aluno A6 - Modelo matemático do custo da lâmpada fluorescente

FARIFA	Potência	tempo
0,64543	0,023	1000
0,64543	0,023	6000
0,64543	0,023	10000

$$0,64543 \cdot 0,023 \cdot 1000 + 1 \cdot 15,69 = 30,534$$

$$0,64543 \cdot 0,023 \cdot 6000 + 1 \cdot 15,69 = 104,759$$

$$0,64543 \cdot 0,023 \cdot 10000 + 2 \cdot 15,69 = 179,828$$

$$CF(t) = \begin{cases} 0,0148 \cdot t + \left\lceil \frac{t}{6000} \right\rceil \cdot 15,69 & \text{PARA } t > 0 \\ 15,69 & \text{SE } t = 0 \end{cases}$$

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

**Figura 6.8:** Registro do aluno A2 - Modelo matemático do custo da lâmpada fluorescente

tempo	CUSTO
3.000	$0,64543 \cdot 0,023 \cdot 3000 + 1 \cdot 15,69 = 60,22$
6.000	$0,64543 \cdot 0,023 \cdot 6000 + 1 \cdot 15,69 = 104,75$
9.000	$0,64543 \cdot 0,023 \cdot 9000 + 2 \cdot 15,69 = 164,98$
12.000	$0,64543 \cdot 0,023 \cdot 12000 + 2 \cdot 15,69 = 209,53$
15.000	$0,64543 \cdot 0,023 \cdot 15000 + 3 \cdot 15,69 = 269,74$
18.000	$0,64543 \cdot 0,023 \cdot 18000 + 3 \cdot 15,69 = 314,27$

$$CF(I) = \begin{cases} 0,01484 \cdot I + \left\lceil \frac{I}{6000} \right\rceil \cdot 15,69 & \text{para } I > 0 \\ 15,69 & \text{para } I = 0 \end{cases}$$

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Do mesmo modo que a lâmpada fluorescente, os alunos empreenderam na construção de diferentes registros tabulares para lâmpada LED relacionando o tempo de uso e seu respectivo custo, conforme indicam as Figuras 6.9 e 6.10.

**Figura 6.9:** Registro do aluno A6 - Modelo matemático do custo da lâmpada LED

FARIFA	potência	tempo
0,64543	0,015	1000
0,64543	0,015	15000
0,64543	0,015	30000
0,64543	0,015	75000

$$0,64543 \cdot 0,015 \cdot 1000 + 1 \cdot 62,90 = 72,58$$

$$0,64543 \cdot 0,015 \cdot 15000 + 1 \cdot 62,90 = 208,12$$

$$0,64543 \cdot 0,015 \cdot 30000 + 2 \cdot 62,90 = 416,24$$

$$0,64543 \cdot 0,015 \cdot 75000 + 3 \cdot 62,90 = 914,80$$

$$CL(t) = \begin{cases} 0,00968t + \left\lceil \frac{t}{25000} \right\rceil \cdot 62,90 & \text{PARA } t > 0 \\ 62,90 & \text{PARA } t = 0 \end{cases}$$

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

**Figura 6.10:** Registro do aluno A2 - Modelo matemático do custo da lâmpada LED

tempo	CUSTO
6.000	0,64543 \cdot 0,015 \cdot 6000 + 62,90 = 120,98
9.000	0,64543 \cdot 0,015 \cdot 9000 + 62,90 = 150,03
12.000	0,64543 \cdot 0,015 \cdot 12000 + 62,90 = 179,07
15.000	0,64543 \cdot 0,015 \cdot 15000 + 62,90 = 208,12
18.000	0,64543 \cdot 0,015 \cdot 18000 + 62,90 = 237,16
21.000	0,64543 \cdot 0,015 \cdot 21000 + 62,90 = 266,21
24.000	0,64543 \cdot 0,015 \cdot 24000 + 62,90 = 295,25
27.000	0,64543 \cdot 0,015 \cdot 27000 + 125,80 = 387,19

$$CL(x) = \begin{cases} 0,00968145 \times x + \left\lceil \frac{x}{25000} \right\rceil \times 62,90 & \text{para } x > 0 \\ 62,90 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Durante o desenvolvimento da atividade, os alunos realizam a validação dos modelos matemáticos encontrados, estabelecendo articulação de conceitos matemáticos com o contexto, com as suposições estabelecidas. Por exemplo, A6 e A7 sinalizam essa validação, conforme mostra o diálogo, quando realizam a comparação do custo da lâmpada fluorescente para 10000 horas com o modelo matemático formulado (Figura 6.11).

A7: *Vixe, mas vai dar muita diferença!*

A6: *Deu diferença de dois centavos.*

A7: *Faz do último para você ver!*

A7: *Professora, não ficou bom!*

P: *Por quê?*

A7: *Aqui deu diferença de centavos, mas quando eu for para 10000 h, está dando muita diferença.*

P: *Mas como você está fazendo a conta?*

A6: *Deu diferença de 50 centavos.*

P: *Comece pela divisão de 10000/6000.*

A7: *2 lâmpadas. Então, 0,0148 multiplicado por 10000 mais duas vezes 15,69.*

A7: *179,38.*

A7: *Deu certo A6, tinha dado R\$ 276,00!*

**Figura 6.11:** Registros escritos do aluno A6 - Validação dos modelos matemáticos para as lâmpadas fluorescente e LED

$t$	$C_F$	$t$	$C_L$
0	15,69	0	62,90
1000	30,49	1000	72,58
6000	104,49	15000	208,1
10000	179,38	30000	416,2
15000	269,07	75000	914,7

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Após essa construção de modelos matemáticos para as lâmpadas fluorescente e LED, os alunos iniciam a discussão para a construção de um registro gráfico, ou seja, a construção de uma função que não é linear. Este detalhamento foi realizado na interlocução entre professora e alunos conforme indica parte de um diálogo.

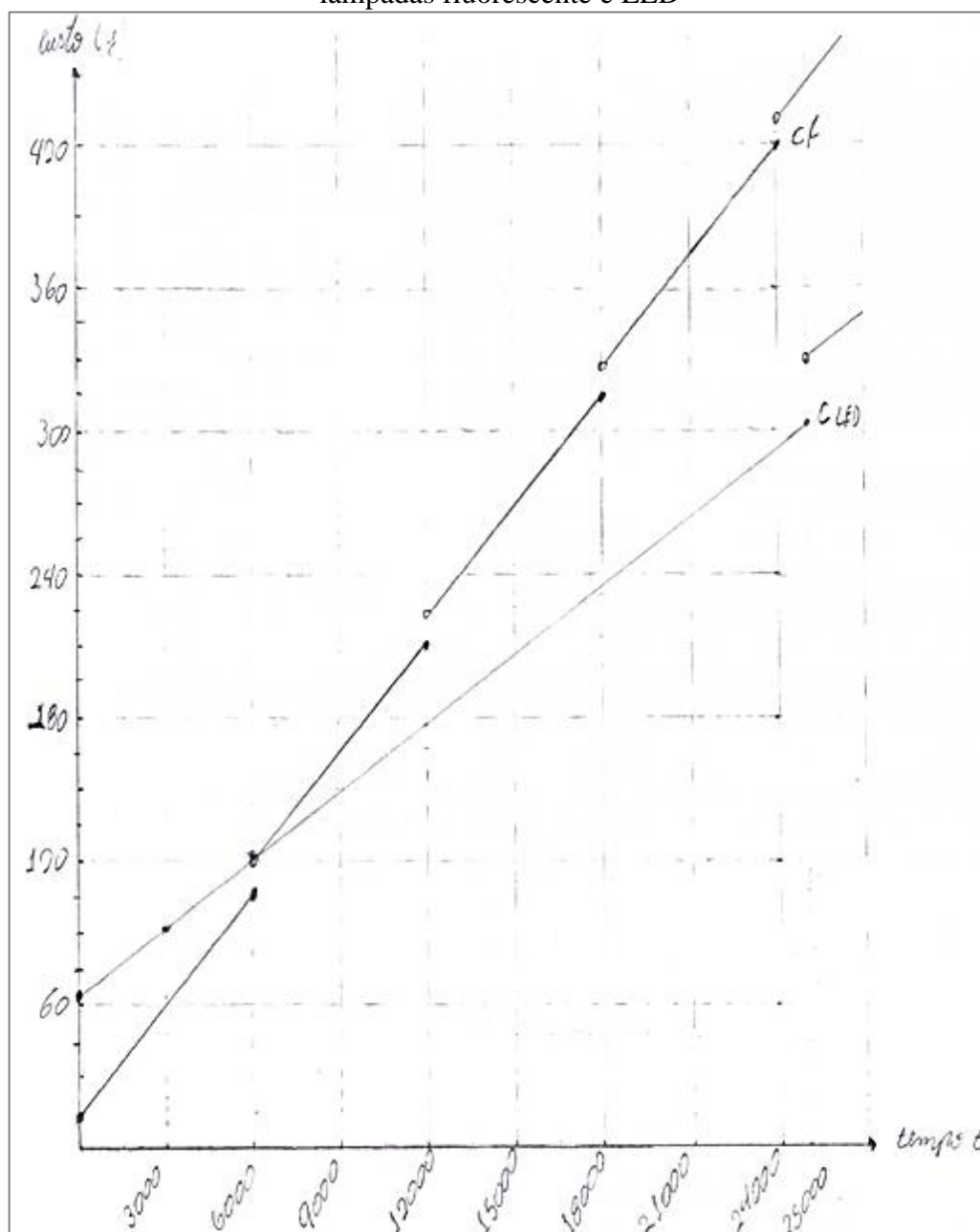
A15: *Só recordando professora, por que foi construído esse gráfico dessa forma?*

A1: *Devido ao custo da lâmpada... Não pode ser uma reta...*

P: *A aquisição da lâmpada apresenta como um valor inteiro, ou seja, eu compro uma lâmpada, eu compro duas lâmpadas, etc.*

Estabelecendo como variáveis o tempo de uso de cada lâmpada e seus custos, para a construção de um registro gráfico, os alunos precisam definir a sua escala. Desse modo, para responder o problema proposto, seria importante construir o gráfico da lâmpada fluorescente e LED no mesmo eixo coordenado (Figura 6.12).

**Figura 6.12:** Registro do aluno A4 - Registro gráfico para o tempo de uso e custo das lâmpadas fluorescente e LED



Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Para a construção do registro gráfico, os alunos precisam compreender características da função menor inteiro. Neste caso, os segmentos de reta dessa função precisam “seguir o

*mesmo rumo*”, conforme salienta A8 no diálogo, ou seja, precisam ter a mesma inclinação, o que sinaliza a compreensão de um registro gráfico.

*A8: No gráfico você vai colocar custo e tempo. No caso, a escala você precisa definir!*

*A8: Olha lá... Os outros precisavam seguir o mesmo rumo, vai ficar estranho. [a respeito da inclinação dos segmentos de reta]*

*A12: Vai ter que apagar!*

*A8: Posso apagar, mas vai ficar embolado desse jeito! É assim e não tem jeito!*

Tendo como intuito responder o problema ‘*A partir de quantas horas de utilização é mais vantajosa a lâmpada LED?*’, seria necessário, primeiramente, a comparação dos valores de custo da lâmpada fluorescente com os valores obtidos pela lâmpada LED, com o intuito de estabelecer em qual intervalo da lâmpada fluorescente, os custos das duas lâmpadas permaneceriam os mesmos. Nesse momento, a professora auxilia os grupos de alunos na busca de um caminho para responder o problema. O diálogo a seguir indica como se deu essa construção.

*P: Vocês chegaram em alguma conclusão de qual tipo de lâmpada é melhor?*

*A6 e A7: Ainda não, estamos construindo o gráfico.*

*P: De acordo com os dados que vocês possuem da lâmpada fluorescente e LED, por exemplo, em 1000 horas o gasto com a lâmpada LED é maior do que a fluorescente. E em 6000 horas?*

*A6: Agora a gente vai inserir os mesmos valores no gráfico.*

*P: Mas vocês conseguem comparar o custo das lâmpadas da maneira que vocês colocaram aqui?*

*A9: Não, é mais difícil né?*

*P: Fica bem difícil a comparação.*

*A9: O certo era ter os mesmos valores de tempo.*

*P: Se vocês possuem os mesmos valores na tabela, fica mais fácil inserir no gráfico.*

*A7: Mas no gráfico a gente vai colocar os mesmos valores, ali era só a validação. Para comprovar que estava correto.*

*P: Então, vocês poderiam utilizar os mesmos valores para efeito de comparação. Eu não estou falando que está errado.*

*P: Para 1000 horas, foi fácil comparar. Agora se vocês tivessem calculado 6000 e 10000 horas para a lâmpada LED, já iria facilitar a comparação.*

*P: Por exemplo, vamos comparar a fluorescente e a LED em 15000 horas. [...] Quantas lâmpadas serão usadas em 15000 horas? 15000 dividido por 6000...*

*A9: Será a terceira lâmpada.*

*P: R\$ 269,07.*

*P: Vocês estão vendo que 15000 horas de utilização da lâmpada fluorescente é mais cara que a lâmpada LED?*

*A6: Aham.*

*A9: Então a partir da terceira lâmpada, a lâmpada LED fica mais barata....*

*P: Então, eu não sei.*

*A7: Vamos fazer a de 10000 horas daqui [se referindo a lâmpada LED].*

*P: Vamos fazer... Temos a utilização de uma só lâmpada [...] a um custo de R\$ 159,70.*

*P: Então temos que em 10000 horas de utilização da lâmpada LED, o custo ainda é menor do que a lâmpada fluorescente.*

*A6: Aham.*

*P: E 10000 horas está no segundo ou terceiro intervalo da fluorescente?*

*A9: Segundo.*

*P: Vamos fazer para 6000 horas para a lâmpada LED. [...]*

*A6: Para ver até qual ponto compensa uma e qual ponto compensa a outra.*

*P: Isso. Então em 6000 temos um custo de R\$ 120,98. Então vocês vendo que aqui [referindo o custo da LED] está maior que o custo da lâmpada fluorescente?*

*A6: Que é de R\$ 104.*

*P: Então vocês estão vendo que entre 6000 e 10000 horas, vai ter um ponto...*

*A9: Que o custo vai se equiparar....*

Nessa busca de estabelecer em qual valor o custo da lâmpada fluorescente seria o mesmo que a lâmpada LED, os alunos em conjunto com a professora, de acordo com o diálogo a seguir, realizam a construção de um sistema linear.

*P: Então olhando para o segundo intervalo da fluorescente, nós vamos ter quantas lâmpadas?*

*A7: Duas lâmpadas.*

*P: Eu posso falar que o custo da lâmpada fluorescente nesse intervalo é 0,0148 multiplicado pelo tempo somado com duas vezes 15,69?*

*A: Sim.*

P: Agora, aqui está no primeiro intervalo [se referindo a lâmpada LED] então o custo é 0,00968 multiplicado por tempo somado com 62,90. Tudo bem?

P: A gente sabe que nesse intervalo da lâmpada LED, para algum tempo, o custo está se equiparando ao custo da lâmpada fluorescente. Esse conjunto de equações, como é chamado em matemática?

A: Sistema Linear!

P: Então, resolvendo esse sistema o que eu vou encontrar?

A: O tempo que o custo será o mesmo para a fluorescente e LED.

As Figuras 6.13 e 6.14 mostram diferentes procedimentos matemáticos adotados pelos alunos para a resolução do sistema linear.

**Figura 6.13:** Registro do aluno A10 - Resolução do sistema linear

$$\begin{aligned}
 C - 0,0148t &= 31,38 \quad (-0,0096) \\
 C - 0,0096t &= 62,90 \quad (0,0148) \\
 \hline
 -0,0096C + 1,4208 \cdot 10^{-4}t &= -0,309248 \\
 0,0148C - 1,4208 \cdot 10^{-4}t &= 0,93092 \\
 \hline
 0,0052C &= 0,621672 \quad \rightarrow C = \frac{0,621672}{0,0052} \quad C = 121,09
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C - 0,0148t &= 31,38 \\
 121,09 - 0,0148t &= 31,38 \\
 \hline
 0,0148t &= 31,38 - 121,09 \\
 -0,0148t &= -89,71 \\
 T &= \frac{-89,71}{-0,0148} \quad T = 6061,4
 \end{aligned}$$

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Alguns grupos optaram por arredondar o valor 0,00968 para 4 casas decimais (Figura 6.13), contudo não consideraram que o algarismo eliminado foi maior que cinco. Neste caso, não acrescentaram uma unidade ao primeiro algarismo que está situado à esquerda desse algarismo eliminado. Sendo assim, o resultado é um valor diferente do tempo em que as duas lâmpadas apresentam o mesmo custo, conforme indica a Figura 6.14.

**Figura 6.14:** Registro do aluno A1 - Resolução do sistema linear

$C - 0,0148T = 31,38 \quad (-1)$ $C - 0,00968T = 62,90$ $-C + 0,0148T = -31,38$ $+ C - 0,00968T = 62,90$ <hr/> $-0,00512T = 31,52$ $T = \frac{31,52}{0,00512} \rightarrow T = 6156,25 \text{ horas}$ $C - 0,0148 \cdot T = 31,38$ $C = 31,38 + 0,0148 \times 6156,25$ $C = 122,49$ $C = 62,90 + 0,00968 \times 6156,25$ $C = 122,49$	<p>Quando o tempo for igual 6156,25 as duas lâmpadas tem o mesmo custo que é de R\$ 122,49.</p> <p>A partir de 6156,25 horas a lâmpada led se torna mais barata que a fluorescente.</p>
--	---

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Com o intuito de responder os problemas foi necessário definir variáveis, verificar informações e estabelecer suposições. O desenvolvimento de um modelo matemático para cada tipo de lâmpada, permitiu identificar a partir de quantas horas é mais vantajosa a lâmpada LED. Neste caso, ainda é necessário indicar qual é o melhor tipo de lâmpada, ou seja, responder o problema, conforme registra o diálogo a seguir.

*P: Para responder o problema, precisamos indicar qual é o melhor tipo de lâmpada. Essa palavra melhor é relativa. Por exemplo, para pouco tempo de utilização podemos pensar que a lâmpada fluorescente é melhor.*

*A9: Depende da quantidade de lâmpadas que vai comprar [...] custo de instalação.*

*P: Pessoal, vocês lembram que estabelecemos como critério que seria usado 1000 horas por ano? [...] Então, depois de quantos anos, vamos ter retorno de utilização da lâmpada LED?*

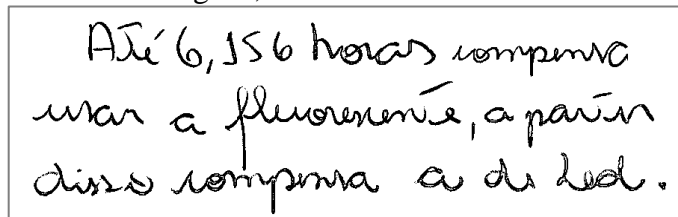
*A7: 6 anos.*

*P: Por isso, que essa palavra 'melhor' é relativa.*

Portanto, é possível responder que a partir de 6156 horas de utilização é mais vantajosa a lâmpada LED. Nesse sentido, os alunos demonstram compreensão do contexto e realizam articulação de conceitos matemáticos com o contexto, quando respondem o problema, conforme indica a Figura 6.15.



**Figura 6.15:** Registro do aluno A2 - Resposta ao problema ‘Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?’

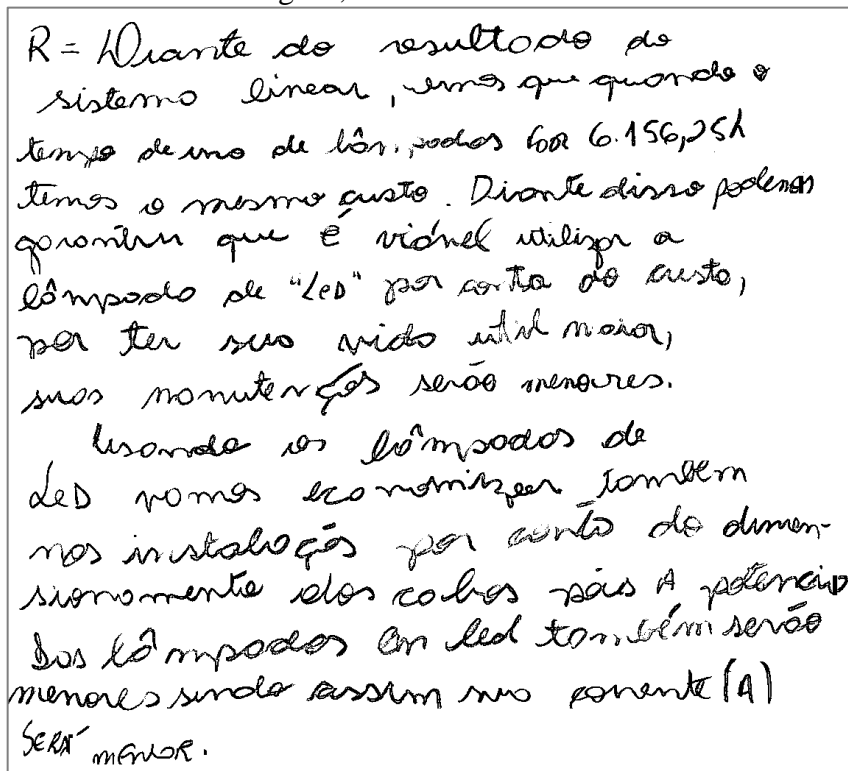


Até 6,156 horas comprou  
usar a fluorescente, a partir  
disso comprou a de led.

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

O aluno A6 demonstra compreensão de conceitos relativos à área do curso quando afirma “é viável utilizar a lâmpada de LED por conta do custo; por ter sua vida útil maior, suas manutenções serão menores. Usando as lâmpadas de LED, vamos economizar também nas instalações, por conta dos dimensionamentos dos cabos”, conforme indica a Figura 6.16.

**Figura 6.16:** Registro do aluno A6 - Resposta ao problema ‘Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?’



R = Diante do resultado do sistema linear, vemos que quando o tempo de uso de lâmpadas for 6,156,25h temos o mesmo custo. Diante disso podemos garantir que é viável utilizar a lâmpada de “led” por conta do custo, por ter sua vida útil maior, suas manutenções serão menores.

Usando as lâmpadas de led vamos economizar também nas instalações por conta do dimensionamento dos cabos pois a potência das lâmpadas em led também serão menores sendo assim no ponto (A) SERÁ menor.

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Para complementar a discussão da resposta ao problema, ‘Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?’, conceitos como eficiência luminosa foram discutidos. Os alunos mostraram ter conhecimentos sobre este conceito, de acordo com o diálogo apresentado a seguir.

P: Já ouviram falar em eficiência luminosa?

A: Aham.

A9: Quanto maior a eficiência da lâmpada, menor perda de lúmens por potência.

A9: A lâmpada halógena transforma muita energia em calor e menos energia em luz...

P: Toda essa interpretação que A9 está falando é importante para a atividade.

Nessa busca de escolher o melhor tipo de lâmpada, o ideal é buscar produtos com maior eficiência luminosa. O cálculo para determinar a eficiência luminosa de uma lâmpada pode ser estabelecido utilizando a razão entre a quantidade de luz que é medida pelo fluxo luminoso, cuja unidade é o lúmen (lm) e a potência elétrica da lâmpada que é medida em watt (W). A Figura 6.17 indica os registros escritos do aluno A1 tendo como base a eficiência luminosa dos três diferentes tipos de lâmpadas.

**Figura 6.17:** Registro do aluno A1 - Eficiência luminosa das lâmpadas halógena, fluorescente e LED

Handwritten student work showing calculations for luminous efficiency of three lamp types:

- Halógena  $\Rightarrow \frac{1450 \text{ lm}}{70 \text{ W}} \Rightarrow 20,71 \text{ lm/W}$
- Fluorescente  $\Rightarrow \frac{1449 \text{ lm}}{23 \text{ W}} \Rightarrow 63 \text{ lm/W}$
- Led  $\Rightarrow \frac{1523 \text{ lm}}{15 \text{ W}} \Rightarrow 101 \text{ lm/W}$

A lâmpada de led sem dúvidas é melhor.

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Os alunos concluíram que “a lâmpada de LED sem dúvidas é melhor”, sendo “quase cinco vezes melhor que a lâmpada halógena e quase duas vezes melhor que a lâmpada fluorescente”. Além disso estabeleceram relações com a atividade de modelagem desenvolvida, argumentando que “quanto maior a eficiência da lâmpada, menor o consumo e custo de energia” estabelecendo a articulação de conceitos matemáticos com o contexto.

6.2.1 Análise específica da atividade de modelagem: Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?

Os registros presentes na descrição da atividade ‘Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?’ evidenciam as fases de inteiração, matematização,

resolução, interpretação de resultados e validação. Na sequência apresentamos um resumo dos encaminhamentos dos alunos com assessoria da professora para o desenvolvimento dessa atividade, levando em consideração as quatro fases de modelagem matemática (Quadro 6.1).

Na fase de inteiração, a intervenção da professora foi relevante na definição do problema, por meio do auxílio na escolha de aspectos relevantes para seu estudo. Por exemplo, a partir de uma situação inicial problemática, que possuía várias grandezas para o estudo, tais como, preço, potência, tensão, temperatura, fluxo luminoso e vida mediana de cada tipo de lâmpada, definiu-se o estudo da relação matemática estabelecida entre custo e tempo de uso uma lâmpada. Ou seja, para iniciar o estudo da situação-problema foi formulada uma proposição, denominada de formulação do problema. Essa formulação envolveu a identificação de quais ferramentas matemáticas poderiam ser empregadas para seu estudo, além do conhecimento de características da situação-problema.

Na fase de matematização, ocorreu a simplificação de informações, a formulação de suposições e a seleção de variáveis. A simplificação permitiu selecionar os elementos importantes e desconsiderar os elementos periféricos, ao auxiliar, por exemplo, na identificação das grandezas para a situação em estudo, por exemplo de preço, potência e vida mediana de cada tipo de lâmpada. Essas grandezas estão relacionadas com as variáveis de tempo e custo relevantes para a situação.

A formulação de suposições como regra para a construção de proposições orientou no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Nesse caso, com o auxílio da professora, foram definidas suposições: um parâmetro para comparação dos diferentes tipos de lâmpadas, que corresponde ao nível de luminosidade; o valor da tarifa residencial de energia elétrica e a durabilidade de cada lâmpada. Essas suposições foram definidas pela gramática dos alunos e professora e captados por meio da percepção e intuição matemática dos modeladores.

Na fase de resolução, foram utilizadas regras matemáticas para a construção de um modelo matemático. Essas regras constituíram um indicador de direção para a atividade, envolvendo *diferentes linguagens para o estudo do conteúdo de funções*, as quais podemos citar: algébricas (Figura 6.4, 6.6, 6.7, 6.8, 6.9, 6.10), numéricas (Figura 6.2, 6.7, 6.8, 6.9, 6.10, 6.11, 6.13, 6.14, 6.17), gráficas (Figura 6.3, 6.12) ou por meio de palavras.

**Quadro 6.1:** Encaminhamento dos alunos para a atividade ‘Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?’

**INTEIRAÇÃO**

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

P: Então o que a gente poderia investigar?  
A6: Pode estudar qualquer coisa: preço, potência, tensão...  
A7: Professora, a lâmpada halógena possui o quase mesmo preço que a fluorescente. Além disso gasta muito mais e sua durabilidade é menor.  
P: Para podermos fazer uma comparação dos três tipos de lâmpadas, o que podemos calcular?  
A6: Custo.  
P: Sim, mas o que eu vou calcular? Somente o custo da lâmpada?  
A7: Não. Quanto ela gasta também, quanto ela consome de energia...  
A9: O consumo, o custo...

**MATEMATIZAÇÃO**

SIMPLIFICAÇÃO DE INFORMAÇÕES

P: Quais são as informações necessárias para estudar o custo de cada tipo de lâmpada?  
A4: Duração.  
P: A duração que corresponde a vida mediana.  
A: Preço.  
A: Potência também!  
P: Em que momento precisamos da potência?  
A9: Para calcular o consumo!  
A11: Precisa verificar o valor da energia também!

FORMULAÇÃO DE SUPOSIÇÕES

- 1) Será considerado a tarifa residencial convencional B1 de 01/2017 no valor de R\$ 0,64543;
- 2) As lâmpadas halógena, fluorescente e LED apresentam níveis aproximados de luminosidade;
- 3) Considera-se que a durabilidade de cada lâmpada é a mesma que sua vida útil e que em um ano utiliza-se de 1000 horas de cada lâmpada.

SELEÇÃO DE VARIÁVEIS

t (tempo em horas),  $C_h$  (custo da lâmpada halógena em reais),  $C_f$  (custo da lâmpada fluorescente em reais) e  $C_L$  (custo da lâmpada LED em reais).

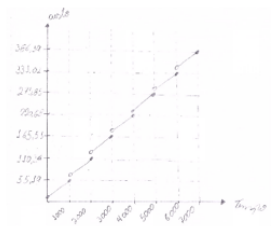

**RESOLUÇÃO**

CONSTRUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

**LÂMPADA HALÓGENA**

$$C_h(t) = \begin{cases} 0,04543t + \left[\frac{t}{1000}\right] \cdot 9,99 & t > 0 \\ 9,99 & t = 0 \end{cases}$$

Tempo (horas)	Custo	Custo: instalação + manutenção da lâmpada
1000	0,64543 · 0,07 · 1000 + 1 · 9,99 = 55,17	
2000	0,64543 · 0,07 · 2000 + 2 · 9,99 = 110,34	
3000	0,64543 · 0,07 · 3000 + 3 · 9,99 = 165,51	

Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?

**LÂMPADAS FLUORESCENTE E LED**

PARA	potência	tempo
0,64543 · 0,015 · 1000 + 1 · 15,69 = 20,534		
0,64543 · 0,015 · 2000 + 1 · 15,69 = 40,178		
0,64543 · 0,015 · 3000 + 1 · 15,69 = 59,822		

$$C_f(t) = \begin{cases} 0,0148t + \left[\frac{t}{1000}\right] \cdot 15,69 & \text{PARA } t > 0 \\ 15,69 & \text{SE } t = 0 \end{cases}$$

PARA	potência	tempo
0,64543 · 0,015 · 1000 + 1 · 62,90 = 72,38		
0,64543 · 0,015 · 2000 + 1 · 62,90 = 124,76		
0,64543 · 0,015 · 3000 + 1 · 62,90 = 177,14		

$$C_L(t) = \begin{cases} 0,00968t + \left[\frac{t}{25000}\right] \cdot 62,90 & \text{PARA } t > 0 \\ 62,90 & \text{PARA } t = 0 \end{cases}$$

**INTERPRETAÇÃO DE RESULTADOS E VALIDAÇÃO**

R = Quantidade resultante do sistema linear, sendo que quando o tempo de uma de lâmpadas for 64543,25 horas o mesmo custo.

Quando se compara os resultados de cada uma das lâmpadas, também nos instigamos por conta de diminuir o consumo de energia e a potência das lâmpadas em LED tem um consumo menor, sendo assim, não consome (A) seis meses.

Quando se compara os resultados de cada uma das lâmpadas, também nos instigamos por conta de diminuir o consumo de energia e a potência das lâmpadas em LED tem um consumo menor, sendo assim, não consome (A) seis meses.

Quando o tempo for igual 64543,25 as duas lâmpadas tem o mesmo custo que se de R\$ 122,49.

Apartir de 64543,25 horas a lâmpada led se torna mais barata que a fluorescente.

Nesta primeira atividade de modelagem matemática, a professora lançou mão de variadas técnicas para auxiliar na compreensão do conteúdo de *funções*. Iniciou a discussão com um conteúdo que os alunos já apresentavam familiaridade, ou seja, de função linear, para definir o modelo matemático do custo de energia elétrica. Em seguida, definiu de forma ostensiva o modelo matemático do custo da lâmpada halógena, por meio do uso da função menor inteiro.

Para generalizar o modelo matemático do custo da lâmpada halógena foi necessário construir um registro tabular e um registro gráfico relacionando o tempo de uso e seu o respectivo custo. Mas, para essa construção foi necessário compreender como realizar o cálculo do custo de energia elétrica para, em seguida, utilizar-se da função menor inteiro para descrever um registro algébrico do custo da lâmpada halógena.

Essa construção do modelo matemático do custo da lâmpada halógena permitiu que os alunos compreendessem em como prosseguir com as regras da matemática e da modelagem para a construção dos modelos para as lâmpadas fluorescente e LED.

Neste caso, foi possível verificar a articulação de diferentes linguagens, em que os alunos associaram, por exemplo, um registro gráfico a um algébrico, um registro numérico a um gráfico, um registro gráfico a um numérico, etc. Assim, para a compreensão do conteúdo de *funções*, nesta atividade, foram descritos diferentes usos desse conceito, por exemplo de função linear e menor inteiro, atribuindo-lhes suas características e propriedades.

Além disso, nesta atividade foi evidente o treinamento com as regras da modelagem matemática, em que a professora apresenta a situação-problema a respeito de diferentes tipos de lâmpadas (LED, fluorescente ou halógena), onde a formulação do problema (definição do melhor tipo de lâmpada) e a definição de suposições que guiaram o desenvolvimento da atividade e a construção de um modelo matemático relacionando o tempo e o custo para cada lâmpada, foram realizados em conjunto com a professora da disciplina.

A fase de interpretação de resultados e validação ocorreu durante o desenvolvimento desta atividade, por meio da articulação de conceitos matemáticos com o contexto, com os suposições estabelecidas e de conceitos relativos à área do curso. A Figura 6.11 ilustra a validação dos modelos matemáticos encontrados para a lâmpada fluorescente e LED.

É possível verificar também, durante o desenvolvimento da atividade, que os alunos empregavam conceitos relativos à área do curso, como por exemplo, consumo e custo de energia elétrica, eficiência luminosa (Figura 6.18). A utilização desses conceitos dá sentido as ações dos alunos na resolução da atividade.

**Figura 6.18:** Identificação de uso de conceitos relativos à área do curso durante a atividade ‘Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?’

<p>A11: É o resultado da multiplicação da lâmpada halógena, mas agora você está calculando para a lâmpada fluorescente. Na lâmpada fluorescente, a potência é menor!</p> <p>A9: Quanto maior a eficiência da lâmpada, menor perda de lúmens por potência.</p> <p>A9: A lâmpada halógena transforma muita energia em calor e menos energia em luz...</p>	<p>R = Quanto do resultado do sistema linear, vemos que quando o tempo de uso de lâmpadas for 6.156,25h temos o mesmo custo. Diante disso podemos garantir que é viável utilizar a lâmpada de "led" por conta do custo, por ter sua vida útil maior, suas manutenções serão menores.</p> <p>Usando as lâmpadas de led vamos economizar também nas instalações por conta da diminuição dos cabos pois a potência das lâmpadas em led também serão menores sendo assim sua corrente (A) será menor.</p>
---	---

Fonte: Dos autores.

Neste caso, verifica-se que houve uma maior dependência dos alunos e pequenas diferenças individuais no desenvolvimento dessa primeira atividade de modelagem matemática, pois, além de se familiarizar com conteúdo, por exemplo, de função menor inteiro, a integrar diferentes linguagens, os alunos também estavam se familiarizando com as regras da modelagem matemática.

É importante levar em consideração que ao desenvolver essa atividade, foi possível abordar conceitos relacionados às dificuldades abordadas na avaliação diagnóstica (Quadro 6.2).

**Quadro 6.2:** Abordagem da atividade ‘Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?’ tendo em vista as dificuldades apresentadas pelos alunos

Avaliação Diagnóstica	Atividade ‘Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?’
Os alunos estabeleceram como suposição que a relação entre as variáveis é, em geral, proporcional, ou seja, pode ser descrita por uma função linear.	Os alunos verificaram que essa função linear não se enquadrava ao contexto e determinaram em conjunto com a professora de que essa relação é determinada por uma função menor inteiro, assim, é possível inferir que houve a articulação do conteúdo matemático com o contexto.
A falta de compreensão de critérios adequados para a resolução das questões acarretou na falta de compreensão de uma linguagem gráfica, tabular ou algébrica, quando sinalizaram que a função que representa a situação-problema é linear.	Para a construção dos modelos para os diferentes tipos de lâmpadas, os alunos em conjunto com a professora consideraram o custo da energia elétrica e o valor de aquisição de cada lâmpada, ou seja, compreenderam o registro gráfico conforme indica o diálogo: <i>P: Neste caso, a partir do momento que eu adquiri uma lâmpada, o preço fixo aumenta de acordo com a energia elétrica.</i> <i>A11: É uma escada com degrau inclinado! [...]</i> Essa compreensão do registro gráfico, foi importante para generalizar o modelo matemático do custo das lâmpadas.
O arredondamento de números realizado pelos alunos em seu registro algébrico influenciou na precisão da resposta para o problema.	Durante a resolução da atividade, os alunos foram sensibilizados para o cuidado com o arredondamento de números, por exemplo, no cálculo do custo da energia elétrica: <i>P: Para as suposições vamos utilizar o mesmo custo de tarifa daquela utilizada para a avaliação diagnóstica de janeiro de 2017. O valor do custo é de R\$ 0,64543.</i> <i>P: É importante utilizar todas as casas decimais para o cálculo?</i> <i>A6: Sim.</i> <i>A16: Senão interfere no resultado!</i>
Os alunos não identificaram e integraram o conceito de função em suas diferentes linguagens.	Para generalizar o modelo matemático do custo das lâmpadas halógena, fluorescente e LED foi necessário construir um registro tabular e um registro gráfico relacionando o tempo de uso e seu o respectivo custo. Foi possível verificar a articulação de diferentes linguagens, em que os alunos associaram, por exemplo, um registro gráfico a um algébrico, um registro numérico a um gráfico, um registro gráfico a um numérico, etc.
A não articulação de conceitos matemáticos, mais especificamente de funções, com conceitos relativos à área do curso influenciou na resposta para o problema.	Os alunos, em suas falas, no decorrer da resolução da atividade, utilizaram conceitos relativos a Eletricidade Básica, como custo, consumo e potência de uma lâmpada. Por exemplo, na comparação do custo das lâmpadas, os alunos verificaram que o custo da lâmpada halógena é maior do que a fluorescente e da LED, devido a potência de cada lâmpada. Além disso, verificaram que a lâmpada LED possui maior eficiência que as outras lâmpadas, por apresentar menor perda de lúmens por potência.

Fonte: Dos autores.

A partir do desenvolvimento dessa primeira atividade de modelagem matemática, os alunos foram convidados a coletar dados para o desenvolvimento das atividades de segundo momento.

### 6.3 *Atividade 2: Funcionamento de um circuito elétrico: um estudo sobre a resistência elétrica e temperatura de um ferro de passar roupas*

A atividade denominada “Funcionamento de um circuito elétrico: um estudo sobre a resistência elétrica e temperatura de um ferro de passar roupas”, corresponde a segunda atividade de modelagem matemática desenvolvida pelos alunos (Figura 6.20).

Neste segundo momento, a professora sugere uma situação inicial e os alunos realizam a coleta de dados de um ferro de passar roupas. A formulação do problema e sua investigação, na busca de uma resposta ao problema, são assessoradas pela professora em sala de aula.

A temática escolhida sobre corrente, tensão, resistência e temperatura está associada à disciplina de Eletricidade Básica do curso de Tecnologia em Manutenção Industrial. A coleta de dados para o ferro de passar roupas ocorreu em sala de aula e teve duração de 90 minutos<sup>13</sup>. Um professor da disciplina de Eletricidade Básica também acompanhou os alunos para auxiliar na coleta de dados (Figura 6.19).

**Figura 6.19:** Instrumentos utilizados para coleta de dados



Fonte: Relatório dos alunos.

<sup>13</sup> A turma foi dividida em dois grupos para as coletas de dados: metade dos alunos participaram da coleta de dados do ferro de passar roupas e a outra metade da lâmpada incandescente. Cada grupo definiu os objetos a serem estudados (ferro de passar e lâmpada incandescente), bem como os instrumentos de medida.

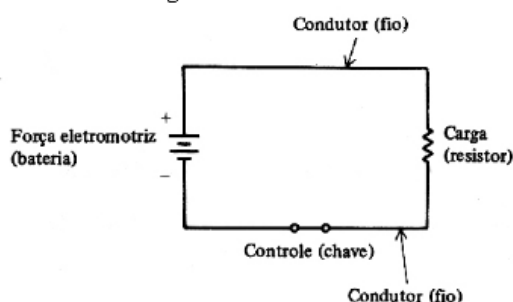


**Figura 6.20:** Atividade de segundo momento: Funcionamento de um circuito elétrico: um estudo sobre a resistência elétrica e temperatura de um ferro de passar roupas.

### FUNIONAMENTO DE UM CIRCUITO ELÉTRICO: UM ESTUDO SOBRE RESISTÊNCIA ELÉTRICA E TEMPERATURA DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS

Um circuito elétrico simples constitui-se de uma fonte de energia (baterias ou geradores), condutores (fios que ligam as diversas partes do circuito), uma carga (resistores, como por exemplo, lâmpada, ferro de passar roupas, torradeira, etc.) e um dispositivo de controle que utiliza energia elétrica da fonte para realizar algum trabalho (chaves, resistências, fusíveis, disjuntores ou relés) (GUSSOW, 2009).

**Figura 1:** Circuito fechado



Fonte: Gussow (2009, p. 48).

Em um material condutor, as cargas elétricas circulam desordenadamente até que uma força externa (tensão) seja imposta fazendo com que passem a ter um movimento ordenado (corrente). A corrente elétrica é a taxa de movimento de cargas elétricas por meio de condutores, sendo representada por  $I$  e é medida em ampères (A). A tensão elétrica é denotada por  $U$  e medida em volts (V).

A quantidade de corrente que flui em um circuito de corrente contínua pode ser determinada por dois fatores denominados de tensão e a resistência da carga. A resistência é a capacidade que os materiais possuem de se oporem ao fluxo da corrente elétrica. A resistência é denotada por  $R$  e sua unidade de medida é ohms ( $\Omega$ ).

Assim, a tensão provoca o fluxo de corrente e a resistência se opõe a este fluxo em um circuito fechado. Neste caso, existe uma relação entre a tensão, a corrente e a resistência.

Para a coleta de dados foram utilizados um Variac (dispositivo para auxiliar na variação da fonte de tensão), um multímetro (instrumento utilizado para medir a tensão), um amperímetro (instrumento utilizado para medir a intensidade da corrente) e um termômetro digital infravermelho (instrumento utilizado para medir a temperatura). O valor inicial do resistor do ferro de passar roupas era de  $R = 12 \Omega$ . Fixando os valores da corrente, foi possível obter um conjunto de dados, a partir de um ferro de passar roupas, conforme indica a Tabela 1.

**Tabela 1:** Dados observados referente ao ferro de passar roupas

Corrente (A)	Tensão (V)	Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ )
0,5	6,0	30,5
1,0	11,7	40
1,5	17,0	46
2,0	23,0	54
2,5	28,0	64
3,0	34,0	82

Fonte: Relatório dos Alunos.

*Referências:*

GUSSOW, M. *Eletricidade Básica*. São Paulo: Pearson Makron Books, 2009.

Para a coleta de dados foram utilizados um Variac (dispositivo para auxiliar na variação da fonte de tensão), um multímetro (instrumento utilizado para medir a tensão), um amperímetro (instrumento utilizado para medir a intensidade da corrente) e um termômetro digital infravermelho (instrumento utilizado para medir a temperatura)

Com o ferro de passar roupas desmontado, os alunos iniciaram a coleta de dados, mas não começaram a medir os dados a partir da resistência do ferro de passar roupas, ou seja, os dados coletados não indicavam a situação problema proposta. Uma outra dificuldade encontrada foi, como o Variac estava com um fusível de baixa amperagem, a partir da variação nos valores de tensão, inicialmente, houve sobrecarga e queima do fusível, conforme aponta o diálogo a seguir.

*A15: Ali vale 20 volts?*

*A5: Na verdade tem que ir medindo aí! [Se referindo a resistência do ferro]*

*A15: Medindo ali?*

*P1: Ali não vale nada!*

*A10: Ah, ali não vale nada? [...]*

*A10: Então aumenta a tensão agora.*

*A10: Tenta aumentar para 40V.*

*A12: Então 40 V, por quê zerou aqui?*

*A10: A corrente? Precisa aumentar!*

*A5: Já queimou!*

*P1: Desligou alguma coisa!*

*A10: Veja se não foi a tomada!*

*A12: Aqui não está variando!*

*P1: Vamos ter que arrumar outro fusível!*

*A10: Faz parte! [risos]*

*A11: Qual é a corrente máxima desse aparelho?*

*P1: [após leitura] 115 volts, 11 ampères*

*A11: Não era para ter queimado!*

*P1: Foi por conta do fusível...*

Com a utilização de um fusível de apenas 3 A, foi possível apenas coletar dados de corrente até esse valor, conforme informa A12, quando diz “Troca rapidão, pois estourou o fusível de novo!”, o que indica compreensão de conceitos relativos à área do curso. Assim,

fixando os valores de corrente, foi possível obter um conjunto de dados de tensão e temperatura, a partir de um ferro de passar roupas (Tabela 6.3).

**Tabela 6.3:** Dados observados referente ao ferro de passar roupas

Corrente (A)	Tensão (V)	Temperatura (°C)
0,5	6,0	30,5
1,0	11,7	40
1,5	17,0	46
2,0	23,0	54
2,5	28,0	64
3,0	34,0	82

Fonte: Relatório dos alunos.

Durante a coleta de dados, conforme registro de aspectos relevantes no diálogo abaixo, o aluno A12 comentou que seria interessante realizar a comparação de tempo e a temperatura do ferro de passar roupas.

*A12: Acho que a temperatura ficaria legal, se fosse em função do tempo!*

*P: Sim, nós vamos estudar sua relação com a tensão! Senão seria mais uma variável para vocês coletarem os dados!*

*A11: Conforme o tempo aumenta, a temperatura demora um tempo para estabilizar!*

*A8: Mas a gente não sabe qual é esse tempo!*

*P: Se tivesse usado um cronômetro!*

Os alunos em conjunto com a professora, definiram dois problemas a partir da coleta de dados: i) *Qual é o modelo matemático que descreve a relação entre tensão, corrente e resistência de um ferro de passar roupas?* ii) *Qual é o modelo matemático que descreve a relação entre tensão e temperatura de um ferro de passar roupas?* O estudo desses dois problemas ocorreu no decorrer de 6 aulas (360 minutos).

Inicialmente, ações como simplificar informações, formular suposições e selecionar variáveis são importantes na busca de responder os problemas propostos. De acordo com parte de um diálogo, este detalhamento foi realizado na interlocução entre os alunos.

*A1: O que investigar?*

*A1: Comportamento da tensão e da corrente e sua relação com a resistência.*

*A1: As variáveis são três.*

*A2: Sim, corrente, tensão e temperatura.*

A1: A resistência é fixa. A temperatura vai variar também.

A1: As informações foram coletadas com base em dados obtidos em sala de aula.

A2: Ah.. a gente vai comparar agora somente corrente e tensão!

A1: Sim, depois vamos analisar a temperatura.

Na busca de responder o primeiro problema ‘Qual é o modelo matemático que descreve a relação entre tensão, corrente e resistência de um ferro de passar roupas?’, os alunos empreenderam diferentes maneiras para a construção de um modelo matemático adequado para a situação, por exemplo, iniciaram a discussão a respeito da tendência dos dados relacionando a tensão e a corrente, conforme indica o diálogo e a Figura 6.21.

A15: De quanto em quanto a gente vai fazer o gráfico?

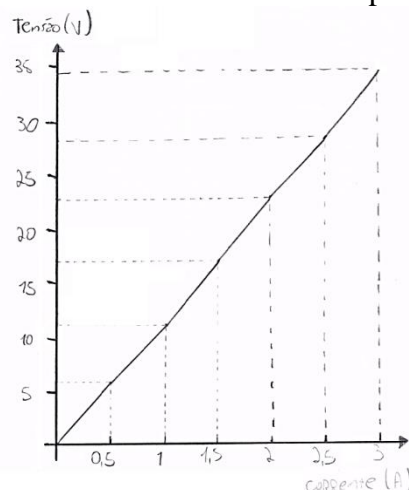
A1: Então, pelo que eu vi aqui é uma reta!

A15: É uma linear crescente!

P: Sim, seria importante vocês inserirem essas considerações nas suposições!

A1: Posso colocar aqui nas suposições, que a partir da tabela, foi possível elaborar um gráfico [...] Então tá.

**Figura 6.21:** Registro do aluno A7 - Registro gráfico para corrente e tensão de um ferro de passar roupas



Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

De acordo com o gráfico, os alunos estabeleceram como suposição que a relação entre tensão e corrente é representada por uma função linear ou, de outra maneira, que a tensão é proporcional à corrente elétrica aplicada no ferro. E, desse modo, iniciaram a discussão juntamente com a professora em como determinar o modelo matemático adequado para a situação-problema.

A1: E o desenvolvimento do modelo matemático?

P: Vocês precisam determinar uma relação entre tensão e corrente. Vocês já sabem da literatura qual é essa relação.

A1: Sim.

*P: Por exemplo, vocês já sabem qual é o valor da tensão para 3A, mas, e se quisermos estimar para 4A? Por isso, um modelo matemático permite determinar esse valor, fazer uma previsão quando não temos os dados reais.*

*A1: Por ser uma reta, podemos determinar uma constante. Por exemplo, 0,5 multiplicado por alguma coisa que dá 6 ou 6 dividido por 0,5 que resulta em uma constante.*

*A1: Professora, podemos determinar uma constante por meio da divisão da tensão pela corrente! A gente pode utilizar isso para construir uma fórmula?*

*P: Sim, perfeito. Pensem no conjunto de dados que vocês possuem para determinar o valor da constante.*

*P: A gente sabe que a resistência inicial era de 12  $\Omega$ , mas quando a gente extrai os dados, normalmente os dados apresentam um certo erro. Por exemplo, essa divisão deveria ser 12  $\Omega$ , mas resultou em 11,7  $\Omega$ . Por isso que é importante pensar nesse valor da constante tendo como base o conjunto de dados coletados. [...]*

*A1: A15, você que está com a calculadora, teria como dividir os valores de tensão pela corrente?*

*A15: Então o resultado é 12  $\Omega$ !*

*A1: O primeiro resultado sim, mas e o 11,7 V dividido por 1 A?*

*A2: Os resultados não batem certinho!*

Por meio da análise de informações da Tabela 6.3, os alunos dos grupos 1, 2 e 3 realizam a divisão dos valores de tensão pela corrente e discutem o valor da constante tendo como base o conjunto de dados coletados. Por exemplo, A1 relata no diálogo que poderia ser considerado o valor médio entre o maior e menor valor, contudo, conforme afirma A12 “A gente poderia calcular a resistência correspondente a cada valor e fazer uma média entre esses valores”, assim, os grupos optam em realizar a média aritmética do valor da constante (Figuras 6.22 e 6.23).

*A1: Então o que aconteceu aqui: A gente poderia encontrar uma média entre 11,2  $\Omega$  e 12  $\Omega$ , o valor médio entre esses valores. A variação seria pequena, pois nós pegamos o valor da maior resistência que é de 12  $\Omega$  (quando acabamos de ligar o ferro) e o menor valor. [...]*

*A1: A gente tem que encontrar aqui, um número, ...*

*A15: para usar como constante...*

*A1: Sim, para usar como constante! A gente faz esse valor multiplicado pelo valor da corrente e precisa chegar bem próximo do valor da tensão.*

A10: Vamos fazer com 11,6!

A1: A gente precisa fazer com cada valor, para verificar qual é o mais próximo para a resistência. Porque para alguns resultados fica muito próximo, mas para outros não.

P: O que vocês precisam pensar, qual é o valor da resistência que vocês vão considerar.

A1: Sim, a divisão deu de 11,2  $\Omega$  a 12  $\Omega$ . Estamos conversando para definir qual valor entre esses números seria melhor para definir o valor da tensão.

P: Sim. Vocês sabem que qualquer valor que vocês determinarem, vai ocorrer erros. Por isso que em matemática existem métodos e softwares específicos para determinar o melhor ajuste.

A10: 11,5 deu certo a maioria!

A10: Só dois valores que não coincidiram!

**Figura 6.22:** Registro do aluno A2 - Registro tabular para corrente e tensão de um ferro de passar roupas

CORRENTE (A)	TENSÃO (V)	CONSTANTE
0,5	6,0	12
1,0	13,7	13,7
1,5	21,0	14,0
2,0	27,00	13,5
2,5	28,00	11,2
3,0	34,00	11,3

$CONST = \frac{V}{C}$

\* Devido a variação no valor da resistência, por causa da influência da temperatura, a resistência medida utilizada é de 11,5  $\Omega$

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

**Figura 6.23:** Registro do aluno A11 - Modelo matemático que relaciona a tensão e corrente de um ferro de passar roupas

$$\text{VALOR MÉDIO DA CONSTANTE}$$

$$V_{mc} = \frac{(12 + 11,7 + 11,33 + 11,5 + 11,2 + 11,33)}{6}$$

$$V_{mc} = 11,51$$

$$V = I \cdot V_{mc}$$

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Durante o diálogo com seu grupo, A1 menciona que é possível realizar previsões com o modelo matemático, além disso, realiza a articulação de conceitos matemáticos com o contexto.

A1: Por meio da constante será possível determinar o valor da tensão quando a corrente for...

A15: 0,5 A!

A1: Mas eu quero considerar um valor maior, por exemplo de 20 A. Eu consigo determinar por meio do valor da corrente, o valor da tensão, caso eu tenha o valor da resistência.

A1: Isso aqui é a Lei de Ohm.

A1: Por meio da tabela, podemos verificar o valor da resistência, porque esse valor nunca se altera, é fixa. Por exemplo, em um chuveiro, um ferro de passar, a gente só altera as espiras para aumentar a resistência (chuveiro inverno e verão). Mas a resistência não se altera.

A1: Se eu tenho uma corrente de 50 A, eu sei quanto será a minha tensão e, de acordo com essa tensão, eu sei qual será a temperatura do ferro.

De acordo com a suposição considerada, os alunos do grupo 1, 2 e 3 consideraram o modelo matemático que descreve a relação entre tensão e corrente, descrito na Figura 6.24.

**Figura 6.24:** Registro do aluno A2 - Modelo matemático que relaciona a tensão e corrente de um ferro de passar roupas

$$U = 11,5 \times C$$

onde C = corrente elétrica  
U = tensão elétrica

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Por outro lado, por meio da análise de informações da Tabela 6.3, os alunos do grupo 4 realizaram a diferença entre os intervalos dos valores de tensão e a diferença entre os intervalos dos valores de corrente e, em seguida, realizaram a divisão destes valores. A transcrição a seguir indica aspectos relevantes deste diálogo.

A7: Se eu tenho um gráfico, se você dividir esse por esse, subiu proporcional ao que avançou. Então vai ser uma reta.

A7: Por exemplo, 5,7 dividido por 0,5. Só que aqui é o valor medido e aqui é o calculado, o resultado nunca vai ser igual.

A6: Tudo bem, mas o resultado vai ser próximo.

**Figura 6.25:** Registro do aluno A9 – Taxa de variação dos valores de tensão e corrente de um ferro de passar roupas

$$F = \frac{V}{I} = \frac{5,7}{0,5} = 11,4$$

$$F = \frac{V}{I} = \frac{5,3}{0,5} = 10,6$$

$$F = \frac{V}{I} = \frac{6}{0,5} = 12$$

$$F = \frac{V}{I} = \frac{5}{0,5} = 10$$

$$F = \frac{V}{I} = \frac{6}{0,5} = 12$$

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Deste modo, o que os alunos do grupo 4 determinaram foi a *taxa de variação média* dos valores de tensão e corrente, considerando a variação de seus valores em determinados intervalos.

*P: Deixa eu contar um segredo para vocês, vocês não calcularam a variação de tensão pela variação de corrente?*

*A7: Sim.*

*P: Utiliza-se esse raciocínio para considerar intervalos cada vez menores. O limite dessas taxas é chamado de taxa de variação instantânea. Isso é importante para o conceito de derivada! Muito bacana o raciocínio de vocês.*

Neste caso, a taxa de variação de uma função linear coincide com o coeficiente angular de uma reta e com a derivada da função para qualquer valor de corrente, ou seja, coincide com o valor da resistência do ferro de passar roupas. Assim, para a construção de um modelo matemático, os alunos realizam a média entre a variação dos valores de tensão e a média entre a variação dos valores de corrente (Figura 6.26).

**Figura 6.26:** Registro do aluno A9 - Modelo matemático que relaciona a tensão e corrente de um ferro de passar roupas

$$R = \frac{\text{m\u00e9dia DA VARIA\u00c7\u00c3O DA TENS\u00c3O}}{\text{m\u00e9dia DA VARIA\u00c7\u00c3O DA CORRENTE}} \quad R = \frac{V}{I} = \frac{5,6}{0,5} = 11,2 \Omega$$

Fonte: Registro da atividade de modelagem matem\u00e1tica.

Tendo como intuito realizar articula\u00e7\u00e3o de conceitos matem\u00e1ticos com o contexto e com as suposi\u00e7\u00f5es estabelecidas, os alunos realizam a valida\u00e7\u00e3o dos modelos matem\u00e1ticos encontrados. O di\u00e1logo indica a valida\u00e7\u00e3o do grupo 4 e a Figura 6.27 indica a valida\u00e7\u00e3o do grupo 1.

*P: Mas voc\u00eas precisam validar! Como eu fa\u00e7o para mostrar que o resultado \u00e9 coerente?*

*P: O que voc\u00eas v\u00e3o fazer com o 11,2?*

*A7: Multiplicar pelo 0,5?*

*A7: Tem que dar esse resultado aqui? [apontando para a tabela]*

*P: Sim, o resultado \u00e9 aproximado!*



**Figura 6.27:** Registro do aluno A2 - Validação do modelo matemático

$I = 11,5 \times C$	$I = 11,5 \times C$	$I = 11,5 \times C$	$I = 11,5 \times C$
$I = 11,5 \times 0,5$	$I = 11,5 \times 1,0$	$I = 11,5 \times 1,5$	$I = 11,5 \times 2,0$
$I = 5,75$	$I = 11,5$	$I = 17,25$	$I = 23$
$I_{medido} = 6$	$I_{medido} = 11,4$	$I_{medido} = 17,0$	$I_{medido} = 23,0$

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Embora, houvesse um erro de medição devido a coleta de dados, foi possível estabelecer a compreensão de conceitos relativos à área do curso, ou seja, a Lei de Ohm (Figura 6.28).

**Figura 6.28:** Registro do aluno A2 - Compreensão de conceitos da lei de Ohm

Com base nos resultados, o modelo matemático se aproxima na com os resultados medidos, e também, segue os conceitos da lei de OHM.  $V = R \cdot I$

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Para iniciar o estudo do segundo problema ‘Qual é o modelo matemático que descreve a relação entre tensão e temperatura de um ferro de passar roupas?’, foi necessário sistematizar o primeiro problema, por meio do uso de softwares. Este detalhamento foi realizado na interlocução entre professora e alunos conforme o diálogo a seguir.

*P: Gente, vamos conversar a respeito do modelo matemático que vocês determinaram para a relação entre corrente e tensão, mas agora utilizando softwares.*

*P: Vejam o título da atividade: Funcionamento de um circuito elétrico: Um estudo sobre a resistência e temperatura de um ferro de passar roupas. Na verdade, o que nós estamos querendo realizar primeiramente é um estudo da resistência do ferro de passar.*

*P: De acordo com os dados coletados por vocês em sala de aula, a gente sabe que essa resistência está bem próxima de 12 ohms, mas não sabe bem ao certo qual é esse valor. Diferentes grupos encontraram diferentes valores para a resistência.*

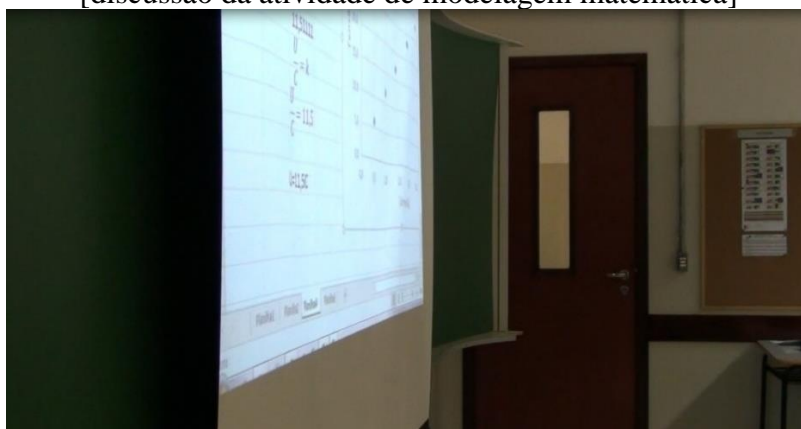
*P: Então, olhando para o nosso problema, se existe alguma relação entre corrente, tensão e resistência, a gente sabe da literatura que existe e é chamada de Lei de Ohm.*

Como durante a coleta de dados houve uma limitação, pois, o fusível que estava no Variac era somente de 3 ampères, o grupo fixou os valores da corrente e foram verificando os

valores da tensão. As informações utilizadas para a obtenção do modelo foram os dados da tabela e a resistência inicial de 12 ohms.

Desse modo, a partir desses dados coletados, foi possível construir uma curva de tendência, com o intuito de verificar qual a relação matemática que descreve esses dados (Figura 6.29). O diálogo a seguir mostra como é possível inserir um gráfico de dispersão utilizando o software Excel.

**Figura 6.29:** Utilização de softwares durante atividade de modelagem matemática [discussão da atividade de modelagem matemática]



Fonte: Dos autores.

*P: Utilizando o software Excel, é possível inserir um gráfico de dispersão.*

*P: Em design é possível, por exemplo, alterar as cores do gráfico e adicionar elemento gráfico.*

*P: Eu gostaria que vocês prestassem atenção nesses detalhes, porque basicamente a partir de agora, vocês vão lidar com softwares.*

*P: Durante toda a atividade, vocês construíram o gráfico de dispersão a mão e efetuaram a divisão de tensão pela corrente para determinar o valor da constante. Foi possível verificar que essa constante está variando em um intervalo.*

*P: Neste caso, como a maioria dos grupos utilizou que o valor da constante equivale a 11,5, então, podemos escrever  $\frac{U}{C} = 11,5$ . Realizando a multiplicação cruzada dessa equação obtemos  $U = 11,5 \cdot C$ .*

É importante realizar a validação dos dados tendo em vista o modelo matemático obtido. Assim, conforme indica o diálogo a seguir, utilizando-se o software Excel deve-se inserir uma nova coluna na tabela, tendo como intuito comparar os valores observados e calculados.

*P: Para o primeiro modelo matemático temos que inserir na célula -> igual a 11,5 multiplicado por cada valor de corrente. Para o segundo modelo matemático temos que inserir -> igual a 11,2 multiplicado por cada valor de corrente.*

*P: Comparando os valores observados e calculados, podemos verificar que alguns se aproximam mais e outros menos. Assim existe um erro entre esses valores, que podemos calcular em porcentagem.*

*P: Então, estamos falando que existe uma relação entre tensão e corrente e, na literatura, esse valor da constante é o valor da resistência. Isso é chamado de Lei de Ohm.*

Além dos modelos matemáticos definidos pelos grupos em sala de aula, existem softwares que determinam a melhor curva que se ajusta aos dados e que utilizam de métodos matemáticos específicos como a regressão linear. O diálogo indica como determinar a curva de regressão linear que se ajusta aos dados coletados.

*P: O software Excel encontra a melhor curva que se ajusta aos dados, mas isso não invalida o modelo que vocês encontraram. Se eu clicar com o botão direito em algum ponto da curva e adicionar linha de tendência, posso solicitar que o software determine uma relação linear entre os dados e o valor  $R^2$  [coeficiente de determinação].*

*P: Quanto mais próximo o valor de  $R^2$  for de 1, melhor é a curva. No nosso caso temos  $R^2 = 0,9996$ , valor muito próximo de 1. A melhor curva que o software associa aos dados é  $y = 11,137 \cdot x + 0,46$ .*

*P: Em matemática existe um método chamado Método dos Mínimos Quadrados que possibilita determinar essa curva, por isso existem softwares específicos que nos auxiliam nesse estudo.*

Como no software Excel há apenas cinco opções de linha de tendência, existe um outro software chamado Curve Expert que também auxilia na análise dos dados. No caso do modelo matemático que relaciona a tensão e temperatura foi necessário a utilização deste software e o diálogo mostra a interlocução entre professora e alunos.

*P: O Curve Expert também pode ser utilizado para determinar o melhor tipo de curva que se ajusta aos dados. Mas o 'melhor tipo de curva' é relativo. Por exemplo, vamos iniciar nosso estudo entre tensão e temperatura.*

*P: Vocês sabem que a temperatura está aumentando, mas ela vai crescer indefinidamente?*

*A: Não.*

*P: Vai ter um limitante, não é?*

*P: Veja, o software indica em ordem decrescente, qual é o melhor tipo de curva. Por exemplo, ele indica que a curva exponencial seria um bom ajuste, contudo ele não considera o valor limite da temperatura. [...]*

Assim, para cada problema é necessário verificar características da situação analisada. Considerando o segundo problema em estudo, alunos e professora consideraram determinar, qual é o valor limite da temperatura.

*P: Do mesmo jeito que vocês fizeram um estudo para a corrente e tensão, agora vocês vão fazer um estudo da tensão e temperatura. O que seria bacana ao pensar nessa relação?*

*A: Calcular o limitante.*

*P: Seria bacana determinar o valor do limitante.*

*A7: Mas professora, não entendi, mas não em como relacionar uma variável com outra sem olhar na prática, qual será a temperatura final.*

*P: Mas na prática, não conseguimos determinar o valor da temperatura máxima. Aí que entra a 'beleza' da matemática, é possível fazer previsão desse valor.*

*A12: Mas o termostato não tem essa função? A temperatura vai chegar a um valor e ele não vai deixar aumentar mais!*

*A11: Então, o termostato vai ficar ligando e desligando.*

*A12: É verdade.*

*P: Ele não vai deixar chegar a uma temperatura muito alta, para não queimar o aparelho.*

Após essa discussão, os alunos se reuniram novamente em grupos para iniciar o estudo do problema '*Qual é o modelo matemático que descreve a relação entre tensão e temperatura de um ferro de passar roupas?*'. Nesse primeiro contato, os alunos apresentaram dificuldades em iniciar o estudo do problema, pelo fato da função não ser linear, conforme indica a transcrição do diálogo a seguir.

*A1: A gente não consegue determinar o modelo como fizemos anteriormente, porque não é linear.*

*A2: Podemos utilizar aquelas fórmulas que a professora ensinou, sendo  $y$  a temperatura e  $x$  a tensão?*

*A1: Eu não estou conseguindo entender: se a gente tem uma constante, podemos encontrar o modelo mais rápido, mas assim ficou mais complicado!*

Nesse caso, o diálogo aponta que ações como simplificar informações e selecionar variáveis são importantes na busca de responder o problema.

A7: *Agora vamos analisar o comportamento da temperatura em relação a tensão.*

A6: *Como se comporta a temperatura do equipamento investigado.*

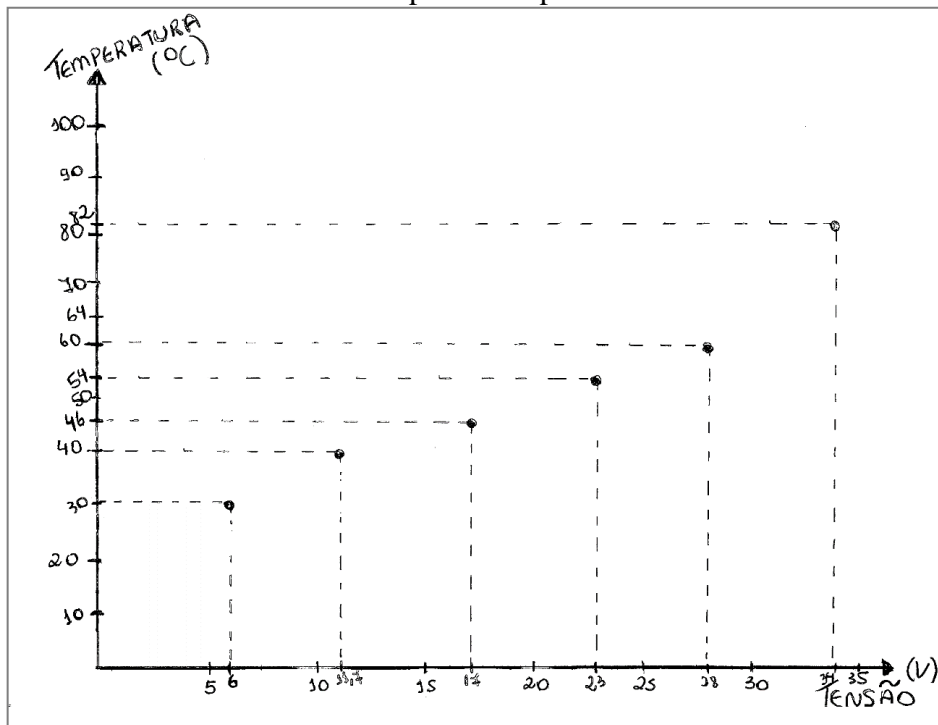
A7: *Definição de variáveis?*

A6: *Tensão e temperatura.*

A9: *Tensão em volts e temperatura em graus Celsius.*

Na busca de um modelo matemático adequado para a situação, os alunos iniciaram a discussão, conforme indica parte de um diálogo, a respeito da tendência dos dados entre a tensão e a temperatura (Figura 6.30).

**Figura 6.30:** Registro do aluno A2 - Registro gráfico para tensão e temperatura de um ferro de passar roupas



Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

A9: *Para a gente fazer o desenvolvimento do modelo matemático, a gente precisa fazer o gráfico primeiro.*

A7: *Caramba, esse aqui vai ser complicado!*

A9: *Será que utilizar o software ajuda?*

A7: *Vamos fazer o gráfico desses valores!*

Para a elaboração das suposições para o problema, os alunos inferiram que com o aumento da tensão, ocorria o aumento da temperatura, mas não de forma linear. E, por este motivo, para a elaboração de um modelo matemático, verificaram a necessidade de utilização de softwares, conforme indica a Figura 6.31.

**Figura 6.31:** Registro do aluno A2 - Considerações a respeito da atividade: um estudo sobre a temperatura de um ferro de passar roupas

Baseado nas informações obtidas em sala de aula, foi elaborado um gráfico e o mesmo não apresenta comportamento linear.

\* Com a informação de que o gráfico não apresenta comportamento linear, a elaboração de um modelo matemático se tornou complexado.

\* Por isso utilizamos os dados da tabela nº 01, em um software.

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Os alunos, embora compreendessem os critérios adequados para a situação-problema, durante o desenvolvimento da atividade, por muitas vezes, não associaram em suas discussões o fator inibidor da temperatura, por exemplo quando A9, argumenta, “será que a curva quadrática é um bom ajuste?”. O diálogo aponta a interlocução com os grupos a respeito desse fator inibidor da temperatura.

*P: O software indica outros modelos. Aqui no software temos alguns modelos de crescimento, mas de saturação. Seria um bom caminho, para não verificar todos os outros.*

*P: A curva logística é um modelo muito bom, pois o valor de  $R^2$  é 0,99. Mas, a partir do momento que aplicamos o valor do limite, a função exponencial se aproxima de zero, assim temos a divisão de  $a$  por 1. Como o valor de  $a$  equivale a -93, temos -93 dividido por 1, que resulta em -93. Ou seja, o nosso limitante é negativo e não positivo.*

*P: Olhando para a curva para maiores valores, como será a curva que vocês estão buscando?*

*A6: Limite no infinito será sempre para cima!*

*A7: Não!*

*A9: Não, mas queremos saber um valor que vai limitar a curva. Vai chegar uma hora que a temperatura vai estabilizar!*

*A11: Mas a fórmula tinha que ter um limite né?*

A5: Um limite? Mas como a gente vai fazer isso?

A11: Tinha que pegar um valor mais alto né? Tinha que traçar a continuação do gráfico, porque aqui está traçado somente uma parte. Para a gente saber qual vai ser o limite da temperatura, a curva tinha que ter um limite horizontal.

Neste caso, os alunos optaram em associar o software Curve Expert, com outros softwares, por exemplo, o Excel ou Geogebra, com o intuito de realizar a previsão de valores. Como afirma A11 “A gente vai utilizar o Excel e estimar para outros valores para verificar o que acontece”.

Os alunos utilizaram de diferentes modelos matemáticos para descrever a relação entre tensão e temperatura. O grupo 1, por exemplo, utilizou o modelo ‘Weibull Model’ (Figura 6.32) e os grupos 3 e 4 utilizaram o modelo ‘Exponential Association’ (Figura 6.33) disponíveis no software Curve Expert.

**Figura 6.32:** Registro do aluno A2 - Modelo matemático que relaciona a tensão e temperatura de um ferro de passar roupas

x O modelo informado foi o "Weibull Model", pois apresenta comportamentos compatível com nosso modelo.  
 x O modelo fornecido pelo programa foi:

$$y = 288,7 - 257,9 e^{-0,0001799 \cdot x^{2,009}}$$

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

**Figura 6.33:** Registro do aluno A9 - Modelo matemático que relaciona a tensão e temperatura de um ferro de passar roupas

Utilizamos como ferramenta o programa "Curve Expert" e nele o modelo de curva "Exponential Association(02)" que permite ver o limitante da temperatura.

Outros tipos de curva não nos daria a condição de uma limitante. Utilizando o programa Curve Expert obtivemos uma curva referente ao modelo abaixo:

$$y = a(b - e^{-cx})$$

$a = 107,97$   
 $b = 1,121$   
 $c = 0,024$

$x = \text{tensão} = U$   
 $y = \text{temperatura} = T$

$$T = 107,97(1,121 - e^{-0,024 \cdot U})$$

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Embora o grupo 2 tenha utilizado também o modelo ‘Exponential Association’, utilizaram de outra suposição para a construção do modelo matemático: consideraram a temperatura ambiente quando a tensão era de 0 volts, ou seja,  $T(0) = 23$  (Figura 6.34) e optaram em escrever o relatório da atividade utilizando Microsoft Office Word.

**Figura 6.34:** Registro do grupo 2 - Modelo matemático que relaciona a tensão e temperatura de um ferro de passar roupas

Com auxílio do software criamos uma tabela com os valores medidos. Baseados nos valores, o software nos mostra algumas equações e suas respectivas curvas:

$$T = 251,7(1,08 - e^{-0,007U}),$$

onde T é a temperatura (°C) e U é a tensão (V).

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Tendo como intuito validar os modelos matemáticos, os alunos realizam a comparação dos valores medidos e calculados, tendo em vista as suposições estabelecidas, ou seja, o valor limitante da temperatura. A Figura 6.35 ilustra a validação do modelo matemático indicado na Figura 6.32 e obtido pelo grupo 1.

**Figura 6.35:** Registro do aluno A2 - Validação do modelo matemático

$y = a - be^{-cx^d}$ $y = 288,7 - 257,9e^{-0,0001799 \cdot 6^{2,009}}$ $y = 32,4^\circ\text{C}$ Temperatura Medida = $30^\circ\text{C}$	$y = a - be^{-cx^d}$ $y = 288,7 - 257,9e^{-0,0001799 \cdot 17^{2,009}}$ $y = 44,19^\circ\text{C}$ Temp. Medida = $46^\circ\text{C}$
$y = a - be^{-cx^d}$ $y = 288,7 - 257,9e^{-0,0001799 \cdot 23^{2,009}}$ $y = 54,85^\circ\text{C}$ Temp. Medida = $54^\circ\text{C}$	$y = a - be^{-cx^d}$ $y = 288,7 - 257,9e^{-0,0001799 \cdot 34^{2,009}}$ $y = 80,62^\circ\text{C}$ Temp. Medida = $82^\circ\text{C}$

Comparando os resultados encontrados com a equação do modelo matemático fornecido pelo software, com valores medidos em sala, constatou-se que há divergências entre eles, porém as diferenças são pequenas.

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

A Figura 6.36 ilustra a validação do modelo matemático indicado na Figura 6.33 e obtido pelo grupo 4. Cabe salientar que o grupo considerou para as constantes do modelo,



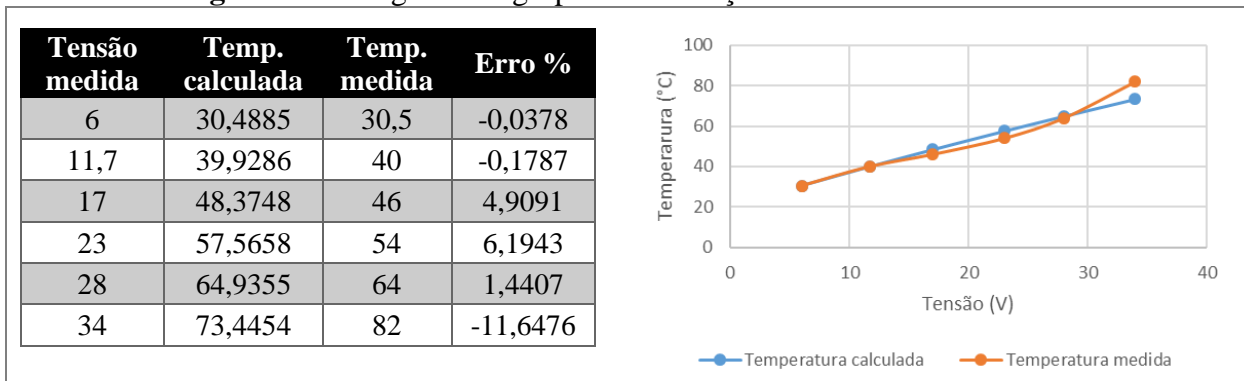
cinco casas decimais, ou seja,  $T(U) = 107,97067 \cdot (1,12127 - e^{-0,02426 \cdot U})$ . O grupo 2 realiza a validação do modelo matemático indicado na Figura 6.37.

**Figura 6.36:** Registro do aluno A9 - Validação do modelo matemático

Tensão	temperatura (°C)	Temperatura calculada (°C)	ERRO (%)
6	30,5	27,7	9,12
11,7	40	39,8	0,56
17	46	49,6	-7,79
23	54	59,3	-9,75
28	64	66,3	-3,63
34	82	73,7	-10,07

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

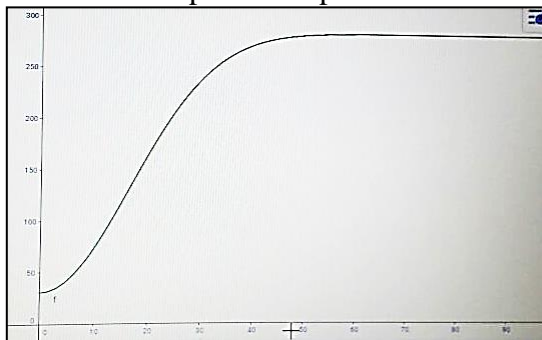
**Figura 6.37:** Registro do grupo 2 - Validação do modelo matemático



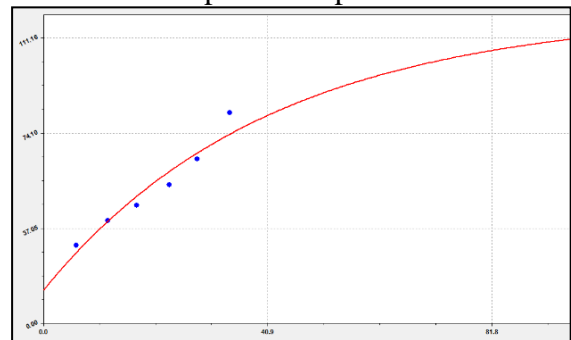
Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Para verificar a temperatura limite, os grupos utilizaram de diferentes linguagens para responder esse problema (Figuras 5.38 a 5.41).

**Figura 6.38:** Registro do grupo 1 - Registro gráfico da temperatura limite de um ferro de passar roupas

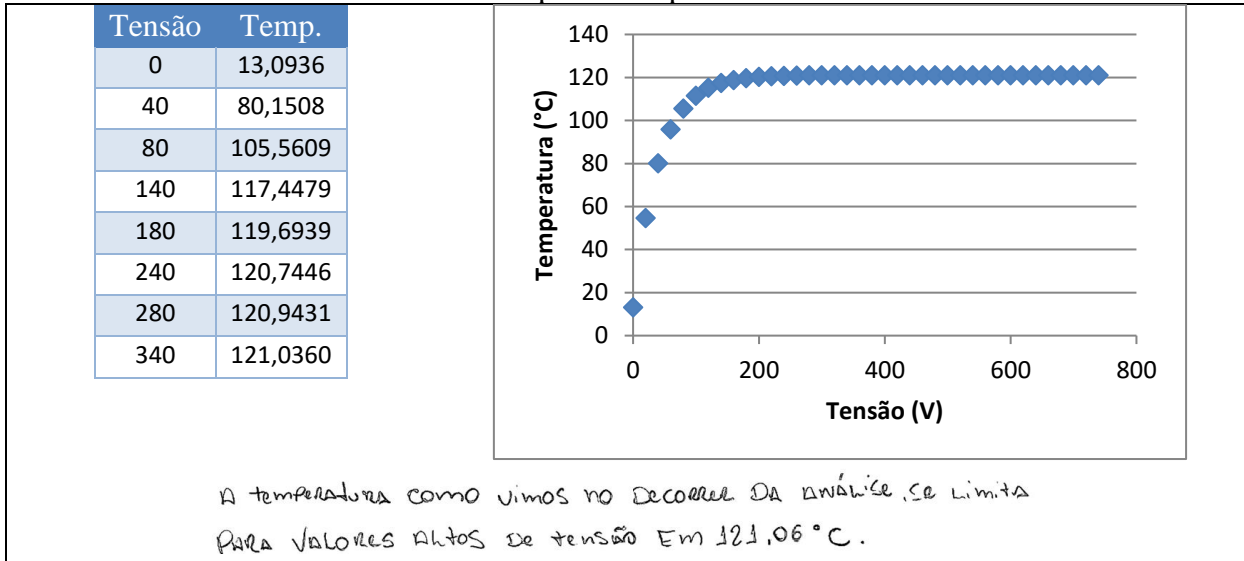


**Figura 6.39:** Registro do grupo 3 - Registro gráfico da temperatura limite de um ferro de passar roupas



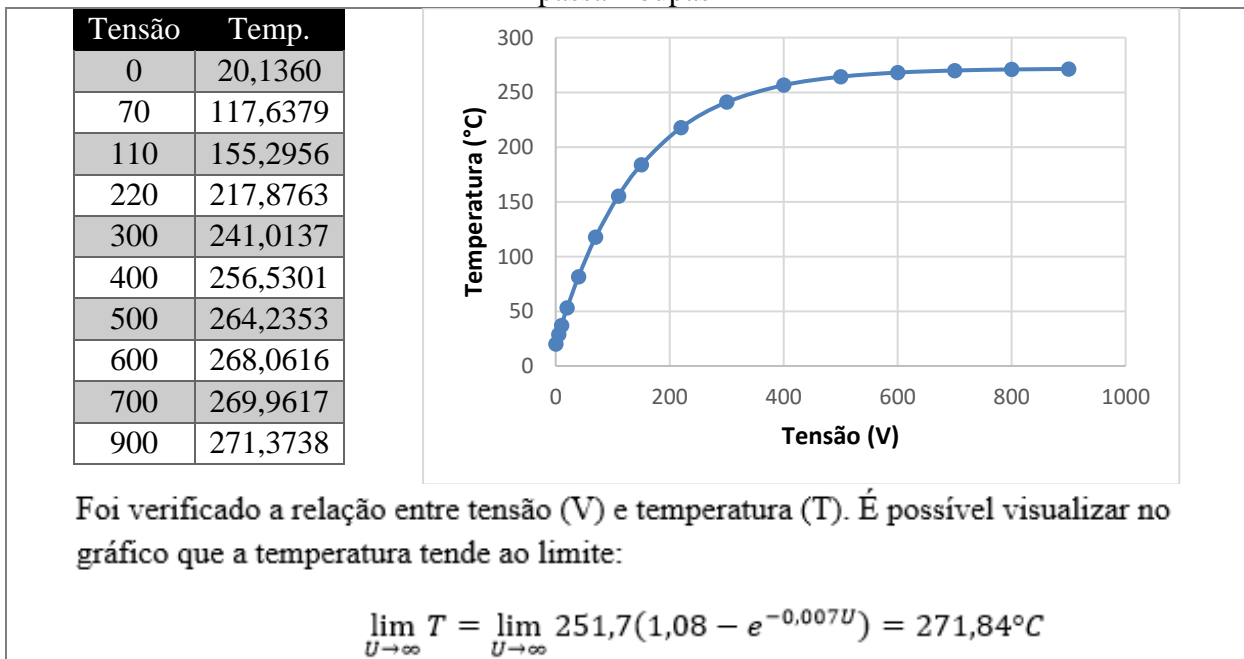
Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

**Figura 6.40:** Registro do grupo 4 - Registro gráfico da temperatura limite de um ferro de passar roupas



Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

**Figura 6.41:** Registro do grupo 2 - Registro gráfico da temperatura limite de um ferro de passar roupas



Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

A partir dos modelos matemáticos definido pelos grupos, os alunos fizeram considerações tendo em vista conceitos relativos à área do curso e sua compreensão com o contexto da atividade (Figuras 6.42 e 6.43), conforme indica a transcrição do diálogo a seguir.

A7: Professora, na prática: a gente não poderia utilizar o gráfico para colocar valores de tensão bem altos.

P: Sim, por isso que existe o termostato.

A7: Então o equipamento para determinada tensão vai queimar?

A14: Vai queimar pela potência dissipada. O resistor tem uma potência que ele consegue dissipar. Ele tem um valor para a resistência, se a sua tensão aumentar suficiente, a sua corrente vai aumentar, vai aquecer mais e conseqüentemente vai derreter.

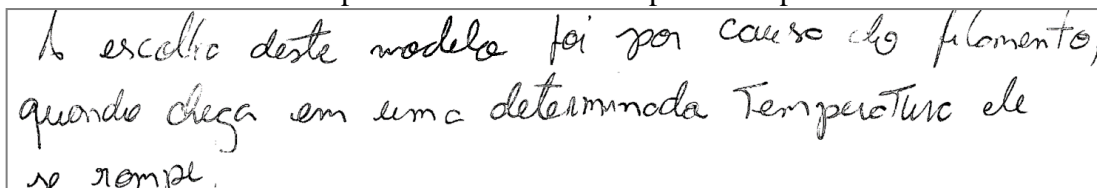
A7: Então, o que vai fazer queimar é a temperatura.

A14: Sim. A temperatura que atinge, vai fazer derreter.

A14: A11 desligou o termostato durante a coleta de dados. No ferro seria possível ir aumentando até queimar.

P: O problema no ferro é o fusível, que não era possível coletar dados de corrente maiores que 3 ampères.

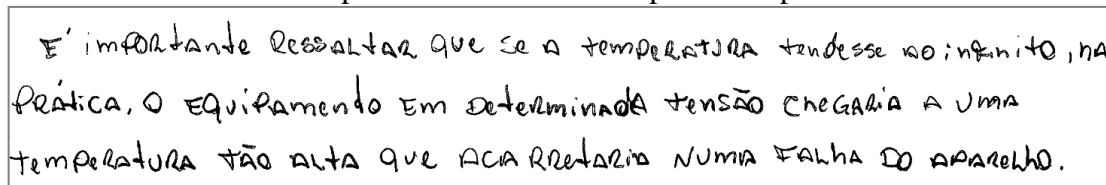
**Figura 6.42:** Registro do aluno A4 - Considerações a respeito da atividade: um estudo sobre a temperatura de um ferro de passar roupas



A escolha deste modelo foi por causa do filamento, quando chega em uma determinada temperatura ele se rompe.

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

**Figura 6.43:** Registro do aluno A9 - Considerações a respeito da atividade: um estudo sobre a temperatura de um ferro de passar roupas



É importante ressaltar que se a temperatura tendesse ao infinito, na prática, o equipamento em determinada tensão chegaria a uma temperatura tão alta que acabaria numa falha do aparelho.

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

6.3.1 Análise específica da atividade modelagem: Funcionamento de um circuito elétrico: um estudo sobre a resistência elétrica e temperatura de um ferro de passar roupas

Nesta segunda atividade de modelagem matemática ‘Funcionamento de um circuito elétrico: um estudo sobre a resistência elétrica e temperatura de um ferro de passar roupas’, os alunos iniciaram pela coleta de dados de corrente, tensão, resistência e temperatura de um ferro de passar roupas<sup>14</sup> (Quadro 6.3).

<sup>14</sup> Cabe salientar que, neste momento da pesquisa, os alunos ainda estavam iniciando com algumas aulas práticas no curso e, nesse sentido, é importante considerar o perfil dos alunos.

**Quadro 6.3:** Encaminhamento dos alunos para a atividade ‘Funcionamento de um circuito elétrico: um estudo sobre a resistência elétrica e temperatura de um ferro de passar roupas’

**INTEIRAÇÃO**

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A1: O que investigar?  
 A1: Comportamento da tensão e da corrente e sua relação com a resistência.  
 A1: As variáveis são três.  
 A2: Sim, corrente, tensão e temperatura.  
 A1: A resistência é fixa. A temperatura vai variar também.  
 A1: As informações foram coletadas com base em dados obtidos em sala de aula.  
 A2: Ah.. a gente vai comparar agora somente corrente e tensão!  
 A1: Sim, depois vamos analisar a temperatura.

**RESOLUÇÃO**

CONSTRUÇÃO DOS MODELOS MATEMÁTICOS

**RESISTÊNCIA ELÉTRICA DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS**

CORRENTE (A)	TENSÃO (V)	CONSTANTE
0,5	6,0	12
1,0	11,7	11,7
1,5	17,0	11,3
2,0	23,0	11,5
2,5	28,0	11,2
3,0	34,0	11,3

Quando a variação no valor da tensão, por causa da influência da Impedância, a resistência medida utilizando o de 11,5 Ω

VALOR MÉDIO DA CONSTANTE

$$\sqrt{m_c} = \frac{(12 + 11,7 + 11,33 + 11,5 + 11,2 + 11,33)}{6}$$

$$\sqrt{m_c} = 11,51$$

$$V = I \cdot \sqrt{m_c}$$

Funcionamento de um circuito elétrico: um estudo sobre a resistência elétrica e a temperatura de um ferro de passar roupas’

**MATEMATIZAÇÃO**

SIMPLIFICAÇÃO DE INFORMAÇÕES

Para responder os problemas formulados foi necessário a coleta de dados que direcionou o desenvolvimento da atividade.

FORMULAÇÃO DE SUPOSIÇÕES

Problema 1: A relação entre tensão e corrente é representada por uma função linear. Ou ainda, a tensão é proporcional à corrente elétrica aplicada no ferro.  
 Problema 2: A relação entre tensão e temperatura não é representada por uma função linear, mas por uma função exponencial negativa.

SELEÇÃO DE VARIÁVEIS

Tensão (volts), corrente (ampères), temperatura (°C).

**TEMPERATURA DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS**

× O modelo utilizado foi o 'Weibull Model', pois apresenta comportamento compatível com nosso modelo.  
 × O modelo fornecido pelo programa foi:  
 $y = 288,7 - 257,9e^{-0,0001493x^{2,009}}$

Utilizamos como ferramenta o programa 'GGEVE STAT' e este o modo de curva 'exponential (2)' que permite ver o Limite da temperatura.  
 $y = a \cdot (b - e^{-cx})$   
 $a = 287,97$   
 $b = 1,18$   
 $c = 0,024$   
 $T = 287,97(1,181 - e^{-0,024 \cdot U})$

Com auxílio do software criamos uma tabela com os valores medidos. Baseados nos valores, o software nos mostra algumas equações e suas respectivas curvas:  
 $T = 251,7(1,08 - e^{-0,007U})$   
 onde T é a temperatura (°C) e U é a tensão (V).

**INTERPRETAÇÃO DE RESULTADOS E VALIDAÇÃO**

**RESISTÊNCIA ELÉTRICA DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS**

$I = 1,5 \times C$	$I = 1,5 \times C$	$I = 1,5 \times C$	$I = 1,5 \times C$
$I = 1,5 \times 0,5$	$I = 1,5 \times 1,0$	$I = 1,5 \times 1,5$	$I = 1,5 \times 2,0$
$I = 0,75$	$I = 1,5$	$I = 2,25$	$I = 3$
I medido = 6	I medido = 11,7	I medido = 17,0	I medido = 23,0

Nem obra nos resultados, o modelo matemático se aplica mas sem os resultados medidos, e também, segue os conceitos da Lei de OHM  $\sqrt{V = R \cdot I}$

**TEMPERATURA DE UM FERRO DE PASSAR ROUPAS**

Tensão	Temperatura (°C)	Temperatura Calculada (°C)	ERRO (%)
6	30,5	31,7	9,18
11,7	40	39,8	-0,56
17	46	46,6	-7,79
23	54	53,3	-1,28
28	61	66,5	-9,68
34	68	72,7	-6,02

A7: Professora, na prática: a gente não poderia utilizar o gráfico para colocar valores de tensão bem altos.  
 P: Sim, por isso que existe o termostato.  
 A7: Então o equipamento para determinada tensão vai queimar?  
 A14: Vai queimar pela potência dissipada. O resistor tem uma potência que ele consegue dissipar. Ele tem um valor para a resistência, se a sua tensão aumentar suficiente, a sua corrente vai aumentar, vai aquecer mais e consequentemente vai derreter.

Na fase de inteiração, os alunos utilizaram de diversos instrumentos para a coleta de dados, tais como um Variac, um multímetro, um amperímetro e um termômetro digital infravermelho. Assim, a coleta de dados de corrente, tensão e temperatura delinearão as proposições: i) *Qual é o modelo matemático que descreve a relação entre tensão, corrente e resistência de um ferro de passar roupas?* ii) *Qual é o modelo matemático que descreve a relação entre tensão e temperatura de um ferro de passar roupas?* A formulação desses dois problemas envolveu conhecimento de características da situação-problema.

O uso de *instrumentos e aparelhos de ensaios, testes e medições* permitiu a simulação de situações reais utilizando tecnologia. Neste caso, quando os alunos não conseguiram coletar dados para valores muito altos de corrente, permitiu que os mesmos tivessem experiência com uma situação real, com posterior análise dos dados coletados.

A partir da coleta de dados, na fase de matematização, os alunos definiram como variáveis corrente, tensão e temperatura. Na busca de responder o primeiro problema, iniciaram a discussão a respeito da tendência dos dados relacionando a tensão e a corrente e estabeleceram como suposições que a relação entre tensão e corrente é representada por uma função linear ou, de outra maneira, que a tensão é proporcional à corrente elétrica aplicada no ferro.

Na fase de resolução, os alunos empreenderam de diferentes maneiras para a construção de um modelo matemático adequado para a situação, utilizando-se de regras matemáticas tais como razão, para direcionar o seu desenvolvimento.

- ✓ Três grupos optaram em calcular a razão entre tensão e corrente e, em seguida, calcularam a média entre esses valores para determinar o valor da constante.
- ✓ Um grupo realizou a diferença entre os intervalos dos valores de tensão e a diferença entre os intervalos dos valores de corrente e, em seguida, realizou a divisão destes valores. Para determinar o valor da constante, o grupo realizou a média entre a variação dos valores de tensão e a média entre a variação dos valores de corrente.

A formulação de suposições orientou no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, quando os alunos utilizaram a média para determinar o valor da constante. Em suas discussões, foi possível perceber que os alunos já consideravam que a constante era o valor da resistência do ferro de passar roupas.

Para definir o modelo matemático, os alunos utilizaram de *diferentes linguagens para o estudo do conteúdo de funções*, os quais podemos citar: algébricas (Figura 6.23, 6.24, 6.26), numéricas (Tabela 6.3, Figura 6.22, 6.25, 6.27), gráficas (Figura 6.21).

Neste caso, foi possível verificar a articulação de diferentes linguagens para o estudo do conteúdo de função linear, em que os alunos associaram, por exemplo, um registro numérico a um gráfico, um registro numérico a um algébrico, um registro algébrico a um numérico, etc. Essa construção do modelo matemático que relaciona corrente, tensão e resistência permitiu também a discussão de como os alunos poderiam determinar o modelo matemático que relaciona tensão e temperatura.

A fase de interpretação de resultados e validação permitiu aos alunos estabelecerem sua conclusão, a partir de seus conhecimentos matemáticos e relacionados a situação-problema. Por meio da comparação entre os resultados obtidos pelo modelo matemático construído e os dados coletados, os alunos perceberam pequenas variações nos valores, tornando válidos os modelos obtidos pelos grupos. Além disso, foi possível perceber que os alunos compreenderam conceitos da área do curso, tais como a lei de Ohm. Como os alunos estavam familiarizados com as regras matemáticas da função linear, houve pouca dependência dos alunos na resolução do primeiro problema.

Na busca de responder o segundo problema, na fase de inteiração da atividade, os alunos iniciaram a discussão a respeito da tendência dos dados relacionando a tensão e a temperatura de um ferro de passar roupas e estabeleceram como suposições de que essa relação não é linear. Mas para delinear os critérios para a resolução da atividade foi necessário a *introdução das tecnologias digitais*. O aluno A9, por exemplo, em conversa com o aluno A7, diz: “*Para a gente fazer o desenvolvimento do modelo matemático, a gente precisa fazer o gráfico primeiro, [...] Será que utilizar o software ajuda?*”.

Na busca de suposições adequadas para o problema, na fase de matematização, foi importante perceber que conforme aumentou o valor da tensão, ocorreu o aumento da temperatura, mas até um valor limitante para a temperatura.

*A9: Não, mas queremos saber um valor que vai limitar a curva. Vai chegar uma hora que a temperatura vai estabilizar!*

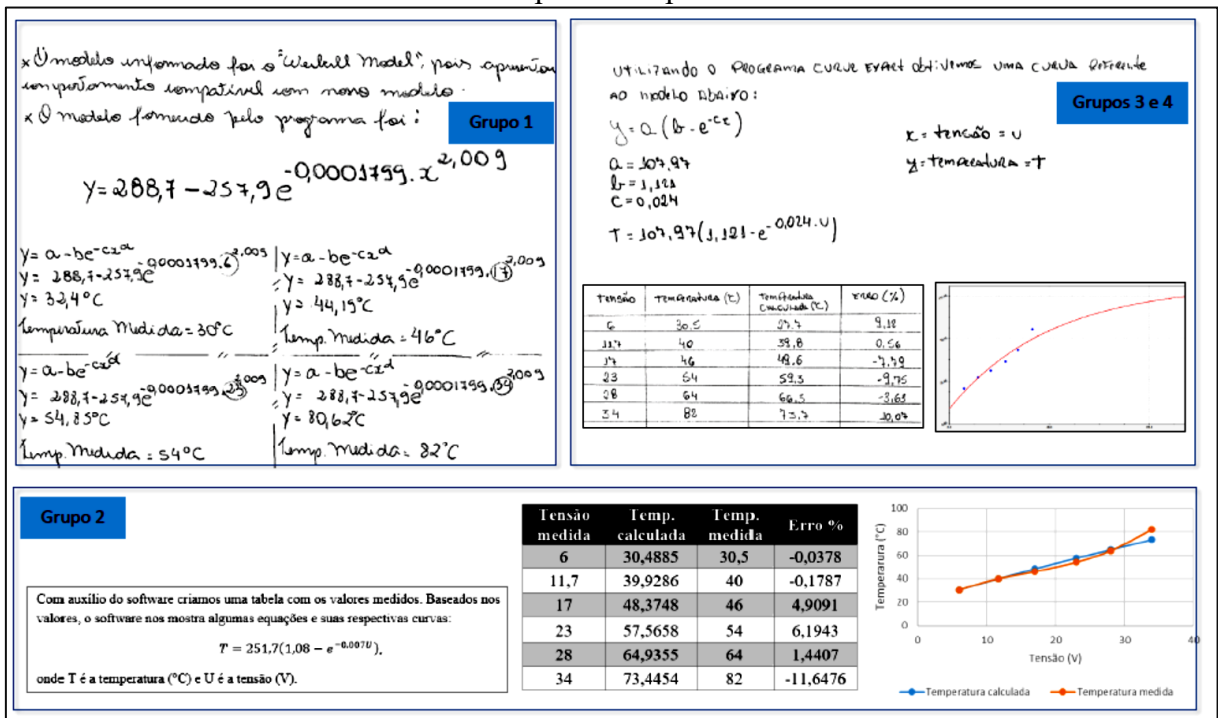
*A11: Mas a fórmula tinha que ter um limite né?*

A5: Um limite? Mas como a gente vai fazer isso?

A11: Tinha que pegar um valor mais alto né? Tinha que traçar a continuação do gráfico, porque aqui está traçado somente uma parte. Para a gente saber qual vai ser o limite da temperatura, a curva tinha que ter um limite horizontal.

Neste caso, o grupo 1 optou em utilizar o modelo matemático ‘Weibull Model’ e os grupos 2, 3 e 4 utilizaram o modelo matemático ‘Exponential Association’ disponíveis no software Curve Expert, para a resolução do problema (Figura 6.44).

**Figura 6.44:** Utilização de softwares específicos para o estudo do conteúdo de funções na atividade ‘Funcionamento de um circuito elétrico: um estudo sobre a temperatura de um ferro de passar roupas’



Fonte: Dos autores.

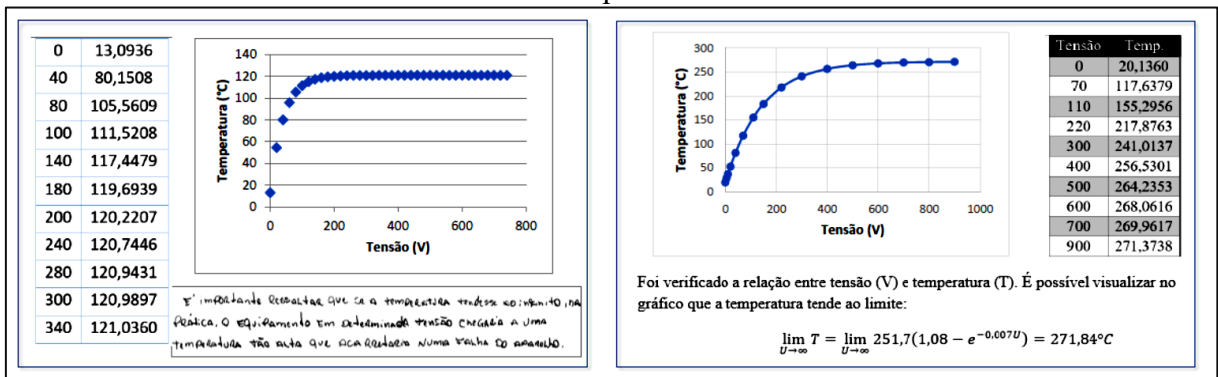
Assim, os alunos associaram em suas resoluções o software Curve Expert, com outros softwares, por exemplo, o Excel ou Geogebra, com o intuito de realizar a previsão de valores. O uso de tecnologias digitais nesta atividade permitiu o desenvolvimento de cálculos, o acesso de informações e o uso de diferentes linguagens para o estudo do conteúdo de funções exponenciais: algébricas (Figura 6.32, 6.33, 6.34), gráficas (Figura 6.30, 6.37, 6.38, 6.39, 6.40, 6.41) e numéricas (Figura 6.35, 6.36, 6.37, 6.40, 6.41).

Na fase de interpretação de resultados e validação, os alunos realizam a comparação dos valores medidos e calculados, como intuito validar os modelos matemáticos. Após a

validação, tendo em vista as suposições estabelecidas e as regras matemáticas utilizadas na resolução, foi possível determinar para cada modelo matemático, o valor limitante da temperatura.

A utilização de tecnologias digitais permitiu aos alunos e professora *discutir conceitos matemáticos como por exemplo, os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (conceitos de limite)*, para relacioná-los com uma situação-problema e para entender seu significado em relação ao fenômeno (Figura 6.45).

**Figura 6.45:** Utilização de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral na atividade ‘Funcionamento de um circuito elétrico: um estudo sobre a temperatura de um ferro de passar roupas’



Fonte: Dos autores.

O que se pode perceber é que conceitos relativos à área de formação dos alunos estão enraizados em seu modo de vida (Figura 6.46), o que justifica o perfil apresentado no capítulo 4, em que 71% já cursaram algum curso técnico relacionado à área de Tecnologia em Manutenção Industrial ou outro curso relacionado a área e 76% dos alunos são provenientes de empresas focadas em sua área de atuação.

**Figura 6.46:** Identificação de uso de conceitos relativos à área do curso durante a atividade ‘Funcionamento de um circuito elétrico: um estudo sobre a resistência elétrica e temperatura de um ferro de passar roupas’

<p><i>A1: Por meio da tabela, podemos verificar o valor da resistência, porque esse valor nunca se altera, é fixa. Por exemplo, em um chuveiro, um ferro de passar, a gente só altera as espiras para aumentar a resistência (chuveiro inverno e verão). Mas a resistência não se altera.</i></p>	<p><i>A7: Professora, na prática: a gente não poderia utilizar o gráfico para colocar valores de tensão bem altos.</i>  <i>P: Sim, por isso que existe o termostato.</i>  <i>A7: Então o equipamento para determinada tensão vai queimar?</i>  <i>A14: Vai queimar pela potência dissipada. O resistor tem uma potência que ele consegue dissipar. Ele tem um valor para a resistência, se a sua tensão aumentar suficiente, a sua corrente vai aumentar, vai aquecer mais e conseqüentemente vai derreter.</i>  <i>A7: Então, o que vai fazer queimar é a temperatura.</i></p>
---	---

Fonte: Dos autores.



**Figura 6.47:** Identificação de uso de conceitos relativos à área do curso durante a atividade ‘Funcionamento de um circuito elétrico: um estudo sobre a resistência elétrica e temperatura de um ferro de passar roupas’ (continuação)

A escolha deste modelo foi por causa do filamento, quando chega em uma determinada temperatura ele se rompe.

Fonte: Dos autores.

Nesta segunda atividade de modelagem matemática, os alunos ampliaram o domínio do conteúdo de função linear por meio do estudo de outras funções, por exemplo de função exponencial e conceitos de Cálculo Diferencial e Integral. Nesta atividade houveram maiores diferenças individuais em sua resolução e uma certa dependência dos alunos na resolução do segundo problema, pois os mesmos estavam se familiarizando com as regras de uso das tecnologias digitais.

É importante levar em consideração que ao desenvolver essa atividade, foi possível abordar conceitos relacionados às dificuldades abordadas na avaliação diagnóstica (Quadro 6.4).

**Quadro 6.4:** Abordagem da atividade ‘Funcionamento de um circuito elétrico: um estudo sobre a resistência elétrica e temperatura de um ferro de passar roupas’ tendo em vista as dificuldades apresentadas pelos alunos

Avaliação Diagnóstica	Atividade ‘Funcionamento de um circuito elétrico: um estudo sobre a resistência elétrica e temperatura de um ferro de passar roupas’
Os alunos estabeleceram como suposição que a relação entre as variáveis é, em geral, proporcional, ou seja, pode ser descrita por uma função linear.	Durante a resolução, os alunos verificaram que a função linear se enquadrava ao contexto do primeiro problema, mas não ao contexto do segundo problema. Para o estudo entre tensão e temperatura de um ferro de passar roupas, os alunos estabeleceram como suposições de que essa relação é determinada por uma função exponencial assintótica, assim, é possível inferir que houve a articulação do conteúdo matemático com o contexto.
A falta de compreensão de critérios adequados para a resolução das questões acarretou na falta de compreensão de uma linguagem gráfica, tabular ou algébrica, quando sinalizaram que a função que representa a	Para a construção do modelo matemático entre tensão e corrente de um ferro de passar roupas, os alunos relacionaram o registro tabular ao registro gráfico, estabelecendo critérios adequados para o problema: <i>A15: De quanto em quanto a gente vai fazer o gráfico?</i> <i>A1: Então, pelo que eu vi aqui é uma reta!</i> <i>A15: É uma linear crescente!</i> Esses registros foram fundamentais para determinar o

<p>situação-problema é linear.</p>	<p>registro algébrico:  <i>A1: Por ser uma reta, podemos determinar uma constante. Por exemplo, 0,5 multiplicado por alguma coisa que dá 6 ou 6 dividido por 0,5 que resulta em uma constante.</i>  <i>A1: Professora, podemos determinar uma constante por meio da divisão da tensão pela corrente! A gente pode utilizar isso para construir uma fórmula?</i>  <i>A7: Se eu tenho um gráfico, se você dividir esse por esse, subiu proporcional ao que avançou. Então vai ser uma reta.</i>          Para a construção do modelo matemático entre tensão e temperatura de um ferro de passar roupas, os alunos, por meio do uso de softwares, relacionaram o registro tabular ao registro gráfico, utilizando de critérios adequados para o problema:  <i>A1: A gente não consegue determinar o modelo como fizemos anteriormente, porque não é linear.</i>  <i>A2: Podemos utilizar aquelas fórmulas que a professora ensinou, sendo <math>y</math> a temperatura e <math>x</math> a tensão?</i>  <i>A11: Mas a fórmula tinha que ter um limite né?</i>          Essa compreensão do registro gráfico, permitiu o uso do software para determinar o registro algébrico.</p>
<p>O arredondamento de números realizado pelos alunos em seu registro algébrico influenciou na precisão da resposta para o problema.</p>	<p>Durante a resolução do problema que envolveu um estudo sobre a temperatura de um ferro de passar roupas, os alunos utilizaram de diversas casas decimais para determinar o modelo matemático e, também, para realizar a comparação dos valores medidos e calculados.</p>
<p>Os alunos não identificaram e integraram o conceito de função em suas diferentes linguagens.</p>	<p>Para generalizar os modelos matemáticos foi necessário construir, a partir da coleta de dados, um registro tabular para associar a um registro gráfico. A partir desse registro foi possível elaborar um modelo matemático adequado a cada problema.</p>
<p>A não articulação de conceitos matemáticos, mais especificamente de funções, com conceitos relativos à área do curso influenciou na resposta para o problema.</p>	<p>Os alunos desde a coleta de dados utilizaram de conceitos relativos a Eletricidade Básica. Fixando os valores de corrente, foi possível obter um conjunto de dados de tensão e temperatura de um ferro de passar roupas, por meio do uso de instrumentos de medições. Para a determinar o modelo matemático que relaciona tensão e corrente, os alunos já consideravam que o valor da constante era o valor da resistência do ferro de passar roupas. Durante a interpretação do modelo matemático que relaciona tensão e temperatura, embora os alunos soubessem que o modelo matemático possuía um limitante, relacionaram que na prática, não poderiam utilizar o registro gráfico para valores de tensão bem altos.</p>

Fonte: Dos autores.

A partir do desenvolvimento dessa segunda atividade de modelagem matemática, os alunos desenvolveram a atividade que relacionava tensão, corrente e temperatura de uma lâmpada incandescente.

### 6.4 Atividade 3: Um estudo sobre resistência elétrica e temperatura de uma lâmpada incandescente

A atividade denominada “Um estudo sobre resistência elétrica e temperatura de uma lâmpada incandescente”, corresponde a terceira atividade de modelagem matemática desenvolvida pelos alunos (Figura 6.47).

**Figura 6.48:** Atividade de segundo momento: Um estudo sobre resistência elétrica e temperatura de uma lâmpada incandescente

#### UM ESTUDO SOBRE RESISTÊNCIA ELÉTRICA E TEMPERATURA DE UMA LÂMPADA INCANDESCENTE

Uma lâmpada incandescente é um dispositivo elétrico de iluminação, o qual utiliza o princípio da incandescência para a emissão luz visível. Este princípio consiste na emissão de radiação eletromagnética por um corpo sólido quando em altas temperaturas.

A invenção da primeira lâmpada incandescente, que utilizava filamento, foi atribuída ao americano Thomas Alva Edison em 1879, a qual tinha filamento de carvão e produziu luz durante dois dias, sendo um tempo relativamente longo para a época. As primeiras lâmpadas com filamento de tungstênio, por sua vez, surgiram por volta de 1907 (BURINI JUNIOR, 1993; GREGGIANI, 2013).

As lâmpadas incandescentes são consideradas como os primeiros dispositivos a utilizar eletricidade em larga escala. A Figura 1 mostra uma lâmpada incandescente e seus principais componentes.

**Figura 1:** Componentes de uma lâmpada incandescente



Fonte: Silva (2011, p.61)

Do ponto de vista elétrico, uma lâmpada incandescente consiste, basicamente, de um filamento condutor alojado no interior de um bolbo de vidro e imerso em uma atmosfera de gases inertes. Quando conectada à rede elétrica, uma lâmpada incandescente aumenta sua temperatura, bem como sua eficiência luminosa, de forma gradativa. Segundo Silva (2011, p. 60), esse tipo de lâmpada é mais eficiente para “aquecer um espaço do que a iluminá-lo, tendo por isso, como maior desvantagem a sua muito baixa eficácia luminosa e duração curta”.

Dá-se o nome de resistor aos elementos de um circuito elétrico projetados para transformar energia elétrica em calor, como exemplo de resistor podemos citar o filamento de uma lâmpada incandescente.

A resistência de um resistor é a capacidade que os materiais possuem de se oporem ao fluxo da corrente elétrica. A resistência é denotada por  $R$  e sua unidade de medida é ohms ( $\Omega$ ).

Fonte: Dos autores.

Neste segundo momento, a professora sugere uma situação inicial e os alunos realizam a coleta de dados de uma lâmpada incandescente em sala de aula, sendo desenvolvida no decorrer de 3 aulas (180 minutos).

Inicialmente, de acordo com os dados apresentados pelos alunos não foi possível estabelecer nenhuma relação matemática, pois os alunos coletaram poucos valores e além disso não estabeleceram o tempo como um parâmetro para coletar dados. Após conversa com a professora, os alunos coletaram os dados por mais de uma vez, conforme registra o diálogo.

*A9: Qual intervalo de tempo que vamos utilizar?*

*A7: 2 ou 3 minutos?*

*A9: 2 minutos.*

*A7: Mas com 2 minutos a gente não consegue chegar no valor máximo da temperatura.*

*A9: Mas com 2 minutos a gente consegue coletar mais dados. Acredito que com 30 volts a gente já consegue acender a lâmpada...*

*A9: 0 volts, 30 graus. Precisamos verificar a resistência...*

*A6: 17,2 ohms*

*A9: Dispara o cronômetro, vamos injetar tensão no circuito. Depois vamos desconectar a lâmpada e medir novamente. [...]*

*A6: Parece que hoje as medidas estão mais reais!*

*A9: Acho que a gente 'marcou' aquele dia! A gente deixava esfriar...*

*A6: Foi de qualquer jeito...*

*A9: Acho que a gente estava sem treino. Estou começando a gostar!*

*A9: A professora fez tanta pressão! [risos] Está ficando tão coerente e eu estou feliz!*

Inicialmente, uma lâmpada incandescente de 72 W foi conectada a uma fonte de alimentação de 127 V. Para captar os dados de tensão (V), corrente (A), temperatura (°C) no bulbo da lâmpada foram utilizados, respectivamente, um multímetro ET-3810, um multímetro DN-1000, um controlador NOVUS N-1100 e um sensor de temperatura PT-100, conforme aponta a transcrição do áudio. Um potenciômetro foi utilizado para variar a tensão aplicada de 0 a 90 V a cada dois minutos transcorridos, conforme indica a Figura 6.48.

**Figura 6.49:** Instrumentos utilizados para coleta de dados

Fonte: Relatório dos alunos.

*A9: Pegamos uma fonte de alimentação de 127 volts e passamos a fase por um potenciômetro para variar a tensão. Conectado a esse potenciômetro e ao ponto neutro da lâmpada de 72 watts, temos um multímetro, para coletar dados de tensão medidos em volts. Em série com o circuito temos um outro multímetro para coletar dados de corrente medidos em ampères. Mais uma informação que vamos conseguir desse circuito é a temperatura, com a utilização de um controlador de temperatura NOVUS N-1100 e uma sonda ou sensor de temperatura PT-100 conectado à lâmpada. Para um determinado tempo vamos deixar o circuito alimentado, após esse determinado tempo, vamos desconectar a energia da fonte do circuito e vamos medir o valor da resistência da lâmpada (em ohms) de acordo com a variação de temperatura.*

Na tabela 6.4, são apresentados os valores medidos durante o monitoramento da variação de tensão conforme metodologia apresentada.

**Tabela 6.4:** Dados observados referente a lâmpada incandescente

Corrente (A)	Tensão (V)	Resistência no bulbo ( $\Omega$ )	Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ )
0	0	17,2	30,8
0,2	30	29,4	37,3
0,261	45	34,3	48,3
0,315	60	37,7	61,9
0,367	75	40,3	76
0,42	90	43	86,5

Fonte: Relatório dos alunos.

Os alunos em conjunto com a professora, definiram dois problemas a partir da coleta de dados: i) *Qual é o modelo matemático que descreve a relação entre tensão e corrente de uma lâmpada incandescente?* ii) *Qual é o modelo matemático que descreve a relação entre tensão e temperatura de uma lâmpada incandescente?* O estudo desses dois problemas em sala de aula teve duração de 360 minutos.

Inicialmente, ações como simplificar informações, formular suposições e selecionar variáveis são importantes na busca de responder os problemas propostos. Tendo como intenção definir suposições para o problema em estudo, os alunos precisavam compreender aspectos da situação-problema. Este detalhamento foi realizado na interlocução entre os alunos conforme indica parte de um diálogo.

*A1: Então aqui a relação entre corrente e tensão não é linear, mas é estranho porque a lei de Ohm se aplica a tudo.*

*A1: A lei de Ohm funciona para tudo que é elétrico. Se você pegar uma resistência, vale a relação. Por isso que eu não entendi direito.*

*A1: Porque os meninos mediram né. Talvez pode ser um problema no aparelho...*

*A10: A escala que eles mediram...*

*A1: Ah, mas o A9 'manja'!*

*A1: Mas é que está estranho, porque tinha de valer essa relação. Faz aí: 60 dividido por 37,7.*

*A15: 1,59*

*A1: É um valor muito baixo.*

*A15: E qual é a fórmula que explica essa relação? Então é isso que a gente está querendo saber?*

*A1: Isso eu não entendi... É bem confuso, porque essa relação tem que ser linear!*

Na literatura, a lei de Ohm explica que 'Em um condutor ôhmico, mantido à temperatura constante, a tensão é proporcional à corrente elétrica, ou seja, sua resistência elétrica é constante'. Ohm verificou que certos condutores chamados ôhmicos, a tensão e a corrente eram diretamente proporcionais, ou seja, a razão  $U/i$  é igual a uma constante, denominada de resistência elétrica.

Quando essa relação entre tensão e corrente não é linear, o resistor é chamado de não ôhmico, ou seja, a cada par de valores de tensão e corrente tem-se uma resistência elétrica.

Isso significa que a resistência depende da temperatura do filamento e, portanto, da tensão aplicada na lâmpada. Neste caso, quanto menor a temperatura, a resistência da lâmpada é menor, mas à medida que se aquece com a aplicação de maior tensão, sua resistência aumenta.

Experimentalmente, os alunos construíram a Tabela 6.4, mas mediram a resistência elétrica no bulbo da lâmpada e não em seu filamento, o que acarretou que não foi possível constatar o real valor da resistência da lâmpada, conforme os alunos discutiram em sala.

*A12: Professora, esse negócio aqui está 'bugado'. Considerando a tensão dividido pela corrente e se dividirmos 30 por 0,2, o resultado é 150 para a resistência. Em nossa tabela temos 29,4.*

*A5: Está meio estranho esse resultado.*

*P: Vai valer a lei de Ohm para esse caso?*

*A11: Não, porque está medido errado. [risos]*

*P: Na lâmpada, a temperatura influencia nessa relação entre tensão e corrente.*

*A11: Sim, mas como foi medido essa resistência?*

*P: Não vale devido ao filamento de tungstênio da lâmpada incandescente.*

*A12: Quanto maior a temperatura, maior será o valor da resistência.*

*A11: Essa resistência não tem como valer porque você pode medir o mais rápido possível, mas quando você desligou o circuito, a temperatura cai bruscamente.*

*P: Não vale a lei de Ohm, pois com o aumento da tensão, houve o aumento da corrente e da temperatura, conseqüentemente houve também o aumento da resistência. Isso é uma característica da lâmpada, devido seu filamento.*

*A11: Com a lâmpada ligada, a temperatura que está fora é uma, a que está dentro, é outra. A temperatura do filamento é muito alta.*

*P: Essa aqui é a temperatura no bulbo e não no filamento.*

*A11: Se você medir na hora, a resistência no filamento, o valor será de 150 ohms.*

*A11: O problema que a resistência não está no bulbo, mas no filamento. Essas medidas não valem.*

Ou seja, os alunos sabiam que a relação entre tensão e corrente não é linear, contudo afirmavam que a razão  $U/i$  é o resultado do valor da resistência na lâmpada incandescente

para cada valor de tensão, conforme diz A11 “*não é sempre a mesma; se você dividir a tensão pela corrente, esse resultado é o valor instantâneo no ponto*”.

Contudo, de acordo com os dados coletados, não se pode afirmar que essa razão é o valor da resistência, ou seja, houve uma discrepância entre a medida realizada conforme Tabela 6.4 e o valor calculado utilizando a razão  $U/i$ . Essa discrepância é apontada por A11.

*A11: E quanto a questão do resistor não ôhmico a diferença é justamente essa: Você não pode considerar a medida da resistência dele fora do circuito para dimensionar o circuito, pois a temperatura quando ele está em funcionamento influencia na sua resistência.*

*A11: Porém a equação  $R = U/i$  continua valendo com o circuito em funcionamento.*

Após a discussão inicial a respeito da situação-problema, para responder o problema ‘*Qual é o modelo matemático que descreve a relação entre tensão e corrente de uma lâmpada incandescente?*’, os alunos utilizaram o software Excel para realizar a divisão de tensão pela corrente, conforme sinaliza a Figura 6.49.

**Figura 6.50:** Registro do grupo 3 - Registro tabular para corrente e tensão de uma lâmpada incandescente

Nessa atividade foi investigado como se comporta a corrente em relação a tensão no circuito de uma lâmpada de 72W com a tensão de 127V. De acordo com a variação de tensão de 0 a 90V a cada 2 minutos utilizando um potenciômetro, foi possível determinar os valores da corrente.

Inicialmente, supondo que o gráfico comporta-se de forma linear crescente, foi realizado a divisão dos valores da tensão medida pelos valores de corrente.

Através de uma validação dos resultados foi feito uma tabela para a verificar a proporcionalidade da tensão e corrente, porém com os cálculos feitos notamos que não se trata de um gráfico linear, pois o resultado não é sempre o mesmo.

Tabela: Convalidação de Resultados (modelo linear)

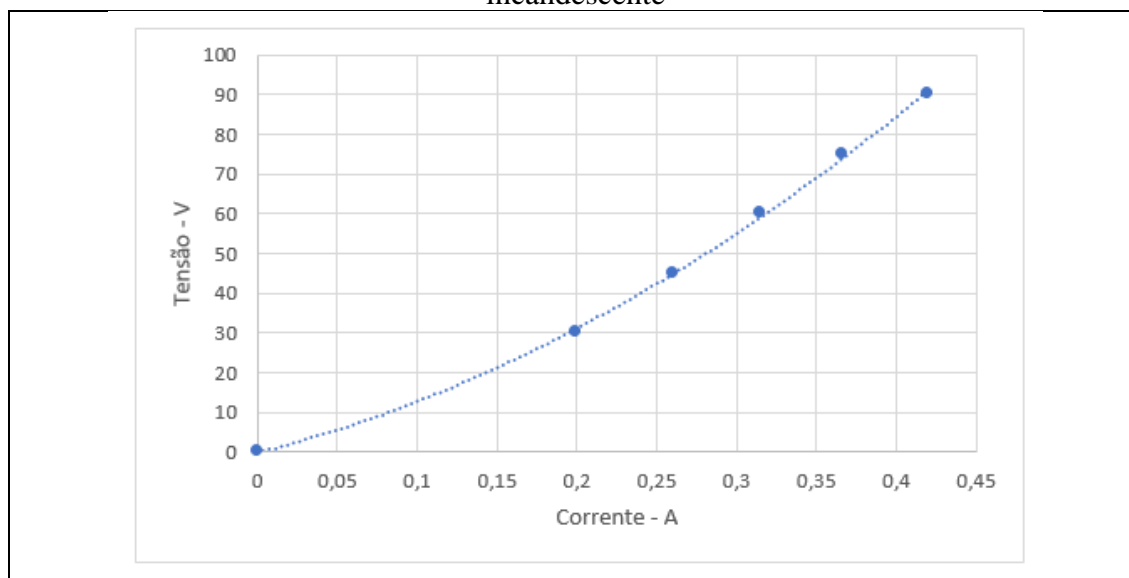
Corrente (A)	Tensão (V)	Resistência Calculada ( $\Omega$ )
0	0	
0,2	30	150
0,261	45	172,4137931
0,315	60	190,4761905
0,367	75	204,359673
0,42	90	214,2857143

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.



Verificando a não linearidade do modelo matemático, os alunos construíram a tendência dos dados (Figura 6.50) e, por meio da utilização do software Curve Expert, se engajaram em determinar um modelo matemático adequado para o problema (Figura 6.51).

**Figura 6.51:** Registro do grupo 4 - Registro gráfico para corrente e tensão de uma lâmpada incandescente



Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

**Figura 6.52:** Registro do grupo 4 - Modelo matemático que relaciona a tensão e corrente de uma lâmpada incandescente

Utilizamos o CurveExpert como ferramenta de auxílio para obtenção da curva mais adequada para expressar os dados coletados. Entretanto, no software foi encontrado mais de um modelo de curva que se enquadrava dentro dos valores coletados, neste caso, o modelo mais coerente que relaciona corrente e tensão na prática foi a curva quadrática.

A curva explica que a tensão é a multiplicação de 275,22 pela corrente elevada ao quadrado somando com a multiplicação entre 101,52 pela corrente, desse resultado subtrai-se 0,2276 conforme a equação abaixo:

$$U = 275,22 \cdot i^2 + 101,52 \cdot i - 0,2276$$

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

Os alunos também realizaram a validação dos modelos matemáticos encontrados, conforme ilustra a Figura 6.52. O grupo 4 além disso, estabeleceu uma relação entre a resistência medida no bolbo da lâmpada e de acordo com a lei de Ohm.

**Figura 6.53:** Registro do grupo 4 - Validação do modelo matemático

Corrente (A)	Tensão medida (V)	Tensão calculada (V)	Resistência medida no bulbo ( $\Omega$ )	Resistência ( $\Omega$ ) de acordo com a Lei de Ohm
0	0	-0,228	17,2	-
0,2	30	31,085	29,4	150
0,261	45	45,017	34,3	172,414
0,315	60	59,060	37,7	190,476
0,367	75	74,099	40,3	204,359
0,42	90	90,960	43	214,286

A relação observada foi que a resistência medida equivale a aproximadamente  $\frac{1}{5}$  do valor calculado utilizando a lei de Ohm. Isso é possível, pois há uma perda do valor da resistência ao efetuar medida no bulbo da lâmpada.

Fonte: Registro da atividade de modelagem matemática.

O estudo do segundo problema ‘Qual é o modelo matemático que descreve a relação entre tensão e temperatura de uma lâmpada incandescente?’ foi realizado em sala de aula, mas não será abordado neste trabalho, pois sua discussão apresenta similaridades à discussão do ferro de passar roupas. Os alunos utilizaram de conceitos da função exponencial para o desenvolvimento do modelo e de conceitos de limite para verificar a temperatura ao qual pode chegar a lâmpada incandescente.

6.4.1 Análise específica da atividade modelagem: Um estudo sobre resistência elétrica e temperatura de uma lâmpada incandescente

Nesta terceira atividade de modelagem matemática ‘Um estudo sobre resistência elétrica e temperatura de uma lâmpada incandescente’, os alunos iniciaram pela coleta de dados de corrente, tensão e temperatura de uma lâmpada incandescente.

Na fase de inteiração, os alunos utilizaram de diversos instrumentos para a coleta de dados, tais como dois multímetros, um controlador, um sensor de temperatura e um potenciômetro. A partir da coleta de dados de corrente, tensão e temperatura para a lâmpada incandescente, os alunos delinearão os problemas i) *Qual é o modelo matemático que descreve a relação entre tensão e corrente de uma lâmpada incandescente?* ii) *Qual é o modelo matemático que descreve a relação entre tensão e temperatura de uma lâmpada incandescente?*

O uso de *instrumentos e aparelhos de ensaios, testes e medições* permitiu a simulação de situações reais utilizando tecnologia. Neste caso, devido a características da lâmpada e falta de experiência dos alunos em atividades de modelagem matemática, fizeram com que os alunos coletassem os dados por mais de uma vez.

Na busca de responder o primeiro problema, na fase de matematização, os alunos definiram como variáveis tensão e corrente e estabeleceram como suposições de que essa relação que determina o valor da resistência não é representada por uma função linear<sup>15</sup>. Ou seja, a cada par de valores de tensão e corrente tem-se uma resistência elétrica, denominada de resistor não ôhmico.

Os dados coletados permitiram verificar que quanto maior a temperatura do filamento, maior o valor da resistência da lâmpada. Contudo, experimentalmente, os alunos mediram a resistência elétrica no bulbo da lâmpada e não em seu filamento, o que acarretou que não foi possível constatar o real valor da resistência da lâmpada, conforme discussão em sala de aula (Quadro 6.5).

**Quadro 6.5:** Identificação de uso de conceitos relativos à área do curso durante a atividade ‘Um estudo sobre resistência elétrica e temperatura de uma lâmpada incandescente’

*A12: Quanto maior a temperatura, maior será o valor da resistência.*

*A11: Essa resistência não tem como valer porque você não consegue medir o mais rápido possível, mas quando você desligou o circuito, a cai temperatura bruscamente.*

*A11: Com a lâmpada ligada, a temperatura que está fora é uma, a que está dentro, é outra. A temperatura do filamento é muito alta.*

*P: Essa aqui é a temperatura no bulbo e não no filamento.*

*A11: E quanto a questão do resistor não ôhmico a diferença é justamente essa: Você não pode considerar a medida da resistência fora do circuito para dimensionar o circuito, pois a temperatura quando ele está em funcionamento influencia na sua resistência.*

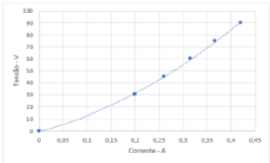
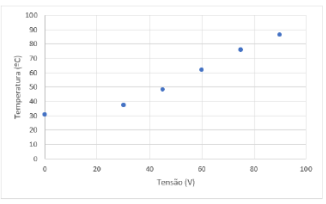
Fonte: Dos autores.

Para a resolução do problema, ou seja, determinar o modelo matemático que descreve a relação entre tensão e corrente de uma lâmpada incandescente, os grupos definiram que essa relação é descrita por uma função quadrática, por meio da utilização *dos softwares Excel e Curve Expert*.

<sup>15</sup> A discussão da matematização desse problema já havia se iniciado na avaliação diagnóstica.

Nesse caso, o uso das tecnologias digitais permitiu o uso de diferentes linguagens para o estudo do conteúdo de função quadrática: algébricas (Figura 6.51), numéricas (Tabela 6.4, Figura 6.49, 6.52), gráficas (Figura 6.50). O Quadro 6.6 indica o encaminhamento dos alunos para a atividade ‘Um estudo sobre resistência elétrica e temperatura de uma lâmpada incandescente’.

**Quadro 6.6:** Encaminhamento dos alunos para a atividade ‘Um estudo sobre resistência elétrica e temperatura de uma lâmpada incandescente’

<p><b><u>INTEIRAÇÃO</u></b></p> <p>FORMULAÇÃO DO PROBLEMA</p> <p>i) Qual é o modelo matemático que descreve a relação entre tensão e corrente de uma lâmpada incandescente?              ii) Qual é o modelo matemático que descreve a relação entre tensão e temperatura de uma lâmpada incandescente?</p> <p><b><u>MATEMATIZAÇÃO</u></b></p> <p>SIMPLIFICAÇÃO DE INFORMAÇÕES</p> <p>Para responder os problemas formulados foi necessário a coleta de dados que direcionou o desenvolvimento da atividade.</p> <p>FORMULAÇÃO DE SUPOSIÇÕES</p> <p>Problema 1: A relação entre tensão e corrente é representada por uma função quadrática.              Problema 2: A relação entre tensão e temperatura não é representada por uma função linear, mas por uma função exponencial negativa.</p> <p>SELEÇÃO DE VARIÁVEIS</p> <p>Tensão (volts), corrente (ampères), temperatura (°C).</p>	<p><b><u>RESOLUÇÃO</u></b></p> <p>CONSTRUÇÃO DOS MODELOS MATEMÁTICOS</p> <p><b><u>RESISTÊNCIA ELÉTRICA DE UMA LÂMPADA INCANDESCENTE</u></b></p> <p>Através de uma validação dos resultados foi feito uma tabela para a verificar a proporcionalidade da tensão e corrente, porém com os cálculos feitos notamos que não se trata de um gráfico linear, pois o resultado não é sempre o mesmo.</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-bottom: 10px;"> <thead> <tr> <th>Corrente (A)</th> <th>Tensão (V)</th> <th>Resistência Calculada (Ω)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td></td></tr> <tr><td>0,2</td><td>30</td><td>150</td></tr> <tr><td>0,261</td><td>45</td><td>172,4137931</td></tr> <tr><td>0,315</td><td>60</td><td>190,4761905</td></tr> <tr><td>0,367</td><td>75</td><td>204,359673</td></tr> <tr><td>0,42</td><td>90</td><td>214,2857143</td></tr> </tbody> </table> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <math display="block">U = 275,22 \cdot i^2 + 101,52 \cdot i - 0,2276</math> </div>  <p style="text-align: center;"><i>Um estudo sobre resistência elétrica e temperatura de uma lâmpada incandescente</i></p> <p style="text-align: center;"><b><u>TEMPERATURA DE UMA LÂMPADA INCANDESCENTE</u></b></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>A curva não apresenta um comportamento linear, pois não há proporcionalidade na incrementação dos dados.</p> </div>  <p>Os resultados de temperaturas calculados foram retirados da fórmula resultante da curva <b>Exponential Association</b>, onde <math>T</math> é a temperatura (°C) e <math>V</math> é a tensão elétrica (volts):</p> $T = 185,14(1 - e^{-0,00696V})$	Corrente (A)	Tensão (V)	Resistência Calculada (Ω)	0	0		0,2	30	150	0,261	45	172,4137931	0,315	60	190,4761905	0,367	75	204,359673	0,42	90	214,2857143																																			
Corrente (A)	Tensão (V)	Resistência Calculada (Ω)																																																							
0	0																																																								
0,2	30	150																																																							
0,261	45	172,4137931																																																							
0,315	60	190,4761905																																																							
0,367	75	204,359673																																																							
0,42	90	214,2857143																																																							
<p><b><u>INTERPRETAÇÃO DE RESULTADOS E VALIDAÇÃO</u></b></p>																																																									
<p><b><u>RESISTÊNCIA ELÉTRICA DE UMA LÂMPADA INCANDESCENTE</u></b></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-bottom: 10px;"> <thead> <tr> <th>Corrente (A)</th> <th>Tensão medida (V)</th> <th>Tensão calculada (V)</th> <th>Resistência medida no bulbo (Ω)</th> <th>Resistência (Ω) de acordo com a Lei de Ohm</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>-0,228</td><td>17,2</td><td>-</td></tr> <tr><td>0,2</td><td>30</td><td>31,085</td><td>29,4</td><td>150</td></tr> <tr><td>0,261</td><td>45</td><td>45,017</td><td>34,3</td><td>172,414</td></tr> <tr><td>0,315</td><td>60</td><td>59,060</td><td>37,7</td><td>190,476</td></tr> <tr><td>0,367</td><td>75</td><td>74,099</td><td>40,3</td><td>204,359</td></tr> <tr><td>0,42</td><td>90</td><td>90,960</td><td>43</td><td>214,286</td></tr> </tbody> </table> <p>A relação observada foi que a resistência medida equivale a aproximadamente <math>\frac{1}{5}</math> do valor calculado utilizando a lei de Ohm. Isso é possível, pois há uma perda do valor da resistência ao efetuar medida no bulbo da lâmpada.</p> <p>Relembrando que essa relação do ferro de passar é uma reta linear crescente. Na lâmpada essa relação é diferente, pois, quanto mais esquenta o bulbo da lâmpada, mais varia sua resistência. Com isso, a curva quadrática é ideal para esse problema.</p>	Corrente (A)	Tensão medida (V)	Tensão calculada (V)	Resistência medida no bulbo (Ω)	Resistência (Ω) de acordo com a Lei de Ohm	0	0	-0,228	17,2	-	0,2	30	31,085	29,4	150	0,261	45	45,017	34,3	172,414	0,315	60	59,060	37,7	190,476	0,367	75	74,099	40,3	204,359	0,42	90	90,960	43	214,286	<p><b><u>TEMPERATURA DE UMA LÂMPADA INCANDESCENTE</u></b></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-bottom: 10px;"> <thead> <tr> <th>Tensão (V)</th> <th>Temperatura (°C) medida</th> <th>Temperatura (°C) calculada</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>30,8</td><td>0,00</td></tr> <tr><td>30</td><td>37,3</td><td>34,89</td></tr> <tr><td>45</td><td>48,3</td><td>49,78</td></tr> <tr><td>60</td><td>61,9</td><td>63,20</td></tr> <tr><td>75</td><td>76</td><td>75,29</td></tr> <tr><td>90</td><td>86,5</td><td>86,18</td></tr> </tbody> </table> <p>Como podemos ver, existe uma limitante de temperatura:</p> $\lim_{V \rightarrow \infty} T = \lim_{V \rightarrow \infty} 185,14(1 - e^{-0,00696V}) = 185,14^{\circ}\text{C}$ <p>Sabemos que ao conectar uma lâmpada incandescente na rede elétrica, ela irá ascender gradativamente e a temperatura do filamento aumentará e, também, a resistência elétrica. Essa elevação de temperatura irá acontecer até um determinado ponto, onde a mesma estabilizará, desde que seja respeitada a tensão elétrica (volts) indicada pelo fabricante.</p>	Tensão (V)	Temperatura (°C) medida	Temperatura (°C) calculada	0	30,8	0,00	30	37,3	34,89	45	48,3	49,78	60	61,9	63,20	75	76	75,29	90	86,5	86,18
Corrente (A)	Tensão medida (V)	Tensão calculada (V)	Resistência medida no bulbo (Ω)	Resistência (Ω) de acordo com a Lei de Ohm																																																					
0	0	-0,228	17,2	-																																																					
0,2	30	31,085	29,4	150																																																					
0,261	45	45,017	34,3	172,414																																																					
0,315	60	59,060	37,7	190,476																																																					
0,367	75	74,099	40,3	204,359																																																					
0,42	90	90,960	43	214,286																																																					
Tensão (V)	Temperatura (°C) medida	Temperatura (°C) calculada																																																							
0	30,8	0,00																																																							
30	37,3	34,89																																																							
45	48,3	49,78																																																							
60	61,9	63,20																																																							
75	76	75,29																																																							
90	86,5	86,18																																																							

Fonte: Dos autores.

Na fase de interpretação de resultados e validação, os alunos validaram o modelo matemático, por meio da comparação dos valores medidos e calculados. Além disso, o grupo 4, estabeleceu uma relação entre a resistência que foi obtida experimentalmente por meio da medição no bulbo da lâmpada e por meio da razão entre tensão e corrente (acordo com a lei de Ohm).

Para responder o segundo problema ‘Qual é o modelo matemático que descreve a relação entre tensão e temperatura de uma lâmpada incandescente?’, os alunos utilizaram de procedimentos similares ao problema que envolvia a relação entre tensão e temperatura de um ferro de passar roupas. Também foi possível verificar o valor limitante da temperatura da lâmpada incandescente em estudo.

Nesta atividade, os alunos ampliaram o domínio do conteúdo de *funções*, por meio do estudo da função quadrática, tendo em vista as dificuldades apresentadas durante a resolução da avaliação diagnóstica (Quadro 6.7). Além disso, para o estudo do segundo problema que relaciona tensão e temperatura, novamente, os alunos utilizaram de conceitos de função exponencial e de Cálculo Diferencial e Integral para sua resolução.

**Quadro 6.7:** Abordagem da atividade ‘Um estudo sobre resistência elétrica e temperatura de uma lâmpada incandescente’ tendo em vista as dificuldades apresentadas pelos alunos

Avaliação Diagnóstica	Atividade ‘Um estudo sobre resistência elétrica e temperatura de uma lâmpada incandescente’
Os alunos estabeleceram como suposição que a relação entre as variáveis é, em geral, proporcional, ou seja, pode ser descrita por uma função linear.	Durante a resolução, os alunos verificaram que a função quadrática se enquadrava ao contexto do primeiro problema e que função exponencial assintótica se enquadrava ao contexto do segundo problema.
A falta de compreensão de critérios adequados para a resolução das questões acarretou na falta de compreensão de uma linguagem gráfica, tabular ou algébrica, quando sinalizaram que a função que representa a situação-problema é linear.	Para a construção do modelo matemático entre tensão e corrente de uma lâmpada incandescente, os alunos sabiam que a relação entre tensão e corrente não era linear, mas afirmavam que a razão $U/i$ era o resultado do valor da resistência na lâmpada incandescente para cada valor de tensão. Contudo, de acordo com os dados coletados, não se podia afirmar que essa razão era o valor da resistência medida no filamento da lâmpada. Verificando a não linearidade do modelo matemático para o primeiro e segundo problemas, os alunos relacionaram o registro tabular ao registro gráfico e, por meio da utilização do software Curve Expert, se engajaram em determinar um registro algébrico adequado para os problemas.
O arredondamento de números realizado pelos alunos em seu	Durante a resolução dos problemas, os alunos utilizaram de diversas casas decimais para determinar o modelo

registro algébrico influenciou na precisão da resposta para o problema.	matemático e, também, para realizar a comparação dos valores medidos e calculados.
Os alunos não identificaram e integraram o conceito de função em suas diferentes linguagens.	Para generalizar os modelos matemáticos foi necessário construir, a partir da coleta de dados, um registro tabular para associar a um registro gráfico. A partir desse registro foi possível elaborar um modelo matemático adequado a cada problema.
A não articulação de conceitos matemáticos, mais especificamente de funções, com conceitos relativos à área do curso influenciou na resposta para o problema.	Os alunos desde a coleta de dados utilizaram de conceitos relativos a Eletricidade Básica. Fixando os valores de tensão, foi possível obter um conjunto de dados de corrente e temperatura de uma lâmpada incandescente, por meio do uso de instrumentos de medições. Para a determinar o modelo matemático que relaciona tensão e corrente, houve uma discussão a respeito da lei de Ohm. Durante a interpretação do segundo problema, os alunos relacionaram conceitos de luminescência, tensão e temperatura de uma lâmpada incandescente.

Fonte: Dos autores.

A cada atividade de modelagem matemática, os alunos estão ampliando a gramática dos usos do conteúdo de *funções*. Dessa maneira, quando compreendem um conceito, são capazes de usar conhecimento para agir corretamente para a resolução de novos problemas. E é a linguagem que nos dá a limitação das possibilidades desse conhecimento.

E é isso que propõe a terapia wittgensteiniana: tratar problemas, no nosso caso, das dificuldades no conteúdo de *funções*, variando os contextos e os usos desse conteúdo. Com essa visão, na próxima seção, apresentamos de forma detalhada as atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos grupos de alunos.

### 6.5 *Atividades de terceiro momento de familiarização*

Neste terceiro momento das atividades de modelagem matemática, os alunos foram convidados a escolher uma situação inicial (problemática) e a conduzi-la na busca de uma resposta ao problema. Essas atividades foram iniciadas na disciplina em que ocorreu a pesquisa e foram concluídas com a apresentação em um evento da faculdade em que os alunos estão inseridos. Os trabalhos abordaram diversos temas:

- ✓ Análise de frequência e rotação em um motor, desenvolvido pelo grupo 1;

- ✓ Análise de corrente e fator de potência em um transformador abaixador, desenvolvido pelo grupo 2;
- ✓ Relação entre carga e fator de potência em um motor elétrico, desenvolvido pelo grupo 4.

A seguir apresentamos a descrição detalhada das atividades. Os registros apresentados estão disponíveis no CD de anais da Semana Científica da Faculdade de Tecnologia Senai Londrina e os áudios foram captados durante a apresentação dos trabalhos durante o evento.

#### 6.5.1 Análise de frequência e rotação em um motor (JUNIOR et al., 2017)

Dentro do universo da eletricidade, podemos encontrar relações bem interessantes quando analisamos as grandezas existentes. Já foram analisadas o comportamento elétrico no funcionamento de uma lâmpada, de um ferro de passar roupas, sendo que cada fenômeno se comporta de maneiras semelhantes em alguns aspectos e muito distintas em outras. Depois de alguns trabalhos já realizados pelo nosso grupo, resolvemos fazer um estudo relacionando rotação e frequência de um motor trifásico de 0,5 CV.

Por motivos de falta de tempo e equipamentos em sala de aula, ficou acertado que um integrante do nosso grupo, aplicaria o teste em uma empresa situada em Londrina, de acordo com o que foi planejado. A ideia seria estudar rotação e frequência de um motor, mas também analisar a relação entre tensão e frequência.

*Al: No semestre passado, junto com a professora, nós fizemos uma pesquisa relacionada às grandezas elétricas e sua relação com a matemática. Por exemplo, de um ferro elétrico com relação ao estudo das grandezas de temperatura, corrente e tensão, determinando um modelo matemático. Também fizemos sobre a lâmpada e estabelecemos relação das grandezas de temperatura, corrente e tensão.*

*Como trabalho final, como estávamos divididos em grupos, cada grupo ficou responsável em estudar alguma situação na indústria, que conseguimos medir essa relação, entre a área da matemática e a área das grandezas elétricas.*

*Nosso grupo escolheu um inversor de frequência para analisar a relação entre tensão, corrente, frequência e rotação do motor. Como o tempo estava corrido para coletar os dados no Senai, o grupo decidiu que um de nós iria fazer essa pesquisa no local de trabalho. E*

dessa forma, A2 fez o teste na empresa e poderá explicar melhor como foi realizado esse teste.

A2: O pessoal da empresa que eu trabalho disponibilizou os equipamentos para a realização do teste. Daí a gente montou um circuito utilizando um motor da WEG, um inversor de frequência, uma chave comutadora e potenciômetro linear. E a partir disso construímos uma tabela indicando tensão, corrente, frequência e rotação.

A Figura 6.53 descreve os equipamentos utilizados na bancada de teste para coleta de dados.

**Figura 6.54:** Instrumentos utilizados para coleta de dados



Fonte: Junior et al. (2017).

Com os equipamentos montados, começamos o teste aumentando a rotação pelo inversor de 100 em 100 RPM até sua nominal. Assim foi feita uma tabela para que possamos analisar essas relações, como podemos observar na Tabela 6.5.

**Tabela 6.5:** Dados retirados de um motor trifásico de 0,5 CV utilizando inversor frequência

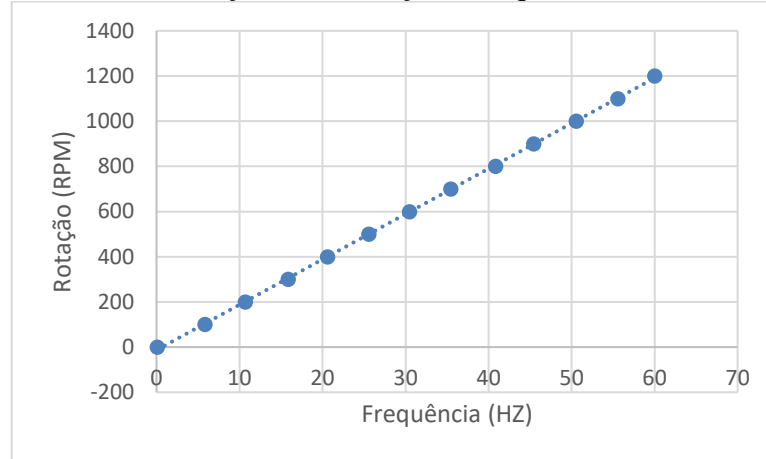
tensão (V)	corrente (A)	frequência (HZ)	rotação (RPM)
0,7	0,15	0,11	0
37	0,68	5,85	100
67	0,79	10,71	200
100	0,88	15,85	300
130	0,89	20,62	400
161	0,85	25,6	500
193	0,9	30,49	600
224	0,9	35,46	700
229	0,78	40,85	800
233	0,68	45,45	900
232	0,58	50,58	1000
232	0,57	55,6	1100
232,5	0,48	60	1200

Fonte: Junior et al. (2017).



Podemos perceber que a relação entre rotação (RPM) e frequência (Hz) é linear, de acordo com o Gráfico 6.1.

**Gráfico 6.1:** Relação entre rotação e frequência em um motor



Fonte: Junior et al. (2017).

Utilizando o Excel chegamos ao seguinte modelo matemático:

$$n = 20,07 \cdot f - 13,158,$$

em que  $n > 0$ ,  $n$  é velocidade de rotação mecânica (RPM) e  $f$  é frequência fundamental da tensão de alimentação (Hz). A Tabela 6.6 indica a validação dos resultados entre frequência e rotação.

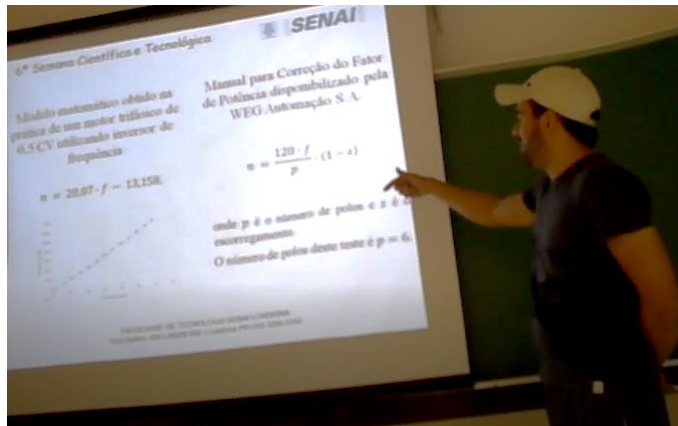
**Tabela 6.6:** Validação dos resultados - Análise de frequência e rotação em um motor

frequência (HZ) observada prática	rotação (RPM) observada prática	rotação (RPM) de acordo com modelo matemático	Diferença (%)
0,11	0	-10,95	-
5,85	100	104,25	4,25
10,71	200	201,79	0,90
15,85	300	304,95	1,65
20,62	400	400,69	0,17
25,6	500	500,63	0,13
30,49	600	598,78	-0,20
35,46	700	698,52	-0,21
40,85	800	806,70	0,84
45,45	900	899,02	-0,11
50,58	1000	1001,98	0,20
55,6	1100	1102,73	0,25
60	1200	1191,04	-0,75

Fonte: Junior et al. (2017).

A1: *Esse modelo matemático comparamos com os dados do manual da WEG. Nesse manual, na parte em que se explica a respeito de fator de potência, eles também estabelecem um modelo matemático semelhante:  $n = \frac{120 \cdot f}{p} \cdot (1 - s)$ , onde  $p$  é o número de polos e  $s$  é o escorregamento.*

**Figura 6.55:** Apresentação de trabalho durante a Semana Científica

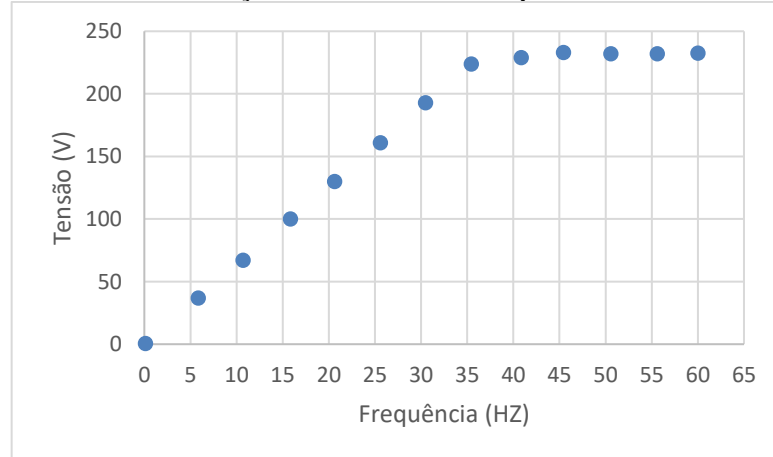


Fonte: Dos autores.

*Para quem não conhece, o escorregamento é a diferença entre a velocidade do campo magnético do motor com a velocidade do eixo. Todo motor tem um fator de escorregamento medido em porcentagem. Esse modelo dado pelo manual, nos dá uma base para comparar com o que determinamos. Assim, o número de polos deste teste é  $p=6$ .*

Tendo interesse de estudar o comportamento entre tensão e frequência, construímos o Gráfico 6.2.

**Gráfico 6.2:** Relação entre tensão e frequência em um motor



Fonte: Junior et al. (2017).

A15: *A próxima análise é entre tensão e frequência. Conforme a gente foi aumentando a frequência, a tensão foi aumentando linearmente até a tensão máxima do motor, que no caso é de 232 volts. A partir desse valor, há uma certa estabilidade na tensão, quando se aumenta os valores da frequência.*

A1: *Analisando o gráfico, conforme o A15 falou, mantém uma reta linear, mas chega um momento que a tensão estabiliza, que é por volta de 230 volts. Esse valor é normalmente a tensão nominal do motor. Podemos verificar esse resultado no manual da WEG.*

Segundo WEG (sd, p. 6)<sup>16</sup>, “a variação da relação  $U/f$  é feita linearmente até a frequência base (nominal) do motor. Acima dessa, a tensão é máxima (igual à nominal) e permanece constante, havendo então apenas a variação da frequência aplicada ao enrolamento estatórico do motor”.

Em nosso teste, a razão  $\frac{V}{f} = 6,3$ , assim podemos afirmar que:  $U = 6,3 \cdot f$  para  $0 \leq f \leq 36,9$ . Dessa maneira, podemos considerar que a frequência nominal do motor é  $f = 36,9$  Hz, acima desse valor a tensão é máxima e permanece constante, ou seja,  $U = 232,5$  V. Dessa forma, podemos considerar o modelo matemático:

$$U = \begin{cases} 6,3 \cdot f & \text{para } 0 \leq f \leq 36,9 \\ 232,5 & \text{para } f > 36,9 \end{cases}$$

onde  $U$  é a tensão (V) e  $f$  é a frequência (Hz).

**Tabela 6.7:** Validação dos resultados - Relação entre tensão e frequência em um motor

frequência (HZ) observada prática	tensão (V) observada prática	tensão (V) de acordo com modelo matemático	Diferença (%)
0,11	0,7	0,693	1,00
5,85	37	36,855	0,39
10,71	67	67,473	-0,71
15,85	100	99,855	0,15
20,62	130	129,906	0,07
25,6	161	161,28	-0,17
30,49	193	192,087	0,47
35,46	224	223,398	0,27
40,85	229	232,5	-1,53
45,45	233	232,5	0,21
50,58	232	232,5	-0,22
55,6	232	232,5	-0,22
60	232,5	232,5	0,00

Fonte: Junior et al. (2017).

Podemos verificar na prática, conteúdos já disponibilizados em manuais da área e em disciplinas já estudadas e como estes conteúdos se correlacionam.

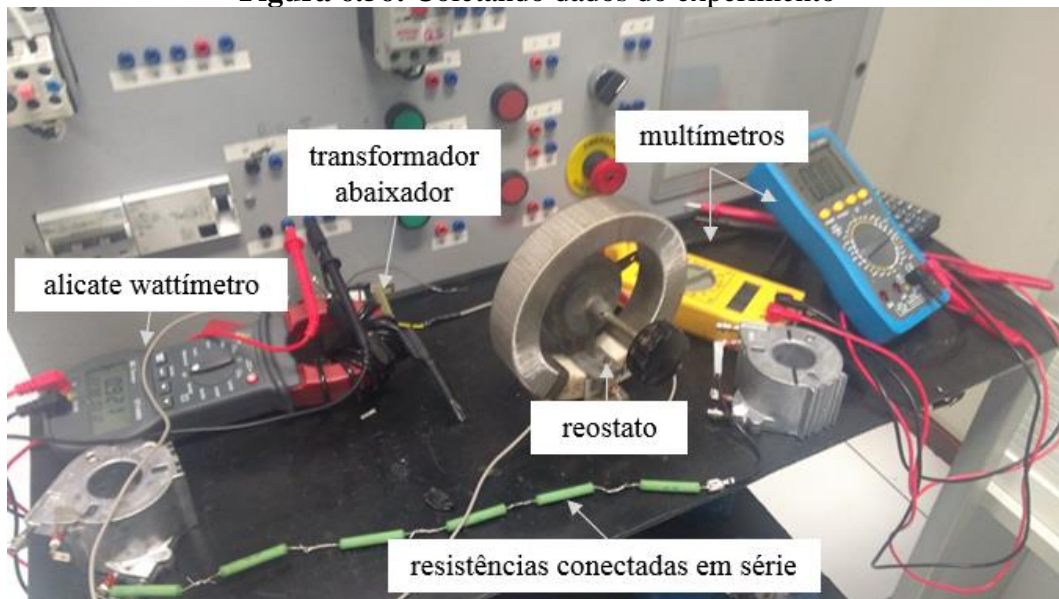
<sup>16</sup> WEG Automação S.A. Motores de indução alimentados por inversores de frequência PWM. Disponível em: <<http://ecatalog.weg.net/files/wegnet/WEG-motores-de-inducao-alimentados-por-inversores-de-frequencia-pwm-50029351-artigo-tecnico-portugues-br.pdf>>. Acesso em: 01/06/2017.

### 6.5.2 Análise de corrente e fator de potência em um transformador abaixador (LUIZ et al., 2017)

O nosso experimento tem como objetivo extrair dados para análise de valores de corrente, tensão, resistência e fator de potência de um transformador, por meio da utilização de cargas resistivas associadas em série em sua saída. Foram utilizados para esse experimento:

- ✓ um alicate wattímetro;
- ✓ um transformador 220/15+15, 30 VA com uma saída máxima de 1 ampère;
- ✓ um multímetro;
- ✓ um reostato de 250 watts.

**Figura 6.56:** Coletando dados do experimento



Fonte: Luiz et al. (2017).

*All: Nosso experimento tem como objetivo analisar o que acontece com o fator de potência na entrada de um transformador abaixador quando se aumenta a potência consumida no secundário. Um transformador é formado basicamente de um enrolamento primário, um enrolamento secundário e um núcleo ferromagnético. No enrolamento primário quando se aplica uma tensão de corrente alternada em suas extremidades, é gerado um campo eletromagnético no núcleo. O núcleo conduz esse campo eletromagnético para o enrolamento secundário causando uma corrente nesse enrolamento e conseqüentemente uma tensão.*

No nosso caso, utilizamos um transformador abaixador que abaixa a tensão de entrada, com relação a saída. O transformador utilizado abaixa a tensão de 220 Volts para '15 mais 15' Volts. Esse '15 mais 15' possui três saídas, sendo uma de referência de 0 Volts e os outros dois de 15 Volts, assim, temos 30 Volts na saída. O fator de potência é a razão entre a potência ativa e a potência aparente.

A8: Os instrumentos que utilizamos para a coleta de dados foram um alicate wattímetro, um transformador abaixador, um multímetro e um reostato. Na imagem do experimento pode-se verificar as resistências que foram associadas em série.

**Figura 6.57:** Apresentação de trabalho durante a Semana Científica



Fonte: Dos autores.

Com o alicate wattímetro foram medidas as seguintes grandezas de tensão, corrente e fator de potência no primário do transformador, já com o multímetro foi medido a resistência da carga ligada à saída (com o circuito desenergizado). Através disso foram obtidos os seguintes dados, descritos na Tabela 6.8.

A12: O multímetro, na configuração ohmímetro, foi ligado na resistência de carga (com o circuito desenergizado). O alicate wattímetro foi utilizado para medir a corrente, tensão e o fator de potência; o reostato são as resistências de carga ligadas em série no secundário do transformador. Nós construímos uma tabela que relaciona a tensão de entrada, a corrente de entrada e o valor de resistência de carga. Conforme aumentou-se o valor das resistências foi possível mensurar o fator de potência.

**Tabela 6.8:** Dados extraídos do experimento em um transformador abaixador

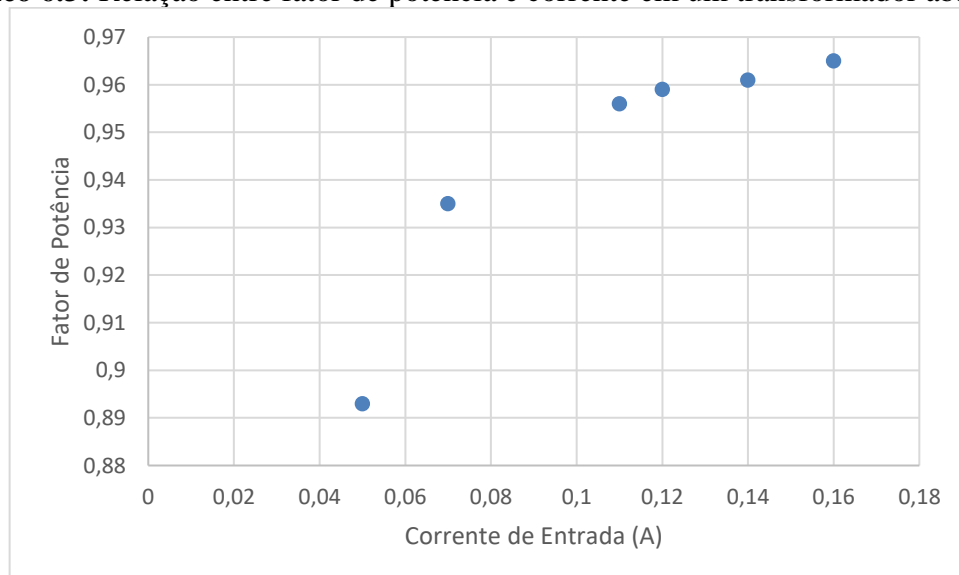
Tensão de entrada (V)	Corrente de entrada (A)	Resistência ( $\Omega$ )	Fator de Potência
222,7	0,16	23,6	0,9650
224,2	0,14	26,7	0,9610
224,6	0,12	31,5	0,9590
224,6	0,11	36	0,9560
223,6	0,07	61,8	0,9350
223,9	0,05	160	0,8930

Fonte: Luiz et al. (2017).

De acordo com a tabela, pode-se perceber que a tensão de entrada varia  $\pm 1,6V$  em torno de 223V. Conforme aumenta o valor da resistência em série, diminui a carga elétrica, e consequentemente, o fator de potência fica menor, o que implica em um comportamento inversamente proporcional.

*All: Essa variação na tensão de entrada é a variação na rede, em que não é possível controlar.*

Para estabelecermos uma relação matemática entre a corrente de entrada do transformador com o fator de potência medido, construímos o Gráfico 6.3 utilizando o software Excel.

**Gráfico 6.3:** Relação entre fator de potência e corrente em um transformador abaixador

Fonte: Luiz et al. (2017).

Conforme a corrente de entrada aumenta, o fator de potência também aumenta, mas não de forma linear, neste caso, o fator de potência tem um limitante (Gráfico 6.3). Com o auxílio do software Curve Expert, podemos construir a seguinte fórmula:

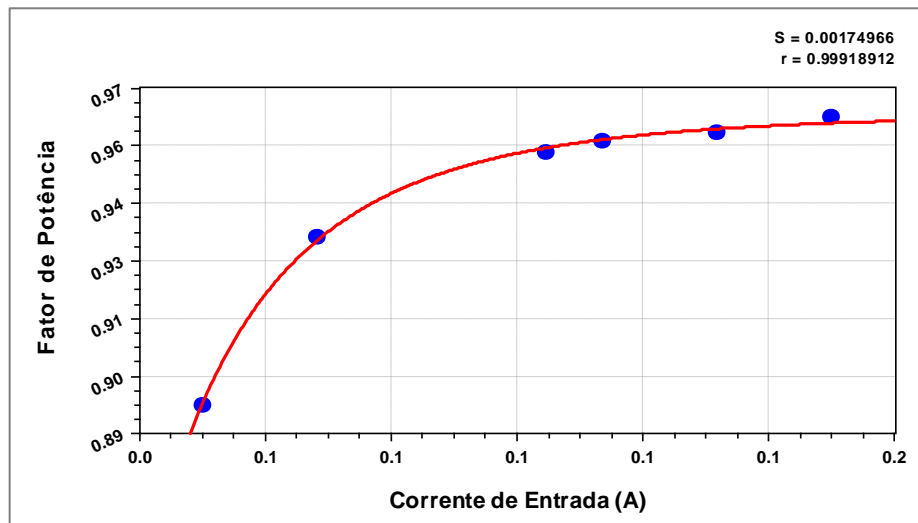
$$y = 0,9657 - 13,7796 \cdot e^{-19,274 \cdot i^{0,4341}} \quad (1)$$

onde  $y$  é o fator de potência e  $i$  é a corrente (ampères).

*A11: A corrente de entrada é bem pequena com relação a de saída. Como utilizamos um transformador abaixador, a corrente e tensão no primário e secundário são grandezas inversamente proporcionais. Quanto maior a tensão de entrada, menor a tensão de saída. Em consequência, a corrente de entrada sempre vai ser menor que a corrente de saída.*

*A5: Através do software Curve Expert foi possível determinar uma relação entre a corrente de entrada e o fator de potência. A curva que estabelece essa relação, tende a chegar a um limite. Na prática não é possível determinar esse valor, mas o software permite isso.*

**Figura 6.58:** Dados do Curve Expert sobre a relação entre corrente e fator de potência em um transformador abaixador



Fonte: Luiz et al. (2017).

*A11: Quanto maior a resistência de carga, mais próximo de um circuito aberto na saída, então a carga vai ser cada vez mais baixa conforme a resistência aumenta. Na entrada, o fator de potência diminui porque você está aproveitando menos a saída do transformador para transformar em potência ativa. A maior parte está sendo transformada em potência reativa.*

A Tabela 6.9 nos permite afirmar que (1) apresenta uma boa aproximação com os dados coletados.

**Tabela 6.9:** Validação dos resultados - Análise de corrente e fator de potência em um transformador abaixador

Corrente de entrada	Fator de Potência (observado)	Fator de Potência (calculado)	Erro (%)
0,05	0,893	0,893	0,00
0,07	0,935	0,934	0,11
0,11	0,956	0,957	-0,10
0,12	0,959	0,959	0,00
0,14	0,961	0,962	-0,10
0,16	0,965	0,963	0,21

Fonte: Luiz et al. (2017).

Como podemos observar na Figura 6.57 e de acordo com (1), quando a corrente aumenta, o fator de potência aumenta exponencialmente, detendo um limite de 0,9657.

*All: Nossa conclusão é que quanto maior a potência consumida pela saída do transformador, maior vai ser o fator de potência na entrada do circuito. Consequentemente, a potência drenada na rede vai ser melhor aproveitada.*

Outro estudo que poderia ter sido realizado é a relação entre a resistência de carga e o fator de potência. Conforme a resistência aumenta, o fator de potência diminui. Essa relação entre resistência e fator de potência é dado por:

$$y = 0,975 \cdot e^{-0,000562 \cdot r}$$

onde  $y$  é o fator de potência e  $r$  é a resistência (ohms).

Neste caso podemos afirmar que o fator de potência diminui exponencialmente, conforme a resistência aumenta, detendo um limite de 0.

### 6.5.3 Relação entre carga e fator de potência em um motor elétrico (AMARAL et al., 2017)

Para base de estudos que engloba o setor industrial, no qual é muito importante no para o seguimento econômico de um país, veio a ideia de relacionar algo que tornasse possível controlar a variação do fator de potência (FP) de um sistema. Esse assunto foi estudado em toda a disciplina de Eletrotécnica onde o grupo apresenta conhecimento necessário para desenvolvê-lo, além de ser algo muito interessante de se estudar, pois na prática dentro da indústria, o fator de potência é um assunto de extrema importância.



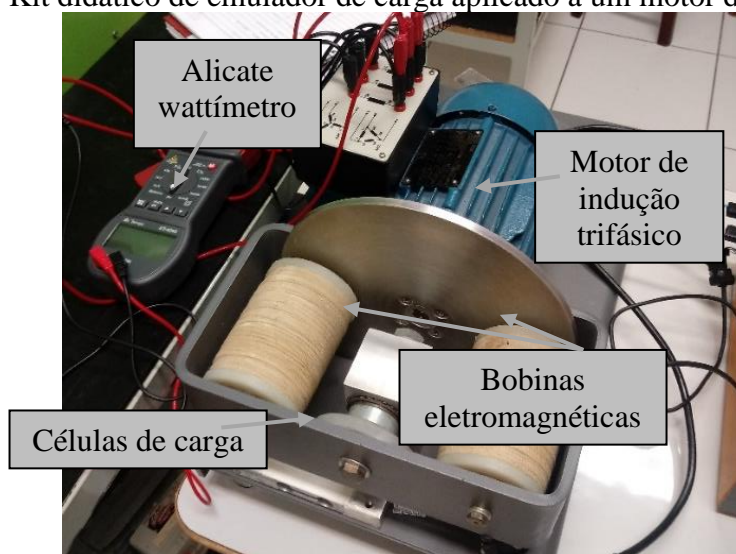
A7: O nosso trabalho indica a relação entre carga e fator de potência em um motor elétrico trifásico. A pedido da professora, a nossa ideia para o trabalho é a partir de duas grandezas elétricas determinar a relação entre elas. Como nas disciplinas de Eletrotécnica e Máquinas Elétricas nós estudamos bem a fundo a ideia de carga no motor e fator de potência, nós achamos interessante colocar em prática e verificar qual é essa relação, se vai gerar uma curva, se vai gerar uma equação, como vai ser a tendência dos dados. Pois, apesar de saber a teoria, a prática pode ser diferente.

A6: O material que a gente utilizou para a coleta de dados foi um kit didático de carga disponível no laboratório 205 A.

Para dar início ao trabalho buscamos uma maneira de variar a carga no eixo de um motor e analisar qual seria a variação do fator de potência neste equipamento. Sabemos que um motor ligado a vazio tem carga plenamente indutiva, ou seja, a potência drenada é quase que somente para girar o motor, e para girar o motor usa-se energia eletromagnética.

Para poder relacionar as variáveis (carga  $N \cdot m$  e fator de potência) houve a necessidade de coletar alguns dados. Para isso foi utilizado um kit didático de emulador de carga (Figura 6.58) contendo um motor de indução trifásico (MIT), simulador de carga por meio de bobinas eletromagnéticas, analisador de carga e conjugado por meio de células de carga.

**Figura 6.59:** Kit didático de emulador de carga aplicado a um motor de indução trifásico



Fonte: Amaral et al. (2017).

O motor de indução trifásico recebe uma tensão de linha eficaz de 220 V. Quando as bobinas são energizadas, cria-se um campo eletromagnético, diante disso o campo criado

tende a fazer frenagem, resultando a redução de velocidade do disco de alumínio, interferido a velocidade desse disco (RPM). No kit didático, quando é realizado a frenagem, a estrutura mecânica do próprio kit, faz que esforce um sensor, denominado célula de carga. Dependendo da frenagem, há uma força maior ou menor incidindo sob a célula de carga.

*A7: Na verdade esse emulador de carga funciona da seguinte maneira: conforme vai aumentando a tensão na bobina de carga, a gente consegue um peso, uma carga no eixo do motor calculada em  $N \cdot m$ . Conforme a gente vai aumentando essa carga, a gente quer estudar a relação com o fator de potência.*

*A6: A partir dos dados coletados, a gente construiu uma tabela. Na primeira coluna consta a carga e na outra coluna o fator de potência, que a gente mediu por meio de um alicate wattímetro.*

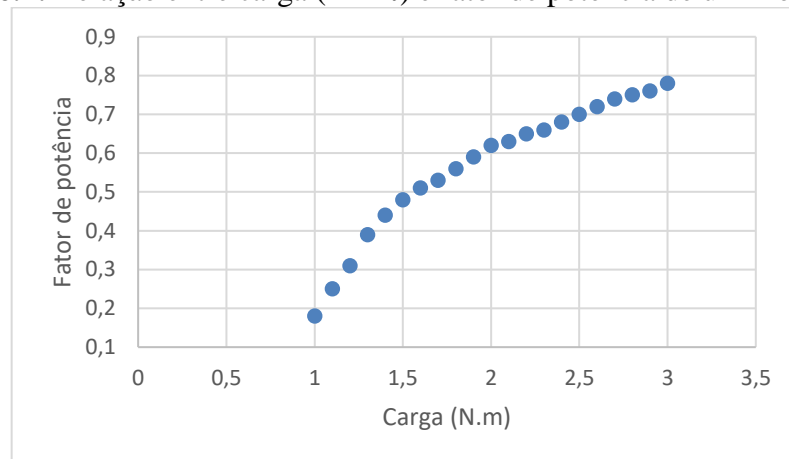
Variando a tensão aplicada na bobina, há uma variação da intensidade de campo magnético e interfere na frenagem. Resultando em um aumento ou diminuição da carga no eixo do motor. A Tabela 6.10 descreve os dados coletados de carga ( $N \cdot m$ ) e fator de potência de um motor elétrico.

**Tabela 6.10:** Dados coletados de carga ( $N \cdot m$ ) e fator de potência de um motor elétrico

Carga ( $N \cdot m$ )	Fator de potência	Carga ( $N \cdot m$ )	Fator de potência
1	0,18	2,1	0,63
1,1	0,25	2,2	0,65
1,2	0,31	2,3	0,66
1,3	0,39	2,4	0,68
1,4	0,44	2,5	0,7
1,5	0,48	2,6	0,72
1,6	0,51	2,7	0,74
1,7	0,53	2,8	0,75
1,8	0,56	2,9	0,76
1,9	0,59	3	0,78
2	0,62		

Fonte: Amaral et al. (2017).

Levando em consideração apenas as duas grandezas de análise, podemos observar que conforme foi aumentando a carga no eixo do motor, o valor do fator de potência também aumentou (Gráfico 6.4).

**Gráfico 6.4:** Relação entre carga ( $N \cdot m$ ) e fator de potência de um motor elétrico

Fonte: Amaral et al. (2017).

*A7: Nós temos a questão do limitante. Primeiramente nossa célula de carga tinha um limite de no máximo  $3 N \cdot m$ . Nesse limite, o nosso motor chegava as condições nominais de seu funcionamento. Ou seja, a corrente que estava gerando nesse motor, já estava excedendo a nominal. Na nossa coleta de dados, nós tivemos que limitar: fomos até  $3 N \cdot m$  com a carga e, nós conseguimos chegar apenas a 0,78 com o fator de potência, que ainda não é o ideal para uso na indústria.*

*A6: O motor tinha começado a esquentar.*

*A7: Quando a gente tem um motor operando a vazio, a potência elétrica drenada da rede elétrica é apenas para tirar o motor da inércia. A partir do momento em que se aplica carga mecânica no eixo do motor elétrico, o motor começa a transformar a maior parte da energia drenada em energia ativa. Ou seja, passa a transformar energia elétrica em trabalho.*

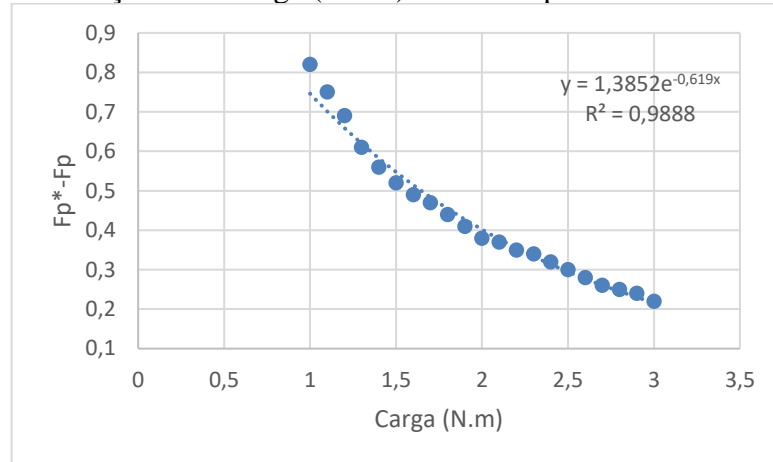
O fator de potência (FP) é a relação de energia (potência) consumida por uma carga, sendo que existem dois tipos de fluxo de energia: (i) ativa: toda aquela potência que foi transformada em trabalho, ou seja, consumida; (ii) reativa: toda a energia que retorna à fonte a cada ciclo.

O valor do fator de potência é um número adimensional entre 0 e 1 sendo que 0 é a situação onde a carga consome apenas potência reativa e em 1 a carga consome apenas potência ativa. Neste caso, no momento em que se aplica carga, o motor deixa de utilizar potência apenas para poder gerar campo eletromagnético e girar. Com o aumento da carga, o motor elétrico não gasta apenas energia, mas, transforma energia elétrica em trabalho.

Podemos considerar uma situação ideal de trabalho para o MIT, com o valor limitante para o fator de potência igual a 1. Ao utilizar o software Curve Expert percebemos que não há

uma curva que se ajusta aos dados com o ponto de estabilidade  $F_p^* = 1$ . Assim, podemos analisar a diferença entre  $F_p^*$  e  $F_p$  e verificar que essa diferença vai diminuindo no decorrer do tempo (Gráfico 6.5).

**Gráfico 6.5:** Relação entre carga ( $N \cdot m$ ) e fator de potência de um motor elétrico



Fonte: Amaral et al. (2017).

A6: A partir da tabela foi possível construir um gráfico e a gente chegou a essa curva, que não é uma curva de comportamento linear, mas que se aproxima de uma curva exponencial. A equação que a gente conseguiu chegar através de um auxílio de um software foi  $F_p = 1 - 1,3852 \cdot e^{-0,619x}$ .

Assim,  $F_p^* - F_p = 1,3852 \cdot e^{-0,619x}$ , onde  $F_p$  é o fator de potência e  $x$  é carga ( $N \cdot m$ ). Deste modo,  $F_p = 1 - 1,3852 \cdot e^{-0,619x}$ . A validação dos dados é indicada na Tabela 6.11.

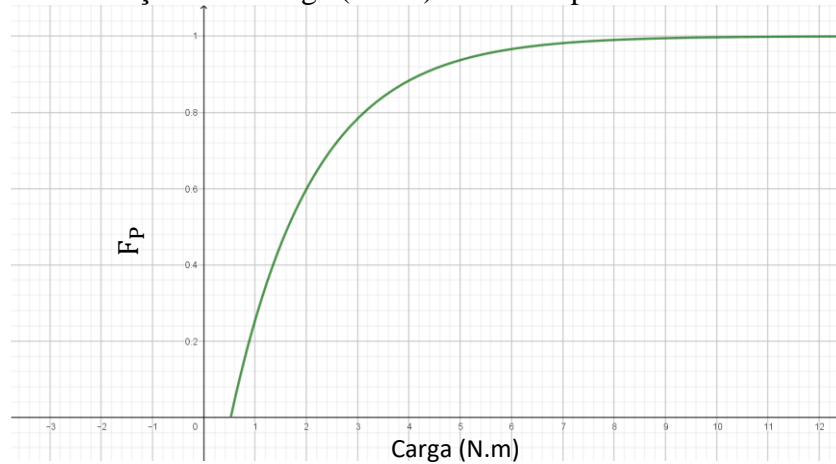
**Tabela 6.11:** Validação dos dados - Relação entre carga e fator de potência em um motor elétrico

Carga ( $N \cdot m$ )	FP obs.	FP calc.	Erro (%)	Carga ( $N \cdot m$ )	FP obs.	FP calc.	Erro (%)
1	0,18	0,25	-41,16	2,1	0,63	0,62	1,20
1,1	0,25	0,30	-19,55	2,2	0,65	0,65	0,75
1,2	0,31	0,34	-9,98	2,3	0,66	0,67	-0,97
1,3	0,39	0,38	2,43	2,4	0,68	0,69	-0,95
1,4	0,44	0,42	5,07	2,5	0,7	0,71	-0,75
1,5	0,48	0,45	5,70	2,6	0,72	0,72	-0,41
1,6	0,51	0,49	4,80	2,7	0,74	0,74	0,06
1,7	0,53	0,52	2,57	2,8	0,75	0,76	-0,69
1,8	0,56	0,55	2,61	2,9	0,76	0,77	-1,30
1,9	0,59	0,57	2,93	3	0,78	0,78	-0,48
2	0,62	0,60	3,49				

Fonte: Amaral et al. (2017).

A Figura 6.59 mostra o modelo matemático encontrado  $F_p = 1 - 1,3852 \cdot e^{-0,619x}$  e indica que  $\lim F_p = \lim(1 - 1,3852 \cdot e^{-0,619x}) = 1$ .

**Figura 6.60:** Relação entre carga (N · m) e fator de potência de um motor elétrico



Fonte: Amaral et al. (2017).

Neste caso, foi possível verificar na prática um assunto abordado na disciplina de Eletrotécnica, no que tange a qualidade de energia e, também, a eficiência energética. O trabalho indicou que motores trabalhando a vazio, sem carga, resulta em um fator de potência baixo, que interfere diretamente no consumo de energia e eficiência da máquina elétrica, tópicos de extrema relevância na indústria.

#### 6.5.4 Análise específica das atividades de terceiro momento

Neste momento, os alunos definiram os temas para coleta e análise de dados. Cabe ressaltar que esses temas estavam em consonância com o ambiente de trabalho (Análise de frequência e rotação em um motor) e com conceitos aprendidos na disciplina de Eletrotécnica (Análise de corrente e fator de potência em um transformador abaixador; Relação entre carga e fator de potência em um motor elétrico).

Na fase de inteiração das atividades, os alunos utilizaram de *instrumentos e aparelhos de ensaios, testes e medições* para a coleta de dados, abordando diferentes grandezas: rotação, frequência, tensão, rotação, corrente, resistência, carga e fator de potência.

Na atividade denominada ‘Análise de frequência e rotação em um motor’, os alunos tiveram como interesse estudar dois problemas: estudo da relação entre rotação e frequência e relação entre tensão e frequência de um motor.

A partir da coleta de dados, na fase de matematização, os alunos definiram como variáveis a rotação, frequência e tensão. Na busca de responder o primeiro problema, iniciaram a discussão a respeito da tendência dos dados relacionando rotação e frequência e estabeleceram como suposição de que essa relação é representada por uma função linear.

Na busca de responder o segundo problema, os alunos iniciaram a discussão a respeito da tendência dos dados relacionando tensão e frequência e estabeleceram como suposição de que essa relação é representada por uma função linear até a tensão máxima do motor. A partir desse valor, os alunos verificaram que há uma certa estabilidade na tensão, quando aumentou os valores da frequência.

Na fase de resolução, os alunos utilizaram do software Excel para determinar os modelos matemáticos adequados para cada problema. O primeiro modelo matemático considerou o uso da função linear e o segundo modelo o uso de uma função por partes. Na fase de interpretação de resultados e validação, os alunos realizaram a comparação dos valores medidos e calculados, como intuito validar os modelos matemáticos. Em suas considerações, o grupo utilizou do manual para Correção do Fator de Potência disponibilizado pela WEG Automação S.A, tendo em vista as suposições estabelecidas e as regras matemáticas utilizadas na resolução.

Durante a apresentação do grupo na Semana Científica, o professor moderador que é da área de Manutenção Industrial, salientou a relevância do trabalho desenvolvido, conforme indica a transcrição do diálogo a seguir. É importante ressaltar que esse trabalho permitiu o primeiro contato dos alunos com o inversor de frequência.

*P1: Pessoal, uma simples observação: O por que controlar o motor? Ele tem rotação, torque. A automação é uma metodologia que existe há anos. Hoje com a disponibilidade do inversor de frequência, esse trabalho de vocês se mostra muito importante. O inversor permite controlar a velocidade do motor, aonde não se tem aquelas paradas bruscas.*

*A1: Para a maioria de nós do grupo, foi o nosso primeiro contato com o inversor de frequência. Sou da área da mecânica, A2 também, A15 ainda não está na indústria e A10 é*

*da área de elétrica, mas ainda não tinha tido contato com o inversor. E esse trabalho serviu para a gente conhecer um pouco mais. A gente viu que tinha tensão, corrente, frequência e rotação, e a gente queria saber a relação entre essas grandezas. E o trabalho teve o fruto esperado. Foi um aprendizado.*

*PI: Vocês pesquisando, vão aprender muito mais coisa ainda! O trabalho de vocês, serve de inspiração para outros alunos.*

Na atividade denominada ‘Análise de corrente e fator de potência em um transformador abaixador’, os alunos tiveram como objetivo de analisar valores de corrente de entrada e fator de potência medido em um transformador abaixador.

A partir da coleta de dados, na fase de matematização, os alunos definiram como variáveis a corrente de entrada, fator de potência e resistência. Na busca de responder o problema, iniciaram a discussão a respeito da tendência dos dados relacionando a corrente de entrada e fator de potência e estabeleceram como suposições que essa relação não é representada por uma função linear.

Na fase de resolução, os alunos utilizaram do software Curve Expert para definir o modelo matemático que se adequa ao problema, utilizando-se da função exponencial assintótica. Segundo os alunos, conforme aumentou o valor da resistência em série, diminuiu o valor da carga elétrica, e conseqüentemente, o fator de potência ficou menor.

Na fase de interpretação de resultados e validação, os alunos realizaram a comparação dos valores medidos e calculados e, em suas considerações, o grupo salientou que quanto maior a potência consumida pela saída do transformador, maior vai ser o fator de potência na entrada do circuito. Conseqüentemente, a potência drenada na rede vai ser melhor aproveitada. Além disso, definiram que quanto maior a corrente, o fator de potência também aumenta exponencialmente, detendo um limite de 0,9657.

Durante a apresentação do grupo no evento da Faculdade, o professor moderador salientou a importância de se realizar uma predição para antecipar qualquer possível problema. Segundo ele, de acordo com a transcrição do áudio a seguir, para antecipar é preciso realizar uma aquisição, tratar os dados e analisar de alguma forma.

*PI: O objetivo do trabalho foi analisar a dinâmica de um transformador quando está trabalhando a vazio, com cargas resistivas associadas em série em sua saída. A tabela ficou*

*bem coerente e, também, é importante ressaltar as contribuições das informações sobre um transformador. Por exemplo, a corrente de entrada vai de um valor mínimo no experimento (50 mA) até um valor máximo de (160mA), enquanto o fator de potência inicia em 0,89 e vai até 0,96. Dessa forma, conseguimos identificar o que é um transformador trabalhando a vazio e em plena carga. Quando ligamos o transformador a vazio, toda potência drenada da rede é somente para gerar campo magnético, para entregar uma tensão menor. Então é o fator de potência que mede do total drenado da rede, o percentual que é transformado em trabalho.*

*PI: Então na pior situação do trabalho de vocês, do total que vocês estavam drenando da rede, 89% foi transformado em trabalho. Conforme vocês foram aumentando a carga, drenou-se mais potência do transformador, diminuindo a impedância associada, nesse caso, de apenas carga resistiva. Assim, diminuiu a resistência, aumentou a corrente e, conseqüentemente, aumentou o fator de potência, sendo uma análise inversamente proporcional. O fator de potência em um transformador se aproxima mais do valor 1 do que em relação a um motor, porque é uma carga sem comprometimento. Dessa forma, somente se você cumprir uma carga ocorrerá a realização de trabalho.*

*PI: Cabe salientar que nesse trabalho foi utilizado um transformador de pequeno porte aplicando cargas resistivas. Se for reproduzido esse experimento em um transformador de maior potência, esse comportamento poderia mudar, certo? Do mais, o trabalho está excelente. Esse tratamento dos dados, é um ponto em que não é possível abordar nos conteúdos curriculares e está fora da ementa. Então, vocês fizeram um bom trabalho!*

*PI: Hoje, no modelo de indústria 4.0, tem muito esse quesito de realizar uma predição em relação a termos de manutenção, com relação a antecipar qualquer possível problema. Para antecipar é preciso realizar uma aquisição, tratar os dados e analisar de alguma forma. Essa análise pode ser feita por vocês, por um algoritmo, por um sistema inteligente.*

Na atividade denominada ‘Relação entre carga e fator de potência em um motor elétrico’, os alunos buscaram relacionar as variáveis (carga  $N \cdot m$  e fator de potência) por meio da coleta de dados de um kit didático de emulador de carga aplicado a motores de indução trifásicos (MIT).

Na fase de matematização, os alunos estabeleceram como suposições que o fator de potência possui um valor limitante igual a 1 e que a relação entre o fator de potência e a carga é representada por uma função exponencial assintótica. Na fase de resolução, os alunos



utilizaram o software Curve Expert, que não apresentou uma curva com esse ponto de estabilidade. Nesse caso, foi necessário, utilizar de outras ferramentas matemáticas para abordar o problema.

Na fase de interpretação de resultados e validação, os alunos validaram o modelo matemático encontrado e concluíram que foi possível verificar na prática um assunto abordado na disciplina de Eletrotécnica, no que tange a qualidade de energia e, também, a eficiência energética.

O professor moderador durante a apresentação do grupo na Semana Científica, destacou a relevância do motor de indução trifásico na indústria e o diálogo a seguir indica essa relevância. Nessa discussão, observou que em condições ideais, o fator de potência possui um valor limitante igual a 1, sem pensar nas condições nominais do motor.

*P1: Primeiro vou fazer alguns apontamentos, porque é um momento de aprendizado. Um trabalho não termina apenas com as discussões e resultados. Na verdade, o maior trabalho começa após construir o experimento e conseguir gerar os resultados, para poder apresentar para a comunidade científica, a vocês alunos dos cursos e professores, tendo com o intuito de ser validado, com opiniões e sugestões para melhorar o trabalho.*

*P1: Em relação ao trabalho que vocês fizeram, o tema é bastante interessante. Como os dados tratados são de motor de indução trifásico, senti falta inserir um slide mostrando o que é esse motor. Então seria importante inserir no artigo uma fundamentação pequena, pelo menos mostrando a importância do motor de indução trifásico.*

*P1: Lembrando que o motor de indução na indústria é tão importante, que dados de 2016 mostram que dos 100% de energia gerada no Brasil, em torno de 45% foi para a indústria. E, desses 45%, em torno de 70% foi para a conversão eletromecânica e, desse valor, quase 70% foi destinada para motor de indução trifásico. Olha a relevância do trabalho que vocês estão fazendo. Então uma fundamentação só para dizer o por que é importante realizar uma análise de um motor de indução trifásico.*

*P: P1, posso tirar uma dúvida: tem sentido falar que esse fator de potência neste experimento teria como limitante o valor 1?*

*A7: Sem pensar nas condições do motor, né?*

*P1: Olha, é possível sim, em termos ideais. Por que, qual é a condição do experimento? O motor utilizado possui um limite de carga ativa de?*

*A7: 0,78.*

*P1: Então, os alunos fizeram testes das condições nominais do motor.*

*A7: Começamos a aumentar a carga e o motor começou a esquentar...*

*P1: Isso! O limite desse motor, em condições nominais, não chega a 1.*

Foi possível verificar nas atividades, a articulação de diferentes linguagens para o estudo do conteúdo de *funções*, tendo em vista as dificuldades apresentadas durante a resolução da avaliação diagnóstica (Quadro 6.8), e o uso de tecnologias digitais necessário para a resolução das atividades. Além disso, as atividades permitiram que os alunos tivessem experiência com uma situação real, com posterior análise dos dados coletados.

**Quadro 6.8:** Abordagem das atividades de terceiro momento tendo em vista as dificuldades apresentadas pelos alunos

<b>Avaliação Diagnóstica</b>	<b>Atividades de terceiro momento</b>
Os alunos estabeleceram como suposição que a relação entre as variáveis é, em geral, proporcional, ou seja, pode ser descrita por uma função linear.	Durante a resolução das atividades, os alunos estabeleceram como suposições que a relação entre as variáveis é apresentada por uma função linear, função por partes ou função exponencial assintótica.
A falta de compreensão de critérios adequados para a resolução das questões acarretou na falta de compreensão de uma linguagem gráfica, tabular ou algébrica, quando sinalizaram que a função que representa a situação-problema é linear.	Para a construção dos modelos matemáticos, os alunos relacionaram o registro tabular ao registro gráfico e, por meio da utilização de softwares como Excel e Curve Expert, se engajaram em determinar um registro algébrico adequado para cada problema.
O arredondamento de números realizado pelos alunos em seu registro algébrico influenciou na precisão da resposta para o problema.	Durante a resolução dos problemas, os alunos utilizaram de diversas casas decimais para determinar os modelos matemáticos e, também, para realizar a comparação dos valores medidos e calculados.
Os alunos não identificaram e integraram o conceito de função em suas diferentes linguagens.	Para generalizar os modelos matemáticos foi necessário construir, a partir da coleta de dados, um registro tabular para associar a um registro gráfico. A partir desse registro foi possível elaborar um modelo matemático adequado a cada problema.
A não articulação de conceitos matemáticos, mais especificamente de funções, com conceitos relativos à área do curso influenciou na resposta para o problema.	Os alunos desde a coleta de dados utilizaram de conceitos relativos a disciplina de Eletrotécnica ou temas provenientes do ambiente de trabalho. O primeiro grupo utilizou do manual da WEG para relacionar os modelos matemáticos construídos e os conceitos provenientes deste manual, tais como velocidade de rotação mecânica, tensão e frequência. O segundo e o terceiro grupos utilizaram de conceitos de fator de potência, corrente, resistência e carga para a resolução dos problemas.

Fonte: Dos autores.

No próximo capítulo apresentamos as categorias emergentes que revelam a extensão do domínio do conteúdo de *funções* apresentados pelos alunos. Essa integração de diferentes linguagens possibilitou aos alunos a estabelecerem um complexo conjunto de regras por meio do uso nas diferentes atividades de modelagem matemática.

## CAPÍTULO 7

### *A busca por efeitos terapêuticos*

*“Por que chamamos algo de ‘número’? Ora, talvez porque tem um direto parentesco com alguma coisa que até agora se chamou de número; e pode-se dizer que através disso adquire um parentesco com uma outra coisa que também chamamos assim”*  
(WITTGENSTEIN, 2013, § 67, p. 52).

Neste capítulo tecemos reflexões a respeito de uma intervenção terapêutica à luz da terapia de Wittgenstein com alunos em uma disciplina de Cálculo. Ao observar as semelhanças e dessemelhanças entre os diversos jogos de linguagem, gradualmente foi se construindo a robustez do conteúdo de *funções* por meio de sua aplicação em diferentes contextos.

#### *7.1 O resultado da terapia*

De acordo com concepções filosóficas tradicionais, princípios devem guiar a ação do professor e, conseqüentemente, a maneira que o aluno deve aprender, ou seja, regras transmitidas pelo professor desempenham papel importante para a compreensão de conceitos em sala de aula (GOTTSCHALK, 2015). Da perspectiva terapêutica de Wittgenstein, o uso da linguagem não se restringe somente a esse uso convencional, neste caso, é importante considerar a multiplicidade de usos de conceitos em sala de aula como “oportunidades de aprendizado (lema: toda resposta errada é a resposta certa para uma pergunta diferente)” (BLUM, 2015, p. 83).

Neste trabalho, identificamos dificuldades dos alunos em uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de um curso de tecnologia e realizamos uma intervenção por meio de usos do conceito de *funções* em atividades de modelagem matemática.

A discussão das questões presentes na avaliação diagnóstica, nos leva a ponderar que as dificuldades dos alunos relativas ao conceito de *funções* têm repercussões no desenvolvimento da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. A análise das resoluções dos alunos na avaliação diagnóstica nos permite concluir que:

- i. Os alunos estabeleceram como suposição que a relação entre as variáveis é, em geral, proporcional, ou seja, pode ser descrita por uma função linear.
- ii. A falta de compreensão de critérios adequados para a resolução das questões acarretou na falta de compreensão de uma linguagem gráfica, tabular ou algébrica, quando sinalizaram que a função que representa a situação-problema é linear.
- iii. O arredondamento de números realizado pelos alunos em seu registro algébrico influenciou na precisão da resposta para o problema.
- iv. Os alunos não identificaram e integraram o conceito de função em suas diferentes linguagens.
- v. A não articulação de conceitos matemáticos, mais especificamente de funções, com conceitos relativos à área do curso influenciou na resposta para o problema.

As dificuldades apresentadas na avaliação diagnóstica foram discutidas durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, sendo possível realizar intervenções de melhoria contínua, tendo em vista viabilizar a superação dessas dificuldades.

Assim, para explicar o que é uma *função*, foi necessário descrever diferentes usos do conteúdo de *funções*. A gramática desse conceito para os alunos foi se ampliando por meio da avaliação diagnóstica e atividades de modelagem matemática, do mesmo modo que, “ao tecermos um fio, traçamos fibra por fibra e a robustez do fio não implica que uma fibra qualquer perpassa toda sua extensão, mas que muitas fibras se sobreponham umas às outras” (WITTGENSTEIN, 2013, § 67, p. 52).

Durante a primeira atividade de modelagem matemática ‘Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?’, na discussão das suposições que orientaram seu desenvolvimento, como por exemplo, definir a tarifa residencial cobrada pela Copel, a durabilidade e luminosidade de cada lâmpada, os alunos argumentaram que não conseguiriam

“*pensar em tudo isso!*” e que resolveriam essa atividade por regra de três: “A6: *Só sei usar regra de três professora!*”, “A9: *Tudo precisa se adequar na regra de três!*”.

O papel da professora da disciplina foi relevante nessa orientação do desenvolvimento das atividades de modelagem: persuadindo os alunos a outros modos de ver “o que até então, parecia a eles ser a única possibilidade de compreensão” (GOTTSCHALK, 2017, p. 138). Ou seja, essa orientação permitiu levar o aluno a ver de outras maneiras, conceitos matemáticos retidos, expandindo sentidos e relacionando diferentes aspectos.

Podemos dizer que essa orientação da professora durante a resolução das atividades está intimamente relacionada aos momentos da modelagem matemática, conforme revela o Quadro 7.1.

**Quadro 7.1:** As ações dos alunos nos diferentes momentos de familiarização da modelagem matemática

Momentos	Descrição
1º	Na primeira atividade ‘Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?’, a situação-problema foi apresentada pela professora da disciplina e a formulação do problema, definição de suposições e a construção de um modelo matemático relacionando o tempo e o custo para cada lâmpada, foram realizados em conjunto com a professora da disciplina. Verifica-se nessa atividade pequenas diferenças individuais na resolução e uma maior dependência dos alunos. Ou seja, os alunos estavam se familiarizando com as regras da modelagem matemática.
2º	Na segunda atividade ‘Funcionamento de um circuito elétrico: um estudo sobre a resistência elétrica e temperatura de um ferro de passar roupas?’, a situação-problema foi definida pelos alunos. A coleta de dados, formulação do problema, definição de suposições e a construção de um modelo matemático relacionando a corrente e tensão de um ferro de passar roupas, foram assessorados pela professora da disciplina. Nesse momento, os alunos tiveram maior independência na formulação do modelo matemático, devido a sua bagagem de conceitos matemáticos, mais especificamente, de função linear. Para realizar o estudo e formular o modelo matemático relacionando tensão e temperatura de um ferro de passar roupas, foi necessário introduzir regras das tecnologias digitais nessa resolução. Verifica-se nessa atividade maiores diferenças individuais na resolução e uma certa dependência dos alunos, pois eles estavam se familiarizando com as regras de uso das tecnologias digitais.
2º	Na terceira atividade ‘Um estudo sobre resistência elétrica e temperatura de uma lâmpada incandescente’, a situação-problema foi definida pelos alunos. A coleta de dados, formulação do problema, definição de suposições e a construção de um modelo matemático relacionando a corrente e tensão de uma lâmpada incandescente foram assessorados pela professora da disciplina. Nessa atividade os alunos utilizaram as tecnologias digitais para construir o relatório da atividade, além de resolver o problema proposto e interpretar e validar os resultados.

3°	Na quarta atividade, os alunos assessorados pela professora definiram a situação inicial (problemática) e conduziram uma atividade de modelagem matemática, na busca de uma resposta ao problema. Cabe salientar que foram escolhidos diferentes temas pelos grupos relacionados à área do curso de tecnologia em Manutenção Industrial, e foi possível verificar diferentes regras matemáticas e uso de tecnologias digitais para o desenvolvimento das atividades.
----	--

Fonte: Dos autores.

Tendo em vista as dificuldades abordadas na avaliação diagnóstica, os momentos e as atividades de modelagem matemática realizadas, construímos o Quadro 7.2.

**Quadro 7.2:** A intervenção terapêutica abordada na pesquisa tendo em vista as dificuldades apresentadas pelos alunos

<b>Avaliação Diagnóstica</b>	<b>Atividades de modelagem matemática desenvolvidas</b>
Os alunos estabeleceram como suposição que a relação entre as variáveis é, em geral, proporcional, ou seja, pode ser descrita por uma função linear.	Os alunos, de acordo com a situação-problema e as suposições estabelecidas nas atividades de modelagem matemática desenvolvidas, utilizaram de diferentes funções para estabelecer uma relação entre as variáveis, por exemplo, utilizaram da função menor inteiro, função linear, função exponencial assintótica, função quadrática e função definida por duas sentenças. Dessa forma verificaram que nem sempre a função linear se enquadrava ao contexto.
A falta de compreensão de critérios adequados para a resolução das questões acarretou na falta de compreensão de uma linguagem gráfica, tabular ou algébrica, quando sinalizaram que a função que representa a situação-problema é linear.	Os critérios nas atividades de modelagem matemática direcionaram o significado das palavras e determinaram o que os alunos sabiam a respeito de algum conceito. Durante a resolução das atividades, os alunos compreenderam os registros tabulares, gráficos e algébricos, devido aos critérios que foram utilizando em sua resolução.
O arredondamento de números realizado pelos alunos em seu registro algébrico influenciou na precisão da resposta para o problema.	De modo geral, nas atividades de modelagem matemática desenvolvidas, os alunos utilizaram do arredondamento de números para determinar o modelo matemático para cada problema e, também, para realizar a validação desses resultados por meio da comparação dos valores medidos e calculados.
Os alunos não identificaram e integraram o conceito de função em suas diferentes linguagens.	Durante a resolução das atividades de modelagem matemática, um registro tabular foi construído, principalmente devido a coleta de dados realizada pelos alunos. Para a compreensão dos problemas e suposições estabelecidas, um registro gráfico foi utilizado. Também foi possível verificar que foi utilizado para a resolução dos problemas, um registro algébrico adequado a cada problema. Desse modo, houve a articulação de diferentes linguagens, em que os alunos associaram, por exemplo, um registro gráfico a um algébrico, um registro numérico a um gráfico, um registro gráfico a um numérico, etc.

<p>A não articulação de conceitos matemáticos, mais especificamente de funções, com conceitos relativos à área do curso influenciou na resposta para o problema.</p>	<p>Os alunos associaram conceitos relativos à área do curso para a resolução de problemas. Por exemplo, nas atividades de primeiro e segundo momentos da modelagem matemática utilizaram conceitos relativos a disciplina de Eletricidade Básica, tais como custo, consumo, potência e eficiência de uma lâmpada; corrente, tensão, resistência e temperatura de um ferro de passar roupas e de uma lâmpada incandescente; além de conceitos da lei de Ohm. Para a realização das atividades de terceiro momento da modelagem matemática utilizaram de conceitos relativos a disciplina de Eletrotécnica ou temas provenientes do ambiente de trabalho, tais como velocidade de rotação mecânica, tensão e frequência de um motor trifásico, fator de potência, corrente, resistência e carga de um transformador abaixador e de um motor de indução trifásico. Esses conceitos, articulados com o conteúdo de funções, direcionaram a uma resposta adequada a cada problema.</p>
--	---

Fonte: Dos autores.

Da perspectiva terapêutica de Wittgenstein, é importante considerar a multiplicidade de usos do conteúdo de *funções* em sala de aula para que, gradualmente, haja a constituição da ‘robustez’ desse conteúdo. Os cinco aspectos que sinalizaram as dificuldades apresentadas pelos alunos durante a avaliação diagnóstica orientaram o uso do conteúdo de *funções* em cada atividade de modelagem matemática, e o esclarecimento e aprofundamento desse conteúdo para os alunos.

É possível evidenciar que houve o treinamento das regras da modelagem matemática, da matemática (especialmente do conteúdo de *funções*) e relacionadas a tecnologias digitais, durante as atividades de primeiro e segundo momentos de familiarização dos alunos com a modelagem matemática. Esse conjunto de usos que os alunos fazem desse conteúdo em diversos contextos, nos revela que podem ser incorporadas novas regras de uso de acordo com a incorporação de atividades de modelagem matemática.

Para o tratamento das dificuldades apresentadas, o uso de regras da modelagem foi o meio utilizado e, nesse processo, o uso de tecnologias digitais foi necessário para compreensão da situação-problema, uso de conteúdos matemáticos e ampliação do leque de aplicações do conteúdo de *funções*.

As atividades desenvolvidas nesta pesquisa, inicialmente, estavam associadas à disciplina de Eletricidade Básica do curso de Tecnologia em Manutenção Industrial. Contudo, as atividades de terceiro momento revelaram que os alunos utilizaram de outros conceitos



para a coleta de dados: conceitos relativos a disciplina de Eletrotécnica ou temas provenientes do ambiente de trabalho.

Desse modo, as atividades de modelagem matemática desenvolvidas ocorreram em situações provenientes do contexto em que os alunos estavam inseridos, cumprindo o princípio da pertinência pessoal. Durante a resolução dessas atividades, os alunos foram incentivados a utilizar de suas experiências pessoais, habilidade matemática e formação acadêmica para o seu desenvolvimento.

A definição dos temas para estudo, a busca de informações e a formulação dos problemas foram relevantes para permitir a elaboração de um modelo matemático e estruturação para cada situação-problema. Durante a coleta de dados, os alunos foram capazes de avaliar se os dados estavam coerentes com o contexto, ou seja, estavam assegurando o princípio da autoavaliação. Assim, mesmo quando foi necessário coletar os dados por mais de uma vez, essa coleta realizada pelos alunos e o contexto das atividades, não refutaram as proposições matemáticas. Pois, segundo Wittgenstein (2013) não há sentido quando se faz o uso das regras matemáticas, fosse feito cada vez algo diferente.

Para o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, a simplificação da situação-problema, a definição de variáveis e o estabelecimento de suposições e critérios também foram importantes para orientar os alunos em seu desenvolvimento. As suposições estabelecidas direcionaram os alunos em seus procedimentos por meio de proposições matemáticas, na busca da construção de um modelo matemático.

As atividades desenvolvidas envolviam a necessidade de os alunos construírem modelos matemáticos (princípio da construção do modelo e modelo simples) e a expressarem como estavam pensando sobre os problemas, utilizando-se de diferentes registros (manuscritos, impressos e arquivos eletrônicos), vídeos elaborados pelos próprios alunos e conversas informais, em consonância com o princípio da documentação do modelo.

As regras matemáticas tinham, nas atividades desenvolvidas, o papel de normas de como proceder e auxiliaram os alunos a compreenderem o conceito de *funções*. Essas regras são ao mesmo tempo uma doutrina e um fazer, pois o *emprego de conceitos matemáticos para a resolução de problemas* depende das características de cada situação-problema proposta.

Por exemplo, quando A6 utilizou da regra de três para estimar um outro valor (corrente (A) para a tensão de 130 V), estava supondo que a variação entre tensão e corrente ocorre de “forma igual”, de forma proporcional, o que mostra que não interpretou o problema. Quando os alunos buscaram um ajuste para o modelo matemático da temperatura na segunda atividade de modelagem matemática inicialmente não verificaram em suas discussões o fator inibidor da temperatura, abordando “A9: *Será que a curva quadrática é um bom ajuste?*” ou inferindo “A6: *Limite no infinito será sempre para cima!*”. O mesmo ocorreu na terceira situação-problema, quando os alunos precisaram determinar um ajuste entre corrente e tensão para a lâmpada incandescente. Neste caso, os alunos não articularam conceitos matemáticos com o contexto.

É nesse sentido, que podemos afirmar que os critérios definidos pelos alunos, não refutaram as proposições matemáticas, mesmo quando os cálculos matemáticos não correspondiam as características de cada situação-problema. “Isso porque as proposições matemáticas são o próprio padrão de correção, e padrões de correção não podem, eles mesmos, ser passíveis de refutação e de falseabilidade, em função dos fatos” (SOUZA; BARBOSA, 2014, p. 40). Assim, o ensino de regras se aproximou muito mais de uma tarefa de persuasão que permitiu aos alunos ver de outra maneira o que antes estava obscuro.

É possível identificar que a inserção gradativa das atividades de modelagem matemática auxiliou o uso de novas regras matemáticas em sala de aula:

- ✓ A primeira atividade abordou o uso do conteúdo de função linear, função menor inteiro e sistemas lineares;
- ✓ A segunda atividade abordou o uso do conteúdo de função linear, exponencial assintótica, limites;
- ✓ A terceira atividade abordou o uso do conteúdo de função quadrática, exponencial assintótica e limites;
- ✓ A quarta atividade, que consiste nas atividades de terceiro momento da modelagem matemática, abordou o uso do conteúdo de função linear, função definida por duas sentenças, função exponencial assintótica e limites.

Nesse caso, essa diversidade de uso de conteúdo de *funções* ampliou a visão unilateral dos alunos, em olhar não somente para uma única direção (ao considerar que os problemas podem ser resolvidos não somente por regra de três).

Nesta pesquisa, podemos observar que houve o uso de tecnologias digitais, que se delineou nas etapas das atividades de modelagem matemática. A partir da segunda atividade de modelagem ‘Funcionamento de um circuito elétrico: um estudo sobre a resistência elétrica e temperatura de um ferro de passar roupas’, foi necessário a introdução do uso de tecnologias digitais.

Durante a coleta de dados, na fase de inteiração verificou-se o uso de diversos instrumentos para simular situações reais utilizando tecnologia, tais como:

- ✓ Durante as atividades de segundo momento: Variac, multímetro, amperímetro, termômetro, controlador, sensor de temperatura e potenciômetro.
- ✓ Durante as atividades de terceiro momento: motor, inversor de frequência, potenciômetro, chave comutadora, alicate wattímetro, transformador, multímetro, reostato, emulador de carga por meio de bobinas eletromagnéticas, analisador de carga, conjugado por meio de células de carga.

Neste caso, o desenvolvimento e análise das atividades não poderia ocorrer sem o uso dessas ferramentas.

A construção de gráficos e sua visualização deram oportunidade aos alunos de utilizar conceitos relativos ao curso para explicar os resultados matemáticos. Como os alunos conheciam características das situações abordadas, foi possível que eles construíssem modelos matemáticos e validassem sua solução. Os alunos utilizaram de tecnologias digitais para visualizar a dispersão dos dados, plotar gráficos da função e validação dos resultados. Além disso, o recurso de regressão de tecnologia auxiliou os alunos a identificar o modelo matemático adequado à cada situação.

Assim, como exemplo de uso de tecnologias digitais, podemos citar, o desenvolvimento de cálculos utilizando o software Excel, o acesso de informações, realização de testes e experimentos utilizando de diferentes instrumentos de coleta de dados, e a construção de registros algébricos, gráficos e tabulares utilizando, por exemplo, os softwares Excel, Curve e Geogebra. Além disso, esse uso de tecnologias está intimamente relacionado ao uso dos conceitos matemáticos em sala de aula.

Isso revela que esse uso de tecnologias digitais perpassa as diversas etapas da modelagem matemática, conforme já discutido em Greefrath (2011) e Souza (2018), seja para

inteirar-se da situação-problema (por exemplo, por meio de coleta de dados), para a formulação de suposições (por exemplo, utilizando de diferentes registros para verificar características da situação), para a resolução de problemas (por exemplo, visualizando a tendência dos dados por meio de um registro gráfico e definindo o modelo matemático adequado para situação) e para a validação e interpretação de resultados (por exemplo, utilizando softwares para efetuar cálculos e visualizar modelo matemático por meio de registro tabular e gráfico), satisfazendo o princípio da autoavaliação.

Neste caso, foi possível perceber que modelos matemáticos utilizados pelos alunos nas atividades de segundo momento foram aplicados e reutilizados em outras atividades, por exemplo, nas atividades de terceiro momento. Como o princípio da generalização do modelo indica, os modelos desenvolvidos foram utilizados em situações problemáticas semelhantes.

O que podemos destacar é que a utilização de tecnologias digitais auxiliou os alunos a compreender características da situação-problema e a discutir conceitos matemáticos (como por exemplo, conceitos de Cálculo Diferencial e Integral) e ampliar o leque de aplicações, principalmente relacionadas ao conteúdo de *funções*.

E é dessa forma que, por meio do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, os alunos, gradualmente, estabeleceram uma gramática arbitrária do conteúdo de *funções*.

## 7.2 Considerações Finais

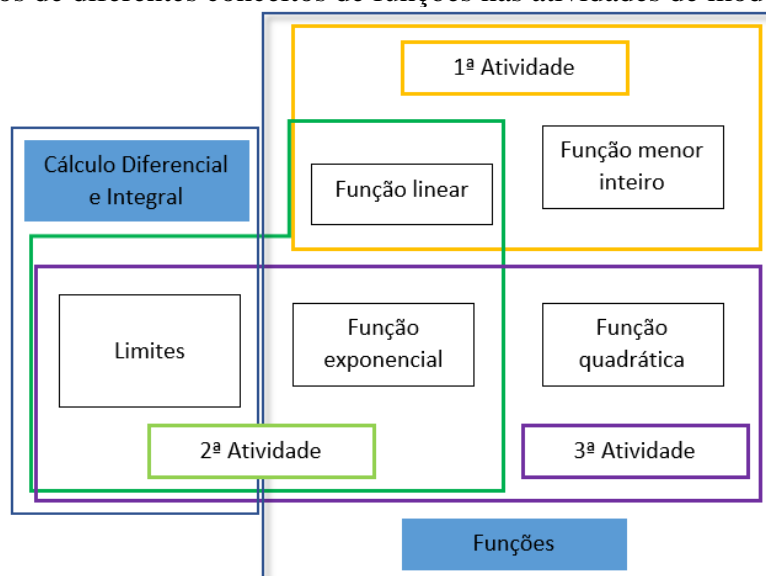
As dificuldades apresentadas pelos alunos durante a avaliação diagnóstica foram tratadas com o uso de atividades de modelagem matemática em sala de aula. A terapia consistiu em descrever o que estava à frente de nosso olhar sem a intermediação de qualquer teoria, por meio da variação de contextos de aplicação do conceito (de *funções*).

Os diferentes usos do conteúdo de *funções* nas atividades de modelagem matemática na Educação Tecnológica permitiram o esclarecimento e a extensão do domínio desse conteúdo.

Assim, mostramos as possibilidades de uso desse conteúdo em atividades de modelagem e diferentes aspectos que foram percebidos pelos alunos de acordo com o desenvolvimento dessas atividades.

Na primeira atividade de modelagem matemática ‘Qual o melhor tipo de lâmpada: halógena, fluorescente ou LED?’, verificou-se o uso do conceito de função linear e função menor inteiro. Na segunda atividade ‘Funcionamento de um circuito elétrico: um estudo sobre a resistência elétrica e temperatura de um ferro de passar roupas?’, ampliou esse uso para o uso de função exponencial e o conteúdo de limites. Na terceira atividade ‘Um estudo sobre resistência elétrica e temperatura de uma lâmpada incandescente’, para além desses conteúdos utilizou-se do conteúdo de função quadrática, conforme ilustra a Figura 7.1.

**Figura 7.1:** Usos de diferentes conceitos de funções nas atividades de modelagem matemática



Fonte: Dos autores.

A quarta atividade, que consistiu nas atividades de terceiro momento da modelagem matemática, permitiu observar os usos do conteúdo de *funções* utilizados nas outras atividades, mas verificou-se também o uso de função definida por duas sentenças.

É possível verificar semelhanças entre os usos desse conteúdo nas atividades de modelagem matemática desenvolvidas. A Figura 7.1 permite vislumbrar que são mantidas características comuns nas atividades, ao passo que muitas outras características não foram mantidas em seu desenvolvimento.

Desse modo, a ‘simples variação da dieta’ desvencilhou os alunos de pensar que o significado do conteúdo de *funções* ocorre de forma independente do seu uso em contextos específicos. O significado desse conceito vai se tornando mais complexo à medida que os usos desse objeto vão se diferenciando, e, com isso, novos aspectos foram percebidos em função do lugar que passa a ocupar em diferentes jogos de linguagem.

Nesta pesquisa, a temporalidade nos momentos da modelagem matemática auxiliou na compreensão do conteúdo de *funções*. A princípio, essa falta de compreensão desse conteúdo pelos alunos é justificado por Wittgenstein (2013, § 122, p. 74): “não dominamos com uma clara visão o uso de nossas palavras. – Falta à nossa gramática uma disposição clara. Uma exposição de conjunto transmite a compreensão, que consiste exatamente em ‘ver as conexões’”.

Assim, a utilização de diferentes atividades de modelagem matemática, por meio de suas semelhanças e dessemelhanças lançou luz para os alunos sobre o conceito de *funções*.

Para o desenvolvimento da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral em um curso de tecnologia, se tornou importante a busca de desenvolvimento de capacidades correspondentes a uma qualificação profissional, neste caso, correspondentes ao tecnólogo em Manutenção Industrial.

Segundo Senai (2013), as capacidades indicam e circunscrevem a base sobre a qual se assenta uma qualificação, expressando desempenhos (explicitados por verbos) e seguidos de contextualização (conhecimento), ou seja, podem ser entendidas como uma qualidade que uma pessoa possui ou desenvolveu, que a torna apta a realizar determinadas tarefas ou funções.

Nesse sentido, a Educação Tecnológica deve propiciar progressivamente ao aluno o domínio de capacidades técnicas relativas à área profissional em que atua ou pretende atuar, assim como o desenvolvimento de capacidades sociais.

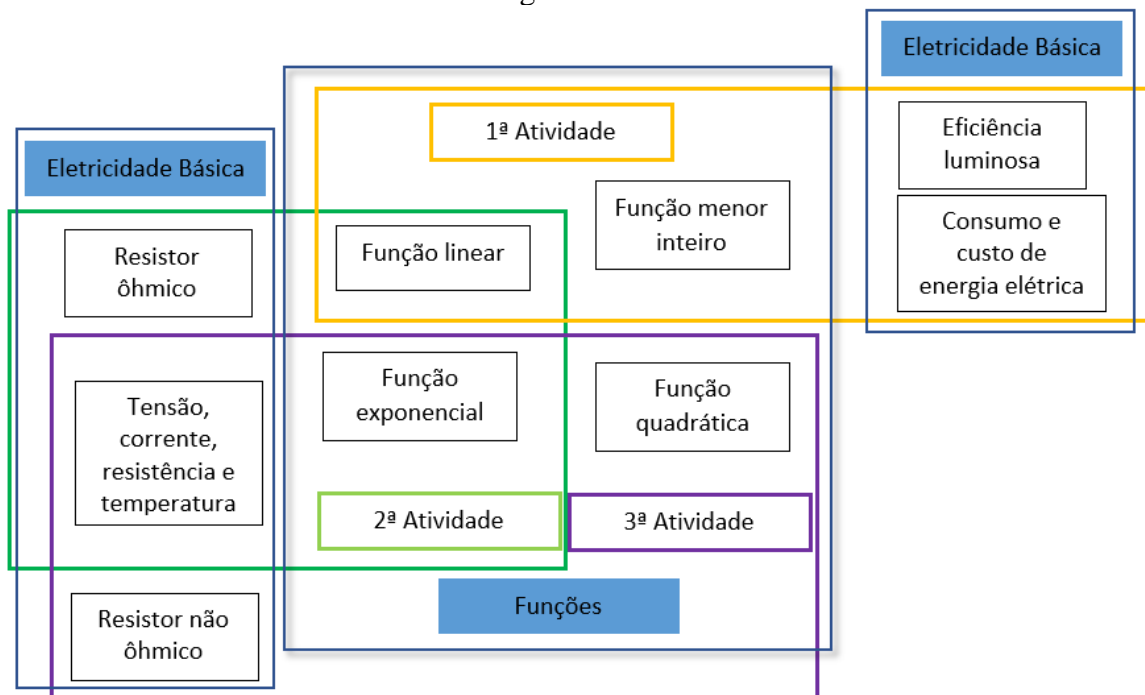
Por exemplo, durante a primeira atividade de modelagem matemática relatada nesta pesquisa foi possível identificar que os alunos *utilizaram de diferentes linguagens matemáticas (algébrica, gráfica e tabular)* de forma não fragmentada, estabelecendo relações entre os conceitos. Assim, a construção de um registro tabular adequado para a situação permitiu a formulação de um modelo matemático e sua visualização por meio de um registro

gráfico. Além disso, a utilização dessas diferentes linguagens permitiu dar sentido também ao desenvolvimento das outras atividades desenvolvidas.

Durante todo o decorrer do jogo de linguagem (da modelagem matemática) houve o emprego de técnicas linguísticas, como por exemplo, gesto ostensivo, uso de tabelas, gráficos e operações matemáticas, além de outros recursos que a linguagem ofereceu para a constituição de sentido nas atividades.

Como para Wittgenstein (2013) a linguagem é influenciada pelas crenças, conhecimentos e costumes de determinado grupo social, a concordância na forma de vida dos alunos serviu como sustentação para o seguir regras nas atividades. É possível verificar, no desenvolvimento das atividades, a capacidade que os alunos possuíam em *empregar conceitos relativos à área do curso para a resolução de problemas* (Figura 7.2).

**Figura 7.2:** Utilização de conceitos de Eletricidade Básica nas atividades de modelagem matemática



Fonte: Dos autores.

Os alunos utilizaram de conceitos de Eletricidade Básica, como por exemplo, consumo e custo de energia elétrica, eficiência luminosa, resistor ôhmico e não ôhmico, tensão, corrente, resistência, temperatura durante as atividades, compreendendo cada situação tendo como base sua habilidade matemática, formação acadêmica e experiências pessoais. Além disso, foi possível identificar nas atividades de modelagem matemática, o estudo de modelos

matemáticos já conhecidos na literatura, como por exemplo, os resistores ôhmicos e não ôhmicos.

No desenvolvimento da quarta atividade de modelagem matemática os alunos utilizaram de conceitos de relativos a disciplina de Eletrotécnica ou temas provenientes do ambiente de trabalho, tais como velocidade de rotação mecânica, tensão e frequência de um motor trifásico, fator de potência, corrente, resistência e carga de um transformador abaixador e de um motor de indução trifásico.

Essa utilização de diferentes linguagens matemáticas e conceitos relativos à área do curso para a resolução de problemas, exigiu que os alunos se *comunicassem com clareza e precisão, oralmente e por escrito durante o desenvolvimento de todas as atividades*. É possível identificar também outras capacidades desenvolvidas durante as atividades de modelagem matemática, como por *exemplo, demonstrar bom relacionamento interpessoal, espírito colaborativo e iniciativa para a obtenção de soluções adequadas para a resolução de problemas*.

Sendo assim, como os alunos entenderam o problema, as técnicas linguísticas empregadas e o uso de regras revelaram como os alunos agem para sua resolução. Essa regularidade nas ações dos alunos durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática está intimamente relacionada as formas de vida desses alunos, cuja concordância serviu como sustentação no seguir regras das atividades. Verificou-se, nesse sentido, que capacidades sociais também foram necessárias para o desenvolvimento das atividades.

Uma inferência importante é que capacidades manifestadas na atividade de primeiro momento também se manifestaram nas atividades de segundo e terceiro momento da modelagem matemática, mas se ampliaram de acordo com a familiaridade com as regras da própria modelagem e da matemática, conforme expressa o Quadro 7.3.

**Quadro 7.3:** Capacidades desenvolvidas pelos alunos durante as atividades de modelagem matemática

Momentos	Capacidades	Descrição
1º Momento	C1	Identificar o problema em estudo e selecionar informações relevantes.
	C2	Interpretar gráficos, tabelas e especificações técnicas.
	C3	Empregar conceitos matemáticos para a resolução de problemas.



	C4	Converter unidades de medidas dos diferentes sistemas de medição.
	C5	Utilizar de diferentes linguagens matemáticas (algébrica, gráfica e tabular) para a resolução de problemas.
	C6	Empregar conceitos relativos à área do curso para a resolução de problemas.
	C7	Comunicar com clareza e precisão, oralmente e por escrito durante o desenvolvimento da atividade.
	C8	Demonstrar bom relacionamento interpessoal e espírito colaborativo durante o desenvolvimento da atividade.
	C9	Demonstrar iniciativa para a obtenção de soluções adequadas para a resolução de problemas.
<b>2º Momento</b>	C10	Aplicar modelos matemáticos a novas situações.
	C11	Estruturar textos por meio da descrição do desenvolvimento da atividade.
	C12	Utilizar instrumentos e aparelhos de ensaios, testes e medições.
	C13	Utilizar de softwares específicos para a resolução de problemas.
	C14	Aplicar conceitos de Cálculo Diferencial e Integral.
<b>3º Momento</b>	C15	Estruturar relatórios por meio da descrição e comunicação da coleta de dados e resultados da situação-problema analisada.
	C16	Demonstrar visão sistêmica.
	C17	Analisar as implicações das decisões e resultados.

Fonte: Dos autores.

Tendo em vista a inserção dos alunos nesse novo jogo de linguagem (da modelagem matemática) foi necessária a apresentação de regras envolvidas com a linguagem, por meio da definição de variáveis, formulação de suposições e construção em conjunto de um modelo matemático adequado para a situação-problema.

É nesse sentido que podemos inferir que a inserção gradativa de atividades de modelagem matemática em sala de aula permite ampliar a familiaridade de uso de técnicas e regras da modelagem, matemática e tecnologias digitais, utilizando os conhecimentos, as habilidades e as atitudes como “suporte” para o desenvolvimento de capacidades, identificadas na análise de um perfil profissional, que é a referência para a formação do aluno.

Segundo Gottschalk (2015), esse domínio de uma ou mais técnicas em uma determinada situação designa a compreensão de um conceito. E é dessa forma que aprender passa a ter um novo sentido, pois gradualmente, os alunos estabelecem uma gramática

arbitrária, um complexo conjunto de regras, por meio do uso da linguagem em diferentes contextos.

As atividades abordadas nesta pesquisa foram desenvolvidas principalmente tendo em vista a modelagem como conteúdo com o intuito de capacitar os alunos para usar seu conhecimento matemático para resolver problemas, além disso, também teve como propósito a modelagem como veículo para o tratamento de conceitos de *funções*.

Por fim, com esta pesquisa, tivemos o propósito de olhar para o uso de práticas de modelagem no âmbito da Educação Matemática, particularmente de modelagem matemática na Educação Tecnológica. Ainda a esse respeito não se findam possibilidades futuras de investigação:

- ✓ Semelhanças de família entre o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática por alunos da Educação Tecnológica e por alunos de outros cursos de graduação;
- ✓ Influência de formas de vida dos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática;
- ✓ Abordagem terapêutica de outros conceitos na Educação Superior.

Pode-se dizer que essa pesquisa não termina por aqui, pois a robustez do conceito (de *funções*), se torna mais complexo à medida que os alunos participantes da pesquisa utilizam em outras disciplinas por meio de sua aplicação em diferentes contextos. Pois, não há o ‘esclarecimento completo’ de um conceito e este é sempre relativo ao uso da linguagem. Segundo Moreno (2005, p. 292), “o fim da terapia será sempre um término regional e provisório, pois as questões filosóficas sempre serão apresentadas com novas roupagens, segundo aspectos diferentes”.

## REFERÊNCIAS

- ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.
- ALMEIDA, L. M. W. DE. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké, Campinas**, v. 18, p. 387–414, 2010.
- ALMEIDA, L. M. W. DE; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Boletim de Educação Matemática**, v. 17, n. 22, p. 19–35, 2004.
- ALMEIDA, L. M. W. DE; SOUSA, B. N. P. A.; TORTOLA, E. **Desdobramentos para a modelagem matemática decorrentes da formulação de hipóteses**. VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. **Anais...Goiás**: 2015.
- ALMEIDA, L. M. W. The “practice” of mathematical modeling under a Wittgensteinian perspective. **RIPEM**, v. 4, n. 2, p. 98–113, 2014.
- ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, v. 50, p. 19–30, 2018.
- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. DA; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática na Educação Básica. **São Paulo: Contexto**, 2012.
- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, H. C. A matematização em atividades de modelagem matemática. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 8, n. 3, p. 207–227, 2015.
- ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática na Educação Matemática. In: **Modelagem Matemática em Foco**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2014. p. 1–21.
- AMARAL, D. H. DO et al. **Relação entre carga e fator de potência em um motor elétrico**. 6ª Semana Científica e Tecnológica da Faculdade de Tecnologia Senai Londrina. **Anais...Londrina**: 2017.
- ÄRLEBÄCK, J. B.; DOERR, H. M. Moving beyond a single modelling activity. In: **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**. Cham: Springer, 2015. p. 293–303.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2010.
- BASTOS, J. A. S. L. A. Educação e Tecnologia. **Revista Técnico-Científica dos Programas de Pós-Graduação em Tecnologia dos CEFET’S – PR/MG/RJ**, n. 1, p. 05–29, 1997.
- BEAN, D. O que é modelagem matemática. **Educação matemática em revista**, v. 8, n. 9/10, p. 49–57, 2001.

BLUM, W. Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? In: CHO, S. J. (Ed.). **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges**. Cham: Springer International Publishing, 2015. p. 73–96.

BRASIL. Parecer CNE/CP nº 29, de 03 de dezembro de 2002. Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Profissional de Nível Tecnológico. **Diário Oficial da União**, Brasília. 2002.

BRASIL. Decreto nº 5.154, de 23 de julho de 2004. Regulamenta o § 2º do artigo 36 e os artigos 39 a 41 da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional e dá outras providências. **Diário Oficial da União**, Brasília. 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. **Catálogo Nacional de Cursos Superiores de Tecnologia**, v. 2. 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. **Catálogo Nacional de Cursos Superiores de Tecnologia**, v. 3. 2016.

CASILLAS, A. L. **Máquinas: cálculos de Taller**. Espanha: [s.n.].

CAVASOTTO, M.; VIALI, L. Dificuldades na aprendizagem de cálculo: o que os erros podem informar. **Boletim Gepem**, n. 59, p. 15–33, 2011.

CIFUENTES, J. C.; NEGRELLI, L. G. Uma Interpretação Epistemológica do Processo de Modelagem Matemática: implicações para a matemática. **Boletim de Educação Matemática**, v. 26, n. 43, p. 791–815, 2012.

CURY, H. N. **Análise de Erros**. X Encontro Nacional de Educação Matemática. **Anais...**Salvador: 2010.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. The Descriptive, Predictive, and Prescriptive Functions of Applied Mathematics. In: **Descartes' Dream: The World According to Mathematics**. New York: Dover Publications, Inc, 2005. p. 115–121.

DIEFES-DUX, H. A. et al. **A framework for posing open-ended engineering problems: Model-eliciting activities**. 34th ASEE/IEEE Frontiers in Education Conference. **Anais...**Savannah: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2004. Acesso em: 30 ago. 2017.

DOERR, H. M.; ÄRLEBÄCK, J. B.; O'NEIL, A. H. **Interpreting and communicating about phenomenon with negative rate of change**. 120th ASEE Annual Conference & Exposition. **Anais...**Atlanta: American Society for Engineering Education, 2013. Acesso em: 30 ago. 2017.

DONAT, M. **Linguagem e significado nas Investigações Filosóficas de Wittgenstein: Uma análise do argumento da linguagem privada**. Tese (Doutorado em Filosofia)—São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 2008.

FERRUZZI, E. C. **Modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do cálculo diferencial e integral nos cursos superiores de tecnologia**. Dissertação (Mestrado

em Engenharia de Produção e Sistemas)—Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.

GALBRAITH, P. Models of modelling: Genres, purposes or perspectives. **Journal of Mathematical Modelling and application**, v. 1, n. 5, p. 3–16, 2012.

GARZELLA, F. A. C. **A disciplina de Cálculo I: Análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos**. Tese (Doutorado em Educação)—São Paulo: Universidade Estadual de Campinas, 2013.

GLOCK, H. J. **Dicionário Wittgenstein**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

GOTTSCHALK, C. A Natureza do Conhecimento Matemático sob a Perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, v. 14, n. 2, p. 305–334, 2004a.

GOTTSCHALK, C. M. C. **Reflexões sobre contexto e significado na Educação Matemática**. VII Encontro Paulista de Educação Matemática. **Anais...**São Carlos: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004b.

GOTTSCHALK, C. M. C. O papel do método no ensino: da maiêutica socrática à terapia wittgensteiniana. **Educação Temática Digital**, v. 12, n. 1, p. 64–81, 2010.

GOTTSCHALK, C. M. C. A terapia wittgensteiniana como esclarecedora de conceitos fundamentais do campo educacional. **Revista Latinoamericana de Filosofía de la Educación**, v. 2, n. 4, p. 299–315, 2015.

GOTTSCHALK, C. M. C. Os rituais educacionais à luz da filosofia da linguagem de Wittgenstein. **Sophia, Colección de Filosofía de la Educación**, n. 22, p. 126–144, 2017.

GOTTSCHALK, C. M. C. A atividade matemática escolar como introdução de paradigmas na linguagem. **Revista de Educação, Ciência e Cultura**, v. 23, n. 1, p. 113–124, 2018.

GREEFRATH, G. Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling—Overview. In: **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling**. Dordrecht: Springer, 2011. p. 301–304.

HAMILTON, E. et al. Model-Eliciting Activities (MEAs) as a Bridge between Engineering Education Research and Mathematics Education Research. **Advances in Engineering Education**, v. 1, n. 2, p. 1–25, 2008.

HOUAISS, A. **Dicionário Eletrônico Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Editora Objetiva Ltda., 2009.

JAPIASSÚ, H.; MARCONDES, D. **Dicionário Básico de Filosofia**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2001.

JUNIOR, A. F. C. et al. **Análise de frequência e rotação em um motor**. 6ª Semana Científica e Tecnológica da Faculdade de Tecnologia Senai Londrina. **Anais...**Londrina: 2017.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **Zdm**, v. 38, n. 3, p. 302–310, 2006.

KLÜBER, T. E.; BURAK, D. **Bases epistemológicas e implicações para práticas de Modelagem Matemática em sala de aula**. IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. **Anais...**Brasília: 2009.

LESH, R. et al. Model Development Sequences. In: **Beyond Constructivism**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2003.

LESH, R.; HAREL, G. Problem solving, modeling, and local conceptual development. **Mathematical thinking and learning**, v. 5, n. 2–3, p. 157–189, 2003.

LIMA, M. B. DE et al. A interdisciplinaridade como ferramenta pedagógica para superar dificuldades de ingressantes no Ensino Tecnológico. **E-TEC Revista de Tecnologia e Ciência**, v. 1, p. 1–15, 2014.

LUIZ, D. A. et al. **Análise de corrente e fator de potência em um transformador abaixador**. 6ª Semana Científica e Tecnológica da Faculdade de Tecnologia Senai Londrina. **Anais...**Londrina: 2017.

MIGUEL, A. Historiografia e terapia na cidade da linguagem de Wittgenstein. **Boletim de Educação Matemática**, v. 30, n. 55, p. 368–389, 2016.

MORENO, A. R. Por uma Pragmática Filosófica. **Cadernos de Estudos Linguísticos**, v. 30, p. 9–20, 1996.

MORENO, A. R. **Introdução a uma pragmática filosófica**. São Paulo: Editora da Unicamp, 2005.

MORENO, A. R. Introdução a uma epistemologia do uso. **Caderno CRH**, v. 25, n. 2, p. 73–95, 2012.

NISS, M. Prescriptive Modelling – Challenges and Opportunities. In: **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**. Cham: Springer, 2015. p. 67–79.

OLIVEIRA, F. C. DE. **Dificuldades na construção de gráficos de funções**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática)—Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2006.

REBELLO, S. T. B. **Sobre a identidade do plágio em uma perspectiva wittgensteiniana de linguagem**. Dissertação (Mestrado em Letras)—Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica, 2006.

ROSA, M.; OREY, D. C. Social-critical dimension of mathematical modelling. In: **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**. Cham: Springer, 2015. p. 385–395.

SENAI. Departamento Nacional. **Metodologia SENAI de educação profissional**, Brasília: Senai. 2013.

SENAI. Faculdade de Tecnologia Senai Londrina. **Projeto Pedagógico do Curso Superior de Tecnologia em Manutenção Industrial**, Londrina: Senai, 2014.

SILVEIRA, M. R. A.; SILVA, P. V.; JÚNIOR, V. P. T. A terapia filosófica wittgensteiniana: perspectivas para a Educação Matemática. **Revista de Educação, Ciência e Cultura**, v. 23, n. 1, p. 161–175, 2018.

SOMBRA, L. L. **Nas fronteiras de Wittgenstein: diálogos com o pragmatismo e a hermenêutica filosófica**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2012.

SOUSA, B. N. P. A. **A Matemática em atividades de modelagem matemática: uma perspectiva wittgensteiniana**. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática)—Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2017.

SOUZA, H. C. T. DE. **Um olhar sobre o fazer Modelagem Matemática à luz da filosofia de Wittgenstein**. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática)—Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2018.

SOUZA, H. C. T. DE; OLIVEIRA, C. F. DE; ALMEIDA, L. M. W. DE. **Uma proposta de Modelagem Prescritiva**. VII Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática. **Anais...**Londrina: 2016.

SOUZA, E. G. **A aprendizagem matemática na modelagem matemática**. Doutorado em Filosofia, Ensino e História das Ciências—Salvador: Universidade Federal da Bahia, 2012.

SOUZA, E. G.; BARBOSA, J. C. Contribuições teóricas sobre aprendizagem matemática na modelagem matemática. **Zetetike**, v. 22, n. 1, p. 31–58, 2014.

SPANIOL, W. Formas de vida: Significado e função no pensamento de Wittgenstein. **Síntese**, v. 51, p. 11–31, 1990.

STEWART, J. **Cálculo: volume I**. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

STILLMAN, G. A. **Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt?** 12th International Congress on Mathematical Education. **Anais...**Korea: Springer, 2012.

TORTOLA, E. **Configurações de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática—Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2016.

VARGAS, W. J. Sobre a relação de nomeação: A crítica de Wittgenstein a Agostinho e a recepção dessa crítica. **Revista Estudos Filosóficos**, n. 2, p. 148–166, 2009.

VERASZTO, E. V. et al. Tecnologia: buscando uma definição para o conceito. **Revista Prisma**, n. 7, p. 60–85, 2008.

WESSELS, H. M. Levels of mathematical creativity in model-eliciting activities. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n. 9, p. 22–40, 2014.

WITTGENSTEIN, L. Some remarks on logical form. **Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volumes**, v. 9, p. 162–171, 1929.

WITTGENSTEIN, L. **Observações Filosóficas**. São Paulo: Edições Loyola, 2005.

WITTGENSTEIN, L. **Gramática Filosófica**. São Paulo: Edições Loyola, 2010.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. São Paulo: Editora Vozes, 2013.

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. Porto Alegre: Bookman, 2010.

ZARPELON, E.; RESENDE, L. M. M. DE; PINHEIRO, N. A. M. Uso de mapas conceituais na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1: uma estratégia em busca da aprendizagem significativa. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 8, n. 2, p. 176–194, 2015.

ZARPELON, E.; RESENDE, L. M. M. DE; REIS, E. F. Análise do desempenho de alunos ingressantes de engenharia na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. **Interfaces da Educação**, v. 8, n. 22, p. 303–335, 2017.



## APÊNDICES



## Apêndice B

### Identificação de Perfil

# Questionário para identificação de perfil

Caro aluno,

O presente formulário tem como objetivo conhecer melhor o perfil dos alunos matriculados na disciplina de Cálculo II do curso de Tecnologia em Manutenção Industrial da Faculdade de Tecnologia Senai Londrina no primeiro semestre letivo do ano de 2017. Por favor, não deixe de responder as questões a seguir – suas respostas serão mantidas sob sigilo. Obrigada por participar de meu trabalho de pesquisa de doutorado!

Profa. Camila Fogaça de Oliveira

\*Obrigatório

Endereço de e-mail \*

Seu e-mail

Nome completo: \*

Sua resposta

Data de Nascimento: \*

Data

dd/mm/aaaa

Idade: \*

- 17 a 30 anos
- 31 a 40 anos
- 41 ou mais



**Estado civil: \***

- Casado
- Solteiro

**Você tem filhos (as)? Caso afirmativo, quantos (as)? \***

- Não
- 1 filho (a)
- 2 filho (a)
- 3 ou mais

**Em que município reside? \***

Sua resposta \_\_\_\_\_

**Formação acadêmica (Preencha os cursos concluídos):**

1) Cursos de aprendizagem, qualificação ou aperfeiçoamento. Especifique:

Sua resposta \_\_\_\_\_

2) Curso técnico. Especifique:

Sua resposta \_\_\_\_\_

3) Curso de graduação. Especifique:

Sua resposta \_\_\_\_\_

4) Curso de pós-graduação. Especifique:

Sua resposta \_\_\_\_\_

5) Outro curso relevante. Especifique:

Sua resposta \_\_\_\_\_



Até a entrada no curso de Tecnologia em Manutenção Industrial, fazia quanto tempo que não estudava matemática? \*

Sua resposta

---

Cite as empresas mais relevantes que trabalhou e seus respectivos cargos.

Sua resposta

---

Atualmente, você possui vínculo empregatício? \*

- Não
- Empregado
- Empresário
- Autônomo
- Estagiário
- Outro: \_\_\_\_\_

Se você está empregado (com ou sem registro em CTPS), por favor informe:

Nome da Empresa:

Sua resposta

---

Cidade onde trabalha:

Sua resposta

---

Ramo:

- Comércio
- Indústria
- Serviços
- Rural



Cargo que ocupa:

Sua resposta \_\_\_\_\_

Tempo na empresa:

Sua resposta \_\_\_\_\_

Se você está empregado (com ou sem registro em CTPS), em quais das situações abaixo você se encontra?

- Trabalha em ocupação/profissão relacionada ao curso de Tecnologia em Manutenção Industrial da Faculdade de Tecnologia Senai Londrina
- Trabalha em ocupação/profissão não relacionada ao curso de Tecnologia em Manutenção Industrial da Faculdade de Tecnologia Senai Londrina

Que benefícios o curso de Tecnologia em Manutenção Industrial ofereceu para você até agora? (Pode assinalar no máximo duas alternativas, que considere mais importantes) \*

- Possibilitou a entrada no mercado de trabalho
- Possibilitou mudança de emprego / trabalho ou crescimento profissional
- Possibilitou a permanência no emprego / trabalho
- Possibilitou melhoria salarial
- Melhorou o desempenho profissional
- Ajudou no relacionamento com os colegas de trabalho
- Ofereceu novos conhecimentos sobre a profissão
- Orientou na procura de emprego/trabalho
- Não ofereceu nenhum benefício
- Outro: \_\_\_\_\_



O que você pretende fazer logo após se formar? (Pode assinalar no máximo duas alternativas, que considere mais importantes)

\*

- Trabalhar exclusivamente na área em que se graduou
- Trabalhar em qualquer área que tiver oportunidade
- Continuar trabalhando na mesma empresa
- Abrir o próprio negócio
- Continuar estudando
- Não tenho a menor ideia
- Outro: \_\_\_\_\_

Você pretende continuar seus estudos? \*

- Não
- Pretendo iniciar outro curso de graduação
- Pretendo fazer pós-graduação lato-sensu (especialização)
- Pretendo fazer pós-graduação stricto-sensu (mestrado/doutorado)
- Outro: \_\_\_\_\_

Obrigada por sua participação e colaboração!



ENVIAR

## Apêndice C

### Questionário - Avaliação Diagnóstica



#### QUESTIONÁRIO – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Durante a resolução das atividades da avaliação diagnóstica, identifique em cada questão qual foi a sua maior dificuldade na resolução:

Questão 1 (Lei do uso de farol baixo)

falta de tempo

compreender o contexto

resolução matemática

outro: \_\_\_\_\_

Cite suas impressões sobre a atividade desenvolvida:

Questão 2 (Vazamento de uma torneira)

falta de tempo

compreender o contexto

resolução matemática

outro: \_\_\_\_\_

Cite suas impressões sobre a atividade desenvolvida:

Questão 3 (tensão e corrente de uma lâmpada incandescente)

falta de tempo

compreender o contexto

resolução matemática

outro: \_\_\_\_\_

Cite suas impressões sobre a atividade desenvolvida:

Questão 4 (Chuveiro no modo 'verão' ou 'inverno')

falta de tempo

compreender o contexto

resolução matemática

outro: \_\_\_\_\_

Cite suas impressões sobre a atividade desenvolvida: