UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

THIAGO NAGAFUCHI

UM ESTUDO HISTÓRICO-FILOSÓFICO ACERCA DO PAPEL DAS DEMONSTRAÇÕES EM CURSOS DE BACHARELADO EM MATEMÁTICA

Londrina
2009

THIAGO NAGAFUCHI

UM ESTUDO HISTÓRICO-FILOSÓFICO ACERCA DO PAPEL DAS DEMONSTRAÇÕES EM CURSOS DE BACHARELADO EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação, em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Irinéa de Lourdes Batista.

Londrina
2009

Catalogação na publicação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

N147e Nagafuchi, Thiago.

Um estudo histórico-filosófico acerca do papel das demonstrações em cursos de bacharelado em matemática / Thiago Nagafuchi. – Londrina, 2009.

150 f.

Orientador: Irinéa de Lourdes Batista.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2009.

Inclui bibliografia.

1. Educação matemática – Teses. 2. Matemática – estudo e ensino – Teses. 3. Matemática – Filosofia – Teses. I. Batista, Irinéa de Lourdes. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

THIAGO NAGAFUCHI

UM ESTUDO HISTÓRICO-FILOSÓFICO ACERCA DO PAPEL DAS DEMONSTRAÇÕES EM CURSOS DE BACHARELADO EM MATEMÁTICA

BANCA EXAMINADORA

____
Profa. Dra. Irinéa de Lourdes Batista
Universidade Estadual de Londrina

____
Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
Universidade Estadual de Londrina

____
Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Londrina, 05 de Março de 2009.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha Avó Maria que, apesar de não poder ler nem escrever, deu-me os maiores ensinamentos da VIDA!

AGRADECIMENTOS

Muitos merecem seus nomes aqui. Amigos, colegas, familiares, professores que, de alguma forma, contribuíram indiretamente com palavras de apoio, de conforto, de incentivo, de amizade e de carinho. Sintam-se ternamente abraçados!

Aqui, deixo meu “muito obrigado!” aos que tiveram influência direta na feitura dessa pesquisa. Então, meus sinceros agradecimentos:

À Professora Doutora Irinéa de Lourdes Batista, minha orientadora, pelos conhecimentos compartilhados, pelas horas de dedicação e orientação, pela sabedoria e ensinamentos que me foram muito importantes nesse percurso e, acima de tudo, por acreditar na minha capacidade de realizar tal pesquisa, tornando-me um pesquisador em formação.

Aos professores, colegas e amigos do curso e do grupo de estudos, pelas valiosas discussões e pequenos socorros técnicos que, embora pequenos, foram fundamentais.

Às professoras Márcia Cyrino e Sônia Igliori que aceitaram fazer parte da banca e que deram valiosas contribuições à pesquisa.

Aos professores que aceitaram participar da entrevista, pela gentileza com que me receberam e por contribuir de forma inestimável com a pesquisa.

Aos amigos e familiares que me receberam em São Paulo e em Campinas e me guiaram por caminhos desconhecidos nos enormes *campi* da USP e da UNICAMP, sinto no dever de citar seus nomes: Marjory, Osni, Camilo e Rodrigo em São Paulo, Patrícia, Fernando e Andressa em Campinas.

À Eliane e à Simone que, com interesse, atenção e afinco ajudaram na revisão final do texto da dissertação.

Aos professores Keith Weber (Rutgers University) e Eric Livingston (University of New England) que gentil e prontamente atenderam meu pedido e me enviaram seus artigos por correio eletrônico ou por carta.

Às secretárias de pós do CCE, que sempre atenderam com paciência, prontidão e atenção.

À CAPES pelo apoio financeiro concedido em forma de bolsa de estudo.

Tudo no mundo começou com um sim.
Uma molécula disse sim a outra molécula e nasceu a vida. Mas antes da pré-história havia a pré-história da pré-história e havia o nunca e havia o sim. Sempre houve. Não sei o quê, mas sei que o universo jamais começou. (*A Hora da Estrela*, Clarice Lispector).

NAGAFUCHI, Thiago. **Um estudo histórico-filosófico acerca do papel demonstrações em cursos de Bacharelado em Matemática**. 2008. 159f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

RESUMO

A pergunta geradora desta pesquisa é "(como) seria possível um ensino mais explícito das demonstrações a partir de um debate histórico-filosófico?". E mais especificamente, "qual seria a importância desta pergunta no contexto de formação do bacharel em Matemática?". A pesquisa é de cunho qualitativo, em que os passos principais foram o levantamento bibliográfico, a reconstrução histórica das demonstrações, a busca por aspectos filosóficos acerca das demonstrações e a realização e análise de entrevistas semiestruturadas com professores envolvidos com a coordenação e o com o curso de Bacharelado em Matemática, buscando uma epistemologia subjacente que caracteriza sua prática real com relação à demonstração. A partir de outras pesquisas da área de Educação Matemática e do diagnóstico obtido por meio da análise e da síntese dos depoimentos, apresentamos elementos que possibilitem propostas de abordagens histórico-filosóficas acerca das demonstrações em cursos de Bacharelado em Matemática, de forma que o bacharel tenha capacidade de compreender de uma maneira mais aprofundada a Ciência que se estuda, possivelmente tornando-se capaz de realizar um exame crítico e analítico desta.

Palavras-chave: Demonstração. Prova matemática. História da matemática. Filosofia da matemática. Discussão histórico-filosófica. Bacharelado em matemática.

NAGAFUCHI, Thiago. **A Historical-philosophical study about the role of Mathematical Proof on Bachelor of Mathematics Undergraduate Courses**. 2008. 159p. Dissertation (Master Degree in Science Teaching and Mathematical Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

ABSTRACT

The question that guides this research is “(how) would it be possible a more explicit teaching of mathematical proof from a historical-philosophical approach?”. And, more specifically, “what would be the significance of this question in the awarding bachelor’s degree on Mathematics?”. This research adopts a qualitative approach in which the main proceedings were documentary and bibliographic research, the historical reconstruction of mathematical proof, the pursuit for philosophical aspects of mathematical proofs and the realization and the analysis of semi-structured interviews with professors involved with the coordination of Bachelor of Mathematics undergraduate courses, searching for un underlying epistemology which describes teacher’s real practice upon mathematical proof. From other mathematical education researches and the diagnosis obtained by the analysis and synthesis from the testimonials, we present some elements that make possible historical-philosophical approaches for mathematical proofs in Bachelor of Mathematics undergraduate courses, in a way that the bachelor has the ability to comprehend in a deepest way the Science in study, possibly being able to realize a critical and analytical exam of it.

Keywords: Mathematical proof. Proving. History of mathematics. Philosophy of mathematics. Historical-philosophical discussion. Bachelor of mathematics.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

E – não esquecer que a estrutura do átomo
não é vista mas sabe-se dela. Sei de muita coisa que não vi. E vós também. Não se pode dar uma prova da existência do que é mais verdadeiro, o jeito é acreditar. Acreditar chorando. (*A hora da estrela*, Clarice Lispector).

É inegável que determinadas concepções de mundo e de Ciência influenciam sobremaneira as escolhas procedimentais, metodológicas, epistemológicas, axiológicas, dentre outras, quando um pesquisador escolhe e identifica seu objeto de estudo. Peço licença para começar esta introdução em primeira pessoa, para narrar as motivações desta pesquisa de mestrado.

O gosto pela Matemática não impediu o espanto que tive ao perceber que passaria quatro anos estudando algo diferente daquela Matemática que conheci no Ensino Fundamental e Médio. Porém, um dos elementos que me fez tomar gosto por essa Matemática de um jeito novo, foi a demonstração matemática.

Num primeiro momento, mesmo sendo incapaz de construir uma “bela” demonstração aos olhos do professor, eu era totalmente capaz de entender a estrutura lógica subjacente às infinitas demonstrações apresentadas no quadro, nos livros ou nos materiais dos colegas de curso. O medo da disciplina de Análise era, no fundo, o medo e a inquietação gerados por pensamentos como “ou você aprende a construir belas demonstrações agora, ou você vai continuar eternamente no curso de Análise”. Que nada! O curso de Análise passou – e eu passei por ele – sem muita dificuldade: bastou decorar mecanicamente as demonstrações feitas em livros ou pelo menos suas estruturas.

Outras disciplinas exigiram bem mais. Mas depois de tantas demonstrações, estruturas, métodos, estratégias, ferramentas começaram a se repetir e a importância e as funções das demonstrações se fizeram claras: era assim que a Matemática funcionava e era isso que eu teria de fazer caso optasse por uma carreira de docência e de pesquisa no Ensino Superior. Assim, concluí o curso de Bacharelado em Matemática.

No momento em que fui aprovado para o curso de verão em Matemática Pura da Universidade de São Paulo – USP, porta de entrada para o mestrado, decidi desistir da Matemática, pois naquele instante não teria condições financeiras de fazê-lo.

O incentivo de não desistir da Matemática veio no ano de 2006 quando, aprovado num teste seletivo, tive a oportunidade de ministrar disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral I e II e Álgebra Linear para cursos como Química e Engenharia

Civil na Universidade Estadual de Londrina – UEL.

Com essa oportunidade, descobri que eu gostava de lecionar no Ensino Superior e que este era o caminho que queria seguir: a docência em uma Universidade. Foi o impulso para tentar um mestrado e voltar aos estudos. Na época, estava envolvido em algumas leituras de Filosofia e, como o Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL possui a linha de pesquisa “História e Filosofia da Ciência e da Matemática”, escolhi o mestrado em Educação Matemática, já com a intenção de focar a pesquisa na questão das demonstrações.

A princípio, o projeto maquinava um ataque a um suposto formalismo – que mais adiante mostraria um cenário complexo, que resultou neste estudo – incorporado nas aulas da graduação da qual fiz parte. No fundo, o que realmente me incomodava era o fato de eu ter de conhecer conceitos dos quais nenhum professor se preocupou em dissertar sobre as suas naturezas: o que é teorema? O que é demonstração? Por que a Matemática é dessa forma e não de outra?

Assim, o *corpus* desta pesquisa foi se constituindo e se consubstanciando a partir de muita leitura. Dito isso, destituo-me da primeira pessoa e conto o percurso e os passos seguidos neste trabalho de mestrado.

A pergunta geradora desta pesquisa era “(Como) Seria possível um ensino mais explícito das demonstrações a partir de uma abordagem histórico-filosófica?”, porém, com os dados obtidos, se transformou em “Qual o papel das demonstrações na formação do Bacharel em Matemática?”. E, mais especificamente, “Qual seria a importância dessa pergunta no contexto de formação do bacharel em Matemática?”.

Justificada a opção pelas demonstrações, resta explicar a escolha pela habilitação de Bacharelado em Matemática. Inicialmente, por uma questão pessoal, o pesquisador em formação é bacharel. Outro motivo é a pouca frequência de pesquisas explícitas acerca dos problemas do curso de Bacharelado em Matemática, principalmente na esfera das pesquisas nacionais em Educação Matemática. Das pesquisas encontradas que tratam do Ensino Superior, ou elas focam o curso superior em Matemática de forma geral, sem fazer referência às habilitações específicas, ou focam apenas a Licenciatura ou até mesmo outros cursos da área de Exatas, como as engenharias. Outra razão é que o bacharelando também tem dificuldades de aprendizagem e merece estudos na área de Educação Matemática.

Porém, como as estruturas curriculares das duas habilitações em Matemática mantêm semelhanças em relação aos conteúdos programáticos, isso nos permite procurar articulações e construir paralelos com as pesquisas já existentes acerca das demonstrações na formação inicial do professor de Matemática. Tal conclusão é possível com o aporte da seguinte afirmação:

> Nas universidades públicas, a partir da década de 1970, o conteúdo matemático dos dois cursos [Licenciatura e Bacharelado] foi se diferenciando gradativamente. É certo que ainda permanecem licenciaturas com todos os rigores dos cursos de matemática pura. [...]. No entanto, em vários casos, a licenciatura assumiu o papel de bacharelado atenuado, com menor carga de conteúdo, alterações que, afinal, poucos valem e têm apenas caráter quantitativo, porque se mantém a mesma visão da matemática e de seu ensino que encontramos no bacharelado (LELLIS apud PIETROPAOLO, 2005, p.120).

Dadas as devidas justificativas, seguimos com a descrição da pesquisa, que compreendeu duas fases: a primeira foi a busca de um referencial teórico por meio de uma reconstrução histórica e a busca de uma visão fundamentada em aspectos filosóficos da demonstração. A segunda fase, de caráter empírico, constituiu-se de entrevistas realizadas com professores e coordenadores de curso que estivessem diretamente ligados a seis cursos de Bacharelado em Matemática, em que se buscou noções, abordagens e as principais dificuldades dos alunos que, de alguma forma, pudessem descrever e caracterizar a participação da demonstração – como conteúdo ou como uma prática *per se* – que se realiza nas Instituições participantes.

Na primeira etapa da primeira fase, foi realizado o levantamento bibliográfico. Em um primeiro momento, em que a busca se restringia às pesquisas nacionais, encontramos um número pequeno de pesquisas sobre as demonstrações feitas no Brasil. Número que não condiz com a grande quantidade de pesquisas sobre os mais variados aspectos desse tema na Educação Matemática e na Filosofia da Matemática em outros países.

As pesquisas acerca das demonstrações vêm se intensificando nos últimos quinze anos com a formação desses grupos de pesquisa, com publicações de números especiais de importantes revistas sobre o tema – como a nacional *Bolema* e a internacional *ZDM Mathematics Education* –, grupos de trabalhos em importantes congressos internacionais e com a publicação de capítulos ou de livros inteiros dedicados à temática.

Na segunda etapa da primeira fase, foi realizada uma reconstrução histórica das demonstrações matemáticas. Talvez seja a etapa mais longa, além de ser aquela que jamais será finalizada e completa. A princípio, porque não há registros que comprovem, por exemplo, o que de fato aconteceu para que surgissem as demonstrações matemáticas. Outra razão é que existem poucos estudos historiográficos que tratam especificamente das demonstrações. E, por último, porque esta será sempre *uma* versão da história das demonstrações e não *a* História. Trata-se ainda de uma versão reduzida, dada a dimensão e a extensão de uma dissertação de mestrado que não é de História da Matemática, e sim em Educação Matemática. Todo o cuidado com anacronismos e questões metodológicas e historiográficas foi tomado.

A partir do levantamento realizado, uma terceira etapa surgiu, que foi a leitura e análise de artigos que tratassem das demonstrações com enfoques filosóficos. Analisamos as relações entre as demonstrações com a Matemática, a Lógica e a Filosofia da Matemática, além de concepções sob um ponto de vista social da Matemática. Encerramos com um panorama de uma visão epistemológica da relação entre as demonstrações e a Educação Matemática.

Essas três etapas, que constituem a parte teórica do trabalho, guiaram a formulação do roteiro de entrevista que conduziu a segunda fase deste texto: a aplicação das entrevistas e a análise dos dados coletados à luz da pesquisa qualitativa em Educação Matemática.

Dessa forma, o objetivo principal do trabalho é trazer à tona uma discussão que apresente elementos que possibilitem uma proposta de abordagem histórico-filosófica das demonstrações, que seja significativa na formação do bacharel em Matemática.

Como objetivos específicos, procuramos elaborar uma reconstrução histórica das demonstrações matemáticas através dos tempos; realizar um levantamento em pesquisas existentes dos aspectos filosóficos das demonstrações e entrevistar docentes ligados à coordenação do Bacharelado em Matemática ou às disciplinas essencialmente demonstrativas, buscando uma epistemologia subjacente que caracteriza sua prática real em relação à demonstração.

Vale assinalar que, como no âmbito da Matemática as palavras *prova* e *demonstração* são, em geral, tomadas como sinônimas (PIETROPAOLO, 2005), também as tomaremos como sinônimas no decorrer deste trabalho.

Observamos também que todas as citações em língua estrangeira são traduções nossas.

CAPÍTULO 1
DEMONSTRAÇÃO E A FORMAÇÃO DO BACHAREL EM MATEMÁTICA

> O que é, efetivamente, o tempo? Quem poderá explicá-lo breve e facilmente? Quem poderá alcançar tal noção, com o pensamento, a ponto de dizer sobre ele uma palavra exata? E, no entanto, em nossos discursos, que idéia damos como mais conhecida e familiar que a de tempo? E, quando falamos a seu respeito, a entendemos, assim como a entendemos quando dela ouvimos falar. O que é, portanto, o tempo? Se ninguém me pergunta, eu sei; se quero explicá-lo a quem me pergunta, não sei (*Santo Agostinho).*

Há quem diga que as provas são o coração da Matemática. De toda forma, não há como negar sua importância histórica e epistemológica no desenvolvimento da atividade matemática e também no atual cenário que se encontra a Ciência.

A despeito de sua importância para a Matemática, por vezes a prova se torna a atividade nuclear no ensino de diversas disciplinas que se encontram nos programas curriculares de cursos superiores de Matemática. Um motivo que, sozinho, torna suficiente – e também necessária – a inclusão de uma discussão aprofundada do tema entre os educadores matemáticos.

Motivos não faltam, também, para tal discussão na Educação Matemática. Basta notar o crescente número de pesquisas internacionais realizadas nos últimos anos como lembra Pietropaolo (2006), que do fato do tema chamar tanto a atenção dos pesquisadores, levou à criação de um jornal a ele dedicado: *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, disponível em <*http://www.lettredelapreuve.it*>. A maioria das pesquisas envolvendo esse assunto na Educação Matemática foi desenvolvida a partir de meados dos anos 80 e intensificada nos anos 90.

Um dos possíveis motivos da explosão de pesquisas sobre provas e demonstrações foi a inclusão das demonstrações no currículo da educação básica em países como Estados Unidos, Canadá e Inglaterra. Hanna e De Villiers (2008) corroboram dizendo que diversos documentos curriculares de Matemática elevaram o *status* da prova na Matemática escolar em diversas jurisdições educacionais pelo mundo.

O tema vem sendo igualmente discutido nos principais congressos internacionais de Educação Matemática. No próximo ICMI, que se realizará em maio de 2009 em Taiwan, haverá um grupo de estudos intitulado *Proof and Prooving in Mathematics Education* que, contará com uma conferência de estudos com apresentações de trabalhos e a edição de um volume com contribuições selecionadas nessas apresentações. É possível encontrar um *website* com informações sobre a conferência, disponível em <*http://jps.library.utoronto.ca/ocs/index.php?cf=8*>. Mais informações constam na revista *ZDM Mathematics Education* número 1, volume 40 de janeiro de 2008. O documento de discussão da conferência propõe inúmeros e possíveis temas de estudo e debates. Essa mesma revista teve um número especial publicado em junho de 2008, totalmente voltado às pesquisas envolvendo as provas matemáticas.

No Brasil, em 2002, na UNESP de Rio Claro – SP, ocorreu um encontro para a discussão do tema. Tal encontro gerou um número especial do periódico *BOLEMA*, o que mostra que o assunto vem tomando cada vez um lugar de importância em pesquisas nacionais da Educação Matemática. Porém, as discussões sobre o tema ainda devem ser ampliadas por aqui.

Por conseguinte, faz-se conspícua a discussão sobre provas e demonstrações na Educação Matemática, principalmente na realidade brasileira, que carece de reflexões sobre o tema.

1.1 AS PALAVRAS: DEMONSTRAÇÃO E PROVA

A pergunta que direciona os estudos desta sessão é "O que é demonstração?". É interessante, sobremaneira, iniciarmos com os significados das palavras *prova* e *demonstração*.

Numa busca no dicionário de língua portuguesa *Houaiss Online*, encontramos os seguintes significados e rubricas:

> **Demonstração**: ato ou efeito de demonstrar. **1** qualquer recurso capaz de atestar a veracidade ou a autenticidade de alguma coisa; prova. **1.1** raciocínio que torna evidente o caráter verídico de uma proposição, idéia ou teoria Ex.: d. matemática.

> **Prova**: **1** aquilo que demonstra que uma afirmação ou um fato são verdadeiros; evidência, comprovação. **2** ato que dá uma demonstração cabal de (afeto, fidelidade, felicidade etc.); manifestação, sinal. **3** trabalho escolar, ger. composto de uma série de perguntas, que tem por finalidade avaliar os conhecimentos do aluno; teste, exame (HOUAISS *Online*).

Desconsiderando o uso coloquial da palavra, vemos que apenas a rubrica 1.1 do significado de demonstração tem uma relação direta com o contexto matemático, como se fosse um caso particular da primeira rubrica. Vemos também que a prova é uma espécie de demonstração, usada para demonstrar que um fato ou afirmação são verdadeiros, e ainda pode incluir o significado de demonstração matemática.

Um olhar mais cuidadoso para as palavras nos leva a um dicionário de termos filosóficos, no qual encontramos o seguinte:

> **Demonstração**: Uma demonstração é uma dedução destinada a provar a verdade da sua conclusão apoiando-se sobre premissas reconhecidas ou admitidas como verdadeiras (LALANDE, 1999, p. 239).

> **Prova**: Operação que leva a inteligência de uma maneira indubitável e universalmente convincente (pelo menos de direito) a conhecer a verdade de uma proposição antes considerada como duvidosa. A prova é, em geral, um raciocínio, mas nem sempre: pode consistir numa apresentação de fato que afasta a dúvida. Daí que esta palavra, num sentido, por assim dizer, material, se aplique também ao fato, ao documento, que prova alguma coisa. Por outro lado, a prova distingue-se, pelo seu caráter de verdade, das formas do raciocínio hipotético-dedutivo, onde simplesmente se mostra que existe uma ligação necessária entre certas premissas e certas conseqüências, sem nada pronunciar assertoticamente sobre estas. A idéia de 'prova' pertence à mesma ordem de noções lógicas como as de dúvida, refutação e certeza (LALANDE, 1999, p. 879).

Ou seja, nesse dicionário, o termo *prova* é tomado como mais amplo que *demonstração* e, da mesma forma que o dicionário de Língua Portuguesa, inclui o significado de demonstração.

Já num dicionário espanhol de termos matemáticos, o *Dicionario de Matematicas,* encontramos: "Prova: sinônimo de demonstração" (BOUVIER; GEORGE, 1984, p.678). E, uma busca pelo termo *demonstração* remete diretamente ao termo formal, em que se define demonstração formal como sendo referente aos cálculos de predicados e proposicional. Já o *Dictionnaire des Mathématiques Modernes*, define apenas demonstração: “Demonstração: série de relações pelas quais passamos de axiomas, ou de teoremas já estabelecidos, para um teorema dado” (CHAMBADAL, 1969, p. 67).

Entretanto, muitas vezes, principalmente em Matemática e nas aulas a que somos submetidos às provas, as palavras são tomadas como sinônimas.

Como nos diz Pietropaolo (2005), no âmbito da Matemática as palavras são sinônimas e não precisam de adjetivações, como no caso de prova rigorosa.

Essa diferença também existe em outras línguas. Em francês, existem as palavras *preuve* e *demonstration* que, embora muitas vezes usadas como sinônimas, são distintas para educadores matemáticos. Já na literatura anglófona, usa-se *proof* e *proving* e ainda uma distinção em *formal proof* e *mathematical proof* (PIETROPAOLO, 2005).

O significado da palavra ainda pode variar de acordo com o contexto e o próprio conceito de demonstração. E, mesmo dentro da comunidade de educadores matemáticos que pesquisam sobre o tema, há variações, como veremos no quarto capítulo. Como já assinalado, tomaremos, salvo especificado o contrário, as palavras *prova* e *demonstração* como sinônimas.

1.2 O QUE É DEMONSTRAÇÃO?

Vimos anteriormente diferentes rubricas e significados retirados de diferentes dicionários, compreendendo suas naturezas coloquiais ou contextuais, em se tratando da Matemática e da Filosofia. Porém, perguntar “O que é uma demonstração?” ou “O que é saber o que é uma demonstração?” é buscar por uma conceituação mais complexa e aprofundada do que uma rubrica pode oferecer. Este nem mesmo é o objetivo de um dicionário.

Saber construir uma demonstração e saber demonstrar, não implica em saber o que é uma demonstração, quando “saber” é dar uma resposta coerente, factual e conceitual. Hersh problematiza:

> O problema é que, a “prova matemática” tem dois significados. Na prática, é uma coisa. Em princípio, é outra. Nós *mostramos* aos estudantes o que a prova é na prática. Nós os *dizemos* o que é em princípio. Os dois significados não são idênticos. Tudo bem. Mas jamais *reconhecemos a discrepância*. Como pode estar tudo bem? (HERSH, 1997, p. 49, itálicos do autor).

Para Hersh (1997), o primeiro significado, o significado prático, é informal e impreciso. É o que é feito para que os outros *acreditem* nos teoremas provados, ou seja, para que reconheçam que determinado resultado é válido. Os outros são os especialistas céticos e qualificados. São as provas que encontramos n’*Os Elementos* de Euclides e nos boletins da Sociedade Brasileira de Matemática. O que é, de fato, ninguém diz.

O outro significado é o formal, conceituado por Aristóteles, Boole, Frege, Hilbert, Peirce, Russel, Gödel e outros. É uma transformação de certas sequências simbólicas de acordo com certas regras lógicas, “uma sequência de passos, sendo cada um uma dedução lógica estrita, ou prontamente expandida em uma dedução lógica estrita.” (HERSH, 1997, p.49), e ainda, de acordo com uma conversa particular com Paul Ernest citada pelo autor, esta é uma “formalização, idealização, reconstrução racional da ideia de prova” (HERSH, 1997, p. 49).

Isso traria três problemas: (i) o que o primeiro significado tem a ver com o segundo?; (ii) por que tão poucos notam o problema (i)? É desinteressante? Embaraçoso?; (iii) isso importa?

Importa, moralmente, psicologicamente e filosoficamente. Os professores demonstram coisas, porém, não dizem o que compreendem por “demonstrar”. Tem-se que aprender. “Vê-se o que o professor faz, e, então, faz-se a mesma coisa. [...] depois, torna-se professor e passa o mesmo ‘know-how’, sem o ‘saber o quê’ que o professor ensinou” (HERSH, 1997, p. 50).

Exploraremos mais essa questão dos aspectos filosóficos das demonstrações mais adiante, no capítulo 4. Para compreendermos como essas questões se encaixam no contexto da formação do bacharel em Matemática, devemos entender como essa formação é prevista por meio das diretrizes curriculares, de forma a localizar essa discussão no âmbito de nossa pesquisa.

1.3 Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Matemática

As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) constituem um documento redigido e apresentado pelo Ministério da Educação, e mais especificamente, o Conselho Nacional de Educação, que serve de base para a elaboração, a (re)estruturação e as transformações de Projetos Político- Pedagógicos (PPP) de cursos superiores situados no território nacional brasileiro.

As DCN surgiram com o intuito de substituir os antigos Currículos Mínimos, que tiveram validade até o final dos anos de 1990. Para a elaboração das novas diretrizes, diversas reuniões foram realizadas com docentes e pró- reitores das mais variadas instituições do país. As principais queixas que surgiram dessas reuniões foram a insatisfação de institutos ou departamentos – principalmente os de Engenharia, que reclamavam a abordagem essencialmente formal nas disciplinas matemáticas – que eram atendidos pelos professores dos institutos de Matemática e a pouca procura dos alunos pelos cursos de bacharelado (NETO, 1998).

Naquela época, o perfil esperado de um bacharel em Matemática era:

> -Formação sólida e abrangente do conteúdo matemático, com domínio das técnicas básicas de provas de teorema;
>
> -Incentivo a estudos extra-curriculares que despertem no aluno o espírito científico;
>
> -Capacidade de leitura e detalhamento de artigos científicos (NETO, 1998).

Os egressos dos cursos de Matemática deviam ter uma formação que possibilitasse o domínio de técnicas de provas de teorema. Em 2001, as diretrizes foram homologadas e, finalmente, em 2003, estabelecidas e aprovadas por meio de resolução. Nessas, o perfil esperado do formando é:

> [...] -uma sólida formação de conteúdos de Matemática;

> -uma formação que lhes prepare para enfrentar os desafios das rápidas transformações da sociedade, do mercado de trabalho e das condições de exercício profissional (BRASIL, 2001).

O que, por sua vez, não indica explicitamente a importância das provas para a formação de um bacharel em Matemática. Em nenhum lugar desse documento há citação das palavras “prova” ou “demonstração”.

As DCN são claras ao dizer que o objetivo principal dos cursos de bacharelado é a preparação e a formação de profissionais para a carreira de Ensino Superior e pesquisa, de forma que possibilitem a aquisição de habilidades e competências, tais como o raciocínio lógico, a postura crítica e a capacidade de resolver problemas, possibilitando que o profissional possa atuar em outros campos no mercado de trabalho, que não o meio acadêmico, em áreas em que o raciocínio abstrato é uma ferramenta indispensável.

Um dos objetivos das DCN para os cursos superiores de Matemática é:

> [...] assegurar que os egressos dos cursos credenciados de Bacharelado e Licenciatura em Matemática tenham sido adequadamente preparados para uma carreira na qual a Matemática seja utilizada de modo essencial, assim como para um processo contínuo de aprendizagem (BRASIL, 2001).

A partir da publicação desse documento, as Instituições de Ensino Superior deveriam formular seus novos Programas Político-Pedagógicos, de forma que as determinações presentes no mesmo, no prazo de 2 anos, pudessem permitir formações diferentes para os graduados, seja para aquele que deseja seguir a carreira acadêmica, seja para os que buscam um mercado de trabalho não acadêmico, que exija uma formação sólida de conteúdos matemáticos, contemplando suas áreas de atuação, para que ele esteja preparado para enfrentar os desafios das rápidas transformações da sociedade e das condições de exercício profissional.

Nas DCN também estão descritas as habilidades e as competências esperadas de um bacharel em Matemática, quais sejam: capacidade de expressão escrita e oral; habilidade de identificar, formular e resolver problemas utilizando rigor lógico-científico; capacidade de estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento; conhecimento de questões contemporâneas; educação abrangente necessária ao entendimento do impacto das soluções encontradas num contexto global e social; trabalho na interface da Matemática e outras áreas do saber.

Nas habilidades e nas competências esperadas de um licenciado, encontramos itens que teriam valor para o bacharel que, de alguma forma, tem pretensões de seguir a docência no Ensino Superior:

> - desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do *pensamento matemático* dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos *conceitos* do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos;
>
> - perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente (BRASIL, 2001, itálicos nossos).

Nas DCN estão também relacionados os conteúdos curriculares das habilitações, os estágios e as atividades complementares. Os conteúdos curriculares para o bacharelado são, especificamente, as diferentes áreas da Matemática, como Análise, Topologia, Álgebra, etc. A inclusão de História e Filosofia das Ciências é indicada somente à formação do Licenciado (BRASIL, 2001).

1.4 BACHARELADO E LICENCIATURA

No momento em que foram homologadas as diretrizes, houve um movimento de discussão, por meio de fóruns estaduais, incentivados pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), inicialmente motivados em discutir as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores de Educação Básica. Durante a realização do primeiro fórum nacional da PUC- SP, as DCN de Matemática passaram a ser objeto de análise para que a comunidade de educadores matemáticos pudesse implementar princípios orientadores das DCN, visando uma possível reorientação das diretrizes, com foco na licenciatura e sem debate sobre o bacharelado. Para tal, os fóruns contaram com a criação de grupos de estudos, que contemplaram diversos pontos de discussão.

Anterior ao fórum nacional, aconteceram os regionais. O fórum paranaense, por exemplo, contava com o grupo que buscava a identidade dos cursos de Licenciatura em Matemática. Dentre as propostas do grupo, interessam-nos aquelas que, de alguma forma, buscavam um diálogo entre a formação das duas habilitações. Citamos duas, presentes no documento final do I Fórum Estadual dos cursos de Licenciatura em Matemática do Paraná – FELIMAT, realizado na Universidade Estadual de Londrina (UEL) em 2002:

> - Separar Licenciatura e Bacharelado de modo que cada um componha sua própria identidade;
>
> - Fazer notar a necessária formação didática dos bacharéis, que atuarão como professores, futuros formadores na licenciatura (LONDRINA, 2002, p. 20).

No ano seguinte, aconteceu o I Fórum Nacional de Licenciatura em Matemática, destinado a socializar os resultados dos fóruns regionais. Porém, naquele período, o Ministério da Educação já havia homologado a aprovação das DCN. Dessa forma, os participantes do fórum nacional pediram, por meio de um documento, a revogação de tais diretrizes, e solicitaram – e até o momento não foram atendidos – a "abertura de espaços para a participação das instituições superiores de ensino e das sociedades científicas e representativas de professores na elaboração de uma nova proposta de Diretrizes Curriculares Nacionais dos Cursos de Matemática" (CYRINO, 2007, p. 11).

No ano de 2007 ocorreu o II FELIMAT, com o intuito de realizar discussões sobre a implementação dos novos Projetos Político-Pedagógicos implantados a partir das diretrizes. Apesar de o documento gerado no fórum estar voltado inteiramente à formação do licenciado, pois esse era o foco do fórum, vemos que existia uma proposta de articulação entre as diversas sociedades (Educação Matemática, Matemática e Matemática Aplicada) para que fosse repensada a “formação dos formadores” de professores, destacando o mesmo ponto apresentado no I FELIMAT acerca da formação pedagógica dos futuros bacharéis, mesmo não sendo esse o objeto de discussão desses fóruns.

Não se encontram discussões parecidas sobre a formação do bacharel em Matemática. Uma busca pelos *websites* da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC) mostra que existe uma certa preocupação com o ensino de Matemática de uma forma geral, mas pouca ou nenhuma discussão explícita acerca dos cursos de bacharelado, como ocorreu com os fóruns que discutiram as licenciaturas.

Ao que parece, no fundo, é que a preocupação é mais qualitativa do que quantitativa. No documento *Panorama dos Recursos Humanos em Matemática no Brasil: Premência de Crescer*, elaborado por membros da SBM e do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), em 2001, o nome já evidencia a principal preocupação da comunidade matemática naquele momento: o crescimento de recursos humanos qualificados nessa área.

No decorrer do documento, o ensino da Matemática e a formação de professores são problematizados da seguinte forma, a formação de professores depende da qualidade dos cursos de licenciatura, que, por sua vez, depende de um corpo docente qualificado, com professores que tenham, pelo menos, mestrado na área (Matemática Pura ou Aplicada). A formação de mestres depende de cursos de mestrado “fortes” e “adequados”, de acordo com as palavras do documento. E, uma vez que os cursos de mestrado têm corpo docente formado estritamente por doutores, é imprescindível que existam recursos humanos capacitados e com titulação.

Dessa forma, os elaboradores do documento especulam que, para melhorar o ensino da Matemática na Educação Básica, deve-se agir sobre “toda a cadeia que inclui as licenciaturas e bacharelados, os mestrados e os doutorados” (BARBOSA *et al.*, 2001, p. 5).

Enquanto as licenciaturas buscam uma identidade, será que a identidade dos cursos de bacharelado já está estabelecida? O que podemos responder é que, historicamente, os cursos de licenciatura surgiram de derivações dos cursos que pretendiam formar matemáticos que, por sua vez, sempre apresentaram o objetivo de formar profissionais aptos a exercerem pesquisas em Matemática.

O primeiro curso de Matemática do Brasil, implantado com a criação da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP em 1934, tinha o objetivo de formar pesquisadores, não professores. Aos que procuravam a licença para o magistério poderiam, além dos 3 anos necessários para a obtenção do grau de bacharel, cumprir 1 ano do curso de formação pedagógica do Instituto de Educação. Esse modelo denominado de “3+1” perdurou por longo tempo. (SILVA, 2002).

Isso evidencia que a formação do pesquisador, em detrimento da formação para a docência, desempenhou uma importância maior nos cursos de Matemática. E também justifica as semelhanças entre as duas habilitações, como já dito na introdução, o que não justifica a falta de estudos por parte da Educação Matemática em relação à formação do matemático.

1.5 DEMONSTRAÇÕES NO BACHARELADO

Nas DCN e nos projetos curriculares, não há uma menção explícita de como as demonstrações são abordadas nas disciplinas do curso e qual é a importância e o significado dessas na formação do bacharel em Matemática.

Dessa forma, discutiremos elementos que possibilitem a implementação de uma abordagem histórico-filosófica como maneira de enriquecer conceitualmente, para proporcionar uma abordagem mais explícita das demonstrações em cursos de bacharelado em Matemática, uma vez que a História e a Filosofia da Ciência podem contribuir para “superar o mar da falta de significação de fórmulas e equações” (BATISTA, 2007, p.260) que invadiu as salas de aula.

Além disso, especialmente na formação do pesquisador, Batista (2007) afirma que a História e a Filosofia da Ciência contribuem para a realização de pesquisa científica criativa, para o entendimento de metodologia e planejamento científicos, para a aquisição de fontes dos elementos de decisão de pesquisa (como dificuldades estruturais e epistemológicas e tendências frutíferas) e para o reconhecimento de formas de pesquisa.

Nesta investigação, a reconstrução história das demonstrações nos mostra como esse conceito foi evoluindo através dos tempos, desde as hipóteses do surgimento da demonstração até a justificação da atual conceituação de demonstração, considerada, por muitos, como cerne da Matemática.

Os aspectos filosóficos expõem muitos significados e papéis que as demonstrações podem ter em âmbitos diversos, como na Matemática, na Filosofia da Matemática, na Lógica e na Educação Matemática, provocando uma rica discussão, que mostra que não existe uma resposta geral para a questão “O que é e para que servem as demonstrações?”.

Dessa forma, a História das demonstrações matemáticas e a Filosofia da Matemática se entrelaçam para que se torne possível uma compreensão a respeito do desenvolvimento histórico-filosófico das demonstrações, evidenciando como tal conhecimento se consubstanciou formando o atual cenário do qual a Matemática faz parte.

1.6 POR QUE UM DEBATE HISTÓRICO-FILOSÓFICO ACERCA DAS DEMONSTRAÇÕES?

Healy e Hoyles (1998) sugerem, como veremos no capítulo 4, que esforços mais explícitos sejam feitos para chamar a atenção dos estudantes para a prova enquanto seja discutida com eles a ideia de prova num metanível, em termos dos seus significados, generalidade e propósitos. Pietropaolo (2005) propõe uma ressignificação da prova matemática, ampliando o seu significado, enquanto Garnica (1995) sugere esforços complementares para que, na formação inicial do professor de Matemática, seja aberto o campo da leitura crítica (do campo da Educação Matemática) para que as concepções acerca das demonstrações não se tornem o germe destrutivo de práticas que visem abertura de horizonte.

Para essas pesquisas, a problemática das provas, seja num âmbito de formação de professores ou de aprendizagem, está conectada intimamente com as concepções, ou seja, com a epistemologia em voga daqueles responsáveis pelo ensino da prova nos mais diversos níveis.

Uma problemática anterior a essa, que está no cerne desta pesquisa, é que, se há esforços sendo erigidos pelo mundo a partir do momento que a demonstração se torna um obstáculo de aprendizagem, por que há poucas, senão nenhuma, pesquisa que estude suas relações com a formação do matemático profissional, quer seja o sujeito que buscou o título de bacharel em Matemática? Seria uma questão óbvia demais para merecer estudos ou poderíamos admitir que os bacharelandos não encontram dificuldades com as provas?

O que parece óbvio, mas que está sustentado por questões sócio-culturais, é que o bacharelando deve apreender os possíveis significados de prova, por meio de uma aculturação, a que Hemmi (2008) denomina de condição invisível, e que a autora descreve que, para alguns pesquisadores em Educação Matemática, o aprendizado da prova se dá por um tipo de aculturação, por meio da experiência. Porém, para essa pesquisadora, o aprendizado viria com um equilíbrio entre a condição invisível e os esforços tomados em direção a uma condição de transparência, em que a prova é também assunto específico que merece estudos e discussões num metanível.

Uma razão muito pertinente para a existência de estudos mais explícitos acerca do bacharelado em Matemática – e não focando somente as demonstrações e sim a totalidade complexa pela qual a Educação Matemática torna assuntos inerentes ao ensino e à aprendizagem da Matemática em objeto de pesquisa – é que uma considerável parcela de bacharéis seguirá a carreira acadêmica e, inevitavelmente, será responsável pela formação de novos bacharéis ou até mesmo responsável pela formação inicial de professores de Matemática. E, mesmo que não faça parte dessa parcela, é evidente a influência do que Garnica (1995) chama de leitura técnica, ou seja, de aspectos sócio- culturais concernentes à prática matemática enquanto Ciência nas questões de ensino e de aprendizagem que, por sua vez, possui o foco da leitura crítica, o campo da Educação Matemática.

Postas essas observações, algumas questões restam: Como ensinar demonstrações? Como re-significar as provas para um ensino efetivo das mesmas? Dentre as diversas contribuições para o ensino e para a aprendizagem das provas, focaremos numa em específico, a abordagem histórico-filosófica.

Alguns estudos apontam consideráveis contribuições que a perspectiva histórico-epistemológica pode trazer à questão das demonstrações. Para Mariotti e Balacheff (2008), essa é uma perspectiva tradicional, e ela está diretamente relacionada à natureza da prova – e argumentação – matemática e suas funções. Estudos dessa natureza recheiam, em grande parte, o número especial da *ZDM Mathematics Education* sobre as provas matemáticas sendo que, algumas delas, fazem parte da fundamentação deste trabalho.

Por que o enfoque histórico-filosófico? Matthews nos lembra que a História, a Filosofia e a Sociologia da Ciência podem não ser a panaceia para a melhoria da Educação. Porém, elas podem

> humanizar as ciências e aproximá-las dos interesses pessoais, éticos, culturais e políticos da comunidade; podem tornar as aulas de ciências mais desafiadoras e reflexivas, permitindo, deste modo, o desenvolvimento do pensamento crítico; podem contribuir para um entendimento mais integral de matéria científica mais desafiadoras e reflexivas, permitindo, deste modo, o desenvolvimento do pensamento crítico; podem contribuir para um entendimento mais integral da matéria científica, isto é, *podem contribuir para a superação do 'mar da falta de significação' que se diz ter inundado as salas de aula de ciências, onde fórmulas e equações são recitadas sem que muitos cheguem a saber o que significam*; podem melhorar a formação do professor auxiliando o desenvolvimento de uma epistemologia da ciência mais rica e mais autêntica, ou seja, de uma compreensão da estrutura das ciências bem como do espaço que ocupam no sistema intelectual das coisas (MATTHEWS, 1995, p.165, itálico nosso).

E, além disso, Batista nos diz que

> A redução das Ciências e da Matemática à pura técnica, em certos casos, à técnica experimental e, em outros, à técnica matemática para a dedução lógica de conseqüências dos axiomas da teoria, evita questionamentos conceituais no seu ensino e gera uma formação estreita e acrítica. Assim, a investigação e o ensino de Ciências e da Matemática não devem ignorar simetricamente os avanços e contrastes históricos que deram origens às idéias de hoje (BATISTA, 2007, p.270).

Como campos distintos, a História e a Filosofia da Ciência necessitam uma da outra. Parafraseando Lakatos, que por sua vez parafraseou Kant, “a história da matemática, à falta de orientação da filosofia, tornou-se *cega*, ao que a filosofia da matemática, voltando as costas aos fenômenos mais curiosos da história da matemática, tornou-se *vazia*.” (LAKATOS, 1978, p.15, grifos do autor). E, para D’Ambrosio, o que se entende por Matemática nos leva a uma reflexão sobre a Filosofia da Matemática, e “é inegável que a História da Matemática está atrelada à Filosofia da Matemática” (D’AMBROSIO, 2004, p.175).

Enquanto um dos objetivos da História da Matemática é explicar e justificar a evolução da Matemática (D’AMBROSIO, 2004), um dos objetivos da Filosofia da Matemática é questionar a natureza de conceitos e objetos matemáticos.

É nesse sentido que a História da Matemática, em específico a história das demonstrações matemáticas, e a Filosofia da Matemática se entrelaçam para que se torne possível uma compreensão a respeito do desenvolvimento histórico, evidenciando como o conceito e o conhecimento de demonstração se modificou através dos tempos e como tal conhecimento se consubstanciou formando o atual cenário do qual a Matemática, como Ciência hipotético-dedutiva, faz parte.

Para Bicudo e Garnica (2003), o tratamento das questões geradas pela Filosofia da Matemática (e incluamos aqui as questões da História da Matemática) é “relevante para a autocompreensão da Matemática e necessário para a definição de propostas curriculares, por determinar escolhas de conteúdos, atitudes de ensino, expectativas de aprendizagem, indicadores de avaliação” (BICUDO; GARNICA, 2003, p.29). E isso reflete diretamente no ensino de Matemática, pois:

> o educador precisa necessariamente responder às questões filosóficas fundamentais sobre o estatuto do objeto matemático, sobre a natureza da verdade matemática, sobre o caráter do método matemático, sobre a finalidade da matemática, sobre o estatuto do conhecimento matemático enfim, antes de criar teorias, estabelecer objetivos, elaborar estratégias, desenhar métodos ou qualquer outra atividade teórica ou prática cuja finalidade última seja o ensino de matemática [...]. Assim, a filosofia da matemática deve, necessariamente, estar presente em qualquer reflexão sistemática e crítica cujo foco seja a educação matemática [...]. (DA SILVA, 1999, p.57).

E, especificamente acerca das provas, nos diz Balacheff:

> De fato, não podemos evitar envolver em nosso trabalho nossa própria epistemologia de prova matemática, e além, nossa própria epistemologia da Matemática. Mas se não estamos cientes das diferenças entre estas epistemologias e as implicações destas diferenças ao compartilhar teorias e métodos, problemas e resultados, estas epistemologias tornar-se-ão o obstáculo essencial ao progresso em nosso campo de pesquisa. É neste sentido que a epistemologia dos pesquisadores poderia tornar-se um impasse muito difícil de evitar ou resolver (BALACHEFF, 2004).

Compreender a prova matemática, epistemologicamente, ontologicamente ou metodologicamente é deveras importante para o pesquisador e educador matemático interessado no assunto e para os envolvidos com o ensino e a aprendizagem das provas matemáticas.

Com base nos nossos objetivos e justificativas, seguiremos com a fundamentação teórico-metodológica, a fim de descrever as abordagens metodológicas abordadas neste trabalho em todas as suas fases.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA

> Às vezes tenho a impressão de que escrevo por simples curiosidade intensa. É que ao escrever, eu me dou as mais inesperadas surpresas. É na hora de escrever que muitas vezes fico consciente das coisas, das quais, sendo inconsciente, eu antes não sabia que sabia (*A descoberta do mundo,* Clarice Lispector).

2.1 A PESQUISA QUALITATIVA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Esta pesquisa se insere na categoria de pesquisa qualitativa em Educação Matemática. Para Bogdan e Biklen (1991) e Lüdke e André (1986), algumas características que configuram esse tipo de pesquisa são os fatos de que: nesse tipo de investigação a fonte de dados é o ambiente natural e o pesquisador é o principal instrumento; a investigação tem uma natureza descritiva; os pesquisadores qualitativos têm um interesse maior no processo do que nos resultados ou produtos e o significado tem uma importância. Dessa forma, a abordagem qualitativa oferece os meios para que esta pesquisa seja realizada de acordo com os objetivos propostos.

Para Martins e Bicudo, "o pesquisador como aquele que deve perceber a si mesmo e perceber a realidade que o cerca em termos de possibilidades, nunca só de objetividades e concretudes, a partir do que a pesquisa qualitativa, dizem, dirige-se a fenômenos, não a fatos" (MARTINS; BICUDO apud GARNICA, 1997, p. 112).

Baseado nos fundantes da investigação qualitativa supracitados, utilizamos de alguns métodos específicos para a obtenção de dados, seja na fase teórica ou na fase empírica, e para a análise dos mesmos.

Usamos da análise documental para a leitura e para a escolha dos textos que fizeram parte do levantamento bibliográfico, da reconstrução histórica e da constituição dos aspectos filosóficos. Phillips (apud LÜDKE; ANDRÉ, 1986) caracteriza os documentos como quaisquer materiais escritos que podem ser usados como fonte de informação acerca do comportamento humano. Dessa forma, fazem-se documentos os artigos, capítulos, livros e teses, uma vez que os consideramos como discursos dos pesquisadores que os escreveram. A análise documental busca a identificação de informações factuais presentes nesses textos a partir de questões ou hipóteses de interesse, quando os observamos com o filtro do nosso referencial teórico.

2.2 METODOLOGIAS PARA A RECONSTRUÇÃO HISTÓRICA

A reconstrução histórica também exige algumas metodologias próprias. Para Martins,

> Não existe uma fórmula mágica ou receita infalível para fazer uma boa pesquisa em História da Ciência. Em diversos momentos, o pesquisador vai refletir sobre o problema estudado e procurar novas fontes. Ele vai precisar fazer levantamentos, selecionar e localizar documentos, buscá-los ou obter cópias deles e analisá-los. Precisará também escrever, elaborar uma argumentação, discutir trabalhos historiográficos anteriores sobre o mesmo assunto e fundamentar bem suas conclusões. (MARTINS, 2005, p. 307-8).

Cabe aqui fazer a distinção entre os termos História e Historiografia. Enquanto a História é o conjunto dos acontecimentos humanos ocorridos no passado, a Historiografia é o conjunto dos registros, das interpretações e das análises desses acontecimentos (D'AMBROSIO, 2004). Ou seja, a Historiografia, como um metaestudo ou um estudo metacientífico, pode ser considerada como uma investigação interpretativa e analítica acerca da História da Ciência.

Kragh (1987) distingue o termo "história" em dois níveis diferentes. A História (H1) é objetiva e descritiva, na medida que narra fenômenos e acontecimentos. A História (H2) é a análise e a interpretação teórica da realidade histórica H1.

A Historiografia pode significar simplesmente uma escrita profissional sobre História ou, ainda, Teoria ou Filosofia da História, e nesse caso, quando seu objeto de estudo é H2, a Historiografia pode ser caracterizada como uma metadisciplina em um sentido similar ao descrito por D'Ambrosio acima (KRAGH, 1987).

Como nosso objetivo principal não é uma investigação histórica ou historiográfica acerca das demonstrações em Matemática, baseamos nossa reconstrução a partir de pesquisas históricas ou historiográficas já realizadas sobre o tema ou em livros de História da Matemática. Isto é, a reconstrução foi baseada em fontes secundárias, que Martins (2005) classifica como estudos historiográficos acerca do período, do autor ou do conceito investigado.

Quanto aos enfoques, aqui consideraremos dois deles: o enfoque conceitual ou internalista, que discute os fatores científicos, como evidências, fatos de natureza científica, relacionados a determinado assunto ou problema, e o enfoque não-conceitual ou externalista, que lida com os fatores extracientíficos, como influências sociais, políticas, econômicas, luta pelo poder, propaganda, fatores psicológicos (MARTINS, 2005).

Kragh (1987) também distingue a Ciência em dois significados diferentes. A Ciência (C1) é uma coletânea de dados e afirmações empíricas e formais acerca das teorias que assenta o conhecimento científico num determinado momento no tempo. A Ciência (C2) diz respeito às atividades e comportamentos dos cientistas que estejam relacionados aos empreendimentos científicos.

Sendo a Ciência um assunto multifacetado e, assim, permite os mais diversos aspectos e vias de acessos, propomos uma econstrução histórica que segue, sobremaneira, em um sentido HC2 (História da Ciência C2), uma vez que não nos baseamos somente em um enfoque internalista, mas também em aspectos extracientíficos que tenham influenciado de alguma forma na história das demonstrações matemáticas.

A seguir, descreveremos os passos e as metodologias que foram aplicados nas entrevistas.

2.3 NARRATIVA DA COLETA DAS ENTREVISTAS

Para a fase empírica da pesquisa, usamos da entrevista semiestruturada, “que se desenrola a partir de um esquema básico, porém não aplicado rigidamente, permitindo que o entrevistador faça as necessárias adaptações” (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p.34). Ainda para as autoras, uma entrevista de cunho semiestruturado é mais adequada para uma investigação em Educação, ao passo que os sujeitos entrevistados “são mais convenientemente abordáveis através de um instrumento mais flexível" (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p.34).

A idéia inicial da pesquisa era analisar os programas curriculares de alguns cursos de Bacharelado em Matemática do Brasil, predominando as instituições mais representativas. Porém, com a leitura dos projetos políticos pedagógicos, percebeu-se que o que buscávamos estava muito além dos projetos, pois estávamos interessados nas epistemologias dos professores acerca das demonstrações e suas práticas de abordagem das mesmas. Com isso, surgiu a proposta de entrevistar professores que trabalhassem com o Bacharelado em Matemática e com professores ligados à coordenação do respectivo curso.

Seis foram as instituições escolhidas: três no estado de São Paulo, Universidade de São Paulo (USP), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", campus Rio Claro (UNESP – RC); uma no estado do Paraná, Universidade Estadual de Londrina (UEL); uma no estado do Rio de Janeiro, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ); e uma no Distrito Federal, Universidade de Brasília (UnB).

A escolha das instituições foi realizada a partir das notas de recomendação e reconhecimento concedidas pela CAPES para programas de pós-graduação *strictu sensu* em Matemática Pura. As notas dos cursos recomendados variam de 3 a 7, sendo 7 o conceito mais alto de um curso de pós- graduação *strictu sensu* segundo a CAPES. Escolhemos as instituições com notas 6 ou 7, ou seja, instituições em excelência de formação de recursos humanos de pesquisa e docência no Ensino Superior, excluindo-se o IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), por não ofertar curso de graduação. Nessa categoria estão: UNICAMP (com nota 7), USP, UFRJ e UnB (com nota 6).

Uma vez que houve um congresso na UNESP de Rio Claro, houve a possibilidade de colher entrevistas lá, instituição que também possui um dos cursos de pós-graduação *strictu sensu* em Educação Matemática mais bem avaliado pela CAPES. E, a UEL não é somente a instituição na qual fazemos nossa pesquisa de mestrado no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, mas também abriga um Departamento de Matemática que tem mais de 30 anos.

De cada uma das universidades visitadas, foi entrevistado o professor responsável pela coordenação do colegiado do curso ou que fizesse parte da comissão de graduação e pelo menos um professor que ministrasse uma disciplina que fosse responsável pela introdução ao tema “demonstração” ou, no caso de uma disciplina com uma abordagem explícita do tema inexistir, um professor que ministrasse uma disciplina que trabalhasse bastante com demonstrações (como por exemplo, Análise Real e Geometria Euclidiana). É interessante observar que os professores entrevistados que estão envolvidos com a coordenação de curso também ministram essas disciplinas.

As entrevistas foram marcadas com antecedência via correio eletrônico ou pessoalmente. As conversas com os professores das instituições USP, UNICAMP, UNESP e UEL foram realizadas nas salas de cada um dos professores, nos respectivos institutos ou departamentos das universidades visitadas. Os professores da UFRJ e da UnB foram entrevistados por meio de correio eletrônico ou *softwares* de comunicação, como *MSN Messenger* e *Skype*.

O universo total de professores entrevistados é treze, sendo oito do sexo feminino e cinco do sexo masculino. A média de idade de docência dos professores é de 20,38 anos, com um desvio padrão de 11,22, sendo que o tempo mínimo e máximo de docência são, respectivamente, 3 e 41 anos.

Dentre as disciplinas ministradas por eles, a maior parte trabalha com Análise Real ou Álgebra, enquanto um trabalha com a disciplina Fundamentos de Matemática, responsável pela introdução das demonstrações, e outro com as disciplinas Geometria Euclidiana e Álgebra e Aritmética Elementares, que tem o objetivo de trabalhar com as demonstrações.

Todos os professores assinaram um termo de autorização permitindo que a gravação e a publicação parcial ou total da entrevista fossem feitas neste trabalho. As entrevistas foram feitas com um gravador digital e transcritas com a ajuda do software *Express Scribe*.

2.4 A ENTREVISTA

A entrevista é um importante instrumento de obtenção de dados. O tipo de entrevista adotado nesta pesquisa é aquele que segue um roteiro semiestruturado. Para Lüdke e André, “a grande vantagem da entrevista [...] é que ela permite a captação imediata e corrente da informação desejada” (2004, p.34) e, ainda, a liberdade do percurso associada à entrevista semiestruturada “permite correções, esclarecimentos e adaptações que a tornam sobremaneira eficaz na obtenção de informações desejadas” (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p.34).

Para a construção das questões da entrevista, focamos em aspectos que são significativos à pesquisa, envolvendo a abordagem em que as provas são feitas nas disciplinas, as principais dificuldades dos alunos identificadas pelos professores, quais as formas de superação dessas dificuldades que eles valorizam e noções acerca das demonstrações e os papéis dessas que eles atribuem para a construção do conhecimento matemático, com perguntas auxiliares para a identificação de possíveis diferenças de abordagem das habilitações licenciatura e bacharelado. As perguntas objetivam a prática de cada professor, buscando a identificação e a caracterização do currículo real por meio dos dados obtidos acerca da noção dos mesmos quanto ao papel, a importância e o significado das demonstrações para a formação do bacharel.

A escolha por entrevista semiestruturada permitiu uma maior flexibilidade em relação à sua realização. As perguntas possuem um núcleo comum, porém, mudanças sutis foram feitas para cada grupo dos sujeitos de pesquisa envolvidos diretamente com a coordenação do curso de Bacharelado em Matemática em suas respectivas instituições. Dessa forma, o roteiro das questões obteve a seguinte configuração:

Professor envolvido com a coordenação de curso:

– Qual o significado, o papel e a importância que o(a) senhor(a) atribui

para as demonstrações na formação de um bacharel em Matemática? Há alguma diferença para a formação de um licenciado em Matemática?

– O que é saber o que é uma demonstração?

– Quais são as principais dificuldades com as demonstrações e como elas podem ser superadas?

– Qual seria o papel das demonstrações para a construção do Conhecimento Matemático?

Professor de disciplinas específicas:

– Como o tema "demonstração" é abordado na disciplina? A abordagem é a mesma para as outras habilitações, como Matemática Aplicada ou Licenciatura?

– Para o(a) senhor(a), o que é uma demonstração e qual o significado que a demonstração deve ter para um bacharel em Matemática? E para um licenciado? É diferente?

– O que é saber o que é uma demonstração?

– Quais são as principais dificuldades com as demonstrações e como elas podem ser superadas?

– Qual seria o papel das demonstrações para a construção do Conhecimento Matemático?

2.5 A ANÁLISE DAS ENTREVISTAS

A partir das entrevistas e das transcrições, criou-se um banco de dados com certa riqueza de informações. Quando o pesquisador vai à campo, porque está envolvido com determinado assunto, possui em mente possíveis respostas ou resultados. Porém, a natureza humana é muito mais intrigante – e por que não dizer complexa – do que uma previsão ou crenças iniciais. O momento de análise de dados é aquele em que o pesquisador mergulha num mar incógnito buscando uma síntese do que foi estudado e coletado como dado. Para Bogdan e Bikley,

> A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão do que vai ser apresentado aos outros (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 205).

E para Lüdke e André,

> A tarefa da análise implica, num primeiro momento, a organização de todo o material, dividindo-o em partes, relacionando essas partes e procurando identificar nele tendências e padrões relevantes. Num segundo momento essas tendências e padrões são reavaliados, buscando-se relações e inferências num nível de abstração mais elevado (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 45).

As entrevistas transcritas passaram por leituras criteriosas, nas quais identificamos aspectos importantes no discurso de cada professor entrevistado. Unidades de análise foram identificadas e a análise foi construída a partir de semelhanças ou não que surgiram das respostas dos professores à luz da análise textual discursiva proposta por Moraes e Galiazzi (2007). Quanto às unidades abordadas, a seguir, listar-se-á as mesmas: a noção geral das demonstrações, a noção quanto ao papel e a importância das demonstrações, das dificuldades e superações e das abordagens das demonstrações nas habilitações de bacharelado e licenciatura.

As unidades criadas a partir das análises são não-excludentes, ou seja, a fala de um professor pode estar inserida em mais de uma unidade. Com o intuito de facilitar a identificação dos professores, foi criada uma sigla para cada um deles, de forma que o primeiro caractere é uma letra em caixa alta (C), que indica aquele que está envolvido com a coordenação de curso, e (P), aquele que ministra disciplina introdutória ou disciplina cujas demonstrações possuem grande ênfase. A fim de diferenciar os professores, o segundo caractere é um algarismo romano.

2.6 A ABORDAGEM DA ANÁLISE TEXTUAL DISCURSIVA

A análise textual discursiva é um conjunto variado de metodologias de trabalho com textos, que inclui desde a análise de discurso até a análise de conteúdo, e representa “um movimento interpretativo de caráter hermenêutico” (MORAES; GALIAZZI, 2007, p.7).

Para Bardin, essa abordagem constitui-se de

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitem a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 1997, p. 42).

A análise é realizada a partir do texto das entrevistas transcritas, buscando um aprofundamento das compreensões dos fenômenos investigados, constituindo-se de uma análise rigorosa e criteriosa das informações obtidas. A intenção é “reconstruir conhecimentos existentes sobre os temas investigados” (MORAES; GALIAZZI, 2007, p. 11).

Os autores descrevem a análise textual discursiva por meio de quatro focos: desmontagem dos textos, estabelecimento de relações, captação do novo emergente e o processo auto-organizado.

A desmontagem do texto emula os possíveis significados de leitura e a diversidade de sentidos criados de um texto. Segundo Moraes e Galiazzi,

> A multiplicidade de significados que é possível construir a partir de um mesmo conjunto de significantes tem sua origem nos diferentes pressupostos teóricos que cada leitor adota em suas leituras (MORAES; GALIAZZI, 2007, p. 15).

Em seguida é feito um movimento de desconstrução e unitarização dos textos do *corpus*, que se trata de um conjunto de textos – no caso a palavra texto extrapola o próprio vocábulo, podendo ainda ser imagem ou outros tipos de expressões linguísticas – que representa informações da pesquisa, e não necessariamente se trabalha com todo o *corpus*.

O passo seguinte à delimitação do *corpus* é a desconstrução dos textos, a partir dos quais as unidades de análise são criadas. Tal processo constitui-se de três etapas distintas: a fragmentação dos textos e a codificação das análises; a reescrita de cada análise de modo que assumam significados; e a atribuição de um nome ou título para cada unidade produzida.

A seguir, o processo de estabelecimento de relações é também caracterizado como categorização, em que são criadas relações entre as unidades de análise por meio de combinação e de classificação, resultando num sistema de categorias.

O processo de captar o novo emergente jaz na elaboração de um metatexto em que se é comunicada uma nova compreensão, sua crítica e validação. O metatexto tem a intenção de explicitar a compreensão que surge de uma nova combinação dos elementos construídos nos passos anteriores.

As unidades de análise e a constituição de um metatexto encontram-se no capítulo 5 e nas considerações finais. A seguir, apresentaremos a reconstrução histórica das demonstrações em Matemática.

CAPÍTULO 3
UMA RECONSTRUÇÃO HISTÓRICA DAS DEMONSTRAÇÕES

> There is a noticeable general difference between the sciences and mathematics on the one hand, and the humanities and social sciences on the other. It's a first approximation, but one that is real. In the former, the factors of integrity tend to dominate more over the factors of ideology. It's not that scientists are more honest people. It's just that nature is a harsh taskmaster. You can lie or distort the story of the French Revolution as long as you like, and nothing will happen. Propose a false theory in chemistry, and it'll be refuted tomorrow. (*A Life of Dissent*, Noam Chomsky)

Nosso intuito é realizar uma reconstrução histórica acerca do tema *prova em matemática*, sem a pretensão de tornar este um levantamento completo do tema, mas com o intuito principal de identificar episódios que consideramos centrais no modo como tal conceito se desenvolveu ao longo dos tempos.

Nosso interesse aqui não jaz somente no *como*, mas também no *porquê*. E uma vez que nos interessamos no *porquê*, temos de indicar qual é o nosso objeto de estudo, pois, afinal, de que tipo de prova estamos falando?

A pergunta “de que tipo” presume que existam diferentes formas e concepções de prova. E podemos, no parágrafo anterior, substituir a palavra *tipos* por *significados*. Balacheff (2004, 2008) mostrou-nos que, mesmo dentre os pesquisadores em Educação Matemática que se debruçam sobre o tema, há diferentes concepções de prova.

Vimos, no capítulo inicial, que alguns pesquisadores consideram o termo *prova* como sinônimo de *demonstração*, assim como há outros que adjetivam o termo adicionando a palavra “rigorosa” e, para outros, prova é uma coisa e demonstração é outra.

A despeito disso, a princípio tomaremos os termos prova e demonstração como sinônimos e, como nosso foco principal é, além da origem das provas, a formalização e a rigorização da Matemática, pois, como veremos, esses foram momentos importantes que caracterizaram o curso e o atual estado desta Ciência, adotaremos aqui a concepção de prova rigorosa, baseados em Balacheff (1987) e Arsac (1987, 2007), para os quais, a definição de prova se polariza em:

> -um polo formal em que a prova matemática é caracterizada por sua forma, como um texto que respeita algumas regras precisas [...]: uma afirmação é conhecida como verdadeira, ou é deduzida a partir de precedentes usando-se uma regra de inferência tomada em um conjunto bem definido de regras;
>
> -um polo social, ou cultural, no qual a prova matemática é caracterizada como procedimento de validação usado pelos matemáticos. Então um texto é uma prova matemática se ele é reconhecido como válido pelos matemáticos (ARSAC, 2007, p. 27).

Essa polarização foi o principal alvo epistemológico em nossas buscas pela História da Matemática. Esse também é o conceito que desempenhou um papel importante na transformação da Matemática em Ciência hipotético-dedutiva.

A apresentação da reconstrução se dará de forma a apresentarmos os fatos que consideramos importantes identificados nas fontes pesquisadas na História da Matemática, cobrindo o tempo de forma cronológica, começando com as hipóteses sobre a origem da matemática demonstrativa, percorrendo fatos históricos sobre os mais diversos povos e tempos até chegar numa síntese do atual estado da demonstração.

3.1 A ORIGEM

“Qual é a origem da prova?” é uma pergunta que abarca diversas outras questões de nosso interesse: Por que a matemática se transformou em Ciência hipotético-dedutiva? Como e onde ocorreu essa transformação? Quais foram os personagens que protagonizaram essa transformação? Como entender esse processo transformador?

Algumas respostas alcançam consenso dentre aqueles que pesquisaram o tema: Euclides de Alexandria (séc. III a.C.) seria o protagonista e a Grécia seria o palco. Porém, antes de aprofundarmos nessas questões, faremos duas considerações: uma que trata da ausência de estudos históricos sobre o tema e outra que diz respeito a diferentes níveis de prova que são anteriores ou paralelos à matemática grega.

Para a primeira consideração, tomamos as justificativas identificadas por Garnica (1995), sobre a ausência de material a respeito da história da prova que, segundo o autor, são as mais freqüentes:

> (a) o modo relativamente natural com que a prova rigorosa – e sua necessidade – ingressa no discurso matemático, não oferecendo problemas a priori, sendo carregada adiante por uma tradição abalizadora; (b) uma certa “repugnância pela noção de ‘história’ no interior das ciências” (CAZENAVE apud MONCHICOURT, 1987, p.31); (c) as dificuldades inerentes às pesquisas de caráter histórico quase arqueológico; e finalmente, (d) o argumento de que, no caso do rigor, não há uma história de mudanças, mas de adaptações ao que ditam as leis da lógica (GARNICA, 1995, p. 15).

Para a última justificação, o autor inclui uma nota em que assevera que, ao afirmar que existe uma história do rigor, ele quer dizer que existe sim “uma história das alterações do sistema de suporte das regras que indicam as ações possíveis numa demonstração” (GARNICA, 1995, p. 15).

De todo modo, tal ausência não condiz com a necessidade de um estudo histórico do tema. Essa necessidade foi um dos motes para a publicação do livro *Theorems in School* em 2007, editado por Paolo Boero.

Para a segunda consideração, sairemos da Grécia por um instante[1].

Se caracterizarmos a prova como uma explicação com a função de convencer sobre a verdade acerca de uma afirmação, encontraremos esse tipo de prova em diversos textos antigos. Consideremos alguns casos históricos:

- No Egito, a aproximação dos cálculos efetuados pelos escribas era amiúde provada pela verificação do resultado (KELLER apud ARSAC, 1987).
- Na Índia, as asserções geométricas eram provadas pelo apelo à figura (ARSAC, 1987).
- Ainda na Índia, os textos matemáticos eram escritos em sânscrito, e os comentários em prosa continham demonstrações (ou derivações), junto de princípios explicativos (HAYASHI, 1994).
- Na China, os comentários do matemático Lui Hiu (século III d.C.) ao

[1] Alguns autores, como Antonio Garnica, Ubiratan D’Ambrosio e Paul Ernest criticam o enfoque estritamente eurocêntrico dado aos principais tratados sobre História da Matemática. Apesar de concordarmos com essas críticas, por muitas vezes a prova nos levará à história da Matemática na Europa.

Jiu Zhang Suan Shu (Nove capítulos sobre a arte matemática) podem ser tidos como provas explicativas de um período que mostrava uma mentalidade diferente da escola confucionista e que tinha uma influência da filosofia daoísta, aproximadamente no século II antes de Cristo (SIU, 2008).

Há de se fazer uma observação aqui acerca da exiguidade de fontes primárias dos gregos. Muito disso se deve ao fato de eles terem adotado materiais perecíveis, como o papiro, como forma de registro. Por isso não há como precisar com exatidão a origem da demonstração. Porém, sabe-se que a Grécia é o berço dessa nova forma de pensar, de definir os objetos da matemática axiomaticamente como idealidades ou objetos ideais, principalmente a prova matemática, que permite a distinção de afirmações verdadeiras.

Voltemos à Grécia. Primeiramente, identificamos três hipóteses para a origem da demonstração na Grécia Antiga:

(a) Uma hipótese tradicional evolucionária em que, segundo Eves, algumas "experiências com o método demonstrativo foram se consubstanciando e se impondo, e a feição dedutiva da matemática [...] passou ao primeiro plano. Assim, a matemática, no sentido moderno da palavra, nasceu nessa atmosfera de racionalismo" (EVES, 1995, p.94), completando que essa tradição começara com Tales de Mileto (624 - 556 a.C.).

(b) Uma hipótese revolucionária internalista, em que a origem da prova entre os gregos foi uma consequência do problema da incomensurabilidade/irracionalidade.

(c) E, finalmente, uma hipótese externalista, que se dá na base da afirmação de que a "transformação da matemática em ciência hipotético-dedutiva será a 'aplicação' das regras do debate argumentativo que governa a vida política na cidade grega" (ARSAC, 1987, p. 271).

A primeira hipótese versa sobre o surgimento, especificamente, da geometria demonstrativa, em que Tales de Mileto é atribuído como seu precursor no século VI a.C. e responsável pela primeira demonstração, de acordo com historiadores que se basearam em relatos feitos por Proclus.

As outras hipóteses, a despeito de se considerar a prova como uma consequência natural da Ciência, encontra nos problemas da incomensurabilidade/irracionalidade um mote para a transformação radical desta.

Elas se interconectam numa relação dialética, proposta por Arsac, em seus dois artigos já citados anteriormente. Vamos expor sua tese sobre a origem da demonstração em Matemática.

Em primeiro lugar, faz-se necessária uma breve exposição contextual da Grécia Antiga, em especial o surgimento da Pólis e o florescimento da democracia e da filosofia.

Como nos lembra Garnica, “enquanto a constituição do povo grego radica-se num passado muito distante, passando pela cultura das Cíclades, pelas civilizações minoica e micênica, fermento da criatividade artística dos Dórios, Eólios e Jônios dos anos geométricos (século XI a VIII a.C.), é certo que a constituição das cidades ocorre entre os séculos VIII a VII a.C.” (GARNICA, 1995, p.16), para o qual o autor afirma terem desempenhado papéis essenciais a palavra falada e a escrita.

E esse papel, para Vernant, devia-se ao fato de que

> todas as questões de interesse geral que o soberano tinha por função regularizar [...] são agora submetidas à arte oratória e deverão resolver-se na conclusão de um debate; é preciso, pois, que possam ser formuladas em discursos, amoldadas às demonstrações antitéticas e às argumentações opostas (VERNANT, 2004, p. 53).

E para o mesmo autor,

> Certamente, não é uma questão de sorte se a razão surge na Grécia como conseqüência desta forma tão original de instituições políticas chamadas de cidade. Com a cidade, e pela primeira vez na história, o grupo humano considera que seus assuntos comuns podem ser estabelecidos, decisões de interesse geral podem ser tomadas, somente após um debate público e contraditório, aberto a todos, no qual discursos argumentativos conflitam uns com outros. Se o raciocínio racional aparece nas cidades gregas da Ásia Menor tais como Mileto, é por causa das regras do jogo político – debate público, argumentativo e contraditório – que também tornaram-se as regras para o jogo intelectual. (VERNANT apud ARSAC, 2007, p. 29)

Arsac (1987; 2007) cita a tese de Szabó, que supõe que a origem da demonstração seja fruto da escola Eleática de Zenão e Parmênides, que é essencialmente externalista, pois credita a essa origem influências externas à Matemática, como por exemplo, a política.

Por outro lado, há a tese internalista, em que o surgimento da demonstração, conforme Arsac (2007), é contemporâneo ao problema da incomensurabilidade/irracionalidade. Enquanto o problema da incomensurabilidade diz respeito à impossibilidade da diagonal de um quadrado admitir partição comum com seu lado, o problema da irracionalidade versa sobre a constatação de que a raiz quadrada de 2 não é um número racional.

Para não cometermos um anacronismo, vale assinalar que o uso matemático do termo "irracional" era diferente do qual usamos hoje. Para Euclides, o termo "racional" denotava as medidas comensuráveis, ou seja, grandezas que podem ser medidas a partir de uma mesma mensuração de um segmento ou de um quadrado quaisquer (KATZ, 1998). E, antes de Euclides, Platão utilizava o termo irracional para significar aquilo que é "impossível de enunciar". Do mesmo modo, a palavra racional, traduzida por Arsac (2007) do francês "exprimable" para o inglês "rational", significa "possível de enunciar". Por exemplo, era impossível atribuir uma medida racional à diagonal do quadrado de lado 5 (ARSAC, 2007).

Arsac (2007), em sua análise, diz ser impossível somente pela figura – e a partir dela –, constatar a incomensurabilidade. Para Aristóteles, seria possível mensurar a diagonal a partir de um quadrado de lado unitário. Bastaria tomar um valor aproximado, como 1,4 ou 1,41. Então, surge a questão de como apareceu o problema da incomensurabilidade, uma vez que, na Matemática pré- helênica, dois segmentos são sempre comensuráveis.

Entra aqui o importante papel da escola pitagórica. A tradição é de que a descoberta da irracionalidade[2] da raiz quadrada do número 2 advém dela. Para Eves,

> [...] não só ela parecia perturbar a suposição básica da escola, de que tudo dependia dos números inteiros, como também porque a definição pitagórica das proporções, assumindo como comensuráveis duas grandezas quaisquer similares, fazia com que todas as proposições de teoria pitagórica das proporções se limitassem a grandezas comensuráveis, invalidando sua teoria geral das figuras semelhantes (EVES, 1995, p. 107).

Para Arsac (2007), eles teriam realizado esta descoberta por meio do processo de *anthyphairesis*, em uma versão geométrica do algoritmo de Euclides, que consiste em "substrações sucessivas".

O processo, em uma notação moderna, se dá da seguinte forma: dados dois segmentos AB e CD, com AB ≥ CD, substituímos AB por AB – CD, ou seja, consideramos um novo par (A_1B_1,C_1D_1) em que A_1B_1 = AB – CD e C_1D_1 = CD se CD ≤ AB – CD, e A_1B_1 = CD, C_1D_1 = AB – CD no caso oposto. Se os segmentos iniciais AB e CD fossem comensuráveis, seguindo em iterações finitas, chegaríamos ao par (A_kB_k,C_kD_k) com $A_kB_k = C_kD_k$, tal que A_kB_k seria o maior segmento contido em número inteiro de vezes tanto no segmento AB quanto no segmento CD. Se AB e CD são incomensuráveis, o processo é infinito.

Aplicando o processo de *anthyphairesis* na figura emblemática da escola pitagórica (ilustração 1), que é a estrela inscrita formada pelas diagonais de um pentágono, nota-se que as diagonais não são comensuráveis com os lados. Ironia do destino! Uma vez que os pitagóricos acreditavam que tudo podia ser representado por meio de razões de números inteiros.

---

[2] Essa descoberta causou tamanho impacto, que foi mantida em segredo. Existem até lendas de que o pitagórico Hipaso de Metaponto, que teria provado a irracionalidade de √2 por *reductio ad absurdum*, fora lançado ao mar por revelar o segredo a estranhos ou que ele fora banido da comunidade pitagórica, sendo-lhe erigido um túmulo, como se estivesse morto. (EVES, 1995)

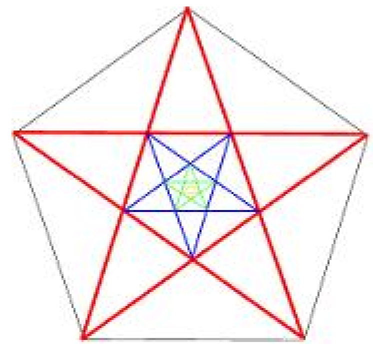


Ilustração 1 – O pentagrama que era o emblema dos pitagóricos

Esse processo consiste em traçar as cinco diagonais do pentágono regular, formando um pentágono menor. As diagonais deste formam outro pentágono ainda menor e prossegue-se assim indefinidamente. Como este processo não tem fim, pois se pode conseguir pentágonos tão pequenos quanto se queira, conclui-se que a razão da diagonal para o lado do pentágono regular não é racional.

Alguns historiadores acreditam que, por essa razão, o número que teria revelado a existência dos incomensuráveis seria $\sqrt{5}$, não $\sqrt{2}$, uma vez que a razão do lado do pentágono regular com sua diagonal é, em notação Matemática atual, $(\sqrt{5} - 1)/2$.

Como já citado anteriormente, Arsac (1987, 2007) enuncia a tese de Szabó essencialmente externalista, cujo aparecimento da prova na Matemática foi um reflexo do debate filosófico, principalmente da escola eleática, e em caminho contrário; e a tese de Caveing, para a qual o problema da irracionalidade levou à criação de idealidades matemáticas que seriam usadas mais tarde por filósofos como Platão e Aristóteles.

No segundo caso, a idealidade dos objetos matemáticos garantia que estes não pertencem ao mundo sensível, e possuem as características de objetividade, perfeição e inteligibilidade. Para Arsac (2007), essa definição dos objetos matemáticos, que ao mesmo tempo constitui a Matemática como uma Ciência autônoma, “é necessariamente contemporânea ao surgimento da prova matemática usada sistematicamente como uma ferramenta de validação” (ARSAC, 2007, p. 39).

E neste cenário, Arsac (1987, p.298; 2007, p.39) chega a uma conclusão compatível com as teses internalista e externalista, sob a forma de duas proposições negativas:

> - Sem o problema da irracionalidade, a transformação da matemática não teria ocorrido, mesmo na sociedade grega;
>
> - Em um outro contexto social, mesmo diante do mesmo problema, a matemática não teria mudado da mesma forma (ARSAC, 2007, p.39).

A tese essencialmente internalista sugere que a Matemática teria influenciado os pensamentos de Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.). Independente da origem, ele teve seu papel na história da demonstração.

Enunciaremos alguns fatos sobre os gregos e a demonstração e, após a discussão acerca de Aristóteles, seguimos com uma discussão sobre Euclides de Alexandria (360 a.C. – 295 a.C.) e sua grande obra *Os Elementos*.

3.2 ALGUNS FATOS SOBRE OS GREGOS

Vimos que a Matemática demonstrativa provavelmente surgiu com os gregos. Da Silva afirma que a tradição atribui a primeira demonstração em Matemática a Tales de Mileto (século VI a.C.), ainda que pelo método empírico do *epharmózein*, ou superposição (DA SILVA, 2007, p.32). Kline (1972) acredita que, de acordo com Aristóteles, uma das primeiras demonstrações foi uma *reductio ad absurdum*[3] construída pelos pitagóricos para provar que 2 , que é a medida da diagonal de um quadrado unitário, é um incomensurável, demonstração esta que teria sido realizada por Hipócrates de Chios (século V a.C.).

---

[3] A técnica *reductio ad absurdum*, também conhecida como método indireto, prova um teorema T supondo que “não T” é verdadeira, e em seguida deduzindo de “não T” e dos axiomas do sistema, a um tempo, uma afirmativa e a negação desta., ou seja, uma contradição (LOSEE, 1979).

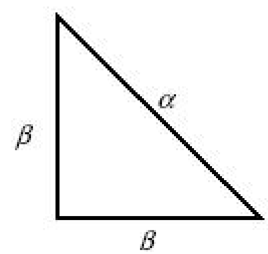


Ilustração 2 – Triângulo isósceles

A prova consiste no seguinte: seja a razão da hipotenusa para um dos catetos de um triângulo reto isósceles (ilustração 2) dada por α/β e considere que esta razão é expressa pelos menores números, ou seja, não possui fatores comuns.

Pelo Teorema de Pitágoras, $\alpha^2 = 2\beta^2$ como o quadrado de um número inteiro ímpar é ímpar, α^2 deve ser um número inteiro par, pois é o dobro do quadrado de β, e, portanto, α é um número par. Segue, então, que β é um número inteiro ímpar, uma vez que a razão α/β não possui fatores comuns.

Como α é par, então $\alpha = 2\gamma$, para algum γ . Então, $\alpha^2 = 4\gamma^2 = 2\beta^2$, ou seja, $\beta^2 = 2\gamma^2$ o que significa que β é par. Mas β é ímpar, e aí está a contradição. Ou seja, se a hipotenusa for comensurável com o cateto de um triângulo isósceles reto, então o mesmo número seria par e ímpar.

Essa prova encontrava-se em edições antigas de *Os Elementos* de Euclides como a proposição 117 do livro X. Porém, como não estava no texto original de Euclides, ela foi retirada de versões modernas (KLINE, 1972).

A insistência de que todo resultado matemático fosse estabelecido por meio de axiomas explícitos foi a contribuição vital dos gregos à Matemática. Porém, não há garantias de que os pitagóricos tenham provado seus resultados geométricos, pois não existe a certeza de que provas dedutivas em uma base axiomática, explícita ou implícita, fosse um requerimento no período inicial ou médio da Matemática pitagórica. E, ainda, segundo Kline (1972), a pergunta de que se eles provaram o teorema de Pitágoras foi extensamente perseguida e a conclusão usual é a de que eles não provaram. A conclusão mais provável sobre prova na geometria pitagórica é que, durante a maior parte da vida da escola, os membros asseveravam os resultados baseados em casos especiais, tal como fizeram em sua aritmética. Entretanto, no tempo dos últimos pitagóricos, isto é, aproximadamente 400 a.C., o *status* da prova mudou por causa de outros desenvolvimentos. Então, os membros dos últimos dias da irmandade podem ter realmente realizado demonstrações.

Com a escola pitagórica, a Matemática começa a ter uma natureza mais dedutiva. Proclus de Alexandria (410-485) contribuiu muito para a história da Matemática grega. Em seu *Sumario Eudemiano*, relatou inclusive que a escola pitagórica foi responsável pela criação da Matemática Pura. Embora a escola pitagórica ajudasse no desenvolvimento da Matemática dedutiva, Hipaso de Metaponto, que por acaso era um pitagórico, colaborou com o fim da escola.

De acordo com os pitagóricos, todos os fenômenos do universo poderiam ser explicados em termos das propriedades dos números inteiros positivos e suas razões, os *arithmos*. Hipaso demonstrou que tal afirmação era falsa e, apesar de não haver registros de como ele o fez, Aristóteles (século IV a.C.) diz que foi por redução ao absurdo e dá uma demonstração de que a diagonal e o lado de um quadrado são incomensuráveis[4], demonstração essa que pode ter sido a encontrada por Hipaso. A demonstração de Aristóteles é essencialmente a mesma que se dá hoje para provar que é irracional (DOMINGUES, 2002).

Como vimos, Hipócrates, que era pitagórico, pode ter introduzido o método indireto de demonstração. Ele pode ter introduzido o método indireto de demonstração na Matemática. Diz-se que a razão entre as áreas de dois círculos é igual à razão dos quadrados de seus diâmetros, ou não é. Por *reductio ad absurdum* a partir da segunda possibilidade, prova-se a única alternativa (BOYER, 1974).

Porém, Kline (1972) afirma que é duvidoso que Hipócrates tenha feito tal prova, pois ela é feita por meio do método da exaustão[5] que só foi criado depois por Eudoxo. Segundo o mesmo autor, uma das principais contribuições de Hipócrates foi a ideia de arranjar os teoremas de forma que os últimos possam ser provados baseando-

---

[4] Os *atithmos* não bastavam, por exemplo, para comparar um lado de um quadrado com a sua diagonal, e por isso os segmentos eram chamados de incomensuráveis (BOYER, 1974).

[5] Segundo Losee (1979), o método da exaustão é uma extensão da técnica do *reductio ad absurdum*. Consiste em mostrar que todo contrário possível de um teorema tem conseqüências inconsistentes com os axiomas do sistema.

se nos primeiros, familiarmente usada por Euclides.

Segundo Kline (1972), não se sabe se os platonistas deram contribuições à estrutura dedutiva da Matemática. Contudo, eles se preocupavam com as demonstrações e com a metodologia da razão. Proclus e Diógenes (séc.III d.C.) atribuíram aos platonistas dois tipos de metodologia. O primeiro é o método da análise, em que o que deve ser estabelecido é dado como conhecido e as conseqüências são deduzidas até que uma verdade conhecida ou uma conclusão é alcançada. Se uma contradição é alcançada, então a conclusão desejada é falsa. Se uma verdade conhecida é alcançada, então revertem-se os passos, se possível, e a prova está completa. O segundo método, como já vimos, é o *reductio ad absurdum* ou método indireto atribuído à Hipócrates. O primeiro método provavelmente não era novidade para Platão, mas talvez ele tenha enfatizado uma necessidade por uma síntese subsequente.

Na seguinte passagem de *A República*, Platão parece descrever a atividade matemática de seu tempo:

> [...], aqueles que se dedicam à geometria, à aritmética ou às outras ciências do mesmo gênero pressupõem o par e o ímpar, as figuras, três espécies de ângulos e outras coisas da mesma família para cada pesquisa diferente; que, tendo pressuposto estas coisas como se as conhecessem, não se dignam justificá-las nem a si próprios nem aos outros, considerando que elas são evidentes para todos; que, finalmente, a partir daí, deduzem o que se segue e acabam por alcançar, de forma conseqüente, a demonstração que tinham em vista (PLATÃO, 2002, p. 253).

Se essa passagem é de fato descritiva dos matemáticos daquela época, então provas certamente eram feitas, mas a fundamentação axiomática era implícita ou devia variar de um matemático para outro, de alguma forma.

Para Platão, a tarefa da Ciência era descobrir a estrutura da natureza ideal e dar a ela uma articulação em um sistema dedutivo. Ele foi o primeiro a sistematizar as regras da demonstração rigorosa, e seus seguidores devem ter arranjado teoremas em uma ordem lógica (KLINE, 1972).

Insistindo nessa forma de prova, os gregos estavam renunciando todas as regras, procedimentos e fatos que eram aceitos no corpo da Matemática pelos milhares de anos que precederam o período grego. Por que os gregos insistiram na prova dedutiva, visto que a indução, a observação e a experimentação eram e ainda são fontes vitais do conhecimento científico?

Segundo Kline (1972), os gregos valorizavam o raciocínio e a especulação, fato evidenciado por suas grandes contribuições à Filosofia, à Lógica e à Ciência teórica. Além do mais, os filósofos são interessados pela busca da verdade. Ao passo que indução, experimentação e generalizações baseadas na experiência rendem somente conhecimentos prováveis, a dedução fornece resultados absolutamente certos se as premissas são corretas.

O desdém da classe educada do período clássico grego para com os assuntos práticos era outro motivo. Platão afirmava que as atividades dos homens do comércio deviam ser punidas como crimes, Aristóteles dizia que nenhum cidadão, em oposição aos escravos, devia praticar as artes mecânicas. Para os pensadores de tal sociedade, a experimentação e a observação seriam repugnantes. Por conseguinte, nenhum resultado, científico ou matemático, deveria ser derivado de tais fontes. Tal desdém também explica o fraco desenvolvimento das Ciências experimentais e mecânicas da época.

Os pensadores platônicos provaram alguns teoremas da geometria plana. Teaeteto provavelmente mostrou que não pode haver mais que cinco poliedros regulares. Teodoro de Sirene mostrou que algumas raízes quadradas são números irracionais (KLINE, 1972).

O trabalho de Eudoxo (408 – 355 a.C.) estabeleceu a organização dedutiva na base de axiomas explícitos, cuja justificativa fora a necessidade de se compreender e operar com razões incomensuráveis. Segundo Kline (1972), Eudoxo encarregou-se de prover a base lógica precisa para essas razões, além de que ele provavelmente viu a necessidade de formular axiomas e deduzir as conseqüências, uma a uma, tal que nenhum erro fosse cometido com essas magnitudes não familiares. Essa necessidade de trabalhar com razões incomensuráveis também reforçou indubitavelmente a primeira decisão de contar somente com o raciocínio dedutivo para a prova.

Com isso – a busca pela verdade e a preferência pelo raciocínio dedutivo – os gregos sentiram a necessidade de obter axiomas que fossem verdades *per se*. Ou seja, eles buscaram afirmações cujas verdades fossem autoevidentes, mesmo que as justificações para a aceitação desses axiomas variassem. Os gregos acreditavam que a mente era suficiente para reconhecer tais verdades. Platão dizia que devíamos recordar da nossa existência como almas num outro mundo, onde tivemos experiências diretas com as verdades da geometria, por exemplo.

3.3 O Papel de Aristóteles

Aristóteles, apesar de ter alguns resultados em *Os Elementos* e de sua contribuição com a metamatemática, não contribui com novos resultados matemáticos significantes. Contudo, suas visões sobre a natureza da Matemática e sua relação com o mundo físico exerceram forte influência.

Aristóteles discutia as definições, que para ele eram nomes para uma coleção de palavras. Além disso, ele aponta que a definição deve ser dada em termos de algo anterior à coisa definida. Da mesma forma que ele admite a necessidade de termos não definidos, uma vez que deve existir um ponto de partida para as séries de definições.

Ele e Platão também notaram, de acordo com Plutarco, que uma definição nos diz o que uma coisa é, mas não que a coisa existe. Como por exemplo, um unicórnio, que podemos defini-lo por meio de uma descrição detalhada, não implicando que tal animal, de fato, exista. A existência das coisas deve ser provada – exceto no caso de coisas primárias, como ponto e reta. O meio que Aristóteles e Euclides encontraram para provar a existência dos objetos geométricos foi a construção. Os três primeiros axiomas em *Os Elementos* de Euclides garantem a construção de retas e de círculos; todos os outros conceitos matemáticos devem ser construídos para que suas existências sejam estabelecidas. Por conseguinte, coisas como a trissetriz de um ângulo – que é a divisão de um ângulo em três partes iguais –

que não podem ser construídas a partir de retas e círculos, eram desconsideradas na geometria grega.

Aristóteles também estudou os princípios básicos da Matemática. Ele fazia distinção entre noções comuns ou axiomas, que são verdades comuns a todas as Ciências e os postulados, que são os primeiros princípios aceitáveis a qualquer Ciência. Entre os axiomas estão os princípios lógicos, como a lei da contradição, a lei do terceiro excluído, etc. Os postulados não tinham a necessidade de serem autoevidentes, mas suas verdades deviam ser certificadas pelas consequências derivadas deles. O conjunto de axiomas e de postulados deveria ser o menor possível, de forma que possibilitasse a prova de qualquer resultado.

Segundo Kline (1972), embora Euclides fizesse a mesma distinção de Aristóteles entre axiomas e postulados, todos os matemáticos do final do séc. XIX ignoraram essa distinção e trataram axiomas e postulados como autoevidentes. De acordo com Aristóteles, os axiomas são obtidos a partir da observação de objetos físicos. Eles são generalizações imediatamente apreendidas, ou seja, mesmo os axiomas e os postulados dependem de um elemento empírico.

Segundo Da Silva (2007), para os gregos, a demonstração de um teorema da geometria envolve uma *verificação empírica*, além de *reflexão* ou *análise lógica* para fundamentar a generalização. Conforme o autor, para demonstrar o teorema angular de Tales, que enuncia que a soma dos ângulos internos de um objeto triangular qualquer é igual a dois retos,

> [...] tomamos um objeto triangular qualquer. Por construções verificamos, empiricamente ou na imaginação, não importa, mas, de algum modo, por constatação *ad oculos*, que os ângulos internos desse objeto somam efetivamente dois retos (considerando que os aspectos matemáticos desse e outros objetos envolvidos nas construções – por exemplo, as formas geométricas e os ângulos – são instâncias perfeitas, não apenas aproximadas, das suas categorias, como caracterizadas pelas suas definições). Note que até aqui mostramos apenas que o objeto triangular tem a propriedade em questão. No entanto, podemos, por análise das construções levadas a cabo, verificar que as peculiaridades do objeto escolhido, outras que sua triangularidade exclusivamente, não desempenham nenhum papel na demonstração de que o objeto em questão satisfaz a propriedade dos ângulos internos. Logo, por generalização, qualquer outro objeto triangular tem essa mesma propriedade, isto é, a triangularidade está subordinada a ela (DA SILVA, 2007, p. 47).

Para o autor, a metamatemática, que seria a análise de noções matemáticas fundamentais como axioma, definição, hipótese e demonstração foi contribuição importante de Aristóteles para a Matemática. Existia uma crítica aristotélica ao método da demonstração por absurdo, pois ele as considerava não causais, isto é, não explicativas, pois sabe-se que algo é verdadeiro sem saber *porque* é verdadeiro. Ainda segundo o autor

> Demonstrações por redução ao absurdo [...] ocorrem com freqüência na matemática grega, em particular o método da exaustão de Arquimedes, que envolve uma dupla redução ao absurdo. A introdução de métodos infinitários na matemática do século XVII, em especial com Cavalieri, visava em grande medida substituir demonstrações por exaustão por demonstrações diretas, causais, respondendo assim às demandas aristotélicas (DA SILVA, 2007, p. 52).

Outro grande feito de Aristóteles foi ter sido o primeiro a sistematizar a lógica enquanto uma Ciência independente. Não que os demais gregos não tivessem participado disso, eles produziram leis corretas do raciocínio matemático e estabeleceram os fundamentos para a lógica, mas foi Aristóteles quem codificou e sistematizou essas leis em uma disciplina separada. Acredita-se que ele tenha derivado a lógica a partir da Matemática. Kline (1972) diz que seus princípios básicos da lógica – a lei da contradição, que afirma que uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo e a lei do terceiro excluído, que sustenta que uma proposição deve ser verdadeira ou falsa – são o coração do método indireto da prova matemática. A lógica aristotélica manteve-se indisputada até o séc. XIX.

A Lógica, apesar de ser derivada da Matemática, era considerada independente, prior a ela e aplicável a todo tipo de raciocínio. Mesmo Aristóteles considerava a lógica como preliminar à Ciência e à Filosofia. Na Matemática, ele enfatizava a prova matemática como a base exclusiva para o estabelecimento de fatos. Para Platão, que acreditava que as verdades matemáticas pré-existiam ou existiam em um mundo independente do homem, o raciocínio não era garantia da exatidão dos teoremas; os poderes da lógica tinham um papel secundário (KLINE, 1972).

Segundo Da Silva (2007), outro aspecto importante do pensamento aristotélico no desenvolvimento das Ciências foi sua concepção de Ciência dedutiva, que para ele era um “edifício logicamente estruturado de verdades encadeadas em relações de consequência lógica a partir de pressupostos fundamentais não demonstrados” (DA SILVA, 2007, p.50). Por demonstração ele entendia:

> Aquilo que nós chamamos aqui de saber é conhecer por meio da demonstração. Por demonstração eu entendo o silogismo científico, e eu chamo de científico um silogismo cuja posse constitui para nós a ciência. Se então o conhecimento científico consiste nisso que dissemos, é necessário também que a ciência demonstrativa parta de premissas verdadeiras, primeiras, imediatas, mais conhecidas que a conclusão, anteriores a ela, e da qual elas sejam as causas (ARISTÓTELES apud DA SILVA, 2007, p. 50).

Para Da Silva (2007), o germe de uma Matemática formal encontra-se na concepção aristotélica de Ciência dedutiva e na possibilidade de uma lógica estritamente formal, cujos esboços primeiros foram traçados por Aristóteles.

3.4 Euclides de Alexandria e os Elementos

Euclides pertenceu ao período Helenístico da História da Grécia antiga. É quase certo que ele tenha vivido em Alexandria por volta de 300 a.C. e que ele tenha formado estudantes por lá, embora sua própria educação tenha sido provavelmente adquirida na Academia de Platão.

Seu mais famoso trabalho foi *Os Elementos*. Muito do material provém dos platonistas com os quais Euclides estudou. Acredita-se, ainda, a partir de uma afirmação de Proclus, que Euclides incluiu em seus *Elementos* muitos teoremas de Eudoxo, teoremas aperfeiçoados de Teaeteto e realizou diversas demonstrações de resultados fracamente provados por seus predecessores (KLINE, 1972).

Vale lembrar que *Os Elementos* não foi o primeiro trabalho a apresentar o sistema axiomático-dedutivo na Matemática. Hipócrates de Chios já havia escrito seu

Elemento (um dos muitos trabalhos perdidos dos gregos) e, segundo historiadores, ele foi o primeiro a dar importância ao uso da dedução para demonstrar os teoremas e, pouco antes da publicação de *Os Elementos*, Autólico de Pitane, em 330 a.C., publica o seu *On The Moving Sphere* (um dos textos gregos mais antigos que chegaram até nós), trabalho sobre astronomia amplamente usado pelos gregos da época, que apresentava a mesma forma axiomática do famoso trabalho de Euclides (BOYER, 1974).

Euclides foi um grande matemático. A escolha particular de axiomas, o arranjo de teoremas e o rigor das provas são méritos exclusivos dele. O trabalho teve altíssimo valor entre os gregos da época. E não somente os textos foram tidos como ideais até meados do séc. XIX. *Os Elementos* é a primeira fonte substancial do conhecimento matemático, foi usado por gerações ulteriores e influenciou o desenvolvimento da Matemática como nenhum outro livro. O próprio conceito de Matemática, a noção de prova e a ordenação lógica dos teoremas foram apreendidas pelo seu estudo e seus conteúdos caracterizaram o curso do pensamento subsequente.

Euclides selecionou os teoremas que ele achava priores em importância e os arranjou de forma que se partisse dos mais simples para chegar aos mais complexos. Segundo Kline (1972), a escolha dos axiomas foi excepcional e, a partir de um pequeno grupo de axiomas, ele foi capaz de provar centenas de teoremas, muitos deles profundos. Além disso,

> sua escolha foi sofisticada. Seu manejo com o axioma das paralelas é especialmente inteligente. Euclides indubitavelmente sabia que tal axioma declara explícita ou implicitamente o que deve acontecer nos alcances infinitos do espaço e que qualquer declaração sobre o que deve ser verdade acerca do espaço infinito é fisicamente duvidoso, porque as experiências do homem são limitadas. Ainda assim, ele também percebeu que tal axioma é indispensável. Ele então escolheu uma versão que determina condições sob as quais duas retas encontrar-se-ão em um ponto finitamente distante. Além disso, ele provou todos os teoremas que poderia, antes de apelar para tal axioma (KLINE, 1972, p.87).

Porém, o trabalho de Euclides não foi perfeito. Kline (1972) supõe que, com um estudo criterioso, com a vantagem dos avanços e do estado da atual Matemática, é possível mostrar que ele usou várias suposições que ele nunca declarou e que, sem dúvida, não reconhecia. O que Euclides e centenas dos melhores matemáticos das próximas gerações fizeram, foi usar fatos que eram ou evidentes a partir das figuras, ou intuitivamente tão evidentes, que eles não percebiam que estavam usando.

Há também alguns defeitos nas provas dadas. Alguns são erros feitos por Euclides que podem ser remediados, embora novas provas tornar-se- iam necessárias. Outro problema que ocorre em toda a obra são teoremas gerais que são provados com casos particulares (KLINE, 1972).

O que não se pode negar é a enorme influência que a obra *Os Elementos* exerceu sobre a Matemática. Por mais de dois milênios acreditou-se que os livros continham verdades acerca do universo, claras e indubitáveis, o que foi denominado de "mito de Euclides". Partindo de verdades evidentes, por si próprias e procedendo por demonstrações rigorosas, Euclides chega ao conhecimento certo, objetivo e eterno. O bispo Berkeley chegou até a atacar o Cálculo Diferencial de Newton e Leibniz, expondo suas obscuridades e inconsistências, dizendo que o Cálculo estava longe de se ajustar à ideia matemática segundo o mito de Euclides (DAVIS; HERSH,1985).

3.5 DEMONSTRAÇÃO NA MATEMÁTICA ÁRABE

Os matemáticos árabes antigos, que tinham contato com a Matemática grega, resolveram alguns problemas, como as novas equações de Diofanto usando habilidosas variações de métodos gregos. No entanto, nenhum avanço metodológico substancial foi feito na teoria dos números (HOGENDIJK, 1994).

Segundo Boyer (1974), os árabes claramente preferiam a trigonometria e a álgebra. Porém, eles tinham um fascínio especial pela prova do quinto postulado de Euclides, que já era um problema famoso entre os gregos. Algumas tentativas, em especial, são notáveis.

Para provar o postulado, Al-Hazen (965 – 1040) partiu de um quadrilátero tri-retângulo e julgava ter provado que o quarto ângulo também devia ser reto. Porém, desse “teorema”, resulta o quinto postulado. Segundo Boyer (1974), em sua “prova”, Al-Hazen assumia que o lugar de um ponto que se move de modo a permanecer equidistante de uma reta dada é necessariamente uma reta paralela à reta dada – mas isso, como se provou no período moderno, é equivalente ao quinto postulado de Euclides.

Omar Khayyam (1048 – 1123) criticou tal prova argumentando que Aristóteles havia condenado o uso de movimento na geometria. Para provar o postulado, Khayyam partiu de um quadrilátero com dois lados iguais, ambos perpendiculares à base e concluiu que os ângulos superiores do quadrilátero podiam ser ou agudos, ou retos ou obtusos. Omar Khayyam só considerou a hipótese de serem ângulos retos baseado num princípio que atribuiu a Aristóteles, que diz que duas retas convergentes devem cortar-se. Novamente um enunciado equivalente ao postulado das paralelas de Euclides (BOYER, 1974).

No período em que Khayyam morreu, em 1123, a Ciência árabe declinava. Porém, ainda houve tentativas de provar o quinto postulado. Nasir Eddin al-Tusi (1201 – 1274), neto do conquistador Gengis Khan, partiu das hipóteses sobre o quadrilátero de Saccheri . Sua prova dependia da hipótese a seguir:

> Se uma reta **u** é perpendicular a uma reta **w** em **A** e se a reta **v** é oblíqua a **w** em **B**, então as perpendiculares traçadas de **u** sobre **v** são menores que **AB** do lado que faz um ângulo agudo com **w** e maiores do lado em que **v** faz um ângulo obtuso com **w** (BOYER, 1974, p.176).

Ninguém obteve sucesso ao tentar provar que o quinto postulado de Euclides não era um postulado e sim um resultado que dependia dos postulados anteriores. O que eles, no máximo, conseguiram, foram variações do mesmo postulado. Os textos de Nasir Eddin influenciaram, mais tarde, o surgimento das geometrias não-euclidianas.

No séc. XV, o colapso cultural do mundo muçulmano praticamente encerrou a Matemática árabe antiga.

3.6 IDADE MÉDIA E RENASCIMENTO EUROPEUS

A Igreja Católica exerceu uma influência essencial naquele período: as primeiras universidades, a internacionalização do latim e sua oficialização como a língua das Ciências, são alguns exemplos dessa influência.

O Medievo pode ser caracterizado como período entre a queda do Império Romano em 476 e a queda de Constantinopla perante os turcos em 1453. Boyer (1974) prefere classificar o período, para a História da Matemática, como sendo aquele entre os anos subsequentes à morte de Boécio, precisamente 529, ano em que Justiano fechou as escolas filosóficas pagãs de Atenas e, terminando em 1436, com o nascimento de Regiomontanus e a morte de al-Kashi. Uma das principais civilizações medievais foi o Império Romano, em que o latim era a língua utilizada pelos estudiosos (BOYER, 1974).

Com o advento do latim, pouco da Matemática grega chegou à Europa por meio de alguns tradutores. O principal deles foi Boécio (480 – 524), que traduziu parte de *Os Elementos* e compilou alguns tratados elementares em Aritmética, Geometria e Astronomia. Ele também escreveu um livro sobre Geometria, com definições e teoremas, mas sem qualquer prova, e traduziu o *Introductio Arithmetica* de Nicômaco. Mas, segundo Kline (1972), ele omitiu alguns resultados.

Os livros de Matemática produzidos no começo da Idade Média tratavam basicamente das quatro operações elementares. Os números irracionais mal apareciam, e quem bom calculador fosse, poderia ser acusado de praticante de magia negra. No começo do segundo milênio, o estudo da Matemática foi aprofundado com Gerbert, que mais tarde tornou-se o Papa Silvestre II. Mas seus estudos se reduziam à Aritmética e à Geometria elementares.

Apesar da exiguidade de material, a Matemática era importante nos currículos do começo do medievo. Ela fazia parte do *Quadrivium*[6], que era parte do currículo, que também era composto pelo *Trivium*. Seu ensino era importante não só

---

[6] O Quadrivium era composto pela aritmética (Ciência dos números puros), pela música (aplicação dos números), pela geometria (estudo das magnitudes paradas) e pela astronomia (estudo das magnitudes em movimento). O Trivium compunha-se de: retórica, dialética e gramática.

como um treino ao raciocínio teológico, mas era difundido pela Igreja com o intuito de manutenção dos calendários e predição de feriados (KLINE, 1972).

Outra motivação para o estudo da Matemática era a pseudociência Astrologia. E, como se acreditava que os corpos celestes influenciavam na saúde, houve uma ligação também com a medicina, que estava longe de ser um estudo do corpo humano. Quando Tycho Brahe passou pela Universidade de Rostock em 1566, não havia astrônomos por lá, e sim astrólogos. Galileu deu aula de Astronomia para estudantes de medicina, mas voltada à Astrologia.

Kline (1972) afirma que no Alto Medievo europeu não houve progresso ou tentativa de se fazer Matemática. As preocupações, motivadas pelo cristianismo recém instaurado, eram a vida após a morte e a preparação para tal vida, ao invés do mundo físico.

Com o movimento das Cruzadas (séc. XI até séc. XIII), por meio dos árabes e dos gregos bizantinos, os europeus entraram em contato com os textos originais gregos e, nas Ciências, esse período caracterizou-se como o período das traduções das grandes obras como *Os Elementos* de Euclides, trabalhos de Aristóteles e Ptolomeu, a *Aritmética* e a *Álgebra* de al-Khowârismî, entre outros.

Em um movimento contrário à Ciência pregada pelos escolásticos, que pregavam a harmonização da fé e da razão, Roger Bacon (1214 – 1294) e William Ockham (1287 – 1347), com ideias contrárias ao aristotelismo e ao dogmatismo presente na Ciência da época, defendiam a experimentação como meio de descoberta e como fonte do conhecimento científico.

Embora tenham ocorrido notáveis progressos no período medieval, como, por exemplo, os trabalhos de Fibonacci e Oresme, os esforços não foram comparados às realizações matemáticas da Grécia Antiga. Porém, antes de 1400, a Europa fora devastada pela peste negra. A França e a Inglaterra sofreram severas perturbações com a Guerra dos 100 Anos e a Guerra das Rosas. Isso caracterizou o declínio do desenvolvimento da Matemática naquele período.

No Renascimento, não surgiram novos resultados brilhantes na Matemática. O pequeno progresso nessa área é contrastante com os grandes feitos em literatura, pintura e arquitetura, época de criação de grandes obras de arte. Na Ciência, o modelo heliocêntrico eclipsou o melhor da astronomia grega e sobrepujou qualquer contribuição arábica ou medieval.

Na Matemática, segundo Kline (1972), o período foi de absorção dos trabalhos gregos. E, mais uma vez, como na era Alexandrina, a Matemática re-estabelecia conexões íntimas com a Ciência e com a tecnologia.

Já para Boyer (1974), a Matemática clássica era uma disciplina intensamente esotérica, acessível somente aos que tinham preparo prévio e, por isso, a revelação dos tratados gregos não teria interferido muito no prosseguimento da tradição medieval.

Para Molland (1994), com a influência do aristotelismo, em que a mente tinha um papel significante para a determinação dos objetos matemáticos, e principalmente os entes geométricos, a Matemática foi reduzida a um entendimento científico da natureza.

Para Siu (2008), o período que ele chama de Era da Exploração, que compreendeu o meio do século XV até o século XVI, influenciou sobremaneira a Ciência praticada na época, uma vez que as navegações e os exploradores dos oceanos e novos continentes (cruzadores, colonialistas e piratas) tornaram o espírito aventureiro como um modelo de inspiração para os promovedores da Ciência moderna. Siu (2008) pondera que, naquele período, a Matemática jazia sobre os fundamentos estáveis da geometria euclidiana enquanto os desbravadores deviam navegar um mar ardiloso com o intuito de descobrir o novo mundo. Essa última frase sintetiza a razão pela qual a Matemática, naquele período, não tenha se ocupado com estudos sistemáticos ou metodológicos acerca da prova.

3.7 O ALVORECER DA MATEMÁTICA MODERNA

O desenvolvimento matemático do séc. XVII, motivado por estudos da Geometria Analítica por Descartes, Fermat, Roberval, Torricelli, Laplace, entre outros, foi essencial para o surgimento do Cálculo e da Análise.

O Cálculo surgiu no final do séc. XVII, sendo Isaac Newton e Gottfried W. Leibniz apontados como os criadores. Para Eves (1995), o desenvolvimento da disciplina seguiu um movimento contrário daquele apresentado em livros-textos: primeiro surgiu o cálculo integral, relacionado aos problemas de somas de áreas e volumes com os gregos[7] e, muito tempo depois, surgiu o cálculo diferencial, resultante de problemas de curvas e tangentes e de questões de máximo e mínimo de funções.

Uma história do Cálculo mais detalhada pode ser encontrada nos livros de História da Matemática. Aqui nos concentraremos nos aspectos históricos que estiverem ligados aos movimentos de rigorização da Matemática.

A Matemática, neste período, final do século XVII e início do século XVIII, estava amalgamada aos problemas físicos, o que foi essencial para o desenvolvimento tanto do Cálculo quanto da Análise. Porém, naquele período, o Cálculo estava sob constante ataque. Os trabalhos de Newton e Leibiniz foram criticados pela falta de fundamentação do infinitamente pequeno e do infinitamente grande.

Para Kline,

> O significado físico da matemática guiou os passos matemáticos e freqüentemente forneceu argumentos parciais para preencher os passos não-matemáticos. O raciocínio era em essência igual à prova de um teorema da geometria, em que alguns fatos óbvios na figura eram usados mesmo que nenhum teorema ou axioma os sustentassem. Finalmente, a certeza física das conclusões assegurava que a matemática fosse correta. (KLINE, 1972, p.618)

E, ainda para Kline (1972), os homens do século XVIII estavam cientes da necessidade matemática da prova. Porém, o sucesso da Física os deslumbrava de forma que eles ficassem indiferentes à falta de rigor. Os esforços de rigorizar o Cálculo não foram bem-sucedidos e os matemáticos da época escarnizavam os trabalhos dos gregos. Para Josef Maria Hoene-Wronski (1778 – 1853), o rigor era uma pedância.

[7] É dever citar Zenão e seus paradoxos (aproximadamente 450 a.C.) e Arquimedes (287 – 212 a.C.) e o problema do traçado da reta tangente à espiral. Eves (1995) cita o método da exaustação de Eudoxo e sugere que Arquimedes aplicou o método de forma elegante, aproximando-se do que conhecemos hoje por integração.

Todavia, isso não se tornou motivo para apoucar o grande desenvolvimento que a Matemática teve naquele período.

Outra questão importante ao desenvolvimento da Ciência do período era a metafísica subjacente que assegurava a verdade matemática, fundamentada em argumentos teológicos e filosóficos. A verdade era assegurada porque a Matemática estava desvelando o *design* matemático do universo.

Dessa forma, estabelecida na principal ideia filosófica do período, expressa especialmente por Thomas Hobbes, John Locke e Leibniz, de que existia uma harmonia pré-estabelecida entre natureza e razão; como poderiam as leis matemáticas, que se aplicavam tão claramente à natureza, depender puramente da precisão da prova matemática?

3.8 SÉCULO XIX: REINTRODUÇÃO DA PROVA

Domingues (2002) chama o período que se estende do medievo até o começo do séc. XIX de período de transição. Naquele período houve um resgate da geometria euclidiana e também uma produção muito elevada na Matemática.

Kline (1972) vai mais além ao afirmar que quase todos os matemáticos que viveram no período que vai de 200 a.C. até 1870 se basearam em fundamentos empíricos e pragmáticos e perderam de vista o conceito de prova dedutiva.

> É uma das revelações espantosas da história da matemática que este ideal [da Matemática] foi, em efeito, ignorado durante os dois mil anos em que seu conteúdo foi expandido tão extensivamente (KLINE, 1972, p.1024).

Para Domingues (2002), a visão da Matemática que foi predominante no começo do século XIX era a do filósofo Immanuel Kant (1711-1776), que acreditava no apriorismo matemático (principalmente do conhecimento geométrico), ou seja, argumentava que as proposições geométricas tratavam de um conhecimento universal que não comportava exceção e, além disso, são independentes da experiência e se fundamentam na razão. Para Pietropaolo (2005), a expressão “Matemática Pura” ganhou corpo nesse período, principalmente pelo ímpeto gerado pela *Crítica da Razão Pura* de Kant, em que a expressão teria sua evolução semântica.

E ainda, as novas áreas, sob o ponto de vista do rigor, não satisfaziam nem mesmo seus criadores. Descartes (1596-1650), por exemplo, que valorizava o método axiomático-dedutivo, não o usou em sua única obra matemática, *A geometria*.

E não foi só Descartes. Podemos também citar um dos criadores do Cálculo, Isaac Newton (1643-1727), que fez três tentativas de passar suas idéias a limpo, sem ser convincente rigorosamente. Não se trata de desmerecer tais cientistas, eles foram importantes para o desenvolvimento da Matemática que hoje conhecemos. O que faltava ainda era algo que servisse como uma base segura para os fundamentos da Matemática.

E foi nesse período – no qual também ocorreu a criação das álgebras não convencionais e da geometria não-euclidiana, que excluía, por exemplo, a propriedade de autoevidência dos axiomas – que surgiram as primeiras tentativas de suster um fundamento firme para a Matemática, em especial a Análise.

Para Reis (2001), isso aconteceu devido às falhas geométricas nos fundamentos do Cálculo e, como solução, buscou-se uma alternativa para a Análise, fundamentando-a estritamente pelos números.

Para Pietropaolo (2005), a reconstrução da Análise sobre bases não-geométricas – e para ele esse movimento está ligado ao desenvolvimento da Matemática Pura – foi um dos maiores avanços matemáticos do século XIX.

> A ‘aritmetização’ da análise ilustra as teses de Kant em dois de seus aspectos: possibilidade de uma Matemática em que todo recurso à intuição sensível é banido, porque se apoia tão-somente sobre o conceito de número; a construção de conceitos matemáticos em razão de a aritmetização encontrar seu ápice na construção dos reais, o que permite realizar uma ruptura absoluta entre a análise e a experiência sensível. Relativamente às provas, Kant afirmou que aquelas que são demonstrativas encontram-se somente no domínio da Matemática, pois estas se realizam mediante a construção dos conceitos, e que os princípios empíricos não podem gerar nenhuma prova apodítica (PIETROPAOLO, 2005, p. 55-6).

Esse movimento, que também foi chamado de rigorização da Análise, consistia na axiomatização dos sistemas numéricos. Entre os nomes que participaram do movimento, citamos Bolzano, Klein, Fourier, Dirichlet, Cauchy e Weierstrass. Reis sintetiza o movimento em três fases distintas:

> Primeiro Programa: compreende os trabalhos de rigorização da Análise realizados, com pouco ou muito sucesso, pelos matemáticos pré-weierstrassianos, destacadamente Cauchy;
>
> Segundo Programa: compreende a "Idade do Rigor", que havia chegado com Weierstrass ao substituir os antigos conceitos intuitivos por precisão lógica crítica;
>
> Terceiro Programa: compreende os trabalhos de refinamento dos weierstrassianos, destacadamente Riemann (1826 – 1866) e Cantor (1845 – 1918) que tentaram dar à Análise um estado de perfeição rigorosa, através de suas contribuições fundamentais das aplicações da Topologia à Análise (REIS, 2001, p. 61).

Clímaco (2007) evidencia a importância de Bernard Bolzano no movimento de aritmetização da Matemática, que poderia ter sido o primeiro exemplo de uma nova forma de fazer Matemática: de que a Matemática se reduzia a cálculos. Ou ainda da ideia advinda da geometria euclidiana, em que o cerne dessa Ciência estaria na análise de figuras concretas ou relações de grandezas.

Ainda para Clímaco (2007), as obras de Bolzano foram cruciais no desenvolvimento da Matemática Pura, trazendo à tona a noção de que mesmo as questões intuitivas ou óbvias deveriam ser demonstradas. A necessidade da prova matemática teria surgido juntamente com a Matemática Pura como a conhecemos hoje, na época em que ocorreu a aritmetização da Análise.

Siu (2008) afirma ser interessante que, depois de dois séculos de descobrimentos interessantes ocorridos com o desenvolvimento do Cálculo, a sequência na História mostra que no, século XIX, o desenvolvimento "gradualmente reverteu-se para um estilo mais conservador denominado pelos 'notórios' [...] de Análise 'epsilon-delta'" (SIU, 2008, p.358), que é a tradição rigorosa com base nas definições e provas que utilizam "épsilons e deltas".

No final do séc. XIX, a demonstração deixa de ter um caráter grandemente material – que a caracterizava como uma atividade intelectual com o objetivo de convencer racional e psicologicamente – pois a

> intuição apenas ou raciocínios heurístico-geométricos já não bastavam para explicar alguns resultados aparentemente paradoxais. Como entender, por exemplo, que uma curva pudesse recobrir uma parte do plano ou que o todo pudesse não ser maior que uma parte sem remeter essas questões pura e simplesmente para o plano da coerência lógica? (DOMINGUES, 2002, p.62).

Isso foi realizado com a reformulação da ideia de demonstração por matemáticos como Frege, conceituando a demonstração formal. Tarski, mais tarde, sintetizou a prova formal da seguinte forma:

> (i) a primeira proposição é um axioma; (ii) cada uma das outras ou é um axioma ou é dedutível diretamente das que a precedem na seqüência; (iii) a última proposição é aquilo que se pretendia demonstrar (TARSKI, 1969, p. 75).

O período entre o fim do século XVIII e meados do século XIX assistiu a uma transformação única e essencial da Matemática, principalmente com a aritmetização da Análise e a criação das Geometrias não-euclidianas. E isso deveu-se, não somente aos novos conhecimentos, mas, principalmente, por mudanças em sua própria natureza, com exigências do rigor, com a relação dessa Ciência com as outras e sua relação com a realidade.

3.9 O Movimento Axiomático

Por volta de 1900, com a axiomatização de várias noções da Matemática, como grupo, corpo e espaço vetorial, o objetivo de estabelecer essa

Ciência rigorosamente parecia ter sido alcançado, e havia um sentimento de satisfação nos matemáticos.

E, uma vez que eles se questionaram quanto aos raciocínios intuitivos – como a percepção visual – do paradigma da geometria euclidiana, surgiu a necessidade de buscar uma nova axiomatização para ela. A tentativa mais bem sucedida foi a do matemático alemão David Hilbert (1852-1943) em seu *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da Geometria), de 1899 (DOMINGUES, 2002). Nesse trabalho, Hilbert desenvolveu toda a teoria assumindo três conceitos primitivos: ponto, reta e plano, definindo as relações entre eles única e exclusivamente por meio de axiomas. Ou seja, com ele, os axiomas deixaram de representar apenas traços autoevidentes, passaram da axiomática material dos tempos de Euclides para a axiomática formal dos dias atuais. Segundo Da Silva (2007, p.183), o método axiomático-dedutivo consiste em "fundar toda uma ciência em uma base de verdades não demonstradas – os axiomas da teoria – a partir das quais se podem derivar todas as verdades dessa ciência por meios exclusivamente lógicos".

Assim, o objetivo do trabalho era derivar consequências dos axiomas. Além disso, a independência, a consistência e a especificidade dos axiomas devem ser estabelecidas em cada um dos sistemas formais, trabalho que deveria ser garantido por meio de um estudo metateórico.

Este era um dos objetivos de Hilbert: demonstrar as propriedades de um sistema formal para a aritmética: seu objetivo era que o conjunto dos enunciados aritméticos verdadeiros correspondesse ao conjunto das fórmulas demonstráveis na aritmética usual. Para isso, ele deveria mostrar que o sistema é completo, ou seja, que a verdade de todas as suas proposições (axiomas ou teoremas) pode ser provada dentro do próprio sistema; e que o sistema é consistente, ou seja, que nenhuma das proposições deduzidas no seu domínio combinatório de referência admite contradição (WAGNER, 2002).

No começo do séc. XX, o método axiomático proveu um fundamento lógico para vários ramos da Matemática, revelando as proposições subjacentes a cada ramo e tornou possível a comparação e o esclarecimento dos relacionamentos de várias partes da Matemática. Esse foi o Movimento Axiomático.

3.10 O FORMALISMO E OS TEOREMAS DE GÖDEL

O Movimento Axiomático trouxe consigo um problema: como garantir a consistência, a completude e a independência dos axiomas de uma teoria formal? A tentativa de Hilbert, em seu programa formalista, foi concebida por meio da metamatemática, cujos objetos de estudos não são os entes matemáticos, mas as teorias formais, ou seja, é o estudo de sistemas formais por métodos matemáticos.

Um sistema formal é consistente se não admite contradições. Da Silva (2007, p.188) diz que "num sistema inconsistente, qualquer asserção é dedutível. Um sistema inconsistente, portanto, é trivialmente desinteressante, uma vez que o conceito de teorema, ou asserção demonstrável, é completamente trivializado".

A completude é a propriedade que garante que, dado um sistema formal, qualquer fórmula (asserção) expressa na linguagem formal do sistema, ou ela ou sua negação são demonstráveis. Se ambas forem demonstráveis, o sistema é inconsistente (DA SILVA, 2007).

E, por último, garantir a independência dos axiomas é mostrar que nenhum deles pode ser derivado, por meios lógicos, dos restantes.

Para Da Silva, o programa de Hilbert comportava dois momentos:

> (1) a formalização das tradicionais teorias matemáticas (a aritmética dos reais, a análise, a teoria dos conjuntos etc.) e (2) a demonstração da consistência dessas versões formalizadas da matemática standard numa aritmética finitária cuja veracidade poderia ser diretamente verificada (DA SILVA, 2007, p.195).

Porém, o programa de Hilbert sofreu um terrível golpe quando, em 1931, um matemático austríaco chamado Kurt Gödel publicou um artigo em que mostrava que, além de ser impossível demonstrar a consistência da aritmética formal, ela é incompleta.

Os estudos de Gödel originaram tanto a *teoria da prova*, que focava essencialmente a parte sintática e estrutural de um sistema lógico, estudando as provas como objetos matemáticos por meio de técnicas matemáticas, quanto a *teoria dos modelos*, essencialmente semântica, cujo estudo se baseava nas linguagens formais e suas interpretações dentro de um sistema formal.

Esses campos, que tiveram um grande desenvolvimento no decorrer do século passado, a partir dos estudos acerca dos fundamentos da Matemática, fazem parte da lógica contemporânea.

3.11 Um Breve Panorama da Atualidade

Segundo Bicudo (2002), na Matemática atual, prevalecem a visão formalista e o sistema Z-F[8], que consiste na axiomatização da teoria dos conjuntos que torna possível a construção dos números naturais e de toda a análise clássica. Embora esse sistema seja livre de contradições, não existe, ainda, uma prova de sua consistência.

É necessário, também, colocar o importante papel dos computadores no campo das demonstrações, que não foi muito bem recebido pelos matemáticos mais puristas. Ele trouxe uma vasta possibilidade de desenvolvimento da Matemática, atuando em diversas aplicações e novos processos de investigação. Na década de cinquenta, um computador foi programado para provar alguns teoremas do *Principia Mathematica* de Russel.

Em 1976, Kenneth Appel e Wolfgang Haken, publicaram uma demonstração para a conjectura das quatro cores[9], em que os cálculos essenciais foram feitos por computador. Um trabalho que gerou controvérsias, pois se a demonstração depende da crença de que os computadores fazem o que supostamente devam fazer, o que aproxima o conhecimento matemático do conhecimento vulgar,

---

[8] A tentativa foi primeiro feita por E. Zermelo (1871 – 1953) e aprimorada por A. Fraenkel (1891 – 1965). (Domingues, 2002).

[9] O problema das quatro cores consiste em demonstrar que qualquer mapa, numa superfície plana ou numa esfera, pode ser colorido sem utilizar mais de quatro cores diferentes. A única exigência, é a de que quaisquer dois países com uma fronteira comum não tenham a mesma cor.(DAVIS; HERSH *apud* PONTE *et al*., 1997).

poderia parecer que há uma certa degradação do grau de certeza, o que violaria a própria natureza da Matemática (PONTE *et al*., 1997).

Em 1993, a *Scientific American* publicou o artigo "The Death of Proof", de John Horgan, que trata das provas por computadores e questiona o "esplêndido anacronismo" de 200 páginas, que em seus conteúdos reside a prova do último teorema de Fermat[10] realizada por Andrew J. Wiles. O artigo coloca lado a lado os argumentos dos que defendem e dos que são contrários às provas assistidas por computador, e que, na época, previa um futuro incerto para a tradicional prova axiomática, um futuro em que ela poderia ser relegada ao esquecimento. O que, por acaso, ainda não aconteceu.

Na efervescência da discussão, surgiram outros artigos com propostas de defender ou criticar o uso dos computadores nas demonstrações e a provável morte anunciada por Horgan. Hanna (2007) cita dois: o primeiro, de Doron Zeilberger, em 1993, intitulado "Theorems for a price: Tomorrow's semi- rigorous mathematical culture", prevendo um estado de "semirrigor", em que os altos preços de provas realizadas por computadores resultaria em escolhas mais baratas e, por conseguinte, menos completas; o segundo artigo, de George Andrews, de 1994, intitulado "The death of proof? Semi-rigorous mathematics? You've got to be kidding!", contra-argumentando a visão de Zeilberger, dizendo que o alto preço dos algoritmos não significaria que os matemáticos desistiriam da ideia da prova absoluta, pois ela possibilita o descobrimento matemático e, o autor arremata, tem a sua beleza.

De toda forma, é inegável a importância que o computador tem para novos ramos da Matemática, experimentais ou não, e até mesmo o papel que ele exerce no ensino e no aprendizado dessa Ciência em todos os níveis.

Uma alegoria interessante é feita por Rav (1999) em seu artigo entitulado "Why do we prove theorems?". Ele propõe um exercício mental, supondo a existência de um programa de computador "oracular" chamado PYTHIAGORA, capaz de responder a qualquer questão matemática à velocidade da luz. O conhecimento matemático sofreria uma explosão, visto que todo suor e trabalho seriam revertidos no

[10] O problema proposto por Fermat há mais de 350 anos, para o qual não há solução para equação $x^n + y^n = z^n$, para quaisquer x, y e z inteiros e qualquer valor inteiro n maior que 2.

simples ato de escrever o problema e esperar uma resposta do programa. Bastariam os matemáticos criarem conjecturas e deixar a PYTHIAGORA responder “verdadeiro” ou “falso”.

Porém, para o autor, seria a morte da Matemática, pois ideias e possíveis conjecturas cessariam, ao passo que a essência da Matemática reside no ato de inventar métodos, ferramentas, estratégias e conceitos para a solução dos problemas. E as provas, para ele, são “o coração da Matemática, a estrada real para a criação de ferramentas analíticas e para a catalisação de crescimento” (RAV, 1999, p.6). Ou seja, ele considera a prova como um catalisador para o conhecimento matemático.

O desenvolvimento de um programa de pesquisa desse tema em Educação Matemática possibilitou, também, um aumento considerável no estudo da prova matemática e suas relações com o ensino e a aprendizagem em níveis cognitivos, epistemológicos, intuitivos, heurísticos, etc. O que traz a discussão do tema não somente nas esferas matemáticas ou filosóficas, mas também nas esferas educacionais.

Esse aumento e, somando-se a isso o fato de existirem poucos estudos históricos[11] sobre as demonstrações matemáticas, é um dos pilares que sustentam a importância sobremaneira de nossa pesquisa.

A seguir, mostraremos algumas perspectivas e abordagens de cunho filosófico encontradas em diversas pesquisas tanto da Educação Matemática quanto da Filosofia e da Sociologia da Matemática, de forma a conceituar o que é e qual é o papel das demonstrações.

[11] Um interessante trabalho é o de Irineu Bicudo, que consta no número especial da revista BOLEMA de 2002, cujos artigos são frutos de um seminário intitulado “Como a demonstração é Considerada em Diversas Áreas do Conhecimento”, que aconteceu em Rio Claro no ano de 2002.

CAPÍTULO 4

ASPECTOS FILOSÓFICOS DA DEMONSTRAÇÃO

A inelutável preocupação com O Verbo dá ao poeta uma vantagem sem preço: enquanto os *nãofazedores* (sic) devem contentar-se com o fato simplesmente irrecusável de que dois e dois são quatro, ele se compraz com uma verdade puramente irresistível (a ser encontrada, de forma sintética, no título deste volume). (*introdução a SÃO 5*, e.e. cummings).

4.1 DEMONSTRAÇÃO, MATEMÁTICA E FILOSOFIA DA MATEMÁTICA

A Matemática é uma Ciência que permite um campo muito amplo de aplicações. Mesmo dentro da Matemática, existem campos, como por exemplo, a Matemática Aplicada, cujo fim não é, naturalmente, unicamente teórico. O nosso interesse aqui é investigar o que é demonstração para aquele matemático que faz de seu uso uma busca ao desenvolvimento de uma Ciência teórica.

A possibilidade da demonstração no seio da Matemática a distingue da necessidade e do caráter empírico das Ciências que são ditas naturais. Por meio dela, os matemáticos podem desenvolver e avançar em sua Ciência, estabelecendo uma árvore teórica derivada de algumas verdades primeiras, os postulados e os axiomas, em que cada galho e cada folha representam um resultado, um teorema ou um corolário, mantendo o caráter de verdade, universal e atemporal.

> Como o conhecimento matemático parece estar baseado em demonstração, não em observação, a matemática é um aparente contra-exemplo à principal tese empiricista. De fato, a matemática é, algumas vezes, tida como um paradigma de um conhecimento *a priori* – conhecimento anterior a, e independente da experiência (SHAPIRO apud BICUDO, 2002, p. 82).

Para Bicudo (2002), as definições da Lógica deveriam modelar as demonstrações matemáticas, porém, a demonstração que se encontra nos livros e periódicos é aquela que satisfaz a comunidade de especialistas, não interessando o quão distante ela possa estar do ideal lógico.

Godino e Récio (1997) argumentam que, no contexto da Matemática profissional, como a atividade produzida pelos matemáticos, nem sempre as demonstrações obedecem estritamente a característica tão cara aos aficionados pelo formalismo, ou seja, elas não são dadas de acordo com a definição de prova formal.

A História da Matemática, como assevera Pietropaolo (2005), mostra que a busca da verdade e o desejo de validá-la têm sido objeto de estudos matemáticos há mais de dois mil anos, e que apenas recentemente o absolutismo da demonstração e da verdade foi posto em cheque.

Ainda para o mesmo autor, a explicação da obsessão pela busca de verdades absolutas é simples: isso afastaria definitivamente a incidência do julgamento humano e das evidências meramente intuitivas da Matemática.

Era esse afastamento que pretendiam as escolas logicista e formalista da Filosofia da Matemática. Por um lado, a primeira tentaria a fusão entre dois campos do conhecimento, a Matemática e a Lógica. Russel (1974, p.185) argumentou que “a conseqüência é que se tornou impossível traçar uma linha entre as duas; de fato, as duas são uma”. E, ainda,

> A Matemática é uma ciência dedutiva: partindo de certas premissas, chega, por um estrito processo de dedução, aos vários teoremas que a constituem. É verdade que, no passado, as deduções matemáticas eram com freqüência muito destituídas de rigor; é também verdade que o rigor é um ideal dificilmente alcançável. Não obstante, se faltar rigor em uma prova matemática, ela será, sob esse aspecto, defeituosa; não constitui defesa a alegação de que o senso comum mostra ser o resultado correto, porquanto, se tivéssemos de confiar nisso, melhor seria abandonar completamente o argumento do que trazer a falácia em socorro do senso comum. Nenhum apelo ao senso comum, ou “intuição” ou qualquer outra coisa que não a estrita lógica dedutiva, deve ser necessário à Matemática após estabelecidas as premissas (RUSSEL, 1974, p.139).

Por outro lado, num sentido de preservar o rigor, o Formalismo pregava a completude dos sistemas formais que pudessem estar subjacentes às teorias matemáticas, querendo axiomatizar e formalizar todas as teorias possíveis.

Como já exposto no capítulo anterior, o caminho que Hilbert encontrou para isso foi a metamatemática, cujos objetos de estudo são as teorias formais. Por um lado, cabia-lhe mostrar que a teoria é consistente, ou seja, não encerra contradições em si. Havia também o problema da completude, isto é, “a propriedade que garante que dada qualquer asserção expressa na linguagem do sistema, ela, ou sua negação, são demonstráveis (mas não ambas, pois senão o sistema seria inconsistente)” (DA SILVA, 2007, p.188), e ainda a independência dos axiomas do sistema.

O programa de Hilbert sofreu um terrível golpe quando, em 1931, um matemático austríaco chamado Kurt Gödel publicou um artigo em que mostrava que: (1) “a aritmética formal, e por extensão a maior parte das teorias matemáticas interessantes, era *incompleta*” e que (2) “a demonstração da consistência da aritmética formal era *impossível* por métodos que pudessem ser formalizados na própria aritmética formal” (DA SILVA, 2007, p. 204-5, itálicos do autor).

Isto é, Gödel mostrou que: (1) é impossível fazer corresponder exatamente a noção de verdade e a noção de demonstração formal, e que (2) é impossível demonstrar que o sistema consistente para a aritmética é, de fato, consistente (WAGNER, 2002).

A forma que Gödel inventou para mostrar tais resultados é bastante sofisticada, de forma que as proposições da metalinguagem pudessem ser representadas e expressas no próprio sistema formal. Para isso, ele codificou *por meio de* números os enunciados que exprimem as propriedades *dos* números.

Uma outra escola filosófica, que surgiu como uma contraposição ao Formalismo, quando se acreditou que os teoremas de Gödel significavam a inutilidade da formalização, foi o Quasi-empiricismo de Imre Lakatos.

Lakatos propôs uma dinâmica do conhecimento matemático baseada em uma heurística que tem como motores principais as provas e as refutações. Os passos dessa heurística sintetizam-se da seguinte forma: (1) Uma conjectura primitiva, (2) prova, (3) contraexemplos à conjectura primitiva, chamados de globais, (4) a prova é re-examinada, (5) exame de provas e outros teoremas para verificar se o lema achado ou o conceito gerado pela prova ocorre neles, (6) as consequências até então aceitas da conjectura original e agora refutadas são conferidas e (7) os contraexemplos convertem-se em novos exemplos, abrindo novos campos de investigação (LAKATOS, 1978).

E, assim, ele argumenta que o estilo dedutivista, fundamentado nos axiomas, teoremas e provas, “oculta a luta, esconde a aventura. Toda a história evapora, as sucessivas formulações provisórias do teorema durante a prova são relegadas ao esquecimento enquanto o resultado final é exaltado como infalibilidade sagrada” (LAKATOS, 1978, p.186).

4.2 DEMONSTRAÇÃO E A LÓGICA MATEMÁTICA

Destacamos inicialmente o estreito laço entre a demonstração e a Lógica, que possui um ramo que a tem como objeto de estudo. Dessa forma, expomos novamente a definição de prova formal dada por Tarski (1969), que a considera como uma síntese de uma construção de uma sequência de proposições tal que:

> (i) a primeira proposição é um axioma; (ii) cada uma das outras ou é um axioma ou é dedutível diretamente das que a precedem na seqüência; (iii) a última proposição é aquilo que se pretendia demonstrar (TARSKI, 1969, p.75).

E ainda podemos definir a demonstração por meio de um sistema formal, que consiste de (i) um conjunto de axiomas e (ii) um conjunto de regras de inferência, que permitem uma relação entre os axiomas e as proposições. No primeiro conjunto, encontramos, além dos axiomas da teoria propriamente dita, os axiomas lógicos.

A partir disso, na Lógica, sendo **F** uma fórmula escrita numa linguagem formal **L**, ela será formalmente demonstrável num sistema formal se existir uma sequência de fórmulas que contém apenas axiomas ou fórmulas demonstradas formalmente a partir das fórmulas que precedem na lista. E assim, uma demonstração de **F** é uma sequência, uma lista, que termina por **F**. As fórmulas demonstradas são chamadas teoremas ou teoremas formais (WAGNER, 2002).

Para Da Silva (2002), considerar a demonstração como sequências ordenadas no espaço lógico, com relações de dependência ou consequência lógicas, reflete apenas um de seus aspectos, que ele chama de *lógico- epistemológico*. Para ele, ainda existem mais dois aspectos: o *retórico* e o *heurístico*.

O aspecto retórico remete ao poder de convencimento das demonstrações que, “segundo o qual, elas aparecem como portadoras de força coercitiva de aquiescência às teses demonstradas” (DA SILVA, 2002, p.69).

O outro aspecto, em que uma demonstração tem uma função heurística, versa que ela pode ser indutora de descoberta matemática. Aqui o autor toma a perspectiva da epistemologia falibilista popperiana, proposta por Imre Lakatos em sua Filosofia da Matemática, centrada na dialética de provas e refutações.

Sendo assim, uma vez que a demonstração precisa de uma incorreção lógica para poder induzir ao progresso matemático, segundo o aspecto heurístico, ela não poderia ser uma demonstração logicamente impecável do ponto de vista do aspecto lógico-epistemológico. Isso evitaria, segundo essa visão, a possibilidade de uma convivência entre esses dois aspectos discutidos.

Weber (2008) discute três perspectivas acerca das provas. Uma delas, denominada de perspectiva formal, assemelha-se ao aspecto lógico- epistemológico descrito acima, em que a prova é vista como uma estrutura formal que é validada por regras lógicas e convenções matemáticas bem definidas e explicitamente estabelecidas.

A segunda perspectiva, semelhante ao aspecto retórico descrito por Da Silva (2002), é de que a prova é um argumento com a finalidade de convencer, seja um matemático que conhece o assunto específico, seja um cético arrazoado ou um inimigo. O autor apresenta dois argumentos: a aceitação da prova tem objetivo maior de considerar a plausibilidade do argumento apresentado do que a verificabilidade dos passos específicos do processo dedutivo; e a plausibilidade dos argumentos, fatores não-matemáticos, influenciam na aceitação, tal como a reputação do autor da prova.

A última perspectiva apresentada por Weber (2008) enfatiza o papel social da prova, que é um argumento que se constitui como uma questão de negociação social e de consenso, com regras, normas e técnicas bem estabelecidas no seio de uma comunidade.

Outra perspectiva possível, que aqui denominaremos de teórico-metodológica, proposta por Rav (1999) e Hanna e Barbeau (2008), é de que as provas são fomentadoras do conhecimento matemático, ao passo que a essência da Matemática reside na invenção de métodos, ferramentas, estratégias e conceitos para a resolução de problemas, e pelo fato de as provas incorporarem tais métodos, ferramentas, estratégias e conceitos, elas deveriam ser o foco primário do interesse matemático.

Da Silva (2002) enumera duas finalidades das demonstrações: (i) estabelecer a veracidade de um enunciado e (ii) convencer sobre a veracidade do que é demonstrado.

Uma vez que as definições dadas anteriormente por Da Silva (2002) favorecem apenas a finalidade (i), pois não abre espaço para um sujeito, a finalidade (ii), assim como o aspecto heurístico, mostra a necessidade de um sujeito, de um caráter subjetivo.

Embora o autor afirme que não tenha o papel de expor a teoria das demonstrações, e muito menos criticá-la, ele conclui apresentando duas observações: a primeira, em que ele chama essa mistura de elementos objetivos e subjetivos de indesejável, alegando "por que não separar definitivamente o objetivo do subjetivo, relegando à teoria matemática das demonstrações simplesmente o papel de estudar relações de dependência lógica em seu escopo mais geral [...]?" (DA SILVA, 2002, p.78); e a segunda, alegando que, ao passo que a demonstração só existe no interior de um sistema formal determinado, não se pode esperar que as verdades da Matemática sejam demonstráveis em um sistema formal que obedeça restrições como a decidibilidade de seus axiomas, alegando que isso não ocorre nas demonstrações "da vida real".

Em outro estudo, encontramos ainda uma análise da palavra *formal*, que pode ter alguns significados enumerados por Arzarello (2007). A primeira forma concerne as sentenças matemáticas como objetos sintáticos estruturados, que são independentes de seus contextos intertextuais. Por exemplo, as sentenças da teoria do silogismo de Aristóteles, em que as conclusões dependem das formas sintáticas das sentenças. A segunda forma concerne o modo como a Matemática é apresentada como produto final numa linguagem formalizada. A terceira forma diz respeito à noção de consequência lógica.

Antes de falarmos dessa terceira forma, convém introduzir as noções de *prova* e de *derivação* dadas por Rav (1999) e também discutidas por Arzarello (2007).

Para os autores supracitados, uma *prova* é uma prova conceitual do discurso matemático costumeiro, com um conteúdo semântico irredutível. Já uma *derivação* em uma teoria formalizada **T**, é uma sequência finita de fórmulas na linguagem de **T**, cada membro da qual é ou um axioma ou é o resultado da aplicação de uma das muitas regras de inferência estabelecidas finita e explicitamente à fórmulas prévias na sequência (RAV, 1999). Ou seja, para ele, uma derivação é o que definimos anteriormente como prova formal.

A seguir, chegaremos numa outra definição de prova de acordo com essa perspectiva. Porém, façamos algumas observações antes. Cada teorema é uma suposição B para a qual existe outra suposição A, tal que B é a consequência lógica de A. Isso pode ser simbolizado por "A → B", em que a seta tem somente uma função icônica, ou seja, não significa implicação formal. Para Rav,

> ao ler um artigo ou monografia, de forma freqüente acontece – como todos sabem muito bem – que se chega num impasse, não vendo porque uma certa afirmação B deve seguir de uma afirmação A. [...]. Assim, ao tentar entender a afirmação do autor, se pega um papel e um lápis e tenta-se preencher as lacunas. Após alguma reflexão na teoria que está por trás, o significado dos termos e o uso do conhecimento geral sobre o tópico, incluindo eventualmente uma manipulação simbólica, vê-se um caminho de A para A1, de A1 para A2,..., e finalmente de An para B. Esta análise pode ser escrita sistematicamente como segue: $A \rightarrow A_1, A_1 \rightarrow A_2, \ldots, A_n \rightarrow B$ (RAV, 1999, p. 14).

E se há dificuldade em uma dessas passagens, pode haver uma interpolação entre A e A_1, como $A \rightarrow A'$ e $A' \rightarrow A_1$. O processo de interpolações não tem um limite superior, ou seja, o tamanho da análise de uma afirmação depende do agente.

Assim, chegamos à seguinte definição de prova: uma prova é um conjunto ordenado de afirmações da forma $A_i \rightarrow A_{i+1}$, que são ligadas por transitividade. Em outras palavras, "a prova nada mais é do que uma decomposição da relação de conseqüência numa corrente de instâncias da mesma relação (garantida a transitividade) que é fácil de ver, até que as pessoas concordam que as vêem" (ARZARELLO, 2007, p.49), completando que a prova é um discurso que pode se referir a cada ramo possível do conhecimento matemático que o agente acredita ser útil para garantir que B é de fato consequência lógica de A.

A partir dos comentários anteriores, vimos que, embora as definições dadas pela Lógica excluam a possibilidade de um sujeito, o apelo de uma prova está intimamente conectado ao sujeito. É ele quem deve compreender, convencer-se, estruturar e reescrever uma prova.

4.3 TIPOS DE DEMONSTRAÇÃO

4.3.1 Terminologia e Simbologia

Ainda dentro do contexto da Lógica Matemática, a despeito das definições dadas anteriormente, encontramos diferentes tipos de demonstração, que se utilizam de alguns aspectos lógicos. Um dos princípios básicos é a *lei do terceiro excluído*, que diz respeito ao fato de uma afirmação ou ser verdadeira ou ser falsa, não existindo uma terceira possibilidade. Para compreendermos melhor as demonstrações, apresentaremos a seguir alguns tipos e exemplos.

Outro fator interessante é o uso de alguns jargões que permeiam o mundo das demonstrações. A partir do momento que os fatos são derivados uns dos outros, há a necessidade de termos que fazem ligações entre eles. Há um uso excessivo de conjunções conclusivas, como: *assim*, *portanto*, *desta forma*, *por conseguinte*, *logo*, *assim sendo*, *pois*, etc.

Existem, também, as relações lógicas entre preposições, indicadas na seguinte tabela:

Afirmação	Notação
P e Q.	$P \wedge Q$
P ou Q.	$P \vee Q$
Se P então Q.	$P \Rightarrow Q$
P se, e somente se, Q.	$P \Leftrightarrow Q$
Não P.	$\neg P$

Temos que $P \wedge Q$ é uma afirmação verdadeira se ambas P e Q forem verdadeiras. Já $P \vee Q$ será uma verdade ao passo que *pelo menos* uma das afirmações seja verdadeira. Este *ou* lógico é chamado de *ou exclusivo* e pode ser exemplificado por uma alusão contada por um professor durante uma das entrevistas: um pai aflito esperando o nascimento do primeiro filho pergunta para o médico "É menino ou é menina?" e o médico responde "Sim". Outro exemplo é a tautologia "Ou chove ou não chove."

Os teoremas matemáticos comumente são escritos na forma "se...então" (implicação direta) e "se, e somente se" (equivalência). Quando não o são, é possível escrevê-los em alguma destas formas. Por exemplo, o teorema "existem infinitos números primos" pode ser reescrito como "se P é o conjunto dos números primos, então P tem infinitos elementos".

A implicação direta carrega a verdade de uma proposição à outra, se P é verdadeira, então Q também o é. A relação de equivalência funciona como uma implicação direta em ambas as direções, vale tanto P implica na verdade de Q como o contrário.

Nas aulas, usualmente pode ser apresentada da seguinte forma: na implicação direta, $P \Rightarrow Q$, usamos P como hipótese para provarmos Q, na equivalência, $P \Leftrightarrow Q$, escrevemos a prova em duas partes, primeiro usando P para provar Q e depois usando Q para provar P.

As tautologias são afirmações verdadeiras em todas as circunstâncias. Por exemplo, $P \Rightarrow Q$, $P \vee \neg P$, etc. Duas delas são bastante caras à Lógica e recebem nomes especiais em latim: *Modus Ponens* (modo que afirma) e *Modus Tollens* (modo que nega).

O *modus ponens*, escrito $[(P \Rightarrow Q) \wedge P] \Rightarrow Q$, traduz-se em "se P implica em Q e P é verdadeiro, então Q é verdadeiro". O *modus tollens*, $[(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q] \Rightarrow \neg P$, traduz-se em "se P implica em Q e Q é falso, então P é falso". Um exemplo clássico do primeiro modo é "Todo homem é mortal, Sócrates é homem, então Sócrates é mortal."

4.3.2 Tipos e Exemplos de Provas Matemáticas

- **Prova Direta**

Nos teoremas do tipo "se...então", que podem ser representados por $P \Rightarrow Q$, se é assumido a verdade de *P* e então com uma série de *modus ponens* se deriva Q. A prova direta é estimada pelos matemáticos, ao passo que ela explica, por meio dos axiomas e resultados já provados, a razão da validade da afirmação que está sendo provada. Ela é direta, pois não usa de artifícios como a prova por contra-positiva ou por redução ao absurdo.

Exemplo. Sejam A e B conjuntos. Se $A \cup B = A \cap B$, então $A \subseteq B$.

Prova: Assuma que $A \cup B = A \cap B$. Basta provar que $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Seja $x \in A$, como $A \subseteq A \cup B$, temos $x \in A \cup B$. Pelo fato de que $A \cup B = A \cap B$, $x \in A \cap B$. Finalmente, como $A \cap B \subseteq B$, temos que $x \in B$. □

- **Prova por Contrapositiva**

Este é um dos tipos de prova indireta. Na forma de implicação direta, $P \Rightarrow Q$, assume-se $\neg Q$, ou seja, nega-se *Q*, para se provar $\neg P$. Inicialmente utiliza-se o *modus tollens* e então uma série de *modus ponens*. A característica principal da prova por absurdo é a negação da tese. Ela não é uma prova direta, pois sua conclusão não é *Q*, ou seja, não é a tese que se deseja provar, e sim a negação da hipótese.

Exemplo: Seja n um número natural. Se n^2 é um número par, então n é um número par.

Prova: Assuma que n é um número natural ímpar, então existe um número natural k tal que $n = 2k + 1$. Consequentemente, $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, o que implica n^2 é que um número ímpar. □

• **Prova por Absurdo (*Reductio ad absurdum*)**

Na prova por absurdo, assume-se que a hipótese é falsa, ou seja, numa implicação direta, $P \Rightarrow Q$, assumimos $\neg Q$ e P. A prova consiste, então, em derivar uma contradição a partir do que foi assumido. Em lógica simbólica podemos escrever na forma $[(P \wedge \neg Q) \Rightarrow (T \wedge \neg T)] \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$, em que T é uma proposição qualquer. Esse tipo de prova assemelha-se à contrapositiva exposta acima, uma vez que se começa negando a tese. Porém, o objetivo é concluir um "absurdo", quer seja uma proposição que contradiga uma suposição provada anteriormente ou um dos axiomas do sistema.

Exemplo. Sejam a e b dois números reais. Se $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

Prova: Assuma que $ab = 0,\ \ a \neq 0\ \ \text{e}\ \ b \neq 0$. Uma vez que $a \neq 0$ e $b \neq 0$, podemos dividir os dois lados da igualdade $ab = 0$ por ab , obtendo $1 = 0$, o que é uma inverdade. □

• **Prova por indução finita**

A indução matemática serve para provar que uma seqüência de proposições P(1), P(2),..., P(n),... é verdadeira, sem a necessidade de realizar a prova para cada uma delas. O princípio é mostrar P(1), a base indutiva, e mostrar que, supondo P(n), temos P(n+1), que são os passos indutivos. Esse tipo de prova, também conhecido como "método da indução" ou "indução finita", é baseado em um dos axiomas de Peano para a construção do conjunto dos números naturais, que diz que "se um conjunto de números contém 1 e o sucessor de qualquer número nele contido, então ele contém todos os números", e que também é conhecido como *primeiro princípio da indução*. A indução matemática é usada para provar teoremas sobre números naturais (LIMA, 2002).

Exemplo: Prove que $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ para todo natural n.

Prova: Verificamos primeiramente P(1): $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ A seguir, assumimos P(n) e mostramos P(n+1), somando (n+1) dos dois lados da igualdade: $1 + 2 + ... + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$ Manipulando o lado direito, temos $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$.

Ou seja, assumindo P(n), podemos provar P(n+1).

O símbolo “□”, um pequeno retângulo, preenchido ou não, é utilizado para indicar que a demonstração está finalizada, assim como a sigla “Q.E.D.”, do latim *quod erat demonstrandum*, que significa “como se queria demonstrar”, ou em português “C.Q.D.”, para “como queríamos demonstrar”.

4.3.3 Sobre os Métodos Indiretos de Demonstração

Os dois métodos indiretos apresentados anteriormente são constantes na prática do matemático e nos livros-textos e aulas das mais diversas disciplinas matemáticas. Muitas provas famosas são indiretas, como por exemplo, aprova da irracionalidade de $\sqrt{2}$ apresentada no capítulo anterior. Isso indica que esse tipo de prova está presente na História da Matemática desde o tempo dos matemáticos gregos. Szabó (apud ANTONINI; MARIOTTI, 2008) acredita que a prova por contradição tenha desempenhado um papel central no surgimento da demonstração com os gregos. E, além disso, a prova indireta foi *leitmotif* de muitos debates filosóficos através dos tempos.

Alguns debates questionavam o *status* particular desse tipo de prova entre os tipos de argumentos usados na Matemática, e outra parte questionava algumas dúvidas acerca da aceitabilidade da prova indireta como prova matemática. Um dos debates foi levantado pelos intuicionistas no começo do século XX, com sua rejeição pelos métodos indiretos de demonstração, uma vez que eles rejeitavam – e procuravam por soluções lógicas – a lei do terceiro excluído (ANTONINI; MARIOTTI, 2008).

Outro exemplo, citado pelas autoras, é relativo à discussão a respeito da noção de *causalidade* introduzida por Aristóteles, que se desenvolveu entre os séculos XVII e XVIII. De acordo com a causalidade aristoteliana, o conhecimento científico deveria proceder da *causa* para o efeito. E, uma vez que a prova indireta parte de uma afirmação falsa e chega a uma contradição, ela não poderia ser considerada como parte do propósito e do progresso científico.

4.4 Aspectos Sociológicos da Demonstração

Deixando o escopo da Lógica, podemos argumentar sobre o papel social da demonstração. Se a demonstração é o núcleo da Matemática, então ela é um aspecto central à prática da Matemática.

Paul Ernest propõe uma Filosofia da Matemática cunhada em aspectos sociais, a qual ele denomina Construtivismo Social. Ernest (2006) descreve tal filosofia como nominalista, em relação à ontologia, e como convencionalista, em respeito à epistemologia e aos fundamentos do conhecimento. O construtivismo social é uma filosofia nominalista, porque os objetos da Matemática são signos, e é convencionalista, porque os conceitos, termos, teoremas, regras e lógica das provas, verdades e teorias matemáticas são entidades culturais socialmente construídas.

No construtivismo social de Ernest, *grosso modo*, a produção do conhecimento matemático dar-se-ia por um ciclo entre o conhecimento subjetivo e o conhecimento objetivo, em que a prova seria um dos movimentadores desse ciclo. No nível subjetivo, o matemático produz novos conhecimentos e torna esse conhecimento objetivo, a partir do momento que o mesmo é publicado em revistas especializadas ou livros, etc. Dessa forma, o conhecimento fica disponível para que outros matemáticos o validem ou o refutem, fazendo novamente o ciclo entre conhecimento objetivo e subjetivo (ERNEST, 1991).

Para ele, a prova é algo essencial para o estabelecimento da verdade matemática. Necessária, porém, não é suficiente. Ela depende que um grupo de profissionais a aceite e a use, além de fatores de segunda ordem, que são subjetivos a cada profissional e que influenciam o estabelecimento de novos conhecimentos matemáticos.

Lembremos dos significados propostos por Hersh (1997): o significado prático, em que as demonstrações são o que os matemáticos fazem para que ele e outros matemáticos acreditem no teorema; e o significado formal, no qual a demonstração é uma sequência simbólica de acordo com certas regras lógicas.

Hersh (1997) afirma que o matemático submete seu trabalho aos olhos críticos de seus colegas. É a maneira que o matemático tem de testar e "provar" seu trabalho.

Em um sentido parecido, Davis (2006) cita o *Clay Mathematics Institute*[12], que oferece prêmios de um milhão de dólares para a solução de cada um dos sete problemas propostos (como, por exemplo, a hipótese de Riemann sobre os números primos, a conjectura de Poincaré e a conjectura de Hodge). O Instituto, por conseguinte, criou um critério de aceitabilidade das soluções. Primeiro, a solução deve ser publicada num periódico renomado; segundo, a solução deve permanecer aceita na comunidade matemática por um período de dois anos; e por último, o instituto nomeia uma comissão para verificar a solução.

Em resumo, uma solução é aceita se um grupo de matemáticos qualificados concorda com a solução. Ou seja, é um fenômeno social, em que a natureza da Matemática é construída socialmente e depende de um consenso.

Dessa forma, a demonstração não é apenas um motor, o *modus operandi* do conhecimento matemático, é também o que caracteriza socialmente esse conhecimento.

Livingstone (1999) analisa a demonstração sob a ótica da Sociologia da Ciência e desenvolve seu argumento acerca das culturas de demonstração, concatenando os seguintes aspectos da prova: o raciocínio matemático, a argumentação matemática, a materialidade da cultura matemática, o papel das

---

[12]http://www.claymath.org/

definições e a fenomenologia da descoberta matemática.

Para tanto, o autor utiliza a teoria da *Gestalt*, argumentando que o raciocínio matemático de uma prova é análogo a algumas características da percepção *gestalt*. Por exemplo, considere a seguinte prova da unicidade do elemento identidade de um grupo: sejam *e* e *e'* dois elementos identidades, então *e* = *e'.e* = *e'*. A prova apresenta duas *gestalts*, a primeira, reside no fato de o termo intermediário poder ser lido de duas formas diferentes (*e'* como um elemento identidade à esquerda e *e* como um elemento identidade à direita), a segunda, que diz respeito ao que realmente foi provado, no caso, que se existem dois elementos identidades, eles devem ser iguais.

Ou seja, para o autor, a *gestalt* é essa característica do raciocínio que está implícita e que subjaz as provas matemáticas, presente em todos os níveis de demonstrações. Essa *gestalt* - idiossincrática a uma demonstração particular – é uma organização de práticas de demonstração que exibe o raciocínio daquela *gestalt*. E ainda mais, o raciocínio e a prática matemática são a arte de encontrar tais *gestalts*.

E é por meio delas que Livingstone justifica o que ele chama de fenomenologia da descoberta matemática. O mote da descoberta seria o buscar e encontrar tais *gestalts*, residindo nesse ato os elementos necessários para que isso ocorra. Enquanto o matemático configura um curso de raciocínio integrando, descartando, revisando, comparando, combinando e investigando seus argumentos parciais, ele orienta e compõe o seu trabalho.

E nesta visão sociológica, quase antropológica, se o trabalho dos matemáticos é provar teoremas, a descoberta matemática é o real trabalho do "fazer Matemática".

Em uma das conclusões, Livingston sugere que o "*aparecimento* da verdade necessária ou certeza absoluta na demonstração matemática [...] pode ser examinado como um fenômeno cultural e como um fenômeno gerado pelas mesmas práticas que sustentam essas práticas - ou seja, como um fenômeno que pertence a uma tribo particular, a tribo dos matemáticos provadores[13] de teoremas" (LIVINGSTONE, 1999, p. 885).

---

[13] Tradução livre do termo "prover".

4.5 PROVA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM PANORAMA DE UMA VISÃO EPISTEMOLÓGICA

4.5.1 Pesquisas Nacionais

Apesar de ser um terreno pouco explorado no Brasil, duas importantes pesquisas nacionais norteiam este trabalho. A primeira, de Garnica (1995), buscou significado da prova rigorosa na formação do professor de Matemática. A segunda, de Pietropaolo (2005), procurou compreender a necessidade e a acessibilidade da implementação das demonstrações nos currículos de Matemática no ciclo básico de Educação, além de ter investigado as implicações dessa inovação nos currículos de formação inicial de professores.

Garnica (1995) entrevistou nove professores - pesquisadores em Matemática e em Educação Matemática que estivessem envolvidos com a Licenciatura, obtendo duas possíveis leituras do significado de provas formais na formação inicial do professor de Matemática: a leitura técnica, que poderia situar-se no terreno da produção científica de Matemática e a leitura crítica, no terreno da produção científica da Educação Matemática, em que cada modo carrega visões divergentes, seja no âmbito dos parâmetros que identificam o trabalho com a prova rigorosa "– como as noções de verdade, de rigor, do que deve ser tomado como conceito de prova, de como é validada, de como se deve veiculá-la em sala de aula, etc." (GARNICA, 1995, p.230), quer seja nas "considerações sobre como a formação do professor deve ser conduzida" (GARNICA, 1995, p.231).

Dentre as conclusões, Garnica afirma que

> [...] são necessários esforços complementares para que seja aberto, na formação do professor, um campo para o estabelecimento da leitura crítica – onde devem ser expostas todas as nuanças da questão, inclusive a da leitura técnica –; caso contrário as concepções vigentes, reforçadas e reproduzidas, desempenharão a função de germe destrutivo de toda e qualquer prática que se caracterize pelo dinamismo, visando uma abertura de horizontes (GARNICA, 1995, p. 231).

Pietropaolo (2005), também a partir de entrevistas com pesquisadores em Educação Matemática e professores atuantes da Educação Básica, aos quais ele chamou, respectivamente, de fala da teoria e fala da prática, propõe uma ressignificação da prova nos cursos de Licenciatura em Matemática, dando às provas um enfoque mais amplo, em que elas devem ser consideradas como

> • ferramenta a ser tratada nas diversas disciplinas do curso (para validar, explicar, refutar, apresentar teorias) e como tema importante para estabelecer conexões entre os temas matemáticos (problemas históricos, relações entre conteúdos), ou seja na perspectiva da compreensão e aprofundamento de conceitos e procedimentos.
>
> • elemento característico e imprescindível da Matemática, como elemento sintático, independente de conteúdos particulares, ou seja, na perspectiva de um tema transversal, mas que em dado momento ela – a prova – seria tematizada em si mesma (caberiam discussões sobre os tipos de prova aceitos pelos matemáticos, a linguagem, os termos utilizados, características dos sistemas axiomáticos, noções de lógica, da modificação da noção de rigor ao longo da história).
>
> • tema que irá se constituir em conteúdo de ensino, ou seja, em sua perspectiva pedagógica [...].
>
> • aspecto importante de um currículo de Matemática, ou seja, em sua perspectiva curricular (caberiam discussões acerca da natureza e características do conhecimento matemático, do papel das provas nas aulas de Matemática, organização e estruturação de materiais – a questão da prova na informática, análise de livros didáticos) (PIETROPAOLO, 2005, p. 221-2).

Ainda para ele, essa amplitude pode ser alcançada por meio de uma perspectiva didática, curricular e histórica, em que uma das possibilidades seria “refletir sobre a ‘evolução’ do pensamento matemático, no qual se inclui a demonstração, indispensável à Matemática” (PIETROPAOLO, 2005. p.222). O autor conclui que os cursos de Licenciatura em Matemática não estão em condições de oferecer uma formação de qualidade a um profissional que vai ensinar provas. Por essa razão, ele propõe a ressignificação das provas nos currículos de formação inicial de professores de Matemática, para que o “estudante desse curso possa aprender e ensinar provas” (PIETROPAOLO, 2005, p.226).

Para esses autores, a despeito do grande número de pesquisas internacionais, muitas não estão alicerçadas numa teoria consistente, tampouco parece haver projetos articulados entre si e em diferentes níveis de ensino. A seguir, expomos duas pesquisas internacionais, uma delas sugerindo uma nova abordagem das provas e a outra corroborando com a constatação acerca das pesquisas internacionais, em que não há um consenso acerca do significado de prova matemática para os pesquisadores em Educação Matemática que trabalham com o tema.

4.5.2 Pesquisas Internacionais

Vimos a importância que o assunto demonstração vem ganhando em pesquisas na área da Educação Matemática. Segundo Hanna e Barbeau (2008), as áreas de ênfase desses estudos são: os aspectos epistemológicos da prova, os aspectos cognitivos, uso de intuição e dos esquemas nas provas, a relação entre prova e raciocínio, a utilidade da heurística para o ensino da prova, a ênfase em estruturas lógicas no ensino superior, etc.

As palavras-chave das pesquisas não se limitam à palavra prova, há ainda argumentação, justificação, validação e, para cada uma delas, os pesquisadores têm em mente significados ligeiramente diferentes.

O principal objetivo do artigo citado acima, de Hanna e Barbeau, intitulado “Proofs as Bearers of mathematical knowledge” é discutir, a partir do ponto de vista da Educação Matemática, a visão proposta por Yehuda Rav em seu artigo intitulado “Why do we prove theorems?”, de 1999. Rav (1999) acredita que a essência da Matemática reside em inventar métodos, ferramentas, estratégias e conceitos para a solução de problemas e, além disso, a prova teria um papel central. Por essa razão, a prova deveria ser o foco primário, pois ela incorpora vários métodos, ferramentas, estratégias, conceitos e, portanto, seriam os *bearers* do conhecimento matemático.

A palavra *bearers* não foi traduzida de propósito. O verbo *to bear*, em inglês, pode significar, entre outros, suportar, segurar, conduzir, sustentar, guiar, possuir, etc. E, por isso, o substantivo *bearer* traduz-se como “aquilo ou aquele que suporta, sustenta, segura, conduz, guia". Ou seja, entender prova como *bearers* do conhecimento matemático é distingui-la por seu papel sustentador, portador, fomentador e, sobretudo, como um catalisador do conhecimento matemático. Por esse motivo, utilizaremos no decorrer do texto os termos *sustendador* ou *fomentador* como traduções livres de *bearer*.

Compreendendo o papel essencial que a prova tem para o conhecimento matemático, os autores delimitam o campo que eles pretendem investigar; enquanto o foco principal de Rav, em seu artigo, era a prática da Matemática e, dessa forma, dos matemáticos, o foco de Hanna e Barbeau é a Educação Matemática. Os educadores reconheçam o valor explanatório da prova, tendo em mente "a luz que tais provas explanatórias podem emitir no assunto matemático com o qual eles [os educadores] lidam" (HANNA; BARNEAU, 2008).

Os autores vão mais além, propondo mostrar que as provas podem ser fomentadoras do conhecimento matemático de outra forma, isto é, da forma proposta por Rav, de que elas têm o potencial de transmitir aos alunos métodos, ferramentas, estratégias e conceitos para a solução de problemas.

Os autores consideram que existe um consenso entre filósofos, matemáticos e educadores matemáticos de que as provas são centrais à Matemática, uma vez que ela estabelece a verdade de uma afirmação matemática. Rav não é contrário a essa afirmação, mas ele acredita existir um aspecto despercebido, e que a importância da prova vai além do fato de estabelecer verdades; ela não demonstra somente um resultado, mas os métodos, ferramentas, estratégias e conceitos que ela apresenta são de uma aplicabilidade vasta e abrem um leque de possibilidades e direções para a Matemática.

Hanna e Barbeau ainda discutem a visão de Avigad (2006), que é similar à de Rav. A visão de Avigad é de que o papel da prova vai além de demonstrar que um teorema é verdadeiro. Para ele,

> [...] nós damos valor a uma prova quando ela exibe métodos que são poderosos e informativos; isto é, nós damos valor a métodos que são uniforme e geralmente aplicáveis, tornam fácil seguir uma seqüência de uma complexa cadeia de inferência, ou provê informações úteis além da verdade do teorema que está sendo provado (AVIGAD, 2006, p.2).

E como a atividade do matemático é construir provas, para Avigad (2006), um filósofo deve analisar a relação entre prova e método. Essa associação pode tomar duas formas: por um lado, novos métodos podem ser introduzidos no curso da prova e, por outro lado, resultados antigos podem ser re- demonstrados a fim de ilustrar os benefícios de um método que fora introduzido no desenvolvimento de uma teoria mais geral.

Hanna e Barbeau citam Dawson (2006), que analisou as razões pelas quais os matemáticos re-demonstram resultados, ou seja, provam resultados já provados, e ainda sustenta a visão de Rav, pois estratégias e métodos inovadores inseridos nas provas são os primeiros valores que elas trazem à Matemática. Dawson (2006) apresenta, com comentários, as seguintes razões:

> (1) Remediar furos percebidos ou deficiências em argumentos anteriores; (2) Empregar raciocínios mais simples, ou mais perspicazes, do que provas anteriores; (3) Demonstrar o poder de metodologias diferentes; (4) Fornecer uma reconstrução racional (ou justificação) de práticas históricas; (5) Estender um resultado, ou generalizá-lo em outros contextos; (6) Descobrir um novo caminho; (7) Dar importância à pureza metodológica e (8) A existência de múltiplas provas de teoremas serve a um propósito abrangente que é freqüentemente despercebido, análogo ao papel da confirmação das ciências naturais. (DAWSON, 2006, p.275-281)

Finalmente, Hanna e Barbeau (2008) reiteram os raciocínios acima citando Cornfield: “O que os matemáticos procuram a partir das provas de outros matemáticos são novos conceitos, técnicas e interpretações” (CORNFIELD apud HANNA; BARBEAU, 2008, p. 3).

Os autores em seguida fazem uma distinção do que eles propõem e do que vem sendo estudado sobre provas por educadores matemáticos. Eles afirmam que essa discussão trazida por eles é nova e que as pesquisas sobre esse tema lidam primeiramente com os aspectos lógicos e com os problemas encontrados pelos alunos com argumentos dedutivos. Eles listam os seguintes assuntos tratados nessas pesquisas: os aspectos epistemológicos da prova; os aspectos cognitivos da prova; o papel da intuição e do esquema na demonstração; a relação entre prova e raciocínio; a utilidade da heurística para o ensino de prova; a ênfase em estruturas lógicas de provas e o ensino no nível superior; provas como explicação e justificação; prova e hipótese; assuntos curriculares; prova no contexto de *softwares* dinâmicos; análise de argumentos matemáticos produzidos por estudantes; a relação entre argumentação e prova.

Eles ainda citam uma lista proposta por De Villiers sobre os significados e as funções das provas: "(1) *verificação* (a ver com a **verdade** da afirmação); (2) *explicação* (justificando o **porquê** a afirmação é verdadeira); (3) *sistematização* (a **organização** dos resultados em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos gerais e teoremas); (4) *descoberta* (descoberta ou invenção de **novos** resultados) e (5) *comunicação* (a **transmissão** do conhecimento matemático)" (DE VILLIERS apud HANNA; BARBEAU, 2008, p.4, itálico e negrito no original).

Numa pesquisa sobre os trabalhos com referência ao artigo de Rav, os autores concluíram que todos tinham um foco diferente: a objeção de Rav a uma Matemática presa pelo Formalismo e sua ênfase na dinâmica social para alcançar uma consistência na Matemática.

Em seguida, eles analisam alguns exemplos e mostram como eles poderiam ter esse sentido proposto por Rav e suas relações com a possível expansão no conjunto de técnicas e de ferramentas, que podem ser usadas pelos alunos para a solução de problemas. Eles afirmam que os exemplos se concentram em propriedades intrínsecas às provas e não em modos pelos quais elas deveriam ser ensinadas ou compreendidas pelos alunos. Faremos a exposição de um exemplo.

Exemplo da fórmula quadrática. Este exemplo é a solução de uma equação quadrática da forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que $a \neq 0$, dada por $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Essa fórmula é usada para encontrar raízes de equações quadráticas. Mas, por que ela funciona? Como demonstrar que ela sempre dará as raízes da equação?

Uma maneira de responder a essas questões é fazer a substituição dos valores de x dados pela fórmula e verificar que, de fato, eles satisfazem a equação quadrática. É uma prova, sem dúvida, porém, Hanna e Barbeau (2008) chamam-na de "caixa preta", pois não indicam a significância da fórmula, como surgiu tal fórmula e como usá-la com outras propriedades e aplicações de funções quadráticas ou outras relacionadas.

Hanna e Barbeau (2008) propõem que, ao invés de pensar "Qual é a fórmula que indica a solução da equação quadrática?", pensar em "Como podemos resolver uma equação quadrática?", pelo fato de que a segunda pergunta nos induziria a pensar no processo, não no produto.

Para responder a essa pergunta, começa-se com o caso mais simples, a equação da forma $x^2 = k$, para $k \geq 0$, que pode ser convertida em $0 = x^2 - k = (x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})$ donde concluímos que a solução é $x = \pm\sqrt{k}$.

Para a fórmula da solução geral, deveremos usar o método de completar o quadrado, ou seja, adicionar um termo à expressão de forma que ele se torne o desenvolvimento de um monômio ao quadrado. Vamos escrever a equação quadrática, $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ da seguinte forma:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Subtraímos *c* dos dois termos da equação e em seguida dividimos por *a*. A seguir, somamos $\frac{b^2}{4a^2}$ dos dois lados, obtendo:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$, e podemos reescrever $-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, ficamos com o seguinte:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Ou seja, $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Donde obtemos a fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Com isso, os alunos não só podem responder à pergunta de como podemos resolver uma equação quadrática, mas também acabam aprendendo uma técnica que lhes será muito útil em todos os níveis de aprendizagem da Matemática.

Por exemplo, para resolver a equação $x^2 - 8x - 48 = 0$, o aluno poderia usar a técnica transformando-a em $(x-4)^2 - 64 = 0$. Ou então, poderia usá-la para fatorar o polinômio de grau 4, $x^4 + 4$ da seguinte forma:

$$x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$$

E assim por diante, essa ferramenta é também muito usada no Ensino Superior, juntamente com outras técnicas que facilitam a obtenção de derivadas e integrais, os problemas de pontos críticos e muitos outros da disciplina de Cálculo, por exemplo.

Vale notar que o foco dos autores é o *Secondary-School*, que equivale aos quatro últimos anos do ciclo básico de ensino, que corresponde ao nosso Ensino Médio. Embora eles não tenham dúvida de que o ensino de provas, no sentido descrito por Rav, possa ser usado de forma produtiva no ensino de Matemática deste período em específico, eles deixam algumas questões em aberto, que eles propõem que sejam tratadas num programa de pesquisa.

Qual seria o efeito para o atual currículo? Como seriam as mudanças no programas pedagógicos? Como administrar o envolvimento de alunos e de professores para as demandas criadas por essas abordagens propostas pelos autores? Como orientar e preparar os professores para essas abordagens? Como isso afetaria seu desenvolvimento profissional?

Os autores concluem que as provas deveriam ter um papel central no *Secondary-School* e chamam a atenção para o potencial de explorar as provas dessa forma por eles proposta. Os diversos estilos de prova mostram aos estudantes como se pode chegar a conclusões válidas de diferentes formas, usando movimentos específicos, manipulações algébricas, conceitos geométricos, geometria dinâmica, aritmética computacional e muito mais.

Eles criticam que os educadores deixaram passar despercebida a grande extensão do papel da prova como fomentador do conhecimento matemático na forma de métodos, ferramentas, estratégias e conceitos que são novos aos estudantes e às abordagens que o estudante pode usar em outros contextos.

Contudo, seria necessário preparar e “polir” provas que pudessem ser utilizadas nesse contexto e torná-las disponíveis aos professores, e ainda pesquisas que pudessem mostrar a forma mais efetiva de ensinar provas com essa abordagem.

Hanna e Barbeau concluem que o ensino de provas tem o potencial de trazer aos estudantes outras partes importantes do conhecimento matemático e de dar a eles um quadro mais amplo da natureza da Matemática. Além disso, as provas, dessa forma, dão aos educadores uma razão adicional de manter as provas nos currículos de Matemática.

Porém, com o crescente número de pesquisas a respeito do tema, sobre as mais diversas perspectivas, há de se esperar que não haja consenso entre os próprios pesquisadores acerca do que *é* demonstração em matemática.

Como argumentou Balacheff (2004, 2008), em uma pesquisa em que, da análise de diversos artigos sobre o tema, chegou à conclusão sobre diferentes pontos de vista a respeito das concepções dos pesquisadores em Educação Matemática que escreveram sobre o tema. Não que os pesquisadores devam todos seguir uma mesma linha, mas as convergências deveriam ser visíveis e as divergências tornadas em questões de pesquisa.

Balacheff (2008) pergunta se um consenso é possível, em que consenso seria uma estrutura teórica comum, e o impasse na rota para alcançar tal programa é a própria epistemologia de prova matemática. Por epistemologia, o autor entende a identificação de um objeto e a rede de relações que se estabelece em volta de outros objetos, tal como problemas, tarefas e outras possíveis atividades que a envolvem.

Ele enumera, então, as diferentes visões epistemológicas acerca da prova e argumenta que cada visão é essencial na determinação da escolha de programas de pesquisa e até mesmo compreensões radicalmente diferentes do que os alunos podem produzir.

Um olhar atento do pesquisador por diversas pesquisas sobre o tema não apresentou surpresas. A pergunta tem uma resposta negativa. A preocupação central do pesquisador é que, sem o esclarecimento desse ponto, dificilmente será possível compartilhar resultados e ter qualquer progresso real no campo de pesquisa. Ele não espera que todos os pesquisadores tenham um mesmo ponto de vista, mas ele acredita que ser capaz de testemunhar as convergências e tornar as divergências em questões a serem pesquisadas só pode trazer benefícios.

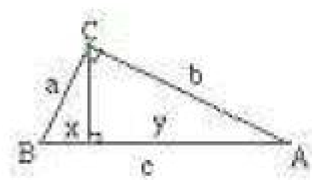
Para explicitar possíveis divergências, o autor listou pontos divergentes, ou simplesmente diferentes, de pesquisas que ele considera mais representativas nesse campo de pesquisa. A seguir, listaremos os pontos levantados por ele.

4.5.2.1 A Prova Matemática como um Tipo Universal e Exemplar de Prova

Nesse ponto ele traz pesquisas que tratavam, de forma geral, a Matemática como uma Ciência moldada pela lógica, como o melhor exemplar de racionalidade. A ideia principal era de que a validade de uma afirmação – uma opinião, uma crença ou um saber – poderia ser escrutinada com a ajuda de um formato que estruture a explicitação de seu racional. O exemplo utilizado pelo autor é a prova de duas colunas:

Teorema de Pitágoras: Em um triângulo reto, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Dado: o triângulo ABC é reto e C é um ângulo reto.



Prove: $a^2 + b^2 = c^2$

Afirmações	Razões
O triângulo ABC é reto e C é um ângulo reto	Dado
Desenhar a perpendicular de C à AB	Dado por teorema anterior.
$c/a = a/x$ e $c/b = b/y$	Semelhança entre triângulos
$a^2 = cx$ e $b^2 = cy$	Produto dos meios igual ao produto dos extremos
$a^2 + b^2 = cx + cy$	Propriedade da adição
$a^2 + b^2 = c(x + y)$	Propriedade distributiva
$a^2 + b^2 = c^2$	Soma de seguimentos e substituição

Esse tipo de prova foi muito criticado, porque é considerado como uma redução radical da prova em uma organização formal, desconstituindo os significados de prova que o aluno pudesse criar.

4.5.2.2 A Natureza Idiossincrática da Prova Matemática

Esse ponto de vista é sustentado pela pesquisa de Harel e Sowder (1998) sobre esquemas de provas de estudantes. Para eles, o conceito de prova de uma pessoa consiste do que constitui o ato de aprender e persuadir, em que aprender e persuadir são termos subjetivos que variam de sujeito para sujeito, civilização para civilização e geração para geração, e “o esquema de prova é idiossincrático e pode variar de campo para campo, mesmo na própria matemática" (HAREL; SOWDER, 1998, p.275). Eles ainda consideram que

> -Uma "conjectura" é uma observação feita por uma pessoa que não possui dúvida acerca de sua verdade. A observação de uma pessoa deixa de ser uma conjectura e se torna um fato em sua visão ao passo que a pessoa se torna certa em relação a sua verdade.
>
> -"Provar" significa o processo empregado por um indivíduo para remover ou criar dúvidas sobre a verdade da observação.
>
> -Aprender é o processo que um indivíduo emprega para remover sua própria dúvida acerca da verdade de sua observação.
>
> -Persuadir é o processo que um indivíduo emprega para remover outras dúvidas sobre a verdade da observação. (HAREL; SOWDER, 1998, p.241)

Esses autores colocam, assim, o sujeito no centro de uma *problématique*[14] de prova. Compreender a prova é um processo contínuo que vai do mais "idiossincrático" para o mais "objetivo".

4.5.2.3 A Prova é o Núcleo da Matemática

Nesse ponto, o autor cita uma pesquisa de Healey e Hoyles, de 1998, realizada a partir de 1995 na Inglaterra, envolvendo 2459 estudantes e seus professores do décimo ano, que corresponderia ao nosso primeiro ano do Ensino Médio, em que foi investigada a concepção e a compreensão de prova matemática dos alunos e a forma com a qual esses estudantes constroem provas (envolvendo o processo de construção e os métodos de construção utilizados).

Healey e Hoyles consideram que

[14] Balacheff utiliza o termo *problématique* para se referir a problemas que são focos de programas de pesquisa.

> A prova é o coração do pensamento matemático, e o raciocínio dedutivo, que está por trás do processo de prova, exemplifica a distinção entre a Matemática e as ciências empíricas. (HEALEY; HOYLES, 1998, p. 1)

Eles obtiveram diversos resultados que demonstram a dificuldade de construir provas, com resultados melhores em álgebra do que em geometria, embora muitos estudantes entendessem a generalidade de uma prova válida. Os estudantes foram melhores em reconhecer um argumento válido do que em construí-lo, e suas concepções de prova e de seu papel foi essencial na construção dos argumentos. A performance dos alunos, mais do que ligadas às características dos professores, estavam relacionadas ao número de horas em contato com a Matemática e à ênfase explícita acerca do tema “prova”. Um dos resultados foi que

> [...] a pesquisa indica que a habilidade de construir, estimar ou escolher uma prova válida não é simplesmente um assunto do alcance matemático geral. Naturalmente há uma influência, mas pelo menos algumas das performances mais pobres em prova de nossos melhores estudantes podem simplesmente serem explicadas pela falta de familiaridade com o processo de demonstração. Muitos alunos têm uma pequena ideia deste processo e nenhuma compreensão de prova, a que, nossos achados sugerem, podem impedir suas habilidades de construir e avaliar corretamente as provas (HEALEY; HOYLES, 1998, p.6-7).

De acordo com Balacheff (2008), acerca desta pesquisa, a educação da prova matemática não deve ser levada a um reducionismo quanto a sua forma, e sim ao significado de prova dentro da atividade matemática. Os autores da pesquisa ainda sugerem que esforços mais explícitos sejam feitos para atrair os estudantes pela prova enquanto seja discutida com eles a ideia de prova num metanível, em termos dos seus significados, generalidade e propósitos. David Tall corrobora com os resultados dessa pesquisa, sugerindo que

> O desenvolvimento cognitivo dos estudantes deve ser levado em conta tal que a prova seja apresentada em formas que sejam para eles potencialmente significativas. Isto requer que os educadores e os matemáticos repensem a natureza da prova matemática e considerem o uso de diferentes tipos de prova de acordo com o desenvolvimento cognitivo do indivíduo (TALL apud BALACHEFF, 2008, p. 506).

Sendo ou não o coração da Matemática, a prova tornou-se um desafio para o ensino e a aprendizagem dessa Ciência.

4.5.2.4 A Prova Matemática Obtém Significado a Partir de Aplicações

Balacheff cita as pesquisas feitas por Hanna e Janke, cujas visões de prova são de uma natureza instrumental, defendendo que, "em primeiro lugar, a prova formal surgiu como uma resposta à persistente preocupação pela justificação" (HANNA; JANKE apud BALACHEFF, 2004), e para a qual, a prova formal permanece como uma útil resposta. Eles são contrários a uma visão ingênua de rigor e da visão que a Matemática é um corpo correto e infalível de conhecimento, mostrando por meio de erros na História da Matemática e defendendo o uso de computadores para construir provas. Os autores fazem uma escolha pragmática, expressa por duas hipóteses:

> Hipótese 1: a comunicação na matemática acadêmica serve principalmente para lidar com a complexidade matemática, enquanto a comunicação na escola serve mais para lidar com a complexidade epistemológica.
>
> Hipótese 2: para compreender o significado de um teorema e o valor de sua prova, os estudantes devem ter uma experiência extensiva e coerente na área apropriada de aplicação. Este fundamento pragmático pode e deveria ser ensinado em uma separação consciente a partir da derivação formal. Somente assim os estudantes serão capazes de ver o real objetivo da prova (HANNA; JANKE apud BALACHEFF, 2008, p.506).

Para Balacheff (2004), não é a forma da prova matemática que está posta em questão, ou a defesa de outro tipo de prova. Ele defende a busca por outra relação entre a prova matemática e a Matemática como um conteúdo. O autor entende a complexidade epistemológica que Hanna e Janke apontam, como a complexidade que surge pela natureza específica dos objetos matemáticos, e ainda, a forma proposta por eles para direcionar essa complexidade é evitá-la por meio da construção de uma ligação sistemática entre a Matemática e seus campos de aplicação. E ainda, "a prova matemática não pode ser ensinada ou aprendida sem levar em consideração as relações entre a Matemática e a realidade" (HANNA; JANKE apud BALACHEFF, 2008, p.506).

4.5.2.5 A Prova Matemática é um Campo Específico à Matemática como um Campo Autônomo

A visão apontada no título acima é inicialmente justificada pela seguinte afirmação:

> Um fato geométrico, um teorema [...] é aceitável somente porque ele é sistematizado com uma teoria, com uma autonomia completa de qualquer verificação ou argumentação em um nível empírico (MARIOTTI apud BALACHEFF, 2008, p. 506).

Essa visão contrasta com a anterior, uma vez que a autora não pretende buscar as raízes do significado de prova matemática fora da Matemática, pois ela reconhece que os axiomas, definições e teoremas são os elementos básicos que caracterizam o conhecimento matemático.

O autor enfatiza que esse ponto de vista está inserido numa abordagem identificada especificamente num grupo de pesquisadores italianos tais como Paolo Boero e Maria Alessandra Mariotti. Os conceitos trabalhados por esses pesquisadores envolvem dois problemas: a relação com o conteúdo, uma vez que a demonstração está sempre atestando a validade ou a verdade de uma proposição que tem um conteúdo; e a relação com a linguagem, que por sua vez, é devida à natureza dialógica da produção de provas.

Balacheff afirma que é importante ter consciência de que o grupo italiano defende a necessidade da existência de uma referência à prova, como um sistema de princípios compartilhados e regras de dedução. Portanto, o problema educacional é ajudar os estudantes “passar da ideia de justificação para a idéia de validação dentro de um sistema matemático e de que a aceitação da validação depende do significado das regras e da aceitação dessas regras” (BALACHEFF, 2008, p.507).

A escolha do grupo é, em especial, a Geometria, e o foco do estudo é o processo mental envolvido no ato de construir provas nesse contexto, que correspondem aos passos: dar o problema, produzir a conjectura, discutir a conjectura, trabalhar as formalizações e preparar a prova. O papel do professor é essencial, e cabe a ele introduzir o estudante à perspectiva teórica necessária à visão sistemática da Matemática.

Um dos resultados das pesquisas é que os alunos estavam conscientes da necessidade de demonstrar a validade das afirmações por meio de raciocínio indutivo. Os autores ainda afirmaram que a forma que os alunos encontraram de trabalhar com as provas era muito parecida com a forma que os matemáticos usam quando produzem conjecturas e provas em alguns campos da Matemática.

Eles concluíram que “a cultura da sala de aula é fortemente determinada pelo recurso à discussão matemática orquestrada pelo professor para mudar as atitudes espontâneas dos estudantes para a validação teórica” (MARIOTTI apud BALACHEFF, 2008, p.507). Balacheff (2004, 2008) afirma que a expressão *validação teórica* captura a essência da abordagem do grupo italiano.

A partir das visões expostas, o autor faz uma primeira síntese. Seria um consenso possível? Para o autor, consenso é uma estrutura teórica comum, ou pelo menos um glossário que garantisse significados compartilhados. Para ele, “o caminho sem volta[15] na rota para alcançar tal programa é nossa própria epistemologia de prova matemática” (BALACHEFF, 2008, p.508). E ele entende epistemologia como “a identificação de um objeto e a rede de relações que estabelecemos em volta dela com outros objetos, tal como problemas, tarefas e outras possíveis atividades que a envolvem” (BALACHEFF, 2008, p.508).

[15] No caso, caminho sem volta é uma possível tradução para a palavra de origem inglesa *deadlock*, que também pode ser traduzida como impasse.

> De fato, não podemos evitar envolver em nosso trabalho nossa própria epistemologia de prova matemática, e além, nossa própria epistemologia da matemática. Mas se não estamos cientes das diferenças entre estas epistemologias e as implicações destas diferenças ao compartilhar teorias e métodos, problemas e resultados, estas epistemologias tornar-se-ão o obstáculo essencial ao progresso em nosso campo de pesquisa. É neste sentido que a epistemologia dos pesquisadores poderia tornar-se um impasse muito difícil de evitar ou resolver (BALACHEFF, 2004).

O autor enumera, ainda, alguns pontos comuns que envolvem o aspecto social da racionalidade matemática, a existência de relações entre argumentação e prova, a necessidade de se analisar a prova sob a luz tanto da teoria quanto da prática, etc. E afirma, com surpresa, que dentre esses aspectos, um não aparece: a relação entre prova e linguagem e o ato de provar e de escrever uma prova.

4.5.2.6 A Prova e seus Aspectos Textuais

Essa posição está intimamente conectada com Raymond Duval e sua teoria de registros semióticos.

> Um registro semiótico...
>
> ...mantém traços que podem ser reconhecidos como representação de algo;
>
> ...fornece regras de transformação para produzir novas representações que poderiam servir para criar novo conhecimento;
>
> ...fornece regras para a conversão para outro sistema de representação para explicitar outras significações;
>
> ...provê regras de conformidade em ordem de permitir a construção de unidades de um nível mais alto (BALACHEFF, 2008, p. 509).

Para o autor, essa caracterização permite o estudo do papel funcional da escrita na construção da prova matemática, e ainda enfatiza duas características do raciocínio dedutivo: de um lado, o valor epistêmico das afirmações não é central – que para ele, reconhece a prova matemática é apodíctica[16] – e de outro, que o raciocínio é análogo a um cálculo, isto é, na visão de Duval, prova e argumentação têm naturezas radicalmente distintas.

O ponto de vista de Duval é estritamente textual, conquanto, o autor parte para o ponto de vista de que a função de um texto matemático diz respeito à aspectos interpessoais e, para ele, mesmo considerando o ponto de vista da linguagem, pode-se descobrir uma importante discrepância entre as possíveis epistemologias de prova que estão subjacentes.

4.5.2.7 A Prova como um Aspecto Interpessoal

A exposição do autor está cunhada na afirmação a seguir:

> As convenções da escrita matemática não são nem necessárias nem conseqüências naturais da natureza do assunto em questão; ao invés, elas são "o produto das relações correntes de poder e práticas de discurso" (CLARK; INVANIK, 1997) dentro da comunidade (BURTON; MORGAN, 2000, p. 450).

Os autores mencionados analisaram um conjunto de 53 artigos de 70 matemáticos, em que eles traçaram a presença do autor, a expressão de autoridade (positiva ou negativa), a identificação de um território e a identificação de um domínio de conhecimento. Os resultados apresentados são convergentes com a afirmação de Clark e Invanik.

---

[16] Ou seja, é evidente, indubitável, incontestável.

> A escrita, tanto para os estudantes como para os pesquisadores, não serve apenas para comunicar um assunto específico da Matemática. Também serve para a comunicação entre os leitores individuais, incluindo poderosos guardas[17] tais como examinadores, revisores e editores. O escritor precisa conhecer como escrever de forma que plausivelmente convença para tais leitores de que ele tem a autoridade de escrever sobre esse tópico, de que o assunto em questão é importante o suficiente para ser interessante e de que vale a pena prestar atenção para o que está sendo dito (BURTON; MORGAN, 2000, p.451).

Morgan ainda pesquisou a escrita de estudantes ingleses e notou a consequência dessa visão nas pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática, pois o objetivo do texto matemático é visto como um meio de agir sobre o leitor, de persuadi-lo. Para Morgan, esse fenômeno é uma conseqüência de uma obrigação dupla introduzida pelo contrato didático:

> -Ênfase na sinceridade de expressão do estudante, mas o que no fim é avaliado não é o produto, mas o autor;
>
> -Ênfase no processo de pesquisa, mas a avaliação conseqüentemente privilegia o conteúdo demonstrado (MORGAN apud BALACHEFF, 2008, p.510).

O autor sintetiza que prova e linguagem estão firmemente relacionados e que, por isso, não é surpresa encontrar em pesquisas que privilegiam a linguagem o mesmo tipo de discrepância que encontramos nas pesquisas que tratam sobre prova. Para o autor, devemos tirar benefícios dessas pesquisas tanto para fazer progressos como para compreender novos problemas.

Balacheff, então, conclui a importância do papel desempenhado pela epistemologia do pesquisador em sua escolha por uma *problématique* e por escolha da teoria e da metodologia subjacentes. O autor questiona: como é possível ir além de um mero relatório das diferenças? Como é possível organizar o estudo das relações entre “verdade” e “validade” dentro de uma sociedade, uma cultura e a constituição da

[17] Tradução livre de *gatekeepers*.

problématique didática da prova matemática, isto é, uma *problématique* da prova matemática a partir de um ponto de vista do ensino e da aprendizagem? Como a racionalidade de um pesquisador interfere ou sustenta a pesquisa na qual ele está envolvido? Qual papel desempenha a visão do pesquisador sobre os critérios aceitáveis para decidir, escolher ou julgar uma atividade matemática tomada da perspectiva da aprendizagem? Como isso se relaciona com as provas?

O autor finaliza sugerindo que os pesquisadores

> -procurem por léxicos comuns e consertem definições comuns reconhecendo diferenças relacionadas às diferenças de línguas, culturas e instituições;
>
> -eliciem diferentes *problématiques* e suas possíveis relações e contrastes;
>
> -eliciem os pontos comuns e divergentes, e possivelmente os tornem em questões de pesquisa;
>
> -comentem as diferenças metodológicas, seus benefícios e possíveis limites;
>
> -reconheçam os resultados aceitos ou tornem objeções e diferenças em problemas de pesquisa (BALACHEFF, 2008, p. 511).

4.6 Afinal, o Que São e Para Que Servem as Demonstrações?

Este capítulo mostrou algumas noções sob o ponto de vista filosófico e epistemológico sobre o *que são* e *para que servem* as demonstrações. A nossa hipótese é de que uma resposta sistemática ou deveras técnica não é suficiente para as questões da Educação Matemática quando relacionadas ao tema.

Não é suficiente, porque elas não respondem às dificuldades cognitivas ou epistemológicas do ensino e aprendizagem da prova e não correspondem ao grande número de pesquisas que abarcam o tema, isto é, a necessidade de estudos aprofundados. Ou seja, essa pergunta não tem uma resposta pronta e evidente. Porém, é um dos objetivos da finalização desta pesquisa caracterizar essa pergunta e uma possível resposta com aporte da História e da Filosofia da Matemática.

Para tal, fizemos essa pergunta para alguns professores que trabalham no curso de bacharelado em Matemática e, a seguir, apresentamos uma análise das entrevistas realizadas, bem como uma possível resposta gerada no contexto desta pesquisa.

CAPÍTULO 5
ANÁLISE E SÍNTESE DAS ENTREVISTAS

A Comunicação é impossível. *Jacques Derrida.*

Neste capítulo trataremos da análise e da síntese dos dados obtidos por meio das entrevistas com os docentes. A análise constitui o processo que vai da desconstrução do *corpus* do texto até a categorização das unidades e subunidades de análise construídas e consubstanciadas. A síntese é a construção de um metatexto.

A desconstrução do *corpus* é um processo lento que é realizado por meio de uma leitura criteriosa. O texto é literalmente desintegrado de forma que se destaquem os elementos constituintes. Tal processo tem a intenção de pormenorizar os limites de significados possíveis, mas não de forma absoluta e final. Moraes e Galiazzi afirmam que é “o próprio pesquisador quem decide em que medida fragmentará seus textos, podendo daí resultarem unidades de análise de maior ou menor amplitude” (MORAES; GALIAZZI, 2007, p.18).

Elaboramos unidades de análise com características amplas, geradas por meio das perguntas comuns feitas a todos os professores, como, por exemplo, a pergunta “O que é saber o que é uma demonstração?”, que pode caracterizar uma fala constituinte da unidade “noção geral quanto ao significado de demonstração”.

A partir dos fragmentos de texto, escolhemos um termo que mais represente sua ideia central para que esse se torne uma subunidade de análise e que, então, possa ser estabelecido dentre as unidades de análise escolhidas. Cada subunidade é identificada por um código, de modo a organizar e tornar mais fácil sua identificação em outros fragmentos. Finalmente, os códigos são ordenados de acordo com as unidades.

Vale ressaltar que a identificação das unidades de análise é um processo que tem por base o conhecimento tácito do pesquisador, consonante com os objetivos da pesquisa. Em nosso caso, a construção das unidades de análise se deu com o filtro teórico dos estudos históricos e filosóficos.

5.1 AS UNIDADES DE ANÁLISE IDENTIFICADAS

Tomamos como pressuposto que a noção de demonstração está conectada à epistemologia de cada um dos professores entrevistados, pois é a exposição daquilo que o professor compreende acerca da natureza, da finalidade, do significado a respeito da noção das demonstrações no corpo da Matemática, ou seja, do que o professor tem para si o que é uma demonstração.

Separamos a identificação dessa noção em duas partes, aquela que chamamos de “noção geral”, em que o professor, em sua fala, define de forma objetiva o que ele acredita ser uma demonstração; e a “noção quanto ao papel e à importância das demonstrações”, na qual o professor emite um juízo de valor acerca do papel e da importância dessas no seio da Matemática e na formação do bacharel.

Em seguida, enunciamos as unidades de análise identificadas quanto às dificuldades, as suas possíveis causas e como os professores acreditam que as mesmas podem ser superadas.

Finalmente, mostramos as opiniões dos professores em relação ao questionamento sobre o fato de dever ou não existir diferença na abordagem das demonstrações nas habilitações de Licenciatura e Bacharelado no curso de Matemática. A seguir, listaremos as unidades de análise e as falas correspondentes.

Podemos separar as unidades identificadas de acordo com sua natureza: aspectos epistemológicos, que inclui as “noções gerais, quanto ao significado de demonstração” e a “noção quanto ao papel e a importância das demonstrações”; aspectos de aprendizagem e de ensino, que inclui as “dificuldades dos alunos com relação às demonstrações”, as “possíveis causas apontadas em relação às dificuldades dos alunos”, “superando as dificuldades e as “abordagens para a licenciatura e para o bacharelado”. Segue a tabela geral das unidades e subunidades de análise.

Tabela geral das Unidades e Subunidades de Análise

	Aspectos Epistemológicos		Aspectos de Aprendizagem e de Ensino			
Unidades de Análise	Noções Gerais Quanto ao Significado de Demonstração	Noção Quanto ao Papel e à Importância das Demonstrações	Dificuldades dos Alunos com Relação às Demonstrações	Possíveis Causas Apontadas em Relação às Dificuldades dos Alunos	Superando as Dificuldades	Abordagens para a Licenciatura e para o Bacharelado
Subunidades de Análise	-Estrutura lógico-formal -Raciocínio Lógico-Formal -Justificativa formal -Retórica -Proficuidade	-Essencialidade -Entendimento -Verdade -Referencial Teórico -Construção do conhecimento Matemático -Aplicação em outras áreas do conhecimento -Normas sociomatemáticas -Auxílio no raciocínio de forma geral -Papel teórico-metodológico -Formalização	-"Começar a demonstração" - Estrutura lógico-formal - Dificuldades notacionais - Interpretação - Abstração - Organização das idéias - Necessidade da demonstração	- A demonstração é uma novidade - Falta de prática - Falta de bom senso do professor - Imediatismo - Negligência das teorias de prova - O ensino é tradicional - Falta de leitura e meios de comunicação - Dificuldade inerente e talento	- Prática -- Situação de conflito -- Exemplos -- Incentivo -- Experiência Matemática -- Escrita e expressão - Abstração - Leitura - Estrutura lógico-formal e teorias de prova - Demonstrações na Educação Básica - Interpretação de texto - Desenvolver o talento	-Igual -Diferente

5.2 ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS

5.2.1 Noções Gerais Quanto ao Significado de Demonstração

De acordo com as perspectivas filosóficas investigadas que detalhamos no capítulo 4, podemos classificar e categorizar as noções gerais dos professores da seguinte forma:

- Perspectiva lógico-formal: lógico-formal e raciocínio;
- Perspectiva retórica: justificativa e retórica;
- Perspectiva teórico-metodológica: aplicabilidade.

A perspectiva mais enfatizada pelos entrevistados é a perspectiva lógico-epistemológica, pois, a despeito de sua importância para o bacharel, saber o que é uma demonstração é ter o domínio da estrutura lógica. Esse fato corrobora a afirmação de Weber (2008) de que tal perspectiva formalista é tradicional. Uma interpretação possível para essa visão é de que a "prova pode ser vista como uma estrutura formal cuja validade pode ser determinada se ela obedece a convenções matemáticas bem-definidas e explicitamente estabelecidas e regras lógicas" (WEBER, 2008, p.3). O mesmo autor afirma que muitos matemáticos, filósofos e educadores matemáticos criticam essa concepção formal, porque eles acreditam que ela não condiz com a prática dos matemáticos.

Uma interpretação diferente é de que um argumento é considerado como uma prova se for possível escrevê-lo como uma prova formal na teoria axiomática dos conjuntos sem que suas características sejam perdidas, sendo que a questão de como um matemático julga se um argumento pode ser reescrito dessa forma permanece em aberto.

Outra perspectiva encontrada é a teórico-metodológica, aquela em que uma prova pode não somente justificar outros conhecimentos, relacionados ou não às provas, mas elas também oferecem ferramentas, métodos, estratégias e conceitos no sentido descrito por Rav (1999) e Hanna e Barbeau (2008). Um dos professores citou o mesmo exemplo da equação quadrática comentado no capítulo 4, contando como a prova da fórmula de Bhaskara poderia fornecer, por exemplo, a implementação e uso do método de completar quadrados. Para essa perspectiva, as provas fomentam o conhecimento matemático.

Por último, também foi encontrada a perspectiva retórica, de que as demonstrações são argumentos de convencimento de si mesmo ou de outro, de que um determinado argumento é válido.

Em seguida, apresentamos as subunidades de análise:

a. Estrutura lógico-formal

Para essa noção, o significado de demonstração subjaz em sua estrutura lógico-formal, ou seja, quanto ao domínio e o entendimento dos elementos estruturais e lógicos que compõem a demonstração. Como por exemplo, a identificação do que é tese, do que é hipótese, do problema de condição necessária e suficiente, etc.

> Bom, aí eu acho que é a estrutura mesmo, é a estrutura lógica que eu acho que é importante dominar, [...] é ter clareza do que é hipótese e o que é tese, de onde eu estou saindo onde que eu quero chegar, o que eu posso usar [...]. CI

> [saber o que é demonstração é] Entender os passos da demonstração, não necessariamente ter que pegar a demonstração e repetir. CIII
> [...] conseguir entender o que ele tem como hipótese ou o que ele tem que provar, o que são as hipóteses, onde elas aparecem nas demonstrações que ele está fazendo. CIII
> [...] o fazer demonstração também envolve o processo de sistematização dos resultados, ele tem que organizar lógico-dedutivamente o que ele está fazendo. CVI
>
> Sei [o] que é uma [demonstração] pela sequência dos passos lógicos, a forma como a Matemática é construída; se aquela sequência de passos leva a uma sentença verdadeira então de fato aquilo é uma demonstração. CVI
>
> É saber que ele desencadeou uma sequência de raciocínios lógicos que não tem nada de errado, usando aquilo que ele já havia provado anteriormente, saindo do que ele queria demonstrar e foi usando o que ele conhecia e chegou na demonstração, eu acho que é isso, sem cometer nenhum erro. A lógica está correta. PI

b. Raciocínio Lógico-Formal

A demonstração é uma espécie de raciocínio matemático dedutivo e lógico-formal. Embora dependa da sua estrutura formal, essa noção é dependente do sujeito que constrói a demonstração.

> Eu acho que demonstrações são jogos mentais e você tem que sair de uma coisa que é verdade e tem que chegar no que você quer, respeitando as regras do jogo e, além das regras do jogo, respeitar a linguagem do que você está fazendo. PIV
>
> Se ele [o aluno] consegue por meio dos raciocínios, por meio da dedução com aquelas hipóteses, chegar à tese, utilizando resultados anteriores, já provados ou que são axiomas. PVII

c. Justificativa formal

Nessa noção, o significado de demonstração assume uma característica de justificação, no qual as demonstrações são atestado de verdade e validade de resultados e afirmações matemáticos.

> A demonstração é uma justificativa plausível daquilo que se pretende afirmar. CII
> De forma bem simplista, é saber diferenciar um exemplo de quando algo funciona, de um saber geral de que, preenchendo determinadas condições, sempre vai funcionar. CIV
>
> [...] se aquela sequência de passos leva a uma sentença verdadeira então de fato aquilo é uma demonstração. CVI
> [O bacharel] tem que compreender porque que um resultado é verdadeiro, ele tem que compreender que aquilo lá está sendo demonstrado, não entendo mais que significado deve ter. PI
> Demonstração para mim [...] é você, baseado em ideias anteriores ou em axiomas, em coisas bem fundamentadas através de uma série de operações ou de encadeamentos de pensamento, chegar em alguma conclusão, que é verdadeira baseada nas hipótese em que você colocou toda a Matemática. PIII
> Uma demonstração é uma justificativa de uma afirmação matemática a partir das hipóteses (e suas consequências) e das regras lógicas. PV

d. Retórica

Para a noção retórica, a demonstração é convencimento, tanto para a própria pessoa que provou quanto para a comunidade externa, de que um determinado resultado é válido de acordo com as normas propostas pelas sociedades matemáticas.

> Não sei te dizer assim com poucas palavras, acho que cada caso é uma coisa, acho que você deduzir uma coisa com meios lícitos em Matemática, deduzidos, de maneira formal ou não, depende das suas argumentações e você convencer que você chegou no resultado que você quer provar. PIV

e. Proficuidade

Aqui, a demonstração é tomada como a essência dos resultados matemáticos, que permite a aplicação profícua desses tanto na própria Matemática quando em outras áreas do conhecimento.

> As demonstrações são a essência dos resultados matemáticos. Sem conhecer a demonstração é impossível aplicar de forma segura os resultados matemáticos, ainda que estes sejam conhecidos. CV
> Saber o que é uma demonstração é conhecer a “tecnologia” e possibilidades “tecnológicas” subjacentes a qualquer resultado matemático. CV
> Eu acho que é importante, fundamentalmente, que a demonstração seja mais em termos da aplicação do resultado. PII

5.2.2 Noção Quanto ao Papel e à Importância das Demonstrações

Nessa unidade de análise, encontramos diversas características que os professores atribuem às demonstrações, desde o fato de ser uma essência, uma condição *sine qua non* da Matemática, até o seu papel importante na compreensão de um assunto matemático.

Percebemos que alguns professores consideram a demonstração um objeto central e necessário para o matemático profissional, inclusive reduzindo todo o seu trabalho ao fato de “demonstrar teorema”.

A verdade também é um valor bastante citado, pois os resultados matemáticos sem demonstração são conjecturas que podem ou não serem verdadeiras. A prova garante sua verdade absoluta.

Destaca-se também o papel das demonstrações na construção do conhecimento matemático, em que são consideradas o *modus operandi* que alicerça o desenvolvimento e o “funcionamento” dessa Ciência.

As provas também são uma espécie de norma sociomatemática, pela qual os resultados devem ser submetidos para terem uma validade assertada. Weber (2003) vai mais além ao afirmar que essas normas estão impregnadas em livros-textos e comentários de professores, ou seja, em um ambiente de aprendizagem, e que elas determinam as crenças e os pensamentos subsequentes dos alunos. O autor cita que pesquisadores acreditam que isso pode levar os estudantes a terem crenças indesejáveis a respeito do rigor e da prova.

Alguns professores acreditam que as demonstrações sirvam para garantir todo o leque de aplicações que a Matemática permite no âmbito de outras Ciências. Assim como as ideias contidas numa demonstração que sirvam para uma aplicação dentro da própria Matemática.

E não só como uma espécie de formalização do pensamento matemático, as provas também são tidas como um tipo de raciocínio que torna mais fácil o entendimento de diversas outras coisas. É nesse sentido que um dos professores cita que as demonstrações abrem uma “chave no cérebro” que torna tudo mais facilmente compreensível.

Esse conjunto representa qualificações que os professores entrevistados empregam para as demonstrações. O número de subunidades identificadas remete não somente ao fato dos professores atribuírem as mais diversas opiniões, mas também a tamanha importância que esses professores acreditam que a demonstração deva ter para um matemático profissional, um bacharel, e até mesmo um professor da Educação Básica que deve saber justificar tudo o que diz.

A seguir, as subunidades:

a. Essencialidade

A demonstração é essencial para a Matemática e para o matemático profissional e, portanto, para o bacharelando, pois ela justifica e valida os resultados e até mesmo caracteriza a Matemática e a construção do conhecimento matemático.

> Eles [os alunos] dominarem as demonstrações e entenderem como é que isso funciona é a essência de ser um matemático, então se o aluno não tem esse contato, um bacharel em Matemática simplesmente não sabe o que é Matemática. Então, a importância é total, ela é essencial no curso, faz parte de como é que é construída a Matemática, como é que se faz Matemática e um bacharel tem que sair do curso sabendo isso. CI

> O papel das demonstrações é primordial, já que para ensinar tem que saber justificar e para obter resultados originais, tem que saber comprovar a validade deles, através de demonstrações dos mesmos. CIV

> Acho que ensinar sem demonstração é totalmente o oposto do que é Matemática. PI
> É óbvio que o que ele [o matemático] vai fazer da vida é demonstrar teorema. PI
> Tudo o que ele [o matemático] fizer, no fundo ele está demonstrando algo. PII
> A demonstração é o tijolo, está lá no comecinho. PIII
>
> A Matemática é a Ciência essencialmente onde tudo possui uma justificativa e uma demonstração a partir de um conjunto de axiomas. PV

b. Entendimento

A demonstração é uma forma de compreensão de um determinado conteúdo matemático.

> As demonstrações são parte fundamental da compreensão do assunto ou daquilo que se pretende e, portanto, uma demonstração é sempre muito importante e o que a gente não pode negar é que ele deve compreender. Mas tem que se destacar um aspecto que eu considero importante, o bacharel, é bom que ele saiba a demonstração como uma forma de compreensão daquele conteúdo. CII

c. Verdade

A demonstração é o que garante e valida a certeza absoluta e a verdade dos resultados matemáticos.

> Sem demonstração, temos uma conjectura: pode ser verdadeira ou não. Com a demonstração obtemos uma certeza. CIV
> Se você não tem a demonstração, não sabe se realmente aquilo é verdade, você não vai para frente. PIII
> Uma demonstração é importante não só por provar a veracidade de algo, mas principalmente porque ela pode conter ideias que se aplicam em muitos outros contextos. PVI
>
> O bacharel tem que entender que a demonstração é o que garante que aquele resultado matemático funciona. PVII

d. Referencial Teórico

A demonstração é parte do referencial teórico fundamental que o bacharel em Matemática deve receber em sua formação e pode dar ideias nas quais o estudante pode definir pelo prosseguimento dos estudos de pós- graduação.

> Eu vejo assim, na carreira de um bacharel, acho de fundamental importância, faz parte do referencial teórico que ele está recebendo na formação. CIII
> Eu chamo atenção que a demonstração talvez começa a dar uma idéia para o estudante o que ele pode fazer na vida acadêmica, como fazer uma tese posterior. PII

e. Construção do conhecimento matemático

A demonstração tem um papel importante e faz parte da construção do conhecimento matemático.

> [...] eu acho que às vezes uma demonstração não é simplesmente o fato de você demonstrar um resultado; na demonstração, às vezes, você usa algo que você já viu ou algum outro resultado, então você vai construindo um conhecimento através das demonstrações. CIII
>
> Em todos os resultados e na própria produção de um matemático, a demonstração faz parte da construção do conhecimento do matemático. CVI
> Sem [demonstração] você não conseguiria construir todo o castelo da Matemática. PIII

f. Aplicação em outras áreas do conhecimento

O conhecimento das demonstrações garante a possibilidade da aplicação dos resultados matemáticos em outras áreas do conhecimento.

> Somente com o domínio desse conhecimento [demonstração] é possível garantir a aplicação robusta da Matemática em qualquer outra área da Ciência e na indústria. CV
> As demonstrações são importantes porque elas dão credibilidade à Ciência que está sendo desenvolvida. Mas é importante salientar que, mais importante do que saber demonstrar algo, é entender o que está sendo provado e as implicações daquilo tudo, seja para a Matemática, seja para as atividades práticas como engenharias, computação, etc. PVI

g. Normas sociomatemáticas

Um resultado só é aceito pela comunidade matemática se for demonstrado de acordo com as regras propostas pela própria comunidade.

> A medida com que ele vai produzindo resultados, se ele não tiver demonstrado o resultado que ele está evidenciando, aquele resultado não vai ser aceito pela comunidade matemática. CVI

h. Auxilia no raciocínio de forma geral

As demonstrações são uma ferramenta que ajuda no raciocínio de profissionais da área de exatas em geral, ou ainda, de forma mais abrangente, para profissionais de qualquer área.

> Eu não vou fazer as mesmas coisas que faço num curso de Matemática num curso de Engenharia, mas também ele precisa ter uma ferramenta para se moldar alguma coisa, ele está na área de exatas, então ele teria condições de raciocinar em cima daquilo para poder utilizar. CIII
> Eu acho que [a demonstração] abre uma chavinha no cérebro da gente, não sei te explicar o que acontece; a coisa é tão complexa que as outras coisas que você queira fazer ficam mais fáceis, mais claras. [...]. Eu acho que isso abre realmente uma chavinha para o intelecto de modo geral. PIV

> A questão das demonstrações, essa parte lógica, de deduções, ela é como um joguinho mental, que independente do que você está fazendo, auxilia você em tudo, o esqueleto, o jeito de pensar, isso abre caminhos para outras coisas. PIV

k. Papel teórico-metodológico

A demonstração fornece um arcabouço teórico-metodológico que permite uma aplicação em outros contextos matemáticos.

> Uma demonstração é importante não só por provar a veracidade de algo, mas principalmente porque ela pode conter ideias que se aplicam em muitos outros contextos. PVI

l. Formalização

A demonstração é um instrumental para a formalização de um raciocínio acerca de um resultado matemático.

> Deve ser o instrumento que ele [o bacharel] tem para formalizar um pensamento, uma conjectura que ele fez e então deve pensar na demonstração, como esse instrumento que ele usa para formalizar e verificar se aquilo que ele pensou sobre certo enunciado realmente funciona. PVII

5.3 ASPECTOS DE APRENDIZAGEM E DE ENSINO

5.3.1 Dificuldades dos Alunos em Relação às Demonstrações

Entre as mais citadas pelos professores, temos tanto a dificuldade de começar ou ter a ideia inicial da demonstração e os erros com a estrutura lógico-formal.

Pode existir uma relação entre "começar a demonstração" e as outras dificuldades citadas, pois se o aluno não consegue identificar os elementos da estrutura lógico-formal, ou se ele não consegue interpretar o enunciado do teorema, ele não conseguirá começar.

A prova por absurdo oferece uma situação particular, uma vez que, mesmo sendo logicamente fundamentada, não é explicativa e direta, ou seja, ela não justifica o resultado demonstrado e, por isso, o aluno pode não ter facilidade ao tentar utilizá-la.

A dificuldade notacional não é exclusiva das demonstrações. Weber (2003) cita estudos em que menos de 10% dos sujeitos avaliados foram bem sucedidos ao fazer a tradução de afirmações matemáticas informais em linguagem de lógica predicativa.

A dificuldade de interpretar o texto de uma proposição é exterior à Matemática, pois é uma dificuldade que o aluno encontra em outra área do saber, mas que reflete diretamente naquela.

Mesmo não sendo questionados diretamente em relação às possíveis causas das dificuldades, os docentes se posicionaram a respeito e, a seguir, expomos as unidades de análise identificadas.

Abaixo seguem as subunidades:

a. “Começar a demonstração”

Segundo os entrevistados, os alunos mostram dificuldades em começar a demonstração, em identificar qual é o ponto de partida, ter a ideia inicial da demonstração e de sua estrutura lógico-formal.

> [A dificuldade] com as demonstrações é identificar de onde ele [o aluno] parte. CIII
> A gente percebe que os alunos têm muitas dificuldades em saber por onde começar. CVI
> Em geral é ter a ideia, saber como começar, aí, é o segredo de tudo. PI
>
> É saber como começar. Às vezes, até não é uma questão de como fazer, mas o que fazer e interpretar aquilo que ele está querendo resolver. PIV
> Muitos alunos me relatam que se eu desse a primeira linha da demonstração conseguiriam muito mais facilmente seguir e completar a demonstração. PV5
> O principal problema é que o aluno não sabe por onde começar. PVI
> Construir o raciocínio que é necessário para a demonstração. PVII

b. Estrutura lógico-formal

Neste caso, pode existir dificuldade em identificar os elementos lógico-estruturais das demonstrações, como a hipótese e a tese, além de ter dificuldades relacionadas às técnicas de demonstração.

> Com as demonstrações é identificar de onde ele parte, quer dizer, tem umas hipóteses que querem levar a um determinado resultado [...], então, eu acho que é ele conseguir enxergar o que ele tem de hipótese e aonde ele quer chegar. CIII
> Um deles é supor que é um exemplo em que o resultado funciona serve como uma demonstração de que o resultado vale sempre; o outro é supor como condição prévia que o resultado funciona e utilizar esta condição para provar que o resultado funciona. CIV
> A gente percebe que os alunos têm muitas dificuldades em saber por onde começar, em saber de fato o que é hipótese, o que é tese, quais são os métodos que ele pode usar, o que caracteriza os métodos e técnicas de demonstração. CVI
> Muitos não têm aquele conceito de onde que eu parto e onde que eu chego; e a demonstração está por aí, existem demonstrações com problemas de condição necessária ou suficiente, por isso que, está muitas vezes envolvido com a lógica, um tipo de lógica que, por mais comum, mais simples que seja, está envolvido. PII
> Às vezes o professor já começa a fazer demonstração por absurdo, é uma demonstração que no início eles falam "ele não demonstrou ele fez um negocio lá que não era". PIII
> Usar a tese na demonstração e fazer casos particulares. PV
>
> Muitos deles provam usando a tese no meio da demonstração, isso é normal, eles não usam a hipótese e acham que chegaram ou eles pulam etapas que não sabem justificar e usam hipóteses inexistentes no enunciado. PVII
>
> Às vezes não consegue usar o raciocínio lógico em que as coisas vão sendo deduzidas umas das outras até chegar à tese. PVII

c. Dificuldades notacionais

O aluno tem dificuldade de escrever e de se expressar matematicamente. Ele tem dificuldade de "traduzir" as notações formais, como símbolos e quantificadores e vice-versa.

> Eles cometem muito erro de escrita, tem dificuldade de expressar o que estão pensando. CVI
> A primeira dificuldade grande é escrever. PIII

> [...] às vezes você dá uma demonstração simples e o cara não consegue, não porque ele não saiba fazer demonstração, mas porque ele não sabe qual é a simbologia a ser usada. PIII

d. Interpretação

Apesar de a interpretação de texto não ser uma área da Matemática, alguns entrevistados acreditam que os alunos podem ter dificuldade com o texto do enunciado ou ainda com interpretação de texto num âmbito mais geral.

> Ele lê uma sentença e não está conseguindo interpretar para saber o que ele tem que demonstrar. PIV

> Várias vezes é falta de ler com clareza o enunciado, o entendimento do enunciado é que é o problema. PVII

e. Abstração

A abstração necessária para o entendimento das demonstrações é uma primeira dificuldade a ser superada.

> Abstração é uma coisa difícil de conseguir, mas é falta de treino, por pura falta de treino, não é porque é uma coisa estratosférica. CI

f. Organização das ideias

O aluno tem dificuldade de organizar e de estruturar o pensamento para construir uma demonstração.

> E, depois, a dificuldade da Matemática em si, como estruturar o pensamento. Às vezes o cara entendeu o resultado, mas ele não consegue estruturar o pensamento na ordem certa. PIII

g. Necessidade da demonstração

Esta dificuldade está relacionada ao pensamento de que certas coisas são óbvias o bastante para não precisar de demonstração.

> Eles também têm a dificuldade de sentir a necessidade de demonstrar aquilo que parece tão verdadeiro. PV

5.3.2 Possíveis Causas Apontadas em Relação às Dificuldades dos Alunos

Muitos professores apontaram que o fato da demonstração ser uma novidade, pois a Matemática do Ensino Médio e Fundamental é basicamente "simbólica e cheia de fórmulas", sem que essas sejam explicadas ou justificadas, é uma das principais causas dos problemas que os alunos encontram com as demonstrações.

Assim como as dificuldades, existem causas citadas que são exteriores à Matemática. Uma delas seria o imediatismo, a forma na qual as pessoas recebem todas as informações prontas e, por essa razão, não têm necessidade de uma reflexão mais profunda sobre o que se está fazendo. De forma semelhante, um professor citou que não somente os meios de comunicação, mas a falta de leitura colabora com as dificuldades em relação às demonstrações.

Um entrevistado apontou que alguns professores não têm "bom senso" na escolha do conteúdo ministrado e insistem em provas que seriam desnecessárias naquele momento, irritando e afastando os alunos das demonstrações. A despeito de sua importância, não há necessidade de se provar tudo.

Talvez a resposta mais inesperada foi a dos professores que citaram a dificuldade inerente e o talento. Nesse caso, a dificuldade é nata, e talvez não haja nada a se fazer a não ser se contentar com a mediocridade.

As subunidades:

a. A demonstração é uma novidade

Essa foi a causa mais apontada pelos professores. Na maior parte porque o aluno não teria tido um contato prévio com as demonstrações no ciclo de Educação Básica e isso causa certo “choque”.

> [...] entender o que é uma demonstração, porque no colégio não tem nada parecido com isso, vai ser uma novidade. Em 90% dos casos, ou mais até, os alunos nunca viram nenhuma demonstração. CI
>
> Porque o aluno em geral chega aqui e, pelo menos no curso de Matemática, não vem com essa formação de demonstrar coisas. [...] o aluno não está habituado à demonstração. CIII
>
> Tudo isso é muito novo para o aluno... Na escola pode ser que seja tratado. CVI
> Em geral, os professores de colégio só dão um bando, um monte de fórmula e um monte de regrinha sem ensinar os alunos a pensar porque que ele está fazendo aquilo; isso que eu acho o jeito totalmente errado de ensinar. PI
> [...] os alunos piravam porque no Ensino Fundamental e Médio não é dada atenção ao que é uma demonstração e como se demonstra. PIII
> Por que os professores do Ensino Fundamental e Médio só fazem Matemática cheia de simbologia? PIII
>
> Por isso muita pessoa tem ojeriza à Matemática. Porque no Ensino Médio, [...] apresenta-se o resultado, se coloca a fórmula e em geral se usa a fórmula e se passa para frente, não se dá uma luz sobre o que está sendo construído, qual é a função da Matemática. PIII

b. Falta de prática

As dificuldades estão relacionadas à falta de treino dos alunos.

> Mas é falta de treino, por pura falta de treino. CI

c. Falta de bom senso do professor

O professor exige provas específicas, que talvez não tivessem tanta necessidade de serem abordadas.

> Também entender a necessidade, se é que há, de provar certas coisas... Tem professor que perde muito tempo com isso e isso irrita barbaramente os alunos, então tem que ter um pouco de bom senso com essas coisas, não fazer das demonstrações uma coisa vazia. CI

d. Imediatismo

Causa externa à Matemática, o imediatismo leva os alunos a não quererem pensar a respeito de certas coisas.

> [...] hoje em dia se tem muito o imediatismo. [...]. Então é o imediatismo, o que leva as pessoas a não pensarem muito a respeito do que se propõe. CII

e. Negligência das teorias de prova

Essa dificuldade está relacionada a uma negligência de áreas da Matemática que são importantes para o aprendizado das demonstrações.

> Existe uma série de áreas dos fundamentos da Matemática negligenciada no ensino superior da Matemática no país: Teoria de Conjuntos, Lógica Matemática, Teoria de Prova, entre outras. Lastimosamente, essa negligência estende-se de forma intransigente a matemáticos formados de maneira bastante restrita no país; matemáticos que unicamente reconhecem áreas como análise, álgebra e geometria como centrais das Ciências Matemáticas. CV

f. O ensino é tradicional

O professor não estimula formas diferenciadas de se trabalhar com as demonstrações e, ao invés disso, mantém uma forma tradicional de abordagem.

> Não há problema algum em iniciar a “vida demonstrativa” através de tentativa e erro. Mas nossos alunos não são estimulados a fazer isso. PVI

g. Falta de leitura e meios de comunicação

Causa externa à Matemática, que seria advinda da falta de leitura e da precariedade das informações adquiridas por meio de meios de comunicação contemporâneos.

> Não sei se é falta de leitura, não sei se são os meios de comunicação, internet, que deixa tudo pronto ali e você não tem que pensar sobre. PIV

h. Dificuldade inerente e talento

Algumas pessoas têm dificuldades inerentes ou não possuem um talento necessário para aprenderem com sucesso as demonstrações.

> Olha, eu vou ser sincera, eu acho que tem gente que tem uma dificuldade muito grande com isso [...].Eu acho que existem dificuldades inerentes, [...] não é todo mundo que serve para fazer tudo. CI
>
> Muitos já têm o talento, tem o gosto pela Matemática. [...] eu considero que uma pessoa que fala "não gosto de demonstração", não é uma pessoa com talento para Matemática. PIII

5.3.3 Superando as Dificuldades

Aqui citamos as tentativas de solução para as dificuldades citadas pelos docentes, uma vez que perguntamos como eles acreditam que tais dificuldades podem ser superadas.

Grande parte dos entrevistados acredita que a prática, o trabalho com a demonstração, independente da dificuldade apresentada, é a melhor forma de se conseguir uma possível superação. A subunidade "prática" é extensa. Ela inclui desde a prática pela prática (mecanicamente), ou um incentivo para que os alunos construam demonstrações sozinhos ou, ainda, a proposta de algo como a "experiência matemática" – em que o aluno vivenciaria uma situação da prática de um matemático profissional procurando a solução de um determinado problema – que foi citada por um professor.

Alguns professores expressaram a importância de ensinar a demonstração explicitando sua estrutura, dando a ideia do que é hipótese, do que é tese, as diferentes técnicas de provas, etc. Um dos docentes mantinha, inclusive, um caderno (para os alunos resolverem os exercícios e entregarem periodicamente ao docente para que ele fizesse a correção) em que os alunos deviam sempre explicitar a tese e a hipótese antes de realizar a demonstração.

Algumas respostas foram pontuais. Por exemplo, um docente que citou que o imediatismo é uma dificuldade no aprendizado das demonstrações, apresentou uma resposta para a superação especificamente desta dificuldade.

Em conversas complementares às entrevistas, muitos dos docentes concordaram que, de forma adaptada e adequada, as demonstrações deveriam ser abordadas no ciclo de Educação Básica.

As subunidades são:

a. Prática

Grande parte dos professores concorda que a melhor forma de superar as dificuldades com as demonstrações é incentivar as práticas demonstrativas.

> [...] eu acho que é treino. É treinar, eu acho que não tem o que fazer. CI
> Acho que exercitando, não tem outra forma. CIII
> Trabalhando com demonstrações frequentemente. [...] só se aprende fazendo, colocando as mãos na massa, errando e acertando. CIV
>
> Só tentando, é que nem ginástica, você só aprende, você só malha se você mesmo malhar. PI
> Com prática, acho que não tem outro jeito, é aprender fazendo mesmo. PIV
> Com exercícios, fazendo demonstrações. PVII
>
> [...] ele [o aluno] teria que trabalhar com aquilo que ele vai amadurecendo no que é uma demonstração no próprio fazer da demonstração. PVII

Alguns professores propuseram práticas específicas:

a.a. Situação de conflito

Colocar o aluno em situação de conflito e explicitar seus erros e suas falhas nesse momento.

> A gente tenta explicar para ele numa situação de conflito [...]. Tentar colocar para o aluno, perante as falhas, o que aquilo pode expressar de errado. CVI

a.b. Exemplos

O professor sugere exemplos do que não deve ser uma demonstração.

> [...] em geral apresento exemplo de frases matemáticas erradas que poderiam ser demonstradas erradamente se fizermos apenas com um exemplo. PV

a.c. Incentivo

Incentivar que os alunos construam as demonstrações sozinhos por meio de uma perspectiva de "tentativa e erro".

> [...] entendo que as dificuldades em fazer demonstrações diminuem com exercícios onde os alunos devem buscar as demonstrações sozinhos, muitos alunos me relatam que se eu desse a primeira linha da demonstração, conseguiriam muito mais facilmente seguir e completar a demonstração. PV
>
> [...] em geometria plana, é relativamente simples imaginar o que deve ser feito, traçando-se algumas retas ou circunferências. É isso mesmo! Não há problema algum em iniciar a "vida demonstrativa" através de tentativa e erro. Mas nossos alunos não são estimulados a fazer isso. PVI

a.d. Experiência Matemática

O professor propõe a ideia de “experiência matemática”, descrita na passagem que segue.

> [...] eu acho que o aluno tem que fazer o que chamamos de experiência matemática. Você dá o problema, o aluno tem que pensar no problema, tem que montar conjecturas do problema e ele tem que provar [...], nesse ir e vir [...] ele vai aprendendo a argumentar e aprende a deduzir. PVII

a.e. Escrita e expressão

Incentivar os alunos a escrever e a expressar-se matematicamente.

> [...] fazendo eles escreverem e contando para eles que a Matemática precisa do Português. PIII

b. Abstração

A superação da dificuldade de abstração faz que o aluno supere outras dificuldades futuras.

> [...] eu acho que tem uma dificuldade grande na abstração, e uma vez superado esse obstáculo primeiro, um aluno que superar esse comecinho e, em frente, consegue superar com muito treino, não tem segredo. CI

c. Leitura

Incentivar a leitura de modo geral.

> [...] eu acho que incentivar mais o hábito da leitura, eu acho que isso ajuda as pessoas a refletirem um pouco mais e a passarem a elaborar um pouco mais os seus raciocínios de dedução. CII

d. Estrutura lógico-formal e teorias de prova

Realizar um ensino de demonstração num metanível, em que sua estrutura é apresentada. O que pode ser feito em disciplinas que abordam teorias de prova.

> [No Cálculo I] ele já começa a ter um pouco dessa questão da demonstração. [...] ele tem um pouquinho dessa noção de lógica, do que é hipótese e do que é tese, como ele faz uma demonstração por contradição. CIII
> [...] a superação é, eu digo que sempre seria em termo não só de ver bem as passagens, muitas vezes é importante que ele esteja lendo as demonstrações. PII
>
> O conhecimento e valoração dos fundamentos da Matemática, expressos em áreas como Lógica Matemática e Teoria de Prova, representou um salto tecnológico para sociedades do primeiro mundo e representa um ponto fraco da Matemática no Brasil. Sem esse domínio da teoria de provas é impossível elevar a produção tecnológica do país aos padrões de qualidade de sociedades nas quais o conhecimento matemático é tomado mais seriamente. CV

e. Demonstrações na Educação Básica

Muitos professores concordam que o fato de as demonstrações não serem abordadas no ciclo de Educação Básica pode ser uma das causas das dificuldades relacionadas dos alunos no Ensino Superior, embora somente um deles tenha pronunciado explicitamente que as demonstrações deveriam ser abordadas na Educação Básica, como forma de superação das dificuldades.

> A partir de certa idade, no final do Ensino Médio, o aluno tem que ter contato com as demonstrações [...], conhecer esse lado da Matemática, para que ele não chegue no Ensino Superior e leve esse choque. CVI

f. Interpretação de texto

A superação das dificuldades poderia vir por meio de um trabalho com interpretação de textos.

> [...] trabalhar essa parte de interpretação de texto [...], o pessoal chega aqui você tem que ensiná-los a ler, não é coisa sofisticada, não é porque eu quero que os alunos sejam cultos... Não! É o básico, é arroz com feijão que está faltando mesmo. PIV

g. Desenvolver o talento

Desenvolver o talento daqueles que já o têm.

> Muitos já têm o talento, tem o gosto pela Matemática. E isso tem que ser desenvolvido. PIII

5.3.4 Abordagens para a Licenciatura e para o Bacharelado

A grande maioria dos professores entrevistados acredita que a abordagem das demonstrações deve ser igual para ambas as habilitações. Seguem suas justificativas:

> Tanto o licenciado quanto o bacharel deveriam ser capazes de explicar e justificar a razão, ou seja, demonstrar de uma maneira bastante clara porque aquele resultado vale. CII
> Eu vejo assim, não só para o bacharelado, mas mesmo até para a licenciatura, as demonstrações acabam permitindo o aluno a utilizar coisas que até então ele não saberia onde ele iria utilizar. CIII
> Não deve existir nenhuma diferença entre o conhecimento de teoria de demonstrações (teoria de prova) entre um licenciado e um bacharel em Matemática. Ambos deverão, como profissionais, realizar esforços para disseminar de maneira concreta o conhecimento matemático. CV
> [O licenciado] tem que saber tanto quanto o bacharel de demonstração, que tudo tem que ser demonstrado, a mesma coisa. Se ele vai ensinar Matemática, ele tem que saber isso. PI

> Tem que aprender a pensar em Matemática vislumbrando um futuro com Matemática, para pesquisa ou docência em Ensino Médio ou Ensino Fundamental, isso é indiferente. PIV
>
> Para mim, bacharelado ou licenciatura devem ter o mesmo curso do ponto de vista matemático. Se um professor sabe o porquê de um resultado poderá lecionar este conteúdo com muito mais segurança neste sentido acredito que as disciplinas lecionadas para licenciatura devem ter o mesmo cuidado que para o bacharelado. PV
> Eu acho que é necessário que eles tenham esse trabalho com demonstração da mesma maneira, tanto na licenciatura quanto no bacharelado. PVII

Alguns professores concordam que a abordagem para a licenciatura pode ser menos rígida do que num curso de bacharelado.

> Eu acho que o licenciado não precisa dominar tanto a arte de saber manipular as demonstrações. Ele tem que saber que o papel é importante, tem que saber fazer algumas, mas não precisa ser um mestre nessa arte. E o bacharel precisa. CI
> Agora, quando é para o licenciando do noturno obviamente a cobrança é um pouco menor, a gente foge de algumas demonstrações mais complicadas. PII
> Com relação às questões matemáticas e às diferenças entre licenciatura e bacharelado eu poderia ser um pouco mais específico citando o exemplo da UnB. Ambos os alunos fazem o mesmo curso de Análise na reta, o que parece um erro grave. O ideal seria um curso de Análise simples, talvez até suprimindo a parte de Integral, ou fazendo essa parte somente para funções contínuas. Esse curso deveria ser feito por todos os alunos. Em seguida, os candidatos a bacharel poderiam fazer outros cursos mais avançados, tendo em vista suas perspectivas de pesquisa futura. Isso permitiria fazer um curso honesto, sem pretensões de entender todas as minúcias das questões de integrabilidade, por exemplo. PVI

Uma vez que as demonstrações têm valor alto para os docentes entrevistados, não é surpresa que grande parte deles acredite que a abordagem para as duas habilitações deva ser a mesma. Talvez, com uma cobrança menor ou uma diminuição no conteúdo. Mas, de forma alguma excluindo a demonstração da licenciatura.

5.4 De que Forma um Debate Histórico-Filosófico pode Ajudar a Superar as Dificuldades em Demonstrar?

A grande atenção vertida sobre o tema "prova matemática", principalmente em pesquisas internacionais, indica que os alunos apresentam dificuldades no aprendizado de demonstração. No Brasil não é diferente, todos os professores reportaram dificuldades que eles notam nos alunos quando estes tentam construir demonstrações.

O número de pesquisas e a metainvestigação de Balacheff (2004; 2008) também mostram que não existe uma solução que seja uma panaceia e que, ainda, não existe uma epistemologia consensual dos pesquisadores que investigam especificamente essa questão.

Se não podemos dizer que existe uma resposta final para os problemas de aprendizagem das demonstrações, podemos, pelo menos, dizer que existem possíveis formas de tornar o ensino mais satisfatório. Como vimos no capítulo 4, existem diversas formas de olhar o mesmo problema, seja focando aspectos cognitivos ou epistemológicos, ou as diferentes funções das provas, ou o papel de *softwares* dinâmicos, etc. Citamos algumas pesquisas cujo foco era o Ensino Superior.

Hemmi (2008) aponta para a condição de transparência, em que deve existir um equilíbrio no ensino de acordo com a "quantidade" de foco que deve ser dado sobre os diferentes aspectos da prova. Ela denomina esse equilíbrio de condição de transparência.

Weber (2003), que reuniu em seu artigo as principais dificuldades apontadas em diversas pesquisas, entre elas, a noção de prova que o aluno tem, o desenvolvimento cognitivo inadequado, dificuldades notacionais e normas sociomatemáticas, propõe algumas possíveis soluções. Dentre as propostas, encontram-se métodos pragmáticos e algorítmicos de ensino, o debate científico já descrito acima e a inclusão das provas no Ensino Médio (no caso, a pesquisa foi realizada nos Estados Unidos da América).

Harel e Sowder (1998) concluíram também que as provas não deveriam ser uma novidade no Ensino Superior. Eles afirmam que anos de ensino focado nos resultados matemáticos, a despeito das razões subjacentes ao resultado, podem deixar a impressão que somente os resultados são importantes na Matemática e, além disso, sugerem que uma disciplina com tópicos metamatemáticos pode ser importante na formação do matemático.

Como isso pode ser feito? Das mais variadas abordagens possíveis, defendemos que um debate histórico-filosófico pode ajudar para a realização de um ensino mais explícito das demonstrações. A seguir damos um exemplo de como isso poderia ser feito.

Muitos professores comentaram a respeito da dificuldade em “começar a demonstração”. Como já dito, essa dificuldade pode estar relacionada às outras. Tomamos como hipótese que, por exemplo, se o aluno tem dificuldade em relação à estrutura lógico-formal, ele pode não conseguir identificar a hipótese e por isso não começaria a demonstração. Se o aluno não consegue interpretar o enunciado do teorema, quer seja pela notação matemática ou pela língua vernácula, ele pode não conseguir começar. E assim por diante.

De que forma um debate histórico-filosófico poderia, então, ajudar a superar tais dificuldades? Em primeiro lugar, a história das demonstrações justifica o que é uma demonstração *hoje* por meio do que ela foi no *passado*. E, além disso, por meio de uma reconstrução histórica, podemos entender as razões que levam a Matemática ser o que é hoje, uma Ciência demonstrativa.

Pensamos que a História da Matemática responde a pergunta “Por que demonstração?” e a Filosofia da Matemática busca respostas para a questão “O que é demonstração?”

Vimos que não existe uma resposta final para essa última pergunta e que podemos interpretá-la por meio de diversas vertentes. A demonstração pode significar coisas diferentes de acordo com o contexto: um matemático pode reportar-se à sua prática, um filósofo pode fazer atribuições à lógica e um sociólogo pode responder por meio da cultura daqueles que a praticam.

Dessa forma, debates, contextos, leituras, problematizações e reconstruções histórico-filosóficas podem justificar as demonstrações sob os seus mais diversos aspectos, como o lógico-estrutural, o retórico, o teórico- metodológico e, ainda, são soluções plausíveis para dificuldades citadas pelos docentes, como o imediatismo, pois levariam os alunos a pensar acerca das demonstrações, o ensino tradicional, a falta de leitura e, ainda, estimularia o desenvolvimento de possíveis talentos para a Matemática.

Em um curso de bacharelado em Matemática, poderia haver o primeiro contato do aluno com as demonstrações no Ensino Superior a partir de uma introdução dos aspectos lógico-estruturais da demonstração, podendo caber aqui, as reconstruções histórico-filosóficas que são capazes de enriquecer a experiência escolar da prática demonstrativa.

Em outra etapa futura em que o aluno tenha adquirido um amadurecimento conceitual e uma visão mais abrangente e crítica da Matemática, haveria uma aproximação com a Filosofia da Matemática, que fosse responsável por apresentar, possibilitar e problematizar debates histórico-filosóficos sobre a Matemática, incluindo uma atenção especial às demonstrações, devido a sua importância.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

> Eu sei de muito pouco. Mas tenho a meu favor tudo o que não sei e – por ser um campo virgem – está livre de preconceitos. Tudo o que não sei é a minha parte maior e melhor: é a minha largueza. É com ela que eu compreenderia tudo. Tudo o que não sei é que constitui a minha verdade. (*A descoberta do mundo*, Clarice Lispetor).

Iniciamos o trabalho com a pergunta “(Como) Seria possível um ensino mais explícito das demonstrações a partir de um debate histórico- filosófico?”, porém, no decorrer da pesquisa, por meio dos dados das entrevistas que se consubstanciaram, a pergunta central – assim como o objetivo principal –, se transformou em “Qual o papel das demonstrações na formação do Bacharel em Matemática?” e, ainda, mais especificamente, discutimos qual é a importância de um estudo histórico-filosófico acerca desse papel.

No decorrer do texto oferecemos diversos elementos que trazem à tona um debate histórico-filosófico das demonstrações e possibilitam propostas de abordagens de tal natureza, como, por exemplo, a origem das demonstrações que esboça a necessidade desta no corpo da Matemática.

Essa pesquisa indica a importância de um debate histórico-filosófico que enriqueça o ensino das demonstrações e, ainda, uma (re)significação das provas num nível mais abrangente, que vá além dos cursos de Licenciatura e da Educação Básica, como propôs Pietropaolo (2005), alcançando também os cursos de Bacharelado e os cursos nos quais sua relevância seja identificada.

A partir da reconstrução histórica do tema, podemos notar que existem dois momentos históricos importantes que condicionaram o curso de toda a Matemática e que sobremaneira justificam o atual estado dessa Ciência. Estes dois momentos são: (i) a origem e o surgimento da organização e estruturação hipotético-dedutiva na Grécia Antiga e (ii) a reintrodução da prova, e por conseguinte o valor primário dessa no corpo da Matemática, no momento que cobre o movimento de rigorização da Análise até a Crise dos Fundamentos, na passagem do século XIX para o século XX.

A origem demarca uma mudança radical no modo de pensar e de comunicar o conhecimento matemático numa sociedade que colocara a razão num lugar central, de forma que o surgimento tenha sido uma evolução natural da Matemática ou devido ao cenário intelectual e político característico da sociedade grega.

E, finalmente, com a busca do rigor que pudesse suster os fundamentos da Matemática, a prova passa a ter um papel primário no desenvolvimento dessa Ciência: o movimento de aritmetização da Análise, a criação das Geometrias não-euclidianas, a crise dos fundamentos, os teoremas de Gödel e o desenvolvimento da Lógica e dos sistemas formais foram as principais causas.

No capítulo com o aporte filosófico, vimos alguns significados e papéis atribuídos às demonstrações em diversos âmbitos, desde a Matemática em si até a Educação Matemática.

Vimos que uma pesquisa internacional apontou que não existe consenso entre os pesquisadores que se debruçam sobre o tema na Educação Matemática, e fazemos de sua sugestão a nossa: há necessidade de um maior número de estudos relacionados ao tema no Brasil, que a partir de pesquisas realizadas sejam buscados léxicos comuns aos envolvidos com o ensino e com a aprendizagem das demonstrações e que, caso não seja possível, as diferenças possam se tornar objetos de investigação.

É natural que para isso mais pesquisas sejam realizadas no Brasil, tanto em se tratando da questão das demonstrações, quanto da formação do bacharel em Matemática, sob os mais diversos aspectos possíveis – que não são poucos.

Vale ressaltar que, apesar de existirem muitos resultados positivos, um enfoque histórico-filosófico não é *a* panaceia (muito menos o Santo Graal da Educação), mas sim um enfoque possível, o enfoque que escolhemos e que, *ex aequo*, tem seu lugar entre as mais diferentes vertentes que ocupam o núcleo das pesquisas em Educação Matemática.

Entrevistamos 13 professores, dos quais 6 estavam envolvidos diretamente com a coordenação do curso no momento das conversas. A análise das respostas se deu por meio de técnicas de análise textual e também por meio de um filtro teórico adquirido com as investigações históricas e filosóficas.

Das respostas, sob um olhar quantitativo de frequência relativa, pudemos concluir, dentre outras coisas, que as demonstrações têm um papel essencial para a Matemática, de que a perspectiva lógico-formal é a mais comum, que "começar a demonstração" é um problema para os alunos tão quanto a questão lógico-estrutural das demonstrações e que a melhor forma de superação é a prática.

Essa epistemologia influencia diretamente não somente nas aulas ministradas, mas também na preparação das políticas pedagógico-curriculares de instituições que são tidas como modelo no país. Mesmo as duas instituições que não oferecem cursos de pós-graduação em Matemática Pura, avaliados como excelentes pela Capes, as respostas foram semelhantes.

Segundo os sujeitos entrevistados, a abordagem da demonstração é realizada por meio da prática, mesmo quando os alunos passam por disciplinas em que a demonstração *per se* é, também, burocraticamente, uma ementa.

De um lado, a prática garante um meio de aculturação, de outro, um ensino explícito, num metanível, garante um entendimento estrutural das demonstrações. Como vimos, Hemmi (2008) defende que deve haver um equilíbrio para um efetivo aprendizado, focando, majoritariamente, na questão da transparência.

O nosso foco é o ensino mais explícito, num metanível, em que a demonstração deva ser ensinada por seus significados, objetivos e papéis nos âmbitos teórico-conceituais e culturais. Uma forma de alcançar tal objetivo é realizar uma abordagem histórico-filosófica.

Exemplificamos no final do capítulo anterior possíveis contribuições que os debates, as problematizações e as reconstruções em um contexto da História e da Filosofia da Matemática podem exercer na superação de algumas dificuldades que os alunos mostram em relação às demonstrações.

O objetivo não era apresentar uma abordagem possível, mas sim apresentar elementos que possibilitassem propostas de tais abordagens. Esses elementos históricos, filosóficos e pedagógicos caracterizam, justificam e explicitam de forma estrutural, conceitual, epistemológica, cultural e educacional a importância da demonstração e da matemática demonstrativa.

A partir desta pesquisa, nossa sugestão é que isso seja feito em pelo menos dois momentos no curso de bacharelado em Matemática: em uma disciplina – por exemplo ‘Lógica Matemática’ – no começo do curso que apresente as demonstrações estrutural e lógico-epistemologicamente e, em outra disciplina, a apresentação das demonstrações, realizada por meio de abordagens com enfoques históricos, filosóficos e culturais, em uma disciplina de História e Filosofia da Matemática.

Dessa forma, um bacharel teria a possibilidade de compreender mais aprofundadamente a Ciência que se estuda, possivelmente tornando-se capaz de realizar um exame crítico e analítico.

A história das demonstrações, os aspectos filosóficos e as falas dos docentes nos trazem um contexto deveras rico. As possíveis combinações e escolhas permitem uma frutuosidade de pesquisas que possam surgir dessa.

Reiteramos a importância dessa pesquisa pois, a despeito do cenário de pesquisas internacionais acerca das demonstrações, pouco é debatido sobre esse tema e sobre a formação inicial do Bacharel em Matemática no Brasil.

A pesquisa aqui apresentada não se encerra. Há muito o que ser feito e muitas formas de se fazer. Encerramos uma etapa e deixamos a sugestão de um possível estudo futuro que investigue, aplique e analise a construção de uma abordagem histórico-filosófica das demonstrações num curso de bacharelado em Matemática.

REFERÊNCIAS

ALIBERT, D., THOMAS, M., Research on mathematical proof. In: Tall, D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer: The Netherlands, 1991, p. 215-230.

ANTONINI, S., MARIOTTI, M.A., Indirect Proof: What is Specific to this Way of Proving? *ZDM Mathematics Education*, 2008, v.40:401–412.

ARSAC, G., L'Origine de la Démonstration: Essai d'Épistemologie Didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 8, n. 3, 1987.

ARSAC, G., Origin of Mathematical Proof: History and Epistemology. In: Boero, P. (org.) *Theorems in School: from History, Epistemology and Cognition to classroom practice*, Rotterdam: Sense Publishers, 2007, p. 27-42.

ARZARELLO, F., The proof in the 20th century: from Hilbert to automatic theorem proving. In: Boero, P. (org.) *Theorems in School: from History, Epistemology and Cognition to classroom practice*, Rotterdam: Sense Publishers, 2007, p.43-64.

AVIGAD, J., Mathematical Method and Proof. Synthese, 153(1), p. 105-159, 2006.

BALACHEFF, N., *The Researcher Epistemology: a Deadlock for Educational Research on Proof*, 2004. Disponível em: <http://140.122.140.4/~cyc/_private/mathedu/me1/me1_2002_1/balacheff.doc>. Acessado em 20 de Novembro de 2007.

BALACHEFF, N., The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM Mathematics Education*, 2008, v.40:501–512.

BALACHEFF, N., Processus de Preuve et Situations de Validation, *Educational Studies in Mathematics*, n. 18, 1987.

BARBOSA, J.L. et al. *Panorama dos recursos humanos em Matemática no Brasil: Premência de Crescer*. Rio de Janeiro-RJ: SBM/IMPA, 2001.

BARDIN, L., *Análise de Conteúdo*. Trad, por Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 1997.

BATISTA, I. L.. Reconstruções histórico-filosóficas e a pesquisa em Educação Científica e Matemática. In: Nardi, R. (org.). *A pesquisa em Ensino de Ciências no Brasil: alguns recortes*. São Paulo: Escrituras, v. 1, p. 257-272, 2007.

BICUDO, I., Demonstração em Matemática. *Bolema*, ano 15, n. 18: 79-90, 2002.

BICUDO, M.A.V., GARNICA, A.V.M., *Filosofia da Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

BOGDAN, R., BIKLEN, S., *Investigação Qualitativa em Educação: uma Introdução à Teoria e aos Métodos*. Portugal: Porto Editora, 1991.

BOUVIER, A., GEORGE, M., Dicionario de Matematicas, trad. por Mauro Armiñi e Vicente Bordoy, Akal editor: Madrid, 1984.

BOYER, C.B., *História da Matemática*. Trad. Por Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgar Blücher, 1974.

BRASIL, CNE. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura.* Conselho Nacional de Educação - Câmara de Educação Básica parecer nº: 1302/2001.

BRASIL, CNE. Resolução CNE/CES 3, de 18 de Fevereiro de 2003. Estabelece as Diretrizes Curriculares para os Cursos de Matemática.

BURTON, L., MORGAN, C., Mathematicians Writing. Journal for Research in Mathematics Education, 31(4), p. 429-452, 2000.

CHAMBADAL, L., *Dictionnaire des Mathématiques Modernes*, Paris: Librarie Larousse, 1969.

CLÍMACO, H.A., *Prova e Explicação em Bernard Bolzano*. (Dissertação de Mestrado). Cuiabá: UFMT-IE, 2007.

CYRINO, M.C.C.T., Licenciaturas em Matemática: avanços, desafios e perspectivas. In: Assis Chateaubriand, SBEM-PR, *Documento final do II FELIMAT – II Fórum Estadual* *de Cursos de Licenciatura em Matemática do Paraná*. Londrina, 2007.

D'AMBROSIO, U., Tendências Historiográficas na História da Ciência. In: Alfonso-Goldfarb, A.M., Beltran, M.H.R. (Org.), *Escrevendo a História da Ciência: tendências, propostas e discussões historiográficas*. São Paulo: EDUC/Livraria Editora da Física, p.165-200, 2004.

DA SILVA, J.J., A Demonstração Matemática da Perspectiva Lógica Matemática. *Bolema*, ano 15, n. 18: 68-78, 2002.

DA SILVA. J.J., Filosofia da Matemática e Filosofia da Educação Matemática. In: Bicudo, M.A.V. (Org.), *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

DA SILVA, J.J., *Filosofias da Matemática*, São Paulo: Editora UNESP, 2007. DAVIS, P.J., When is a Problem Solved? *The Philosophy of Mathematics Education Journal*, Exeter, n. 19, 2006. Disponível em: <http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/ >. Acesso em 19 de setembro de 2007.

DAVIS, P., HERSH, R., *A Experiência Matemática*. Trad. por João B. Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DAWSON, J.W.Jr., Why Do Mathematicians Re-prove Theorems? *Philosophia Mathematica*, v.14, n.3, 269-286, 2006.

DOMINGUES, H. H., A Demonstração ao Longo dos Séculos, *Bolema*, Ano 15, n.18: 55-67, 2002.

ERNEST, P., Nominalism and Conventionalism in Social Constructivism. *The Philosophy of Mathematics Education Journal*, Exeter, n. 19, 2006. Disponível em: <http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/ >. Acesso em 19 de setembro de 2007.

ERNEST, P., *The Philosophy of Mathematics Education. London*, New York, Philadelphia: The Falmer Press 1991.

EVES, H., *Introdução à História da Matemática*. Trad. por Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

GARNICA, A.V.M.G., *Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática*. (Tese de Doutorado) Rio Claro: Unesp, 1995.

GARNICA, A.V.M.G., Algumas Notas Sobre Pesquisa Qualitativa e Fenomenologia, *Interface – Comunicação, Saúde e Educação*, n.1, vol. 1, 1997.

GARNICA, A.V.M.G., As Demonstrações em Educação Matemática: um Ensaio. *Bolema*, Ano 15, n.18: 91-122, 2002.

GODINO, J.D., RECIO, A.M., *Meaning of proofs in Mathematics education*, 1997. Disponível em < http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Godino/Godino97.html>. Acessado em 8 de Agosto de 2008.

HANNA, G., The ongoing value of proof. In: Boero, P. (org.) *Theorems in School: from History, Epistemology and Cognition to classroom practice*, Rotterdam: Sense Publishers, p. 3-16, 2007.

HANNA, G., BARBEAU, E., Proofs as bearers of Mathematical Knowledge. *ZDM Mathematics Education*, v.40, p. 345-353, 2008.

HANNA, G., DE VILLIERS, M., ICMI study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, v. 40, n. 2, 2008.

HAREL, G., SOWDER, L., Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. In: Schonfeld, A., Kaput, J., Dubinsky, E. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III. Issues in Mathematics Education, Vol. 7*. American Mathematical Society, New York. p. 234-282, 1998.

HAYASHI, T., Indian Mathematics. In: Grattan-Guinness, I., (ed.) *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences* v.1. London: Routledge, p. 118-130, 1994.

HEALY, L., HOYLES, C., *Justifying and proving in school mathematics. Summary of the results from a survey of the proof conceptions of students in the UK*. Research Report Mathematical Sciences, Institute of Education, University of London, 1998.

HEMMI, K., *Approaching proof in a Community of Mathematical Practice*. Doctoral Thesis (Monograph). Department of Mathematics, Stockholm University, Stockholm, 2006. Disponível em <http://www.diva-portal.org/diva/getDocument?urn_nbn_se_su_diva-1217-2 fulltext.pdf> acessado em 10 de Agosto de 2008.

HEMMI, K., Students' encounter with proof: the condition of Transparency. *ZDM Mathematics Education*. V.40, n.3, p.413-426, 2008.

HERSH, R., *What is Mathematics, Really?* Oxford: Oxford University Press, 1997.

HOGENDIJK, J.P., Pure Mathematics in Islamic Civilization. In: Grattan-Guinness, I., (ed.) *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences* v.1. London: Routledge, p. 70-9, 1994.

HOUAISS, A., *Dicionário Houaiss Da Língua Portuguesa Online*: <http://houaiss.uol.com.br/gramatica.jhtm>

HORGAN, J., The Death of Proof. *Scientific American*, 269, n. 4., 1993.

KATZ, V.J., *A History of Mathematics: an Introduction*. 2nd Edition. Massachussetts, Addison Wesley Longman, 1998.

KLINE, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York, Oxford: Oxford Univesity Press, 1972.

KRAGH, H., *Introdução à Historiografia da Ciência*. Trad. por Carlos G. Babo. Portugal: Porto Editora, 1987.

LALANDE, A., *Vocabulário Técnico e Crítico da Filosofia*. Trad. por Fátima Sá Carneiro, Maria E. de Aguiar, José E. Torres e Maria G. de Souza. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

LAKATOS, I. *A Lógica do Descobrimento Matemático: Provas e Refutações*. Trad. por Nathanael C. Caixeiro, Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

LIMA, E.L., *Análise Real: Volume 1*. Sexta Edição. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária – IMPA, 2002.

LIVINGSTONE, E., Cultures of Proving. *Social Studies of Science*, 29/6, 1999.

LONDRINA, SBEM-PR, *Documento final do I FELIMAT – I Fórum Estadual de Cursos de Licenciatura em Matemática do Paraná*. Londrina, 2002.

LOSEE, J., *Introdução histórica à Filosofia da Ciência*. Trad. por Borisas Cimbleris. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1979.

LÜDKE, M., ANDRÉ, M.E.D.A., *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: E.P.U., 1986.

MARIOTTI, M.A., BALACHEFF, N., Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. *ZDM Mathematics Education*. v.40, n.3, 341-344. 2008.

MARTINS, L.A-C.P., História da Ciência: Objetos, métodos e problemas. *Ciência & Educação*, v.11, n.2, 2005.

MATTHEWS, M.R., História, Filosofia e Ensino de Ciências: a Tendência Atual de Reaproximação. Trad. por Claudia Mesquita de Andrade. *Caderno Catarinense de Ensino de Física*. v.12, n.3, 164-214, 1995.

MOLLAND, A.G., The Philosophical context of Medieval and Renaissance Mathematics. In: Grattan-Guinness, I., (ed.) *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences* v.1. London: Routledge, p.281-6, 1994.

MORAES, R., GALIAZZI, M.C., *Análise Textual Discursiva*. Ijuí: Ed. Unijuí, 2007.

NETO, F.D.M., Diretrizes Curriculares para o Bacharelado em Matemática. *Boletim da SBMAC*, n.2, 1998.

PIETROPAOLO, R.C., *Demonstrações e Educação Matemática - uma análise de pesquisas existentes*. III Seminário Interancional de Pesquisa em Educação Matemática. Curitiba : Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2006.

PIETROPAOLO, R.C., *(Re)significar a Demonstração nos Currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática*. Tese de Doutorado, São Paulo: PUC-SP, 2005.

PLATÃO, *A República*. Trad. por Enrico Corvisieri. Rio de Janeiro: Editora Best Seller, 2002.

PONTE, J. P., BOAVIDA, A., GRAÇA, M. ABRANTES, P. *Didáctica da Matemática*. DES do ME. Lisboa, 1997.

RAV, Y., Why Do We Prove Theorems? *Philosophia Mathematica*, v.7, n.3, 1999.

REIS, F.S., *A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: a Visão de Professores-pesquisadores e Autores de Livros Didáticos*. Tese de Doutorado. Campinas: Unicamp, 2001.

RUSSEL, B.A.W., *Introdução à Filosofia Matemática*. Trad. por Giasone Rebuá. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1974.

SILVA, C.M.S., Formação de Professores e Pesquisadores de Matemática na Faculdade Nacional de Filosofia. *Cadernos de Pesquisa*, n.117, 103-126, 2002.

SIU, M.K., Proof as a practice of mathematical pursuit in a cultural, socio-political and intellectual context. *ZDM Mathematics Education*. V.40, n.3, 355-361, 2008.

TARSKI, A., Truth and Proof, *Scientific American*, 220, 1969.

VERNANT, J-P., *As Origens do Pensamento Grego*. Trad. por Ísis B. B. da Fonseca. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2004.

WAGNER, P., *Qu'est-ce que La Théorie des Modèles?* In: Nouvel, P. (dir.), *Enquête sur le concept de modèle*, Paris : P.U.F., p. 7-28, 2002.

WEBER, K., Students' Difficulties with Proof. *The Mathematical Association of America: Research Sampler*, 2003. Disponível em: <http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_8.html> acessado em 17 de Junho de 2008.

WEBER, K., How Mathematicians Determine if an Argument is a Valid Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*. V.37, n.4, 2008.

ANEXOS

ANEXOS – Para consultar os anexos, favor entrar em contato com o autor: thiagonagafuchi@yahoo.com.br