



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

RENATO FRANCISCO MERLI

**MODELOS CLÁSSICO E FUZZY NA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA:
UM OLHAR SOBRE O USO DA LINGUAGEM**

Londrina
2012

RENATO FRANCISCO MERLI

**MODELOS CLÁSSICO E FUZZY NA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA:
UM OLHAR SOBRE O USO DA LINGUAGEM**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Prof.^a Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2012

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da
Universidade Estadual de Londrina**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

M565m Merli, Renato Francisco.
Modelos clássico e fuzzy na educação matemática : um olhar sobre o uso da
linguagem / Renato Francisco Merli. – Londrina, 2012.
154 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) –
Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-
Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2012.
Inclui bibliografia.

1. Educação matemática – Teses. 2. Linguagem e lógica – Teses. 3. Modelos
matemáticos – Teses. 4. Lógica difusa – Teses. I. Almeida, Lourdes Maria Werle
de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de
Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

RENATO FRANCISCO MERLI

**MODELOS CLÁSSICO E FUZZY NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA:
UM OLHAR SOBRE O USO DA LINGUAGEM**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Prof.^a Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
UEL – Londrina - PR

Prof.^a Dra. Denise Silva Vilela
UFSCAR – São Carlos - SP

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi
UFABC – Santo André - SP

Londrina, 14 de dezembro de 2012.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Lauro Merli e Rosilene Maria Merli, por me ensinarem o valor do respeito, do amor, do carinho e acima de tudo da perseverança.

Às minhas irmãs, Milena Venâncio Merli e Rafaela Cristine Merli, por serem os meus 'xodós', no meio das alegrias e tristezas, sempre foram e sempre serão minhas 'irmãzinhas' (e isso serve literalmente para a Rafaela), meus mimos.

À minha esposa, Ana Cláudia de Oliveira Guizelini Merli, sem ela, este trabalho não teria acontecido. Meu exemplo de dedicação incondicional, compreensão, companheirismo e amor. Um exemplo de paciência.

Aos meus familiares, que ainda se fazem presente, e aos que já se foram, muito obrigado por mostrar a alegria nas conversas, nas anedotas e nos 'causos' do passado, além de entender minhas ausências nas festas de domingo.

À professora Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida, principalmente pela confiança depositada em mim, pela disposição, dedicação e paciência, obrigado por compartilhar seu conhecimento e sua competência, minha fonte de inspiração profissional.

Aos professores Doutores Rodney Carlos Bassanezi e Denise Silva Vilela, pelas sugestões e críticas que muito contribuíram para o aprimoramento deste trabalho.

Aos amigos do Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT), nesse período estudamos, discutimos e aprendemos. Obrigado, Adriana, Ângela, Bárbara, Camila, Emerson, Heloísa, Karina, Michele e Rodolfo.

Aos professores e colegas do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, obrigado por suas contribuições.

Aos colegas de trabalho e alunos da FAP, FECEA e Colégio SESI, obrigado pela compreensão e pelos incentivos a continuar.

À Funpesq, que neste último ano me concedeu uma bolsa de estudos.

Enfim, muito obrigado a todos que de uma maneira ou de outra ajudaram a tornar este trabalho realidade.

MERLI, Renato Francisco. **Modelos clássico e fuzzy na educação matemática: um olhar sobre o uso da linguagem.** 2012. 154f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

RESUMO

Neste trabalho fazemos uma investigação sobre o uso da linguagem em modelos clássicos e em modelos fuzzy, pautados em procedimentos de caráter interpretativo considerando aspectos de uma pesquisa qualitativa. O estudo está fundamentado nos pressupostos teóricos da Modelagem Matemática, da Matemática Fuzzy e em trabalhos sobre Filosofia da Linguagem de Ludwig Wittgenstein. Com o intuito de procurar relações entre as diferentes linguagens (clássica e fuzzy) utilizadas na construção de um modelo matemático, procuramos identificar algumas aproximações entre os modelos, investigar o papel da linguagem no desenvolvimento dos mesmos. Desenvolvemos seis atividades de modelagem diferentes, modeladas pelo autor ou constando em bibliografia já existente, com a finalidade de buscar aproximações nos diferentes modelos produzidos. Identificamos diferentes ‘jogos de linguagem’, além de encontrarmos ‘semelhanças de família’ entre esses modelos, o que nos permite inferir que a matemática fuzzy pode representar diferentes modos de ver de uma situação-problema.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Filosofia da Linguagem. Wittgenstein. jogos de linguagem. Lógica Fuzzy.

MERLI, Renato Francisco. **Classic and fuzzy models in mathematics education: a look at the use of language.** 2012. 154f. Dissertation (Master in Teaching Science and Mathematics Education) - University of Londrina, Londrina, 2012.

ABSTRACT

In this paper we make an investigation into the use of language in classic models and fuzzy models, guided nature interpretive procedures in considering aspects of qualitative research. The study is based on the theoretical principles of Mathematical Modeling, Fuzzy Mathematics and Philosophy of Language work on Ludwig Wittgenstein. In order to find relationships between different languages (classic and fuzzy) used in the construction of a mathematical model, we sought to identify some links between the models, to investigate the role of language in their development. We develop six different modeling activities, modeled by the author or consisting in existing literature, in order to pursue approaches in different models produced. We identify different 'language games', and find 'family resemblances' between these models, which allows us to infer that the fuzzy mathematics can represent different ways of seeing a problem situation.

Keywords: Mathematical Modeling. Philosophy of Language. Wittgenstein. Language Games. Fuzzy Logic.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Modelo Geocêntrico	21
Figura 2 - Etapas do Processo de Modelagem.....	27
Figura 3 - Régua de Cores	44
Figura 4 - Conjunto Crisp e Conjunto Fuzzy	51
Figura 5 - Gorjeta x Qualidade do Serviço.....	54
Figura 6 - Conjuntos Fuzzy A e B	55
Figura 7 - União dos Conjuntos Fuzzy A e B	56
Figura 8 - Intersecção dos Conjuntos Fuzzy A e B.....	56
Figura 9 - Complementar do Conjunto Fuzzy A.....	57
Figura 10 - Função de Pertinência dos Jovens e dos Idosos	58
Figura 11 - ∞ nível	60
Figura 12 - Função de Pertinência 'em torno de' 7 horas	63
Figura 13 - Número Fuzzy Trapezoidal.....	64
Figura 14 - Número Fuzzy em Forma de Sino.....	65
Figura 15 - Função de Pertinência 'por volta da' Meia Idade.....	74
Figura 16 - Função de Pertinência 'abaixo da' Meia Idade.....	75
Figura 17 - Função de Pertinência 'muito' Alto	75
Figura 18 - Controlador Fuzzy	77
Figura 19 - Regras de Controle Pressão e Temperatura.....	78
Figura 20 - Esquema de um Controlador Fuzzy	80
Figura 21 - Método do Centro de Gravidade	83
Figura 22 - Método do Centro de Máximos.....	84
Figura 23 - Modelo de Crescimento Populacional	89
Figura 24 - Funções de Pertinência do Modelo Populacional Fuzzy	92
Figura 25 - Modelo de Crescimento Fuzzy	93
Figura 26 - Percentual de Adultos Sozinhos.....	94
Figura 27 - Representação do Ajuste Quadrático.....	95
Figura 28 - Funções de Pertinência da Variável Idade	97
Figura 29 - Funções de Pertinência da Variável Possibilidade de Estar Sozinha.....	98
Figura 30 - Base de Regras – Possibilidade de Estar Sozinha.....	99
Figura 31 - Módulo de Mamdani – Possibilidade de Estar Sozinha.....	99
Figura 32 - Modelo Fuzzy da Possibilidade de Estar Sozinha	100

Figura 33 - Funções de Pertinência Triangulares da Variável Idade	101
Figura 34 - Funções de Pertinência Triangulares Possibilidade de Estar Sozinha.	101
Figura 35 - Funções de Pertinência da Variável Peso	107
Figura 36 - Funções de Pertinência da Variável Altura.....	108
Figura 37 - Funções de Pertinência da Variável Idade	109
Figura 38 - Funções de Pertinência da Variável IMC.....	110
Figura 39 - Base de Regras – IMC	112
Figura 40 - Módulo de Mamdani - IMC	114
Figura 41 - Graus de Pertinência - Idade 32 Anos.....	114
Figura 42 - Gráfico de Dispersão: Altura x Idade.....	116
Figura 43 - Funções de Pertinência da Variável Distância	121
Figura 44 - Funções de Pertinência da Variável Número de Acidentes.....	122
Figura 45 - Gráfico Número de Acidentes x Distância	123
Figura 46 - Gráfico Número de Acidentes x Distância (Clássico)	124
Figura 47 - Número de Acidentes	125
Figura 48 - Funções de Pertinência da Variável Avaliação.....	129
Figura 49 - Gráfico do Aproveitamento Final	132
Figura 50 - Número Médio de Indivíduos - Clássico e Fuzzy.....	137
Figura 51 - Análise das Figuras 23 e 25	140
Figura 52 - Análise das Figuras 27 e 32	141
Figura 53 - Análise das Figuras 45, 46 e 47	143
Figura 54 - Análise da Figura 50 e da Tabela 16.....	144

LISTA DE TABELAS

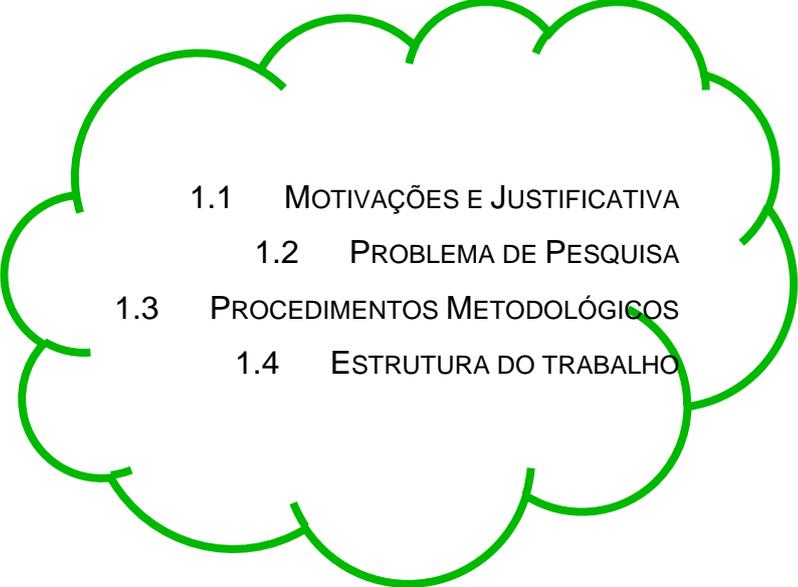
Tabela 1 - Pacientes com Febre e Mialgia	59
Tabela 2 - Atributos das Variáveis Linguísticas	74
Tabela 3 - Possibilidade da mulher ficar sozinha	95
Tabela 4 - IMC e Estado Nutricional	104
Tabela 5 - Dados da altura e peso da população	105
Tabela 6 - Reorganização dos Dados do IMC	106
Tabela 7 - Reorganização para o modelo clássico - IMC	116
Tabela 8 - Relação entre Altura e Peso	117
Tabela 9 - Validação do Modelo do IMC	118
Tabela 10 - Número de Acidentes Próximos a Maringá	120
Tabela 11 - Distância x Número de Acidentes	121
Tabela 12 - Distância Equidistante	124
Tabela 13 - Critério na Emissão de Conceitos	128
Tabela 14 - Base de Regras dos Conceitos	130
Tabela 15 - 'Esperança de Vida de Metalúrgicos de Recife	135
Tabela 16 - Esperança Clássica e Esperança Fuzzy	136

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
1.1 MOTIVAÇÕES E JUSTIFICATIVA.....	11
1.2 PROBLEMA DE PESQUISA.....	14
1.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	15
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO.....	17
2 MODELAGEM MATEMÁTICA	18
2.1 MODELO.....	19
2.2 MODELO MATEMÁTICO	21
2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA.....	26
3 LINGUAGEM	31
3.1 BREVE HISTÓRICO	32
3.2 VIRADA LINGUÍSTICA E FILOSOFIA DA LINGUAGEM	34
3.3 WITTGENSTEIN: ASPECTOS HISTÓRICOS E SUAS CONTRIBUIÇÕES	35
3.4 VOLTANDO-SE PARA A NOSSA PESQUISA	44
4 MATEMÁTICA FUZZY	46
4.1 RESUMO HISTÓRICO DOS CONJUNTOS FUZZY.....	47
4.2 FUNDAMENTOS	49
4.3 LÓGICA CLÁSSICA, LÓGICA FUZZY E TEORIA DAS PROBABILIDADES.....	68
4.4 VARIÁVEIS LINGUÍSTICAS	73
4.5 REGRAS DE PRODUÇÃO FUZZY.....	76
4.6 MATEMÁTICA FUZZY E A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	85
5 ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA E SUAS ANÁLISES	87
5.1 COMO VAI SER?	88
5.2 MODELO DE CRESCIMENTO POPULACIONAL	88
5.3 POSSIBILIDADE DE UMA MULHER FICAR SOZINHA	93
5.4 IMC – ÍNDICE DE MASSA CORPORAL	102
5.5 NÚMERO DE ACIDENTES	119
5.6 AVALIAÇÃO POR CONCEITOS.....	126
5.7 POBREZA E ESPERANÇA DE VIDA	133
6 ANÁLISE GLOBAL E CONSIDERAÇÕES FINAIS	138
6.1 ANÁLISE GLOBAL	139
6.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	145
7 REFERÊNCIAS	147

1

INTRODUÇÃO



1.1 MOTIVAÇÕES E JUSTIFICATIVA

1.2 PROBLEMA DE PESQUISA

1.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

1.1 MOTIVAÇÕES E JUSTIFICATIVA

Lidar com fatores como ambiguidade, incerteza e informações vagas é uma possibilidade do pensamento humano, articulado por meio de conhecimentos prévios e experiências. Essas experiências permitem que novas ações sejam desencadeadas para controlar os mais diversos sistemas do mundo real por meio de informações imprecisas (BARROS; BASSANEZI, 2006).

Assim, podemos comparar o ser humano com uma 'caixa preta' que recebe informações, as interpreta segundo seus parâmetros e então decide qual atitude tomar (SPINA, 2010). Por exemplo, quando uma pessoa pergunta a outra: 'Você é alta?', o que a outra pessoa irá responder? Ou melhor, será que ela poderá responder apenas: 'Sim, sou alta!' ou 'Não, sou baixa!'?

Se concordamos que as únicas respostas possíveis são essas, fica evidente que compartilhamos de uma concepção Aristotélica¹, pois assumimos que há apenas dois graus de certeza: certo/verdadeiro ou errado/falso. Isso é factualmente aceito considerando que em muitas situações, de fato, nos deparamos com esta característica binária dos fenômenos. A televisão é ligada ou desligada; os computadores são 'binários'; ou é Aristóteles ou não é Aristóteles; enfim, inúmeros são os exemplos que nos remetem a essa lógica dualista. Contudo, muitas experiências humanas podem não ser classificadas simplesmente como verdadeiras ou falsas, certas ou erradas. No meio da completa certeza e completa incerteza do pensamento humano existem graus de certeza e de incerteza inerentes ao próprio pensamento, bem como ao fenômeno sobre o qual pensamos.

Assim, no caso do problema da altura, entre a completa certeza de ser baixa e a completa incerteza de assim ser, existem outros graus (ou respostas possíveis) de altura. Neste sentido, Putnam (1975, p. 133 apud JACKENDOFF, 2004, p. 123) aponta para o caráter nebuloso das palavras e diz:

[...] palavras de uma língua natural não são geralmente "sim-não": há coisas das quais a descrição do "objeto" é claramente verdadeira e coisas das quais a descrição do "objeto" é claramente falsa, com certeza, mas há uma série de casos fronteiros. Além disso, a linha entre os casos claros e os casos fronteiros é em si nebulosa (tradução nossa).

¹ Entendemos como concepção Aristotélica aquela em que os valores lógicos assumem apenas duas possibilidades, ou seja, vale a lei do terceiro excluído.

Assim, a pessoa poderia responder: 'Sou meio alta!' ou 'Não sou nem alta nem baixa!' ou 'Sou muito alta!' ou ainda 'Sou pouco baixa!'. Essas diferentes respostas, linguisticamente são muito bem aceitas e é provável que sejam elas as respostas mais comuns para a pergunta. Contudo, matematicamente, poderíamos construir um modelo matemático que representasse o conjunto das pessoas que são altas? Ou das que são baixas? E o que influenciaria no modelo se fossem acrescentados adjetivos como 'meio' ou 'pouco' ou 'muito' na palavra 'baixa'?

Essas perguntas, assim como outras que são caracterizadas pelo que chamamos de variáveis linguísticas, carregam uma lógica matemática e, conseqüentemente, uma linguagem matemática diferente daquela que normalmente se apresenta em âmbito escolar.

Nesse sentido, ensinar uma lógica não convencional é importante para os alunos se adaptarem ao mundo em que vivem e entenderem a sua lógica, como salienta Cunha (2004, p. 2) ao relatar que a lógica clássica (dualista) "não dá conta das inúmeras experiências humanas que não podem ser traduzidas em sentenças classificáveis, exclusivamente, em verdadeiras ou falsas, mostrando-se insuficiente na representação dos vários tipos de argumento informal".

Demo (2010) considera que a ambigüidade presente na argumentação humana é inerente à comunicação, pois a mente formula conceitos e modelos (sejam mentais ou não) que nunca começam do zero e nunca chegam ao fim, é como uma eterna reinterpretação da interpretação. O autor ainda faz uma analogia das regras impostas pela geometria, reforçando o caráter absolutista proposto na matemática:

[...] linha reta não existe na natureza, apenas em matemática, e que, no fundo, alinhamento reto é coisa de ditador: este, sim, estigmatiza os outros ou como vassallos, ou como traidores, usando o dualismo binário típico de verdades absolutas (DEMO, 2010, p. 3).

Como bem nos lembra Gottschalk (2008, p. 76), até o início do século XX, os matemáticos pressupunham a "existência de significados matemáticos universais e absolutos passíveis de serem descobertos por meio de algum método" e portanto, nesse contexto, o método pedagógico seria o método científico. Esta concepção, de que os professores devem ensinar a matemática apenas como ferramenta para aplicação desses conceitos matemáticos, tal qual um cientista utiliza tais leis para prever novos conceitos, ainda vigora entre alguns professores.

Considerando essa situação, os educadores matemáticos devem empreender esforços para que este tipo de linguagem, menos ‘precisa’, seja utilizada em sala de aula, pois como apontam Bicudo e Garnica (2011, p. 63), existe uma “curiosa e contraditória especificidade” na linguagem matemática, que embora seja preponderantemente escrita e formal, necessita do “apoio da linguagem materna para a comunicação das ideias”.

E, Machado (2001, p. 15), vai além, ao afirmar que:

os elementos constituintes dos dois sistemas fundamentais para a representação da realidade – o alfabeto e os números – são aprendidos conjuntamente pelas pessoas em geral, mesmo antes de chegarem à escola, sem distinções rígidas de fronteiras entre as disciplinas ou entre os aspectos qualitativos e quantitativos da realidade, tal ausência de interação causa estranheza.

Isto nos faz pensar numa possibilidade de ensino que envolva de forma conjunta os dois sistemas, o do alfabeto (representado pela língua materna) e o dos números (representado pela matemática). E então surge a pergunta ‘Como ‘juntar’ o formalismo matemático com a imprecisão da língua?’

A resposta a esta pergunta nos permite pensar em um ‘novo’ tipo de matemática ou um ‘novo’ tipo de linguagem que utilize signos diferentes dos até então conhecidos e que permitam tratar da imprecisão da língua juntamente com o formalismo da matemática. Na construção dessa ‘nova matemática’ Lotfi Askar Zadeh deu os primeiros passos com a publicação do seu famoso artigo *Fuzzy Sets*² no *Journal Information and Control* em que fundamenta sua teoria sobre os conjuntos fuzzy (KOSKO, 1993).

Essa teoria, baseada no pressuposto de que todo conjunto pode ser caracterizado por uma função que denote graus de pertinência a seus elementos, tem íntima ligação com as variáveis linguísticas, pois a maneira de percepção de um problema ou de uma situação problemática, o modo como as informações são armazenadas e também todas as variáveis que envolvem este processo, são subjetivas.

E como sabemos, desde a Antiguidade o homem tenta descrever a realidade por meio de modelos matemáticos, e tais modelos nem sempre representam a porção da realidade estudada de forma a satisfazer o modelador. Com advento da matemática fuzzy, modelos clássicos puderam ser aperfeiçoados e

² Veja artigo completo em ZADEH, L.A; *Fuzzy Sets*; *Information and Control*, v.8, n.1, p.338-353, 1965.

novos modelos puderam ser desenvolvidos, o que na prática, tem colaborado para o avanço científico e tecnológico.

Há que se reiterar que a investigação de uma situação da realidade por meio da matemática requer o uso de uma linguagem que facilite e racionalize o pensamento. A linguagem, nesse sentido, refere-se a um sistema organizado de geração, organização, interpretação e comunicação da informação por meio de signos.

Neste sentido, não se pode ignorar que a linguagem matemática, preponderantemente escrita³, e que embora se pretenda formal, necessita da linguagem natural, de figuras, para a comunicação das ideias. A Modelagem Matemática, nesse sentido, pode ser um instrumento para facilitar a relação entre as pessoas e a matemática, quando ela se pautar pelas diferentes linguagens.

1.2 PROBLEMA DE PESQUISA

Com a expectativa de buscar articulações, aproximações e possíveis divergências entre diferentes linguagens que se fazem presentes em modelos matemáticos, investigamos o uso da matemática clássica e da matemática fuzzy em atividades de Modelagem Matemática.

A investigação desse uso, entretanto, não vem pautada na suposição de que existe uma verdade que é absoluta em relação a apresentação de soluções para uma situação-problema. Trata-se de investigar como se dá o uso das diferentes linguagens e as possíveis decorrências desse uso para a solução.

Assim, definimos como objetivos específicos de investigação:

- Identificar aproximações entre os modelos/linguagem clássicos e os modelos/linguagem fuzzy obtido (a)s com o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática,
- Investigar as influências do uso da matemática clássica e da matemática fuzzy sobre as soluções apresentadas para a situação-problema em estudo,

³ Sabemos que a matemática também possui uma linguagem oral, parte da comunicação, contudo, neste trabalho estaremos preocupados em olhar apenas para a linguagem escrita.

- Identificar ‘jogos de linguagem’ e ‘semelhanças de família’ nos modelos construídos para estudar uma situação-problema por meio de atividades de Modelagem Matemática.

Com o delineamento dos objetivos e do problema buscamos na próxima seção descrever nossos procedimentos metodológicos.

1.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Assumimos o pressuposto de que o autor da pesquisa possui um, dos múltiplos e possíveis olhares para o problema em estudo. Trata-se de uma pesquisa qualitativa com caráter interpretativo.

As análises realizadas na nossa pesquisa levam em conta o agente participante no processo (no caso, o próprio pesquisador), admitindo que o contexto, a construção histórico-social e a subjetividade interferem na pesquisa, como bem salienta Garnica (2004, p. 86) ao explicar que o termo ‘qualitativa’:

[...] está adequado às pesquisas que reconhecem: (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, se vale de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não conseguem se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re) configurados; (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas. Aceitar esses pressupostos é reconhecer, em última instância, que mesmo eles podem ser radicalmente reconfigurados à luz do desenvolvimento das pesquisas (GARNICA, 2004, p. 86).

A pesquisa qualitativa busca percepções e entendimento sobre a natureza geral de uma questão, abrindo espaço para a interpretação dos pesquisadores. Numa pesquisa qualitativa, o pesquisador dificilmente exclui o interesse em compreender as relações complexas do objeto estudado e a preferência por material textual é uma legítima opção de procedimento para esse tipo de análise.

Sabemos ainda, que “pesquisar não se resume a listar uma série de procedimentos destinados à realização de coleta de dados, que, por sua vez, serão analisados por meio de um quadro teórico estabelecido antecipadamente para responder a uma dada pergunta” (Borba e Araújo, 2004, p. 43). Contudo deixamos

claro a necessidade de um planejamento coerente e flexível, por mais que seja dentro dos moldes da pesquisa qualitativa, pois ele permite um direcionamento, um caminho a ser seguido, mesmo que tenhamos que retomar e refazer alguns passos.

Inicialmente fazemos uma revisão bibliográfica sobre os temas: Modelagem Matemática, Matemática Fuzzy e Linguagem e, com intuito de compartilharmos das informações e dos resultados já publicados na literatura bem como buscarmos subsídios para a realização da nossa pesquisa. Passada essa fase (em termos, pois a revisão bibliográfica acontece de forma contínua numa pesquisa qualitativa, onde o processo é tão importante quanto o produto), adentramos no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática utilizando matemática clássica e matemática fuzzy. E corroborando com a ideia de Lincoln e Guba (1985), Alves-Mazzotti (1998) e Borba e Araújo (2008), buscamos como critério para aumentar a credibilidade da pesquisa, utilizar a chamada triangulação, ou seja, “a utilização de vários e distintos procedimentos para obtenção dos dados”.

Para tanto, tratamos de seis atividades de Modelagem Matemática. Essas atividades, modeladas pelo autor deste texto, não foram aplicadas em sala de aula e não tiveram como preocupação a aprendizagem. Como nosso intuito é olhar para as diferentes linguagens presentes nos modelos, realizamos tanto a modelagem numa abordagem clássica como numa abordagem fuzzy. O primeiro modelo, do ‘crescimento populacional’, é um modelo presente na literatura existente, tanto na abordagem clássica quanto na abordagem fuzzy. O segundo modelo, da ‘Possibilidade de uma mulher ficar sozinha’, é um modelo em que a abordagem clássica já consta na literatura, e a abordagem fuzzy foi desenvolvida nesta pesquisa. O terceiro modelo, ‘Índice de massa corporal (IMC)’, é um modelo em que fizemos inicialmente uma abordagem fuzzy e depois fizemos um modelo com a abordagem da matemática clássica.

A quarta atividade ‘Número de Acidentes’ e a quinta atividade ‘Avaliação por Conceitos’ foram desenvolvidas usando conceitos da matemática clássica e também da matemática fuzzy. A sexta atividade, ‘Pobreza e Esperança de Vida’ trata da intersecção entre as duas abordagens, clássica e fuzzy.

A partir deste ponto, buscamos por padrões, tentando articular os resultados com o nosso referencial teórico (essencialmente a teoria de Wittgenstein). Assim, nos pautamos/olhamos para os seguintes critérios:

- Análise dos diferentes modelos (clássico e fuzzy) produzidos buscando aproximações entre os mesmos;
- Análise das influências sobre a solução para a situação-problema considerando os diferentes modelos;
- Análise dos 'jogos de linguagem' percebidos nos diferentes modelos (clássico e fuzzy) e,
- Análise com a expectativa de perceber 'semelhanças de família' entre o (a)s diferentes modelos/linguagens.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

A estrutura do nosso trabalho está assim definida, no capítulo 2 abordamos aspectos relacionados à Modelagem Matemática, fazemos um pequeno histórico sobre modelos matemáticos e conectamos alguns aspectos dos modelos à linguagem.

No capítulo 3, fazemos um breve histórico sobre a linguagem, chegando até a virada linguística desencadeada por Wittgenstein, onde nos aprofundamos em sua teoria sobre 'jogos de linguagem'.

No capítulo 4, apresentamos a teoria fuzzy, baseada nos pressupostos de Lofti Askar Zadeh, apresentando um resumo histórico, suas principais definições e alguns exemplos, além de dialogarmos sobre o papel da lógica fuzzy na Filosofia da Matemática e na construção de novos modelos matemáticos baseados nessa teoria, que permitirão dar novos encaminhamentos para questões de pesquisa em Educação Matemática.

No capítulo 5, são apresentadas seis atividades de modelagem, com suas abordagens: clássica e fuzzy e, em seguida são feitas as análises fundamentadas em nosso referencial teórico.

No capítulo 6, fazemos a análise global e as considerações finais e no sétimo e último capítulo, apresentamos as referências utilizadas.

2

MODELAGEM MATEMÁTICA

2.1 *MODELO*

2.2 *MODELO MATEMÁTICO*

2.3 *MODELAGEM MATEMÁTICA*

2.1 MODELO

Desde a antiguidade, o homem procura entender e descrever fenômenos da natureza por meio de modelos (sejam eles matemáticos ou não). Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 13), neste contexto, referem-se ao modelo como “uma tentativa de expor e/ou explicar características de algo que não está presente, mas se ‘torna presente’”, por meio do modelo.

Tomando como parâmetro argumentações de Ludwig Wittgenstein sobre linguagem, podemos perceber que dependendo do contexto, a palavra ‘modelo’ pode ter diferentes sentidos para as pessoas que a utilizam.

O Dicionário Etimológico Cunha (1989) refere-se ao termo ‘modelo’, como “pequena medida”, considerando sua origem do latim *modelus*.

No Dicionário Eletrônico Michaelis (2012), ‘modelo’ é caracterizado como:

[...] 1. Desenho ou imagem que representa o que se pretende reproduzir, desenhando, pintando ou esculpindo. 2. Tudo o que serve para ser imitado. 3. Representação, em pequena escala, de um objeto que se pretende executar em ponto grande. 4. Aquele a quem se procura imitar nas ações e maneiras.

Já no dicionário de filosofia, Abbagnano (2007) coloca que construir um modelo “consiste na criação de símbolos que tenham semelhança maior ou menor com as situações reais, e cujas relações reproduzam as relações inerentes aos elementos de tais situações” (2007, p. 58).

Cifuentes e Negrelli (2007, p. 74) caracterizam ‘modelo’ como:

uma forma de ‘ver’ a realidade, de perceber seu sentido e, desse ponto de vista, é um recurso epistemológico para a sua compreensão. Essa compreensão, longe de significar atingir a verdade, como usualmente se pensa, significa apenas, dado o caráter aproximativo da representação, uma adequação empírica com os fenômenos estudados.

Numa perspectiva filosófica e epistemológica “os modelos constituem simplificações ou idealizações da experiência e são obtidos levando ao extremo caracteres ou atributos próprios dos objetos empíricos” (ABBAGNANO, 2007, p. 168). Granger (1969, apud Biembengut; Hein, 2003), afirma que modelo é uma imagem criada pelo sujeito no momento em que o espírito racional busca compreender e expressar de forma intuitiva uma sensação, procurando relacioná-la com algo já conhecido.

O que se pode perceber nestas diferentes caracterizações para ‘modelo’ é que buscam enfatizar o caráter de representatividade do modelo em relação a algo, seja no mundo das ideias, seja no mundo real, o que parece se alinhar com a afirmação de D’ Ambrósio (2012) de que um ‘modelo’ é, em sua ampla interpretação, um conjunto de representações simplificadas, mentais ou não, que os seres humanos fazem sobre uma realidade (ou uma suposta realidade).

Wittgenstein também considera a questão da representação de um ‘modelo’ ao afirmar que, um modelador, não pode, afinal:

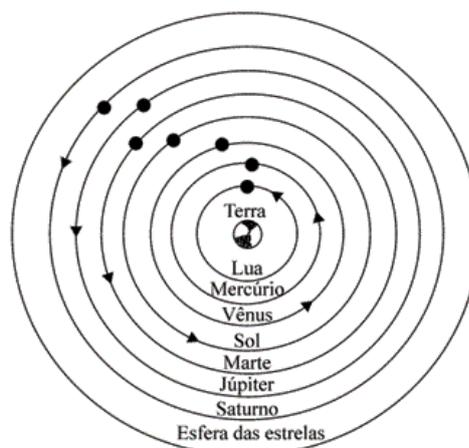
[...] fazer com que absolutamente qualquer coisa substitua qualquer outra coisa, - É realmente importante que tal representar seja possível pois o representante deve, em certos casos, pelo menos, fazer o trabalho tão bem quanto o principal (WITTGENSTEIN, 2010, p. 64).

Considerando este caráter representativo do modelo, Richard Lesh, juntamente com Guershon Harel, definem ‘modelos’ como:

sistemas conceituais que geralmente tendem a ser expressos utilizando uma variedade de meios de interação representacional, que podem envolver símbolos escritos, linguagem falada, gráficos baseados em computador, papéis baseados em diagramas ou gráficos, ou baseadas em experiências metafóricas. Seus objetivos são construir, descrever ou explicar outro(s) sistema(s) (LESH; HAREL, 2003, p. 159, tradução nossa).

A assertiva de Wittgenstein no que se refere à função do ‘representante’ de, “fazer o trabalho tão bem quanto o principal”, sugere a importância da estreita relação entre um sistema e sua representação. Por exemplo, quando os filósofos gregos, como Ptolomeu e Aristóteles definiram a hipótese de que a Terra seria o centro do Universo e tudo girava ao seu redor, eles estavam tentando estabelecer um modelo que representasse a relação existente entre a Terra e os planetas, e como uma das formas de representar tal modelo, eles usaram a Figura 1.

Figura 1 - Modelo Geocêntrico



Fonte: <http://filosofiandonaescola.blogspot.com.br>

Este poder representativo do modelo também tem função importante no âmbito da matemática, quando nos referimos a modelos matemáticos.

2.2 MODELO MATEMÁTICO

A caracterização ou conceitualização do que viria a ser um modelo matemático também é questão discutida entre os pesquisadores/professores da área de Matemática e Educação Matemática.

Para Van Den Heuvel-Panhuizen (2003),

modelos são vistos como representação de situações problema, em que necessariamente refletem aspectos essenciais de conceitos e estruturas matemáticas que são relevantes para a situação problema, mas que podem ter diferentes manifestações. Isto significa que o termo 'modelo' não é tomado de uma maneira muito literal. Materiais, esboços visuais, situações paradigmáticas, esquemas, diagramas e mesmo símbolos podem servir como modelos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2003, p.13, tradução nossa).

Na visão de Bassanezi (1994, p. 31), modelo matemático é “quase sempre um sistema de equações ou inequações algébricas, diferenciais, integrais, etc., obtido através de relações estabelecidas entre as variáveis consideradas essenciais ao fenômeno sobre análise” ou também como “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado” (BASSANEZI, 2002, p. 20).

Biembengut e Hein (2003, p. 12) defendem que um modelo matemático é um “conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema da situação real”.

Na mesma perspectiva, Lesh e Harel (2003, p. 159) afirmam que o:

[...] desenvolvimento de um modelo envolve a quantificação, organização, sistematização, dimensionalização, coordenação, e (em geral) matematização dos objetos, relações, operações, padrões ou regras que são atribuídas ao sistema modelado (tradução nossa).

Considerando estas caracterizações apresentadas, parece se evidenciar uma configuração que atribui ao modelo matemático uma linguagem matemática formal, com símbolos e parâmetros bem definidos. Este é o caso de Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.13), que o descrevem como “um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema”.

Para ilustrar, lembremos de quando Giuseppe Peano apresentou seus famosos axiomas em 1889, no livro “*Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*”. Ele desenvolvera, segundo as concepções citadas, um modelo matemático (com sua linguagem formal, seus símbolos e seus parâmetros) que buscava representar e construir os números naturais. Como podemos verificar em Lima (2009, p. 34),

[...] São dados, como objetos não-definidos, um conjunto \mathbb{N} , cujos elementos são chamados números naturais, e uma função $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o número $S(n)$, valor que a função S assume no ponto n , é chamado o sucessor de n .

A função s satisfaz aos seguintes axiomas:

P1. $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é injetiva. Em outros termos: $m, n \in \mathbb{N}$, $S(m) = S(n) \Rightarrow m = n$. Ou em outras palavras, dois números que têm o mesmo sucessor são iguais.

P2. $\mathbb{N} - \{1\}$ consta de um só elemento. Ou seja, existe um único natural que não é sucessor de nenhum outro. Ele se chama ‘um’ e é representado pelo símbolo 1. Assim, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, tem-se $1 \neq S(n)$. Por outro lado, se $n \neq 1$ então existe um (único) $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $S(n_0) = n$.

P3. (Princípio da Indução). Se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in X$ tem-se também $S(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Negrelli (2008, p. 47) coloca que desde a Grécia antiga, havia uma preocupação com a clareza e o formalismo da matemática na obtenção dos modelos ao afirmar que “se tomarmos os trabalhos dos matemáticos gregos, em especial os Elementos de Euclides, vemos que havia uma crença na isomorfia entre a realidade observável e a matemática que a descrevia”. Contudo, esse formalismo tende a perder força, com o advento de novas teorias construtivistas e filosóficas advindas do século XX.

A constituição, por exemplo, das geometrias não-euclidianas, evidencia esse fato e reforça que um modelo matemático permite (ao menos supõe-se isso – na perspectiva filosófica) apenas fazer algumas aproximações, diferentemente do que era pregado até então, ou seja, da concepção de um possível isomorfismo entre a matemática e a realidade (NEGRELLI, 2008).

Da forma como era concebida, a construção de um modelo matemático parecia ser compreendida como tendo uma única forma de representação. Kluber (2007, p. 96) lembra que os modelos matemáticos “tal como sugerido por Descartes, no sentido da redução de um problema em partes menores e cada vez mais simples”, oportunizavam a “manipulação do mínimo de variáveis, evitando, assim, contradições e informações indesejáveis para o experimento”.

Essas informações indesejáveis, provavelmente eram decorrentes da fala (da linguagem natural), e isso, de acordo Wittgenstein, era o problema, pois haveria aí certa dificuldade em modelar a “indeterminação da fala, de maneira correta e sem falsificação” (WITTGENSTEIN, 2009, p. 293), o que acabava tornando o processo de modelagem difícil e sem resultados positivos.

Contudo, numa visão em que as complexidades dos fenômenos (principalmente as incertezas da língua) são levadas em conta, Kluber (2007, p. 97) afirma que o modelo:

[...] não fica restringido em termos de uma representação matemática ideal, mas pode ganhar outras peculiaridades, como um simples procedimento a ser seguido, uma tabela representativa, em relação ao objeto estudado e, outros.

O autor continua “esses pressupostos da multiplicidade de fenômenos, de aspectos qualitativos quando encontrados nas concepções de Modelagem” permitem “analisar formas particulares de conhecimento e produção de conhecimento em diferentes culturas, comunidades e contextos” (KLUBER, 2007, p. 97).

Essa concepção de que as diferentes culturas e contextos influenciam no tipo de conhecimento e, conseqüentemente nos modelos, pode ser vista, por exemplo, na substituição do modelo Geocêntrico, vigente na Grécia antiga, para o modelo Heliocêntrico de Nicolau Copérnico, defendido no século XVI.

Outro exemplo de mudança nos modelos vigentes, por causa das culturas, dos contextos e da linguagem utilizada, pode ser visto no modelo matemático do crescimento populacional.

Esta temática é tratada no trabalho de Oliveira (2011a) e de Almeida e Oliveira (2012 – em fase de publicação). Segundo estes autores, o primeiro modelo matemático para crescimento populacional foi proposto por Thomas Robert Malthus, cuja ideia era baseada em dois postulados:

[...] Primeiro, a/o comida/alimento é necessária (o) para a existência do homem. Segundo, a paixão entre os sexos é necessária e deve permanecer quase que em seu estado atual (MALTHUS, 1798, p. 4 apud OLIVEIRA, 2011a, p. 47).

Assim, ele assumiu os seus postulados como verdadeiros e afirmou que “a capacidade de reprodução do homem é superior à capacidade da terra para produzir a subsistência para o homem” (MALTHUS, 1798, p. 4 apud OLIVEIRA, 2011a, p. 47).

Como podemos ver, esse primeiro ‘modelo’ foi baseado numa linguagem natural, sem o uso explícito de símbolos matemáticos. Posteriormente a esse modelo, com a evolução dos símbolos matemáticos, apareceram outros pesquisadores, como Benjamin Gompertz, que:

[...] embora ainda tenha estruturado suas ideias em um contexto de pouco desenvolvimento matemático, já era influenciado pela notação de Newton. Iniciou suas publicações ainda jovem e não muito tempo depois de Malthus. O seu avanço principal em relação ao modelo proposto por Malthus reside justamente no fato de considerar que a população humana é limitada e não cresce exponencialmente (OLIVEIRA, 2011a, p. 55).

Esse novo modelo, foi descrito utilizando uma linguagem mais formal e típica da época, que pode ser vista em Oliveira (2011a, p. 55) da seguinte forma:

[...] Considerando L_x a população no instante x e a , b e q quantidades constantes, usando a notação newtoniana, Gompertz (1825, p. 518)

escreveu a equação $abq^x = -\frac{\dot{L}_x}{L_x}$ cuja solução é dada por $L_x = dg^{q^x}$ com d , g parâmetros a serem determinados.

Um pouco mais adiante na história, o sociólogo belga Pierre-François Verhulst avançou na teoria do crescimento populacional e, segundo Oliveira (2011a, p. 60) adotou as hipóteses de Quetelet⁴ definindo que “a resistência ao crescimento humano é proporcional ao quadrado da velocidade com que a população tende a crescer (*M. Quetelet suppose proportionnelle au carré de la vitesse avec laquelle la population tend à croître*)”.

Assim, Verhulst (1838, p. 115 apud Oliveira 2011a, p. 60) expressou seu modelo matemático da seguinte forma:

[...] seja p a população. Representamos por dp o crescimento infinitamente pequeno durante um tempo infinitamente pequeno dt . Se a população crescesse em progressão geométrica, teríamos a equação $\frac{dp}{dt} = mp$. Mas como a velocidade de crescimento da população é retardada pelo aumento do número de pessoas, devemos subtrair de mp uma função desconhecida de p , $\varphi(p)$, de modo que o modelo é dado por: $\frac{dp}{dt} = mp - \varphi(p)$.

Notemos que mais uma vez o modelo matemático foi alterado, a equação diferencial aqui representada utilizou uma nova notação, a chamada notação de Leibniz. Essa notação $\left(\frac{dp}{dt}\right)$ difere da notação de Newton $\left(\dot{L}\right)$, não só pela forma como é apresentada, mas também na concepção inicial, pois para Newton, a derivada e todas as variáveis dependentes dela dependiam do tempo, ou seja, variáveis contínuas, sendo chamadas por ele de quantidades fluentes (ou fluxões), já para Leibniz, a diferencial era vista como a diferença entre valores sucessivos de uma sequência, ou seja, variáveis discretas (CARVALHO, 2007).

Outros modelos ainda foram sendo produzidos, conforme aponta Bassanezi (2002), como o de Smith, em 1961; o de Montroll, em 1971; o de Ayala, Ehrenfel e Gilpin, em 1973 e, mais recentemente os modelos subjetivos⁵: de Pielou e Variacional Fuzzy.

À medida que as transformações sociais foram ocorrendo, a evolução dos modelos matemáticos do crescimento populacional foi sendo necessária. Essa visão, de múltiplos modelos, com diferentes linguagens, as quais podem representar

⁴ Lambert Adolphe Jacques Quételet foi um matemático, astrônomo, estatístico e sociólogo belga, precursor do estudo da demografia. Nasceu em 1796 e faleceu em 1874.

⁵ Entende-se aqui por modelos subjetivos aqueles que não são formulados por equações diferenciais ordinárias ou de diferenças.

um mesmo sistema, está alinhada com pressupostos assumidos na filosofia de Ludwig Wittgenstein, como veremos em capítulo posterior.

Oliveira (2011b) argumenta que os modelos matemáticos, sob o ponto de vista dessa filosofia, representam um fenômeno vivenciado nos diferentes momentos socioculturais, obtidos pelas pessoas desses diferentes contextos. A autora, referindo-se ao contexto da sala de aula, afirma que:

o poder de representação do modelo está relacionado à experiência dos alunos, ao nível acadêmico em que se encontram e ao nível de compreensão do papel da representação construída para o contexto social em que estão inseridos, ou seja, o modelo funciona em seus usos, em suas funções práticas, que são múltiplas e variadas, constituindo múltiplas linguagens que são na verdade formas de vida (OLIVEIRA, 2011b, p. 8).

Barbosa (2009, p. 70) enfatiza o fato de que “o uso de modelos matemáticos na educação requer reflexão”, pois “em geral, estes estudos partem de uma análise sobre o papel dos modelos matemáticos nas ciências e na sociedade, de onde extraem implicações para as práticas pedagógicas”.

Assim, pensar nas maneiras em que um modelo matemático pode ser construído e como pode ser utilizado em sala de aula, faz parte das preocupações dos educadores matemáticos. Perguntas como: ‘Como fazer um modelo matemático?’, ‘Existe algum procedimento?’, ‘Há algum caminho a ser seguido?’, norteiam a seção a seguir.

2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Barbosa (2001b, p. 14), afirma que “um modelo matemático não é formulado como um fim em si mesmo, mas para resolver um problema”, sendo assim, da situação inicial até a situação final, cujo produto seria o modelo matemático propriamente dito, o modelador, passa por uma série de etapas, ou melhor, por todo um processo comumente denominado Modelagem Matemática, com o intuito de resolver um problema ou situação-problema.

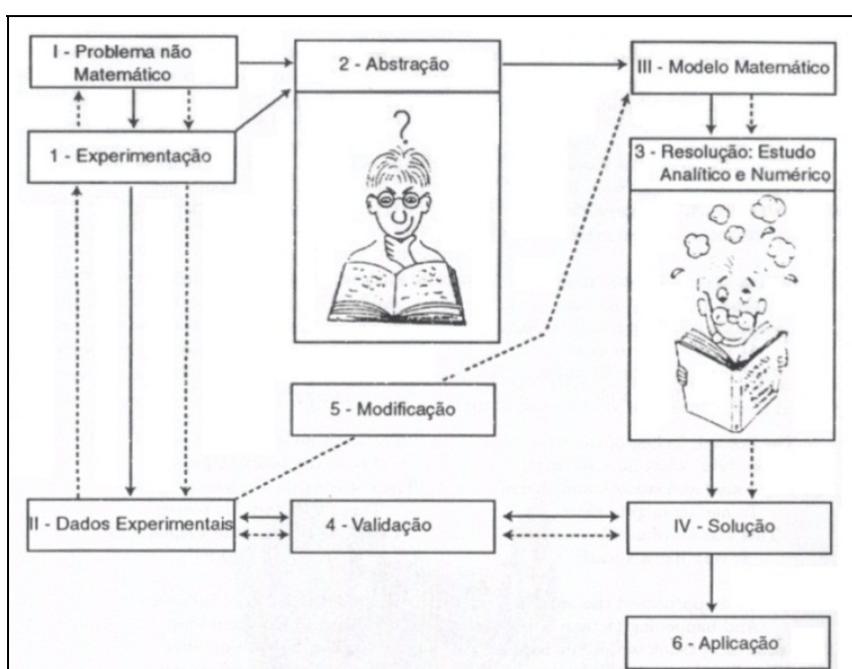
O termo ‘modelagem’, no dicionário Eletrônico Michaelis (2012) é caracterizado como “operação de modelar” ou ainda “conjunto de processos e meios usados na feitura de modelos”. No caso da Matemática, para criar/desenvolver um modelo matemático, é necessário modelar por meio de um conjunto de procedimentos, aos quais podemos chamar de Modelagem Matemática.

Vários esquemas e modelos explicativos foram elaborados buscando compreender o processo da Modelagem Matemática, por exemplo, para Bassanezi (2002, p. 16), a Modelagem Matemática é a “[...] arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” ou ainda:

[...] a modelagem matemática é matemática por excelência. As origens das idéias centrais da matemática são o resultado de um processo que procura entender e explicar fatos e fenômenos observados na realidade. O desenvolvimento dessas idéias e sua organização intelectual dão-se a partir de elaborações sobre representações do real (BASSANEZI, 2002, p.13).

Nesse sentido, a modelagem pode ser descrita como um “processo dinâmico utilizado para obtenção e validação de modelos matemáticos”. Assim, para o autor, a Modelagem Matemática passa por uma série de etapas: 1- Experimentação; 2- Abstração; 3- Resolução: Estudo Analítico e Numérico; 4- Validação e, 5- Modificação, conforme observado na Figura 2.

Figura 2 - Etapas do Processo de Modelagem



Fonte: Bassanezi (2002, p. 27)

A etapa da **Experimentação (1)** é o momento em que ocorre a obtenção/coleta dos dados, aqui, o matemático pode (e deve) ser fundamental, pois dependendo de sua forma de abordar o problema, ele pode direcionar o problema

para caminhos mais fáceis ou mais difíceis, conforme também sugere Biembengut (2003, p.12) ao afirmar que o processo de modelagem:

[...] sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador **precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta** e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas (grifo nosso).

Na etapa da **Abstração (2)**, estabelece-se as variáveis, faz-se a problematização numa linguagem matemática, formula-se as hipóteses e simplifica-se o problema, acrescentando algumas condições e/ou restrições que sejam necessárias e/ou omitindo outras.

Na **Resolução (3)**, ocorre o uso da linguagem matemática, enquanto que na **Validação, etapa 4**, é feita a testagem do modelo, inferindo, se o modelo deve ser aceito ou refutado. Caso seja refutado, acontece a chamada **Modificação (5)**, etapa em que, modifica-se um ou alguns fatores ligados a etapas anteriores que não permitiram elaborar/desenvolver um modelo que pudesse satisfazer o problema inicial, sendo necessário assim, um novo processo de idas e vindas, de forma a encontrar um modelo que atenda aos interesses e necessidades do modelador.

É importante ressaltar que o processo de reformulação/mudança de um modelo matemático é uma parte fundamental do processo de modelagem, pois como afirma Bean (2007, p. 47):

[...] à medida que o mundo se transforma, também se transformam as atividades e os modelos, ou seja, a unidade se ajusta conforme as necessidades, os interesses e as aspirações dos membros da comunidade vão sendo atendidos ou não pelas transformações.

O que também é lembrado por Bassanezi (2002, p. 31) ao afirmar que nenhum “modelo deve ser considerado definitivo, podendo sempre ser melhorado”, justificando a isso, alguns fatos que levam a novas situações, como por exemplo, o fato de que qualquer teoria pode ter mudanças conceituais, que as observações acumuladas levam compassadamente a novos fatos e permitem assim novas suposições e, ainda que a Matemática evolua internamente fornecendo novas ferramentas/linguagens para traduzir a realidade.

Embora a Modelagem Matemática possa ser percebida como um método de pesquisa, ela vem sendo utilizada por muitos educadores como uma alternativa que pode ser introduzida nas aulas de Matemática, pois como salientam

Almeida, Silva e Vertuan (2012), aspectos como, motivação, uso das aplicações de fora da escola na sala de aula, a viabilização do uso do computador, a utilização de trabalhos cooperativos, o desenvolvimento da criticidade e da reflexão e, o uso de diferentes signos são argumentos que justificam e incentivam seu uso.

Barbosa e Santos (2007, p. 1) salientam que o desenvolvimento de uma atividade de modelagem em sala de aula dependerá entre outras coisas de como serão abordados “os objetivos e os papéis que o professor e os alunos” irão assumir.

Nessa perspectiva, em artigo recente, Galbraith (2012) esclarece que no ensino da matemática por meio da modelagem, há duas abordagens que os professores utilizam, a chamada ‘modelagem como veículo’ e a ‘modelagem como conteúdo’.

Galbraith (2012, p.7, tradução nossa) afirma que nesta segunda abordagem, foi onde começou “uma relação simbiótica entre matemáticos e educadores matemáticos”, pois o foco está na aprendizagem das técnicas de modelagem para aprender a resolver problemas não matemáticos.

A primeira abordagem, ‘modelagem como veículo’, é utilizada para introduzir conteúdos de matérias curriculares, onde a modelagem é o veículo que conduz o aluno ao conteúdo a ser aprendido. Nessa abordagem, Galbraith (2012) apresenta algumas ‘versões’ de como os professores poderiam utilizá-la, ou seja, por meio, do uso de exemplos contextualizados que podem motivar o estudo da matemática, do uso de situações problemáticas reais que forneçam uma base preliminar para a abstração, do uso da chamada modelagem emergente (termo característico da Matemática Realística, para se referir àqueles modelos que podem emergir das experiências dos alunos ou àqueles que surgem para dar apoio aos modelos já estabelecidos pelos alunos), do uso da modelagem como ajuste de curvas e, finalmente, com enfoque no que ele chama de ‘problemas das palavras’.

Neste enfoque, segundo o autor “os alunos ignoram fatores contextuais, e aplicam (muitas vezes incorretamente) ações com base em percepções de que a matemática escolar está de certa forma – como que divorciada” de aspectos da vida fora da escola (GALBRAITH, 2012, p. 7, tradução nossa).

Essa visão, de que há diferentes matemáticas, a da escola e a da realidade, pode ser vista em Vilela (2007), onde a autora apresenta o que ela chama

de 'diferentes adjetivações' atribuídas à matemática (matemática da rua, matemática da escola, matemática acadêmica, matemática de determinado grupo, entre outras).

O 'problema das palavras' de Galbraith pode ser encarado sob um enfoque wittgensteiniano, de que os diferentes usos podem possuir diferentes significados, não associados a um referente ou a uma essência. As 'diferentes adjetivações' atribuídas à matemática podem ser diferentes formas de lidar com a matemática, considerando contextos diferentes. Nesse sentido, os 'diferentes' modelos matemáticos que podem representar um sistema, seriam, na verdade, diferentes 'jogos de linguagem', com algumas 'semelhanças de família' (ou não).

3

LINGUAGEM

3.1 *BREVE HISTÓRICO*

3.2 *VIRADA LINGUÍSTICA E FILOSOFIA DA
LINGUAGEM*

3.3 *WITTGENSTEIN: ASPECTOS HISTÓRICOS E
SUAS CONTRIBUIÇÕES*

3.4 *VOLTANDO-SE PARA A NOSSA PESQUISA*

3.1 BREVE HISTÓRICO

As investigações a respeito da linguagem têm despertado o interesse de diversos pesquisadores, e também, os da Educação Matemática.

Essa discussão veio à tona, porque historicamente “até o século XIX, a linguagem foi praticamente ignorada, uma vez que seu papel era confundido com o papel de *logos*, de ideias na mente, de *cogito*” (ARAÚJO, 2004, p.19).

Assim, tentar atribuir um significado ao termo ‘linguagem’ foi um dos grandes temas de pesquisa até então. Uma dessas atribuições é dada pelo linguista Steven Roger Fischer, ao afirmar que em sua definição mais simples,

[...] linguagem significa 'meio de troca de informações'. Essa definição permite que o conceito de linguagem englobe expressões faciais, gestos, posturas, assobios, sinais de mão, escrita, linguagem matemática, linguagem de programação (ou de computadores), e assim por diante (FISCHER, 2009, p. 12).

Na mesma perspectiva o Dicionário Eletrônico Michaelis (2012) caracteriza a linguagem como a

[...] faculdade de expressão audível e articulada do homem. Conjunto de sinais falados, escritos ou gesticulados de que se serve o homem para exprimir suas idéias e sentimentos. Qualquer meio que sirva para exprimir sensações ou idéias.

Já o dicionário Aurélio, descreve a linguagem como:

[...] Todo sistema de signos que serve de meio de comunicação entre indivíduos e pode ser percebido pelos diversos órgãos dos sentidos, o que leva a distinguir-se uma linguagem visual, uma linguagem auditiva, uma linguagem tátil, etc., ou, ainda, outras mais complexas, constituídas, ao mesmo tempo, de elementos diversos (FERREIRA, 1999).

Segundo Feio (2009, p. 46), depois de alguns séculos de estudos e discussão,

[...] tomou-se como conclusão que a linguagem como capacidade de expressão do ser humano é natural, isto é, os humanos nascem com uma aparelhagem física, anatômica e fisiológica que lhes permite expressarem-se pelas palavras, mas as línguas são convencionais, isto é, de condições históricas, geográficas, econômicas e políticas, ou seja, são fatos culturais.

De um outro ponto de vista, Chauí (2000, p. 73) afirma que “a linguagem é, assim, a forma propriamente humana da comunicação, da relação com o mundo e com os outros, da vida social e política, do pensamento e das artes”, ou ainda, como “um sistema de signos ou sinais usados para indicar coisas, para a

comunicação entre pessoas e para a expressão de ideias, valores e sentimentos” (CHAUI, 2000, p. 177).

Essas concepções, segundo Chauí (2000), foram sendo construídas ao longo do tempo. À filosofia coube a preocupação de definir a origem e as causas da linguagem. Segundo Feio (2009, p. 46), historicamente:

uma das primeiras divergências a esse respeito surgiu na Grécia antiga onde havia a discussão se a linguagem é natural aos homens, ou seja, se existe por natureza, ou se é uma convenção social. Neste contexto há um desdobramento que aponta que se a linguagem for natural, as palavras possuem um sentido próprio; se for convencional, trata-se de decisões consensuais da sociedade.

Essas divergências foram sendo constantemente discutidas, fato que perdura até hoje, principalmente no âmbito da Filosofia da Linguagem. Santos (2009, p.117) refere-se ao fato de que a linguagem “pode ser entendida como uma criação social que utiliza símbolos, também criados socialmente” e continua:

[...] de uma forma mais ampla, poderíamos pensar na linguagem como um sistema complexo e extenso que se organiza através de símbolos, cuja função básica é a codificação, estruturação e consolidação dos dados relativos aos sentidos, agindo como meio de transmissão de sentido ou significado, fazendo com que o homem possa se comunicar e transmitir os seus saberes, cambiando com seu próximo informações e dados (SANTOS, 2009).

Assim, Araújo (2004, p. 99) aponta que, o campo da Filosofia da Linguagem, no final do século XIX, era “até então dominado pelas propriedades significativas e denotativas das sentenças em proposições com valor de verdade” reconfigurando-se, ou seja, estabelecendo que o ato de se referir passa a ser apenas uma entre as inúmeras facetas da linguagem. Nesse sentido, a busca por regras lógicas e semânticas, dá lugar a um novo modelo, onde simplesmente o uso da linguagem passa ser o objetivo ou objeto de estudo.

Coadunam a isso, Vilela e Mendes (2011, p. 14) ao considerar que a linguagem:

[...] passa a ser investigada enquanto constituída dos elementos dos nossos conhecimentos e, por isso, pode ser tomada como eixo de investigação. Ela é, num movimento de mão dupla, um critério de inteligibilidade, traz uma lógica para ver o mundo e, ainda, pode ser reveladora, porque expressa o que é importante numa forma de vida; ela dá indícios das características culturais de uma comunidade (VILELA; MENDES, 2011, p. 14).

É nesse contexto, em que a linguagem passa a ser eixo de investigação, que acontece a chamada Virada Linguística.

3.2 VIRADA LINGUÍSTICA E FILOSOFIA DA LINGUAGEM

A virada linguística constitui um movimento que ocorreu no início do século XX, e a partir dela,

[...] a linguagem não é mais considerada como simples instrumento para o pensamento representar as coisas, e sim como estrutura articulada, independente de um sujeito ou de uma vontade individual e subjetiva, não mais submetida à função exclusiva da nomeação ou designação, quer dizer o signo não se limita a estabelecer uma relação direta com a coisa nomeada (ARAÚJO, 2004, p. 11-12).

A partir dessa virada, segundo Araújo (2004), ao invés de se buscar uma estrutura lógica, por meio de uma filosofia analítica, busca-se compreender a linguagem a partir de seu funcionamento. Assim, é deixada de lado a concepção essencialista, defendida pela filosofia analítica, e entra em cena uma filosofia mais pragmática.

Essa mudança segundo Gottschalk (2007b, p. 461) “causou uma revolução copernicana ao deslocar os fundamentos cognitivos do sujeito para a linguagem”, foi somente a partir daí, que “alguns pensadores iniciaram uma reflexão mais sistemática sobre o papel da linguagem na constituição dos sentidos, reconsiderando-se as relações entre pensamento e mundo de uma perspectiva mais heraclitiana⁶” (GOTTSCHALK, 2007a, p. 15).

A questão norteadora da Filosofia da Linguagem deixa de buscar ‘o que é linguagem’ e passa a se preocupar em ‘como ela funciona’, funcionamento este que, neste trabalho, é visto sob os princípios do filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein cujos significados das palavras estão nos seus diferentes usos na linguagem, como aponta Araújo (2004, p. 100):

[...] Wittgenstein revoluciona com sua concepção de linguagem sem fulcro, sem tarefa representativa; a linguagem não serve apenas para nomear coisas ou descrever estado de coisa; ela não tem uma única gramática e nem uma única estrutura.

Assim, buscando compreender essa filosofia de modo a nos permitir fazer algumas inferências em nosso trabalho, adentramos em seus pressupostos teóricos, discorrendo e analisando alguns deles.

⁶ Entendemos como visão heraclitiana aquela que leva em consideração que as convenções adotadas numa determinada linguagem são ancoradas pelas formas de vida, e, portanto estão em contínua transformação (Gottschalk, 2007a, p. 23).

3.3 WITTGENSTEIN: ASPECTOS HISTÓRICOS E SUAS CONTRIBUIÇÕES

Ludwig Joseph Johann Wittgenstein⁷, ou simplesmente, Ludwig Wittgenstein, nasceu em 1889 na cidade de Viena. Em 1906, foi estudar engenharia mecânica em Berlim e em 1908 foi para Universidade de Manchester. Em Manchester, entrou em contato com Gottlob Frege que o convenceu a ir estudar em Cambridge com Bertrand Russel. Assim, em 1912 ele abandona o curso de engenharia e passa a se dedicar a filosofia e a lógica. Nesse período, Wittgenstein alista-se voluntariamente no exército e acaba indo para o *front* de batalha da Primeira Guerra Mundial.

Entre as idas e vindas da guerra, ele publica, em 1921, o seu primeiro e único livro em vida, o *Tractatus Logico-Philosophicus*, cujo enfoque principal foi no desenvolvimento da lógica. Após um período conturbado de sua vida, em que largou os estudos de filosofia e foi atuar como professor numa escola primária, retornou a Cambridge em 1929 para repensar sobre as ideias que ele mesmo tinha proposto em seu livro. Durante os próximos anos de sua vida dedica-se ao estudo das questões envolvendo a lógica e a linguagem e, em 1951, ele morre decorrente de um câncer de próstata.

Em sua obra póstuma, encontram-se os Livros: Investigações Filosóficas, Observações Filosóficas, Gramática Filosófica, Da Certeza, O livro Azul, O livro Vermelho e Anotações sobre as Cores. O livro de maior alcance intelectual é o 'Investigações Filosóficas', cuja mudança no pensamento e desenvolvimento da linguagem é sentida até os dias atuais.

Wittgenstein, em suas obras procura não definir analiticamente a linguagem assim como outros termos da sua filosofia, mas busca por meio de algumas analogias caracterizá-los. Em um de seus trabalhos, ele afirma que "linguagem é um cálculo; ela é caracterizada por atividades linguísticas" (WITTGENSTEIN, 2010, p. 145). Ele procura ao longo dos seus textos fornecer uma lista de atividades linguísticas que ajudariam a caracterizar a linguagem, como por exemplo: dar ordens, descrever a aparência de um objeto, perguntar, contar histórias, entre outras (GLOCK, 1998).

Em outro momento, ele caracteriza linguagem como:

⁷ Para maiores esclarecimentos sobre a vida e obra de Ludwig Wittgenstein, consulte os livros Dicionário Wittgenstein, de Hans-Johann Glock e Wittgenstein - O Dever do Gênio, de Ray Monk.

[...] uma coleção de várias ferramentas. Na caixa há um martelo, uma serra, uma régua, um vidro de cola e cola. Muitas das ferramentas são aparentadas entre si na forma e no uso, e as ferramentas podem ser grosseiramente divididas em grupos, segundo suas relações; mas as fronteiras entre esses grupos muitas vezes serão mais ou menos arbitrárias e há vários tipos de relação que se inter cruzam (WITTGENSTEIN, 2010, p. 48).

Nesse sentido, o filósofo afirma “[...] ‘linguagem’ é apenas linguagens, mais as coisas que invento por analogia com linguagens existentes. As linguagens são sistemas” (WITTGENSTEIN, 2010, p. 128).

Assim, ele admite que uma linguagem não é algo que atinja um fim particular, mas possíveis conceitos definidos por certos sistemas os quais ele chamou de “linguagens” e que tais sistemas são construídos em analogia com outras linguagens. Para Wittgenstein (2010, p. 144), a linguagem também poderia ser vista como um conjunto de ligações causais que ele não teria o escrúpulo de inventar, julgando-se inapto a desenvolver um conjunto de ‘regras’ e ‘normas’ que pudessem justificar o uso de uma nova linguagem.

Contudo, ao fazer uma analogia entre linguagens diferentes (por exemplo, a linguagem natural e a linguagem matemática), estamos à procura de explicar certas coisas de uma linguagem a partir da outra linguagem, ao fato que ele faz uma breve observação sobre isso ao lembrar que a:

[...] possibilidade de explicar essas coisas sempre depende de alguma outra pessoa usar a linguagem da mesma maneira que eu uso. Se ela afirma que certa sequência de palavras tem sentido para ela e essa sequência não tem nenhum sentido para mim, só posso supor que, nesse contexto, ela está usando as palavras com um significado diferente daquele que dou a elas ou, então, está fazendo sem pensar (WITTGENSTEIN, 2005, p. 40).

E por essa razão ele resume que a linguagem “não pode dizer que tudo flui”. A linguagem só pode dizer as coisas que também podemos imaginar de outra maneira” (WITTGENSTEIN, 2005, p. 68).

O que um homem faz quando constrói (inventa) uma nova linguagem; sobre que princípios ele opera? Pois esse princípio é o conceito de “linguagem”. Toda linguagem recém-construída amplia (altera) o conceito de linguagem? – Considere sua relação com o conceito anterior: isso depende de como o conceito anterior foi estabelecido. – Pense na relação dos números complexos com o conceito anterior de número; e, novamente, na relação de uma nova multiplicação com o conceito geral da multiplicação dos números cardinais, quando dois números cardinais particulares (talvez muito grandes) são escritos e multiplicados pela primeira vez (WITTGENSTEIN, 2010, p. 85).

Em seu livro *Investigações Filosóficas*, argumenta que diferentes usos nos diferentes contextos sociais produzem diferentes significados às palavras –

os ‘jogos de linguagem’, que para ele são os processos de denominação e de repetição da palavra pronunciada e também “a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada” (WITTGENSTEIN, 2009, p. 19, § 7).

Vale destacar, que a base da teoria de Wittgenstein está no que ele concebe como ‘jogos de linguagem’. Em suas obras primeiras, o termo era usado indistintamente como um equivalente de ‘cálculo’. Diferentes cálculos eram diferentes ‘jogos de linguagem’.

Segundo Glock (1998, p. 225) a função dos ‘jogos de linguagem’ era “chamar a atenção para as várias semelhanças entre linguagem e jogos, do mesmo modo que a analogia com o cálculo sublinhava semelhanças entre linguagem e sistemas formais”.

Essas semelhanças presentes nos ‘jogos’ para Wittgenstein (2009, p. 149, § 340) não podem ser adivinhadas, é “preciso que se veja a sua aplicação e assim se aprenda. Pode-se dizer que o conceito ‘jogo’ é um conceito de contornos imprecisos” e “jogar consiste em movimentar coisas sobre uma superfície de acordo com certas regras” (WITTGENSTEIN, 2009, p. 17, § 3).

Assim, para ele não há nenhuma característica única que seja comum a todas as coisas a que ele chama de ‘jogos’. Mas tampouco pode-se dizer que o termo jogo tenha vários significados independentes (como por exemplo, a palavra “banco”). Para ele “os ‘jogos’ são processos inter-relacionados de diversas maneiras, com muitas transições diferentes entre um e outro” (WITTGENSTEIN, 2010, p. 53).

Nesse sentido, é possível inferir que o significado das palavras se dá através de seus empregos, como no exemplo de uma demonstração matemática apresentado por ele “Deixe que a demonstração lhe ensine o que foi demonstrado” (WITTGENSTEIN, 2009, p. 285), ou seja, “o uso de uma palavra na linguagem é o seu significado” (WITTGENSTEIN, 2010, p. 42).

Assim, “entender uma palavra pode significar: saber como é usada; ser capaz de aplicá-la” (WITTGENSTEIN, 2010, p. 33), ou como sugere “a explicação do significado explica o uso da palavra” (WITTGENSTEIN, 2009, 2010).

Wittgenstein (2009) entende que os ‘jogos de linguagem’ só têm sentido nos contextos em que eles foram proferidos, como por exemplo, ao descrever a situação dos operários, quando um deles pronuncia “lajota”, sugerindo

nesse contexto, que o outro operário deveria lhe trazer uma lajota. Fora desse contexto, o que significaria o operário gritar a palavra 'lajota'?

Esse e outros significados estão diretamente relacionados às diferentes atividades das diferentes 'formas de vida' que a utilizam e, portanto, diferem em seus usos, são práticas com regras específicas, convencionadas por uma 'gramática'.

A gramática não diz como a linguagem tem que ser construída para cumprir com sua finalidade, para agir, desta ou daquela maneira sobre as pessoas. Ela apenas descreve o emprego dos signos, mas de maneira alguma os elucida (WITTGENSTEIN, 2009, p. 186, § 496).

A 'gramática', conforme Vilela (2007), refere-se ao complexo conjunto de regras da linguagem ou o que comportaria a estrutura da linguagem; ela indica como podem ser usadas as expressões nos diferentes contextos em que aparecem e quais são as 'regras' de uso das palavras. O que faz sentido, o que é certo ou errado, é que é determinado por essas 'regras', inseridas/imersas nas 'formas de vida' de quem as pratica.

Para Wittgenstein (2009, p. 158, § 373), "a gramática diz que espécie de objeto uma coisa é". Ela que descreve o uso das palavras em uma língua (WITTGENSTEIN, 2010, p. 42).

Contudo, como salienta Wittgenstein (2010, p. 139) "a gramática não é responsável por nenhuma realidade. São as 'regras' gramaticais que determinam o significado (que o constituem) e, portanto, elas próprias não são responsáveis por qualquer significado e, nessa medida, são arbitrárias".

E acrescenta, elas são arbitrárias:

[...] da mesma forma que a escolha de uma unidade de medida. Mas isso significa apenas que a escolha é independente da extensão dos objetos a serem medidos e que a escolha de uma unidade não é "verdadeira" e a escolha da outra é "falsa" da mesma maneira com um enunciado de extensão verdadeiro ou falso (WITTGENSTEIN, 2010, p. 140).

Essa arbitrariedade indica que podemos desenvolver novas linguagens e por consequência novos 'jogos de linguagem' alterando a 'gramática' e as 'regras' presentes nessa 'gramática'. Vejamos o exemplo apresentado pelo filósofo.

Se conheço as regras da trigonometria elementar, posso examinar a

proposição $\text{sen}2x = 2\text{sen}x \cdot \text{cos}x$, mas não a proposição $\text{sen}x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$.

Mas isso quer dizer que a função seno da trigonometria elementar e a da trigonometria superior são conceitos diferentes. Se lhe damos o mesmo nome, fazemo-lo por um bom motivo, já que o segundo conceito traz em si a multiplicidade do primeiro; mas, para o sistema da trigonometria elementar, a segunda proposição não tem nenhum sentido e, naturalmente, não tem sentido nesse contexto perguntar se $\text{sen}x = x$ – etc (WITTGENSTEIN, 2005, p. 148).

Assim, a ‘gramática’ “permite à linguagem (ou às linguagens) ter os graus necessários de liberdade para a construção das proposições, matemáticas ou não” (WITTGENSTEIN, 2005, p. 57). Essas proposições, podem não ter significado numa determinada linguagem, mas em outra, produzem significado. Por exemplo, quando pensamos na construção de um modelo matemático que possa representar “o conjunto dos homens altos”. Na ‘gramática’ da matemática clássica, esse modelo não pode ser construído de forma satisfatória pelo modelador, enquanto que na ‘gramática’ da matemática fuzzy, sim (como veremos mais adiante).

Wittgenstein (2010, p. 140) salienta que a ‘gramática’ é composta de convenções, e que se pudesse descrever sua função, usando como exemplo o fato de convencionarmos os nomes das cores, ele diria que,

[...] se são tornadas necessárias por certas propriedades das cores (digamos), isso tornaria as convenções supérfluas, já que, nesse caso, eu poderia dizer precisamente aquilo que as convenções me impedem de dizer. Inversamente, se as convenções fossem necessárias, isto é, certas combinações de palavras tivessem de ser excluídas como contra-sensos, então, justamente por esta razão, não posso indicar uma propriedade das cores que torne as convenções necessárias já que, então seria concebível que as cores não tivessem essa propriedade, e eu só poderia exprimir isso violando as convenções” (WITTGENSTEIN, 2005, p. 39).

Esse trecho sugere que as convenções são um ‘mal necessário’, já que com elas, podemos dizer o que ‘não é’, e sem elas, não poderia se quer definir o ‘que é’.

Tentando entender melhor esse termo buscamos no dicionário MICHAELIS (2012) o significado para o termo ‘convenção’, o que nos define como um “acordo, ajuste, combinação, convênio. O que está geralmente admitido e praticado, ou tacitamente convencionado nas relações sociais”.

Mais especificamente no contexto da matemática, Paias (2009, p. 40) afirma que “a noção de convenção é considerada como regras pré-estabelecidas e

que o aluno precisa aceitar como algo imposto ou sem explicação e normas que ele deve acatar”. O que para nós, está em acordo com o sustentado por Wittgenstein, como aponta Jesus (2002) ao esclarecer as discussões embrenhadas por Paul Ernest sobre o caráter convencional da matemática atribuído por Wittgenstein.

Em primeiro lugar, segundo ele, Wittgenstein esclarece que a base decisória da matemática não é uma questão de escolha livre ou arbitrária, mas sim uma decorrência daquilo que é aceito na prática social. Esclarece ainda que nem todas as proposições aceitas em matemática são, individualmente ou diretamente, convenções estipuladas. É claro que, prossegue Ernest, para ele, quando uma proposição da matemática é aceita como certeza inabalável, o status de regra gramatical ou convenção deve ser atribuído a ela (JESUS, 2002, p. 54).

Já para Sierra (2000 apud Paias, 2009, p. 40) “o termo convenção matemática é utilizado para especificar acordos que se apresentam necessários para dar coerência a uma teoria matemática e às suas respectivas representações simbólicas e algorítmicas”, como também salienta Martinez (2005, p. 200) o fato de que “as convenções matemáticas são processos sociais de construção do conhecimento que possibilitam, por exemplo, estabelecer a igualdade $2^0 = 1$ ”.

Podemos por exemplo, pensar que diferentes estratégias de resolução de problemas foram expressas ao longo da história, e a forma como uma solução é entendida e aceita é socialmente e historicamente determinada. A matemática usada nessas resoluções é baseada em uma variedade de convenções, como os símbolos matemáticos e os sistemas de notação matemática que evoluíram através dos séculos.

Essa evolução na variedade das convenções só pôde ser desenvolvida, porque, na concepção de Wittgenstein, a matemática é um construto humano, e portanto, formado pelo que ele chama de ‘forma de vida’, que são caracterizadas como “uma formação cultural ou social, a totalidade das atividades comunitárias em que estão imersos os nossos jogos de linguagem” (GLOCK, 1998, p. 174).

Como também sustenta Gottschalk (2008, p. 80), ao dizer que Wittgenstein se utiliza desse termo ‘formas de vida’ para “designar hábitos, costumes e crenças de um determinado grupo imerso num contexto cultural que fundamenta suas práticas e ações, envolvidas com a linguagem”.

Numa convergência para o termo, Jesus (2002, p. 37), esclarece que as formas de vida:

[...] têm prioridade; elas são o socialmente dado. Elas são os grupos identificáveis de comportamento social, práticas sociais, que podem apenas ser dados de forma extensa, porque é somente a sua existência que os legitima. Há muitas formas de vida e muitos jogos de linguagem, e qualquer palavra ou expressão particular pode estar envolvida em vários deles. As formas de vida podem se desenvolver e mudar. Da mesma maneira, os jogos de linguagem têm uma tessitura aberta e podem aumentar, mudar e levar a direções inesperadas.

E nas palavras do filósofo “[...] representar uma linguagem equivale a representar uma forma de vida” (WITTGENSTEIN, 2009, p. 23, § 18), evidenciando ainda que “a expressão ‘jogo de linguagem’ deve salientar aqui que falar uma língua é parte de uma atividade ou de uma forma de vida” (WITTGENSTEIN, 2009, p. 27, § 23).

Essas ‘formas de vida’, segundo Araújo (2004, p. 106-107) seguem ‘regras’ específicas, dando origem aos ‘jogos de linguagem’, contudo, diferentes ‘jogos de linguagem’ podem ter ‘regras’ em comum, isto é, eles não possuem “um núcleo comum, um fio único a amarrar os jogos ou os usos linguísticos todos”, contudo “tal como uma corda, a trama é tecida por vários fios que garantem sua resistência”, formando assim, uma complexa rede de semelhanças, a qual Wittgenstein convencionou chamar de ‘semelhanças de família’.

Não posso caracterizar melhor essas semelhanças do que por meio das palavras ‘semelhanças familiares’; pois assim se sobrepõem e se entrecruzam as várias semelhanças que existem entre os membros de uma família: estatura, traços fisionômicos, cor dos olhos, andar, temperamento, etc., etc. – E eu direi: os ‘jogos’ formam uma família (WITTGENSTEIN, 2009, p. 52, § 67).

Wittgenstein exemplifica as ‘semelhanças de família’ com o caso das alavancas de uma locomotiva de trem.

Assim como as alavancas na cabina de uma locomotiva têm diferentes tipos de tarefas, assim ocorre com as palavras da linguagem que, de certa maneira, são como alavancas. Uma é a alavanca de uma manícula, pode ser movida continuamente, já que opera uma válvula; outra aciona um interruptor, que tem duas posições, uma terceira é a alavanca de uma bomba e só funciona quando movida para cima e para baixo etc. Mas todas são semelhantes, já que são todas acionadas pela mão (WITTGENSTEIN, 2010, p. 41).

Para Wittgenstein essa noção é crucial no ataque ao essencialismo, pois em sua visão não é necessário haver algo comum a todas as instâncias de um conceito que explique por que elas caem sob esse conceito (GLOCK, 1998, p. 324).

Nesse sentido, o estabelecimento de semelhanças entre os ‘jogos de linguagem’ se dá pelo que Wittgenstein caracterizou como ‘regras’, a priori nem

sempre estabelecidas. Segundo Glock (1998, p. 312) as 'regras' são como "padrões de correção; não descrevem, por exemplo, como as pessoas falam, mas definem o que é falar com sentido ou corretamente".

Como também discorre Gottschalk (2008, p. 81) explicitando sua visão sobre 'regras', ao afirmar que "não têm, elas próprias, algum significado, são apenas condições de significado. Têm a função de paradigmas, modelos que seguimos para dar sentido à nossa experiência empírica".

Por isso, 'seguir a regra' é uma prática. E acreditar seguir a regra não é: seguir a regra. E por isso não se pode seguir a regra '*privatum*', porque, do contrário, acreditar seguir a regra seria o mesmo que seguir a regra (WITTGENSTEIN, 2009, p. 114, § 202; p. 120, § 224).

O que leva o filósofo a fazer uma analogia entre a palavra 'concordância' e a palavra 'regra', pois de acordo com Wittgenstein (2009, p. 120, § 224) "elas são parentes, são primas. Se ensino alguém o uso de uma, com isso ele aprende também o uso da outra".

Assim, no processo de ensino-aprendizagem, Gottschalk (2008, p. 92) salienta que compreender:

[...] não é um processo mental, mas ser capaz de seguir uma regra, ou seja, é dominar uma técnica. A partir daí, espera-se que o aluno passe a proceder corretamente (isto é, como a comunidade referente ao jogo de linguagem em questão assim o espera). A compreensão depende de um ensino de regras, conceitos e procedimentos e, fundamentalmente, de um treino, para que o aluno comece, a partir de um determinado momento não previsível a priori, a "fazer lances" no jogo de linguagem no qual está sendo introduzido, inclusive aplicando-o a situações empíricas.

Assim, o sistema de 'regras' que determinam um cálculo, por exemplo, determina, com isso, também o significado de seus signos. E nas palavras do filósofo "Expresso de modo mais concreto: a forma e as regras da sintaxe são equivalentes. Portanto, se mudo as regras – aparentemente, as completo, digamos, então mudo a forma, o significado" (WITTGENSTEIN, 2005, p. 149).

O fato fundamental aqui, segundo Wittgenstein é que "fixamos as regras, uma técnica, para um jogo, e então, ao seguirmos as regras, as coisas não funcionam tão bem como havíamos suposto; portanto, nós nos enleamos, por assim dizer, em nossas próprias regras" (WITTGENSTEIN, 2009, p. 74, § 125).

Wittgenstein (2009) ainda adverte que não se pode seguir a regra privadamente, ou seja, não podemos aplicar 'regras' aleatórias "nossas" às

atividades (por exemplo, em matemática), pois a matemática tem uma lógica e esta lógica tem que ser respeitada, caso contrário não obteremos sucesso na atividade proposta.

O que denominamos “seguir uma regra” é algo que apenas um homem poderia fazer apenas uma vez na vida? – Trata-se naturalmente, de uma observação para a gramática da expressão “seguir a regra”.

Não é possível um único homem ter seguido uma regra uma única vez. Não é possível uma única comunicação ter sido feita, uma única ordem ter sido dada ou entendida uma única vez, etc. – Seguir uma regra, fazer comunicação, dar uma ordem, jogar uma partida de xadrez, são hábitos (usos, instituições).

Compreender uma frase significa compreender uma língua. Compreender uma língua significa dominar uma técnica. (WITTGENSTEIN, 2009, p. 113, § 199).

O autor acrescenta que devemos nos recordar que há certos critérios de comportamento para dizer se alguém não entende uma palavra, ou seja, se a palavra não lhe diz nada, ele não sabe o que fazer com ela. E também há critérios para ele ‘acreditar entender’ a palavra, vinculando um significado, mas não o significado correto. E, finalmente, critérios para ele entender a palavra corretamente. No segundo caso, podemos falar numa compreensão subjetiva, a qual o filósofo denominou ‘linguagem privada’, ou seja, ‘sons’ que ninguém entende, mas que a pessoa ‘parece entender’.

Como exemplo, podemos citar Meyer (2009) em seu artigo ‘Uso de Palavras – Jogos de Linguagem em Educação Matemática’⁸, em que ele apresenta um exemplo de problema na construção do significado de ‘ângulo reto’. Na situação, um dos alunos acredita ter entendido o conceito de ângulo reto, mas ao ser indagado sobre, o professor percebe que o aluno foi enganado pela sua ‘linguagem privada’. Para o aluno a palavra ‘*right angle*’, significaria ‘ângulo direito’, quando na verdade, a tradução correta seria ‘ângulo reto’. Assim, o aluno acreditou que os ângulos de que o professor estava falando poderiam ser ‘ângulos direitos’ e, existiriam outros chamados ‘ângulos esquerdos’.

Esse exemplo, nos mostra que para alguém entender a palavra/conceito, ela deve emergir do convívio que tem com diferentes contextos e com diferentes ‘formas de vida’ procurando jogar o ‘jogo de linguagem’ que está sendo jogado, conforme afirmam Vilela e Mendes (2011, p. 13),

⁸ Do original “Use of Words – Language-Games In Mathematics Education”

[...] A linguagem estabelece coletivamente o significado e a compreensão, também ligados à linguagem, mas não como designação. Estão associados ao som, ao contexto em que é usada, aos modos de comunicação; compreender é uma capacidade manifesta no uso (Glock, 1998, p. 35), numa demonstração pública do assunto, ou seja, importa o que se diz ou escreve, ou outra manifestação externa da compreensão, em oposição a um processo mental, intuitivo e particular (VILELA; MENDES, 2011, p. 13).

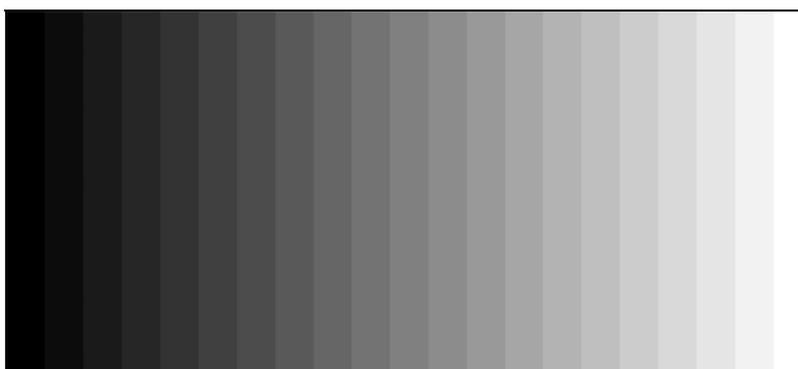
Wittgenstein, em sua contribuição, coloca “cada vez que em vez de tal e tal representação também seria possível usar alguma outra, damos mais um passo rumo ao objetivo, que é entender a natureza do que é representado” (WITTGENSTEIN, 2009, p. 37), o que nas palavras do filósofo seria um ‘outro modo de ver’.

3.4 VOLTANDO-SE PARA A NOSSA PESQUISA

Ludwig Wittgenstein enfatiza que quando uma linguagem é construída usando um sistema de coordenadas para representar um estado de coisas no espaço, por exemplo, introduz-se na linguagem um elemento que ela normalmente não usa. E isso, segundo o filósofo, “mostra a conexão entre linguagem e a realidade” (WITTGENSTEIN, 2005, p. 62).

Nesse sentido, considerando as argumentações de Wittgenstein, podemos supor a possibilidade de novas construções da linguagem. Assim, tentando resgatar o tema deste trabalho, podemos pensar no seguinte problema, adaptado de Wittgenstein (2005, p. 59), ‘Se existe uma “régua” de cores (Figura 3), que contenha uma escala entre o preto total e o branco total, até que ponto podemos comparar as cores com pontos em uma escala?’ E, mais: ‘É possível desenvolver um modelo matemático que represente esse sistema?’

Figura 3 - Régua de Cores



Fonte: <http://ateliicoloriz.blogspot.com.br>

Buscando responder a primeira pergunta, Wittgenstein (2005, p. 59-60) faz algumas outras perguntas:

[...] Mas como essas direções diferentes encontram expressão na gramática? Não é isso o mesmo que eu ver um cinza e dizer “Espero que este cinza fique mais escuro”? Como a gramática trata a diferença entre “mais claro” e “mais escuro”? Ou como pode a régua que vai do branco ao preto ser aplicada ao cinza em uma direção particular?

E a isso, ele propõe “Temos de encontrar o caminho que leva do lugar em que estamos ao lugar em que a questão é decidida” (WITTGENSTEIN, 2005, p. 61).

Assim, precisamos de novos conceitos e recorreremos continuamente aos da linguagem dos objetos físicos, o que na visão do filósofo pode ser:

[...] a palavra ‘precisão’ é uma dessas expressões dúbias. Na linguagem cotidiana, refere-se a uma comparação e, então, é inteiramente inteligível. Onde está presente certo grau de imprecisão, a precisão perfeita também é possível. Mas o que significa dizer que nunca posso ver um círculo preciso e estou usando essa palavra não relativamente, mas absolutamente? (WITTGENSTEIN, 2005, p. 219).

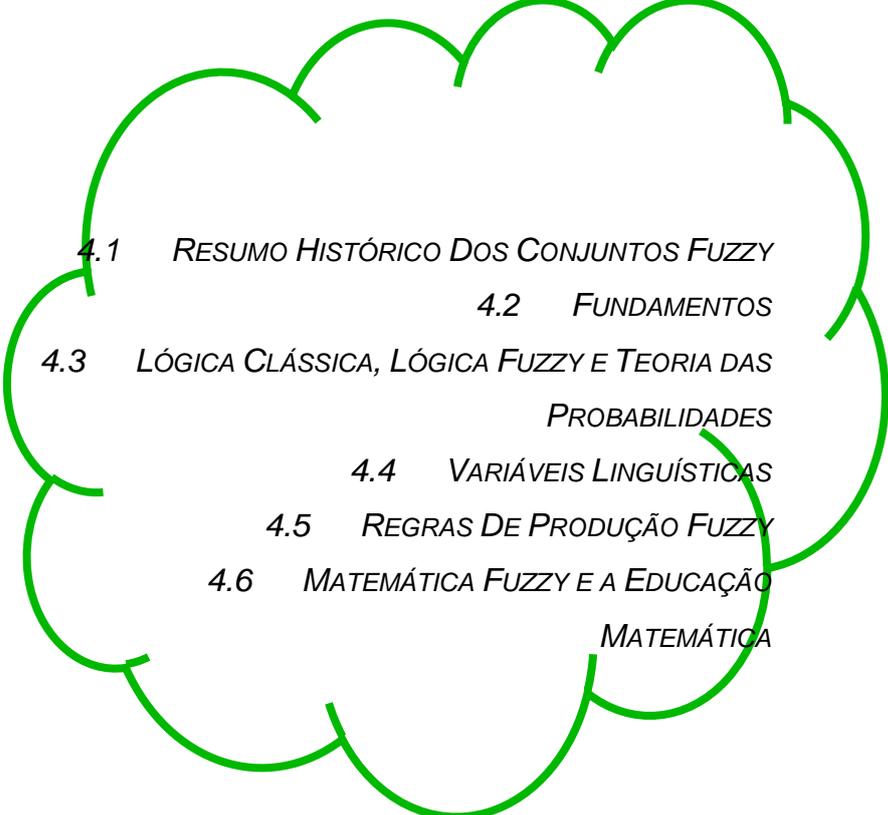
Será que ‘Posso estar tão certo da sensação de outra pessoa quanto de um fato qualquer?’ Se, isso for possível, as proposições “Ele está gravemente deprimido”, “ $25 \times 25 = 625$ ” e “Tenho 60 anos de idade” não se tornariam instrumentos semelhantes?

Para Wittgenstein (2009, p. 289) “é de se supor: a certeza é de uma espécie diferente. Ela parece apontar para uma diferença psicológica. Mas trata-se de uma diferença lógica”. E essa ‘diferente’ lógica parece poder responder também as perguntas sobre a ‘régua de cores’.

Essa lógica, presente numa linguagem mais próxima da natural, vem a ser a sustentação básica para o que se chama matemática fuzzy. Essa matemática, que possui uma linguagem própria será o nosso ponto de discussão no próximo capítulo, e de certa forma, poderá nos ajudar a apresentar considerações sobre o problema da ‘gramática’ do ‘mais claro’ ou do ‘mais escuro’.

4

MATEMÁTICA FUZZY

- 
- 4.1 *RESUMO HISTÓRICO DOS CONJUNTOS FUZZY*
 - 4.2 *FUNDAMENTOS*
 - 4.3 *LÓGICA CLÁSSICA, LÓGICA FUZZY E TEORIA DAS
PROBABILIDADES*
 - 4.4 *VARIÁVEIS LINGUÍSTICAS*
 - 4.5 *REGRAS DE PRODUÇÃO FUZZY*
 - 4.6 *MATEMÁTICA FUZZY E A EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA*

4.1 RESUMO HISTÓRICO DOS CONJUNTOS FUZZY

Partindo do pressuposto que para compreendermos o presente, precisamos saber o que aconteceu no passado, apresentamos um pouco da história da matemática fuzzy, com o intuito de que ao final deste capítulo possamos justificar a importância dessa teoria no ensino de matemática, em específico, nos modelos matemáticos.

Assim, resgatando as origens dessa teoria, Kosko (1993) afirma que, em 1965, Lotfi Askar Zadeh, nascido em Bakul capital do Azerbaijão, graduado em engenharia elétrica na Universidade do Teerã no Irã e atualmente professor na Universidade do Sul da Califórnia, em Berkeley, publicou seu famoso artigo '*Fuzzy Sets no Journal Information and Control*' sobre a teoria dos conjuntos fuzzy. Esse artigo foi baseado na lógica multivalorada de Jan Lukasiewicz e que posteriormente teve seu trabalho continuado por Max Black, cujo principal desenvolvimento foi a base para o que na lógica fuzzy atual se chama funções de pertinência de conjuntos fuzzy, conforme salienta Pagliosa (2003).

No início do seu desenvolvimento, a teoria fuzzy, teve muitos problemas, principalmente nos Estados Unidos, pois:

[...] agências governamentais não deram importância para a pesquisa fuzzy. Poucos jornais ou conferências aceitaram artigos sobre fuzzy. Departamentos acadêmicos não promoveram as ideias fuzzy, pelo menos aquelas que tratavam apenas de lógica fuzzy. A pesquisa fuzzy naquela época foi muito escassa e secreta. Ela cresceu e amadureceu sem o suporte habitual de subsídios científicos [...] (KOSKO, 1993, p. 20, tradução nossa).

O que para Barros e Bassanezi (2006, p. 3) são as manifestações de muitos matemáticos que acreditavam “que a falta de rigor dos processos fuzzy poderia causar uma perda irremediável para o avanço da matemática, desenvolvida ao longo dos séculos e entendida como uma evolução do pensamento lógico”.

Apesar desses pensamentos neofóbicos, o avanço da teoria fuzzy continuou, e se deu a partir de 1970, principalmente pelo interesse comercial e industrial que essa nova pesquisa despertou, com destaque para os processos de controle industrial. Neste período o professor Ebrahim Mamdani do *Queen Mary College* de Londres utilizou a teoria fuzzy para construir um sistema que controlasse um motor a vapor. A principal vantagem, de acordo com o próprio Mamdani e

transcrito no livro '*Fuzzy Thinking*' de Bart Kosko, empregada nesse controle é que não precisava de um modelo (analítico) para o processo, bastava implementar algumas regras de manuseio, com o uso da experiência, da intuição e da heurística.

Esse primeiro sistema fuzzy mostrou que era possível modelar com as palavras (variáveis linguísticas), sem um conhecimento matemático avançado. Basta verificar que na década de 80, o professor Michio Sugeno do Instituto de Tecnologia de Tóquio construiu um sistema fuzzy que controlava a estabilidade de vôo de um helicóptero não tripulado. De acordo com Kosko (1993, p. 170, tradução nossa), "Sugeno criou um sistema usando aproximadamente 100 regras [...] e acrescentou um controle de voz como um piloto para guiar o helicóptero com termos como 'suba', 'desça', 'pare', 'direita' e 'esquerda'".

Na década seguinte, surgiram inúmeros processos controlados por sistemas fuzzy, dentre eles Ortega (2001, p. 8) aponta os "controladores de fornos de cimento, de usinas nucleares, de processos químicos e biológicos".

Em 1977, Didier Dubois aplicou a teoria fuzzy em seus estudos sobre controle de tráfego, em 1985, Masaki Togai e Hirouyke Wata criaram o primeiro chip fuzzy no Laboratório Bell e em 1987 a empresa Sendai inaugurou o primeiro controlador automático de partida e chegada dos metrô de Tóquio com 59 regras fuzzy (KOSKO, 1993).

Ainda na década de 80, mais especificamente em 1988, a Yamaichi Fuzzy Fund, põe em operação o primeiro sistema de comércio financeiro fuzzy do mundo.

Contudo, foi na década de 1990 que os sistemas fuzzy ganharam popularidade, pois de acordo com Reznick (1997, apud Ortega 2001), nesse ano a *Matsushita Electric Industrial Co.* lançou no mercado japonês a primeira máquina de lavar roupa baseada nas teorias fuzzy. A disseminação desta tecnologia usando a matemática fuzzy pode ser percebida atualmente em muitos objetos eletroeletrônicos e eletrodomésticos como microondas, aspirador de pó, máquina fotográfica, televisão ou uma panela de pressão elétrica, cujo sistema de controle é baseado em sistemas fuzzy. Isso se tornou possível graças aos laboratórios criados especialmente no Japão, dedicados a esse tipo de pesquisa.

Na Europa, os conceitos sobre lógica fuzzy foram muito difundidos, mas somente no Japão é que ela ganhou respeitável espaço. Segundo Kosko (1993), em dezembro de 1990, de 38 patentes fuzzy registradas naquele ano, cerca

de 30 foram patenteadas no Japão.

No Brasil, as teorias fuzzy têm sido muito utilizadas nas áreas médica e epidemiológica para resolver problemas de diagnósticos médicos e controle de pragas, áreas em que o grau de incerteza é muito grande. Os principais trabalhos nessa área são desenvolvidos pelo Grupo de Pesquisa em Biomatemática da UNICAMP⁹, com diversos artigos, dissertações, teses e livros publicados. Destacam-se pesquisadores como: Rodney Carlos Bassanezi, Laécio Barros e Fernando Gomide.

Um diagnóstico médico, por exemplo, deve considerar diversos sintomas do paciente para ‘tentar’ chegar a um laudo conclusivo. O raciocínio médico baseia-se muito mais em graus de possibilidade (certeza) do que em graus de probabilidade. Os médicos, normalmente não expressam suas conclusões por meio de números, mas utilizam termos linguísticos para associar o quanto os sintomas dos pacientes estão ligados à doença. Além disso, o paciente que procura um médico não está interessado em saber qual a chance de ter a doença, mas sim, se ele está ou não com ela.

Assim, buscando compreender essa teoria, nos tópicos a seguir, apresentamos os seus principais fundamentos.

4.2 FUNDAMENTOS

Os conjuntos fuzzy foram introduzidos por Zadeh em 1965 “[...] com a principal intenção de dar um tratamento matemático a certos termos linguísticos subjetivos, como “aproximadamente”, “em torno de”, dentre outros [...]” (BARROS; BASSANEZZI, 2006, p. 12). Concebido originalmente por Zadeh (1965, p. 339), o conceito de conjunto fuzzy foi baseado na ideia de que todo conjunto clássico pode ser caracterizado por uma função, chamada função característica. Essa função é definida como:

Definição 1. Seja U um conjunto e A um subconjunto de U . A função característica de A é dada por

⁹ Maiores informações acesse <http://www.ime.unicamp.br/~biomat/>

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

A função característica de A está definida para todos os elementos do universo U . Assim, ela mapeia U aos seus dois únicos elementos $\{0,1\}$.

$$\chi_A : U \rightarrow \{0,1\}$$

Nos conjuntos clássicos, um elemento pode apenas pertencer ou não pertencer a um dado conjunto. Assim, dado um conjunto A e um elemento x , dizemos que $x \in A$ ou que $x \notin A$. Por exemplo, considere o conjunto dos números naturais \mathbb{N} . Sabemos que $2 \in \mathbb{N}$ e que $0,5 \notin \mathbb{N}$. Mas existem casos em que os elementos de um conjunto não estão bem definidos quanto a sua pertinência.

Imaginemos um conjunto formado pelos números naturais que são muito pequenos, representados por,

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ é muito pequeno}\}$$

Será que os números 1 e 15 pertencem a B ? A resposta é incerta, pois não sabemos quão pequenos devem ser os números a ponto de pertencerem ao conjunto B . O que podemos fazer é associar graus de pertinência aos números 1 e 15 dentro do que está proposto no conjunto. Neste exemplo, podemos dizer que o número 1 tem grau de pertinência 0,9 e o número 15 tem grau de pertinência 0,2, numa escala que vai de 0 a 1.

Assim, podemos caracterizar conjuntos que não possuem fronteira definida por meio de uma função de pertinência. Por exemplo, o conjunto dos homens altos. Os elementos desse conjunto não possuem uma pertinência bem definida, pois 'o que é um homem alto?' 'Qual deve ser a altura de um homem para que ele seja considerado alto?' O alto para uma pessoa pode não ser alto para outra. É para este tipo de conjunto que se estruturou o conceito de função de pertinência, definido como:

Definição 2. Seja U um conjunto (clássico); um subconjunto fuzzy F de U é caracterizado por uma função

$$\varphi_F : U \rightarrow [0,1]$$

pré-fixada, chamada de função de pertinência do subconjunto fuzzy F . Por comodidade e sem perda de generalidade, neste trabalho, trataremos do subconjunto fuzzy como um conjunto fuzzy.

O valor de $\varphi_F(x) \in [0,1]$ estabelece o grau de pertinência que o elemento x está no conjunto fuzzy F . Quando $\varphi_F = 0$ e $\varphi_F = 1$ adotarem esses valores, teremos respectivamente, uma não pertinência e uma pertinência completa em relação ao conjunto fuzzy.

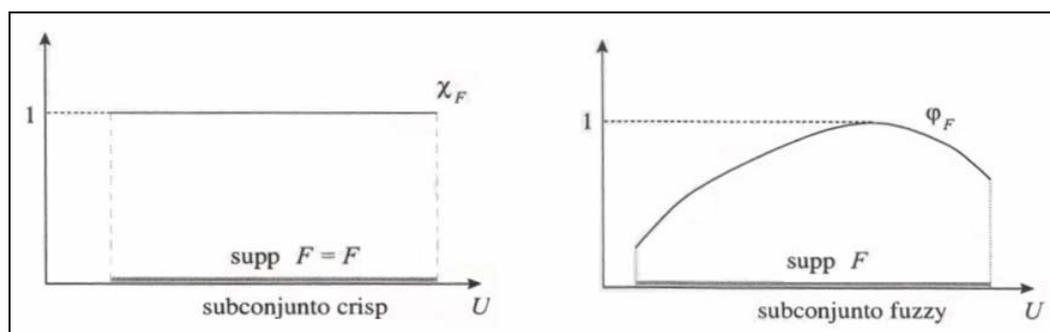
De acordo com Barros e Bassanezi (2006, p. 14) “a definição de subconjunto fuzzy foi obtida simplesmente ampliando-se o contradomínio da função característica que é o conjunto $\{0,1\}$ para o intervalo $[0,1]$ ”. Assim, o conjunto clássico é um caso particular de um conjunto fuzzy em que a função de pertinência φ_F é sua função característica χ_F . Os conjuntos clássicos são conhecidos como conjuntos crisp (nítido, do dicionário) na linguagem fuzzy.

Os conjuntos fuzzy são compostos de um par ordenado de números, dispostos pelo primeiro elemento x dado para um conjunto clássico U , e o segundo, o valor de pertinência, dado pela função $\varphi_F(x)$. A representação destes elementos é dada por $F = \{(x, \varphi_F(x)), \text{com } x \in U\}$, onde F é um conjunto fuzzy.

Em conjuntos, tanto fuzzy quanto clássicos, existe o chamado suporte de um conjunto, que é a região do conjunto universo U caracterizada pelos valores de pertinência diferentes de zero, ou seja, $\text{supp } F = \{x \in U : \varphi_F(x) > 0\}$.

Numa representação cartesiana de dois conjuntos, um clássico e outro fuzzy, vemos na Figura 4, a representação de suas respectivas funções suporte.

Figura 4 - Conjunto Crisp e Conjunto Fuzzy



Fonte: Barros e Bassanezi (2006, p. 15)

Exemplos de Conjuntos Fuzzy

Para ilustrar como são definidas as funções característica e de pertinência, bem como mostrar que esses conceitos estão presentes em enunciações matemáticas e em ações não matemáticas com que nos defrontamos, apresentamos alguns exemplos.

(Números Ímpares) Considere o conjunto dos números naturais ímpares:

$$I = \{n \in \mathbb{N}^+; n \text{ é ímpar}\}$$

A função característica de I é a seguinte:

$$\chi_I(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ for par} \\ 1, & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Assim, apenas com a função característica é possível descrever todos os elementos de I , não havendo a necessidade de construir uma função de pertinência para representar esse conjunto.

(Números muito pequenos) Considere o subconjunto P dos números naturais muito pequenos:

$$P = \{n \in \mathbb{N}; n \text{ é muito pequeno}\}$$

A função de pertinência de P que associa a cada n natural um valor muito pequeno é a seguinte:

$$\varphi_P(n) = \begin{cases} \left(1 - \frac{n}{4}\right) & \text{se } 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{se } n \notin [0,4] \end{cases}$$

Assim, o conjunto fuzzy P , caracterizado por $\varphi_P(n)$ é dado por $\varphi_P(0) = 1$, $\varphi_P(1) = 0,75$, $\varphi_P(2) = 0,5$, $\varphi_P(3) = 0,25$, $\varphi_P(4) = 0$. Contudo, vale ressaltar que se outra pessoa quisesse caracterizar de forma diferente a função de pertinência, seus graus de pertinência mudariam. Por exemplo, se a função fosse caracterizada por:

$$\varphi_{p_1}(n) = \begin{cases} e^{-n} & \text{se } 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \text{se } n \notin [0,4] \end{cases}$$

Os valores de pertinência caracterizados pela função φ_{p_1} seriam dados por $\varphi_{p_1}(0) = 1$, $\varphi_{p_1}(1) = 0,3678$, $\varphi_{p_1}(2) = 0,1353$, $\varphi_{p_1}(3) = 0,0497$ e $\varphi_{p_1}(4) = 0,0183$. Assim, podemos afirmar que uma função de pertinência pode ser dada de infinitas maneiras, dependendo de quão pequeno possa se querer.

(Conjunto fuzzy dos Jovens) Barros e Bassanezi (2006) ilustram o grau de pertinência a partir de uma análise em relação à população jovem de uma cidade.

Inicialmente, imaginemos os habitantes de uma determinada cidade. A cada indivíduo desta população podemos associar um número real correspondente a sua idade. Assim, vamos considerar como conjunto universo das idades o intervalo $U = [0,100]$, onde $x \in U$ é interpretado como a idade de um indivíduo. Um subconjunto fuzzy J de U , dos jovens desta cidade, poderia ser caracterizado pelas seguintes funções de pertinência:

$$\varphi_J(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 10 \\ \frac{80-x}{70} & \text{se } 10 \leq x \leq 80 \\ 0 & \text{se } x > 80 \end{cases} \text{ Ou } \varphi_J(x) = \begin{cases} \left(\frac{40-x}{x}\right)^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 40 \\ 0 & \text{se } 40 < x \leq 120 \end{cases}$$

As duas funções de pertinência caracterizam os jovens da cidade, porém dependendo do conceito de jovem o modelador pode optar por uma ou outra. Este exemplo nos permite considerar pessoas bem jovens, pessoas menos jovens e pessoas nada jovens. Ou seja, a necessidade de termos ideias intermediárias, se faz necessária para conhecer a população desta cidade.

Neste exemplo, o conjunto adotado foi $U = [0,100]$ porque a característica usada para determinar se uma pessoa é jovem, é a sua idade (variando de zero ano até 100 anos). Contudo, poderíamos ter adotado outra característica, como “número de cabelos grisalhos, ou número de filhos, ou de netos”, como citam Barros e Bassanezi (2006, p. 19) e aí o conjunto U seria outro.

(Gorjeta e a Qualidade do Serviço) O exemplo apresentado por Gulley e Jang, (1995, p. 2-31), demonstra uma relação entre o valor da gorjeta e a qualidade do serviço em um restaurante.

Assim, dado um número real entre zero e 10 que represente a qualidade do serviço de um restaurante (onde 10 é excelente), qual deve ser o valor da gorjeta, sabendo que devemos seguir três regras:

Se o serviço é ruim, então a gorjeta é pequena.

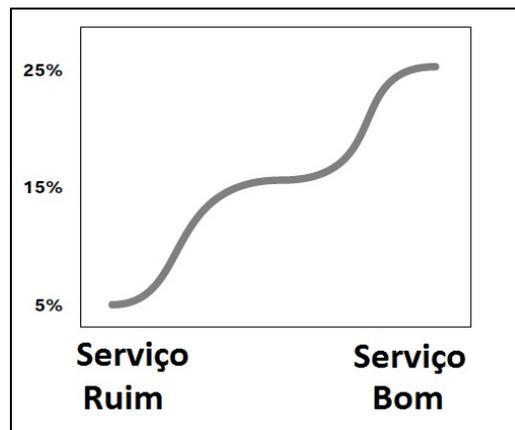
Se o serviço é bom, então a gorjeta é razoável.

Se o serviço é excelente, então a gorjeta é grande.

E que, devemos adotar que uma gorjeta pequena é de 5% do valor serviço, uma gorjeta razoável é de 15% e uma gorjeta grande é de 25% do valor do serviço.

Uma solução gráfica para essa situação é apresentada na Figura 5.

Figura 5 - Gorjeta x Qualidade do Serviço



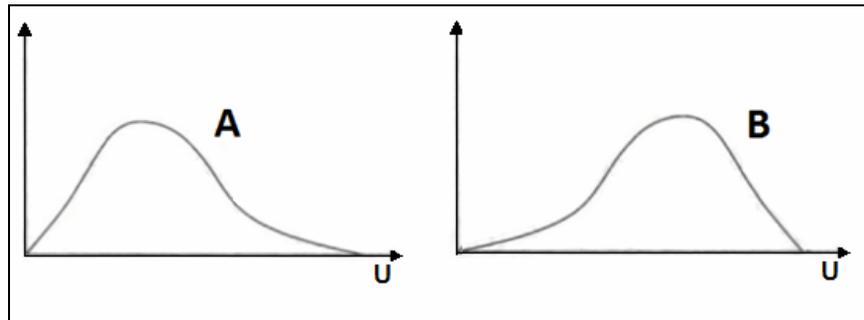
Fonte: Gulley e Jang (1995, p. 2-31)

O problema anterior indica a subjetividade inerente à representação da qualidade do serviço de um restaurante. Assim, vem a pergunta ‘Como podemos avaliar se o serviço é ruim?’ O serviço pode ser ruim para uma pessoa e pode não o ser para outra. Se levássemos isso para o contexto escolar e perguntássemos aos alunos sobre a qualidade do serviço de um restaurante, ‘Qual deveria ser a resposta correta?’ ‘Existe uma resposta correta ou existe uma resposta que se aproxime do que seria correto?’

Operações com Conjuntos Fuzzy

Para o estudo das operações entre conjuntos fuzzy vamos considerar dois conjuntos fuzzy A e B contidos em U e suas funções de pertinência representadas por φ_A e φ_B , respectivamente, como mostradas na Figura 6.

Figura 6 - Conjuntos Fuzzy A e B



Fonte: Barros e Bassanezi (2006, p. 22)

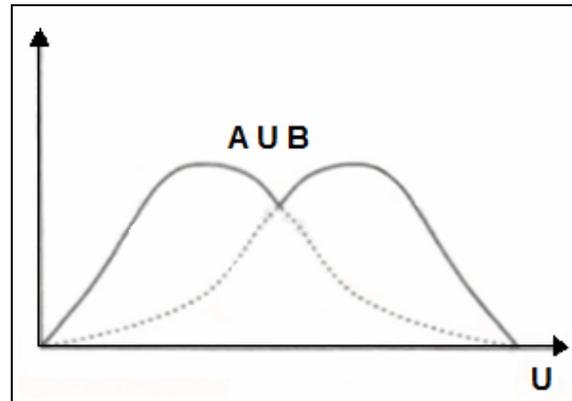
O conjunto A será conjunto de B se $\varphi_A \leq \varphi_B$ para todo $x \in U$ sendo denotado por $A \subset B$. Vale lembrar que o conjunto \emptyset possui função pertinência $\varphi_{\emptyset}(x) = 0$ e o conjunto universo U tem função de pertinência $\varphi_U(x) = 1$.

União

Segundo Weber e Klein (2003) a união é caracterizada por ser o contorno que define dois conjuntos fuzzy, assim, a função de pertinência da união é o maior valor de pertinência entre os dois conjuntos.

Definição 3 (União) A união (Figura 7) entre A e B é o conjunto fuzzy cuja função de pertinência é definida como

$$\varphi_{A \cup B}(x) = \max_{x \in U} \{ \varphi_A(x), \varphi_B(x) \}$$

Figura 7 - União dos Conjuntos Fuzzy A e B

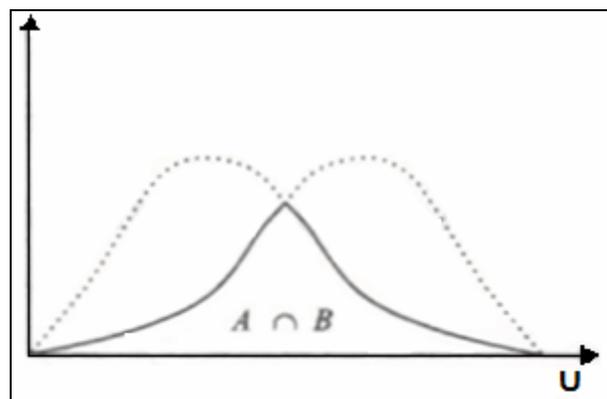
Fonte: Barros e Bassanezi (2006, p. 22)

Intersecção

Para Weber e Klein (2003) a intersecção é caracterizada por ser a parte comum aos dois conjuntos fuzzy, assim, a função de pertinência da intersecção é o menor valor de pertinência entre os dois conjuntos.

Definição 4 (Intersecção) A intersecção (Figura 8) entre A e B é o conjunto fuzzy cuja função de pertinência é definida como

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \min_{x \in U} \{ \varphi_A(x), \varphi_B(x) \}$$

Figura 8 - Intersecção dos Conjuntos Fuzzy A e B

Fonte: Barros e Bassanezi (2006, p. 22)

Complementar

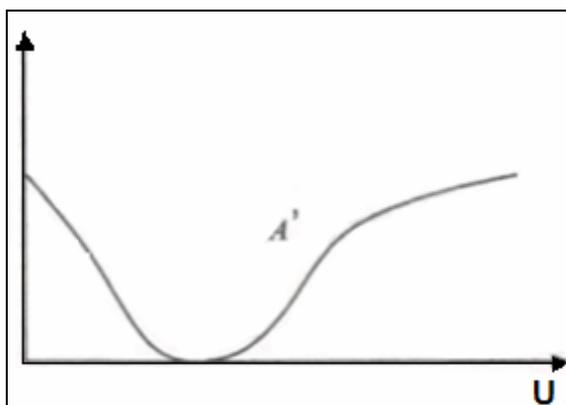
De acordo com Weber e Klein (2003, p. 54) o complementar de um conjunto é caracterizado por ser o conjunto dos elementos do conjunto universo que não pertencem ao conjunto especificado.

Definição 5 (Complementar) O complementar de A é o conjunto fuzzy A' cuja função de pertinência é definida como

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), \quad x \in U$$

E representada pela Figura 9, a seguir.

Figura 9 - Complementar do Conjunto Fuzzy A



Fonte: Barros e Bassanezi (2006, p. 22)

Buscando um melhor entendimento das operações entre conjuntos fuzzy, apresentamos a seguir alguns exemplos.

Exemplos das Operações com Conjuntos Fuzzy

(Conjunto fuzzy dos Idosos)

O exemplo retirado de Barros e Bassanezi (2006, p. 22), afirma que o conjunto fuzzy I dos idosos deve refletir uma situação oposta da relacionada com o conjunto dos jovens quando consideramos a idade dos seus elementos. Enquanto que para o conjunto de jovens a função de pertinência deve ser decrescente com a idade, para os idosos deve ser crescente. Uma possibilidade para a função de

pertinência de I é defini-la a partir do complemento da função de pertinência dos jovens de uma cidade, ou seja,

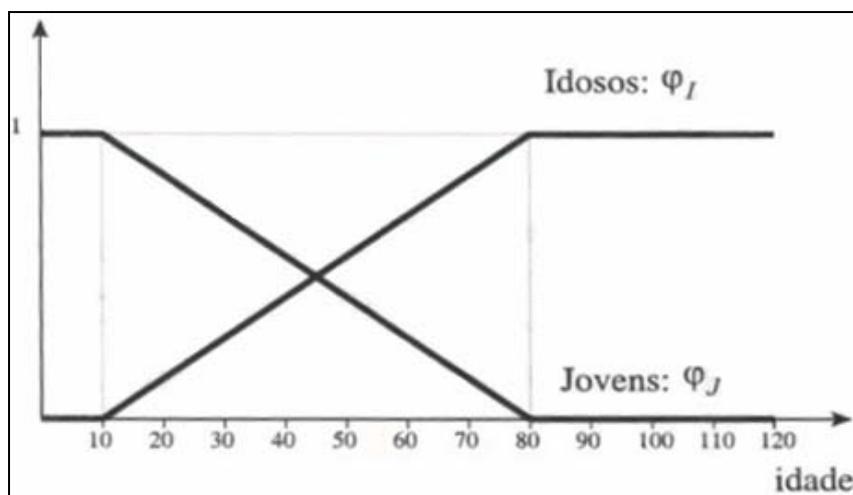
$$\varphi_I(x) = 1 - \varphi_J(x).$$

Em que $\varphi_J(x)$ é a função de pertinência do conjunto fuzzy dos jovens. O conjunto fuzzy I é o complementar fuzzy de J . Adotando para o exemplo a função de pertinência para os jovens a seguir

$$\varphi_J(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 10 \\ \frac{80-x}{70} & \text{se } 10 \leq x \leq 80 \\ 0 & \text{se } x > 80 \end{cases}$$

Para essa função de pertinência, temos a representação gráfica, dada pela Figura 10 aos subconjuntos I e J .

Figura 10 - Função de Pertinência dos Jovens e dos Idosos



Fonte: Barros e Bassanezi (2006, p. 23)

(Conjunto fuzzy dos febris e/ou com mialgia)

Neste exemplo, também de Barros e Bassanezi (2006, p. 26), temos um conjunto universo U que é composto pelos pacientes de uma clínica identificados pelos números 1, 2, 3, 4 e 5. Sejam A e B os conjuntos fuzzy que representam os pacientes com febre e mialgia (**dor muscular**), respectivamente. A Tabela 1 ilustra as operações de união, intersecção e complemento.

Tabela 1 - Pacientes com Febre e Mialgia

Paciente	Febre: A	Mialgia: B	$A \cup B$	$A \cap B$	A'	$A \cap A'$	$A \cup A'$
1	0,7	0,6	0,7	0,6	0,3	0,3	0,7
2	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0
3	0,4	0,2	0,4	0,2	0,6	0,4	0,6
4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
5	1,0	0,2	1,0	0,2	0,0	0,0	1,0

Fonte: Barros e Bassanezi (2006, p. 26)

Os valores dos graus de pertinência estão indicados nas colunas, com exceção da primeira coluna que indica os pacientes. Pode-se notar, por exemplo, na coluna $A \cap A'$ que alguns valores são diferentes de zero, o que viola a lei da não contradição na lógica clássica, mas no caso acima isso indica que o paciente possui os dois estados simultaneamente, febril e com mialgia, o que é perfeitamente aceitável.

Essas conclusões nos permitem enunciar a seguinte definição:

Definição 6. Dois conjuntos A e B são iguais se suas funções de pertinência forem iguais, ou seja,

$$\varphi_A(x) = \varphi_B(x) \text{ para todo } x \in U.$$

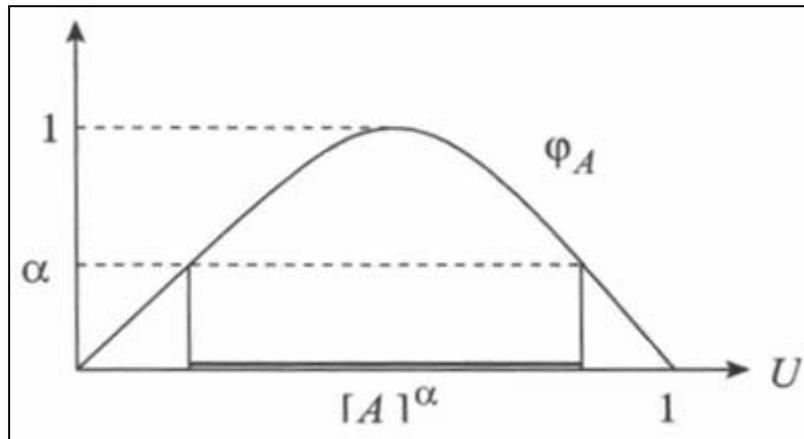
α -nível ou α -corte

De acordo com Reznik (1997, p. 28) “o conjunto dos elementos que pertencem ao conjunto fuzzy A ao menos para o grau α é chamado de α -nível ou α -corte” (tradução nossa). Pode-se dizer que esse conjunto classifica os elementos de um conjunto fuzzy de acordo com seu grau de pertinência, e pode ser representado algebricamente, segundo Barros e Bassanezi (2006, p. 29) por:

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Notemos, na Figura 11, que o α -nível é construído apenas dentro do conjunto suporte de um conjunto fuzzy.

Figura 11 - α nível



Fonte: Barros e Bassanezi (2006, p. 31)

Propriedades das Operações com Conjuntos Fuzzy

A maioria das propriedades válidas para os chamados conjuntos clássicos ou crisp são válidas para os conjuntos fuzzy. Porém, algumas não obedecem a essas propriedades, como é o caso visto anteriormente, da lei da não contradição, pois a interseção de um conjunto fuzzy com o seu complemento não é vazio.

Outra propriedade que não é válida é a da união de um conjunto com o seu complemento, que na teoria clássica afirma resultar no conjunto universo U , mas que na teoria fuzzy não tem como único resultado. Basta verificar na coluna onde está $A \cup A'$, da Tabela 1, que os resultados obtidos não mapeiam todo o conjunto universo U .

Assim, para nos certificarmos de quais propriedades são válidas para conjuntos fuzzy, apresentamos algumas delas a seguir:

- Propriedade Comutativa: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
- Propriedade Associativa: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$,
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$;
- Propriedade da Idempotência: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;
- Propriedade Distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

- Propriedade do Elemento Neutro: $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cup \emptyset = A$;
- Propriedade da Absorção: $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$;
- Leis de Morgan: $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

O Princípio de Extensão de Zadeh

Segundo Barros e Bassanezi (2006, p. 37) o princípio de extensão “é um método utilizado para estender as operações típicas dos conjuntos clássicos” para os conjuntos fuzzy. Para eles, “é uma das idéias básicas que promove a extensão de conceitos matemáticos não-fuzzy em fuzzy”, daí sua importância para os estudos de lógica fuzzy. Não adentraremos em maiores detalhes sobre esse princípio, pois não é foco deste trabalho.

Definição 7. Seja a função $f : X \rightarrow Z$ e A um conjunto fuzzy de X .

A extensão de Zadeh de f é a função \hat{f} que aplicada a A , fornece o conjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ de Z , cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{\{x: f(x)=z\}} \varphi_A(x) & \text{se } \{x: f(x)=z\} \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } \{x: f(x)=z\} = \emptyset \end{cases}$$

Números Fuzzy

Sabemos que os problemas do dia-a-dia produzem informações aproximadas que segundo Barros e Bassanezi (2006, p. 43) “[...] podem ser causadas pelos instrumentos de medidas, pelos indivíduos que estão tomando as medidas, pelo indivíduo que está sendo medido” e pela relação intrínseca com a realidade.

No entanto, quando vamos dar um veredito final, optamos por informar um valor preciso. Imagine uma seleção no exército, em que o método de escolha é a altura. Um candidato, com altura inferior a 1,75 metros, e sabendo que a altura mínima é de 1,75 metros, tentará dizer que sua altura é ‘por volta’ de 1,75 metros ou ‘aproximadamente’ isso, com intuito de passar no teste.

Assim, vem a pergunta: 'Ele mentiu?' Sim e não. Depende do parâmetro (ou da convenção) utilizado para dizer quão aproximado queremos a variável. Se ele tem altura de 1,74 metros e existe um grau de imprecisão na ordem de 0,01 metros, então ele disse a verdade, mas se o grau de imprecisão for da ordem de 0,1 metros, então ele mentiu.

Essas expressões 'por volta' e 'aproximadamente' são na verdade, os nossos conjuntos fuzzy e, o grau de pertinência é quem irá determinar o quão próximo é a altura do candidato e se ele realmente passou no teste. A esses números e com certas características bem definidas, autores com Earl Cox, Bart Kosko, Leonid Reznik, George Klir, Bo Yuan, Barros e Bassanezi e outros chamam de número fuzzy. Por facilidade com a língua e por todos definirem com o mesmo rigor, optamos por colocar a definição de Barros e Bassanezi (2006, p. 43), que segue.

Definição 8. Um conjunto fuzzy A é chamado de número fuzzy quando o conjunto universo no qual φ_A está definida é o conjunto dos números reais \mathbb{R} e satisfaz às condições:

- (i) Todos os α -níveis de A são não vazios, com $0 \leq \alpha \leq 1$;
- (ii) Todos os α -níveis de A são intervalos fechados de \mathbb{R} ;
- (iii) $\text{supp}A = \{x \in \mathbb{R} : \varphi_A(x) > 0\}$ é limitado.

Os números reais são um caso particular de números fuzzy, onde a função de pertinência torna-se a função característica. Ressaltamos que existe uma infinidade de representações para os números fuzzy, mas os que mais aparecem na literatura e que são os mais usados nas aplicações são os chamados: triangulares, trapezoidais e em forma de sino (gaussianos).

Apresentamos a seguir, a definição de cada um deles e sua forma característica.

Definição 9. Reznik (1997, p. 42) e Barros e Bassanezi (2006, p. 44) definem um número fuzzy como triangular se a função de pertinência tem a forma de um triângulo e é dada por:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{u-a} & \text{se } a \leq x \leq u \\ \frac{x-b}{u-b} & \text{se } u \leq x \leq b \\ 0 & \text{se } x \geq b \end{cases}.$$

Vale lembrar que o número fuzzy triangular não é necessariamente simétrico, pois podemos encontrar $u-a \neq u-b$. As expressões lingüísticas ‘em torno de’ e ‘perto de’ são exemplos dessa simetria e não-simetria do número fuzzy triangular, respectivamente. No caso da expressão ‘em torno de’ é de se esperar uma simetria, no caso do ‘perto de’ essa simetria não precisa existir.

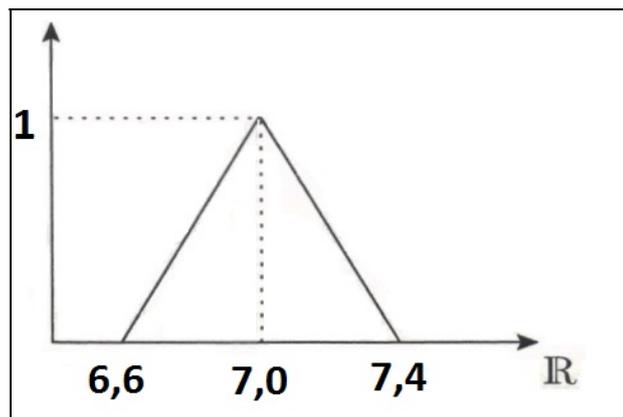
Vejamos o exemplo a seguir.

(Modificado Barros e Bassanezi, 2006, p. 45) A expressão em torno de 7 horas pode ser modelada matematicamente pelo número fuzzy triangular simétrico A , cuja representação cartesiana pode ser vista na

Figura 12 e, cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-7|}{0,4} & \text{se } 6,6 \leq x \leq 7,4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Figura 12 - Função de Pertinência ‘em torno de’ 7 horas



Fonte: Adaptado de Barros e Bassanezi (2006, p. 45)

Definição 10. Reznik (1997, p. 42) e Barros e Bassanezi (2006, p. 45) definem um número fuzzy como trapezoidal se a função de pertinência tem a forma de um trapézio e é dada por:

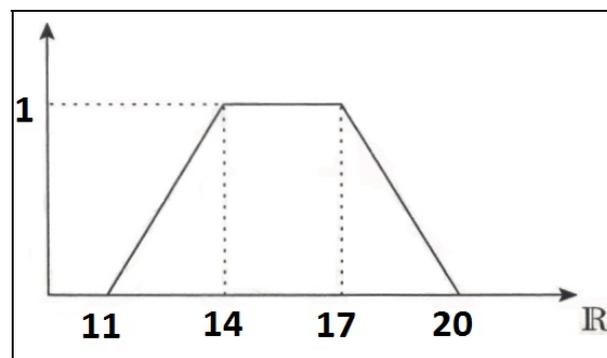
$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x < b \\ 1 & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{se } c < x \leq d \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Vejam os o exemplo a seguir.

(Barros e Bassanezi, 2006, p. 46) O conjunto fuzzy dos adolescentes pode ser representado pelo número fuzzy trapezoidal (Figura 13), e dado pela função de pertinência:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-11}{3} & \text{se } 11 \leq x < 14 \\ 1 & \text{se } 14 \leq x \leq 17 \\ \frac{20-x}{3} & \text{se } 17 < x \leq 20 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

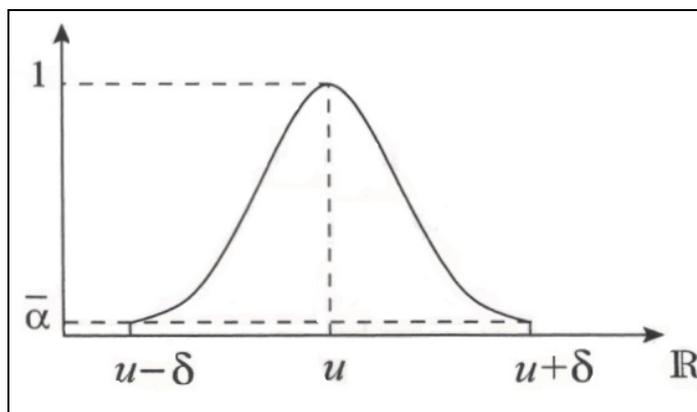
Figura 13 - Número Fuzzy Trapezoidal



Fonte: Barros e Bassanezi (2006, p. 47)

Definição 11. Reznik (1997, p. 42) e Barros e Bassanezi (2006, p. 45) definem um número fuzzy como gaussiano ou na forma de sino (Figura 14), se a função de pertinência tem a forma de um sino e é dada por:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-(x-u)^2}{a}\right) & \text{se } u - \delta \leq x \leq u + \delta \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Figura 14 - Número Fuzzy em Forma de Sino

Fonte: Barros e Bassanezi (2006, p. 47)

Operações Aritméticas com Números Fuzzy

As operações com números fuzzy são essencialmente ligadas a operações com intervalos de números. Chen e Pham (2000) assumem que valores incertos de um dado conjunto possuem certa tolerância, como por exemplo, podemos aceitar que um ser humano é considerado um adolescente entre os 14 e os 17 anos, ou seja, para Chen e Pham esse intervalo de idades pode ser considerado a tolerância.

O intervalo acima poderia ser representado como um intervalo fechado $14 \leq x \leq 17$ ou $[14,17]$. Ainda segundo esses autores, um intervalo qualquer a e b com um número fuzzy x pertencente a ele é chamado de intervalo de confiança e pode ser representado como $x \in [a,b]$ ou $a \leq x \leq b$. É importante lembrar que no caso de $a = b$, nós temos o que Chen e Pham (2000, p. 9) chamam de “segurança de confiança (tradução nossa)”, onde o número fuzzy passa a um número crisp.

Reznik (1997, p. 41) afirma que a união de todos os conjuntos α -níveis fornece um conjunto fuzzy A , definido por ele como $A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [A]^\alpha$.

E que “os resultados obtidos acima para os intervalos, podem ser expandidos para os números fuzzy A e B sendo cada um desses números expressos por níveis α , dentro de um intervalo de confiança” (REZNIK, 1997, p. 41, tradução nossa).

Inicialmente serão definidas as operações entre intervalos para depois definirmos as operações com números fuzzy a partir do princípio de extensão de Zadeh, visto anteriormente.

Definição 12. (Operações com números Fuzzy) As operações aritméticas entre dois intervalos A e B podem ser definidas como:

(a) A soma entre A e B é o intervalo

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

(b) A diferença entre A e B é o intervalo

$$A - B = [a_1 - b_1, a_2 - b_2]$$

(c) A multiplicação de A por um escalar λ é o intervalo

$$\lambda A = \begin{cases} [\lambda a_1, \lambda a_2] & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2, \lambda a_1] & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

(d) A multiplicação de A e B é o intervalo

$$A \cdot B = [\min P, \max P], \text{ onde } P = \{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}$$

(e) A divisão de A por B , $0 \notin B$, é o intervalo

$$A/B = [a_1, a_2] \cdot \left[\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2} \right]$$

A definição acima pode ser estendida pelo princípio de Zadeh para os números fuzzy, como será vista a seguir.

Definição 13. Sejam A e B dois números fuzzy e λ um número real.

(a) A soma dos números fuzzy A e B é o número fuzzy $A + B$, cuja função de pertinência é

$$\varphi_{(A+B)}(z) = \sup_{\{(x,y):x+y=z\}} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)].$$

(b) A multiplicação de λ por A é o número fuzzy $A\lambda$, cuja função de pertinência é

$$\varphi_{\lambda A}(z) = \sup_{\{x:\lambda x=z\}} [\varphi_A(x)] = \begin{cases} \varphi_A(\lambda^{-1}z) & \text{se } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}.$$

- (c) A diferença dos números fuzzy A e B é o número fuzzy $A - B$, cuja função de pertinência é

$$\varphi_{(A-B)}(z) = \sup_{\{(x,y):x-y=z\}} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)].$$

- (d) A multiplicação do número fuzzy A pelo número fuzzy B é o número fuzzy $A.B$, cuja função de pertinência é

$$\varphi_{(A.B)}(z) = \sup_{\{(x,y):x.y=z\}} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)].$$

- (e) A divisão do número fuzzy A pelo número B , se $0 \in \text{supp}B$ é o número fuzzy A/B , cuja função de pertinência é

$$\varphi_{(A/B)}(z) = \sup_{\{(x,y):x/y=z\}} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)].$$

Existem ainda outras operações e propriedades envolvendo números fuzzy, mas como se trata apenas de alguns conceitos iniciais, eles não serão tratados neste texto.

Relações Fuzzy

Podemos dizer que uma relação será fuzzy quando envolver conjuntos fuzzy e será crisp quando envolver conjuntos crisp.

Definição 14. Uma relação (clássica) R sobre $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ é qualquer conjunto (clássico) do produto cartesiano $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$. Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos $U_1 \times U_2$ ela é dita relação binária. Se $U_1 = U_2 = \dots = U_n = U$, diz que R é relação sobre U . A relação R pode ser representada por sua função característica

$$\chi_R = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow \{0,1\} \text{ com } \chi_R(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2, \dots, x_n) \notin R \end{cases}$$

Definição 15. Uma relação fuzzy R sobre $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ é qualquer subconjunto fuzzy de $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$. Assim uma relação fuzzy R pode ser representada por sua função pertinência

$$\varphi_R = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0,1].$$

Composição Entre Relações Fuzzy

De acordo com Barros e Bassanezi (2006), dadas duas relações fuzzy binárias R e S relacionadas em $U \times V$ e $V \times W$. A composição $R \circ S$ é uma relação fuzzy binária em $U \times W$ com função de pertinência definida por

$$\varphi_{R \circ S}(x, z) = \sup_{y \in V} [\min(\varphi_R(x, y), \varphi_S(y, z))].$$

Para Chen e Pham (2000), essa composição é conhecida por ‘max-min’ e obedecem algumas propriedades algébricas¹⁰, como aquelas vistas nas estruturas algébricas da matemática clássica, como a reflexiva, simétrica, transitiva e anti-simétrica.

4.3 LÓGICA CLÁSSICA, LÓGICA FUZZY E TEORIA DAS PROBABILIDADES

A palavra ‘lógica’ está em nossas vidas desde a infância sem ao menos sabermos exatamente o que ela significa. Com o passar do tempo com os diferentes usos que fazemos desta palavra, a enxergamos com ‘outros olhos’ (ou na filosofia de Wittgenstein encontramos outro ‘modo de ver’). No começo, antes do primeiro contato formal, ela é vista como algo que representa uma afirmação. ‘É lógico!’, grita o filho ao responder a sua mãe se ele queria um sorvete de sobremesa. Já no ensino médio, esse mesmo jovem tem sua primeira impressão formal sobre a lógica na disciplina de Filosofia, onde aprende sua história, seus conceitos e o seu significado.

Sabemos que a ciência da lógica tem como seu sistematizador, Aristóteles, filósofo grego que viveu por volta do século III antes de Cristo e que estabeleceu um conjunto de regras rígidas para que a partir de certas premissas

¹⁰ Para saber mais veja o livro Álgebra Moderna, página 71 de Hygino Domingues e Gelson Iezzi.

podéssemos chegar a conclusões verdadeiramente válidas e aceitas. Um exemplo disso pode ser observado nas seguintes premissas ‘toda pessoa é mortal’ e ‘José é uma pessoa’. Segundo essa lógica a conclusão que podemos tirar é de que ‘José é mortal’.

Essa lógica, como pudemos perceber, possui apenas dois graus de certeza: verdadeiro ou falso. Esse mundo binário, já é condicionado em nossas mentes. Basta que olhemos um pouco para o ambiente que nos rodeia. A televisão é ligada ou desligada, na prova de matemática é verdadeiro ou falso, no exército é ‘Sim, senhor’ ou ‘Não, senhor’, enfim, inúmeros são os exemplos que nos remetem a essa lógica dualista.

Contudo, muitas experiências humanas não podem ser classificadas simplesmente como verdadeiras ou falsas, sim ou não, certas ou erradas. No meio da completa certeza e completa incerteza do pensamento humano existem graus de certeza e de incerteza inerentes ao próprio pensamento. Exemplificando: ‘Você quer que eu aumente um pouco mais o som?’ ‘Está muito frio aqui!’ ‘Você é meio baixa!’ Entre tantas outras situações em que podemos expressar certo grau de certeza, mas que não podem ser representadas de forma exata pela lógica aristotélica.

Para Cox (1994) a lógica fuzzy, com base na teoria dos conjuntos fuzzy, permite não só um terceiro estado, mas outros estados dependendo do grau de certeza que se quer ter. Earl Cox ainda afirma que ela se adéqua muito bem no tratamento de informações características do pensamento humano, podendo ser entendida como uma ferramenta capaz de capturar informações vagas, descritas de uma forma natural, e convertê-las em números, para uma fácil manipulação pelos computadores.

Ortega (2001) faz algumas considerações a respeito da lógica fuzzy e da teoria das probabilidades, acrescentando que ambas podem ser usadas para medir incertezas, contudo, cada uma de forma diferente. No caso da teoria das probabilidades, o foco é na expectativa dos acontecimentos de eventos futuros baseados em ocorrências de eventos passados. Enquanto que na lógica fuzzy, o grau de incerteza presente é relacionado à imprecisão (ou gradação) expressa nos conceitos criados pela linguagem natural (humana).

Para entender, imaginemos o evento ‘chuva’. A teoria das probabilidades apenas determina ‘quando’ há a possibilidade da ocorrência do evento, enquanto que a lógica fuzzy determina o ‘quanto’ que ele pode ocorrer. Seria

o mesmo que dizer ‘existe 10% de possibilidade de chover amanhã’ para o caso do ‘quando’ e ‘ontem choveu muito’ para o caso do ‘quanto’. Notemos a diferença na conjugação dos verbos ‘chover’ e ‘choveu’, respectivamente indicando que irá acontecer um evento e que aconteceu. A teoria das probabilidades trata de eventos futuros, enquanto que a lógica fuzzy trata de eventos passados e eventos presentes.

Como Ortega (2001) ressalta, essas teorias são diferentes para objetivos diferentes. Nesse trabalho, o foco está nos conjuntos fuzzy e na lógica fuzzy, não tendo a preocupação de formalizar conceitos sobre a teoria das probabilidades.

Lógica Booleana: Conceitos Básicos

A lógica aristotélica voltou a se desenvolver no século XVI quando Leibniz criou a lógica simbólica, cujas deduções deveriam ser feitas por meio de pura manipulação simbólica, sem referência ao seu significado. Segundo Weber e Klein (1996) no século XIX, o inglês George Boole publicou o trabalho *An Investigation of The Laws of the Thought* em que ele investiga as leis do pensamento humano e da álgebra para definir uma estrutura matemática abstrata.

Essa estrutura, hoje conhecida como álgebra booleana passou “a ser largamente utilizada em controle de circuitos, na primeira metade do século XX, e posteriormente em linguagem de computadores” (BARROS; BASSANEZI, 2006, p. 74).

Conectivos Básicos da Lógica Booleana

Para tratar da lógica fuzzy, temos que primeiramente tratar da lógica booleana. Essa álgebra possui dois estados bem definidos 0 e 1, sendo o primeiro para representar sentenças verdadeiras e o segundo para representar sentenças falsas. Além disso, a lógica booleana possui alguns conectivos ou operadores lógicos como ‘e’, ‘ou’, ‘não’ e ‘implicação’ usados na Modelagem Matemática. Os símbolos normalmente usados para cada operador são \wedge (*conjunção*), \vee (*disjunção*), \neg (*negação*) e \Rightarrow (*condicional*), respectivamente.

De acordo com Wittgenstein (1922, p. 51), “as possibilidades verdadeiras podem ser representadas por um esquema (**tabela**) (acréscimo nosso) do tipo (onde “V” significa verdadeiro e “F” falso)” (tradução nossa). Ainda de acordo com o mesmo autor, “esse simbolismo é de fácil compreensão” (tradução nossa). E para os dias atuais, as letras V e F têm sido substituídas por 1 e 0, respectivamente, que podem ser ‘lidas’ por ‘linguagem de máquina’¹¹. Dessa forma, por meio delas, podemos expressar se um argumento é válido ou não.

Conectivos Básicos da Lógica Fuzzy

Assim como nos conjuntos fuzzy, em que estendemos o conceito de função característica para função de pertinência, é necessário estender a lógica clássica à lógica fuzzy. Os conectivos da lógica clássica são estendidos por meio das chamadas normas e conormas triangulares.

T-Norma

Definição 16. O operador chamado t-norma é dado por $\Delta: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, $\Delta(x, y) = x\Delta y$, se satisfazer as seguintes condições:

T1- elemento neutro: $\Delta(1, x) = 1\Delta x = x$;

T2- comutativa: $\Delta(x, y) = x\Delta y = y\Delta x = \Delta(y, x)$;

T3- associativa: $x\Delta(y\Delta z) = (x\Delta y)\Delta z$;

T4- monotonicidade: se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $x\Delta y \leq u\Delta v$.

O operador t-norma faz a extensão do conectivo ‘e’ na lógica clássica.

¹¹ Entendemos linguagem de máquina como aquela utilizada pelos componentes de um computador para se comunicar, ou seja, a linguagem binária.

T-Conorma

Definição 17. O operador chamado t-conorma é definido por $\nabla: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, $\nabla(x, y) = x \nabla y$, se satisfazer as seguintes condições:

C1- elemento neutro: $\nabla(0, x) = 0 \nabla x = x$;

C2- comutativa: $\nabla(x, y) = x \nabla y = y \nabla x = \nabla(y, x)$;

C3- associativa: $x \nabla (y \nabla z) = (x \nabla y) \nabla z$;

C4- monotonicidade: se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $x \nabla y \leq u \nabla v$.

O operador t-conorma faz a extensão do conectivo 'ou' na lógica clássica.

Negação (η)

Definição 18. A aplicação ou também chamada de operador negação é definido por $\eta: [0,1] \rightarrow [0,1]$ se satisfazer as seguintes condições:

N1- fronteiras: $\eta(0) = 1$ e $\eta(1) = 0$;

N2- involução: $\eta(\eta(x)) = x$;

N3- monotonicidade: η é decrescente.

Essa aplicação faz a extensão do conectivo 'não' na lógica clássica.

Implicação Fuzzy

Definição 19. A implicação fuzzy é qualquer operação do tipo $\Rightarrow: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ que reproduza a tabela verdade da implicação clássica.

A seguir, listamos algumas fórmulas de implicação clássicas:

a) $p \Rightarrow q = \neg p \vee q$;

b) $p \Rightarrow q = \neg p \vee (p \wedge q)$;

c) $p \Rightarrow q = \max \{x \in \{0,1\} : p \wedge x \leq q\}$.

No caso de implicações fuzzy, o formato é diferente, como é mostrado:

a') uma S-implicação tem a forma $x \Rightarrow y = \eta(x) \nabla y$;

b') uma Q-implicação tem a forma $x \Rightarrow y = \eta(x) \nabla (x \Delta y)$;

c') uma R-implicação tem a forma $x \Rightarrow y = \sup \{z \in [0,1] : x \Delta z \leq y\}$.

Apenas para exemplificar, apresentamos alguns exemplos de implicações fuzzy, retiradas de Barros e Bassanezi (2006, p. 83):

a) Implicação de Gödel:

$$(x \Rightarrow y) = g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq y \\ y & \text{se } x > y \end{cases}$$

b) Implicação de Lukasiewicz:

$$(x \Rightarrow y) = l(x, y) = \min \{(1 - x + y), 1\}$$

c) Implicação de Zadeh:

$$(x \Rightarrow y) = z(x, y) = \max \{(1 - x), \min(x, y)\}.$$

4.4 VARIÁVEIS LINGÜÍSTICAS

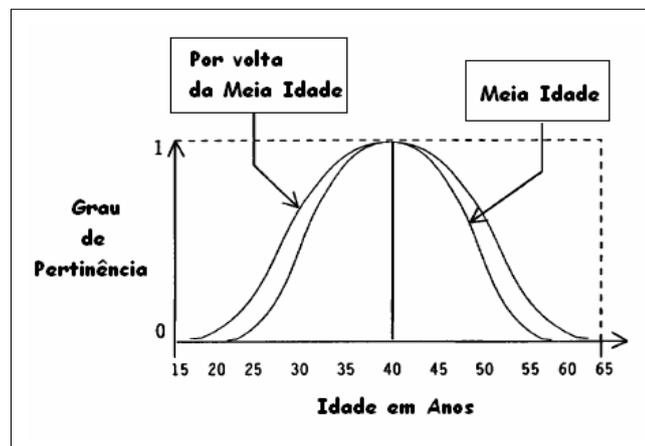
As variáveis podem ser numéricas ou linguísticas, a variável linguística, como o próprio nome sugere, são termos linguísticos que expressam valores verdade na lógica fuzzy. Para Cox (1994, p. 213) “uma variável linguística é a representação de um espaço fuzzy”. Essas variáveis são associadas a um conjunto de atributos (do original *hedges*) que determinam efeitos diferentes nos conjuntos fuzzy. Para elucidar o que são esses atributos e o que eles influenciam nas variáveis linguísticas, apresentamos na Tabela 2, a caracterização de atributos formalizada por Cox (1994).

Tabela 2 - Atributos das Variáveis Linguísticas

ATRIBUTO	SIGNIFICADO / CONSEQUÊNCIA
Aproximadamente, ao redor, perto, cerca de	Aproxima de um escalar
Acima, mais do que	Restringe uma região fuzzy
Quase, definitivamente, de forma positiva	Intensifica o contraste
Abaixo, a menos que	Restringe uma região fuzzy
Próximo de	Aproximação ampla
Geral, Normalmente	Atenua o Contraste
Na vizinhança, Perto de	Aproximação restrita
Não	Negação ou complemento
Muito, melhor, tanto	Atenua uma região fuzzy
Muito, extremamente	Intensifica uma região

Fonte: Adaptado de Cox (1994, p. 213)

Para ilustrar o que esses atributos modificam na função de pertinência, Cox (1994) faz uma análise da variável linguística “meia idade” em relação a alguns atributos. A Figura 15 mostra a curva que representa apenas a variável linguística e depois a mesma variável, porém com o atributo “por volta”.

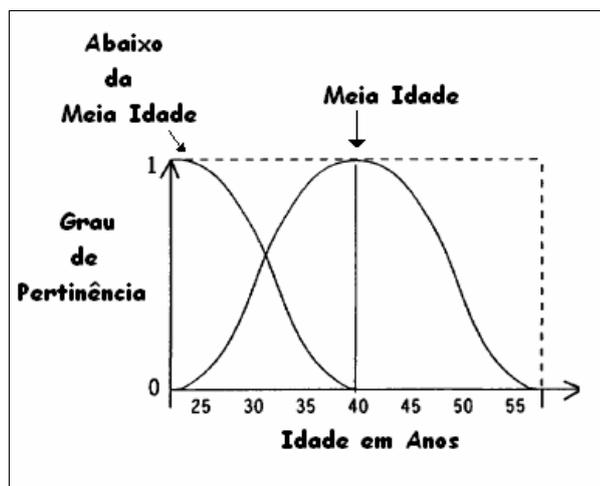
Figura 15 - Função de Pertinência ‘por volta da’ Meia Idade

Fonte: Adaptado de Cox (1994, p. 166)

Podemos observar que com o atributo a curva se torna mais ampla e mantém a medida central fuzzy. Essa característica é típica para o atributo ‘por volta’ e ‘próximo de’.

Outro exemplo, retirado de Cox (1994, p. 169), seria aplicar à mesma variável linguística o atributo ‘abaixo’. Vejamos na Figura 16, como fica a curva com e sem o atributo.

Figura 16 - Função de Pertinência 'abaixo da' Meia Idade

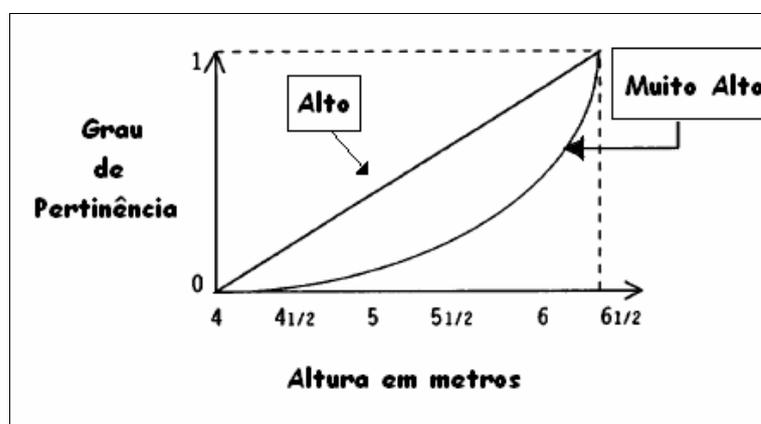


Fonte: Adaptado de Cox (1994, p. 168)

Os gráficos destas figuras revelam que este atributo restringe a região fuzzy em que se encontra a variável linguística. Quando a variável não possui atributo algum, sua região fuzzy se estende do zero até os 55 anos, enquanto que, ao atribuirmos 'abaixo' como modificador, estamos alterando essa região do zero até os 40 anos.

Os atributos 'muito' e 'pouco' intensificam ou minimizam, respectivamente, as regiões fuzzy. Vejamos o que acontece com a variável linguística 'altura', quando acrescentamos o atributo 'muito', na Figura 17, retirada de Cox (1994, p. 172).

Figura 17 - Função de Pertinência 'muito' Alto



Fonte: Cox (1994, p. 172)

Novamente podemos observar que o atributo alto minimiza o grau de pertinência da variável linguística 'altura'. Essa atenuação se deve segundo Cox (1994, p. 170) à definição dada por Zadeh ao atributo 'muito', em que este a chama de 'concentrador' e aplica a transformação $\varphi_{\text{muito alto}}(x) = \varphi_{\text{alto}}^2(x)$ como sendo a modelagem do atributo 'muito'.

Outros atributos geram outras mudanças na função pertinência, mas que não serão apreciadas nesse texto. Caso haja maior interesse, consulte o livro *The Fuzzy Systems de Earl Cox*.

4.5 REGRAS DE PRODUÇÃO FUZZY

De acordo com Barros e Bassanezi (2006) as regras de produção fuzzy são formadas de dois elementos importantes, o estado e a resposta, em que cada um assume valores de variáveis linguísticas, o primeiro, também chamado de antecedente é formado por um conjunto de condições que, quando satisfeitas (mesmo que não completamente), geram o processamento da resposta, também conhecida como conseqüente, cuja determinação é dada pelas chamadas regras de inferência fuzzy, que criam algumas condições necessárias para se executar a resposta, que é composta de um conjunto de ações ou diagnósticos que são gerados com o disparo da regra. Os conseqüentes das regras disparadas são processados em conjunto, para gerar uma resposta determinística, para cada variável de saída do sistema.

Por exemplo, a regra que diz o seguinte: se o dia estiver nublado, então leve o guarda-chuva, caso contrário, não leve. Pode ser descrita pelo antecedente que é 'se o dia estiver nublado' e o pelo conseqüente, que depende da decisão do antecedente, no caso 'então leve o guarda-chuva'. Veja que o conseqüente possui mais de uma ação, podendo ser o número de ações necessárias para solucionar o antecedente.

Segundo Barros e Bassanezi (2006) essa Base de Regras cumpre o papel de 'traduzir' matematicamente as informações que formam a base de conhecimentos do sistema fuzzy, ou na perspectiva de Wittgenstein, são as 'regras' que compõem o 'jogo de linguagem' 'matemática fuzzy'. Eles ainda afirmam que

quanto mais precisas forem tais informações, menos fuzzy (mais crisp) será a relação fuzzy que representa a base de conhecimentos.

Definição de Regras de Controle

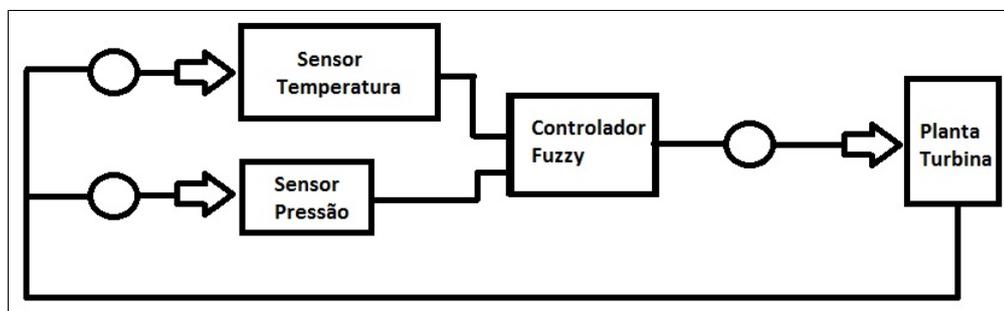
Para Cox (1994) as regras de controle são as responsáveis por ligar o antecedente ao conseqüente. Um exemplo de regra de controle é o exemplo do guarda-chuva.

As regras de controle englobam o conhecimento do sistema e os objetivos do controle. Cada regra tem um estado do sistema em sua premissa e uma ação de controle sugerida em sua conclusão. As regras de controle fuzzy conectam os valores de entrada com as propriedades da saída do modelo.

Ordem de Regras

As regras de controle fuzzy não são seqüenciais, mas declarativas, o que significa dizer que a ordem em que elas aparecem não é importante. Vejamos um exemplo, retirado de Cox (1994, p. 380) de como as regras não precisam seguir uma ordem para serem executadas a partir de um controlador fuzzy (Figura 18) de uma turbina a vapor:

Figura 18 - Controlador Fuzzy



Fonte: Cox (1994, p. 380)

Vejamos um exemplo, retirado de Cox (1994) de como um especialista em controle de turbinas a vapor pode descrever um modelo matemático fuzzy para controlar sua temperatura:

Se temperatura é fria e a pressão é fraca então a ação da válvula é abrir pouco.

Se temperatura é fria e a pressão baixa então a ação da válvula é abrir normal.

Se temperatura é normal e a pressão é normal então a ação da válvula é não fazer nada (não operar).

Se temperatura é normal e a pressão é forte então a ação da válvula é fechar muito.

Se temperatura é quente e a pressão é fraca então a ação da válvula é abrir normal.

Se temperatura é muito quente e a pressão é forte então a ação da válvula é fechar pouco.

Essa Base de Regras também poderia ser escrita como mostrado na Figura 19, a seguir:

Figura 19 - Regras de Controle Pressão e Temperatura

PRESSÃO TEMP	FRACA	BAIXO	NORMAL	FORTE	MUITO FORTE
FRIO	AP	AN	AM	FM	FN
AMENO	AP	AN	ND	FN	FN
NORMAL	AN	AM	ND	FM	FN
QUENTE	AN	AM	FM	FN	FP
MUITO QUENTE	AM	AM	FN	FP	FP

Fonte: Cox (1994, p. 383)

Em que a AP significa abre pouco, AN abre normal, AM abre muito, ND não faz nada (não opera), FP fecha pouco, FN fecha normal e FM fecha muito.

O que podemos perceber é o fato de que essas regras são descritas na forma linguística, por meio de 'variáveis linguísticas' que estamos habitualmente acostumados e não por variáveis matemáticas. Essa nova 'linguagem' nos faz

pensar de que modo ela pode ser discutida em sala de aula.

Controlador Fuzzy

Os sistemas fuzzy são uma técnica eficaz para resolver problemas, mesmo que simples, e com ampla aplicabilidade, especialmente nas áreas de controle e de tomada de decisão. Ela é muito útil para tratar problemas que não são facilmente definidos por modelos matemáticos práticos e que exijam respostas que não são bem definidas. Por exemplo, a lógica fuzzy tem sido empregada na administração do mercado de ações, em aparelhos eletrodomésticos, em diagnósticos médicos e no controle de metrô.

Segundo Reznik (1997) o uso da lógica fuzzy é tão difundido hoje graças a sua enorme capacidade em traduzir conhecimentos baseados em informações vagas, ambíguas, qualitativas, incompletas ou imprecisas de especialistas humanos em uma linguagem clara e objetiva (a matemática fuzzy). Neste sentido, os sistemas baseados em conjuntos fuzzy têm a capacidade de raciocínio semelhante a dos humanos. O comportamento dos sistemas fuzzy é representado de uma maneira muito simples e natural.

Esse comportamento, simples e natural, de acordo com Reznik (1997), permite a construção rápida de sistemas compreensíveis, sustentáveis e robustos. Além disso, o uso de controladores fuzzy para sistemas de controle ou de tomada de decisão, geralmente, requerem menos memória e processadores computacionais avançados do que os métodos convencionais e, portanto, permitem sistemas menores e de menor custo.

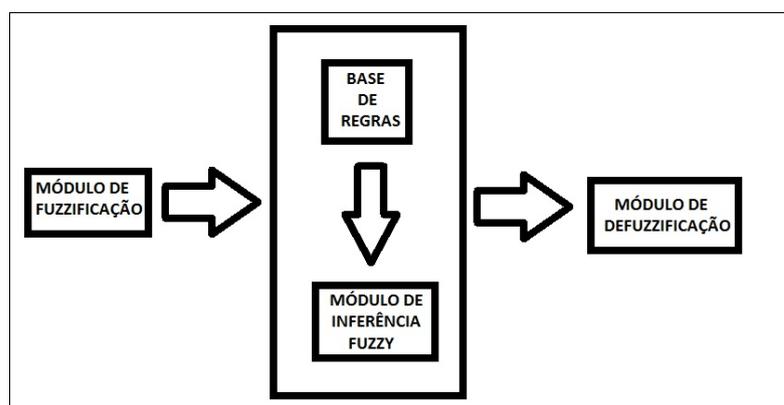
Um sistema fuzzy é composto basicamente de 4 componentes. Primeiro, um módulo de fuzzificação, que de acordo Barros e Bassanezi (2006, p. 105) “é o estágio onde as entradas do sistema são modeladas por conjuntos fuzzy com seus respectivos domínios”.

O segundo módulo é o da Base de Regras, definido pelos autores como “o módulo que faz parte do núcleo do controlador fuzzy” e é onde as proposições fuzzy se juntam às variáveis lingüísticas para formar as funções de pertinência.

No terceiro módulo, há o módulo de inferência, onde ocorre a ‘tradução’ das proposições fuzzy em modelos matemáticos. Aqui se define quais t-normas, t-conormas e regras de inferência serão utilizadas para modelar o sistema.

E por fim, temos o quarto módulo, o módulo de defuzzificação, definido por Barros e Bassanezi (2006, p. 105) como “o processo que permite representar um conjunto fuzzy por um valor crisp”. A Figura 20 mostra os 4 módulos.

Figura 20 - Esquema de um Controlador Fuzzy



Fonte: Barros e Bassanezi (2006, p. 107)

Na próxima seção apresentamos uma explicação simplificada de cada módulo dada por alguns autores, como Barros e Bassanezi (2006), Reznik (1997) e Cox (1994).

Módulo de Fuzzificação

É o módulo responsável por designar ou calcular um valor para representar o grau de pertinência de uma entrada, em um ou mais grupos qualitativos, os chamados conjuntos fuzzy. É nesse estágio onde as entradas do sistema são modeladas por conjuntos fuzzy com seus respectivos domínios. É aqui que os especialistas do fenômeno têm papel fundamental, pois são eles que irão modelar e definir as funções de pertinência do processo envolvido.

O processo de fuzzificação permite que uma forte ligação ocorra entre os termos lingüísticos e suas funções de pertinência fazendo os termos significativos para um computador. Como resultado, o especialista pode expressar ou modificar o comportamento de um sistema, usando estes termos da linguagem

natural, aumentando assim, a possibilidade de se ter descrições claras e concisas de tarefas complexas.

Geralmente, uma vez que o sistema esteja em operação, as funções de pertinência não mudam. Formas simples como de trapézios, triângulos e senoidais são freqüentemente usadas para definir pertinência em conjuntos fuzzy, mas qualquer função adequada pode ser usada. Em adição, deve-se tomar a decisão de quantos conjuntos fuzzy usar para cada entrada do sistema.

Módulo da Base de Regras

Para governar o comportamento do sistema, o especialista desenvolve um conjunto de regras que têm a forma de declarações Se-Então. A parte Se, contém uma ou mais condições chamadas antecedentes (estado); a parte Então contém uma ou mais ações chamadas conseqüentes (resposta). Os antecedentes das regras correspondem, diretamente, aos graus de pertinência calculados durante o módulo de fuzzificação.

Conforme apresentam Barros e Bassanezi (2006, p. 106),

[...] Esse módulo é composto pelas proposições fuzzy e cada uma destas proposições é descrita na forma lingüística

Se x_1 é A_1 e x_2 é A_2 e... e x_n é A_n

Então u_1 é B_1 e u_2 é B_2 e... Se u_m é B_m .

de acordo com as informações de um especialista. É neste ponto que as variáveis e suas classificações lingüísticas são catalogadas e modeladas por conjuntos fuzzy, isto é, por funções de pertinência.

Módulo de Inferência Fuzzy

Segundo Barros e Bassanezi (2006) é neste módulo que cada proposição fuzzy é 'traduzida' matematicamente por meio de técnicas da lógica fuzzy. Aqui são definidas quais as t-normas, t-conormas e implicações fuzzy que serão utilizadas para se obter a relação fuzzy que modela a Base de Regras.

O sucesso do controlador depende essencialmente desse módulo. Normalmente o princípio utilizado aqui é o de que regras com baixo grau de pertinência no antecedente têm pouca validade no conseqüente. Esse princípio é

descrito pela composição binária fuzzy max–min , que pode ser descrita por Barros e Bassanezi (2006, p. 65) como:

[...] Sejam R e S duas relações fuzzy binárias em $U \times V$ e $V \times W$, respectivamente. A composição $R \circ S$ é uma relação fuzzy binária em $U \times W$, cuja função de pertinência é dada por $\varphi_{R \circ S}(x, y) = \sup_{y \in V} [\min(\varphi_R(x, y), \varphi_S(y, z))]$.

A seguir é apresentado o trabalho pioneiro de Mamdani e Assilian, o método de inferência desenvolvido por eles em 1975 para controlar uma máquina a vapor.

Método de Inferência de Mamdani¹²

A Base de Regras de Mamdani é baseada numa relação fuzzy binária M entre x e u e na composição de inferência max–min . O procedimento, descrito por Barros e Bassanezi (2006, p. 109) é o seguinte:

- Em cada regra R_j , da Base de Regras fuzzy, a condicional ‘se x é A_j então u é B_j ’ é modelada pela aplicação \wedge (mínimo);
- Adota-se a t-norma \wedge (mínimo) para conectivo lógico ‘e’;
- Para o conectivo ‘ou’ adota-se a t-conorma \vee (máximo) que conecta as regras da Base de Regras.
- Formalmente a relação fuzzy M é um subconjunto fuzzy de $X \times U$ cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_M(x, u) = \max_{1 \leq i \leq r} (\varphi_{R_i}(x, u)) = \max_{1 \leq i \leq r} [\varphi_{A_j}(x) \wedge \varphi_{B_j}(u)].$$

Onde r é o número de regras que compõem a Base de Regras e, A_j e B_j são os subconjuntos fuzzy da regra j . Cada um dos valores $\varphi_{A_j}(x)$ e $\varphi_{B_j}(u)$ são interpretados como os graus com que x e u estão nos subconjuntos fuzzy A_j e B_j respectivamente.

¹² Para maiores informações consultar *An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller*, de 1975 e escrito por E. H. Mamdani e S. Assilian.

Módulo de Defuzzificação

A defuzzificação é o módulo que permite representar um conjunto fuzzy por um valor crisp (número real). Os métodos mais utilizados nesse módulo para defuzzificação são o Centro de Gravidade, o Centro de Máximos e a Média dos Máximos.

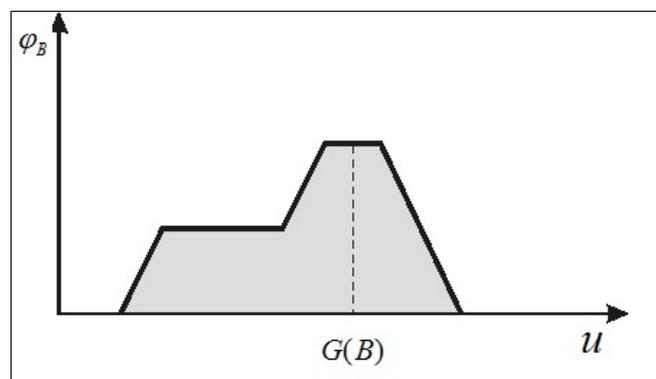
Método do Centro de Gravidade

Segundo Barros e Bassanezi (2006) esse método de defuzzificação é semelhante à média aritmética para uma distribuição de dados, com a diferença que os pesos aqui são os valores $\varphi_{B_j}(u)$, que indicam o grau de compatibilidade do valor u_i com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy B. O que esse método faz é calcular a área de todas as figuras que representam os graus de pertinência de um conjunto fuzzy. As equações abaixo se referem ao domínio discreto e contínuo, respectivamente:

$$G(B) = \frac{\sum_{i=0}^n u_i \varphi_B(u_i)}{\sum_{i=0}^n \varphi_B(u_i)} \quad G(B) = \frac{\int_{\square} u \varphi_B(u) du}{\int_{\square} \varphi_B(u) du}$$

E a seguir, a Figura 21 mostra o gráfico desse método.

Figura 21 - Método do Centro de Gravidade



Fonte: Barros e Bassanezi (2006, p. 115)

Método do Centro de Máximos

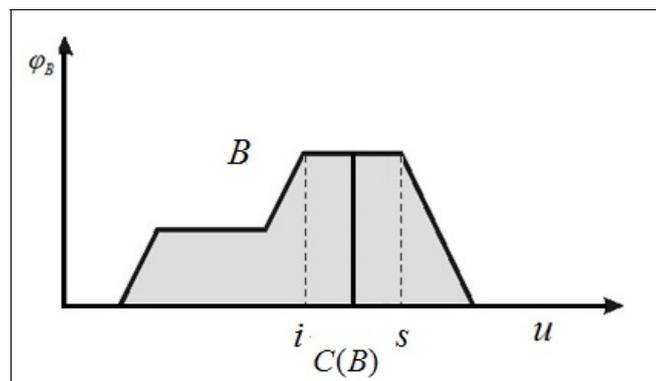
De acordo com Barros e Bassanezi (2006) esse método é radical, pois leva em conta apenas as regiões de maior possibilidade entre os possíveis valores da variável que modela o conceito fuzzy em questão. Assim, esse método é dado pela fórmula:

$$C(B) = \frac{i+s}{2}$$

Onde $i = \inf\{u \in R: \varphi_B(u) = \max_u \varphi_B(u)\}$ e $s = \sup\{u \in R: \varphi_B(u) = \max_u \varphi_B(u)\}$

E a seguir, na Figura 22, mostra-se o gráfico desse método.

Figura 22 - Método do Centro de Máximos



Fonte: Barros e Bassanezi (2006, p. 115)

Método da Média dos Máximos

Barros e Bassanezi (2006) afirmam que esse método é normalmente usado em domínios discretos e sua definição é dada por

$$M(B) = \frac{\sum u_i}{\sum i}$$

Onde u_i são elementos de maior pertinência ao conjunto fuzzy B, isto é, para i tomamos

$$\varphi_B(u_i) = \max \varphi_B(u)$$

Assim, encerramos uma apresentação sucinta dos principais conceitos da matemática fuzzy, que serão utilizados, ou que implicitamente estarão presentes, no Capítulo 5, onde faremos a modelagem de algumas atividades por meio da matemática fuzzy.

4.6 MATEMÁTICA FUZZY E A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Considerando essa teoria e levando em consideração que a ciência tem permitido uma valorização da subjetividade, educadores matemáticos podem empreender esforços para que este outro tipo de linguagem, seja utilizada em sala de aula, como salienta Spina (2010, p.20), ao dizer que,

[...] o processo de conhecer não se sustenta em verdades absolutas — está, na verdade, em uma permanente articulação dialógica com certezas e incertezas, com opiniões, crenças e conhecimento mais elaborado. Ou seja, torna-se imprescindível, nos processos de construção de conhecimento, prestar atenção aos pensamentos refletidos nas palavras, assim como distinguir as crenças e os comportamentos em torno do conhecimento (SPINA, 2010, p. 20).

As construções de conhecimento mais subjetivas, baseadas nas palavras, são de acordo com Spina (2010, p. 20), “uma parte do conhecimento relativamente pouco elaborada, predominando a elaboração mais ou menos fantasista e a falta de confrontação com a realidade empírica”, o que de certo modo justifica o ensino de uma lógica menos formal e mais próxima da realidade, com o uso da Modelagem Matemática.

Além disso, como argumentam Lima, Kato e Bassanezi (2011, p. 4), “há muitas situações em que não se pode utilizar a matemática clássica nas tomadas de decisões do cotidiano, mas o uso da matemática ‘intuitiva’ possibilita a obtenção de resultados satisfatórios”, como também reitera Spina (2010) ao afirmar que o rigor e a precisão da matemática formal determinística não estariam dando conta de resolver os problemas do dia-a-dia, e que seria preciso novas estruturas matemáticas que ampliassem as teorias matemáticas clássicas.

Desse modo, a “Lógica Fuzzy pode vir a complementar a lógica clássica, auxiliando na resolução de problemas reais e quebrando as barreiras que às vezes separa a matemática formal da matemática real” (LIMA; KATO; BASSANEZI, 2011, p. 11).

Assim, devemos, em sala de aula, compreender um outro ponto de vista matemático segundo o qual a resposta dada pelo aluno estaria correta levando em conta os valores e os significados que acompanham a racionalidade da sua cultura, do seu povo, ou seja, dos aspectos subjetivos de que são constituídas as coisas e as relações em si (SPINA, 2010).

Neste sentido, no próximo capítulo apresentamos algumas atividades de Modelagem Matemática, em que as abordagens fuzzy e clássica são analisadas do ponto de vista, da filosofia de Wittgenstein.

5
ATIVIDADES DE
MODELAGEM
MATEMÁTICA E SUAS
ANÁLISES

5.1 COMO VAI SER?

5.2 MODELO DE CRESCIMENTO POPULACIONAL

5.3 POSSIBILIDADE DE UMA MULHER FICAR SOZINHA

5.4 IMC – ÍNDICE DE MASSA CORPORAL

5.5 NÚMERO DE ACIDENTES

5.6 AVALIAÇÃO POR CONCEITOS

5.7 POBREZA E ESPERANÇA DE VIDA

5.1 COMO VAI SER?

Neste capítulo apresentamos seis atividades de Modelagem Matemática que constituem nosso objeto de análise. Como nosso intuito é olhar para as diferentes linguagens presentes nos modelos, realizamos tanto a modelagem numa abordagem como matemática clássica como numa abordagem com matemática fuzzy. O primeiro modelo, do ‘crescimento populacional’, é um modelo presente na literatura existente, tanto na abordagem clássica quanto na abordagem fuzzy. O segundo modelo, da ‘Possibilidade de uma mulher ficar sozinha’, é um modelo em que a abordagem clássica já consta na literatura, e a abordagem fuzzy foi desenvolvida nesta pesquisa. O terceiro modelo, do ‘Índice de Massa Corporal (IMC)’, é um modelo em que fizemos inicialmente uma abordagem fuzzy e depois fizemos um modelo com a abordagem clássica.

O quarto modelo, do ‘Número de Acidentes’, é um modelo que não consta na literatura, sendo desenvolvido nas duas abordagens. O quinto, ‘Avaliação por Conceitos’ também é um modelo ‘novo’ sendo apresentado sob as duas abordagens e por último, o sexto modelo, já presente na literatura ‘Pobreza e Esperança de Vida’ busca olhar para um modelo matemático em que aparecem ao mesmo tempo a abordagem clássica e a abordagem fuzzy.

5.2 MODELO DE CRESCIMENTO POPULACIONAL

Nessa primeira atividade, apresentamos o modelo de crescimento populacional proposto por Malthus sob três aspectos/linguagens diferentes. Os dois primeiros levando em consideração a matemática clássica e o terceiro sob uma abordagem da matemática fuzzy. Nossa proposta é analisar as três distintas linguagens utilizadas para um mesmo modelo matemático, evidenciando suas aproximações e suas divergências.

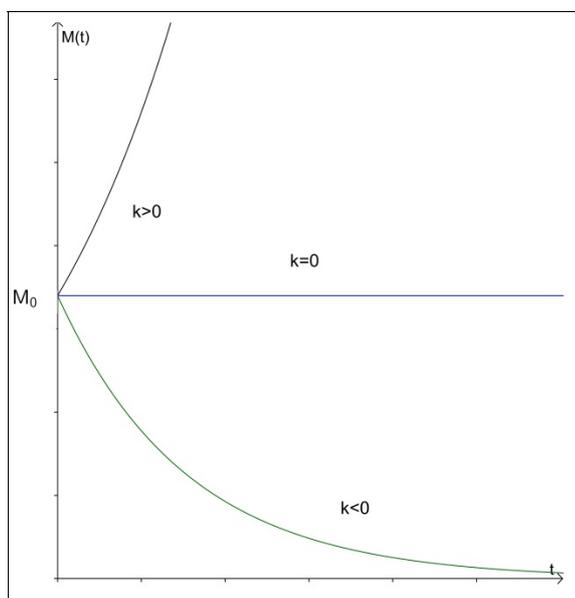
Na página 102 do livro “Matemática – Volume Único” de Paiva (1999), o autor apresenta um quadro em que afirma que o crescimento populacional de bactérias pode ser descrito como uma função exponencial do tipo $M(t) = M_0 e^{kt}$,

onde $M(t)$ é o número de bactérias de uma população no instante t e M_0 é o número inicial de bactérias da população no instante t .

O modelo proposto pelo autor utiliza conforme designa Wittgenstein (2009) uma ‘gramática’ específica para o ensino de função exponencial. Este modelo é aceito e compartilhado pelos alunos e professores. Neste contexto, segundo Wittgenstein (2009) podemos dizer que o grupo de professores e alunos estão inseridos nas ‘formas de vida’, ou seja, em seres que possuem hábitos, costumes e ações que possuem certas atividades específicas em comum.

Assim, podemos evidenciar nesse contexto, um ‘jogo de linguagem’ específico para retratar a variação populacional. O crescimento populacional é uma função exponencial e a população inicia com M_0 elementos, crescendo no decorrer do tempo se $k > 0$, decrescendo se $k < 0$ e permanecendo estável se $k = 0$. A representação gráfica dessa situação está na Figura 23.

Figura 23 - Modelo de Crescimento Populacional



Fonte: Do Autor

Já no livro “Equações Diferenciais – Volume 1” de Zill e Gullen (2001), os autores apresentam o modelo de crescimento populacional como uma aplicação das equações diferenciais de 1ª ordem. Na página 28 é apresentado o modelo $\frac{dP}{dt} = kP$ em que o K é uma constante de proporcionalidade e P representa uma população qualquer. Em seu capítulo sobre aplicações das equações

diferenciais de primeira ordem, na página 102, os autores generalizam o modelo de crescimento populacional para um modelo de “crescimento e decaimento” que pode ser utilizado em diferentes áreas do conhecimento, como física (decaimento radioativo), química (quantidade remanescente de reações químicas) e biologia (crescimento de bactérias) desde que, seja dado o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP \\ P(t_0) = P_0 \end{cases} .$$

Esse modelo proposto possui uma ‘gramática’ diferente da utilizada no livro anterior, pois como Wittgenstein (2009, p. 158, § 373) salienta “a gramática diz que espécie de objeto uma coisa é”, ou seja, no primeiro contexto a ‘gramática’ diz que é uma função exponencial e nesse segundo contexto diz que é uma equação diferencial e também o que é a equação diferencial.

Do ponto de vista matemático, a variação de uma população no decorrer do tempo é caracterizada de formas diferentes. Enquanto no livro da educação básica os autores se referem ao crescimento populacional por meio de uma função exponencial, no livro de equações diferenciais, os autores indicam que é possível chegar a esta função exponencial por meio do estudo da variação da população no decorrer do tempo e daí, usando o conceito de derivada de uma função e a lei já proposta por Thomas Malthus em 1798, escrevem $\frac{dP}{dt} = kP$, onde k é a constante de proporcionalidade dada. A solução desta equação diferencial, entretanto, é a função $P(t) = P_0 e^{kt}$. Se considerarmos $M = P$ e $M_0 = P_0$, surge justamente o modelo a que se refere o livro da educação básica.

Essa ‘gramática’ depende das ‘formas de vida’ e nos dois contextos as ‘formas de vida’ são outras. Assim ‘jogos de linguagem’ distintos são utilizados para representar o mesmo problema populacional.

Trata-se, portanto, de diferentes ‘jogos de linguagem’ que conduzem à mesma representação (no caso: gráfica), que a título de ilustração na Figura 23, representa uma população que a partir de uma população inicial dada ($M_0 = P_0$) cresce, decresce ou se mantém estável, no decorrer do tempo.

Podemos assim, afirmar, a partir de Wittgenstein (2009), que ambos apresentam ‘semelhanças de família’, “pois assim se sobrepõem e se entrecruzam as várias semelhanças que existem entre os membros de uma família”.

No livro “Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática”, de Barros e Bassanezi (2006), os autores apresentam um modelo de crescimento populacional fuzzy a partir da proposição malthusiana “a variação de uma população é proporcional à população em cada instante”. Essa proposição permite usar a teoria fuzzy de Base de Regras para representar o modelo de crescimento populacional. A Base de Regras apresentada na página 231 do livro é dada por:

R1: Se a população (X) é ‘baixa’ (B) então a variação é ‘baixa’ (B);

R2: Se a população (X) é ‘média’ (M) então a variação é ‘média’ (M);

R3: Se a população (X) é ‘alta’ então a variação é ‘alta’ (A).

Dada essa Base de Regras, junto com as funções de pertinência definidas em $\varphi_F : [0,200] \rightarrow [0,1]$ e com o uso do MATLAB¹³ podemos criar as funções de pertinência, ‘baixa’ (Função do Tipo Trapezoidal), ‘média’ (Função do Tipo Triangular) e ‘alta’ (Função do Tipo Trapezoidal), para a variável ou antecedente ‘População’, representadas algebricamente por:

$$\varphi_{Baixa}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 40 \\ \frac{90-x}{50} & \text{se } 40 < x \leq 90 \\ 0 & \text{se } x \geq 90 \end{cases}$$

$$\varphi_{Média}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 50 \\ \frac{x-50}{50} & \text{se } 50 \leq x \leq 100 \\ \frac{x-100}{50} & \text{se } 100 \leq x \leq 150 \\ 0 & \text{se } x \geq 150 \end{cases}$$

$$\varphi_{Alta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 110 \\ \frac{x-110}{50} & \text{se } 110 < x \leq 160 \\ 1 & \text{se } x \geq 160 \end{cases}$$

E para a variável de saída ou consequente ‘Variação da População’ podemos também criar as funções de pertinência, ‘baixa’ (Função do Tipo

¹³ MATLAB ou Matrix Laboratory é um software matemático de alta performance para desenvolvimento de algoritmos, análise de dados, visualização gráfica e numérica. Maiores informações podem ser obtidas em <http://www.mathworks.com/>

Trapezoidal), ‘média’ (Função do Tipo Triangular) e ‘alta’ (Função do Tipo Trapezoidal), definidas em $\varphi_F : [0,20] \rightarrow [0,1]$ e representadas algebricamente por:

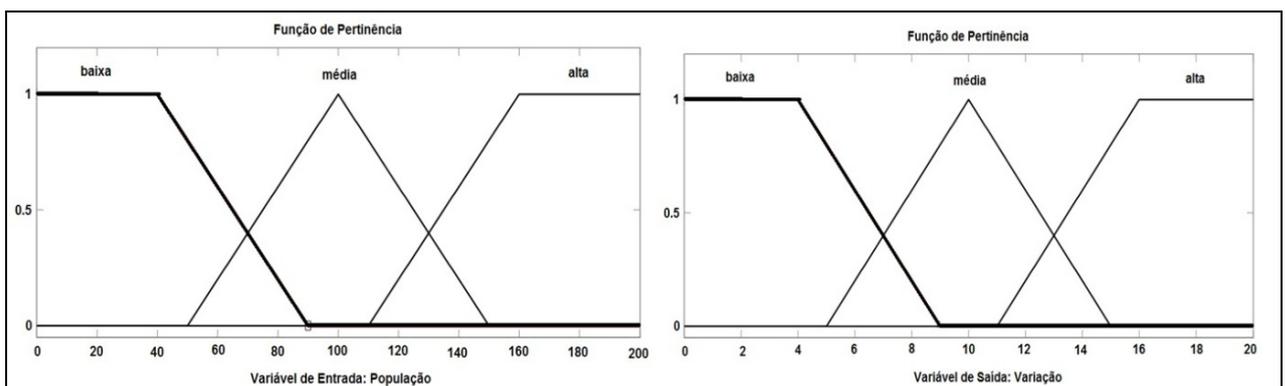
$$\varphi_{Baixa}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{9-x}{5} & \text{se } 5 < x \leq 9 \\ 0 & \text{se } x \geq 9 \end{cases}$$

$$\varphi_{Média}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 5 \\ \frac{x-5}{5} & \text{se } 5 \leq x \leq 10 \\ \frac{x-10}{5} & \text{se } 10 \leq x \leq 15 \\ 0 & \text{se } x \geq 15 \end{cases}$$

$$\varphi_{Alta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 11 \\ \frac{x-11}{5} & \text{se } 11 < x \leq 16 \\ 1 & \text{se } x \geq 16 \end{cases}$$

Essas funções podem ser vistas, conforme Wittgenstein (2009) como um outro “modo de ver”, conforme Figura 24.

Figura 24 - Funções de Pertinência do Modelo Populacional Fuzzy

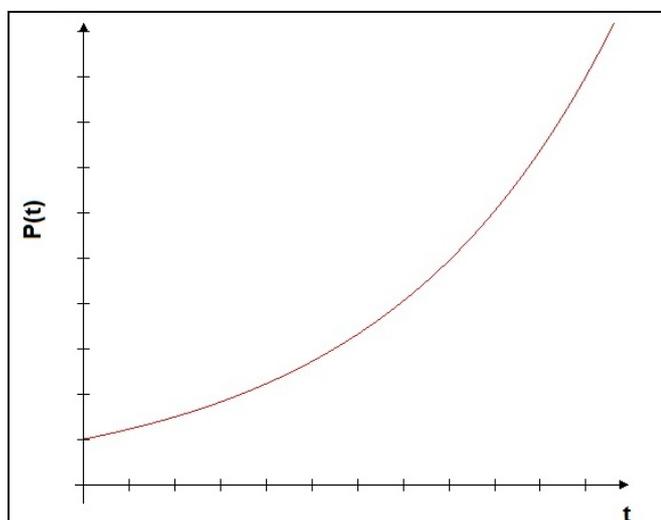


Fonte: Do Autor

Mais uma vez, podemos perceber uma ‘gramática’ diferente. O que sugere mais um novo ‘jogo de linguagem’ para tratar do crescimento populacional. Esse jogo, diferente dos anteriores, possui uma linguagem mais próxima da linguagem natural, o que pode ser visto no uso das variáveis linguísticas ‘baixa’, ‘média’ e ‘alta’ para descrever a situação.

Graficamente, esse modelo fuzzy¹⁴ pode ser descrito pela Figura 25, retirada de Barros e Bassanezi (2006, p. 232):

Figura 25 - Modelo de Crescimento Fuzzy



Fonte: Adaptado de Barros e Bassanezi (2006, p. 232)

Podemos perceber que os modelos clássicos (função exponencial e equação diferencial) e fuzzy (Base de Regras fuzzy) fornecem um resultado muito semelhante, ou seja, apesar de serem ‘jogos de linguagem’ diferentes, com diferentes ‘modos de ver’, eles possuem ‘semelhanças de família’, semelhanças essas, que acabam por caracterizar o que chamamos de modelo para o ‘crescimento exponencial’.

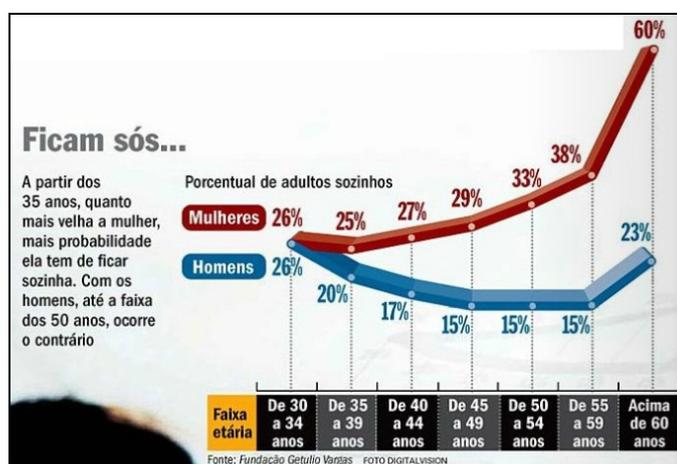
5.3 POSSIBILIDADE DE UMA MULHER FICAR SOZINHA

Nessa segunda atividade de modelagem, o problema já estava resolvido de forma clássica na literatura, e nosso foco então foi resolvê-lo de forma fuzzy, para então olhar para as diferentes linguagens empregadas. Assim, nessa atividade, elaborada em outro contexto - de estudantes do Ensino Superior – buscamos interpretar diferentes modelos matemáticos ou diferentes linguagens, à luz do que enunciamos sobre diferentes linguagens.

¹⁴ Para esse modelo apresentar o mesmo gráfico, assim como para os clássicos apresentados anteriormente, adotou-se $P_0 = M_0$ e $K=1$.

Essa atividade¹⁵, conforme Almeida, Silva e Vertuan (2011), diz respeito à 'dinâmica da nupcialidade', cujos dados foram obtidos da Revista Veja de 27 de abril de 2005 e que tinha como discussão o tema solidão, em que foi feito um estudo sobre o número de pessoas que vivem sozinhas no Brasil e no mundo, conforme podemos ver na Figura 26. Embora a figura mostre dados relativos à solidão sob o ponto de vista masculino e feminino, a matéria tratou da solidão com ênfase na solidão feminina, pois, segundo a própria reportagem, o número de mulheres solteiras, separadas ou viúvas supera o de homens nas mesmas condições há quatro décadas.

Figura 26 - Percentual de Adultos Sozinhos



Fonte: Revista Veja de 27 de abril de 2005

Com a situação-problema posta, os alunos identificaram o problema que iriam investigar, 'Possibilidade¹⁶ da mulher adulta (com mais de 30 anos) ficar sozinha dada a sua idade', e construíram a Tabela 3, considerando o primeiro valor de cada intervalo das faixas etárias a que se refere o gráfico da Figura 26.

¹⁵Atividade já publicada - ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. . Sobre a categorização dos signos na Semiótica Peirceana em atividades de Modelagem matemática. Revista Electrónica de Investigación em Educación em Ciências (En línea), v. 6, p. 8-17, 2011.

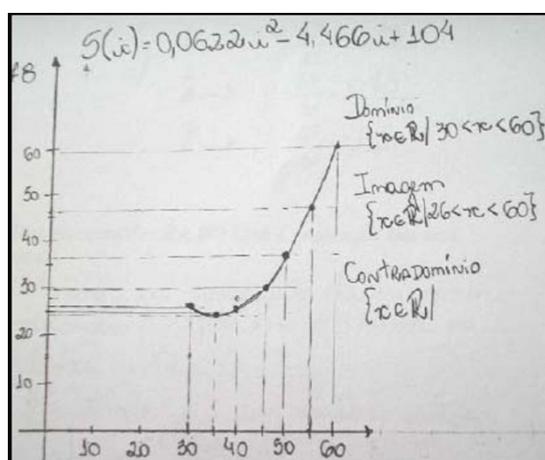
¹⁶ A probabilidade foi entendida pelos alunos como porcentagem.

Tabela 3 - Possibilidade da mulher ficar sozinha

i (em anos)	S (em %)
30	26
35	25
40	27
45	29
50	33
55	38
60	60

Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2011, p. 13)

Para responder ao problema proposto, os alunos determinaram uma função quadrática para representar os dados, em que i representa a idade e $S(i)$ a possibilidade. Graficamente, essa função está representada na Figura 27. Com base nesse ajuste, os alunos determinaram o mínimo da função, encontrando a idade de 36 anos como aquela em que a possibilidade de uma mulher ficar sozinha é menor.

Figura 27 - Representação do Ajuste Quadrático

Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2011, p. 13)

Mas será que a resposta encontrada - 36 anos – é uma boa resposta para o problema? Se a resposta for sim, podemos perceber uma concepção Aristotélica, pois se assume que há apenas dois graus de certeza: certo/verdadeiro ou errado/falso. Basta olhar um pouco para o ambiente que nos rodeia. Somos levados a responder sim ou não, certo ou errado, de modo que ao nos depararmos

com situações dessa natureza, em diferentes circunstâncias, quase que nos adaptamos a essa lógica dualista.

Contudo, será que a única resposta na atividade de Modelagem Matemática que estamos analisando seria encontrar uma idade mínima, com um valor mínimo apenas? Não seria interessante encontrar uma resposta para o problema matemático de determinar a idade em que a possibilidade de uma mulher ficar sozinha já indicasse que esta idade seria ‘por volta’ de 36 anos? ‘O que seria esse ‘por volta’?’ ‘Há como modelar matematicamente esse termo linguístico?’ Certamente, percebemos que a representação dos signos mudou. Há uma mudança na linguagem empregada, ou seja, mudou-se o ‘jogo de linguagem’.

De fato, essa mudança nos remete a um ‘novo’ tipo de matemática ou a um ‘novo’ tipo de linguagem que utiliza signos diferentes daqueles conhecidos até então, a chamada matemática fuzzy.

Levando em consideração que há outra (ou outras) possibilidade(s) para representar matematicamente situações da realidade, vamos analisar essa atividade sob o ponto de vista fuzzy.

Na atividade de modelagem em que queremos determinar a idade em que é menor a possibilidade de uma mulher ficar sozinha, o conjunto não é bem definido, pois neste caso, a idade pode ser percebida como algo aproximado, vago, nebuloso. Vejamos: ‘Quando afirmo que tenho 36 anos, tenho realmente essa idade?’, ‘Quanto é exatamente um ano?’. Apenas com essa última pergunta, percebemos que o ano não é exato, pois se o fosse, ‘por que a cada quatro anos temos que acrescentar um dia para ‘corrigir’ o calendário?’.

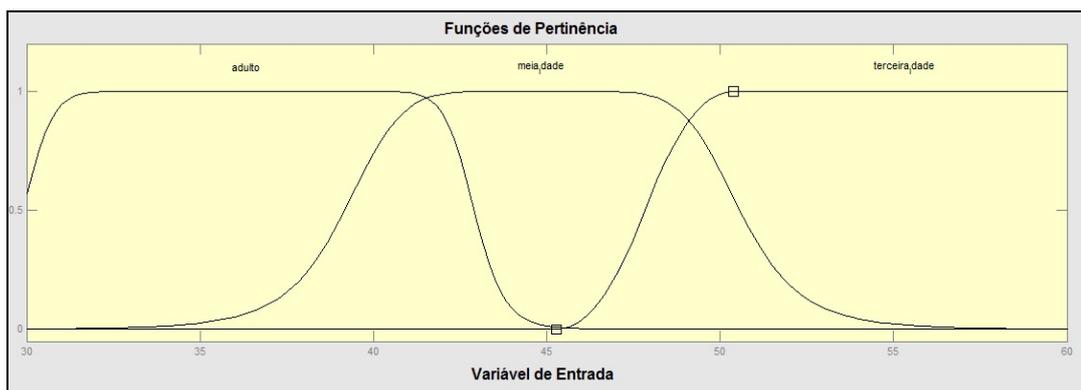
A teoria de sistemas fuzzy aliada às funções de pertinência, cria uma ferramenta muito robusta para resolver problemas, mesmo simples, e com ampla aplicabilidade. Sistemas fuzzy, para Weber e Klein (2003), são “um conjunto de variáveis de entrada (sendo cada uma, uma coleção de conjuntos), uma coleção de conjuntos para a variável de saída e uma coleção de regras que associam as entradas para resultar em conjuntos para a saída” (p. 34). Considerando essa estruturação de entrada, um conjunto de regras e a saída, podemos inferir uma aproximação entre a definição proposta por Almeida, Silva e Vertuan (2012) que uma atividade de Modelagem Matemática:

[...] pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final (ALMEIDA, SILVA E VERTUAN, 2012, p. 12).

E esses procedimentos, outrora divididos por Bassanezi (2002) em abstração, resolução, validação, modificação e aplicação; na teoria fuzzy, compõem o sistema fuzzy, composto basicamente de 4 componentes: módulo de fuzzificação, Base de Regras, módulo de inferência e módulo de defuzzificação, conforme podemos verificar na Figura 20.

Utilizando a atividade de modelagem anteriormente descrita, para exemplificar a fuzzificação, podemos verificar que, para a variável linguística 'idade' podem ser determinadas algumas funções de pertinência, aceitas pela sociedade, referentes à idade da mulher, a saber, 'adulta', de 'meia-idade' e de 'terceira-idade'. De posse desses termos, foi adotado como domínio da idade das mulheres, conforme Figura 28, o intervalo [30,60]. No mesmo processo, foram definidas as funções que 'melhor' se adequam a esses termos linguísticos: uma função em forma de sino para as variáveis 'adulta' e de 'meia-idade' e a função S para a variável de 'terceira-idade', como pode ser visto na Figura 28, obtida a partir do software MATLAB.

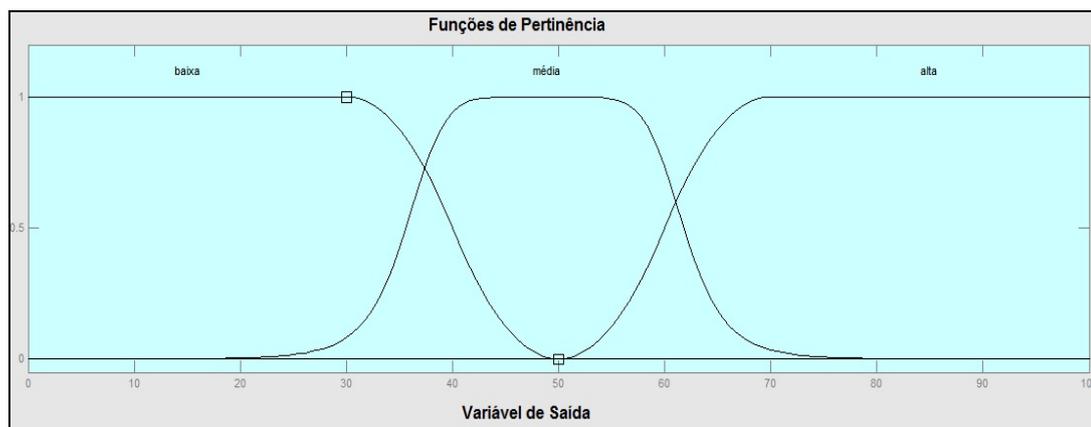
Figura 28 - Funções de Pertinência da Variável Idade



Fonte: Do Autor

Para a variável de saída 'Possibilidade de Estar Sozinha' definimos três funções de pertinência: 'baixa', 'média' e 'alta', cada uma representada pelas funções Z, em forma de sino e S, respectivamente, com domínio no intervalo [0,100]. Na Figura 29 apresentamos essas informações.

Figura 29 - Funções de Pertinência da Variável Possibilidade de Estar Sozinha



Fonte: Do Autor

Nesse processo de fuzzificação, sob a perspectiva de Wittgenstein, temos a mudança de um ‘jogo de linguagem’ para outro, pois nas palavras do autor, “mudam-se as regras, mudam-se os jogos”.

No que diz respeito à Base de Regras, os autores Barros e Bassanezi (2006), Reznik (1997), Cox (1994), Weber e Klein (2003) e Shaw e Simões (2007) convergem para a ideia de que esse módulo é o núcleo do sistema fuzzy, ou seja, é nesse momento que se desenvolve um conjunto de regras que têm a forma de declarações linguísticas do tipo ‘se-então’ que fornecem todo o controle do sistema. A Figura 30 mostra a Base de Regras usada para a atividade de Modelagem Matemática em foco. Podemos observar, que:

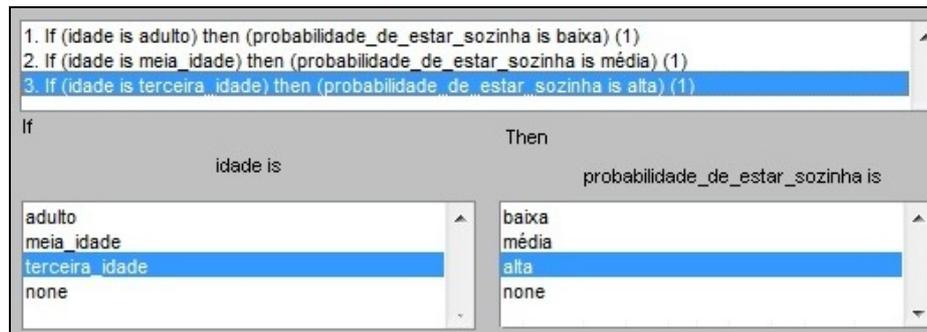
R1: Se ela é ‘adulta’, então a ‘possibilidade de estar sozinha’ é ‘baixa’;

R2: Se ela é de ‘meia-idade’, então a ‘possibilidade de estar sozinha’ é ‘média’;

R3: Se ela é de ‘terceira-idade’, então a ‘possibilidade de estar sozinha’ é ‘alta’.

Pela Figura 30 é possível verificar que a linguagem utilizada é muito próxima da linguagem natural, aparecendo apenas alguns termos cunhados da lógica, como o ‘se’ (*if*) e o ‘então’ (*then*), que servem para articular a variável de entrada com a variável de saída e suas funções de pertinência.

Figura 30 - Base de Regras – Possibilidade de Estar Sozinha

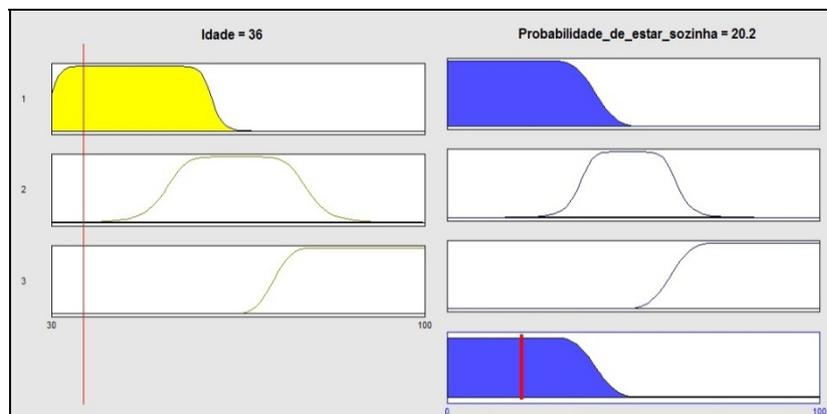


Fonte: Do Autor

Barros e Bassanezi (2006) afirmam que é no módulo de inferência que ocorre a ‘tradução’ das proposições fuzzy em modelos matemáticos. Nele se definem quais t-normas, t-conormas e regras de inferência serão utilizadas para modelar o sistema.

Nesta atividade de modelagem, o método de inferência utilizado foi o de Mamdani, e os passos desse módulo de inferência podem ser vistos resumidamente na Figura 31.

Figura 31 - Módulo de Mamdani – Possibilidade de Estar Sozinha



Fonte: Do Autor

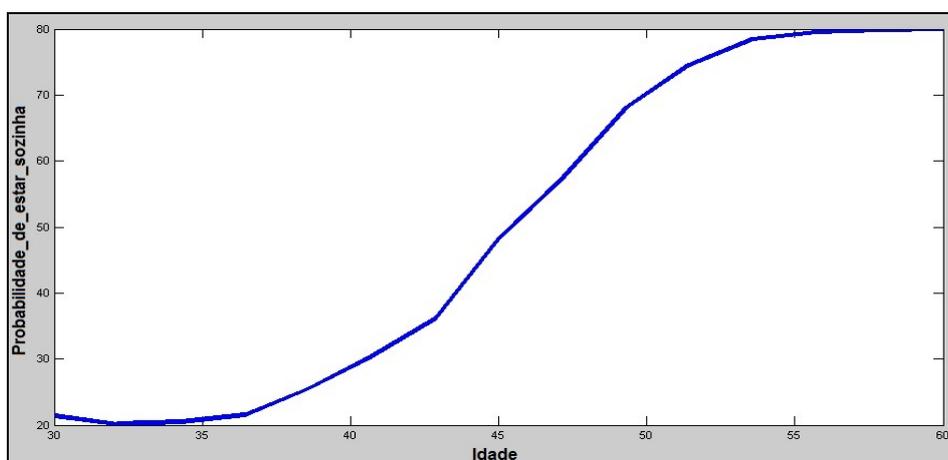
Nota-se que há uma mudança na linguagem, pois parte-se de uma linguagem natural e rumo-se para uma linguagem fuzzy. Essa mudança decorre da necessidade de representação de um modelo que sintetize os dados levantados. Isso se dá por meio de uma mudança nas ‘regras’ utilizadas, provocando uma mudança no ‘jogo de linguagem’ e nos signos utilizados.

O módulo de defuzzificação é o processo que permite representar um conjunto fuzzy por meio de um valor crisp. Esse módulo possui diversos métodos, os mais usuais são o Centro de Gravidade ou Centróide, o Centro de Máximos e a Média dos Máximos.

Para nossa atividade, foi utilizado o método da Centróide, que pode ser aproximado à média aritmética ponderada de uma distribuição de dados, onde os pesos são os graus de pertinência, que indicam o grau de compatibilidade do valor da variável com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy. O que esse método faz é calcular a área de todas as figuras que representam os graus de pertinência de um conjunto fuzzy.

Na Figura 31 pode-se perceber que o último gráfico inferior à direita possui uma curva em forma de sino. A defuzzificação pelo método da centróide (ou da gravidade ou do centro de área) revela o valor defuzzificado de 20.2, que seria a possibilidade de uma mulher estar sozinha com a idade de 36 anos e que parece estar mais próxima dos dados inicialmente apresentados no gráfico da Figura 26 do que aqueles a que se refere a Tabela 3. Ao final do processo desses módulos, ou podemos dizer dessa 'modelagem fuzzy', obtivemos um modelo matemático representado pelo gráfico da Figura 32 em que podemos observar que a possibilidade de uma mulher ficar sozinha cresce à medida que sua idade varia entre 35 e 60 anos.

Figura 32 - Modelo Fuzzy da Possibilidade de Estar Sozinha

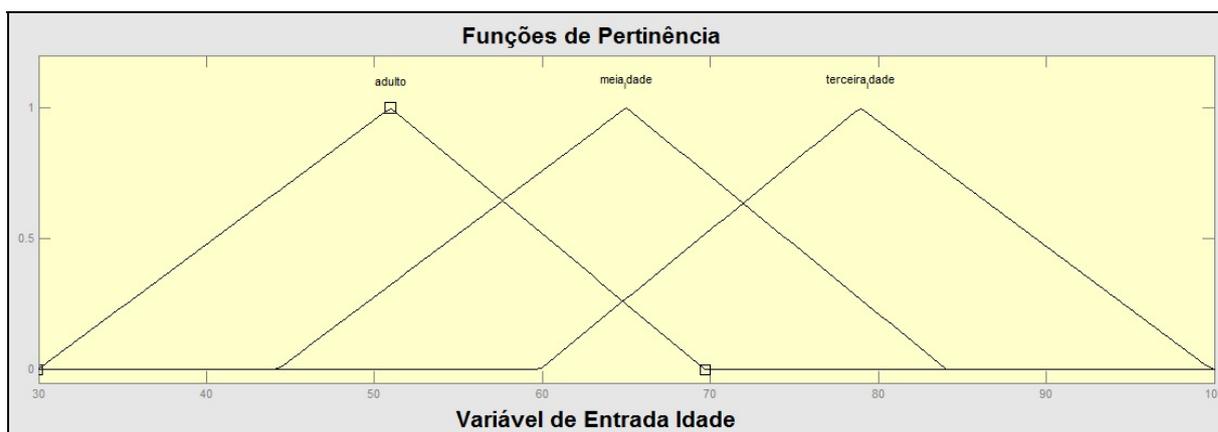


Fonte: Do Autor

Uma outra possibilidade de resolução dessa atividade utilizando um

sistema fuzzy, seria considerar o uso de números triangulares nas funções de pertinência da variável de entrada 'Idade' e da variável de saída 'Possibilidade de Estar Sozinha'. Neste caso, o domínio, os atributos, a base de regras, o módulo de inferência e o método de defuzzificação continuam sendo os mesmos, o que mudam são as funções de pertinência das variáveis de entrada e saída. Para a variável de entrada 'Idade', temos as seguintes funções representadas na Figura 33.

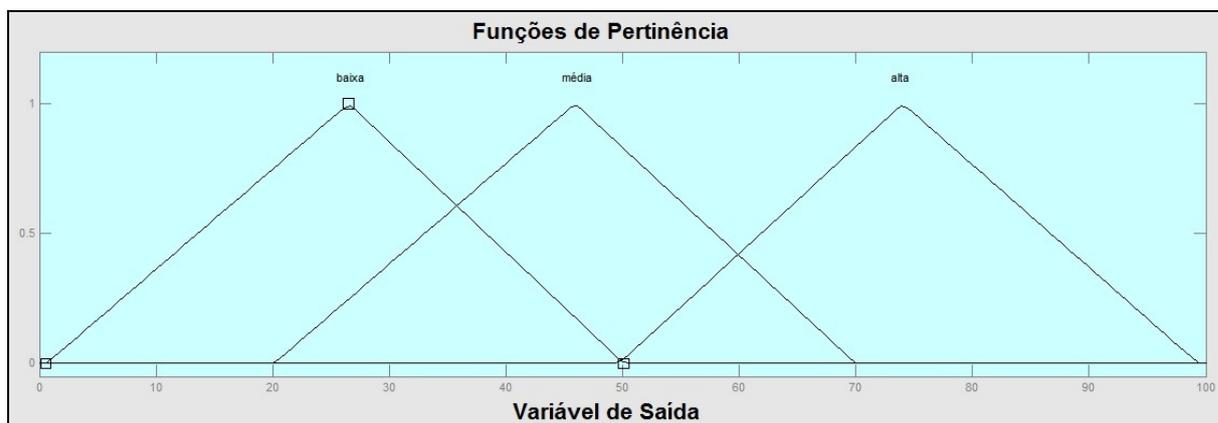
Figura 33 - Funções de Pertinência Triangulares da Variável Idade



Fonte: Do Autor

As funções de pertinência da variável de saída 'Possibilidade de Estar Sozinha' também ficam modificadas, como mostrado na Figura 34.

Figura 34 - Funções de Pertinência Triangulares da Possibilidade de Estar Sozinha



Fonte: Do Autor

Com esse modelo, verificamos que uma mulher com idade de 32 anos tem como 'Possibilidade de Estar Sozinha' o valor de 25, ou seja, o mesmo

valor dado na Figura 26. Vale ressaltar que a vantagem de se utilizar esse modelo fuzzy em relação ao anterior é que as funções de pertinência, do ponto de vista matemático, são mais simples que do modelo anterior. Basta lembrar que no primeiro modelo utilizamos funções de pertinência do tipo 'Z', 'S' e em 'forma de sino' (gaussianas).

Na atividade de modelagem estudada, ambas as resoluções 'clássica' e 'fuzzy', se mostraram profícuas, pois ao mesmo tempo em que se distanciam, se aproximam. Se distanciam pelo fato das regras (na concepção de Wittgenstein) serem diferentes, o que pode ser entendido pela simples ideia de que o modelo clássico (Figura 27) faz um ajuste de curva a partir dos pontos, enquanto que o modelo fuzzy (Figura 32), permite fazer previsões.

Eles se aproximam, pois o 'modelo fuzzy' (Figura 32) possui 'semelhanças' em relação ao 'modelo clássico' apresentado na Figura 27, o que nos permite inferir que apesar de possuírem 'gramáticas' com 'regras' distintas, levando a 'jogos de linguagem' distintos, elas possuem 'semelhanças de família', uma vez que a idade mínima obtida pela matemática fuzzy não se afasta da idade mínima obtida na matemática clássica.

5.4 IMC – ÍNDICE DE MASSA CORPORAL

Essa terceira atividade de modelagem, teve como foco olhar para as diferentes linguagens emergidas, levando em consideração que ela foi resolvida pelo autor do trabalho, utilizando as duas abordagens: clássica e fuzzy. O tema dessa atividade diz respeito à qualidade de vida, por meio de indicadores nutricionais.

Atualmente, a população tem sofrido com diversos males relacionados à sua má alimentação, principalmente no que se refere à obesidade. Assim, cada vez mais, os pesquisadores da área tem buscado uma solução a esses problemas. Podemos por meio de modelos matemáticos, ter um outro olhar para os resultados e/ou propostas associadas à questão.

Nesse sentido, um primeiro passo para melhorar a qualidade de vida seria fazer um diagnóstico nutricional do indivíduo. Ok. 'Mas como fazemos para obter um diagnóstico nutricional?'. Para Thé (2001, p. 26) na:

[...] obtenção do diagnóstico nutricional, o especialista nutricionista tem que coletar um conjunto de informações clínicas, antropométricas, bioquímicas e nutricionais bem como, estilo de vida de um indivíduo para posterior cálculo das necessidades energéticas.

Para a autora, o diagnóstico nutricional é “a medida de indicadores do padrão dietético para identificar mais definitivamente a possível ocorrência, natureza e extensão de uma dieta pobre ou o prejuízo ao estado nutricional”. Segundo ela, consiste ainda, em identificar com mais detalhes uma dieta, os hábitos alimentares, os assuntos relacionados à doença e outros fatores que possam ser causas e que afetem o aconselhamento do estado nutricional (THÉ, 2001, p. 29).

Para um diagnóstico nutricional coerente, Assis (1997, apud Thé, 2001, p. 29) apresenta os itens que um profissional da área de nutrição deve coletar: identificação do paciente, história da doença atual, avaliação laboratorial, avaliação antropométrica, antecedentes pessoais e familiares, inquérito familiar, avaliação nutricional, antecedentes médicos, estilo de vida e fatores psicossociais.

Verificamos que a lista, em certa medida, é extensa e que a quantidade de variáveis assumidas é grande. Contudo, como nosso propósito não é encontrar um diagnóstico nutricional, vamos focar nosso olhar apenas para o item ‘avaliação antropométrica’.

Essa avaliação antropométrica busca a proporção ideal entre os valores do peso¹⁷ e da altura. Na literatura, essa proporção recebe o nome de Índice de Massa Corporal (IMC) ou Índice de Quetelet, e é dada pela equação:

$$IMC(p, a) = \frac{p}{a^2}, \text{ onde 'p' é o peso (kg) e 'a' a altura (m)} \quad (1)$$

Ainda de acordo com Thé (2001, p. 33), “o Índice de Massa Corporal (IMC) é usado no mundo inteiro como indicador determinante do índice de gordura por metro quadrado do indivíduo”, pois é um método simples, com baixo custo e de grande credibilidade. Usado por vários países como ferramenta de orientação no tratamento da obesidade e em pesquisas epidemiológicas.

Dada essa ‘fama’ do IMC, o *National Institute of Health*¹⁸ e a Organização Mundial de Saúde¹⁹ fizeram alguns estudos sobre o assunto e criaram

¹⁷ Quando aparecer a palavra peso, estaremos nos referindo à massa corporal, dada em gramas (apesar de fisicamente estar incorreto, a literatura o utiliza com frequência dessa forma).

¹⁸ Para maiores detalhes sobre as pesquisas acesse <http://www.nih.gov/>

uma tabela que relaciona o IMC com o Estado Nutricional de um indivíduo, para classificar o grau de obesidade em que ele se encontra. Essa classificação (usada pelo Ministério da Saúde do Brasil como parâmetro) é apresentada na Tabela 4, a seguir.

Tabela 4 - IMC e Estado Nutricional

IMC (kg/m²)	Estado Nutricional
Menor que 18,5	Peso abaixo do normal
De 18,5 a 24,99	Normal
De 25 a 29,99	Sobrepeso
De 30 a 34,99	Obesidade – Grau I
De 35 a 39,99	Obesidade – Grau II
Maior que 40	Obesidade – Grau III

Fonte: Adaptado do site da OMS

Ao olhar para a Tabela 4, em especial para os limites inferiores e superiores de cada faixa de estado nutricional alguns questionamentos nos vêm à cabeça: ‘Quem está mais gordo o indivíduo com IMC de 29,99 ou o indivíduo com IMC de 30?’, e, ‘Se um indivíduo com IMC de 24,99 está na faixa do estado nutricional normal, o que podemos dizer do indivíduo com IMC de 25?’.

Se olharmos essa tabela sob o enfoque aristotélico (ou clássico), outros problemas surgem: ‘O que fazer com a diferença de 0,01 entre as classificações?’ e ‘Um indivíduo no limiar das faixas deve ser classificado ‘com certeza’ como?’

Vejamos um exemplo: Dois indivíduos com mesma altura de 1,80 metros, mas com IMCs de 29,99 e 30,00, respectivamente, têm pesos de 97,1676 quilogramas e 97,2000 quilogramas, ou seja, uma diferença de 32,40 gramas. ‘Será que, com essa diferença pode-se classificar o primeiro e o segundo indivíduos como obesos?’ ou ‘Não seria interessante classificar os indivíduos com ‘graus’ diferentes para cada classificação utilizando a matemática fuzzy para dar suporte?’.

Com o intuito de ter um olhar fuzzy ao problema da obesidade e do IMC e, posteriormente compará-lo com o olhar clássico, buscamos nessa problemática responder ao seguinte problema em questão: ‘Um homem paranaense que tenha por volta de 32 anos terá qual IMC? Ele poderá ser classificado como?’

¹⁹ Para maiores detalhes sobre as pesquisas acesse <http://www.who.int/en/>

Assim, com o problema definido, pois foi dado que devemos encontrar o IMC de um homem (sexo definido), paranaense (localização definida) e por volta de 32 anos (idade não definida classicamente), vamos passar a etapa da Experimentação (conforme Bassanezi, 2002), em que obtemos e coletamos os dados.

Especificamente, nesse problema, encontramos no Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística a Tabela 5²⁰ (parcialmente apresentada):

Tabela 5 - Dados da altura e peso da população

Idade e grupos de idade	Dados amostrais		Estimativas populacionais					
	Masculino	Feminino	Masculino			Feminino		
			População	Mediana		População	Mediana	
				Altura	Peso		Altura	Peso
Menos de 1 ano	56	46	80 781	65,4	7,5	64 557	65,1	7,4
1 ano	43	52	58 245	80,5	12,3	64 934	83,3	11,2
2 anos	47	52	60 107	93,0	14,9	70 830	91,7	13,0
3 anos	50	58	63 546	99,4	16,0	88 287	98,9	15,7
4 anos	54	67	70 341	107,1	19,2	81 877	107,3	18,0
5 anos	54	61	66 948	113,3	21,2	87 677	113,4	20,2
6 anos	59	62	73 925	121,6	22,1	89 818	119,8	22,3
•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•
19 anos	76	58	90 701	174,1	66,7	67 793	163,5	58,0
20 a 24 anos	319	312	414 660	174,5	70,4	426 717	162,2	59,4
25 a 29 anos	333	294	443 780	174,2	75,4	425 345	161,8	61,1
30 a 34 anos	258	274	367 403	172,5	74,9	351 010	161,5	62,5
35 a 44 anos	570	646	758 026	172,2	76,6	868 291	160,2	64,4
45 a 54 anos	502	535	670 064	170,6	75,5	731 965	159,5	66,6
55 a 64 anos	323	349	400 842	168,8	76,5	453 118	156,9	66,9
65 a 74 anos	196	226	249 265	168,1	71,3	306 334	156,0	66,5
75 anos e mais	99	125	125 319	167,1	69,8	197 723	154,8	62,4

Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento, Pesquisa de Orçamentos Familiares 2008-2009.

Com base no problema e na tabela, passamos para a etapa da 'Abstração' na visão de Bassanezi (2002), onde admitiremos três variáveis linguísticas de entrada: 'peso', 'idade' e 'altura' e, uma variável de saída 'IMC'. Para melhor compreensão dos dados, refizemos a tabela, mostrando apenas os dados de nosso interesse, como podemos verificar na Tabela 6.

²⁰ Para obter a tabela completa acesse: http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/condicaodevida/pof/2008_2009_encaa/tabelas_pdf/tab3_21.pdf

Tabela 6 - Reorganização dos Dados do IMC

IDADE	ALTURA	PESO
20 a 24	174,5	70,4
25 a 29	174,2	75,4
30 a 34	172,5	74,9
35 a 44	172,2	76,6
45 a 54	170,6	75,5
55 a 64	168,8	76,5
65 a 74	168,1	71,3
75 e mais	167,1	69,8

Fonte: Do Autor

Ainda na etapa de ‘Abstração’, adotamos como ponto de partida para a resolução do problema, apenas as idades acima de 20 anos, pois na literatura existente, há a indicação de que o IMC não é um bom estimador para idades anteriores a essa.

Para as duas variáveis linguísticas de entrada ‘altura’ e ‘peso’, adotamos as mesmas funções de pertinência do tipo ‘triangular’, pois como garante Cox (1994, p. 95, tradução nossa) ao se pronunciar sobre o uso de funções de pertinência triangulares em modelos fuzzy “o uso de funções triangulares pode aproximar seus comportamentos para quase qualquer grau de precisão [...], pois são simples de especificar, fáceis de visualizar, e têm a vantagem indubitável da existência de muitos modelos fuzzy na literatura”.

Para a variável ‘idade’, adotamos como funções de pertinência para os atributos, a função gaussiana, pois como afirma Cox (1994) a representação de aproximações em torno de um valor central (como é o nosso caso em especial) são muito visualizadas e representadas pelas curvas do tipo ‘Bell²¹’.

Para a variável ‘peso’ (dada em kg) adotamos os atributos ‘baixo’, ‘ideal’ e ‘alto’; as funções foram definidas nos intervalos $\varphi_F(x):[70,80] \rightarrow [0,1]$ e determinadas pelas funções de pertinência, algebricamente representadas por:

$$\varphi_{Baixo}(x) = \begin{cases} \frac{75-x}{5} & \text{se } 70 \leq x \leq 75 \\ 0 & \text{se } 75 < x \leq 80 \end{cases}$$

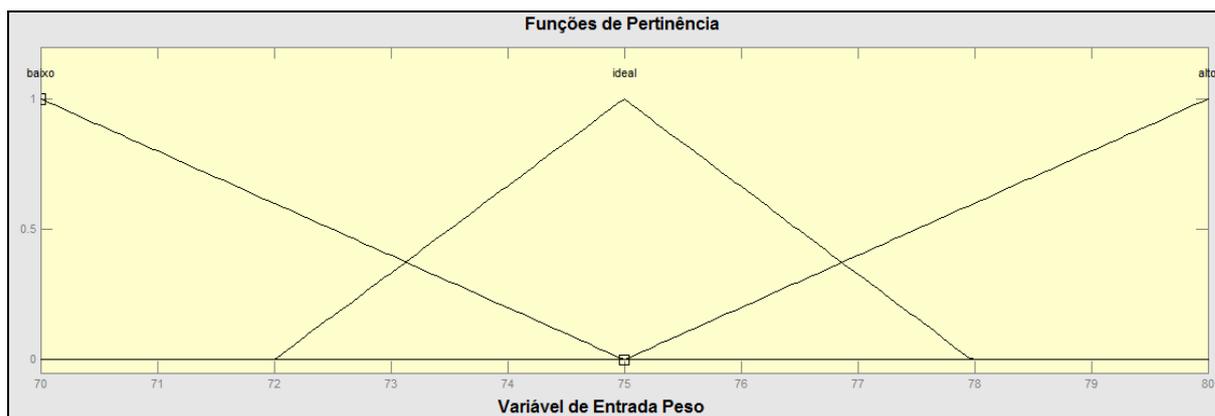
²¹ As curvas do tipo Bell são as chamadas curvas normais, algumas de suas representantes são a PI, a beta e a gaussiana.

$$\varphi_{Ideal}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 72 \\ \frac{x-72}{3} & \text{se } 72 \leq x \leq 75 \\ \frac{78-x}{3} & \text{se } 75 < x \leq 78 \\ 0 & \text{se } 78 < x \leq 80 \end{cases}$$

$$\varphi_{Alto}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 75 \\ \frac{x-75}{5} & \text{se } 75 < x \leq 80 \end{cases}$$

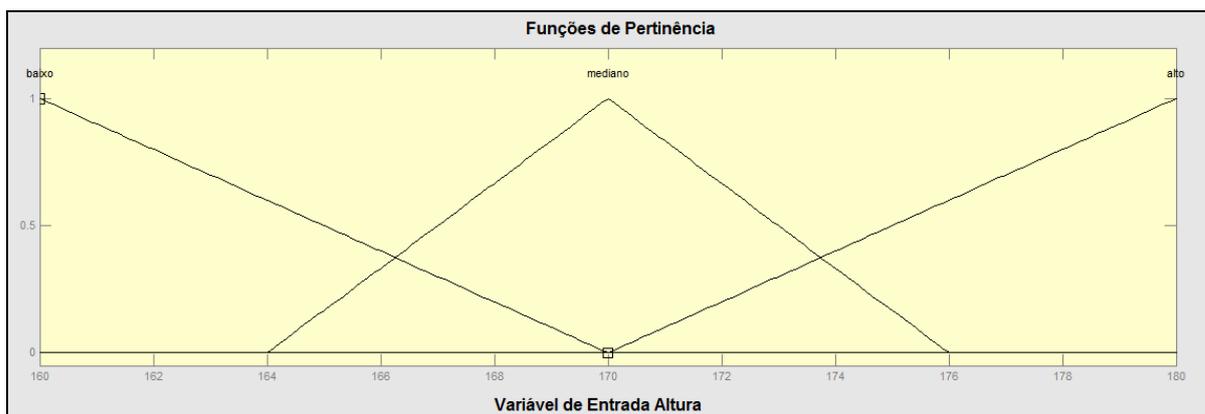
Graficamente, essas funções de pertinência são representadas conforme a Figura 35.

Figura 35 - Funções de Pertinência da Variável Peso



Fonte: Do Autor

Para a variável, 'altura' (dada em cm), adotamos como domínio o intervalo [160,180], pois permitem representar o menor e maior valores contidos na Tabela 6. Como atributos adotamos 'baixo', 'mediano' e 'alto', com as funções do tipo triangular para a pertinência. Essas funções podem ser vistas graficamente na Figura 36.

Figura 36 - Funções de Pertinência da Variável Altura

Fonte: Do Autor

Em seguida, apresentamos algebricamente as funções de pertinência:

$$\varphi_{\text{Baixo}}(x) = \begin{cases} \frac{170-x}{10} & \text{se } 160 \leq x \leq 170 \\ 0 & \text{se } 170 < x \leq 180 \end{cases}$$

$$\varphi_{\text{Mediano}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 164 \\ \frac{x-164}{6} & \text{se } 164 \leq x \leq 170 \\ \frac{176-x}{6} & \text{se } 170 < x \leq 176 \\ 0 & \text{se } 176 < x \leq 180 \end{cases}$$

$$\varphi_{\text{Alto}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 170 \\ \frac{x-170}{10} & \text{se } 170 < x \leq 180 \end{cases}$$

Para a última variável de entrada 'Idade' (dada em anos), adotamos como atributos 'novo', 'médio' e 'velho', como domínio o intervalo [20,80] e como funções de pertinência as funções do tipo gaussianas, pois conforme salientamos anteriormente, esse tipo de variável possui curvas de distribuição que se aproximam de curvas normais. Em seguida, apresentamos algebricamente a representação dessas funções:

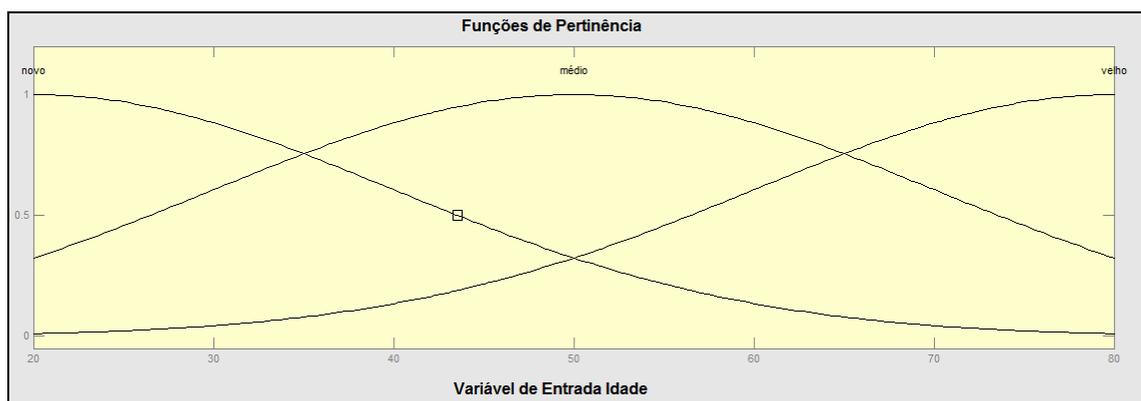
$$\varphi_{Novo}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-20)^2}{800}} & \text{se } 0 \leq x \leq 40 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\varphi_{M\u00e9dio}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-50)^2}{800}} & \text{se } 30 \leq x \leq 70 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\varphi_{Velho}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-80)^2}{800}} & \text{se } 60 \leq x \leq 100 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Em termos gr\u00e1ficos, as mesmas fun\u00e7\u00f5es podem ser representadas conforme a Figura 37.

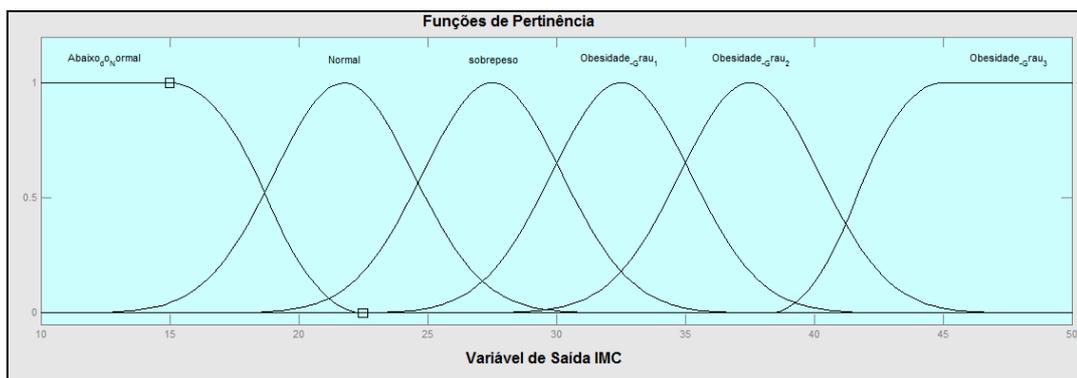
Figura 37 - Fun\u00e7\u00f5es de Pertin\u00eancia da Vari\u00e1vel Idade



Fonte: Do Autor

Para a vari\u00e1vel de sa\u00edda 'IMC', adotamos como atributos, aqueles que j\u00e1 constam na literatura e apresentados na Tabela 4, ou seja, 'Abaixo do normal', 'Normal', 'Sobrepeso', 'Obesidade grau 1', 'Obesidade grau 2' e 'Obesidade grau 3'. Para essa vari\u00e1vel adotamos como fun\u00e7\u00e3o de pertin\u00eancia para o atributo 'Abaixo do normal' a curva 'z', para os atributos 'Normal', 'Sobrepeso', 'Obesidade grau 1' e 'Obesidade grau 2' a curva 'gaussiana' e para o atributo 'Obesidade grau 3' a curva 's', como podem ser vistas na Figura 38.

Figura 38 - Funções de Pertinência da Variável IMC



Fonte: Do Autor

Algebricamente, essas funções de pertinência cujo domínio está no intervalo fechado $[10,50]$ são representadas por:

$$\varphi_{\text{Abaixo_do_Normal}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 15 \\ 1 - 2\left(\frac{x-15}{7,5}\right)^2 & \text{se } 15 \leq x \leq 18,75 \\ 2\left(\frac{x-22,5}{7,5}\right)^2 & \text{se } 18,75 \leq x \leq 22,5 \\ 0 & \text{se } x \geq 22,5 \end{cases}$$

$$\varphi_{\text{Normal}}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-21,74)^2}{14,58}} & \text{se } 7,16 \leq x \leq 36,32 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\varphi_{\text{Sobrepeso}}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-27,5)^2}{14,58}} & \text{se } 12,92 \leq x \leq 42,08 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\varphi_{\text{Obesidade_Grau_1}}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-32,5)^2}{14,58}} & \text{se } 17,92 \leq x \leq 47,08 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\varphi_{\text{Obesidade_Grau_2}}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-34,49)^2}{14,58}} & \text{se } 19,91 \leq x \leq 49,07 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\varphi_{\text{Obesidade_Grau_3}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 38,25 \\ 2 \left(\frac{x - 38,25}{6,75} \right)^2 & \text{se } 38,25 \leq x \leq 41,625 \\ 1 - 2 \left(\frac{x - 45}{6,75} \right)^2 & \text{se } 41,625 \leq x \leq 45 \\ 1 & \text{se } x \geq 45 \end{cases}$$

Até esse ponto, numa concepção fuzzy, o que fizemos foi estabelecer o módulo de fuzzificação, que foi a modelagem dos conjuntos fuzzy com seus respectivos domínios. Nesse sentido, mudamos o nosso ‘jogo de linguagem’ (na perspectiva de Wittgenstein), pois passamos de uma ‘gramática’ com seu conjunto de ‘regras’ (representados de forma clássica na tabela) e passamos para uma outra ‘gramática’, com um conjunto de ‘regras’ diferentes das anteriores (representados pelas funções de pertinência).

No processo de ‘criação da Base de Regras’ (segunda etapa do sistema fuzzy – Base de Regras), utilizamos 27 regras para descrever o modelo. Percebemos pelas regras a seguir que a linguagem utilizada para descrever a Base de Regras, novamente, é muito próxima da linguagem natural, aparecendo apenas alguns termos cunhados da lógica, como o ‘se’ (*if*) e o ‘então’ (*then*), que servem para articular a variável de entrada com a variável de saída e suas funções de pertinência.

- R1: Se peso é ‘baixo’ e altura é ‘alto’ e idade é ‘novo’, então o IMC é ‘Abaixo do Normal’;
- R2: Se peso é ‘baixo’ e altura é ‘alto’ e idade é ‘médio’, então o IMC é ‘Normal’;
- R3: Se peso é ‘baixo’ e altura é ‘alto’ e idade é ‘velho’, então o IMC é ‘Sobrepeso’;
- R4: Se peso é ‘baixo’ e altura é ‘mediano’ e idade é ‘novo’, então o IMC é ‘Normal’;
- R5: Se peso é ‘baixo’ e altura é ‘mediano’ e idade é ‘médio’, então o IMC é ‘Sobrepeso’;
- R6: Se peso é ‘baixo’ e altura é ‘mediano’ e idade é ‘velho’, então o IMC é ‘Obesidade Grau 1’;
- R7: Se peso é ‘baixo’ e altura é ‘baixo’ e idade é ‘novo’, então o IMC é ‘Sobrepeso’;
- R8: Se peso é ‘baixo’ e altura é ‘baixo’ e idade é ‘médio’, então o IMC é ‘Obesidade Grau 1’;
- R9: Se peso é ‘baixo’ e altura é ‘baixo’ e idade é ‘velho’, então o IMC é ‘Obesidade Grau 2’;
- R10: Se peso é ‘ideal’ e altura é ‘alto’ e idade é ‘novo’, então o IMC é ‘Normal’;
- R11: Se peso é ‘ideal’ e altura é ‘alto’ e idade é ‘médio’, então o IMC é ‘Normal’;
- R12: Se peso é ‘ideal’ e altura é ‘alto’ e idade é ‘velho’, então o IMC é ‘Sobrepeso’;
- R13: Se peso é ‘ideal’ e altura é ‘mediano’ e idade é ‘novo’, então o IMC é ‘Normal’;
- R14: Se peso é ‘ideal’ e altura é ‘mediano’ e idade é ‘médio’, então o IMC é ‘Sobrepeso’;

- R15: Se peso é 'ideal' e altura é 'mediano' e idade é 'velho', então o IMC é 'Obesidade Grau 1';
 R16: Se peso é 'ideal' e altura é 'baixo' e idade é 'novo', então o IMC é 'Sobrepeso';
 R17: Se peso é 'ideal' e altura é 'baixo' e idade é 'médio', então o IMC é 'Obesidade Grau 1';
 R18: Se peso é 'ideal' e altura é 'baixo' e idade é 'velho', então o IMC é 'Obesidade Grau 2';
 R19: Se peso é 'alto' e altura é 'alto' e idade é 'novo', então o IMC é 'Normal';
 R20: Se peso é 'alto' e altura é 'alto' e idade é 'médio', então o IMC é 'Sobrepeso';
 R21: Se peso é 'alto' e altura é 'alto' e idade é 'velho', então o IMC é 'Obesidade Grau 1';
 R22: Se peso é 'alto' e altura é 'mediano' e idade é 'novo', então o IMC é 'Sobrepeso';
 R23: Se peso é 'alto' e altura é 'mediano' e idade é 'médio', então o IMC é 'Obesidade Grau 1';
 R24: Se peso é 'alto' e altura é 'mediano' e idade é 'velho', então o IMC é 'Obesidade Grau 2';
 R25: Se peso é 'alto' e altura é 'baixo' e idade é 'novo', então o IMC é 'Obesidade Grau 1';
 R26: Se peso é 'alto' e altura é 'baixo' e idade é 'médio', então o IMC é 'Obesidade Grau 2';
 R27: Se peso é 'alto' e altura é 'baixo' e idade é 'velho', então o IMC é 'Obesidade Grau 3'.

Essas regras também podem ser vistas na Figura 39, com o layout do MATLAB.

Figura 39 - Base de Regras – IMC

The screenshot displays a MATLAB rule base editor. The top section lists 27 rules, each with a number and a logical statement. The bottom section shows a rule editor with the following structure:

If	and	and	Then
Peso is	Altura is	Idade is	Indice_de_Massa_Corporal is
baixo ideal alto none	baixo mediano alto none	novo médio velho none	Abaixo do Normal Normal sobrepeso Obesidade_-_Grau_1 Obesidade_-_Grau_2 Obesidade_-_Grau_3 none

Fonte: Do Autor

Nesse momento, estamos na etapa da Resolução (na perspectiva de Bassanezi, 2002), buscando uma linguagem que nos dê suporte para resolver o problema. Vale lembrar, como aponta Gottschalk (2008, p. 81) que as 'regras' "não

têm, elas próprias, algum significado, são apenas condições de significado”, significado este que deve ser o mesmo para todos que jogam o mesmo ‘jogo de linguagem’, ou seja, é preciso que seja uma prática comum as ‘formas de vida’ que a praticam, porque senão, elas se esvaem e não permitem representar o modelo de interesse.

Em seguida, utilizamos o módulo de Mamdani, no módulo de inferência, cuja ideia é baseada numa relação fuzzy binária, chamada de M , entre x e u , utilizando a composição de inferência max–min, ou seja, em cada regra, a condicional “se x é A_j então u é B_j ” é modelada pela aplicação \wedge (mínimo), adotando-se a t-norma \wedge (mínimo) para conectivo lógico “e” e o conectivo “ou” para a t-conorma \vee (máximo), cuja função é conectar as regras da Base de Regras.

Para exemplificar vamos utilizar os dados do problema que queremos resolver, em que adotamos para as variáveis de entrada ‘peso’, ‘altura’ e ‘idade’, os valores de 74,9; 172,5 e 32; respectivamente. Vamos olhar para Regra 14, que afirma ‘Se peso é ‘ideal’ e altura é ‘mediano’ e idade é ‘médio’, então o IMC é ‘Sobrepeso’.

Substituindo então o valor de cada variável em seu respectivo atributo dado pela Regra 14, temos:

$$Peso \rightarrow \varphi_{Ideal}(74,9) = \frac{74,9 - 72}{3} = 0,9667$$

$$Altura \rightarrow \varphi_{Mediano}(172,5) = \frac{176 - 172,5}{6} = 0,5833$$

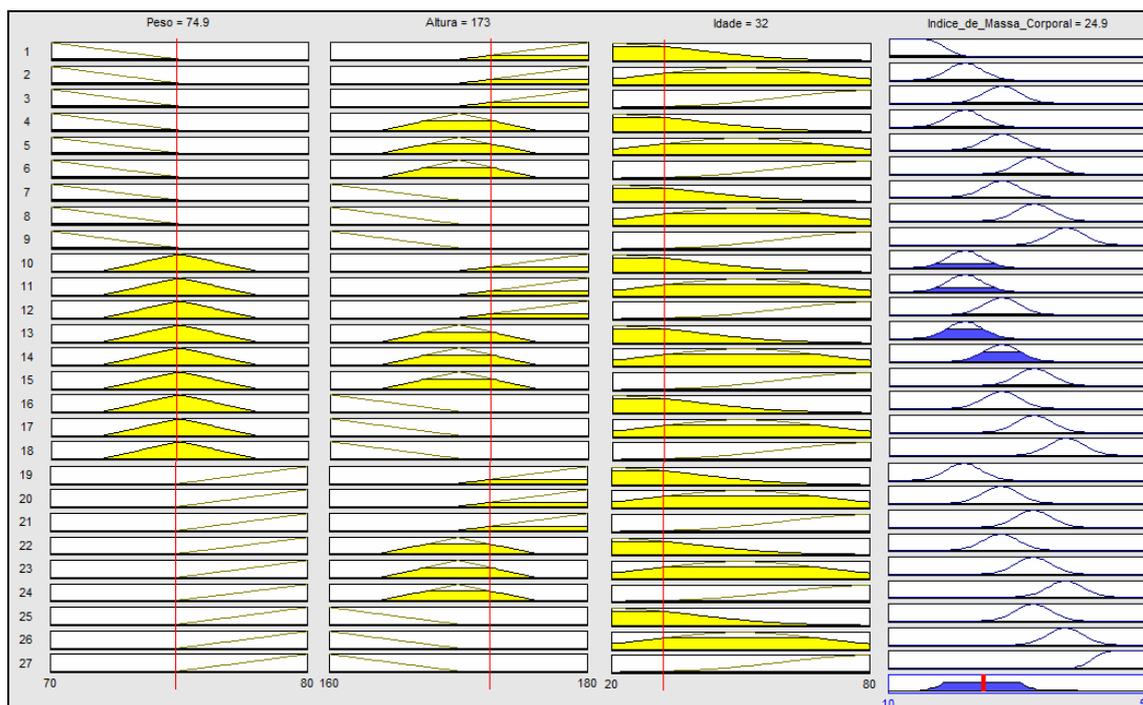
$$Idade \rightarrow \varphi_{Médio}(32) = e^{-\frac{(32-50)^2}{800}} = 0,6670$$

E utilizando a função mínimo para encontrar o menor valor:

$$\varphi_{Ideal}(74,9) \cap \varphi_{Mediano}(172,5) \cap \varphi_{Médio}(32) = \min\{0,9667; 0,5833; 0,6670\} = 0,5833$$

Obtemos como $\varphi_{Regra_{14}} = 0,5833$. Este procedimento é repetido para as 27 regras explicitadas e depois, é escolhido o maior valor dos mínimos obtidos em cada uma das regras, ou seja, a função máximo.

Esses passos do módulo de inferência podem ser vistos resumidamente na Figura 40, em que a última coluna mostra graficamente os valores de mínimo para cada regra e, a última linha da terceira coluna, apresenta o máximo entre todas essas curvas.

Figura 40 - Módulo de Mamdani - IMC

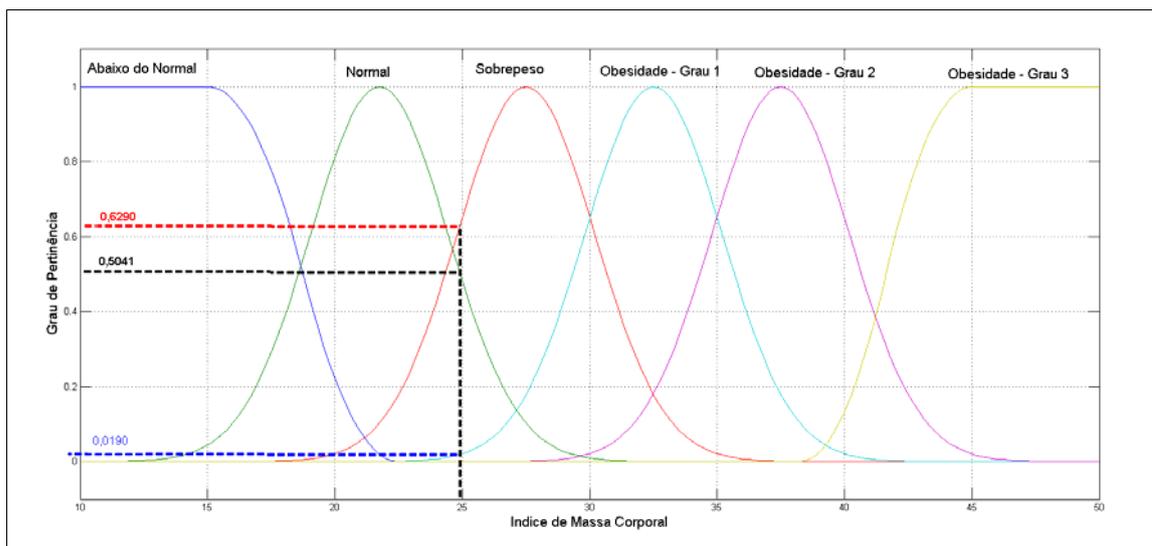
Fonte: Do Autor

Como último passo do processo de modelagem fuzzy, temos o módulo de defuzzificação, que nos permite representar um conjunto fuzzy por um valor crisp (número real). Em nosso modelo utilizamos o método da Centróide.

Assim, para resolver ao problema em questão, adotamos para as variáveis de entrada 'peso', 'altura' e 'idade', os valores de 74,9; 32 e 172,5; respectivamente; baseados na terceira linha da Tabela 6, obtendo como resposta um valor defuzzificado de 24,9 (o que responde a primeira pergunta do problema).

À segunda pergunta ao problema, podemos responder substituindo o valor de 24,9 em cada uma das funções de pertinência da variável de saída 'IMC'. Assim, para cada uma delas obtemos os seguintes graus de pertinência, como podemos ver na Figura 41.

Figura 41 - Graus de Pertinência - Idade 32 Anos



Fonte: Do Autor

Ou ainda,

- Abaixo do Normal - $\varphi_{AN}(24,9) = 0$
- Normal - $\varphi_N(24,9) = 0,5041$
- Sobrepeso - $\varphi_{AN}(24,9) = 0,6290$
- Obesidade Grau 1 - $\varphi_{AN}(24,9) = 0,0190$
- Obesidade Grau 2 - $\varphi_{AN}(24,9) = 0,000018990$
- Obesidade Grau 3 - $\varphi_{AN}(24,9) = 0$

Portanto, podemos dizer que o indivíduo com 32 anos de idade, possui como graus de pertinência relevantes, o grau de pertinência de 0,6290 no Estado Nutricional ‘Sobrepeso’ e o grau de pertinência de 0,5041 no Estado Nutricional ‘Normal’, o que de certa forma parece uma resposta equivocada do ponto de vista da lógica aristotélica, ou seja, pertencer a dois conjuntos ao mesmo tempo, mas que do ponto de vista fuzzy é muito plausível e coerente com a situação dada.

Buscando comparar (e de certa forma Validar) essa resposta, buscamos encontrar um modelo clássico, baseados na equação (1) já dada na literatura para o IMC.

$$IMC(p, a) = \frac{P}{a^2} \quad (1)$$

Além dela, utilizamos a Tabela 7 para admitir algumas hipóteses para o nosso modelo.

Tabela 7 - Reorganização para o modelo clássico - IMC

IDADE MÉDIA	IDADE	ALTURA	PESO
22	20 a 24	174,5	70,4
27	25 a 29	174,2	75,4
32	30 a 34	172,5	74,9
39,5	35 a 44	172,2	76,6
49,5	45 a 54	170,6	75,5
59,5	55 a 64	168,8	76,5
69,5	65 a 74	168,1	71,3
75	75 e mais	167,1	69,8

Fonte: Do Autor

Como pode ser visto na primeira coluna, iremos adotar a idade média como parâmetro para representar os intervalos das idades. Com esse novo parâmetro e a própria tabela, buscamos uma relação entre a altura e a idade. A partir do gráfico de dispersão da Figura 42, podemos inferir que existe uma relação entre elas muito próxima de uma função de 1º grau decrescente.

Figura 42 - Gráfico de Dispersão: Altura x Idade



Fonte: Do Autor

Assim, admitindo que a relação entre elas seja uma função do 1º grau e, usando o método dos Mínimos Quadrados para calcular os coeficientes linear e angular, chegamos à seguinte equação:

$$A(i) = -0,1399i + 177,54. \quad (2)$$

Além dela, utilizamos a Tabela 8 para admitir algumas hipóteses para o nosso modelo.

Tabela 8 - Relação entre Altura e Peso

ALTURA	PESO	Altura/Peso
174,5	70,4	2,4787
174,2	75,4	2,3103
172,5	74,9	2,3031
172,2	76,6	2,2480
170,6	75,5	2,2596
168,8	76,5	2,2065
168,1	71,3	2,3576
167,1	69,8	2,3940

Fonte: Do Autor

Pela terceira coluna da Tabela 8, podemos verificar uma regularidade entre o quociente da altura pelo peso, o que indica que há uma proporção direta entre elas. Assim, podemos admitir que a relação $\frac{A}{P} = k$ é possível. E para encontrar esse valor de k , vamos adotar como hipótese que ele não mudará no decorrer do tempo e será dado pela média entre os valores da tabela; no caso, 2,3197. Assim, obtemos a equação:

$$A(p) = 2,3197 \cdot p. \quad (3)$$

Utilizando agora a equação (1), a equação (2) e a equação (3), encontramos uma equação que relaciona o IMC com a idade, como podemos observar na equação a seguir:

$$IMC(i) = \frac{1}{-0,3245603i + 411,839538} \quad (4)$$

Como essa equação foi obtida de valores para a altura em centímetros e a equação original é dada em metros, devemos multiplicar a equação (4) por 10.000 para padronizarmos na unidade de medida adequada, que seria (kg/m^2). Assim obtemos a seguinte equação:

$$IMC(i) = \frac{10000}{-0,3245603i + 411,839538} \quad (5)$$

De posse dessa equação e admitindo que ‘por volta de’ 32 anos de idade seja a idade exata de 32 anos, substituímos essa idade na equação (5) e obtemos como IMC um valor de 24,90941039, que responderia a primeira pergunta. À segunda pergunta, teríamos como resposta que o indivíduo se encontra no Estado Nutricional ‘Normal’.

Vale ressaltar aqui, que a resposta à segunda pergunta foi dada de forma clássica, ou seja, com a resposta em mãos, verificamos na tabela a que intervalo, e somente um, pertence o valor. Diferentemente da resposta fuzzy, em que podemos atribuir diferentes graus de pertinência.

E buscando validar nosso modelo, fizemos uma comparação com os valores obtidos na modelagem e os fornecidos pelo IBGE, como podemos verificar na Tabela 9. A quinta coluna contém os valores do IMC tabelados, na sexta coluna temos os valores obtidos a partir do modelo clássico e na sétima coluna temos os valores do modelo fuzzy.

Tabela 9 - Validação do Modelo do IMC

IDADE MÉDIA	IDADE	ALTURA	PESO	IMC	MODELO CLÁSSICO	MODELO FUZZY
22	20 a 24	174,5	70,4	23,12	24,71	20,3
27	25 a 29	174,2	75,4	24,85	24,81	25,4
32	30 a 34	172,5	74,9	25,17	24,91	24,9
39,5	35 a 44	172,2	76,6	25,83	25,06	27,6
49,5	45 a 54	170,6	75,5	25,94	25,27	27,8
59,5	55 a 64	168,8	76,5	26,85	25,48	31,8
69,5	65 a 74	168,1	71,3	25,23	25,69	30,8
75	75 e mais	167,1	69,8	25,00	25,81	31,3

Fonte: Do Autor

Assim, nessa atividade de modelagem, percebemos que a resposta ao problema, com as resoluções ‘clássica’ e ‘fuzzy’, se mostraram muito próximas do ponto de vista do valor esperado (24,9) para a primeira pergunta. Contudo, a resposta à segunda pergunta mostrou que existe certo distanciamento na maneira como podemos conceber a resposta e interpretá-la. Isso se deve ao fato de que jogamos ‘jogos de linguagem’ diferentes, no caso clássico e no caso fuzzy, pois as ‘gramáticas’ são distintas e as ‘regras’ também.

Contudo, conforme Wittgenstein nos lembra, apesar de possuírem ‘gramáticas’ com ‘regras’ distintas, levando a ‘jogos de linguagem distintos’, elas possuem ‘semelhanças de família’, uma vez que o IMC obtido pela matemática fuzzy não se afasta do IMC obtido na matemática clássica.

5.5 NÚMERO DE ACIDENTES

O foco dessa quarta atividade de modelagem também foi olhar para as diferentes linguagens que emergiram. Nessa atividade, tanto a modelagem clássica quanto a modelagem fuzzy foram desenvolvidas pelo autor deste trabalho. O tema em análise foi investigar o número de acidentes que ocorrem quando um motorista trafega próximo à sua residência.

Como bem sabemos, não há um dia sequer em que não vemos notícias sobre acidentes de trânsito. Segundo dados fornecidos pelo site TrânsitoBR²² mais de 1 milhão de acidentes acontecem todos os anos no Brasil, sendo que desses, por volta de 30 mil pessoas acabam morrendo, ou seja, são mais de 80 pessoas por dia, ou uma a cada 18 minutos.

Dessa forma, uma das maiores preocupações dos órgãos responsáveis pelo planejamento do trânsito e também da comunidade científica é encontrar soluções que possam reduzir esses números. Procurar entender esses eventos é poder ajudar significativamente na tentativa de prevenir ou reduzir os seus impactos, no intuito de propor soluções para a redução dos acidentes de trânsito. Uma das formas de conhecer os altos índices de acidentes de trânsito é fazer um estudo da análise espacial.

Conforme o site TrânsitoBR “metade dos acidentes ocorrem a menos de 10 km de distância da residência do motorista”. Em outro site, o WebMotors²³, há a afirmação que “30% dos acidentes de carro ocorrem perto de casa”. No site Sobral&Palácio²⁴, eles dizem que “um estudo americano revelou que 52% dos acidentes de trânsito ocorrem em um raio de 8 km da casa” do motorista.

Buscando entender essas afirmações, com especial atenção às palavras ‘perto de casa’, procuramos responder à seguinte pergunta: ‘Uma pessoa

²² Para maiores informações acesse: <http://www.transitobr.com.br/>

²³ Para maiores informações acesse: <http://revista.webmotors.com.br>

²⁴ Para maiores informações acesse: <http://www.sobralepalacio.com.br>

que reside em Maringá, trafegando ‘perto de sua residência’ possui que chances de se acidentar no trânsito?’.

Inicialmente, a pergunta que surge é: ‘O que é perto?’ Fazendo uma pesquisa rápida pela internet, encontramos que a palavra perto pode ser usada como sinônimo para: ‘a pouca distância’, ‘próximo de’, ‘nas vizinhanças de’, ‘em torno de’.

Assim, a palavra ‘perto’ é incerta, típica de ser modelada pela matemática fuzzy. Como vimos na Tabela 2, quando o atributo ‘aproximadamente’ ou ‘ao redor de’ é acrescentado a uma variável, ele conseqüentemente aproxima seu valor a um escalar.

Encontramos em Soares (2003, p. 109) uma tabela que permite encontrar o número de acidentes ocorridos no de ano 2000 nas proximidades da cidade de Maringá. Conforme a autora, os acidentes ocorridos referem-se a pessoas que residem em Maringá e que trabalham, na própria cidade, e nas cidades vizinhas de Paiçandu, Sarandi e outras cidades ao redor. A Tabela 10, mostra o número de acidentes ocorridos por categoria e por cidade.

Tabela 10 - Número de Acidentes Próximos a Maringá

Categoria	Maringá	Paiçandu	Sarandi	Outros
Pedestre	276	4	15	25
Ciclista	770	18	85	5
Motociclista	1117	36	154	22
Ocupante de Carro/Caminhonete	616	30	55	96
Ocupante de outros veículos	51	7	7	13
Total	2830	95	316	161

Fonte: Adaptado de Soares (2003, p. 109)

Tentando passar de uma linguagem natural para uma matemática, buscamos no *Google Maps*²⁵ as distâncias entre os ‘centros’ de Maringá com as outras cidades. Encontramos que entre Maringá e Paiçandu a distância é de 20 km e de Maringá até Sarandi é de 12,1 km. Assim, para sintetizar e simplificar a situação, separamos as distâncias em quatro grupos: menor que 12 km (onde estariam as pessoas que trabalham em Maringá), em torno de 12 km (onde estariam as pessoas que trabalham em Sarandi), em torno de 20 km (onde estariam as pessoas que

²⁵ Para maiores informações acesse <http://maps.google.com.br/maps>

trabalham em Paçandu) e acima de 20 km (as pessoas que moram em cidades mais afastadas).

Adotando também que o número de acidentes em cada região seja o total da Tabela 10 (última linha), admitindo que exista um número 'alto', 'médio', 'baixo' e 'baixíssimo' de acidentes e, juntando aos quatro grupos que acabamos de criar, construímos a Tabela 11.

Tabela 11 - Distância x Número de Acidentes

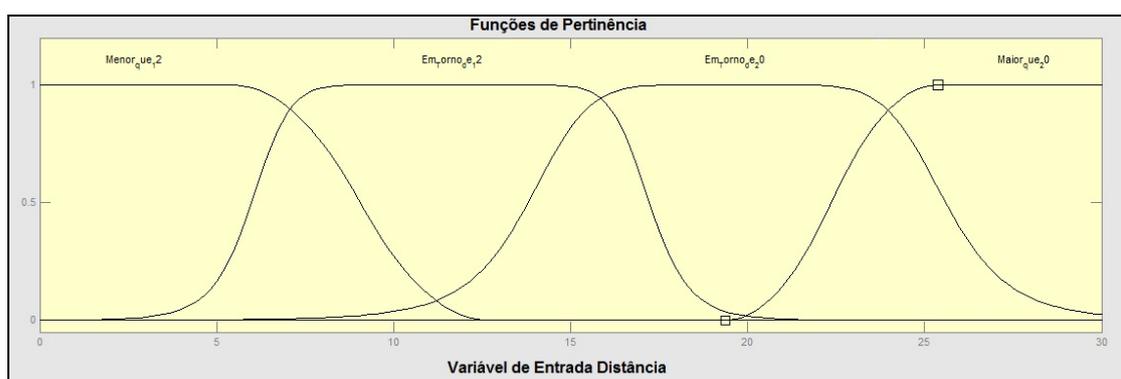
Distância	Número de Acidentes	Chances de Acidente
menor que 12	2830	Alto
em torno de 12	316	Médio
em torno de 20	95	Baixíssimo
acima de 20	161	Baixo

Fonte: Do autor

De posse dessa tabela e dos dados que fornece, definimos como variáveis de entrada e saída, respectivamente, a distância e o número de acidentes. Para a variável de entrada distância adotamos como atributos a primeira coluna da Tabela 11, ou seja, 'menor que 12', 'em torno de 12', 'em torno de 20' e 'acima de 20'. Para a variável de saída número de acidentes, adotamos 'alto', 'médio', 'baixo' e 'baixíssimo', como atributos.

Para a variável de entrada adotamos como domínio o intervalo fechado $[0,30]$ e como funções de pertinência, adotamos para o atributo 'menor que 12' a função Z, para 'em torno de 12' e 'em torno de 20' adotamos a função de pertinência Gbell e para 'acima de 20' adotamos a função S, conforme aparece na Figura 43.

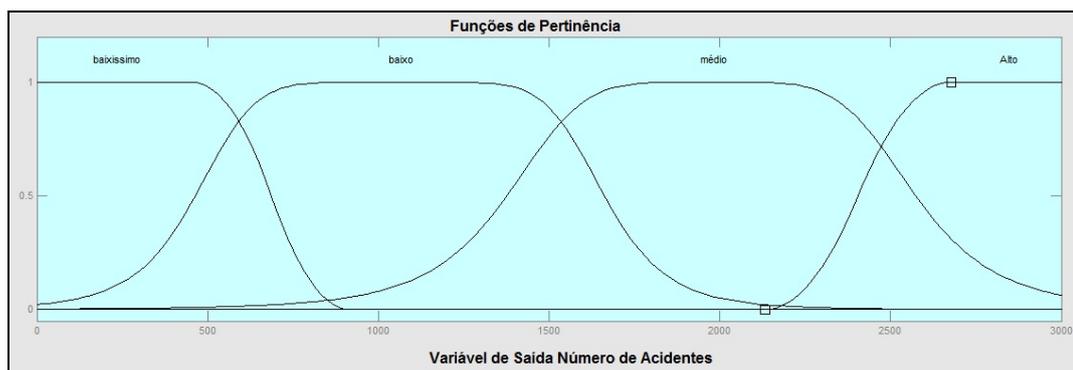
Figura 43 - Funções de Pertinência da Variável Distância



Fonte: Do Autor

Para a variável de saída adotamos como contradomínio o intervalo fechado $[0,3000]$ e como funções de pertinência, adotamos para o atributo 'alto' a função S, para 'médio' e 'baixo' adotamos a função de pertinência Gbell e para 'baixíssimo', adotamos a função Z, conforme aparece na Figura 44.

Figura 44 - Funções de Pertinência da Variável Número de Acidentes



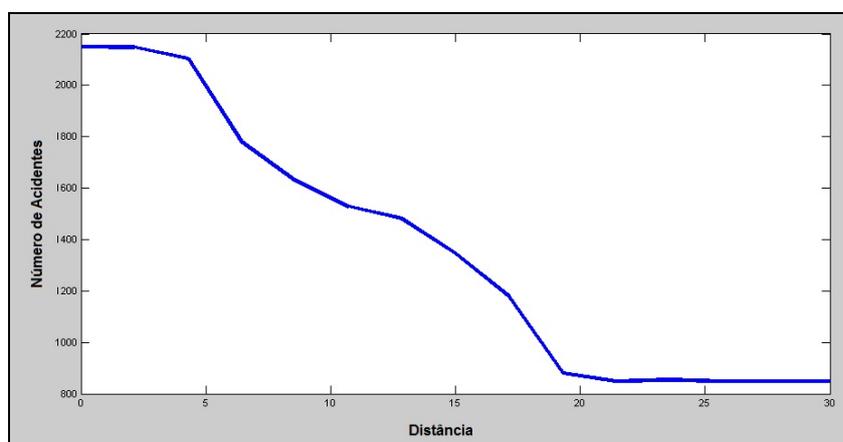
Fonte: Do Autor

Como 'regras' que buscam relacionar a variável de entrada com seus atributos à variável de saída com seus atributos, temos:

- R1: Se a distância é 'menor que 12', então o número de acidentes é 'Alto';*
- R2: Se a distância é 'menor que 12', então o número de acidentes é 'Médio';*
- R3: Se a distância é 'em torno de 12', então o número de acidentes é 'Médio';*
- R4: Se a distância é 'em torno de 12', então o número de acidentes é 'Baixo';*
- R5: Se a distância é 'em torno de 20', então o número de acidentes é 'Baixo';*
- R6: Se a distância é 'em torno de 20', então o número de acidentes é 'Baixíssimo';*
- R7: Se a distância é 'acima de 20', então o número de acidentes é 'Baixo';*
- R8: Se a distância é 'acima de 20', então o número de acidentes é 'Baixíssimo'.*

O gráfico que relaciona a variável de entrada à variável de saída, no problema, é dado pela

Figura 45.

Figura 45 - Gráfico Número de Acidentes x Distância

Fonte: Do Autor

Conforme o gráfico podemos verificar que a medida que a distância aumenta, o número de acidentes diminui, portanto, para uma pessoa que reside em Maringá suas chances de se acidentar são 'Altas' quando próximo à sua residência. Apenas para exemplificar, imaginemos uma pessoa que esteja a 9 km de onde reside, pelo modelo que desenvolvemos, essa pessoa tem os seguintes graus de pertinência para a variável de entrada:

- Menor que 12 - $\varphi_{\text{Menor que 12}}(9) = 0,9996$
- Em Torno de 12 - $\varphi_{\text{Em Torno de 12}}(9) = 0,5136$
- Em Torno de 20 - $\varphi_{\text{Em Torno de 20}}(9) = 0,0198$
- Acima de 20 - $\varphi_{\text{Acima de 20}}(9) = 0$

Os seus graus de pertinência mostram o já conhecido, que a pessoa que reside a 9 km de sua residência está com um grau de pertinência muito maior no atributo 'Menor que 12' do que 'Em torno de 12'.

E para a variável de saída, adotando como valor da Tabela 11, o valor de 2830 acidentes, já que a distância é menor que 12, temos que:

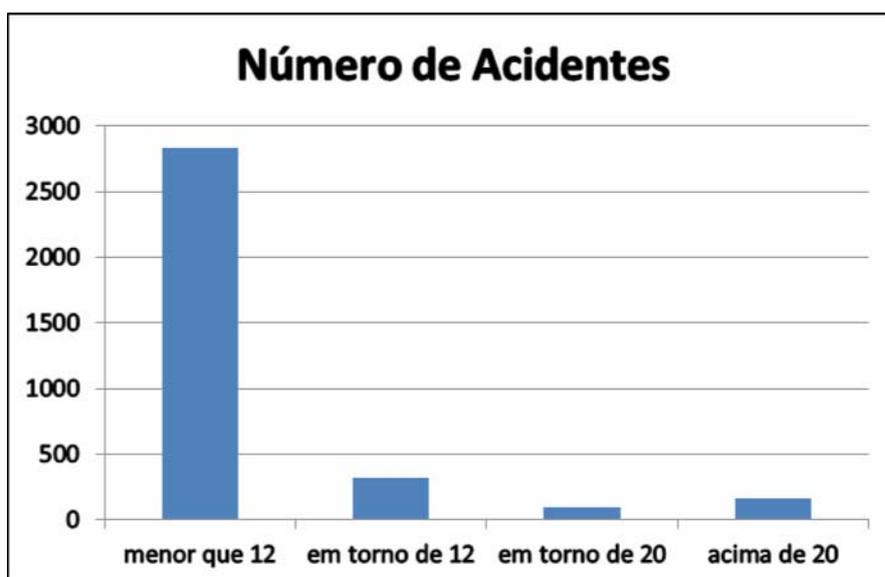
- Alto - $\varphi_{\text{Alto}}(2830) = 1$
- Médio - $\varphi_{\text{Médio}}(2830) = 0,1459$
- Baixo - $\varphi_{\text{Baixo}}(2830) = 0,00083538$

- Baixíssimo - $\varphi_{\text{Baixíssimo}}(2830) = 0$

Conforme verificamos, as chances, sob olhar da matemática fuzzy, de o motorista se acidentar são 'Altas' se comparadas a 'Médio' e 'Baixa'. Utilizando o Método de Mamdani e o Método da Centróide, verificamos que o valor defuzzificado para um motorista que trafega 'perto da sua residência', o que no caso adotamos ser por volta de 9 km, nos resultará em número de 1600 acidentes, o que em nosso modelo significa que suas chances de acidentes são 'Altas'.

Classicamente, poderíamos resolver esse problema encontrando a curva que melhor se ajusta aos dados da Tabela 11. Com a ajuda do software EXCEL, plotamos o gráfico de colunas, que é apresentado na Figura 46.

Figura 46 - Gráfico Número de Acidentes x Distância (Clássico)



Fonte: Do Autor

Buscando encontrar uma curva que se adeque a situação, usamos também o software Curve Expert²⁶ e assumindo como condição que os valores da distância são valores equidistantes, apresentamos um resumo conforme a Tabela 12.

Tabela 12 - Distância Equidistante

Distância	Número de Acidentes
4	2830
12	316

²⁶ Para maiores informações ou baixar o software acesse <http://www.curveexpert.net/>

20	95
28	161

Fonte: Do Autor

Assim, para esses valores e com o uso do software, encontramos diversas equações que poderiam se adequar aos dados, contudo, levando em consideração as hipóteses e algumas informações sobre o número de acidentes, optamos pela função racional dada por:

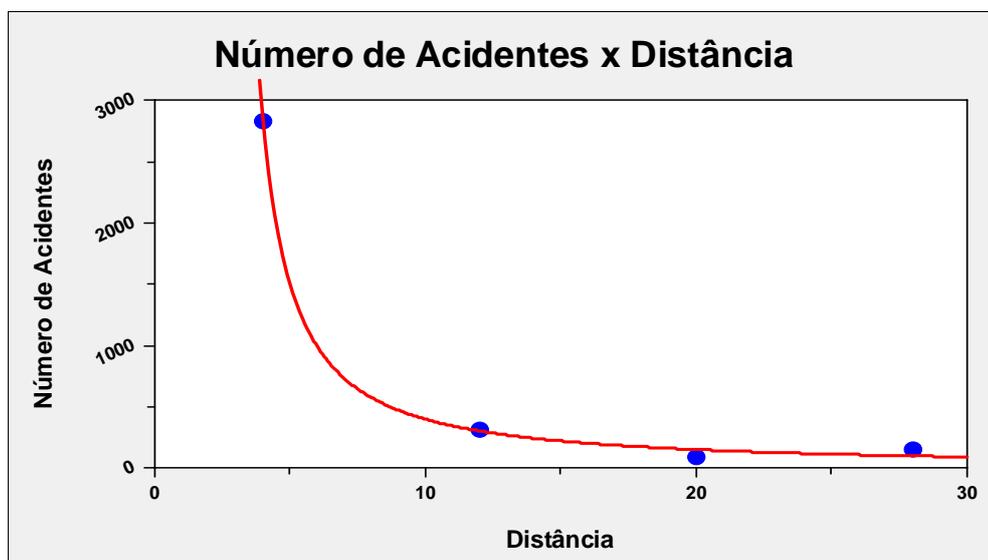
$$N(d) = \frac{-9,5344871 \cdot 10^8 - 4,101464 \cdot 10^8 \cdot d}{1 + 4,569299 \cdot 10^5 d - 1,71520874 \cdot 10^5 d^2},$$

melhor aproximada para:

$$N(d) = \frac{-9,53 \cdot 10^8 - 4,10 \cdot 10^8 \cdot d}{1 + 4,57 \cdot 10^5 d - 1,72 \cdot 10^5 d^2},$$

que pode ser graficamente²⁷ visualizada na Figura 47.

Figura 47 - Número de Acidentes



Fonte: Do Autor

Conforme visto em atividades anteriores, há uma diferença no 'jogo de linguagem' utilizado entre as resoluções clássica e fuzzy. Nessa atividade em especial, os resultados obtidos estão muito longe um do outro. Para o caso clássico, quando a distância é de 9 km, obtemos como número de acidentes 473 aproximadamente, o que na Tabela 11, nos indicaria chances 'Médias' de acontecer

²⁷ Apesar dos dados serem discretos, optamos por colocar um gráfico contínuo para mostrar a curva de tendência que julgamos melhor se aproximar dos mesmos.

um acidente com o motorista.

Isto, de certa forma, não prejudica o olhar do ponto de vista da linguagem, pois para Wittgenstein a representação tem que se:

[...] assemelhar mais ao seu objeto do que toda a imagem: pois, por mais que eu possa fazer a imagem assemelhar-se àquilo que ela deve expor, ela pode ainda ser a imagem de uma outra coisa. Mas a representação tem em si que ela é a representação desta coisa e de nada mais (WITTGENSTEIN, 2009, p. 161-162, § 389).

O que nos confere dizer, que para o ‘jogo de linguagem’ da matemática clássica, essa representação (o resultado de 473 acidentes – chances ‘Médias’) é a representação para esse modelo em específico, levando em conta as ‘regras’ e a ‘gramática’ utilizadas neste contexto, ou seja, adotadas outras hipóteses ou outras funções, a representação (resultado numérico) seria outra. ‘Errada?’ Não, apenas um outro modo de ver, nas palavras do filósofo, ou ainda, a “linguagem só pode dizer as coisas que também podemos imaginar de outra maneira” (WITTGENSTEIN, 2005, p. 68).

Esse tipo de resultado também não vai contra o ponto de vista dos autores de Modelagem Matemática, pois concordam que não há modelos certos ou errados (como na lógica aristotélica), mas modelos que constituem diferentes representações para a situação-problema em foco.

Nas palavras do filósofo “[...] representar uma linguagem equivale a representar uma forma de vida” (WITTGENSTEIN, 2009, p. 23, § 18), ou seja, esse modelo matemático representa as crenças do modelador, o que corrobora com o fato de que a atividade em foco, não tem suas fronteiras bem definidas, o que permite a utilização de diferentes ‘jogos de linguagem’ de modo a criar novos ‘modos de ver’ ou novos usos, abrindo espaço para diferentes formas de raciocínio, fator importante na construção de alunos mais críticos.

5.6 AVALIAÇÃO POR CONCEITOS

Nesta quinta atividade, também modelada pelo autor deste trabalho sob o ponto de vista fuzzy e clássico, o foco está no sistema de Avaliação por meio de Conceitos.

Como bem salienta Spina (2010, p. 143), estamos:

[...] a todo momento, de alguma forma, emitindo juízo de valor sobre as coisas que nos cercam, sobre as mais variadas situações enfrentadas ou fatos observados denominando este processo como avaliatórios. Na escola a avaliação têm se caracterizado como um dos fatores de evasão escolar uma vez que a avaliação do rendimento escolar do aluno é feita tomando-se como base procedimentos rígidos de aferição de valor a situações que estão muito longe de serem lineares, imutáveis e predefinidas.

Para Hadji (1994) a avaliação pode ser definida como a gestão do provável, ou seja, para o autor, avaliar significa analisar uma situação e fazer algumas apreciações sobre as consequências dessa análise. De forma mais contundente, ele acrescenta que a avaliação,

[...] desenvolve-se no espaço aberto entre dúvida e certeza pela vontade de exercer uma influência sobre o curso das coisas, de "gerir" sistemas em evolução, constituindo o homem o primeiro desses sistemas. A avaliação é o instrumento da própria ambição do homem de "pesar" o presente para "pesar" no futuro (HADJI, 1994, p. 22-23).

Nesse sentido, ao colocar a avaliação como um 'espaço aberto entre dúvida e certeza', podemos conferir a ela certa subjetividade, como também aponta a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) no seu artigo 24 da seção I, inciso V, ao estabelecer como um dos critérios para a verificação do rendimento escolar a "avaliação contínua e cumulativa do desempenho do aluno, com prevalência dos aspectos **qualitativos** sobre os quantitativos e dos resultados ao longo do período sobre os de eventuais provas finais" (BRASIL, 1996, negrito nosso).

Buscando aprimorar a forma de avaliar, muitos colégios procuram maneiras alternativas de verificar o rendimento escolar por meio de instrumentos de avaliação diferenciados. Esse o é caso do Sistema SESI de Colégios do Paraná. Para esse Sistema, a avaliação tem como objetivo focar nas competências cognitivas e relacionais dos alunos, ou seja, a primeira refere-se "ao saber conhecer e demonstrar o aprendido pelo saber fazer [...]", a segunda refere-se "ao saber ser e ao saber conviver, que se expressam no fazer relação e cooperação em equipe e na equipe" (COLÉGIO SESI ENSINO MÉDIO, 2011a, p. 77), expressas por meio da linguagem, seja ela escrita ou oral.

Desse ponto de vista, este Sistema utiliza como método de avaliação dos seus alunos, a emissão de conceitos. Esses conceitos são definidos como 'Excelente - E', 'Bom - B', 'Suficiente - S' e 'Insuficiente - I'. Na Tabela 13, apresentamos um resumo de cada conceito, bem como seus critérios de emissão, definidos na Proposta Pedagógica do Sistema.

Tabela 13 - Critério na Emissão de Conceitos

Conceito	Percentual de alcance em relação aos critérios	Descritivo
Excelente	90% ou mais	Atende a todos os critérios, extrapolando o pedido. É aluno de excelência e prima por ela. Trabalha para que não seja simplesmente um mau aluno.
Bom	80%	Atende a todos os critérios, fazendo tudo o que tem de ser feito. Corresponde ao solicitado, mas não chega a surpreender.
Suficiente	70%	Alcança o necessário, atendendo a 70% dos critérios estabelecidos, mas com certo esforço. Alguns critérios não são atendidos a contento, mas não chega a comprometer o aprendizado.
Insuficiente	Menos de 70%	Atende poucos critérios estabelecidos – menos de 70% deles, e não alcança o previsto – por dificuldade ou negligência. Terá de refazer.

Fonte: Colégio SESI Ensino Médio (2011a)

Da forma como estão colocados os critérios para emissão dos conceitos, podemos verificar o caráter subjetivo da proposta dos Colégios SESI, assim, pensar numa matemática fuzzy para compreender esse sistema parece adequado.

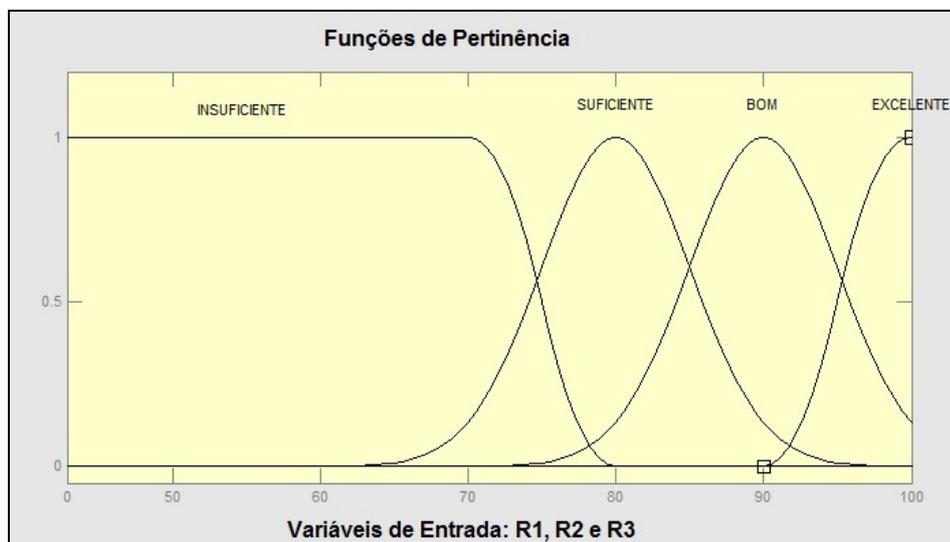
Diante desta problemática, formulamos o seguinte problema: ‘Um aluno, realizou três avaliações durante um bimestre, obtendo em cada uma delas, respectivamente, 50%, 78% e 83% de rendimento. O que podemos dizer ao final do bimestre sobre o aproveitamento desse aluno?’.

Para o problema em questão, do ponto de vista fuzzy, adotaremos, como variáveis de entrada, os rendimentos ‘R1’, ‘R2’ e ‘R3’, com seus respectivos atributos/conceitos ‘E’, ‘B’, ‘S’ e ‘I’, e como variável de saída, adotaremos o termo linguístico ‘Aproveitamento Final’, em que os atributos para essa variável serão os mesmos da variável de entrada.

Como domínio das funções de pertinência, para ambas as variáveis (entrada e saída), adotamos o intervalo fechado [0,100]. Para os atributos ‘S’ e ‘B’

adotamos como funções de pertinência, a função gaussiana; para o atributo 'I', adotamos a função Z e para o atributo 'E' adotamos a função S, conforme representados na Figura 48.

Figura 48 - Funções de Pertinência da Variável Avaliação



Fonte: Do Autor

Para composição da Base de Regras, adotamos as mesmas regras dos Colégios SESI, conforme explicita sua Proposta Pedagógica,

[...] Para chegar ao conceito final do aluno no fechamento da oficina/bimestre, o professor analisa todos os conceitos emitidos no decorrer do bimestre e os pondera, prevalecendo o de maior frequência e o que melhor expresse o desempenho do aluno ao final dele – melhor forma. Dessa forma, não é média ponderada de conceitos, mas ponderação no sentido de reflexão, consideração, emitindo juízo de valor pelo bom senso (COLÉGIO SESI ENSINO MÉDIO, 2011b, p. 85, grifo do autor).

Assim, apresentamos na Tabela 14, a Base de Regras para o problema.

Tabela 14 - Base de Regras dos Conceitos

Regras	Rendimentos			Aproveitamento/ Conceito Final
	R1	R2	R3	
1	INSUFICIENTE	INSUFICIENTE	INSUFICIENTE	INSUFICIENTE
2	INSUFICIENTE	INSUFICIENTE	SUFICIENTE	INSUFICIENTE
3	INSUFICIENTE	INSUFICIENTE	BOM	INSUFICIENTE
4	INSUFICIENTE	INSUFICIENTE	EXCELENTE	INSUFICIENTE
5	INSUFICIENTE	SUFICIENTE	INSUFICIENTE	INSUFICIENTE
6	INSUFICIENTE	SUFICIENTE	SUFICIENTE	SUFICIENTE
7	INSUFICIENTE	SUFICIENTE	BOM	BOM
8	INSUFICIENTE	SUFICIENTE	EXCELENTE	EXCELENTE
9	INSUFICIENTE	BOM	INSUFICIENTE	INSUFICIENTE
10	INSUFICIENTE	BOM	SUFICIENTE	BOM
11	INSUFICIENTE	BOM	BOM	BOM
12	INSUFICIENTE	BOM	EXCELENTE	EXCELENTE
13	INSUFICIENTE	EXCELENTE	INSUFICIENTE	INSUFICIENTE
14	INSUFICIENTE	EXCELENTE	SUFICIENTE	EXCELENTE
15	INSUFICIENTE	EXCELENTE	BOM	EXCELENTE
16	INSUFICIENTE	EXCELENTE	EXCELENTE	EXCELENTE
17	SUFICIENTE	INSUFICIENTE	INSUFICIENTE	INSUFICIENTE
18	SUFICIENTE	INSUFICIENTE	SUFICIENTE	SUFICIENTE
19	SUFICIENTE	INSUFICIENTE	BOM	BOM
20	SUFICIENTE	INSUFICIENTE	EXCELENTE	EXCELENTE
21	SUFICIENTE	SUFICIENTE	INSUFICIENTE	SUFICIENTE
22	SUFICIENTE	SUFICIENTE	SUFICIENTE	SUFICIENTE
23	SUFICIENTE	SUFICIENTE	BOM	SUFICIENTE
24	SUFICIENTE	SUFICIENTE	EXCELENTE	SUFICIENTE
25	SUFICIENTE	BOM	INSUFICIENTE	BOM
26	SUFICIENTE	BOM	SUFICIENTE	SUFICIENTE
27	SUFICIENTE	BOM	BOM	BOM
28	SUFICIENTE	BOM	EXCELENTE	EXCELENTE
29	SUFICIENTE	EXCELENTE	INSUFICIENTE	EXCELENTE
30	SUFICIENTE	EXCELENTE	SUFICIENTE	SUFICIENTE
31	SUFICIENTE	EXCELENTE	BOM	EXCELENTE
32	SUFICIENTE	EXCELENTE	EXCELENTE	EXCELENTE
33	BOM	INSUFICIENTE	INSUFICIENTE	INSUFICIENTE
34	BOM	INSUFICIENTE	SUFICIENTE	BOM
35	BOM	INSUFICIENTE	BOM	BOM
36	BOM	INSUFICIENTE	EXCELENTE	EXCELENTE
37	BOM	SUFICIENTE	INSUFICIENTE	BOM
38	BOM	SUFICIENTE	SUFICIENTE	SUFICIENTE
39	BOM	SUFICIENTE	BOM	BOM
40	BOM	SUFICIENTE	EXCELENTE	EXCELENTE
41	BOM	BOM	INSUFICIENTE	INSUFICIENTE

42	BOM	BOM	SUFICIENTE	SUFICIENTE
43	BOM	BOM	BOM	BOM
44	BOM	BOM	EXCELENTE	BOM
45	BOM	EXCELENTE	INSUFICIENTE	EXCELENTE
46	BOM	EXCELENTE	SUFICIENTE	EXCELENTE
47	BOM	EXCELENTE	BOM	BOM
48	BOM	EXCELENTE	EXCELENTE	EXCELENTE
49	EXCELENTE	INSUFICIENTE	INSUFICIENTE	INSUFICIENTE
50	EXCELENTE	INSUFICIENTE	SUFICIENTE	EXCELENTE
51	EXCELENTE	INSUFICIENTE	BOM	EXCELENTE
52	EXCELENTE	INSUFICIENTE	EXCELENTE	EXCELENTE
53	EXCELENTE	SUFICIENTE	INSUFICIENTE	EXCELENTE
54	EXCELENTE	SUFICIENTE	SUFICIENTE	SUFICIENTE
55	EXCELENTE	SUFICIENTE	BOM	EXCELENTE
56	EXCELENTE	SUFICIENTE	EXCELENTE	EXCELENTE
57	EXCELENTE	BOM	INSUFICIENTE	EXCELENTE
58	EXCELENTE	BOM	SUFICIENTE	EXCELENTE
59	EXCELENTE	BOM	BOM	BOM
60	EXCELENTE	BOM	EXCELENTE	EXCELENTE
61	EXCELENTE	EXCELENTE	INSUFICIENTE	EXCELENTE
62	EXCELENTE	EXCELENTE	SUFICIENTE	EXCELENTE
63	EXCELENTE	EXCELENTE	BOM	EXCELENTE
64	EXCELENTE	EXCELENTE	EXCELENTE	EXCELENTE

Fonte: Do Autor

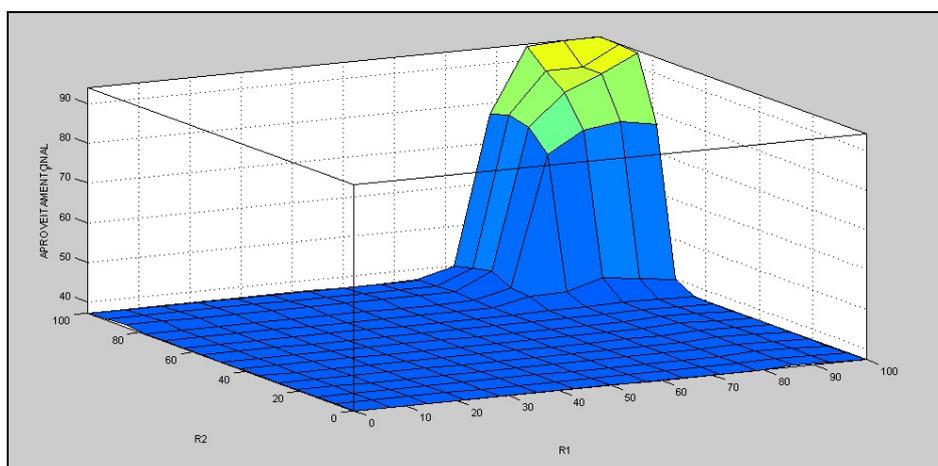
Para a construção dessa tabela, levamos em conta algumas condições. Quando os três conceitos são diferentes, prevalece o melhor conceito, vejamos, por exemplo, a Regra 55: 'O rendimento R1 foi 'Excelente', o R2 foi 'Suficiente' e o R3 foi 'Bom', portanto, o Aproveitamento Final foi 'Excelente'.

No caso de ocorrerem dois conceitos iguais ou mais, esse será o conceito final, por exemplo, a Regra 49: 'O rendimento R1 foi 'Excelente', o R2 foi 'Insuficiente' e o R3 foi 'Insuficiente', portanto, seu Aproveitamento Final foi 'Insuficiente'.

De posse dessas regras, utilizando como método de inferência o 'mínimo' e método de defuzzificação o 'centróide', substituímos os valores para os rendimentos do problema em nosso sistema fuzzy e obtemos como resposta um valor defuzzificado de 70,3%, que está dentro do conceito 'Suficiente - S', mas muito próximo do conceito 'Insuficiente - I', conforme descrito na Tabela 13.

Outra representação para o problema seria na forma gráfica. Devemos lembrar que, para este modelo, temos três variáveis de entrada, o que significa uma construção tridimensional, em que podemos estabelecer as variáveis de entrada aos pares, ou seja, podemos ter uma função $f_{12}(R1,R2) = AF$, ou $f_{13}(R1,R3) = AF$, ou ainda $f_{23}(R2,R3) = AF$. A título de exemplo, apresentamos a função f_{12} , representada pela Figura 49.

Figura 49 - Gráfico do Aproveitamento Final



Fonte: Do Autor

Vale ressaltar, que o aluno teve uma melhora em seus conceitos, passando de Insuficiente (50%) para Suficiente (78%) e posteriormente para Bom (83%), o que corrobora com o fato do aluno, ao final estar com conceito Suficiente.

Se pensarmos nos conceitos, esse aluno, ao final do bimestre, obteve:

- Insuficiente - $\varphi_{Insuficiente}(70,3) = 0,9982$
- Suficiente - $\varphi_{Suficiente}(70,3) = 0,1523$
- Bom - $\varphi_{Bom}(70,3) = 0,00042569$
- Excelente - $\varphi_{Excelente}(70,3) = 0$

Agora, analisando o problema do ponto de vista clássico, podemos resolvê-lo por meio de uma simples média aritmética. Passamos o valor percentual

para um valor absoluto, ou seja, 50% passaria a 50, 79% a 79 e 80% a 80. Assim, para o Aproveitamento Final (AF), teríamos o seguinte cálculo:

$$AF = \frac{R1 + R2 + R3}{3}$$

$$AF = \frac{50 + 78 + 83}{3}$$

$$AF = \frac{211}{3}$$

$$AF = 70,333\dots$$

$$AF \cong 70,34$$

Esse resultado, dentro dos parâmetros estabelecidos pelos Colégios SESI, deixaria o aluno com o conceito Suficiente (70,34), o que, para esse caso, nos mostra uma aproximação dos resultados clássico e fuzzy, corroborando mais uma vez com a teoria de Wittgenstein de que diferentes ‘jogos de linguagem’, podem apresentar ‘semelhanças de família’.

5.7 POBREZA E ESPERANÇA DE VIDA

Essa atividade, como já mencionado anteriormente, é retirada da referência já existente e que procura olhar para um modelo em que se utiliza ao mesmo tempo de aspectos da matemática clássica e da matemática fuzzy. Assim, o foco dessa atividade está na temática da Pobreza e da Esperança de Vida.

O problema da Pobreza, como salientam Barros e Bassanezi (2006) pode ser modelado por diferentes indicadores, como consumo de calorias, saneamento básico, renda per capita, quantidade de filhos, etc. Para este trabalho em específico, usaremos a renda do grupo como indicador.

O modelo da pobreza pode ser descrito a partir de uma equação diferencial, dado um problema de valor inicial, como segue:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -[\lambda_1 + \beta(r)\lambda_2]n \\ n_0 = n(0) \end{cases} \quad (6)$$

em que $n(t)$ é o número de indivíduos num determinado instante t ; λ_1 é a taxa de mortalidade natural (obtida em um grupo que dispõe de condições satisfatórias de sobrevivência); $\beta(r)\lambda_2$ indica a influência da pobreza no aumento de

λ_1 ; $\beta(r)$ indica o grau com que um indivíduo com renda r pertence ao conjunto fuzzy dos pobres, ou seja, β é uma função de pertinência.

A solução analítica dessa equação diferencial é dada por

$$n(t) = n_0 e^{-[\lambda_1 + \beta(r)\lambda_2]t}. \quad (7)$$

Como função de pertinência para $\beta(r)$, adotaremos:

$$\beta_k(r) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^k, & \text{se } 0 < r < r_0. \\ 0, & \text{se } r \geq r_0. \end{cases} \quad (8)$$

O valor de k é um parâmetro que depende de alguma característica do grupo em estudo. Vale salientar, que $n(t)$ é uma família de soluções para a equação diferencial (6). Uma forma de representar a evolução desses indivíduos no tempo, por meio de uma única curva, seria encontrar uma curva que forneça o número médio de $n(t)$, ou seja, encontrar a chamada Esperança Matemática.

Sob esse aspecto iremos olhar para essa esperança a partir da matemática clássica e da matemática fuzzy, já admitindo a equação (6). Nosso intuito neste trabalho não é pormenorizar os cálculos matemáticos, nem mesmo apresentar todos os conceitos 'embutidos', portanto assumiremos alguns resultados como verdadeiros, buscando apenas encontrar as relações nas linguagens clássica e fuzzy, como vistas posteriormente.

Do ponto de vista clássico, a esperança clássica (ou estocástica) pode ser obtida por meio da integral imprópria:

$$E[n(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} n(t)h(r) dr, \quad (9)$$

onde $h(r)$ é a função densidade de distribuição de renda, que pode ser descrita por:

$$h(r) = \begin{cases} ab^a r^{-(a+1)}, & \text{se } r \geq b \\ 0, & \text{se } r < b \end{cases}. \quad (10)$$

Fazendo as substituições necessárias das equações (7) e (10) em (9), obtemos:

$$E[n(t)] = n(0) e^{-\lambda_1 t} a b^a \int_b^{\infty} e^{-\beta(r) \lambda_2 t r^{-(a+1)}} dr. \quad (11)$$

Que representa a Esperança Clássica da Pobreza. Vale ressaltar, que estamos colocando Esperança Clássica, contudo, essa esperança surgiu da equação (6) que continha tanto aspectos clássicos (equação diferencial) quanto aspectos fuzzy (a função de pertinência $\beta(r)$).

Do ponto de vista fuzzy, a Esperança Fuzzy é dada por $EF \left[\frac{n(t)}{n(0)} \right]$,

em que a função de pertinência $Y_t(r) = \frac{n(t)}{n(0)}$ é definida para o intervalo $[0,1]$.

Fazendo algumas substituições²⁸, chegamos à equação final fuzzy:

$$Y_t(b) = e^{-[\lambda_1 + \beta_k(b)]t} \leq EF \left[\frac{n(t)}{n(0)} \right] \leq e^{-\lambda_1 t} \quad (12)$$

que representa a Esperança Fuzzy da Pobreza.

Buscando uma comparação entre os dois modelos, utilizamos a Tabela 15, que fornece algumas informações sobre a faixa salarial de um grupo de metalúrgicos de Recife, para encontrar o número médio de indivíduos ano a ano.

Tabela 15 - Esperança de Vida de Metalúrgicos de Recife

Faixa de Salário	Distribuição Populacional		% da folha de pagamento	
	Mínimo	n(0)		%
Até 2		4003	45,0	21,1
2 a 3		2099	23,6	18,8
Até 3		6102	68,7	39,9
3 a 4		933	10,5	12,0
4 a 5		670	7,5	11,0
5 a 6		300	3,4	6,0
6 a 7		264	3,0	6,2
7 a 10		367	4,1	11,1
10 a 15		171	1,9	7,8
Mais de 15		81	0,9	6,1

Fonte: Barros e Bassanezi (2006, p. 292)

²⁸ Para maiores informações sobre como obter essa equação, consulte Barros e Bassanezi (2006, p. 290).

Assim, com os dados da Tabela 15 e as equações para Esperança Clássica e Fuzzy, determinamos a Tabela 16, que contém os resultados esperados para o número médio de indivíduos ano a ano.

Tabela 16 - Esperança Clássica e Esperança Fuzzy

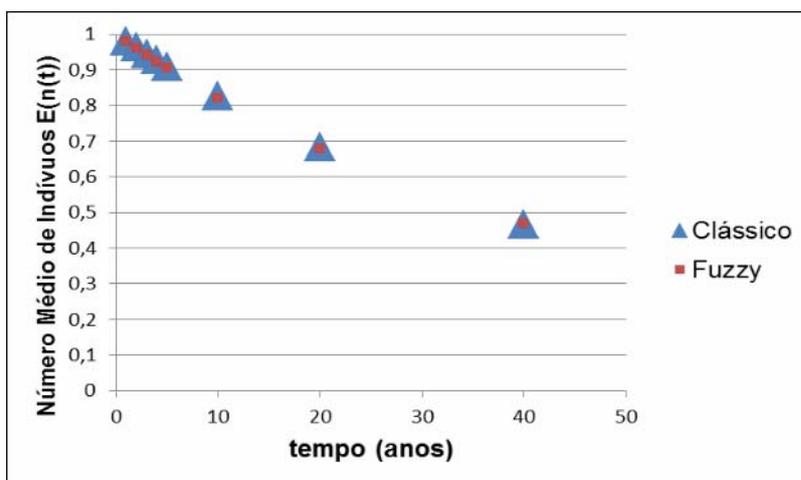
t	$E\left[\frac{n(t)}{n(0)}\right]$	$EF\left[\frac{n(t)}{n(0)}\right]$	$\left[E\left[\frac{n(t)}{n(0)}\right] - EF\left[\frac{n(t)}{n(0)}\right]\right] \times 10^3$
1	0,9810872	0,9800555	1,0317
2	0,9625352	0,9605718	1,9634
3	0,9443294	0,941537	2,7924
4	0,9264697	0,9229397	3,5300
5	0,908949	0,9047686	4,1804
10	0,8261962	0,8199376	6,2486
20	0,682632	0,6766003	6,0317
40	0,4660586	0,4687494	2,6908

Fonte: Barros e Bassanezi (2006, p. 295)

Da quarta coluna da Tabela 16, podemos verificar que o erro não é muito grande, da ordem de 0,63%, conforme apontam Barros e Bassanezi (2006). Isso, segundo os autores, legitima

[...] o uso da esperança fuzzy em substituição à esperança clássica quando a incerteza do fenômeno estudado não for proveniente de aleatoriedade, mas de diferentes possibilidades para a variável de interesse (BARROS; BASSANEZI, 2006, p. 199).

Graficamente, podemos verificar essa proximidade entre os dois modelos, apontados na Figura 50.

Figura 50 - Número Médio de Indivíduos - Clássico e Fuzzy

Fonte: Do Autor

Assim, vale ressaltar, que em termos de linguagem, o modelo para a pobreza, modela as incertezas nas variáveis de estado, utilizando ao mesmo tempo um modelo clássico (equação diferencial) e parâmetros fuzzy (β , que indica o grau com que um indivíduo com renda r pertence ao conjunto fuzzy dos pobres). Isso nos mostra, que ambas as linguagens podem atuar juntas, se complementando, pois possuem aspectos comuns.

Esse resultado, diferente dos outros nos permite, do ponto de vista da linguagem, inferir que surge um novo 'jogo de linguagem', um em que ambas, a linguagem clássica e a linguagem fuzzy, estão presentes. Isso é possível, pois a 'gramática' diferente das anteriores, segundo Wittgenstein (2010, p. 139) "não é responsável por nenhuma realidade. São as 'regras' gramaticais que determinam o significado (que o constituem) e, portanto, elas próprias não são responsáveis por qualquer significado e, nessa medida, são arbitrárias".

Essa arbitrariedade, conforme já citamos no Capítulo 3, indica que podemos desenvolver novas linguagens e, como aponta o filósofo "a finalidade da linguagem é exprimir pensamentos" (Wittgenstein, 2009, p. 187, § 501) e por consequência novos 'jogos de linguagem' surgem, alterando a 'gramática' e as 'regras' pré-existentes.

6

ANÁLISE GLOBAL E CONSIDERAÇÕES FINAIS



6.1 *ANÁLISE GLOBAL*

6.2 *CONSIDERAÇÕES FINAIS*

6.1 ANÁLISE GLOBAL

O problema de pesquisa que investigamos tem como aporte teórico aspectos da Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática, considerações sobre a linguagem, especialmente, os pressupostos da teorização de Ludwig Wittgenstein, e a Matemática Fuzzy. A partir dessa fundamentação teórica, fizemos uma investigação com a expectativa de buscar articulações, aproximações e possíveis divergências entre diferentes linguagens que se fazem presentes em modelos matemáticos, apresentando reflexões sobre o uso da matemática clássica e da matemática fuzzy em atividades de Modelagem Matemática.

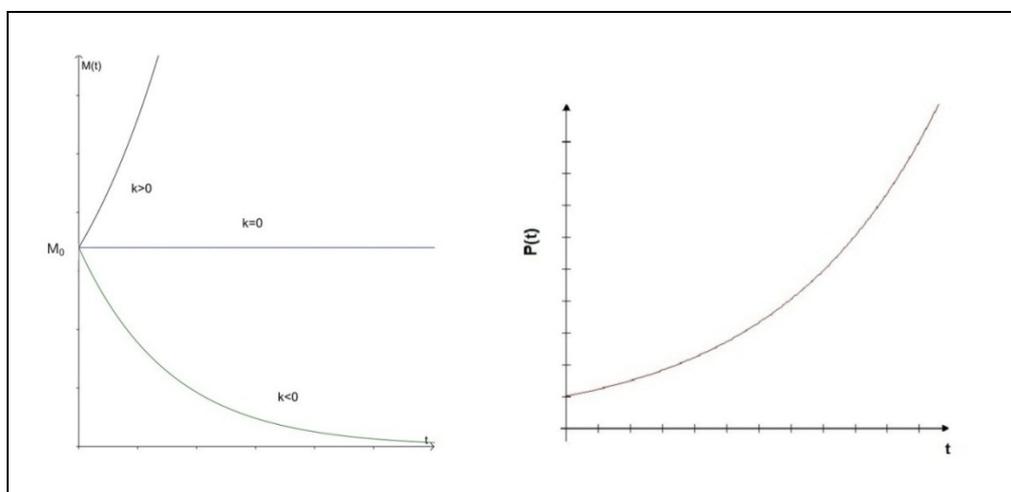
A partir da análise e das reflexões suscitadas no decorrer deste trabalho, iremos nesta seção, apresentar algumas considerações. Ressaltamos que a metodologia utilizada, de caráter subjetivo e com traços de uma pesquisa qualitativa, nos deu suporte para fazer inferências em relação ao nosso problema de pesquisa e apresentar descrições em que o enfoque é mais sobre o processo do que sobre o produto.

Buscando compreender o todo, dividimo-lo em partes e definimos os critérios de análise que subsidiaram nosso olhar sobre as atividades de Modelagem Matemática pautados pelos objetivos estabelecidos para a pesquisa: 1) identificar aproximações entre os modelos/linguagem clássicos e os modelos/linguagem fuzzy obtido(a)s com o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática; 2) investigar as influências do uso da matemática clássica e da matemática fuzzy sobre as soluções apresentadas para a situação-problema em estudo; 3) identificar 'jogos de linguagem' e 'semelhanças de família' nos modelos construídos para estudar uma situação-problema por meio de atividades de Modelagem Matemática.

As atividades de Modelagem Matemática que analisamos, algumas desenvolvidas pelo autor, outras encontradas em bibliografia existente, foram analisadas à luz dos pressupostos teóricos da Modelagem Matemática, da Matemática Fuzzy e da teoria de Wittgenstein. As temáticas abordadas são: 1ª - Modelo de Crescimento Populacional, 2ª - Possibilidade de uma Mulher ficar Sozinha, 3ª - IMC – Índice de Massa Corporal, 4ª - Número de Acidentes, 5ª - Avaliação por Conceitos e 6ª - Pobreza e Esperança de Vida.

Na primeira atividade, é possível caracterizar ‘semelhanças de família’ nas linguagens das Figuras 23 e 25, em que a curva característica (uma exponencial) é a mesma quando k é positivo e o $M_0=P_0$. Ambos os modelos, clássico e fuzzy, revelam as características do problema em estudo, indicando que, para diferentes ‘jogos de linguagem’, há ‘semelhanças de família’. Neste caso, o uso de diferentes linguagens traz as mesmas implicações para a solução, já que ambas caracterizam (de acordo com suas ‘gramáticas’ e ‘formas de vida’ específicas) a variação do crescimento populacional, conforme Figura 51.

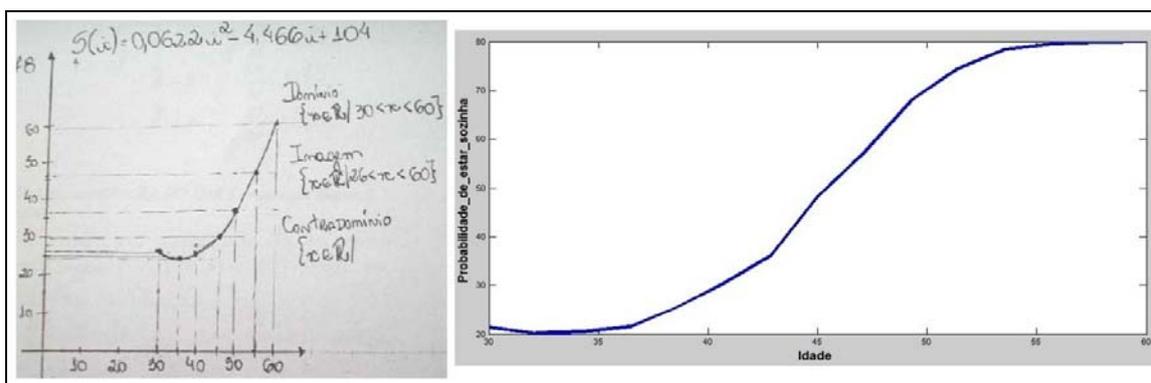
Figura 51 - Análise das Figuras 23 e 25



Fonte: Do Autor

Na segunda atividade, verificamos uma ‘semelhança de família’ entre os valores obtidos para a ‘possibilidade de uma mulher ficar sozinha’. No ‘jogo de linguagem’ da matemática clássica, quando a mulher tem exatamente 36 anos, a possibilidade de que fique sozinha é de 23,8352% (utilizando a função dada na Figura 27). Mudando o ‘jogo de linguagem’, mudamos as ‘regras’ e a ‘gramática’ advindas das ‘formas de vida’, assim podemos falar que uma mulher em ‘torno de’ 36 anos tem a possibilidade de 20,2% de ficar sozinha, de acordo com a matemática fuzzy. Os gráficos dos modelos obtidos com as diferentes ‘matemáticas’, no entanto, revelam as mesmas características do problema (Figura 52). Nesse caso, podemos inferir que, do ponto de vista do que se pode ‘pensar’ sobre a idade em que uma mulher tem maior possibilidade de ficar sozinha, a linguagem da matemática fuzzy faz indicações mais próximas da situação real.

Figura 52 - Análise das Figuras 27 e 32



Fonte: Do Autor

De fato, as soluções para essa situação-problema foram obtidas de diferentes linguagens. Do ponto de vista da matemática clássica, podemos verificar que para cada idade obtemos um novo valor percentual, enquanto que do ponto de vista da matemática fuzzy, temos um valor percentual para uma dada variável linguística e seus atributos (adulta, meia-idade e terceira-idade). Assim, podemos trabalhar com um intervalo de valores agregando a cada percentual um grau de pertinência diferente, dependendo da função de pertinência a que pertença.

Em termos de análise da solução, a matemática clássica não deixa espaço para questionamentos sobre a idade da mulher, aceitando que seja exatamente de 36 anos, enquanto que a matemática fuzzy viabiliza um novo olhar, um olhar em que se pode discutir a exatidão e o contexto do problema. Assim, ainda que possamos caracterizar 'semelhanças de família' entre as linguagens, também podemos observar divergências no que se refere às possíveis soluções.

Em termos gerais, a análise das atividades nos leva a ponderar que a matemática fuzzy, de certo modo, 'liberta' o modelador de algumas 'amarras', pois permite pensar o impensado, resolver o não resolvido, valorizar o conhecimento já posto, utilizar 'jogos de linguagem' diferentes do até então utilizados (e aceitos pelas 'formas de vida' em que o modelador está inserido) de modo que tenha a oportunidade de trabalhar com uma linguagem mais próxima daquela usada no cotidiano das pessoas e com a possibilidade de explorar/permitir novas discussões não viabilizadas pela matemática clássica.

Isto parece se revelar também na terceira atividade, que trata do IMC. Neste caso é colocada a situação de dois indivíduos que possuem Índice de Massa Corporal dados por 29,99 e 30, respectivamente. A pequena diferença (0,01)

entre os dois valores, do ponto de vista da matemática clássica, coloca os sujeitos em classificações estritamente diferentes (Sobrepeso e Obesidade Grau I, respectivamente).

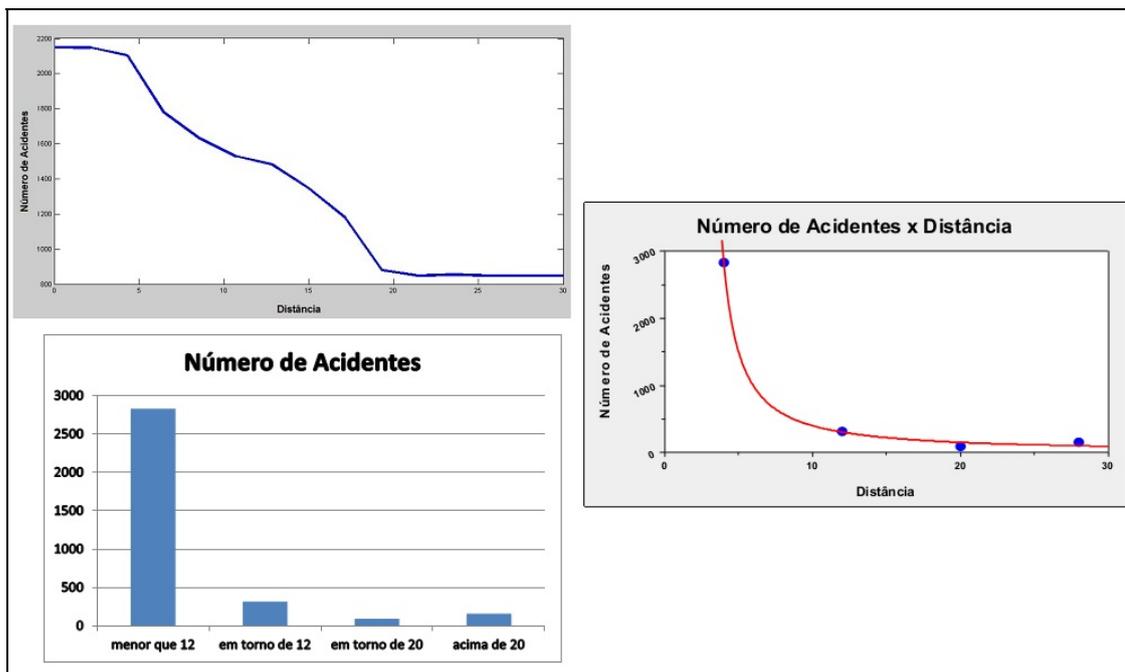
Contudo, quando utilizamos a matemática fuzzy para resolver esse mesmo problema, ou seja, introduzimos um novo 'jogo de linguagem', com diferentes 'regras' constituídas de uma 'gramática', nos deparamos com um outro 'modo de ver' (Wittgenstein, 2009) e podemos considerar que tais sujeitos, na verdade, podem pertencer a grupos diferentes – Sobrepeso e Obesidade de Grau 1, no entanto, dada à pequena diferença de peso que possuem, provavelmente não terá influências muito distintas sobre sua saúde. Ou seja, o que do ponto de vista matemático é diferente, na verdade, para o problema não implica diferenças.

Outra possibilidade, seria poder intuir que ambos pertencem ao mesmo tempo a classificações diferentes, mas com graus de pertinência diferentes. 'O que isso acarretaria?', acarretaria que podemos a partir dessa 'solução' conduzir a outras discussões, como por exemplo: 'Que modo de vida (do ponto de vista de exercícios físicos e da alimentação) levam os dois indivíduos, já que ambos pertencem às mesmas classificações?'. Vale lembrar, que esse tipo de pergunta, não faria o menor sentido ou não teria significado no uso da matemática clássica, pois o 'jogo de linguagem' jogado é diferente, com 'regras' diferentes.

Ainda se referindo a terceira atividade, vemos que a resposta a situação-problema, tanto na abordagem clássica quanto na abordagem fuzzy, retornou o mesmo valor para o IMC, 24,9, ou seja, encontramos aí uma 'semelhança de família'. Essa 'semelhança' também pode ser verificada nos valores aproximados encontrados na Tabela 9, que buscam validar os modelos obtidos. Do ponto de vista das abordagens, verificamos 'modos de ver' diferenciados, pois uma abordagem clássica da situação-problema nos leva a uma resposta simples e rápida sobre a classificação do indivíduo quanto ao seu Estado Nutricional (no caso - Normal), já a abordagem fuzzy, novamente nos remete a questionamentos uma vez que o valor de 24,9 de IMC, está associado também ao grau de pertinência desse indivíduo a cada um dos estados nutricionais.

No que se refere à atividade que trata do Número de Acidentes, verificamos que o uso das diferentes linguagens permitiu diferentes 'jogos de linguagem'. Nesses diferentes 'jogos' aparentemente encontramos 'semelhanças de família' na representação gráfica, conforme indica Figura 53.

Figura 53 - Análise das Figuras 45, 46 e 47



Fonte: Do Autor

Nesta atividade, o resultado aritmético para o número de acidentes possíveis, que no caso clássico foi de 473 e no caso fuzzy foi de 2830, não se aproximou. Isto levou a distintas respostas quanto as 'chances' de acontecer um acidente, já que no primeiro modelo seria 'Alta', enquanto no segundo seria 'Média'. Isso não permite inferir, que o uso de diferentes linguagens pode levar a diferentes resultados/significados, o que não prejudica a modelagem, pelo contrário, permite ao modelador pensar e refletir sobre os diferentes significados atribuídos, podendo diante dos diferentes resultados, aceitar ou não um dos resultados, ambos ou nenhum. Diferentes linguagens podem levar a diferentes modelos.

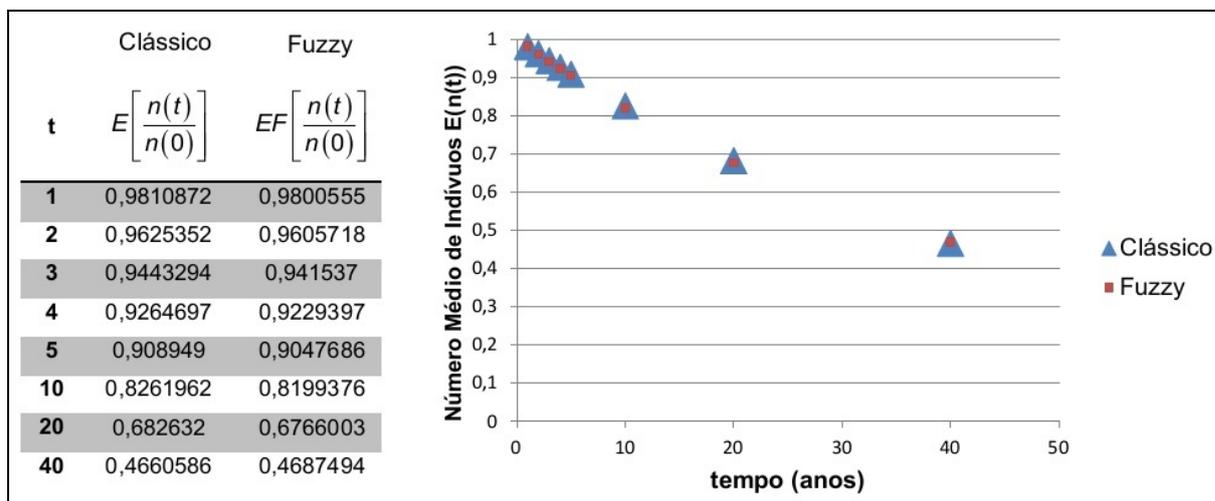
No que se refere à atividade da Avaliação por Conceitos, as 'semelhanças de família' se revelam no aproveitamento final, pois em ambas as linguagens, clássica e fuzzy, o resultado de 70,3% foi o mesmo, de forma que o aluno em questão, teria conceito 'Suficiente'. Contudo, o modo como o resultado foi obtido nas duas abordagens, foi diferente, pois as 'regras' e a 'gramática' estabelecidas foram outras. Ao olhar para as diferentes abordagens, vemos que elas levam a análises diferentes sobre a solução. Enquanto a clássica nos retorna um valor a partir de uma média aritmética, a fuzzy nos retorna um valor por ponderação

e essa ponderação leva em conta as regras utilizadas pelo sistema de avaliação do colégio.

Na atividade Pobreza e Esperança de Vida, a solução é intermediada por uma equação diferencial associada a uma função de pertinência. Isto indica que, neste caso, matemática clássica e matemática fuzzy podem ser associadas para a obtenção de uma solução que, num primeiro momento, pode ser mais eficiente.

Nesta atividade, ao tratar da situação-problema com abordagens diferentes, a clássica e a fuzzy, separadamente, tanto o resultado tabular quanto o resultado gráfico de cada abordagem, conduzem a resultados semelhantes, conforme indica a Figura 54.

Figura 54 - Análise da Figura 50 e da Tabela 16



Fonte: Do Autor

As análises que fizemos sinalizam que é possível identificar articulações, aproximações e mesmo pontos não convergentes quando se desenvolve uma atividade de Modelagem Matemática usando linguagens diferentes.

Conseguimos constatar que as duas linguagens, clássica e fuzzy, apesar de possuírem ‘regras’ e ‘gramáticas’ distintas, o que poderia indicar divergências (e realmente em algumas atividades isso acontece), possuem um emaranhamento de tramas, com certas semelhanças, que na linguagem de Wittgenstein são denominadas ‘semelhanças de família’.

O desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática parece se constituir um espaço em que diferentes olhares para uma mesma situação-

problema podem ser mediados por diferentes procedimentos e conceitos matemáticos. Neste contexto, o uso de uma determinada linguagem pode interferir na solução obtida. Em certa medida, podemos afirmar que se uma linguagem fuzzy media a resolução do problema, as soluções parecem ser mais próximas de uma linguagem coloquial. Isto parece confirmar assertivas de Wittgenstein, considerando que diferentes ‘jogos de linguagem’ podem emergir em função das ‘formas de vida’. Vale destacar, que usar uma outra linguagem, diferente da usual, não significa novos resultados, novos modelos, mas apenas um outro ‘modo de ver’, podendo este ‘modo de ver’ se aproximar ou não do anterior.

E por fim, constatamos nas diferentes atividades, que os(as) modelos/linguagens clássic(o)a e fuzzy, possuem/são diferentes ‘jogos de linguagem’ com algumas ‘semelhanças de família’.

6.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS

‘Enfim, chegamos ao final!?’ . Essa afirmação ou mesmo interrogação nos faz refletir sobre o processo e sobre o ‘fruto’ (o que ficou) desta pesquisa, o que também não nos livra das seguintes perguntas ‘O que conseguimos fazer? Fizemos tudo o que nos propomos a fazer? Ficou algo a ser feito?’.

Em relação ao que conseguimos fazer, evidenciamos que esta pesquisa articulou por meio de três referenciais teóricos ‘Modelagem Matemática’, ‘Linguagem’ e ‘Matemática Fuzzy’ um olhar sobre as diferentes linguagens presentes nos modelos matemáticos obtidos em uma atividade de Modelagem Matemática. Esse olhar mostrou a presença de diferentes ‘jogos de linguagem’, com ‘regras’, ‘normas’ e ‘gramática’ distintos nos modelos matemáticos emergidos. Foi possível também, encontrar algumas ‘semelhanças de família’, algumas aproximações e algumas divergências entre essas linguagens/modelos.

Em decorrência dessas diferentes linguagens, conseguimos verificar que o ‘jogo de linguagem’ utilizado pelas diferentes ‘formas de vida’, influencia no ‘modo de ver’ a solução para a situação-problema. Nesse sentido, o pensar sobre a situação-problema pode mudar à medida que mudamos a linguagem, permitindo discussões, que até então nem seriam discutidas, dado o ‘jogo de linguagem’ jogado. O que não é permitido (dentro das ‘regras’ do jogo), não faz sentido.

No que se refere ao que propomos fazer, algumas coisas deixaram de ser investigadas ou analisadas, como, investigar o que as diferentes representações oriundas da matemática clássica e da matemática fuzzy influenciam na aprendizagem, ou ainda, olhar para a produção escrita dos alunos, em que as atividades de Modelagem Matemática aqui descritas (ou outras a serem elaboradas) fossem aplicadas em sala de aula, buscando explicitar os tipos de representações emergidas e os outros 'modos de ver' a situação-problema.

Nesta pesquisa, inicialmente nos propomos a articular a teoria pragmática de Ludwig Wittgenstein com a teoria cognitivista de Raymond Duval, contudo a falta de um conhecimento teórico mais profundo sobre ambos os referenciais e o tempo não permitiram avançar neste propósito. O que de certo modo nos frustrou, mas também deixou um caminho aberto para futuras pesquisas nesta temática.

De todo modo, esperamos que esta reflexão inicial sobre as contribuições da linguagem para o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática, fazendo uso de diferentes linguagens, a clássica e a fuzzy, possa ser a desencadeadora de novas propostas de pesquisa nas áreas de Linguagem, Modelagem Matemática e Matemática Fuzzy, enriquecendo ainda mais o campo da Educação Matemática.

E como não poderíamos deixar de explicitar nossa inquietação sobre o tema, questionamos o leitor 'se de fato diferentes 'jogos de linguagem' permitem novos 'modos de ver' para uma mesma situação-problema, por que então não ensinar uma outra 'matemática', que esteja mais próxima da linguagem coloquial?'

7
REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

_____. Sobre a categorização dos signos na Semiótica Peirceana em atividades de Modelagem Matemática. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias** (En línea), v. 6, p. 8-17, 2011.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. GEWANDSZNADJER, F. **O método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa**. São Paulo: Editora Pioneira, 1998.

ARAÚJO, I. L. **Do signo ao discurso: introdução à filosofia da linguagem**. São Paulo: Parábola Editorial, 2004.

BARBOSA, J. C. Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.2, n.2, p.69-85, jul. 2009.

_____. Modelagem Matemática na sala de aula. **Perspectiva**, Erechim (RS), v. 27, n. 98, p. 65-74, jun. 2003.

_____. **Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores**. Rio Claro, 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001b.

_____. Modelagem Matemática: O que é? Por quê? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73-80, 2004.

_____. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais...** Rio Janeiro: ANPED, 2001a.

BARBOSA, J. C.; SANTOS, M. A. Modelagem matemática, perspectivas e discussões. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, Belo Horizonte. **Anais...** Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007.

BARROS, L. C. **Modelos Determinísticos com Parâmetros Subjetivos**, Dissertação de Mestrado, IMECC, UNICAMP, 1992.

_____. **Sobre Sistemas Dinâmicos Fuzzy - Teoria e Aplicações**, Tese de Doutorado, IMECC, UNICAMP, 1997.

BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. Campinas. SP: Coleção IMECC, 2006.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

_____. **Modeling as a teaching-learning strategy.** For the learning of mathematics, Vancouver, v. 14, n. 2, p. 31-35, 1994.

BEAN, D. A Modelagem Matemática: Uma mudança de base conceitual. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2007, Ouro Preto. **Anais...** Ouro Preto: UFOP, 2007.

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. **Filosofia da Educação Matemática.** 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino.** São Paulo: Contexto, 2003.

BLUM, W. Applications and Modelling in mathematics Teaching and Mathematics Education - Some Important Aspects of Practice and of research. In: SLOYER, C.; BLUM, W.; HUNTLEY, I. **Advances and Perspectives in the Teaching of Mathematical Modelling and Applications**, Delaware: Water Street Mathematics, Yorklyn, 1995.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2004.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.** Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília, DF, 20 dez. 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm>. Acesso em: 10 Nov. 2012.

CARVALHO, R. M. **A invenção do Cálculo por Newton e Leibniz e sua evolução para o Cálculo Contemporâneo.** Belo Horizonte, 2007. Monografia (Especialização em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo) – Universidade Federal de Minas Gerais, 2007.

CHAUÍ, M. **Convite à Filosofia.** São Paulo, SP: Editora Ática, 2000.

CHEN G., PHAM T. T. **Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic and Fuzzy Control. Systems,** CRC Press, 2000.

CIFUENTES, J. C.; NEGRELLI, L. G. Modelagem Matemática e Método axiomático. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais.** Recife: SBEM, p. 63-77, 2007.

COLÉGIO SESI ENSINO MÉDIO. **Proposta Pedagógica.** Curitiba: SESI/PR, 2011a. 124 p., il., 30 cm. (3 – Método de Ensino).

_____. **Proposta Pedagógica.** Curitiba: SESI/PR, 2011b. 150 p., il., 30 cm. (4 – Oficina Escolar).

CONVENÇÃO. In: **DICIONÁRIO Michaelis.** Disponível em: <<http://michaelis.uol.com.br/>>. Acesso em: 31 Ago. 2012.

COX, E. **The Fuzzy Systems Handbook: a practitioner's guide to building, using and maintaining fuzzy systems,** Academic Press, 1994.

CUNHA, A. G. da. **Dicionário Etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa**. 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1989.

CUNHA, M. O. **Lógica, lógicas**: uma visão panorâmica. Seminários Abertos de Pós-Graduação USP. São Paulo. SP, 2004. Disponível em: <http://www.uff.br/dalicensa/images/stories/caderno/volume5/lgica_lgicas.pdf>. Acesso em: 19 Ago. 2012.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. 23ª ed. Campinas, SP: Papyrus, 2012.

DEMO, P. **Educação e Novas Tecnologias**: sonhos e pesadelos. Disponível em: <http://pedrodemo.blog.uol.com.br/arch2009-03-08_2009-03-14.html>. Acesso em: 19 Ago. 2012.

FEIO, E. S. P. **Matemática e Linguagem**: um enfoque na conversão da língua natural para a linguagem matemática. Belém, 2009. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas). Universidade Federal do Pará, 2009.

FERREIRA, A. B. H. **Aurélio século XXI**: o dicionário da Língua Portuguesa. 3. ed. rev. e ampl. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999. 2128p.

FISCHER, S. R. **Uma breve história da linguagem** – introdução à origem das línguas. Tradução de Flávia Coimbra. Osasco, SP: Novo Século Editora, 2009.

GALBRAITH, P. Modelling, Teaching, Reflecting – What I Have Learned. In: SLOYER, C.; BLUM, W.; HUNTLEY, I. **Advances and Perspectives in the Teaching of Mathematical Modelling and Applications**, Delaware: Water Street Mathematics, Yorklyn, 1995.

_____. Models of Modelling: Genres, Purposes or Perspectives. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n 5. p. 3-16, 2012.

GARNICA, A. V. M. Filosofia da educação matemática: Algumas ressignificações e uma proposta de pesquisa. In BICUDO, M. A. **Pesquisa em educação matemática**: Concepções e perspectivas. São Paulo. SP: Editora UNESP, 1999.

_____. História Oral e Educação Matemática. IN: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2004. p. 77-98.

GLOCK, H. J. **Dicionário Wittgenstein**. Tradução de Helena Martins. Rio de Janeiro. RJ: Jorge Zahar Editor, 1998.

GOTTSCHALK, C. M. C. A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. **Cad. CEDES**, Campinas, v. 28, n. 74, Apr. 2008. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0101-32622008000100006&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 19 Ago. 2012.

_____. Papel do Mestre: Mênon revisitado sob uma perspectiva wittgensteiniana. **Revista Internacional d'Humanitats**, Barcelona, n. 11, Ano X, 2007a. Disponível em: <<http://www.hottopos.com/rih11/cristiane.pdf>>. Acesso em: 09 Set. 2012.

_____. Uma concepção pragmática de ensino e aprendizagem. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 33, n. 3, Dez. 2007b. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1517-97022007000300005&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 09 Set. 2012.

_____. A natureza do conhecimento matemático sob a perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul./dez. 2004.

GULLEY, N., JANG J. S. R. **MATLAB - Fuzzy Logic Toolbox User's Guide**, Version 1, January 1995.

HADJI, C. **A Avaliação, Regras do Jogo – Das Intenções aos Instrumentos**. Tradução de Júlia Lopes Ferreira e José Manuel Cláudio. Porto, PT: Porto Editora Ltda, 1994.

IBGE - **Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística**. Disponível em: http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/condicaoodevida/pof/2008_2009_e_ncaa/defaulttabpdf_UF.shtm. Acesso em: 12 Set. 2012.

JACKENDOFF, R. Categorization, Fuzziness, and Family Resemblances. In: AARTS, B.; DENISON, D.; KEIZER, E.; POPOVA, G. **Fuzzy Grammar – a reader**. New York: Oxford University Press, 2004.

JESUS, W. P. **Educação Matemática e Filosofias Sociais da Matemática: Um exame das perspectivas de Ludwig Wittgenstein, Imre Lakatos e Paul Ernest**. 2002. 210f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas, SP, 2002.

KLÜBER, T. E. **Modelagem matemática e etnomatemática no contexto da educação matemática: aspectos filosóficos e epistemológicos**. Ponta Grossa, 2007. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2007.

KOSKO, B. **Fuzzy Thinking**. New York: Hyperion, 1993.

LESH, R. Tools, Researchable Issues & Conjectures for Investigating What it Means to Understand Statistics (or Other Topics) Meaningfully, **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Vol. 1, nº 2, p. 16-48, 2010.

LESH, R.; CARMONA, G.; HJALMARSON, M. Models and Modeling. (Orgs). Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., and Méndez, A.(Eds) (2006). **Proceedings of the 28Th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional, p. 92-95, 2006.

LESH, R.; DOERR, H. M. Beyond Constructivism, Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, 35 (6), 325-329, 2003.

LESH, R.; G. HAREL. Problem Solving, Modeling, and Local Conceptual Development. **Mathematical Thinking & Learning**, 5(2/3), p. 157-189, 2003.

LIMA, E. L. **Curso de análise**. V. 1. 12ª ed. Rio de Janeiro, RJ: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2009.

LIMA, R. V.; KATO, L. A.; BASSANEZI, R. C. A construção de modelos matemáticos por meio da lógica fuzzy: alguns encaminhamentos para inclusão na educação básica. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011, Belém. **Anais...** Belém: UFPA, 2011.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. **Naturalistic Inquiry**. California: Sage Publications, Inc., 1985.

LINGUAGEM. In: **DICIONÁRIO Michaelis**. Disponível em: <<http://michaelis.uol.com.br/>>. Acesso em: 31 Ago. 2012.

MACHADO, N. J. **Matemática e Língua Materna** (Análise de uma impregnação mútua). 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

MARTINEZ, G. Los Procesos de Convención Matemática como Generadores de Conocimiento. **Revista Latino americana de Investigacion en Matematica Educativa**, vol. 8, n. 2, julio, pp. 195-218, 2005.

MEYER, M. Use Of Words – Language-Games In Mathematics Education. In: **Proceedings of CERME 6**, January 28th – February, 2009, Lyon: França. Disponível em: <<http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg6-08-meyer.pdf>>. Acesso em: 09 Set. 2012.

MODELO. In: **DICIONÁRIO Michaelis**. Disponível em: <<http://michaelis.uol.com.br/>>. Acesso em: 25 Ago. 2012.

NEGRELLI, L. G. **Uma reconstrução epistemológica do processo de modelagem matemática para a educação (em) matemática**. Curitiba, 2008. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná, 2008.

OLIVEIRA, C. F. **Modelagem matemática do Crescimento Populacional: Um Olhar à Luz da Socioepistemologia**. Londrina, 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, 2011a.

OLIVEIRA, M. S. Ensino ostensivo em ambientes de aprendizagem gerados pelo processo de modelagem. In: **Anais do VII Conferencia Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática**. Belém: UFPA, 2011b.

ORTEGA, N. R. S.; **Aplicações da Teoria de Conjuntos Fuzzy em Problemas da Biomedicina**, Tese de Doutorado, Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.

PAGLIOSA, A. L.; **Obtenção das Curvas de Pertinência de um Sistema Neurofuzzy Modificado pela Rede de Kohonen**, Dissertação de Mestrado, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2003. .

PAIAS, A. M. **Diagnóstico dos erros sobre a Operação Potenciação aplicado a alunos dos Ensinos Fundamental e Médio**. São Paulo, 2009. Dissertação

(Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2009.

PAIVA, M. **Matemática**: Volume Único. São Paulo: Moderna, 1999.

REZENDE, S. O. **Sistemas Inteligentes: Fundamentos e Aplicações**, Ed. Manole, São Paulo; 2003.

REZNIK, L. **Fuzzy Controllers**, Newnes, Reino Unido, 1997.

RUSSELL, S.; NORVIG, P.; **Inteligência Artificial**; Ed. Campos, São Paulo, 2004.

SANTOS, V. de M. Linguagens e comunicação na aula de Matemática. In: Adair Mendes Nacarato; Celi Espasandin Lopes. (Org.). **Escrituras e leituras na Educação Matemática**. 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009, v. 1, pp. 117-126.

SHAW, I. S.; SIMÕES, M. G. **Controle e Modelagem Fuzzy**. São Paulo: Edgard Blücher, 2007.

SOARES, D. F. P. P. **Acidentes de trânsito em Maringá - PR: Análise do Perfil Epidemiológico e dos Fatores de Risco de Internação e de Óbito**. 2003. 220f. Tese (Doutorado em Saúde Coletiva). Universidade Estadual de Campinas, SP, 2003.

SPINA, C. O. C. **Lógica fuzzy**: reflexões que contribuem para a questão da subjetividade na construção do conhecimento matemático. 2010. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo, São Paulo.

SPINA, C. O. C.; BASSANEZI, R. C.; DOMITE, M. C. S., Uma abordagem da lógica fuzzy no ensino médio, In: CONGRESSO INTERAMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12, 2007, Querétaro (México), **Anais...** Querétaro.

THÉ, M. A. L. **Raciocínio baseado em casos uma abordagem fuzzy para diagnóstico nutricional**. 2001. 170f. Tese (Doutorado em Inteligência Aplicada) - Universidade Federal de Santa Catarina, SC, 2001.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. **Educational Studies in Mathematics**, Vol. 54, No. 1. (1 November 2003), pp. 9-35, 2003.

VILELA, D. S. **Matemáticas nos usos e jogo de linguagem**: ampliando concepções na Educação Matemática. 2007. 247f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas, SP, 2007.

VILELA, D. S.; MENDES, J. R. A linguagem como eixo da pesquisa em educação matemática: contribuições da filosofia e dos estudos do discurso. **Zetetiké** – Faculdade de Educação, Unicamp, v. 19, n. 36, p. 7-25, 2011. Disponível em: <<http://www.fe.unicamp.br/zetetike/viewarticle.php?id=721>>. Acesso em: 10 Nov. 2012.

WEBER, L., KLEIN, T. A. P., **Aplicações da Lógica Fuzzy em Software e Hardware**, Ed. Ulbra, Canoas; 2003.

WITTGENSTEIN, L. **Gramática Filosófica**. Tradução de Luís Carlos Borges. São Paulo, SP: Edições Loyola, 2ª edição. 2010.

_____. **Investigações Filosóficas**. Tradução de Marcos G. Montagnoli. Petrópolis, RJ: Vozes, 6ª edição, 2009.

_____. **Observações Filosóficas**. Tradução de Adail Sobral e Maria Stela Gonçalves. São Paulo, SP: Edições Loyola, 2005.

_____. **Tractatus Logico-Philosophicus**, Routledge, Londres; 1922.

ZADEH, L. A. Fuzzy sets. **Information and Control** — Department of Electrical Engineering and Electronic Research Laboratory, University of California, Berkeley, Califórnia, n. 8, p. 338-353, 1965.