Universidade Estadual de Londrina

THIAGO FERNANDO MENDES

# A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE SEMIÓTICA

Londrina
2018

THIAGO FERNANDO MENDES

# A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA:

## UMA ANÁLISE SEMIÓTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida

Londrina
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Mendes, Thiago Fernando.

A derivada de uma função em atividades de modelagem matemática : uma análise semiótica / Thiago Fernando Mendes. - Londrina, 2018.

118 f.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2018.

Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Tese. 2. Modelagem Matemática - Tese. 3. Semiótica Peirceana - Tese. 4. Sequência de Atividades - Tese. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

THIAGO FERNANDO MENDES

# A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA:

UMA ANÁLISE SEMIÓTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**

Orientadora: Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina (UEL)

Profa. Dra. Karina Alessandra Pessôa da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Londrina (UTFPR-LD)

Profa. Dra. Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa Robim
Universidade Estadual do Norte do Paraná - Cornélio Procópio (UENP-CP)

Londrina, 20 de fevereiro de 2018.

À minha família, em especial, à minha amada esposa.

## AGRADECIMENTOS

À Deus, meu agradecimento por todos os momentos.

À minha família, em especial à minha amada esposa, pela paciência, dedicação e por compreender todas as minhas ausências. Aos meus pais, meus irmãos, meus sobrinhos por todo o apoio e confiança.

À minha orientadora Lourdes Maria Werle de Almeida, por todas as horas de orientação, pela paciência, pela confiança, por compartilhar seus conhecimentos, pelo apoio e dedicação que permitiram a realização deste trabalho.

Aos amigos do Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT), todos vocês foram muito importantes nesta caminhada.

Às professoras Bárbara Palharini Alvim Sousa Robim e Karina Alessandra Pessôa pelas sugestões e críticas que tanto contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos amigos e colegas que fiz durante os dois anos de participação neste programa, todas as conversas e momentos que tivemos juntos foram essenciais para o trabalho.

Aos 12 alunos do 2º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade em que as atividades foram desenvolvidas. Vocês não imaginam a importância que tiveram em minha pesquisa. Sou imensamente grato a cada um de vocês.

À direção da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, por compreenderem a importância desta etapa em minha vida e me permitirem vivenciá-la.

Às amigas da COGERH-CP. Muito obrigado por terem "segurado a barra" em todos os momentos em que precisei me ausentar.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para que este trabalho fosse realizado.

*“Todo homem está completamente convencido que existe uma coisa chamada verdade, ou ele nunca perguntaria nada”.*
*(Charles Sanders Peirce)*

MENDES, Thiago Fernando. **A derivada de uma função em atividades de modelagem matemática**: uma análise semiótica. 2018. 118f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

## RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo investigar o que os signos interpretantes produzidos ou utilizados em atividades de modelagem matemática nos permitem inferir com relação ao conhecimento matemático dos estudantes. Nossa investigação está pautada em pressupostos teóricos da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática e nos pressupostos da Semiótica Peirceana, mais especificamente, no que diz respeito à teoria dos interpretantes. Com o intuito de alcançar o objetivo proposto desenvolvemos com alunos do 2º ano do curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I de uma universidade pública do estado do Paraná uma sequência de atividades de modelagem matemática. As atividades foram desenvolvidas seguindo o esquema padrão propostos por Lesh et al. (2003) para sequências de atividades de modelagem matemática. A análise dos dados foi inspirada na Análise Textual Discursiva baseada, principalmente, nas indicações de Moraes e Galiazzi (2007). Para a análise dos dados, três categorias foram consideradas: nível significante imediato em uma sequência de atividades de modelagem matemática; nível significante dinâmico em uma sequência de atividades de modelagem matemática; nível significante final em uma sequência de atividades de modelagem matemática. Com a análise, ficou evidenciado que no desenvolvimento de uma sequência de atividades de modelagem matemática momentos de exploração e aplicação de modelos são propiciados. A análise nos permite inferir também que uma sequência de atividades de modelagem matemática possibilita a organização e a elaboração de signos de tal maneira que é possível ter acesso, mesmo que indiretamente, àquilo que o estudante está construindo em sala de aula no que diz respeito ao conhecimento matemático.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Modelagem Matemática. Semiótica Peirceana. Sequência de Atividades. Derivada de uma função.

MENDES, Thiago Fernando. **The derivative of a function in mathematical modeling activities: a semiotic analysis**. 2018. 118f. Dissertation (Masters in Science Teaching and Mathematics Education) - Londrina State University, Londrina, 2018.


## ABSTRACT

This research aims to investigate the way interpretive signs produced or used in mathematical modeling activities can infer within the students' mathematical knowledge. Our research is based on theoretical assumptions of Mathematical Modeling in the perspective of Mathematical Education as well as in the assumptions of Peircean Semiotics, more specifically concerned to the interpreters' theory. In order to achieve the proposed objective, it was developed a sequence of mathematical modeling activities with $2^{nd}$ term students from the degree course in Mathematics in the subject of Differential and Integral Calculus I of a public university in the state of Paraná. The activities were developed according to the standard scheme proposed by Lesh et al. (2003) for sequences of mathematical modeling activities. The analysis of the data was inspired by the Discursive Textual Analysis based, mainly, on the assumptions of Moraes and Galiazzi (2007). For the data analysis, three categories were considered: immediate significant level in a sequence of mathematical modeling activities; significant dynamic level in a sequence of mathematical modeling activities; final significant level in a sequence of mathematical modeling activities. From such analysis, it was evidenced that in the development of a sequence of activities of mathematical modeling moments of exploration and application of models are propitiated. The analysis also make it possible to infer that a sequence of mathematical modeling activities permits the organization and elaboration of signs in such a way that it is admissible to have access, even indirectly, to what the student is constructing in the classroom concerned to the mathematical knowledge.



**Key words:** Mathematics Education. Mathematical Modeling. Peircean Semiotics. Sequence of Activities. Derivative of a function.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## LISTA DE TABELAS

## LISTA DE QUADROS

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|---|---|
| ABNT | Associação Brasileira de Normas Técnicas |
| ATD | Análise Textual Discursiva |
| CDI | Cálculo Diferencial e Integral |
| IBGE | Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística |
| MM | Modelagem Matemática na Educação Matemática |
| PNAD | Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios |

**SUMÁRIO**

# 1. INTRODUÇÃO

A nossa convivência em sociedade é mediada por uma rede de linguagens e representações uma vez que são diversas as maneiras com que podemos nos comunicar e fazendo uso de diferentes recursos, como por exemplo: sons, imagens, sinais, gráficos, gestos.

Santaella (2012, p. 19) elucida que "as linguagens estão no mundo e nós estamos na linguagem", o que justifica a importância da semiótica em nos auxiliar a compreender o mundo, uma vez que tem como objetivo o exame das linguagens e os modos de constituição dos fenômenos.

Considerando que muitas situações oriundas da realidade podem ser representadas por meio de linguagem matemática, vários pesquisadores e professores têm investigado o papel da semiótica em atividades de modelagem matemática (KEHLE; CUNNINGHAM, 2000; CARREIRA, 2001; SILVA, 2008; ALMEIDA, 2010; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2011; ALMEIDA; SILVA; VERONEZ, 2015).

Analisando o comportamento de alunos envolvidos em atividades de modelagem matemática, Kehle e Cunningham (2000), por exemplo, relacionam os tipos de raciocínio (abdução, indução e dedução) apresentados por Peirce (2005) com as etapas de modelagem matemática, estabelecendo, assim, o que os autores denominam de modos de inferência.

A partir disso, em sua dissertação de mestrado, Silva (2008) buscou relações entre modelagem matemática e semiótica, para isso, dentre outras coisas, a autora investigou se os modos de inferência dos signos classificados por Kehle e Cunningham (2000) estão associados às ações cognitivas dos alunos nas diferentes etapas da modelagem matemática.

Por outro lado, Carreira (2001) aborda semelhanças entre modelos e metáforas, buscando responder se um modelo matemático é uma metáfora e se a modelagem matemática é um processo equivalente ao processo de produção de uma metáfora. A autora conclui que a metáfora é necessária para a construção do modelo que, por sua vez, é o que resulta, efetivamente, após a produção de metáforas.

Ainda no que diz respeito às pesquisas que relacionam a semiótica peirceana com a modelagem matemática, Almeida, Silva e Vertuan (2011) buscam aproximações entre as categorizações fenomenológicas e os níveis de relações dos signos estabelecidos por Peirce (2005) e a modelagem matemática como alternativa pedagógica. Assim, os autores asseveram que, no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, há ações que são primeiras, ações que são segundas, e ações que são terceiras, em sintonia com as categorias fenomenológicas de Peirce (2005), primeiridade, secundidade, terceiridade[1].

Já Almeida, Silva e Veronez (2015) investigam como se dá o processo de geração e de interpretação de signos interpretantes[2] em atividades de modelagem matemática. A partir da análise de uma atividade de modelagem matemática, as autoras inferiram que o funcionamento dos signos proporciona e descreve uma interação contínua entre signos, fenômeno e novos signos gerados da interpretação de anteriores constituindo, assim, uma sequência de semiose.

Da mesma forma que Santaella (2012) afirma que as linguagens estão no mundo, Peirce (1972) diz que o mundo está permeado de signos, se é que não se componha exclusivamente de signos. Assim, para compreendermos o mundo, a mente humana e as relações entre esses dois entes, é necessário, antes de qualquer coisa, compreendermos os signos e suas especificidades.

Neste sentido, Davis e Hersh (1995) afirmam que a matemática provém da conexão da mente humana com o mundo externo e, assim, a presença da matemática na realidade precisa ser considerada.

Historicamente houve períodos na matemática em que os estudiosos se inspiravam em resultados empíricos, em outros momentos, tais resultados foram aprimorados sendo sistematizados e generalizados (BOYER, 1974).

Hoje, como colocado por Drigo (2007), a matemática se apresenta como um conjunto de conhecimentos organizado e num tal nível de generalidade que o torna base para outras ciências. E, na medida em que tal generalidade cresce, aumenta o nível de complexidade de sua representação. Assim, como pondera Drigo (2007), o uso e a compreensão da matemática requer a compreensão da linguagem.

No que se refere ao ensino de matemática e ao Ensino Superior, mais especificamente, uma das dificuldades dos estudantes diz respeito às disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral - CDI (GARZELLA, 2013).

---

[1] Os conceitos primeiridade, secundidade e terceiridade serão abordados com mais detalhes na fundamentação teórica deste trabalho.
[2] A caracterização de signo interpretante será apresentada com mais detalhe no Capítulo 4 deste texto.

Cabral e Catapani (2003) afirmam que tal dificuldade pode ser comprovada pelas taxas de reprovação, repetência e abandono das disciplinas de Cálculo[3] seja nos cursos de matemática ou não, considerando que esta é uma disciplina presente em diversos cursos superiores.

Na literatura é possível encontrar pesquisas que, ao relacionarem modelagem matemática e as aulas de Cálculo, revelam que criar e explorar modelos de um fenômeno pode ser uma importante experiência no processo de aprendizagem do estudante (FRANCHI, 1993; VILLARREAL, 1999; BARBOSA, 2004; ALMEIDA; FATORI; SOUZA, 2007).

Em seu trabalho de mestrado, Franchi (1993) discute os problemas existentes com o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de engenharia, mais especificamente, nos cursos de engenharia mecânica. A autora propõe a modelagem matemática como estratégia de aprendizagem do Cálculo discutindo as vantagens da sua utilização a partir de experimentos realizados com alunos do referido curso.

Já o estudo de Villarreal (1999) apresenta algumas compreensões da pesquisadora sobre processos de pensamento matemático de estudantes de cálculo diferencial e integral que trabalham em ambiente computacional, abordando questões matemáticas relacionadas, predominantemente, ao conceito de derivada.

Barbosa (2004), por sua vez, discute o papel da modelagem matemática nas disciplinas matemáticas em cursos do Ensino Superior para não-matemáticos. Para isso, o autor analisa a maneira pela qual um grupo de alunos de um curso de Sistemas de Informação, na disciplina de Matemática II (pré-cálculo e cálculo diferencial e integral) desenvolve seu primeiro projeto de modelagem matemática.

Almeida, Fatori e Souza (2007) apresentam uma discussão sobre o ensino e a aprendizagem de cálculo diferencial e integral encaminhando uma reflexão sobre a ideia de que há alguns aspectos, cuja incorporação às aulas, pode trazer constribuições importantes para a aprendizagem dos alunos, como trabalhar com problematizações e desenvolver atividades que incitem os alunos a mobilizarem seus conhecimentos. Neste encaminhamento, as autoras abordam a modelagem matemática como alternativa de ensino e aprendizagem para as aulas de Cálculo.

---

[3] Utilizaremos o termo Cálculo como sinônimo de Cálculo Diferencial e Integral.

No que diz respeito aos trabalhos desenvolvidos no Grupo de Pesquisa sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT), do qual o autor deste trabalho é integrante e sua orientadora, coordenadora, há aqueles que buscaram estabelecer relações entre a semiótica peirceana e a modelagem matemática no âmbito da Educação Matemática.

Além de estabelecer essa relação em sua dissertação (SILVA, 2008), em sua tese de doutoramento, Silva (2013) investigou como emergem os signos interpretantes nas diferentes etapas do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática pautando-se em pressupostos teóricos da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática e da Semiótica Peirceana no que se refere à atribuição de significado para o objeto em estudo.

Outro trabalho desenvolvido no GRUPEMMAT, foi a dissertação de Ramos (2016) que investigou relações entre modelagem matemática e raciocínio abdutivo. A autora, assim como a anterior, também se pautou em pressupostos teóricos da modelagem[4] na perspectiva da Educação Matemática e nos tipos de raciocínio caracterizados na semiótica peirceana.

Neste contexto, em nosso estudo olhamos para os signos produzidos ou utilizados pelos alunos no decorrer de uma sequência de atividades de modelagem matemática desenvolvida por alunos do 2º ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Estadual localizada no norte do Paraná na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Assim, o objetivo da nossa pesquisa visa investigar *o que os signos interpretantes produzidos ou utilizados em atividades de modelagem matemática nos permitem inferir com relação ao conhecimento matemático dos estudantes.*

Com esta finalidade, visamos:

- identificar signos interpretantes produzidos ou utilizados pelos alunos no desenvolvimento de uma sequência de atividades de modelagem matemática;
- investigar indícios de exploração e aplicação de modelos em uma sequência de atividades de modelagem matemática;
- caracterizar os signos interpretantes produzidos ou utilizados pelos estudantes no desenvolvimento de uma sequência de atividades de modelagem matemática;

[4] Usamos o termo modelagem com o mesmo significado de modelagem matemática na Educação Matemática.

- relacionar a evolução dos signos interpretantes com o conhecimento de derivadas mobilizado na sequência de atividades de modelagem matemática.

O texto contém seis capítulos. No primeiro é apresentada a introdução, no segundo, os aspectos metodológicos do trabalho em que são explicitados o contexto e os sujeitos da pesquisa, a coleta e a metodologia para análise dos dados. No terceiro capítulo apresentamos nosso entendimento sobre modelagem matemática e em seguida sobre semiótica peirceana com ênfase na teoria dos interpretantes para, então, apresentarmos, no capítulo cinco, os signos interpretantes em atividades de modelagem matemática. Assim, a apresentação da análise seguindo encaminhamentos da análise textual discursiva é feita no capítulo cinco. Finalmente apresentamos algumas considerações e as referências bibliográficas.

# 2. ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Com o objetivo de investigar o que os signos interpretantes produzidos ou utilizados em atividades de modelagem matemática nos permitem inferir com relação ao conhecimento matemático dos estudantes uma sequência de atividades de modelagem matemática foi desenvolvida por alunos do 2º ano do curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Para isso, fizemos uso de uma abordagem de cunho qualitativo que, na concepção de Godoy (1995), o pesquisador vai a campo buscando captar o fenômeno estudado a partir da perspectiva das pessoas nele envolvidas, considerando os pontos de vista necessários.

Além disso, tal pesquisa considera o ambiente como principal fonte de dados, tendo um caráter descritivo em que o foco é a análise dos dados e não os produtos e resultados (GODOY, 1995).

Neste contexto, desenvolvemos um estudo na perspectiva qualitativa interpretativa, uma vez que os significados sobre o desenvolvimento das atividades surgirão a partir da compreensão e das interpretações dos procedimentos adotados e modelos construídos pelos sujeitos da pesquisa.

## 2.1 O Contexto e os Sujeitos da Pesquisa

As atividades que analisamos foram desenvolvidas por estudantes do 2º ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade estadual situada no norte do Paraná. A sequência de atividades foi desenvolvida na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I durante o primeiro semestre letivo de 2017.

Inicialmente, a turma era composta por dezoito estudantes, no entanto, no decorrer do semestre, seis desses estudantes saíram da disciplina, sendo assim, utilizaremos aqui atividades desenvolvidas por doze estudantes.

Todo o desenvolvimento das atividades foi realizado pelo pesquisador com o apoio da professora regente da disciplina.

Com o intuito de conhecer o perfil dos estudantes participantes da pesquisa, no primeiro dia de aula, foi solicitado que os mesmos respondessem a um questionário (Apêndice A) e, com tais respostas, foi possível estabelecer o perfil de cada um dos participantes, conforme Quadro 1.

**Quadro 1 -** Perfil dos sujeitos da pesquisa

| **Estudante (Código)** | **Perfil**[5] |
|---|---|
| E1 | A Licenciatura Plena em Matemática é o primeiro curso superior frequentado pelo estudante. Já ministrou aulas no Ensino Médio pelo período de seis meses. Antes de ingressar nesta universidade, o estudante cursou três semestres do curso de Licenciatura em Matemática em outra Instituição. Na Universidade anterior, o mesmo já havia cursado a disciplina de Modelagem Matemática e já publicou um trabalho cujo foco foi uma atividade de modelagem matemática no Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM). É a primeira vez que cursa a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. |
| E2 | A Licenciatura Plena em Matemática é o primeiro curso superior frequentado pelo estudante. O mesmo nunca atuou como professor. Participou do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) por um período de seis meses. Nunca teve contato com a modelagem matemática. É a primeira vez que cursa a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. |
| E3 | A Licenciatura Plena em Matemática é o primeiro curso superior frequentado pelo estudante. O mesmo nunca atuou como professor, nem teve contato com a modelagem matemática. É a primeira vez que cursa a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. |
| E4 | O estudante se graduou em Ciências Contábeis no ano de 2014. Já teve contato com atividades de modelagem matemática durante a disciplina de Funções. Nunca atuou como professor. É a primeira vez que cursa a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (no curso de Ciências Contábeis não há esta disciplina). |
| E5 | A Licenciatura Plena em Matemática é o primeiro curso superior frequentado pelo estudante. O mesmo nunca atuou como professor nem teve contato com a modelagem matemática. É a primeira vez que cursa a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. |
| E6 | O estudante se graduou em Ciências Contábeis no ano de 2013. Atuou como professor de matemática no Ensino Fundamental durante quatro meses. Nunca teve contato com a modelagem matemática. É a primeira vez que cursa a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. |
| E7 | A Licenciatura Plena em Matemática é o primeiro curso superior frequentado pelo estudante. O mesmo nunca atuou como professor, nem teve contato com a modelagem matemática. É a primeira vez que cursa a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. |
| E8 | A Licenciatura Plena em Matemática é o primeiro curso superior frequentado pelo estudante. O mesmo nunca atuou como professor, nem teve contato com a modelagem matemática. É a primeira vez que cursa a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. |
| E9 | A Licenciatura Plena em Matemática é o primeiro curso superior frequentado pelo estudante. O mesmo nunca atuou como professor, |

[5] Objetivando preservar a identidade dos participantes da pesquisa, todos os artigos, substantivos, adjetivos e pronomes serão utilizados no masculino.

| | |
|---|---|
| | nem teve contato com a modelagem matemática. É a primeira vez que cursa a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. |
| E10 | A Licenciatura Plena em Matemática é o primeiro curso superior frequentado pelo estudante. O mesmo nunca atuou como professor. Teve contato com a modelagem matemática em um mini-curso ministrado na Semana Acadêmica da Matemática na Universidade. É a primeira vez que cursa a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. |
| E11 | A Licenciatura Plena em Matemática é o primeiro curso superior frequentado pelo estudante. O mesmo nunca atuou como professor. Teve contato com a modelagem matemática em um mini-curso ministrado na Semana Acadêmica da Matemática na Universidade. É a segunda vez que cursa a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. |
| E12 | A Licenciatura Plena em Matemática é o primeiro curso superior frequentado pelo estudante. O mesmo nunca atuou como professor. Teve contato com a modelagem matemática em outras disciplinas do curso. É a segunda vez que cursa a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. |

**Fonte**: o próprio autor.

De forma sintética, a partir das informações do Quadro 1, temos que, dos doze estudantes participantes da pesquisa, dois deles são graduados em Ciências Contábeis (E4 e E6), dois deles já cursaram a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (E11 e E12), dois deles já atuaram como professores de matemática (E1 e E6), sendo um deles no Ensino Médio e outro no Ensino Fundamental, pelo período de seis e quatro meses, respectivamente.

Além disso, dos doze estudantes participantes da pesquisa, um deles participou pelo período de seis meses do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) (E2) e cinco estudantes afirmaram já ter tido contato com a modelagem matemática (E1, E4, E10, E11 e E12).

Para o desenvolvimento das atividades, os estudantes se organizaram em 4 grupos (G1, G2, G3, G4), composto conforme Tabela 1.

**Tabela 1** - Composição dos grupos de trabalho

| Grupo | Estudantes |
|---|---|
| G1 | E1, E2, E9, E10 |
| G2 | E3, E5, E7 |
| G3 | E4, E6, E12 |
| G4 | E8, E11 |

**Fonte:** o próprio autor

No decorrer das aulas, o estudante E8 desistiu de cursar a disciplina e, por esse motivo, o mesmo não participou do desenvolvimento de todas as atividades. Sendo assim, os registros produzidos pelo grupo G4 não serão considerados em nossa análise.

Além da codificação dos estudantes (E1, E2,...,E12) e dos grupos (G1, G2 e G3), durante a apresentação dos textos serão utilizados os códigos, PR e PP para fazer referência, respectivamente, à professora regente da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I e ao professor pesquisador, autor deste trabalho.

## 2.2 A Coleta de Dados

Os dados coletados para esta pesquisa referem-se às atividades desenvolvidas pelos estudantes, cujo perfil foi explicitado no item 2.1, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Tais atividades foram desenvolvidas no período compreendido entre Abril e Setembro de 2017.

Durante esse período, as aulas foram filmadas e o pesquisador registrou em diário de campo pontos que considerou importantes com relação à construção do conhecimento matemático dos estudantes referente ao conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral I. Ao todo, foram 38 aulas foram utilizadas sendo que, destas, em 13 delas foram desenvolvidas as atividades de modelagem matemática que serão apresentadas nesta pesquisa.

Os temas discutidos em cada uma das aulas estão descritos no Quadro 2.

**Quadro 2 -** Aulas de CDI observadas

| Aula nº | Data | Assunto Discutido |
|---|---|---|
| 1 | 08.03 | Contrato Didático; Atividade sobre limites |
| 2 | 09.03 | Fechamento da atividade sobre limites |
| 3 | 15.03 | Limite e Continuidade |
| 4 | 16.03 | Continuidade |
| 5 | 22.03 | Definição formal de Limite |
| 6 | 23.03 | Demonstração das propriedades de limites |
| 7 | 29.03 | Limites Laterais |
| 8 | 30.03 | Limites no Infinito |
| 9 | 12.04 | Atividade 1: Usuários de Internet no Brasil |
| 10 | 19.04 | Atividade 1: Usuários de Internet no Brasil |
| 11 | 26.04 | Atividade 1: Usuários de Internet no Brasil |
| 12 | 27.04 | Funções de 1º grau e exponencial |
| 13 | 03.05 | Técnicas para cálculo de limites |

| | | |
|---|---|---|
| 14 | 04.05 | Atividades sobre limites |
| 15 | 10.05 | Teorema do Valor Intermediário |
| 16 | 11.05 | Teorema do Confronto e Limites fundamentais |
| 17 | 17.05 | Introdução em Derivadas |
| 18 | 18.05 | Definição formal e atividades sobre derivadas |
| 19 | 24.05 | Dicussão das atividades desenvolvidas pelos grupos[6] |
| 20 | 25.05 | Dicussão das atividades desenvolvidas pelos grupos |
| 21 | 07.06 | Regras de derivação |
| 22 | 08.06 | Regras de derivação - atividades |
| 23 | 14.06 | Atividade avaliativa |
| 24 | 28.06 | Aula de revisão |
| 25 | 29.06 | Avaliação do 1º Semestre |
| 26 | 01.07 | Atividade 2: Qual tamanho de cabo elétrico usar? |
| 27 | 05.07 | Apresentação das atividades desenvolvidas pelos grupos |
| 28 | 06.07 | Apresentação das atividades desenvolvidas pelos grupos |
| 29 | 07.07 | Apresentação das atividades desenvolvidas pelos grupos |
| 30 | 02.08 | Dicussão das atividades desenvolvidas pelos grupos |
| 31 | 03.08 | Dicussão das atividades desenvolvidas pelos grupos |
| 32 | 09.08 | Dicussão das atividades desenvolvidas pelos grupos |
| 33 | 10.08 | Regra da cadeia para derivação de funções compostas |
| 34 | 16.08 | Atividades sobre Regra da Cadeia |
| 35 | 17.08 | Máximos e Mínimos de Função |
| 36 | 06.09 | Máximos e Mínimos de Função |
| 37 | 13.09 | Atividade avaliativa (surpresa) |
| 38 | 20.09 | Dicussão das atividades desenvolvidas pelos grupos |

**Fonte**: o próprio autor

Com relação às atividades desenvolvidas pelos grupos, é importante ressaltar que, além das datas reservadas exclusivamente para discussão e apresentação dessas atividades (aulas número 19, 20, 27, 28, 29, 30, 31, 32 e 38), em todas as demais aulas, a professora regente da disciplina cedeu os 15 minutos iniciais das aulas para que os grupos pudessem ser orientados com relação ao desenvolvimento de tais atividades. Além disso, conversas por e-mail e por *Whatsapp*[7] ocorreram durante todo o semestre letivo com o intuito de auxiliar os grupos nessas atividades.

O foco das análises estará nos registros escritos entregues pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática e as gravações em áudio e vídeo realizadas durante as atividades com consentimento livre e esclarecido de cada um dos participantes, conforme termo (Apêndice B) preenchido pelos mesmos.

[6] Quando citamos “atividades desenvolvidas pelos grupos” estamos nos referindo às atividades de modelagem matemática cujos grupos ficaram responsáveis por desenvolver, conforme descrito detalhadamente no capítulo 5.
[7] Aplicativo multiplataforma de mensagens instantâneas e chamadas de voz e vídeo.

## 2.3 A Análise Textual Discursiva

A Análise Textual Discursiva se constitui “[...] como uma nova opção de análise para pesquisas de natureza qualitativa e de caráter hermenêutico” (MORAES; GALIAZZI, 2007, p. 40).

Luccas (2011) coloca que na análise textual discursiva o texto é considerado um meio de expressão do sujeito, no caso dessa pesquisa, dos estudantes, de modo que, ao pesquisador, cabe classificá-lo em unidades contendo frases ou palavras repetidas, de forma a inferir uma expressão que possa representá-las.

Dessa maneira, por meio da análise dos materiais empíricos produzidos no desenvolvimento dessa pesquisa, buscar-se-á compreender o que está implícito àquilo que foi expresso pelos alunos, obedecendo, conforme apontam Moraes e Galiazzi (2007), um ciclo composto por algumas etapas, sendo elas: desmontagens dos textos ou unitarização; estabelecimento de relações ou categorização; captação do novo emergente e o processo de auto-organização.

Seguindo este ciclo, a análise textual discursiva “pode ser entendida como um processo de desconstrução, seguido de reconstrução, de um conjunto de materiais linguísticos e discursivos, produzindo-se a partir disso novos entendimentos sobre os fenômenos e discursos investigados” (MORAES; GALIAZZI, 2007, p. 112).

Sendo assim, viu-se com esse tipo de metodologia para análise dos dados, uma possibilidade de “enxergar” novas compreensões a respeito do conhecimento dos estudantes a partir dos signos interpretantes utilizados ou produzidos pelos mesmos.

Como citado anteriormente, a análise textual discursiva inicia-se com o processo de desmontagem ou desconstrução do material que compõe o chamado *corpus* da análise. Tal desmontagem se dá a partir da “fragmentação das informações, desestruturando sua ordem, produzindo um conjunto desordenado e caótico de elementos unitários” (MORAES; GALIAZZI, 2007, p. 42). A essa desmontagem dá-se ainda o nome de unitarização, uma vez que ao fragmentar o *corpus* busca-se atingir as chamadas unidades constituintes, ou unidades de análise, referentes aos objetos ou fenômenos estudados (MORAES; GALIAZZI, 2007).

As unidades de análise dessa pesquisa foram elencadas por meio das maneiras que os signos interpretantes foram surgindo no desenvolvimento de uma sequência de atividades de modelagem matemática, para tanto, apoiou-se no referencial adotado que trata da teoria dos interpretantes.

Após a unitarização é necessário categorizar, ou seja, estabelecer relações entre as unidades de análise, combinando, classificando, reunindo os elementos unitários na formação de conjuntos que associam elementos próximos.

Para Moraes (1999, p. 7),

> A amplitude e precisão das categorias estão diretamente ligadas ao número de categorias: em geral, quanto mais subdivididos os dados e quanto maior o número de categorias, maior a precisão da classificação. [...] Antes de mais nada as categorias necessitam ser válidas, pertinentes ou adequadas. [...] Devem também atender critérios da exaustividade, homogeneidade, exclusividade e objetividade.

Após a análise detalhada do *corpus*, a unitarização e a categorização do mesmo, é possível a emergência de uma nova compreensão do todo, o que possibilita a formulação de inferências e a criação de um metatexto representando uma compreensão do produto da nova combinação dos elementos construídos ao longo das duas primeiras etapas. Esse processo constitui a terceira etapa do ciclo de análise (MORAES; GALIAZZI, 2007).

Vale ressaltar que o estabelecimento de relações ou categorização tem por finalidade justamente a organização dos metatextos, ou seja, textos que “pretendem apresentar novas compreensões dos documentos analisados e dos fenômenos investigados” (MORAES; GALIAZZI, 2007, p. 50).

Com relação à produção das categorias, esta pode se dar de três modos diferentes: dedutivo, indutivo e intuitivo. No processo do método dedutivo o pesquisador chega às categorias antes mesmo de iniciar a análise, correspondendo a categorias *a priori* em que o referencial teórico pode ser utilizado para deduzi-las.

No método indutivo as categorias são levantadas por meio da análise do *corpus* surgindo a partir da comparação entre as unidades de análise e são denominadas categorias emergentes.

Já no método intuitivo as categorias surgem por meio de *insights* do pesquisador e, assim como nos demais modos (dedutivo e indutivo), pretende-se com isso dar sentido ao fenômeno analisado como um todo, apresentando um caráter que leva em conta, primordialmente, o fenômeno em si (MORAES, 2003; MORAES; GALIAZZI, 2007).

As categorias desse trabalho foram elaboradas a partir da análise do *corpus* com base no referencial teórico caracterizando-se, assim, como categorias *a priori*.

A quarta etapa, vista como um processo de auto-organização, focaliza o ciclo como um todo, uma vez que os resultados finais, criativos e originais não podem ser previstos, mesmo assim, é indispensável o esforço para que a emergência do novo seja concretizada (MORAES; GALIAZZI, 2007).

O metatexto é uma produção do pesquisador com base em suas reflexões e compreensões dos dados analisados. Tal compreensão se dá a partir da descrição e interpretação das informações, além da teorização dos fenômenos investigados (MORAES, 2003).

É com este caminhar metodológico que se pretende analisar os dados coletados na pesquisa aqui descrita.

# 3. MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo são apresentadas algumas considerações a respeito da modelagem matemática na Educação Matemática. Após isso, são abordados aspectos gerais referentes à sequência de atividades de modelagem matemática.

## 3.1 SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Podemos encontrar na literatura diferentes definições para a modelagem matemática, podendo ser entendida como metodologia (BURAK, 2004), alternativa pedagógica (ALMEIDA; BRITO, 2005), concepção de Educação Matemática (CALDEIRA, 2009), ambiente de ensino e de aprendizagem (BARBOSA, 2001), dentre outras.

Assumiremos aqui a concepção proposta por Almeida e Brito (2005) entendendo-a como uma alternativa pedagógica em que fazemos uma abordagem, por meio da matemática, de um problema não essencialmente matemático.

Além das definições, a modelagem pode ser concebida ainda sob diferentes perspectivas: realística ou modelagem aplicada, contextualizada, educacional (dividida em modelagem didática e modelagem conceitual), sócio-crítica e epistemológica ou teórica. E, destas perspectivas, destaca-se uma meta-perspectiva: a cognitiva (KAISER; SRIRAMAN, 2006).

Para os autores, a modelagem realística ou aplicada tem objetivos pragmáticos utilitários, como a resolução de problemas da realidade ou desenvolvimento de competências de modelagem matemática (ver Kaiser e Brand, 2015). Já a modelagem contextualizada foca na resolução de problemas de palavras (ver Galbraith, 2012).

Ao definirem a modelagem na perspectiva educacional, Kaiser e Sriraman (2006) assinalam os objetivos pedagógicos e disciplinares: estruturação dos processos de aprendizagem e sua promoção (modelagem didática) e introdução e desenvolvimento de conceitos (modelagem conceitual). A modelagem sócio-crítica, por sua vez, possui objetivos pedagógicos tal como a compreensão crítica do mundo. Por fim, a modelagem na perspectiva epistemológica, ou teórica, tem como objetivo a orientação teórica a respeito da modelagem matemática e do conhecimento matemático.

Neste contexto, Kaiser e Sriraman (2006, p. 304) destacam ainda uma meta-perspectiva cognitiva que, resumidamente, tem dois objetivos:

> a) Análise e compreensão dos processos cognitivos que ocorrem durante os processos de modelagem.
> b) Promoção de processos de pensamentos matemáticos usando modelos como imagens mentais ou até mesmo retratos psicológicos ou enfatizando a modelagem como processos mentais tais como a abstração ou generalização[8].

Como nesta pesquisa nosso objetivo é investigar o que os signos interpretantes produzidos ou utilizados em atividades de modelagem matemática nos permitem inferir com relação ao conhecimento matemático dos estudantes e, considerando que tais signos interpretantes estão diretamente relacionados à cognição dos sujeitos, assumiremos aqui a meta perspectiva cognitiva, conforme apresentado por Kaiser e Sriraman (2006).

Além disso, partindo da modelagem matemática como uma alternativa pedagógica, Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15) afirmam que uma atividade deste tipo envolve etapas relacionadas ao conjunto de procedimentos necessários para analisar, estruturar e solucionar uma situação-problema, as quais estes autores caracterizam como: "inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação".

> Inteiração: essa etapa representa o primeiro contato com a situação-problema que se pretende estudar com a finalidade de conhecer as características e especificidades da situação. A inteiração conduz a formulação do problema e a definição de metas para sua resolução, assim a escolha do tema e a busca de informações a seu respeito constituem o foco central nessa fase [...].
> Matematização: é caracterizada pelo processo de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas, que são realizadas a partir de formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações em relação às informações e ao problema definido na fase de inteiração [...].
> Resolução: Esta fase consiste na construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes da situação, responder as perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado [...].
> Interpretação de Resultados e Validação: a interpretação dos resultados pelo modelo implica a análise de uma resposta para o problema, a análise da resposta constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica uma validação da representação matemática associada ao problema, considerando

[8] Tradução nossa para: "a) analysis of cognitive processes taking place during modelling processes and understanding of these cognitive processes; b) promotion of mathematical thinking processes by using models as mental images or even physical pictures or by emphasising modelling as mental process such as abstraction or generalisation."

> tanto os procedimentos matemáticos quanto a adequação da representação para a situação (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.15-16).

Vale destacar que as etapas da modelagem podem não acontecer de forma linear e “os movimentos de “ida e vinda” entre tais etapas caracterizam a dinamicidade da atividade” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012 p. 17).

Modelo matemático pode ser entendido como um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam situações, fenômenos ou objetos reais a serem estudados (FERRUZZI et al., 2004).

Lesh e Doerr (2003, p. 10) colocam que “modelos são sistemas conceituais [...] expressos por meio de sistemas de notação externa, usados para construir, descrever ou explicar os comportamentos de outro sistema[9]”.

Ao se discutir o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em sala de aula, uma distinção é necessária: é importante ter claro se o foco é aprender a fazer modelagem matemática, ou ensinar matemática utilizando atividades de modelagem matemática.

Tal distinção é apresentada por Galbraith (2012) por meio da explicitação de modelagem matemática como conteúdo (para permitir que os alunos aprendam a aplicar técnicas de modelagem para resolver problemas reais relevantes para o seu mundo) e como veículo (para fins de introdução de material curricular e outras prioridades associadas ao desenvolvimento das aulas).

No contexto da modelagem matemática como veículo, alguns usos de atividades de modelagem são comuns, como: o uso de problemas contextualizados; o uso de situações-problema reais para o incentivo de processos de abstração; a modelagem emergente – cujo foco está na emergência de modelos matemáticos a partir de situações reais e complexas; a modelagem como ajuste de curvas; o recurso aos problemas de palavras (GALBRAITH, 2012).

Além disso, Greer e Verschaffel (2007, p. 219) classificam três níveis de modelagem matemática, sendo eles:

> Implícita (em que o aluno está essencialmente modelando sem estar ciente disso), modelagem explícita (na qual se chama a atenção para o processo de modelagem) e modelagem crítica (em que os papéis

[9] Tradução nossa para: “models are conceptual systems [...] expressed using external notation systems, and that are used to construct, describe, or explain the behaviours of other system(s)”.

> de modelagem na matemática, na ciência e na sociedade, são examinados criticamente)[10].

Assim, destacamos que nesta pesquisa, utilizamos uma abordagem da modelagem matemática na Educação Matemática enquanto veículo, em que nosso foco estava não está especificamente em ensinar a modelagem matemática em si, mas o conteúdo matemático, no caso, Cálculo Diferencial e Integral, mais especificamente o conteúdo de derivadas.

Além disso, desde o início do desenvolvimento das atividades os estudantes estavam cientes de que seriam trabalhadas com eles situações oriundas da realidade a partir da modelagem matemática como alternativa pedagógica, portanto, ao se tratar dos níveis de modelagem matemática conforme defendido por Greer e Verschaffel (2007) trabalhamos com a modelagem explícita.

Como citado na introdução, na literatura é possível encontrar pesquisadores que, ao relacionarem modelagem matemática e as aulas de Cálculo, afirmam ser importante para o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes criar e explorar modelos de um fenômeno (FRANCHI, 1993; VILLARREAL, 1999; BARBOSA, 2004; ALMEIDA; FATORI; SOUZA, 2007).

Assim, indo ao encontro destas pesquisas, desenvolveremos uma sequência de atividades de modelagem matemática, abordada com mais detalhes na seção seguinte, com estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

### 3.1.1 Sobre Sequências de Atividades de Modelagem Matemática

Em sequências de atividades de modelagem matemática são apresentadas aos estudantes atividades em que eles precisam dar sentido a situações-problema por meio da matemática (ÄRLEBÄCK; DOERR, 2015).

Assim, atividades de modelagem objetivam confrontar os estudantes com a necessidade inicial de desenvolver um modelo matemático para dar sentido à uma situação significativa (LESH; DOERR, 2003). Atividades deste tipo, segundo Ärlebäck e Doerr (2015), permitem analisar as ideias dos estudantes sobre uma situação-problema de tal forma que os pensamentos dos mesmos tornam-se

[10] Tradução nossa para: “implicit (in which the student is essentially modelling without being aware of it), explicit modelling (in which attention is drawn to the modelling process), and critical modelling (whereby the roles of modelling within mathematics and science, and within society, are critically examined)”.

“visíveis”, tanto para eles (estudantes) quanto para o professor que os acompanha, uma vez que “essas atividades possibilitam que os alunos façam do modelo um objeto explícito do pensamento[11]” (ÄRLEBÄCK; DOERR, 2015, p. 295).

No que diz respeito à dedução do modelo matemático especificamente, Blomhøj e Kjeldsen (2011) afirmam que essa ação objetiva responder um problema inicialmente determinado e, portanto, para que a construção do modelo ocorra, é necessário que os alunos sejam expostos a situações-problema que os levem à reflexão sobre o processo de modelagem e à função dos modelos em diferentes contextos.

Neste mesmo contexto, Ärlebäck e Doerr (2015) apresentam princípios para o desenvolvimento de atividades de exploração de modelos e atividades de aplicação de modelos, atividades estas que compõem as chamadas atividades eliciadoras de modelos.

Para Ärlebäck e Doerr (2015) uma atividade de exploração de modelo tem como objetivo levar o aluno a explorar a estrutura matemática do modelo deduzido a partir de uma situação-problema inicial, ou seja, o foco deste tipo de atividade está na estrutura matemática subjacente ao modelo matemático.

Para isso, este tipo de atividade deve levar os alunos a contrastar pontos fortes e fracos de várias representações; usar linguagem com precisão e cuidado; e usar representações propositadamente e produtivamente (ÄRLEBÄCK; DOERR, 2015).

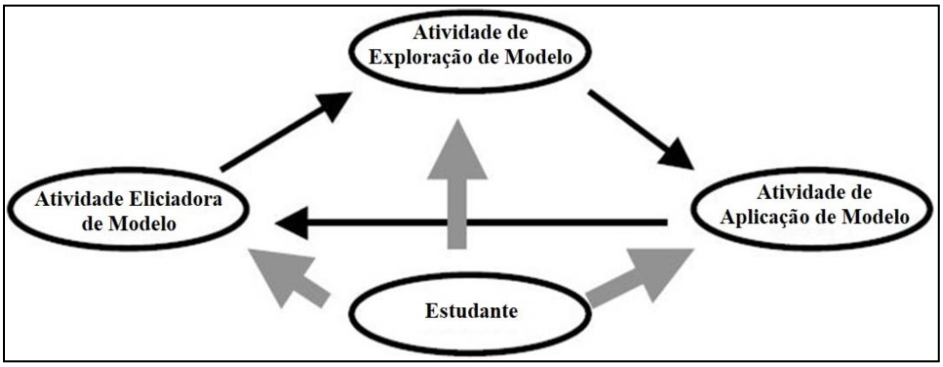
Por outro lado, uma atividade de aplicação de modelos tem o propósito de levar os alunos a pensarem em uma variedade de situações com o modelo desenvolvido. Desta forma, este tipo de atividade deve levar os alunos a usarem os modelos obtidos em contextos distintos; ampliarem seus modelos os conectando a outros modelos e usarem a linguagem para interpretar, descrever e/ou prever o comportamento de um fenômeno real (ÄRLEBÄCK; DOERR, 2015).

Ao aplicarem os modelos inicialmente eliciados a novos fenômenos ou situações, os estudantes são levados a estabelecerem novas adaptações ao modelo, expandir suas representações, refinar o uso da linguagem matemática e aprofundar seus conhecimentos (LESH; DOERR, 2003).

[11] Tradução nossa para: “These activities provide learners with opportunities to make the model an explicit object of thought”.

Sobre sequência de atividades de modelagem matemática, Lesh et al. (2003) afirmam que esta deve ser composta por uma atividade eliciadora de modelo, que deve ser introdutória, com o intuito de familiarizar o estudante com este tipo de atividade, uma atividade de exploração e uma atividade de aplicação de modelos, conforme mostra a Figura 1.

**Figura 1** - Sequência de atividades de modelagem matemática




**Fonte**: Adaptado de LESH et al. (2003, p. 40).

Para Lesh et al. (2003), atividades isoladas de modelagem matemática raramente são suficientes para produzir os tipos de resultados que buscamos, o que justifica a importância de sequências de atividades estruturalmente relacionadas. Além disso, ao explorar sequências de atividades de modelagem matemática são necessárias discussões e explorações para focar em semelhanças estruturais entre as atividades.

Para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática relacionadas e significativas, os autores definem seis princípios que as mesmas devem apresentar, são eles: princípio da significação pessoal; princípio da construção do modelo; princípio da auto-avaliação; princípio da externalização do modelo; princípio do protótipo construído; e princípio da generalização do modelo. Em todos esses princípios, uma série de pontos deve ser levada em consideração, conforme segue.

No primeiro princípio, o da significação pessoal, deve-se observar os seguintes pontos: a situação proposta poderia realmente acontecer na vida real? Os estudantes são levados a significar a situação com base em seus conhecimentos pessoais e experiências? As ideias dos estudantes são consideradas ou estes têm que aceitar a maneira de pensar do professor? (LESH et al., 2003).

No princípio da construção do modelo, deve-se assegurar que a atividade permita que os alunos reconheçam a necessidade de um modelo ser construído, modificado, estendido ou refinado, além disso, a atenção, tanto dos alunos quanto do professor, deve estar focada em padrões e regularidades fundamentais ao invés de informações superficiais (LESH et al., 2003).

As atividades que contemplam o princípio da auto-avaliação dão condições para que os próprios estudantes avaliem a utilidade de seus modelos podendo julgar, por si mesmos, quando suas respostas são adequadas o suficiente para o fenômeno (idem).

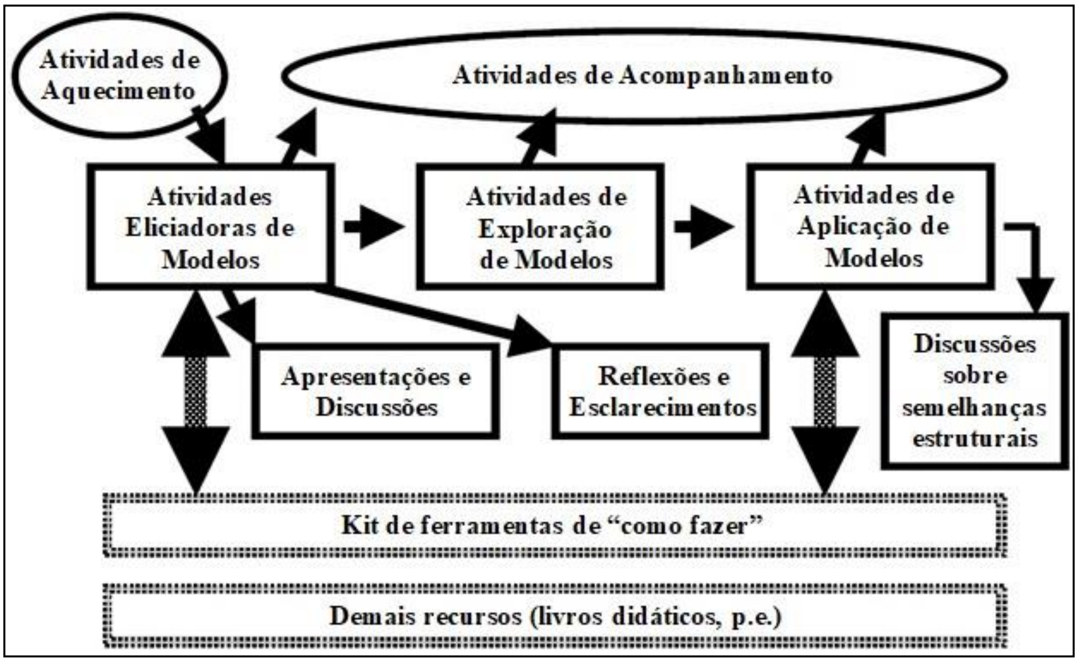
Para contemplar o princípio da externalização do modelo é necessário que a resposta à situação-problema exija que os estudantes revelem explicitamente como estão pensando sobre a situação (dados, objetivos, possível solução, hipóteses) e sobre quais tipos de sistemas (objetos matemáticos, relações, operações, padrões, regularidades) estão pensando (LESH et al., 2000)

Ainda para Lesh et al. (2000), no princípio do protótipo concluído, os pontos a serem considerados são: a situação explorada é simples, mas ainda assim pode requerer modelos significativos? A solução será útil para interpretar uma variedade de outras situações estruturalmente semelhantes? A experiência possibilitará que o estudante explique - ou signifique - situações estruturalmente semelhantes?

Por fim, no princípio da generalização do modelo, deve-se analisar se o modelo obtido aplica-se apenas a uma situação particular, ou pode ser modificado e estendido facilmente para ser usado em outras situações. Os estudantes devem ser desafiados a produzirem modelos reutilizáveis, compartilháveis e modificáveis (LESH, et al., 2003).

Além disso, a fim de explicitar o momento de discussões e reflexões no desenvolvimento de uma sequência, os autores apresentam um esquema organizacional para sequências de atividades de modelagem matemática (Figura 2).

**Figura 2** - Esquema organizacional padrão para sequências de atividades de MM




**Fonte**: Adaptado de LESH et al. (2003, p. 45).

As atividades de aquecimento, normalmente, são desenvolvidas com os estudantes com o intuito de os familiarizar com o contexto de atividades de modelagem matemática. Além disso, uma atividade de aquecimento visa responder algumas perguntas dos professores sobre "pré-requisitos mínimos" os para estudantes começarem a trabalhar em atividades de modelagem matemática (LESH ET AL., 2003).

Já uma atividades eliciadora de modelo geralmente requer pelo menos um ou dois períodos de aula para ser completada, e os alunos são incentivados a trabalharem em equipes com três estudantes em cada grupo. Muitas vezes, essas atividades são usadas pelos professores no início de uma unidade do curso. Um dos objetivos desta ativividade é que o estudante mostre ao professor suas fraquezas conceituais para que isto possa ser explorado no decorrer das aulas (idem).

Após o desenvolvimento da atividade introdutória, Lesh et al. (2003) afirmam ser importante dinâmicas de apresentações e discussões com toda a turma em que os alunos façam apresentações formais sobre os resultados do trabalho produzido. Tais apresentações tem como objetivo possibilitar que os estudantes, tenham contato com outras formas de pensar, discutam os pontos fortes e fracos das abordagens alternativas, e identifiquem as direções para a melhoria em seu próprio trabalho ou o trabalho de outros.

Consequentemente, a partir de apresentações e discussões, uma série de esclarecimentos e reflexões surgirão (LESH et al., 2003) o que também deve ser explorado pelo professor (KAY McCLAIN, 2003).

Por sua vez, as chamadas atividades de acompanhamento consistem em conjuntos de atividades que os professores desenvolvem para ajudar os alunos a reconhecerem as conexões entre as seus conhecimentos teóricos e situações cotidianas, por isso, dentre esses conjuntos de atividades estão as de exploração e aplicação de modelos, conforme definido por Ärlebäck e Doerr (2015).

Ao desenvolver atividades de aplicação de modelos, discussões sobre semelhanças estruturais dentre as atividades certamente ocorrerão e o objetivo principal dessas discussões é fomentar experiências em que os alunos vão além de pensar com estas construções e sistemas conceituais usando seus modelos para uma série de outras situações. A partir dessas conexões, kits de ferramentas de “como fazer” poderão ser elaborados, tais kits são manuais, geralmente resumidos, contendo, geralmente, um conjunto de problemas e exemplos de problemas resolvidos que dão breves explicações de fatos e habilidades que são mais frequentemente necessária nos diferentes cursos (LESH ET AL., 2003).

E o último item do esquema (Demais recursos) inclui materiais que os professores podem usar no desenvolvimento das atividades da sequência, como livros didáticos, websites de matemática, artigos científicos, dentre outros.

Nesta pesquisa desenvolvemos uma sequência de atividades de modelagem matemática respeitando os princípios propostos por Lesh et al. (2003) assim como o esquema proposto pelos autores e, indo ao encontro da teoria que aborda as atividades de aplicação e exploração de modelos proposta por Ärlebäck e Doerr (2015).

Objetivando levar os estudantes a explorarem a estrutura matemática dos modelos deduzidos a partir de diferentes situações-problema é proposta uma sequência de atividades de modelagem matemática que, para serem solucionadas, exigirão o desenvolvimento de modelos matemáticos. Além disso, nas diferentes situações-problema propostas, é explorado o conteúdo de derivadas (componente do programa da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral).

Com tais situações, buscamos auxiliar os estudantes a pensar em uma variedade de situações a partir do modelo deduzido, levando-os assim, a usar os modelos obtidos em contextos distintos que abordem a mesma temática (derivadas).

# 4. SEMIÓTICA PEIRCEANA

Neste capítulo são apresentadas algumas considerações a respeito da semiótica. Na sequência, são abordados aspectos gerais da semiótica peirceana com foco na teoria dos interpretantes.

Charles Sanders Peirce (1839-1914), matemático, químico, físico, astrônomo, fundamentando a semiótica – semiótica peirceana – utilizou o termo *Semeiotic* a partir da lógica concebida como uma filosofia científica da linguagem (SILVA, 2013).

Para Santaella (2012, p. 33), uma das comentadoras da obra de Peirce, a semiótica peirceana é uma "Filosofia científica da linguagem".

Segundo Fidalgo e Gradim (2005), na semiótica peirceana podem ser identificadas, de forma geral, duas frentes estritamente interligadas de construção teórica:

> Uma taxonomia, que se ocupa da sistematização e classificação exaustiva dos diferentes tipos de signo possíveis; e uma lógica, que se ocupa do seu modo de funcionamento (como significam os signos) e do papel que estes desempenham na cognição humana e no acesso do homem ao mundo da experiência e do vivido (p. 142).

Assim, considerando que esta pesquisa visa investigar o que os signos interpretantes produzidos ou utilizados em atividades de modelagem matemática nos permitem inferir com relação ao conhecimento matemático dos estudantes direcionamos nosso interesse para a segunda frente referida por Fidalgo e Gradim (2005).

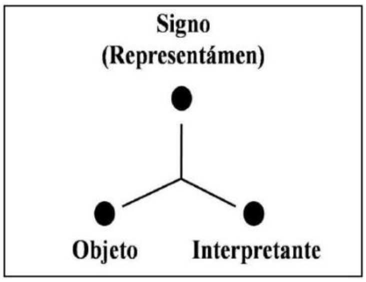
Sobre signo, dentre as várias definições apresentadas por Peirce (1972), em uma delas o autor define que:

> Um signo, ou *representamen*, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria, na mente dessa pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo, assim criado, denomino *interpretante* do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu *objeto*. Coloca-se no lugar desse objeto, não sob todos os aspectos, mas com referência a um tipo de ideia que tenho, por vezes, denominado o *fundamento* do representamem (PEIRCE, 1972, p. 94).

Dessa definição, emerge uma relação fundamental da semiótica peirceana que envolve três elementos: um *representamen*, a parte "material", do signo; um *objeto*, aquilo ao qual o *representamen* remete; e um *interpretante*, o que deriva ou é gerado pela relação entre o *representamen* e o *objeto* (D'AMORE; FANDIÑO PINILLA;

IORI, 2015). Tal relação foi representada por Otte (2006) por meio do esquema da Figura 3:

**Figura 3** - Relação Triádica do Signo




**Fonte**: Adaptado de OTTE (2006, p. 22).

Na representação da relação triádica do signo apresentada por Otte (2006) fica evidenciado o papel do signo como um mediador entre objeto e interpretante, segundo e terceiro elemento sígnico desta tríade peirceana, respectivamente.

Tal mediação se faz necessária porque o signo só pode representar seu objeto para um intérprete, e porque ele tem esse poder de representar, produz na mente desse intérprete alguma outra coisa (um signo ou quase signo) que também está relacionada ao objeto (SANTAELLA, 2007).

Ainda sobre o signo, Otte (2009) afirma que este, embora seja objetivamente limitado, é como uma ferramenta representando uma experiência cristalizada, ou seja, um conhecimento e, ao mesmo tempo, tornando este conhecimento possível para posterior aplicação e uso.

Com o intuito de "tornar clara" a definição de signo apresentada por Peirce, Santaella (2007, p. 7) define-o como "[...]um primeiro (algo que se apresenta à mente), ligando um segundo (aquilo que o signo indica, se refere ou representa) a um terceiro (o efeito que o signo irá provocar em um possível intérprete)".

O *representamen*, como já citado, é o que Santaella (2007) chama de parte "material" do signo. Já o objeto é aquilo ao qual o signo se remete, isto é, "uma coisa singular existente e conhecida ou que se acredita tenha anteriormente existido ou que se espera venha a existir" (Peirce, 2005, p. 48).

O objeto, ou seja, aquilo que o *representamen* remete, pode ser de dois tipos: imediato, ou seja, tal e qual é representado pelo signo, ou dinâmico, isto é, o objeto realmente eficiente, mas não imediatamente presente, é o que guia a produção do signo cujo objeto imediato representa somente um aspecto particular (PEIRCE, 2005).

O interpretante, por sua vez, é algo que se cria na mente do ser humano (intérprete), trata-se de “um signo que interpreta o representamen” (SANTAELLA, 2005, p. 43).

Para Peirce (2005), a interpretação de um signo exige, dentre outras coisas, certo *conhecimento colateral* ao signo ou ao sistema de signos, isto é, um tipo de conhecimento obtido a partir de outras experiências anteriores com aquilo que o signo denota, além de certa familiaridade com o sistema de signos (SANTAELLA, 2012).

Desta maneira, todos aqueles que já estudaram a respeito de derivadas, por exemplo, certamente terão mais facilidade para trabalhar com suas aplicações, pois já tiveram experiências colaterais com seu objeto dinâmico (conhecimento matemático de derivada de uma função). Uma vez que o objeto imediato de derivada é limitado, ou seja, não pode representar tudo que existe sobre derivada, os interessados em saber mais sobre o assunto podem consultar outros materiais em que encontrarão mais recortes sobre o tema, como, regras de derivação, extremos de funções, teorema do valor médio, formas indeterminadas e a regra de L’Hôpital. Assim, os intérpretes vão, cada vez mais, tendo novas experiências colaterais, por meio dos objetos imediatos, com o objeto dinâmico em questão.

De forma geral, a teoria dos signos de Peirce (2005) fundamenta-se na ideia de que a cognição, o pensamento[12] e até mesmo o ser humano possuem uma natureza essencialmente semiótica. Para ele, os signos são meios utilizados para representar algo para alguém, são meios de pensamento, de compreensão, de raciocínio, de aprendizagem (D’AMORE; FANDIÑO PINILLA; IORI, 2005).

Assim, o processo responsável com que o signo tenha um efeito cognitivo sobre o intérprete e gere novos signos é a semiose (NÖTH, 2008). De acordo com a definição de Peirce (2005) o conceito de semiose (a ação do signo) é caracterizado como uma atividade evolutiva.

Neste contexto, Drigo (2007) afirma que a semiose se desencadeia a partir da

---

[12] Peirce desprezava o idealismo absoluto de Hegel, segundo o qual quaisquer contradições e dialéticas podem ser resolvidas com a criação de um modelo que pode refletir no indivíduo e no Estado, no entanto, enxergava nos três estágios do pensamento formulados por Hegel (lógica, natureza e espírito), semelhanças com suas categorias fenomenológicas universais (D’AMORE; FANDIÑO PINILLA; IORI, 2005).

atualização da mente, isto é, um novo signo é gerado (um interpretante) com a identificação de um desconforto ou uma instabilidade, cuja superação é mediada pela semiose.

Objetivando discutir a relação entre a ação e produção de signos em atividades de modelagem matemática e o conhecimento dos alunos, Almeida e Silva (2017) apoiam-se em aspectos da semiótica peirceana, mais especificamente no que diz respeito à semiose, para a análise de uma atividade de modelagem matemática. A partir desta análise, as autoras inferem que a semiose gera novos signos que desencadeiam a construção de novos conhecimentos pelos intérpretes e "nesse sentido, a semiose representa o processo característico da capacidade humana de produção e entendimento de signos de naturezas diversas" (ALMEIDA; SILVA, 2017, p. 216).

Além disso, ainda para Almeida e Silva (2017, p. 218) "atividades de modelagem matemática desencadeiam semiose e, semiose realiza construção de conhecimento".

A semiose, como já dito anteriormente, constitui um processo transformador que envolve signo, objeto e interpretante e estes três elementos da relação sígnica de Peirce remetem às três categorias nas quais Peirce fundamenta sua fenomenologia: primeiridade, secundidade e terceiridade.

Peirce define fenômeno como qualquer coisa, externa, interna ou visceral, que esteja, de algum modo e em qualquer sentido, presente à mente, isto é, "é tudo aquilo que está de qualquer modo presente na mente, sem qualquer consideração se isto corresponde a qualquer coisa real ou não"[13] (CP 1.284)[14]. Neste sentido, a fenomenologia seria a descrição e análise das experiências que estão em aberto para todo homem, em todo momento de nosso cotidiano (SANTAELLA, 2012).

Peirce chega às três categorias fenomenológicas por meio da análise e do atento exame do modo como as coisas aparecem à consciência. Tais categorias foram, em 1867, denominadas como: qualidade; relação; representação.

Segundo Colapietro (2009), as categorias fenomenológicas de Peirce foram

---

[13] Tradução nossa para: "the total of all that is in any way or in any sense present to the mind, quite regardless of whether it corresponds to any real thing or not" (CP 1.284)

[14] Conforme convenção para estudos da obra de Peirce, CP indica os Collected Papers (os números indicam o volume, seguindo-se os parágrafos - ver referências bibliográficas para mais detalhes), que são manuscritos de estudos peirceanos que se encontram aos cuidados do Departamento de Filosofia da Universidade de Harvard.

desenvovidas a partir de um desejo de aperfeiçoar as categorias do funcionamento do intelecto defendidas por Immanuel Kant (1724-1804), a saber: quantidade; qualidade; relação; modalidade.

Com o desenvolvimento de sua teoria, Peirce (1972) alterou as denominações de suas categorias para: qualidade, reação e mediação. No entanto, para fins científicos o mesmo preferiu fazer uso dos termos primeiridade, secundidade e terceiridade, por serem palavras inteiramente novas, livres de falsas associações a quaisquer termos já existentes (SANTAELLA, 2012).

São, deste modo, categorias lógicas aplicadas ao campo das manifestações psicológicas tornando-se claro, assim, que, para nós, o mundo aparece e se traduz como linguagem, fundamento de toda a Semiótica (idem).

A primeiridade refere-se ao que está relacionado ao acaso, ao que não é visto como fato concreto, mas como uma qualidade. Consiste numa primeira percepção do objeto. É uma consciência imediata tal qual é. Pura qualidade de ser e de sentir, nenhuma outra coisa. A qualidade de consciência imediata é uma impressão (sentimento), indivisível, não analisável, frágil. A primeiridade é qualidade pura, sensação, ideia, possibilidade de existência, possibilidade sígnica pura (D’AMORE, FANDIÑO PINILLA, IORI, 2015).

Tudo que está imediatamente presente à consciência de alguém é tudo aquilo que está na sua mente no instante presente. A qualidade da consciência é tão tenra que não podemos sequer tocá-la sem estragá-la (SANTAELLA, 2008).

> O sentimento como qualidade é, portanto, aquilo que dá sabor, tom, matriz à nossa consciência imediata, mas é também paradoxalmente justo aquilo que se oculta ao nosso pensamento, porque para pensar precisamos nos deslocar no tempo, deslocamento que nos coloca fora do sentimento mesmo que tentamos capturar (SANTAELLA, 2012, p. 66).

Consciência, que não deve ser confundida com razão, em primeiridade é qualidade de sentimento, isto é, a primeira apreensão das coisas que para nós aparecem. Primeiridade é um componente do segundo (PEIRCE, 1972).

A secundidade refere-se à experiência, às ideias de dependência, determinação, dualidade, ação e reação, aqui e agora, conflito, surpresa, dúvida (idem).

Certamente, onde há um fenômeno, há uma qualidade, isto é, sua primeiridade. Mas a qualidade é apenas uma parte do fenômeno, visto que, para existir, a qualidade tem de estar associada a uma matéria. A factualidade (secundidade) está nessa corporificação material (SANTAELLA, 2012).

Segue-se que em toda experiência, quer seja de objetos interiores ou exteriores, há sempre um elemento de reação (segundo), anterior à mediação do pensamento articulado (terceiro) e subsequente ao puro sentir (primeiro).

Secundidade é aquilo que dá à experiência seu caráter factual, de confronto, luta. Ação e reação ainda sem o governo da camada mediadora da intencionalidade, razão ou lei, em nível de binariedade pura (idem).

D'Amore, Fandiño Pinilla e Iori (2015) tratam da secundidade como reação, resistência, fato, realização, singularidade, experiência; mero fato sígnico.

Já a terceiridade, por sua vez, refere-se à generalidade, continuidade, crescimento, inteligência. Corresponde, assim, a uma relação triádica existente entre o signo, o objeto e o interpretante. Terceiridade é representação, mediação, lei, hábito, generalidade, lei sígnica (D'AMORE; FANDIÑO PINILLA; IORI, 2015).

Buscando uma aproximação entre a semiótica peirceana, em particular, entre as categorizações fenomenológicas de Peirce e a modelagem matemática como alternativa pedagógica, Almeida, Silva e Vertuan (2011) realizaram a análise de uma atividade de modelagem matemática e, a partir disso, inferiram que, no desenvolvimento de tal atividade, há ações que são primeiras, como quando os alunos têm o primeiro contato com a atividade, ações que são segundas, como a busca de informações que os alunos fazem para iniciar o estudo da situação, e ações que são terceiras, como a obtenção dos resultados matemáticos e sua validação em confronto com a situação-problema, em sintonia com as categorias primeiridade, secundidade e terceiridade de Peirce (2005).

Para Santaella (2012), a terceiridade aproxima um primeiro e um segundo numa síntese intelectual, correspondente ao pensamento em signos, por meio do qual representamos e interpretamos o mundo.

A síntese intelectual citada por Santaella (2012) é a mesma abordada por Nöth (2008) quando afirma que a significação do signo é o interpretante. Segundo o autor, o interpretante é o efeito do signo. O primeiro é o signo, o segundo, o objeto, e o produto da síntese intelectual é o interpretante (terceiro).

## 4.1 A TEORIA DOS INTERPRETANTES

Considerando que a significação do signo é o interpretante, Drigo (2007) afirma que a ação do signo é a de crescer e se desenvolver num interpretante, que se desenvolve em outro e assim sucessivamente e infinitamente. Por este motivo, como o mundo está permeado de signos, se é que não se componha exclusivamente de signos, então uma teia sígnica constitui a mente humana (PEIRCE, 1972). É importante ressaltar que, como aponta Drigo (2007, p. 91), “a *mente* não é uma trama sígnica que está predeterminada, mas algo que está em transformação”.

Portanto, a mente humana existe no movimento dos signos interpretantes sob o olhar semiótico (DRIGO, 2007). E a teia sígnica citada por Peirce (1972) é formada justamente pela geração de interpretantes.

Assim, um signo gera um outro signo e um outro infinitamente e a conexão entre tais signos envolve a questão da continuidade (DRIGO, 2007). Neste sentido, investigando a construção de conhecimento durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, Almeida e Silva (2017) afirmam que tais atividades, em um processo *continuum*, desencadeiam semiose e, semiose realiza construção de conhecimento. Para Peirce, “um verdadeiro *continuum* é alguma coisa cujas possibilidades de determinação nenhuma multidão de individuais pode exaurir”[15] (CP 6.170).

Buscando explicar a infinitude e as conexões necessárias no processo de geração de signos, Drigo (2007, p. 72) afirma que “pode-se valer da ideia de que há uma lei que atua no universo [...] que é a tendência de generalizar”.

Peirce (2005) argumenta que a operação mais importante da mente é a generalização e enfatiza que a abstração está vinculada à generalização e é a operação mais característica do raciocínio matemático uma vez que nos permite lidar com objetos por meio de relações estabelecidas entre eles (DRIGO, 2007).

Desta forma, Peirce (1972) vincula o conceito de generalização e abstração ao conceito de continuidade: quando se generaliza, se abstrai e, mesmo que envolva objetos distintos, há um modo de se reportar a todos eles.

A classificação dos interpretantes se dá de acordo com o efeito do signo no

[15] Tradução nossa para: A true continuum is something whose possibilities of determination no multitude of individuals can exhaust (CP 6.170).

intérprete e, assim como os números da série matemática, não correspondem, de modo algum, a coisas separadas (DRIGO, 2007).

Sobre o interpretante, D'Amore, Fandiño Pinilla e Iori (2015) ressaltam que

> Convém nunca confundir o interpretante com o intérprete do signo e tampouco com aquilo que o signo cria na mente de uma pessoa ("um signo mais desenvolvido"). [...] o interpretante deve ser entendido como "o efeito propriamente transmitido pelo signo" (p. 62).

Santaella (2004a) afirma que a questão do interpretante na teoria de Peirce, especialmente no que diz respeito às suas classificações é um aspecto complexo e não consensual entre seus comentadores.

A classificação apresentada por Peirce (2005) para os interpretantes está vinculada às categorias fenomenológicas. Desta maneira, os interpretantes imediato, dinâmico e final estão associados à primeiridade, secundidade e terceiridade, respectivamente.

O interpretante imediato, segundo Peirce (1972), como o próprio nome sugere, é tudo que o signo imediatamente expressa, está implicado no fato de que cada signo deve ter sua interpretabilidade peculiar, antes que ele alcance qualquer intérprete, ou seja, é um potencial ainda não realizado. Trata-se de uma abstração consistindo numa possibilidade (SANTAELLA, 2007). Consiste na "qualidade de impressão que um signo está apto a produzir e não está relacionado a qualquer reação do fato"[16] (CP 8.315). Trata-se de uma noção de possibilidade, uma propriedade interna ao signo, possibilidade de interpretação ainda em abstrato (DRIGO, 2007). No que se refere às categorias fenomenológicas de Peirce, qualidade e possibilidade são características de primeiridade.

Ainda sobre o interpretante imediato, D'Amore, Fandiño Pinilla e Iori (2015) colocam que este é como o signo se revela no entendimento correto de si mesmo, e é comumente chamado de significado do signo.

Em atividades de modelagem matemática, interpretantes imediatos podem ser evidenciados a partir de signos que revelem as primeiras impressões dos intérpretes com relação ao fenômeno a ser investigado, conforme asseveram Almeida e Silva (2017).

---

[16] Tradução nossa para: The Immediate Interpretant consists in the Quality of the Impression that a sign is fit to produce, not to any actual reaction (CP 8.315)

Para Savan (1976) este interpretante é uma informação que o signo é capaz de transmitir aos seus intérpretes e que ele coletou dos signos anteriores que ele interpreta, é o efeito total que um signo produzirá, ou que naturalmente se espera que ele produza na mente de um intérprete e, como colocado por Peirce (CP 8.315), não diz respeito a qualquer reação do fato, ou seja, é isento de mediação e análise.

O interpretante dinâmico, por sua vez, é o efeito realmente produzido na mente de um intérprete pelo signo (PEIRCE, 1972). Trata-se de um efeito real que o signo, de fato, determina. É a "concretização singular e particular, atualizações mais ou menos adequadas da interpretabilidade do signo rumo ao limite abstrato e ideal" (SANTAELLA, 1995, p. 102).

Para Santaella (2004b) o interpretante dinâmico consiste no efeito direto produzido por um signo sobre um intérprete. Efeitos que podem se dar sobre uma mente individual, ou sobre um número de mentes individuais reais através de ação independente sobre cada uma dessas mentes (SAVAN, 1976).

Peirce (1972) afirma que o interpretante dinâmico é aquilo que é experienciado em cada ato de interpretação e em cada um destes atos, o interpretante é diferente do outro. Tal diferença existe pelo fato de o interpretante dinâmico ser um evento real, singular.

Em atividades de modelagem matemática, a partir das primeiras impressões tidas pelos intérpretes com relação à situação a ser estudada, as questões dos estudantes indicam a interpretabilidade dos signos, rumo àquilo que poderiam conhecer com relação ao fenômeno, tendo assim, características de interpretantes dinâmicos (ALMEIDA; SILVA, 2007).

Neste mesmo sentido, Almeida, Silva e Vertuan (2011) afirmam que interpretantes dinâmicos, em atividades de modelagem matemática, geralmente estão relacionados com a busca de informações que os estudantes fazem para iniciar o estudo da situação, com a definição do problema, com a existência de algo para ser estudado.

Para Santaella (2007), o interpretante dinâmico é o membro menos problemático da tríade de Peirce, uma vez que este interpretante pode ser tomado como o fato empírico de apreensão do signo, uma realização particular do significado, ou aquilo que comumente poderia ser referido como sendo o significado psicológico do signo, sendo, portanto, o único interpretante que funciona diretamente num processo comunicativo. Têm-se aí a dimensão psicológica do interpretante, pois se trata do efeito singular que o signo produz em cada intérprete particular.

O interpretante dinâmico é, desta maneira, "a interpretação concreta do signo produzida pelo interpretante na mente humana" (DRIGO, 2007, p. 88-89), está vinculado à checagem com o real, à vivência de experiências do intérprete. Na ideia de experiências e realidade, a categoria fenomenológica secundidade é predominante.

Segundo Drigo (2007, p. 88):

> O interpretante imediato é uma possibilidade inerente ao signo que lhe dá o potencial para significar e o dinâmico está vinculado a resultados factuais para entendimento do signo. Os interpretantes dinâmicos tendem, no transcorrer do tempo, para o interpretante final de um signo.

Buscando tornar clara a ideia de que os interpretantes dinâmicos convergem para o interpretante final e como se dá este processo de convergência Drigo (2007) recorre a um exemplo da matemática:

> Seja o ponto zero, por exemplo, na reta real. É fácil verificar que a sequência dos números que podem ser escritos sob a forma $\frac{1}{n}$, onde $n$ é um número natural não nulo, tendem para zero ou caminham todos para zero. Não é o número zero, só ele, que conduz esses números, mas a lei de formação, ou seja, a expressão $\frac{1}{n}$. A potencialidade dessa expressão corresponderia à tendência já mencionada. A sequência dos números que obedecem à expressão $\frac{2}{n}$, também tendem para zero, logo, pode-se argumentar que há diferentes caminhos para se aproximar do interpretante final (DRIGO, 2007, p. 89-90).

O interpretante final, que no exemplo abordado por Drigo (2007) pode ser considerado como o número zero da reta numérica, refere-se à maneira pela qual o signo tende a se representar e se relacionar com seu objeto. É o efeito que o signo produziria sobre uma mente em circunstâncias que deveriam permitir que ele atingisse seu efeito pleno (PEIRCE, 1972). É o resultado interpretativo ao qual todo intérprete está destinado a chegar, se o signo for considerado em sua totalidade. Em outras palavras, é aquilo para o qual o real (objeto, fenômeno) tende.

Do ponto de vista do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, interpretantes finais estão associados, provavelmente, com a obtenção e dedução do modelo matemático, na obtenção dos resultados matemáticos (ALMEIDA; SILVA, 2017; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2011).

Ainda neste contexto, se o modelo matemático de alguma forma puder responder o problema, esse é tomado pelos alunos como um modelo que representava a situação em estudo, tendo assim, características de um interpretante final (SILVA; ALMEIDA, 2015).

Além disso, a validação dos resultados, uma das etapas de uma atividade de modelagem matemática, conforme afirmam Almeida, Silva e Vertuan (2012), é resultado "de um efeito interpretativo que o modelo produz no aluno, ou seja, o aluno interpreta, avalia a solução e é capaz de decidir se o modelo é adequado ou não", assim, a própria validação é um interpretante que indica o significado do modelo para esse aluno, caracterizando-se, também, como um interpretante final (SILVA; ALMEIDA, 2015, p. 584).

Ao tratar da evolução dos interpretantes, Peirce (2005) faz uso da ideia de continuidade que para Drigo (2007, p. 72):

> deveria enfatizar essa conectividade que predomina na construção de conceitos matemáticos, pois, caso contrário, como poderia o movimento dos signos/interpretantes na mente humana envolver signos/interpretantes conectados entre si, com um objeto tomado como primeiro e, ainda, possivelmente se aproximando do interpretante final.

Matematicamente, Peirce (1972) se valeu da ideia de série de números reais convergente para explicar o conceito de continuidade. Ele mostra que os termos de uma série deste tipo sempre envolvem os termos anteriores e a diferença entre eles, a partir de um determinado termo, é da ordem de infinitésimos. Assim como numa teia de signos interpretantes dentro da mente humana, o primeiro termo da série está "inserido" no segundo que, por sua vez, está no terceiro e assim por diante.

Metaforicamente, ao invés de uma série numérica na mente humana, há uma teia de signos interpretantes cujo processo de desvelar se inicia com o chamado interpretante imediato, pode continuar com interpretantes dinâmicos e tendem ao interpretante final.

Santaella (2004b) destaca que o interpretante final não consiste no modo pela qual qualquer mente realmente reage ao signo, mas no modo pelo qual toda mente reagiria. É o efeito último do signo, na medida em que ele é intencionado ou destinado pelo caráter do signo, sendo, assim, de uma natureza habitual e formal.

O interpretante final é um *in abstracto*, fronteira para a qual os interpretantes dinâmicos (interpretantes *in concreto*) tendem a caminhar no longo curso do tempo (PEIRCE, 1972). Trata-se de um limite pensável, mas nunca inteiramente atingível.

Em outro momento de suas obras, Peirce (1972) apresenta, ainda, outra tricotomia de interpretantes, a qual Santaella (2004b, 2007) e outros comentadores da obra de Peirce afirmam ser uma divisão do interpretante dinâmico. Nesta tricotomia Peirce (1972) classifica seus interpretantes em emocional, quando predominar a emoção, energético, quando a predominância for a razão e lógico quando predominar o significado.

Nesta tricotomia, o interpretante emocional é o primeiro efeito significado de um signo, ou seja, é o sentimento provocado pelo signo. Em alguns casos é o único efeito que o signo produz no intérprete (SANTAELLA, 2004b).

Santaella (2007) afirma que se um signo produz ainda algum efeito desejado, o fará por meio da mediação de um interpretante emocional, e tal efeito envolverá sempre um esforço. A este esforço dá-se o nome de interpretante energético.

Este esforço (interpretante energético) pode ser muscular em alguns casos, mas é usualmente um exercer do mundo interior, isto é, um esforço mental. Corresponde a um ato no qual alguma energia é despendida. Índices[17] tendem a produzir esse tipo de interpretante com mais intensidade, pois são estes signos que chamam nossa atenção, dirigem nossa retina mental ou nos movimentam na direção do objeto que eles indicam (PEIRCE, 1972).

Já o interpretante lógico é o pensamento ou entendimento geral produzido pelo signo. É uma regra geral, que não se confunde com um conjunto de palavras, mas é mais propriamente um hábito de ação que pode ser expresso por palavras (PEIRCE, 1972).

Quando o signo é interpretado por meio de regras interpretativas internalizadas pelo intérprete, tem-se o interpretante final. Sem tais regras, um símbolo nada significaria, uma vez que está associado aos objetos que representa por meio de hábitos associativos que se processam na mente do intérprete e que levam o símbolo a significar o que significa (SANTAELLA, 2004b). Assim, os símbolos são signos com características de interpretantes finais, mais especificamente, de interpretantes lógicos.

[17] Peirce (1972) apresenta uma classificação dos signos em ícones, índices e símbolos. Ícones são signos que se reportam a seus objetos por similaridade, ou seja, só podem só podem sugerir algo. Índices Um índice, por sua vez, é um signo que se refere ao objeto em razão de ver-se realmente afetado por aquele objeto, não se tratando apenas de uma simples semelhança. Já um símbolo é um signo que se refere ao objeto por força de uma lei.

Ainda sobre o interpretante lógico, Santaella (2004b, 2007) chama atenção para o interpretante lógico último, que se refere a uma mudança de hábito, entendendo por mudança de hábito uma alteração nas tendências de uma pessoa para a ação.

Com relação ao conhecimento matemático derivada de uma função, por exemplo, há vários modos de representar a derivada de uma função $y = f(x)$ (em que a variável independente é $x$ e a dependente é $f$). Algumas das notações mais comuns para a derivada são:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D(f)(x) = D_x f(x)$$

Tomando como exemplo a notação $D(f)$, digamos que alguém sem nenhum conhecimento sobre derivada de função tenha acesso a esse signo ($D(f)$), é possível que esse intérprete ache que a referida notação represente o domínio da função $f$ (não sabendo que o símbolo $D$ é um operador de derivação). Assim, mesmo sem conhecimentos sobre derivada de função, o signo $D(f)$ não deixa de ter seu interpretante imediato.

No entanto, pode ser, dado o contexto em que a notação $D(f)$ (signo) seja apresentada ao intérprete, que esta gere no intérprete curiosidade com relação ao seu real significado e, a partir deste sentimento, ele decida estudar sobre notações matemáticas e, dentre os materiais escolhidos, encontre tópicos referentes a derivada de uma função. O sentimento de curiosidade, neste caso, é um interpretante dinâmico emocional enquanto que a ação de buscar informações complementares pode ser entendida como um interpretante dinâmico energético.

Tendo contato com materiais referentes à derivadas e estudando estes materiais, pode ser que o intérprete passe a conhecer como usar a derivada de uma função para calcular valores extremos de funções, por exemplo, ou determinar e analisar o formato de gráficos, calcular limites de frações cujo numeradores e denominadores tendem a zero ou a infinito, dentre outras aplicações deste conhecimento matemático.

As conclusões do intérprete (derivada serve para determinar numericamente em que ponto uma função é igual a zero, por exemplo) são interpretantes dinâmicos lógicos.

O interpretante final, nesta situação, seria o efeito que o conhecimento matemático de derivadas produziria, em uma mente se fosse possível que o signo produzisse todos os interpretantes dinâmicos de modo exaustivo, ou seja, seria possível se a semiose fosse levada suficientemente longe.

Sendo assim, é por meio da evolução dos interpretantes (imediato, dinâmico e final) que podemos ter, portanto, indícios de como os alunos constroem o conhecimento matemático em questão, conforme explorado por Silva e Almeida (2015).

É com este olhar a partir da teoria dos interpretantes de Peirce (2005), que analisaremos uma sequência de atividades de modelagem matemática.

# 5. OS SIGNOS INTERPRETANTES EM UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Considerando os signos produzidos ou utilizados pelos estudantes e características de atividades de modelagem matemática a que nos referimos no decorrer da nossa abordagem teórico-metodológica, especificada anteriormente, apresentamos no presente capítulo uma análise textual discursiva dos dados coletados.

## 5.1 O CONTEXTO DA PESQUISA

Nossas reflexões se fundamentam na análise realizada de atividades de modelagem matemática desenvolvidas por um grupo composto por doze estudantes do segundo ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade estadual localizada no norte do Paraná.

Tais atividades foram desenvolvidas no contexto da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, de 72 horas, ministrada anualmente. Os encontros foram realizados semanalmente (duas vezes por semana) com duração de duas horas-aula cada, no período de abril a setembro de 2017.

Para o desenvolvimento das atividades, os estudantes, identificados pelos códigos E1, E2, E3, ..., E12, se organizaram em 4 grupos (G1, G2, G3, G4), composto conforme Tabela 1 do capítulo 2 deste texto.

Todas as atividades foram desenvolvidas de acordo com as características apresentadas por Lesh et al. (2003) quando tratam de sequências de atividades de modelagem matemática, já descritas no capítulo 3 deste texto.

Neste sentido, inicialmente buscamos situações que permitissem que os alunos explorassem a estrutura matemática do modelo deduzido a partir de situações iniciais. Além disso, nas situações propostas buscamos também possibilitar que os alunos pensassem em outras situações com o mesmo modelo.

Portanto, as atividades foram desenvolvidas de forma a levarem os estudantes, inicialmente, a perceberem a necessidade de desenvolver um modelo a fim de dar sentido à situação proposta e, a partir disso, poderem solucioná-la (LESH, DOERR, 2003).

As datas em que as atividades foram desenvolvidas e os estudantes que desenvolveram cada atividade estão especificados na Tabela 2.

**Tabela 2 -** Atividades desenvolvidas

| **Aula nº** | **Data** | **Grupo** | **Atividade** |
|---|---|---|---|
| 9 | 12/04/17 | G1, G2, G3, G4 | Usuários de Internet no Brasil |
| 10 | 19/04/17 | G1, G2, G3, G4 | Usuários de Internet no Brasil |
| 11 | 26/04/17 | G1, G2, G3, G4 | Usuários de Internet no Brasil |
| 19 | 24/05/17 | G1, G2, G3, G4 | Discussão das Atividades dos grupos |
| 20 | 25/05/17 | G1, G2, G3, G4 | Discussão das Atividades dos grupos |
| 26 | 01/07/17 | G1, G2, G3 | Qual tamanho de cabo elétrico usar? |
| 27 | 05/07/17 | G1 | Análise da Germinação da Semente do Pepino |
| | | G3 | Dinâmica das matrículas no Ensino Superior na modalidade EAD e presencial |
| 28 | 06/07/17 | G2 | Perda de Água na Distribuição em Uraí-PR |
| 29 | 07/07/17 | G4 | Taxa de Analfabetismo no Brasil |
| 30 | 02/08/17 | G1, G2, G3, G4 | Discussão das Atividades dos grupos |
| 31 | 03/08/17 | G1, G2, G3, G4 | Discussão das Atividades dos grupos |
| 32 | 09/08/17 | G1, G2, G3, G4 | Discussão das Atividades dos grupos |
| 38 | 20/09/17 | G1, G2, G3, G4 | Discussão das atividades dos grupos |

**Fonte:** o próprio autor.

Inicialmente é apresentada uma análise individual de cada uma das atividades desenvolvidas por cada um dos grupos (G1, G2 e G3). Na sequência é elaborado um metatexto referente a cada uma das atividades para, no final, ser apresentado um metatexto global levando em consideração toda a sequência de atividades analisadas.

## 5.2 A SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DESENVOLVIDA

A sequência desenvolvida é composta por cinco atividades de modelagem matemática, conforme Tabela 3:

**Tabela 3 -** Sequência de atividades desenvolvidas

| **Código** | **Atividade** |
|---|---|
| A1 | Usuários de Internet no Brasil |
| A2 | Qual tamanho de cabo elétrico usar? |
| A3 | Perda de água na distribuição em Uraí-PR |
| A4 | Análise da Germinação da Semente de Pepino |
| A5 | Dinâmica das matrículas no Ensino Superior na modalidade EAD e presencial |

**Fonte:** o próprio autor.

As atividades desenvolvidas por cada um dos grupos são descritas na Tabela 4.

**Tabela 4 -** Atividades desenvolvidas por cada um dos grupos

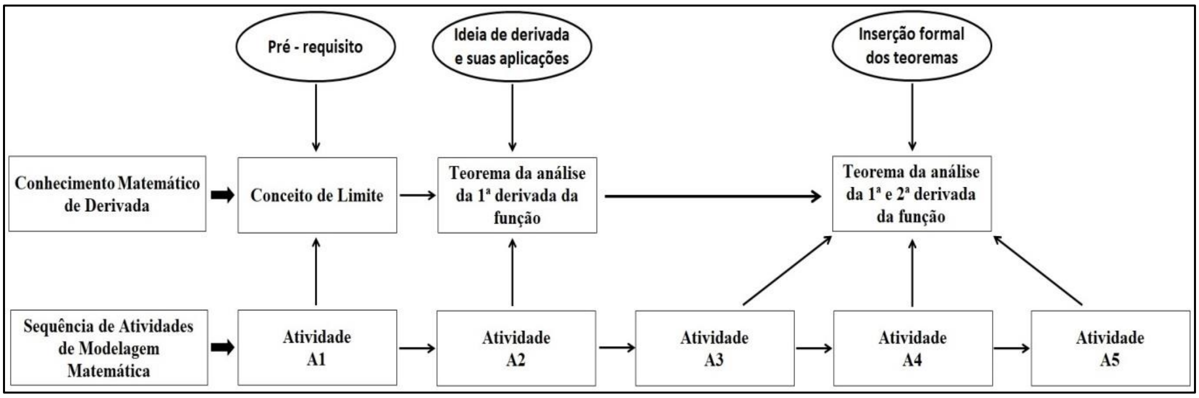
| | **A1** | **A2** | **A3** | **A4** | **A5** |
|---|---|---|---|---|---|
| *G1* | ✓ | ✓ | | ✓ | |
| *G2* | ✓ | ✓ | ✓ | | |
| *G3* | ✓ | ✓ | | | ✓ |

**Fonte:** o próprio autor.

O objetivo da sequência de atividades foi trabalhar os usos da derivada de uma função, sendo assim, a atividade A1 abordou o conceito de limite (pré-requisito para a compreensão do conceito de derivada), na atividade A2 foi trabalhada a ideia de derivada e suas aplicações, nesta atividade os estudantes fizeram uso do teorema da análise da 1ª derivada de uma função; e nas atividades A3, A4 e A5, houve a inserção formal dos teoremas, nestas atividades houve interferência do professor para que os estudantes utilizassem os teoremas da 1ª e 2ª derivada das funções obtidas nas atividades.

Na Figura 4 é apresentado um esquema em que sintetizamos a relação da sequência de atividades de modelagem matemática desenvolvida e o conhecimento matemático do conceito de derivada.

**Figura 4** - Relação entre a sequência de atividades e o conhecimento de derivada

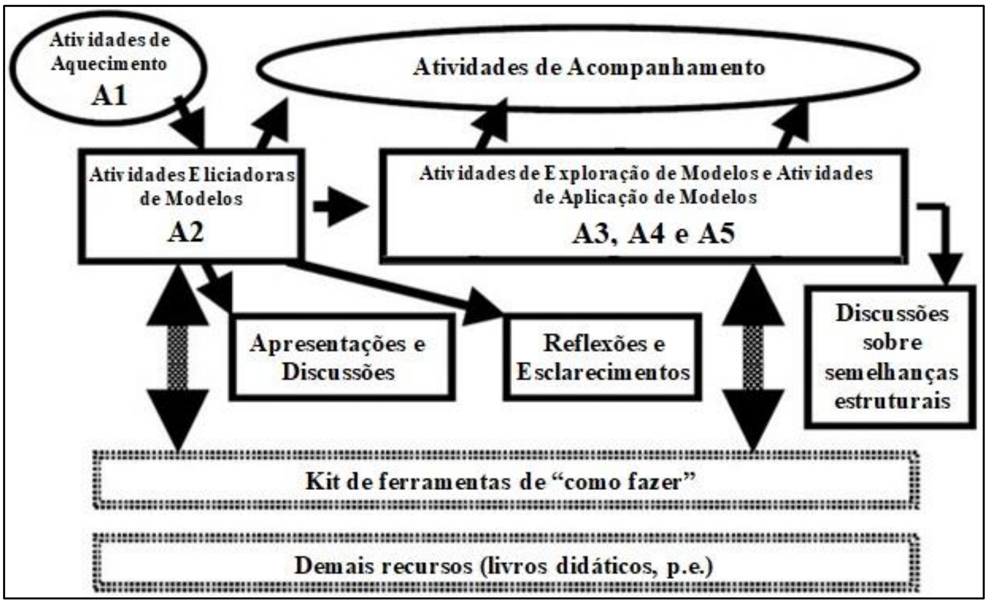



**Fonte**: o próprio autor.

Com relação ao esquema padrão para uma sequência de atividades de modelagem matemática, proposto por Lesh et al. (2003), na sequência aqui desenvolvida, a atividade A1 teve papel de atividade de aquecimento, a atividade A2 foi uma primeira atividade eliciadora de modelo e as demais atividades (A3, A4 e A5) tiveram papel de atividade de acompanhamento. Além disso, apresentações, discussões, reflexões e esclarecimentos foram ocorrendo de acordo com o desenvolvimento das atividades, conforme as transcrições.

A figura 5 apresenta o esquema proposto por Lesh et al. (2003) com as atividades desenvolvidas pelos estudantes.

**Figura 5** - Relação entre a sequência de atividades e o conhecimento de derivada




**Fonte**: o próprio autor.

Apresentamos na sequência a análise das atividades desenvolvidas pelos grupos.

A análise dos encaminhamentos dos grupos para a sequência de atividades de modelagem matemática com base nos referenciais teóricos adotados nos permite identificar e caracterizar os signos interpretantes produzidos ou utilizados pelos estudantes no decorrer de tal desenvolvimento. É a partir de tal identificação e caracterização que buscaremos relacionar a evolução dos signos interpretantes com o conhecimento de derivadas mobilizado na sequência de atividades de modelagem matemática.

### 5.2.1 Atividade 1: Usuários de Internet no Brasil

As informações relativas ao tema (proposto pelo professor pesquisador) foram entregues aos estudantes em dois textos. Um referente ao número de usuários de internet no Brasil que, em 2016, já ultrapassava 100 milhões e outro referente ao possível novo “bug do milênio” previsto para ocorrer em 2038 devido às configurações dos sistemas operacionais atuais. Tais textos são reportagens publicadas no Portal do Governo Federal e na Revista Online Exame.com, respectivamente. Estes textos constam no Apêndice C.

Além dos textos introdutórios, a atividade também era composta por uma tabela contendo o número de domicílios com acesso à internet no país, nos últimos 11 anos de acordo com informações disponíveis pela PNAD[18] e pelo Banco Mundial (Tabela 5).

**Tabela 5 -** Domicílios com acesso à internet no Brasil de 2006 a 2016

| Ano | Domicílios com acesso à internet (em milhões) |
|---|---|
| 2006 | 13,26 |
| 2007 | 14,67 |
| 2008 | 16,20 |
| 2009 | 18,96 |
| 2010 | 19,81 |
| 2011 | 22,49 |
| 2012 | 24,14 |

[18] Pesquisa Nacional por Amosta de Domicílios Contínua - IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística)

| | |
|---|---|
| 2013 | 26,36 |
| 2014 | 28,38 |
| 2015 | 30,32 |
| 2016 | 32,29 |

**Fonte:** PNAD (2015)

Como citado, dentro da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, nosso foco está na discussão do conteúdo “derivadas”, no entanto, nas datas em que a primeira atividade foi desenvolvida, os estudantes ainda não tinham sido introduzidos ao conceito de derivadas, por isso, optou-se por trabalhar com a noção intuitiva de limite que antecede o conceito de derivada na ementa da disciplina de coleta de dados.

Além disso, no que diz respeito ao esquema de uma sequencia de atividades, conforme apresentado por Lesh et al. (2003), esta primeira atividade foi proposta justamente com o intuito de ajudar os estudantes a olharem matematicamente para situações cotianas enquanto se familiarizam com atividades de modelagem matemática, além disso, esta atividade tinha também como objetivo analisar se os alunos possuíam os pré-requisitos mínimos para trabalharem com as demais atividades da sequência. Sendo assim, esta atividade pode ser classificada como uma atividade de aquecimento e, por sua característica de uma atividade introdutória, o desenvolvimento da mesma levou 3 aulas (dias 12, 19 e 26.04 - conforme Quadro 2, do capítulo 2) de duas horas cada.

Após uma breve discussão sobre os textos, foram apresentadas aos estudantes duas situações-problema para serem exploradas e respondidas:

1) *Quantas pessoas, no Brasil, terão acesso à internet no ano 2038, ano do possível novo “bug do milênio”?*
2) *Quantas pessoas, no Brasil, terão acesso à internet daqui a muitos e muitos anos?*

Considerando que os dados apresentados na atividade referiam-se ao número de domicílios com acesso à internet no Brasil e que as situações-problema a serem respondidas tratavam de usuários de internet, os grupos julgaram necessária a elaboração de uma primeira hipótese, relacionada ao número de usuários em cada domicílio, além disso, alguns termos abordados nos textos pareceram desconhecidos para alguns estudantes conforme transcrições abaixo:

Discussões do Grupo G1:

*E1: Se a gente olhar aqui, esse tal de PNAD pesquisa o número de domicílio e não de pessoas, então com esses dados aqui a gente vai encontrar o número de domícilios e não o número de usuários...*

*E2: Mas aí no final a gente encontra o número de pessoas em cada casa e multiplica o resultado final.*
*E10: Será? Acho mais fácil a gente já multiplicar no início, pra não correr o risco de esquecer.*

Discussões do Grupo G2:

*E3: Como vamos fazer pra determinar o número de usuários de internet se temos só a quantidade de domicílios?*
*E7: Mas a reportagem fala do número de usuários, deve estar errado no título da tabela.*

*E5: Vamos definir quantas pessoas moram em cada casa pra ter o número de usuários.*
*E3: O que é bug? Acho melhor pesquisar certinho o que isso significa.*

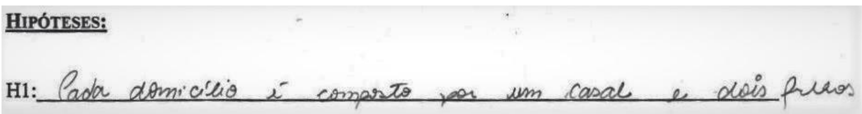
Discussões do Grupo G3:

*E6: Essa questão do domicílio e número de usuários, a gente pode deixar pra depois.*
*E12: Como assim?*

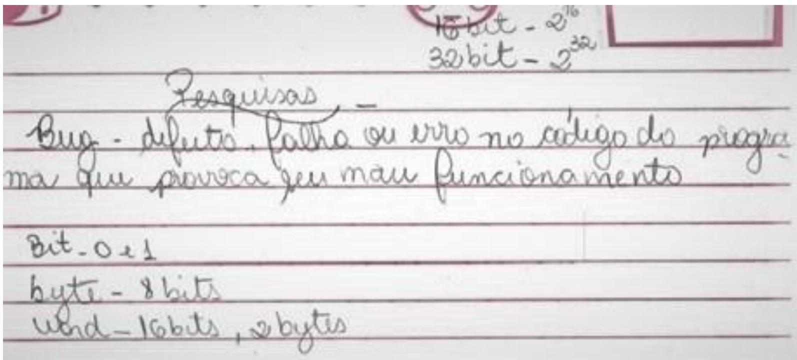
*E6: Vamos trabalhar com domicílios mesmo e aí no final a gente decide quantas pessoas moram em cada casa.*

No Quadro 3 são apresentadas as pesquisas complementares realizadas pelo grupo G2, as hipóteses elaboradas pelos grupos G2 e G3 e o tratamento dos dados feito pelo grupo G1.

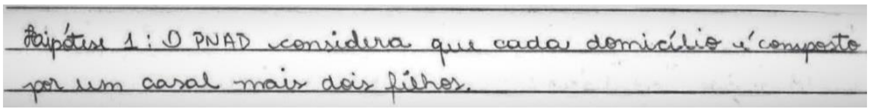
**Quadro 3 -** Pesquisas complementares e hipóteses elaboradas pelos grupos


HIPÓTESES:
H1: Cada domicílio é composto por um casal e dois filhos

**Hipótese do estudante E2 (G2)**

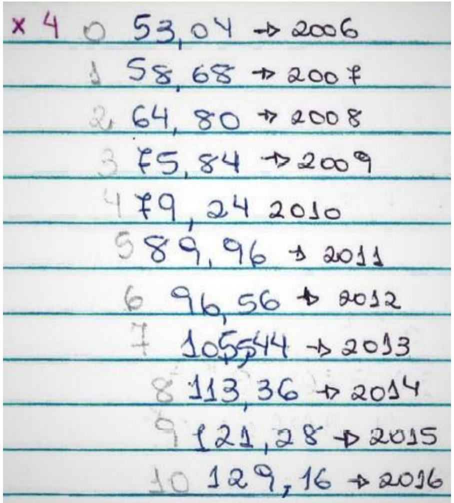

16 bit - $2^{16}$
32 bit - $2^{32}$
Pesquisas
Bug - defeito, falha ou erro no código do programa que provoca seu mau funcionamento
Bit - 0 e 1
byte - 8 bits
word - 16 bits, 2 bytes

**Pesquisa complementar realizada por E5 (G2)**



Hipótese 1: O PNAD considera que cada domicílio é composto por um casal mais dois filhos.

**Hipótese do estudante E6 (G3)**



x 4
0 53,04 → 2006
1 58,68 → 2007
2 64,80 → 2008
3 75,84 → 2009
4 79,24 2010
5 89,96 → 2011
6 96,56 → 2012
7 105,44 → 2013
8 113,36 → 2014
9 121,28 → 2015
10 129,16 → 2016

**Tratamento dos dados do grupo G1**

**Fonte**: relatórios dos estudantes.

No relatório do grupo G1 não consta registrada a primeira hipótese formulada pelos estudantes, no entanto, conforme mostrado no quadro 3, os mesmos multiplicaram os dados da tabela 5 por quatro, sendo assim, entenderemos que, de forma análoga aos demais, o grupo G1 também assumiu como hipótese que cada domicílio era composto por quatro pessoas.

As discussões dos estudantes a respeito das reportagens e dos dados obtidos dão indícios daquilo que o signo imediatamente expressa (dados equivocados, termos desconhecidos).

Essas primeiras impressões que os intérpretes tiveram geraram uma série de reações nos mesmos, como pesquisar  o significado do termo “bug” e, conforme registros escritos de G2, dos termos “bit”, “byte” e “word”. Tais reações apontam o efeito semiótico imediato do *representamen*.

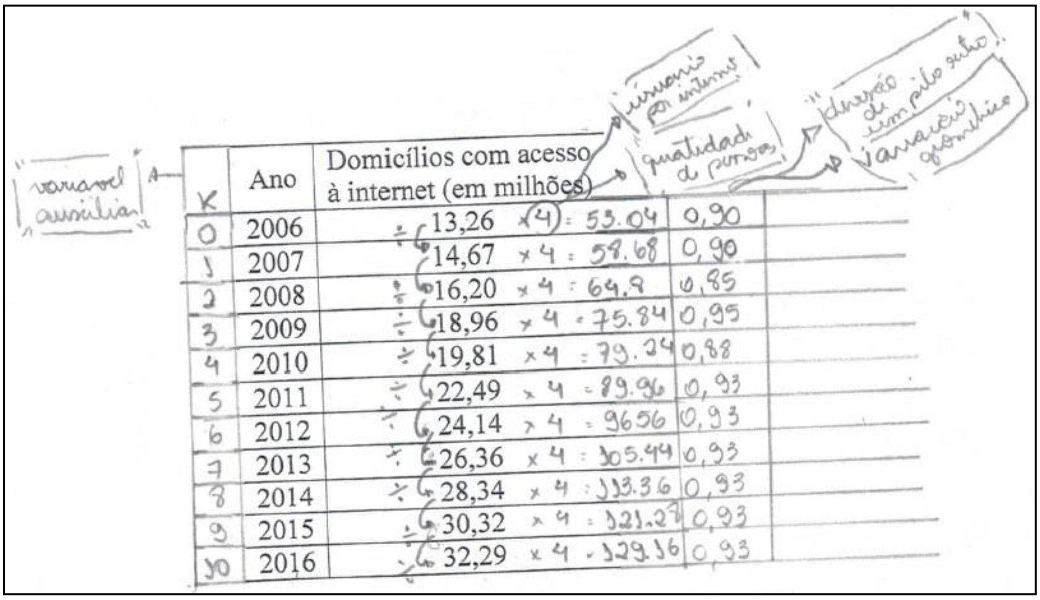
Além disso, podemos considerar que, como a elaboração de hipóteses se deu como uma reação às impressões que os intérpretes tiveram ao entrarem em contato com a atividade, tal elaboração se caracteriza como uma ação ulterior à impressão do signo.

Tendo definida a problemática a ser explorada e se familiarizado com tal problemática, o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática requer que o modelador defina “metas para sua resolução” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 15). Objetivando definir metas para resolução das problemáticas da atividade, os grupos buscaram analisar o crescimento dos dados estudando a variação dos mesmos. Para isso, os mesmos calcularam a diferença entre um ano e outro e a razão entre tais anos.

De acordo com os estudantes, tais cálculos (diferença e razão) foram realizados a fim de perceberem se os dados cresciam aritmeticamente ou geometricamente, para assim, definirem que tipo de comportamento a função que ajustariam deveria obedecer. Neste caso, o cálculo da variação dos dados são signos capazes de transmitir informações importantes aos intérpretes com relação ao comportamento do fenômeno explorado. Além disso, visando facilitar os cálculos, adotaram uma variável auxiliar ($k$) para representar o tempo (em anos).

Na Figura . é apresentado o uso da variável auxiliar ($k$), a tabela obtida pelo grupo G2 ao multiplicar os dados fornecidos na atividade e a análise da variação desses dados.

**Figura 6 -** Tabela obtida por G2



| K | Ano | Domicílios com acesso à internet (em milhões) | |
|---|---|---|---|
| 0 | 2006 | 13,26 ×4 = 53.04 | 0,90 |
| 1 | 2007 | 14,67 ×4 = 58.68 | 0,90 |
| 2 | 2008 | 16,20 ×4 = 64.8 | 0,85 |
| 3 | 2009 | 18,96 ×4 = 75.84 | 0,95 |
| 4 | 2010 | 19,81 ×4 = 79.24 | 0,88 |
| 5 | 2011 | 22,49 ×4 = 89.96 | 0,93 |
| 6 | 2012 | 24,14 ×4 = 9656 | 0,93 |
| 7 | 2013 | 26,36 ×4 = 105.44 | 0,93 |
| 8 | 2014 | 28,34 ×4 = 113.36 | 0,93 |
| 9 | 2015 | 30,32 ×4 = 121.28 | 0,93 |
| 10 | 2016 | 32,29 ×4 = 129.16 | 0,93 |

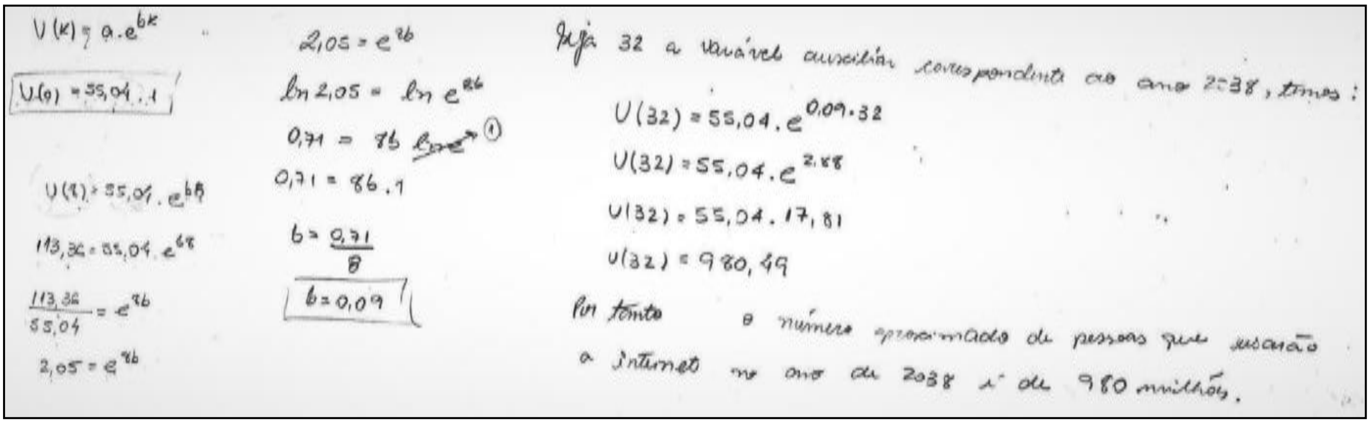


**Fonte**: relatório dos estudantes.

Analisando as variações, os grupos inferiram que os dados cresciam geometricamente e, por isso, decidiram ajustar uma função exponencial do tipo $U(k) = a.e^{b \cdot k}$, sendo $U(k)$ o número de usuários de internet no Brasil, $k$ a variável auxiliar que representa o tempo em anos e os coeficientes $a$ e $b$ os parâmetros da função a ser ajustada.

Os procedimentos matemáticos adotados pelos grupos G2 e G3 após decidirem ajustar uma função do tipo exponencial são apresentados nas Figura 7 e Figura 8, respectivamente.

**Figura 7 -** Procedimentos adotados por G2



$V(k) = a.e^{bk}$

$\boxed{U(0) = 55{,}04 . 1}$

$U(8) = 55{,}04 . e^{b8}$

$113{,}36 = 55{,}04 . e^{8b}$

$\frac{113{,}36}{55{,}04} = e^{8b}$

$2{,}05 = e^{8b}$

$2{,}05 = e^{8b}$

$\ln 2{,}05 = \ln e^{8b}$

$0{,}71 = 8b \ln e$ ①

$0{,}71 = 8b . 1$

$b = \frac{0{,}71}{8}$

$\boxed{b = 0{,}09}$

Seja 32 a variável auxiliar correspondente ao ano 2038, temos:

$U(32) = 55{,}04 . e^{0{,}09 . 32}$

$U(32) = 55{,}04 . e^{2{,}88}$

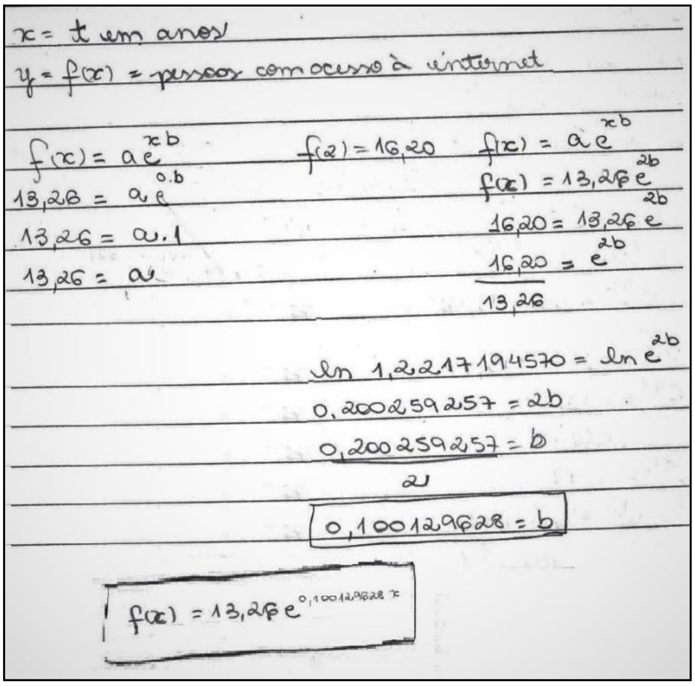
$U(32) = 55{,}04 . 17{,}81$

$U(32) = 980{,}49$

Portanto o número aproximado de pessoas que usarão a internet no ano de 2038 é de 980 milhões.

**Fonte**: relatório dos estudantes.

**Figura 8 -** Procedimentos adotados por G3



x = t em anos

y = f(x) = pessoas com acesso à internet

$f(x) = a e^{xb}$

$13{,}26 = a e^{0.b}$

$13{,}26 = a . 1$

$13{,}26 = a$

$f(2) = 16{,}20$

$f(x) = a e^{xb}$

$f(x) = 13{,}26 e^{2b}$

$16{,}20 = 13{,}26 e^{2b}$

$\frac{16{,}20}{13{,}26} = e^{2b}$

$\ln 1{,}2217194570 = \ln e^{2b}$

$0{,}200259257 = 2b$

$\frac{0{,}200259257}{2} = b$

$\boxed{0{,}100129628 = b}$

$\boxed{f(x) = 13{,}26 e^{0{,}100129628 x}}$

**Fonte**: relatório dos estudantes.

Os procedimentos matemáticos adotados pelo grupo G1 são bastante semelhantes aos do grupo G2, por isso, não apresentamos fragmentos do relatório deste grupo quanto aos procedimentos matemáticos.

O primeiro modelo determinado por G1 e G2 foi $U(k) = 55{,}04\,.\,e^{0{,}09\,\cdot\,k}$, já o primeiro modelo determinado por G3 foi $U(k) = 13{,}26\,.\,e^{0{,}100129628\,\cdot\,k}$, sendo $U$ o número de domicílios com acesso à internet no Brasil e $k$ a variável auxiliar que representa o tempo em anos.

Antes de apresentarem a resposta para a primeira situação-problema: *Quantas pessoas, no Brasil, terão acesso à internet no ano 2038, ano do possível novo "bug do milênio"?*, os grupos fizeram a validação dos modelos e, como os dados do modelo se aproximavam dos dados apresentados na atividade, os mesmos consideraram os modelos matematicamente adequados para a situação. Todos os grupos fizeram a validação de maneira semelhante ao do Grupo G2, conforme apresentado na Figura 9.

**Figura 9 -** Validação do modelo $\boldsymbol{U(k) = 55{,}04\,.\,e^{0{,}09\,\cdot\,k}}$

| variável auxiliar K | Usuários de internet em milhões | Validação dos dados em milhões |
|---|---|---|
| 0 | 55,04 | 55,04 |
| 1 | 58,68 | 60,22 |
| 2 | 64,8 | 65,89 |
| 3 | 75,84 | 72,10 |
| 4 | 79,24 | 78,89 |
| 5 | 89,96 | 86,31 |
| 6 | 96,56 | 94,44 |
| 7 | 105,44 | 103,34 |
| 8 | 113,36 | 113,07 |
| 9 | 121,28 | 123,72 |
| 10 | 129,16 | 135,37 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 32 | | 920,49 |

**Fonte**: relatório dos estudantes.

Com os modelos definidos, os grupos G1 e G2 concluíram que em 2038 haverá no Brasil mais de 980 milhões de usuários de internet, enquanto que, para G3, em 2038 no Brasil haverá mais de 1,1 bilhões de usuários de internet.

No entanto, apesar de matematicamente o modelo estar adequado, interpretando o modelo obtido à partir do fenômeno, os grupos concluíram não ser possível haver tal quantidade de usuários de internet no Brasil em 2038, uma vez que, para eles, não é possível que a população brasileira cresça tanto em tão pouco tempo. Esta análise é evidenciada nos diálogos transcritos e na Figura 10.

Discussões do Grupo G1:

*E10: nossa, ficou muito alta essa população. Será que está certo?*
*E9: acho que sim, se o modelo está certo, a resposta tem que estar.*
*E1: mas pode ser que o modelo esteja errado.Vamos refazer.*
*E2: será que não tem um jeito de travar esse crescimento?*
*E10: acho que tem sim.*

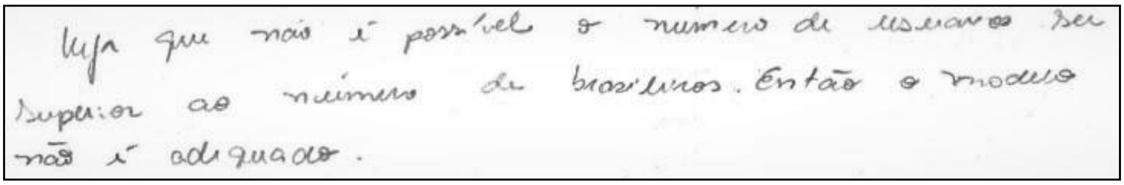
Discussões do Grupo G2:

*E3: 980 milhões de usuários de internet no Brasil? Impossível, ainda mais em 2038.*
*E7: quantas pessoas têm no Brasil hoje? Pesquisa na internet aí.*
*E3: 207 milhões.*
*E7: nossa, está errado. O Brasil nunca vai ter 980 milhões de habitantes.*
*E3: é, isso não está fazendo sentido mesmo.*

Discussões do Grupo G3:

*E4: mais de 1 bilhão de usuários de internet daqui a 21 anos. Será?*
*E6: sim. Significa que a população vai crescer bastante.*
*E4: mas 1 bilhão?*
*E12: olha, no mundo hoje tem 7,6 bilhões de pessoas.Um bilhão para o Brasil parece muito.*
*E6: eu acho que está certo.*

**Figura 10** – Interpretação do modelo à luz do fenômeno de G2

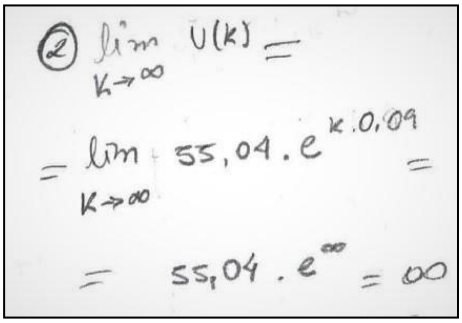

Veja que não é possível o número de usuários ser superior ao número de brasileiros. Então o modelo não é adequado.

**Fonte**: relatório dos estudantes.

Em todos os grupos foi possível perceber um “estranhamento” com relação à resposta obtidas pelos mesmos para a primeira situação-problema, referente ao número de usuários de internet no Brasil no ano de 2038. Com excessão do estudante E6 (G3), todos os demais julgaram a resposta inadequada para a situação.

Além disso, para responder a segunda situação-problema: *Quantas pessoas, no Brasil, terão acesso à internet daqui a muitos e muitos anos?,* os grupos fizeram o cálculo do limite da função obtida com o tempo (variável $k$) tendendo ao infinito (Figura 11). A resposta para tal situação, confirmou a conclusão dos estudantes de que o modelo inicialmente obtido não é adequado para a situação uma vez que, da forma como estava, indicava que a população cresceria infinitamente.

**Figura 11** - Primeira resposta para a situação 2 de G2




**Fonte**: relatório dos estudantes.

Ao fazerem a análise da função tendendo ao infinito, outra discussão foi iniciado no grupo G3:

Discussões do grupo G3:

*E6: Eu não faço ideia de como calcula isso.*
*E12: Vamos ver aqui: é euler elevado a um número muito grande* [infinito, o estudante faz um gesto com o braço indicando um crescimento infinito]. *Aí é esse número muito grande, vezes 55,04. Vai continuar sendo muito grande. Será que é assim que calcula? Vai dar igual a infinito.*
*E6: isso quer dizer que a população não parará de crescer nunca.*
*E12: isso.*
*E4: não faz sentido mesmo.*

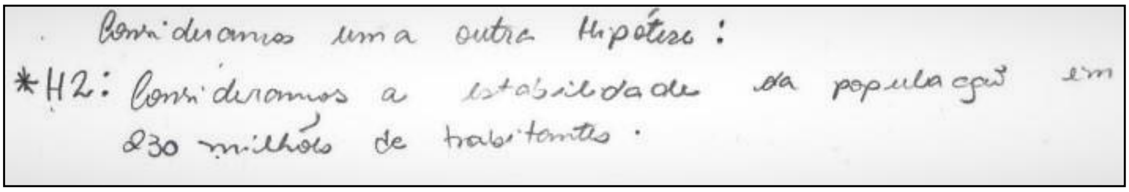
Este “estranhamento” que aconteceu dentro dos grupos são decorrentes de entendimentos que os intérpretes tiveram que se fundamentaram em suas experiências empíricas anteriores à atividade.

A partir dessas análises, e de discussões entre os grupos e o professor pesquisador, foi considerada necessária a elaboração de uma segunda hipótese, desta vez relacionada à população brasileira, conforme sinaliza o diálogo e a Figura 12.

Discussões do grupo G2:

*E3: será que a população irá crescer para sempre?*
*E5: acho que não. Porque por mais que sempre nasçam pessoas, outras morrem.*
*E3: faz sentido. E se a gente assumir que o máximo será 207 milhões?*
*E7: mas o número de pessoas que nascem nunca é igual ao número de pessoas que morrem...*
*E3: a gente precisava encontrar algo que diga qual será a população máxima do Brasil. Vou ver se acho algo na internet.*

**Figura 12** - Hipótese 2 elaborada por G2


Consideramos uma outra Hipótese:
*H2: Consideramos a estabilidade da população em 230 milhões de habitantes.

**Fonte**: relatório dos estudantes

A partir de buscas na internet, o grupo teve contato com uma reportagem publicada no Portal G1[19] que, citando uma pesquisa do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), afirma que a população brasileira atingirá um máximo de 228,4 milhões no ano de 2042. A partir disso, o grupo assumiu como hipótese que a população brasileira se estabilizará com 230 milhões de habitantes.

A discussão sobre a elaboração da segunda hipótese foi realizada pelo professor pesquisador com todos os grupos simultaneamente, sendo assim, o fato de haver uma reportagem publicada na internet a respeito da população máxima brasileira foi compartilhado com os demais grupos por G2.

Após definirem a segunda hipótese, o grupo buscou ajustar uma função exponencial com comportamento assintótico. Neste momento, os estudantes fazem o que Ärlebäck e Doerr (2015) chamam de ampliação do modelo. O grupo utiliza uma estrutura de modelo já conhecida por eles (exponencial) e o ampliam, neste caso, inibindo o crescimento do número de usuários (exponencial assintótico). Levar os alunos a ampliarem seus modelos conectando-os a outros é um dos princípios para o desenvolvimento de atividades de aplicação de modelos, conforme apresentado por Ärlebäck e Doerr (2015).

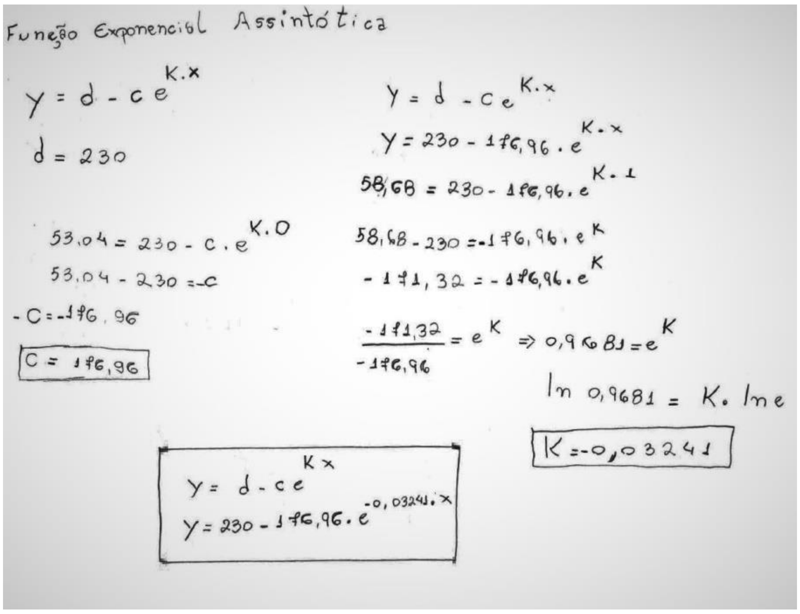
Vale destacar que todos os estudantes da turma já cursaram a disciplina de Funções do curso e, por esse motivo, já conheciam a função do tipo exponencial de

[19] Reportagem disponível em: <http://g1.globo.com/brasil/noticia/2013/08/populacao-do-brasil-atingira-maximo-de-2284-milhoes-em-2042-diz-ibge.html>. Acesso em 19.abr.2017.

crescimento assintótico.

Os procedimentos matemáticos adotados pelos grupos para a dedução de um segundo modelo constam no Quadro 4.

**Quadro 4 -** Procedimentos matemáticos adotados pelos grupos



Função Exponencial Assintótica

$y = d - c e^{K.x}$

$d = 230$

$53{,}04 = 230 - c . e^{K.0}$

$53{,}04 - 230 = -c$

$-c = -176{,}96$

$\boxed{c = 176{,}96}$

$y = d - c e^{K.x}$

$y = 230 - 176{,}96 . e^{K.x}$

$58{,}68 = 230 - 176{,}96 . e^{K.1}$

$58{,}68 - 230 = -176{,}96 . e^{K}$

$-171{,}32 = -176{,}96 . e^{K}$

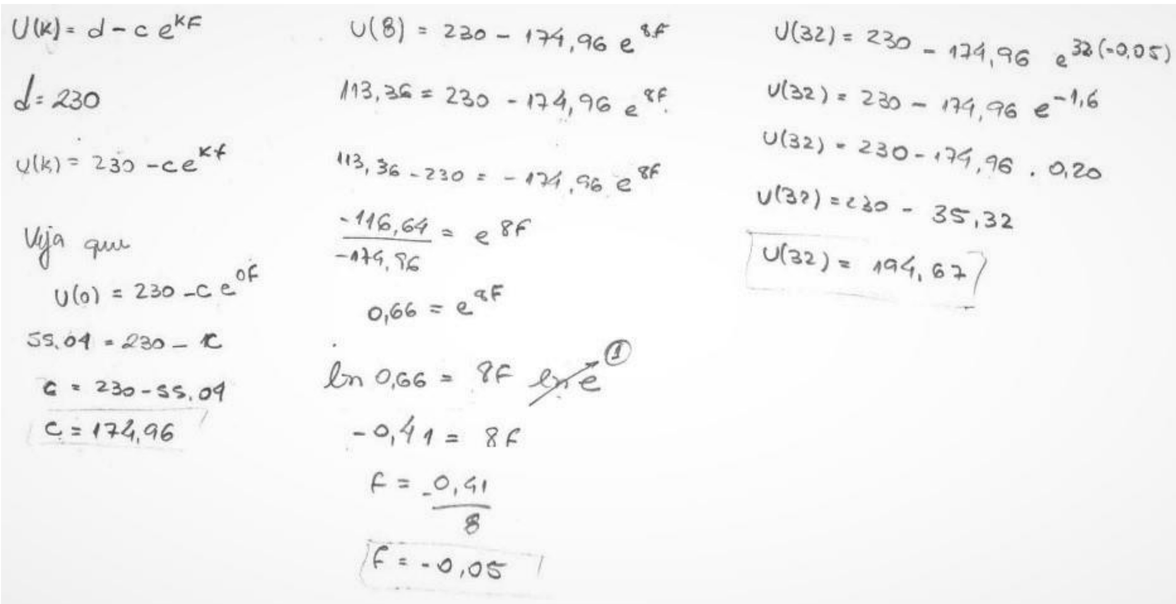
$\frac{-171{,}32}{-176{,}96} = e^{K} \Rightarrow 0{,}9681 = e^{K}$

$\ln 0{,}9681 = K . \ln e$

$\boxed{K = -0{,}03241}$

$\boxed{y = d - c e^{Kx} \quad y = 230 - 176{,}96 . e^{-0{,}03241 . x}}$

**Procedimentos adotados por G1**



$U(k) = d - c e^{kF}$

$d = 230$

$U(k) = 230 - c e^{kf}$

Veja que

$U(0) = 230 - c e^{0F}$

$55{,}04 = 230 - c$

$c = 230 - 55{,}04$

$\boxed{c = 174{,}96}$

$U(8) = 230 - 174{,}96\, e^{8F}$

$113{,}36 = 230 - 174{,}96\, e^{8F}$

$113{,}36 - 230 = -174{,}96\, e^{8F}$

$\frac{-116{,}64}{-174{,}96} = e^{8F}$

$0{,}66 = e^{8F}$

$\ln 0{,}66 = 8F \cancel{\ln e}$ ①

$-0{,}41 = 8F$

$F = \frac{-0{,}41}{8}$

$\boxed{F = -0{,}05}$

$U(32) = 230 - 174{,}96\; e^{32(-0{,}05)}$

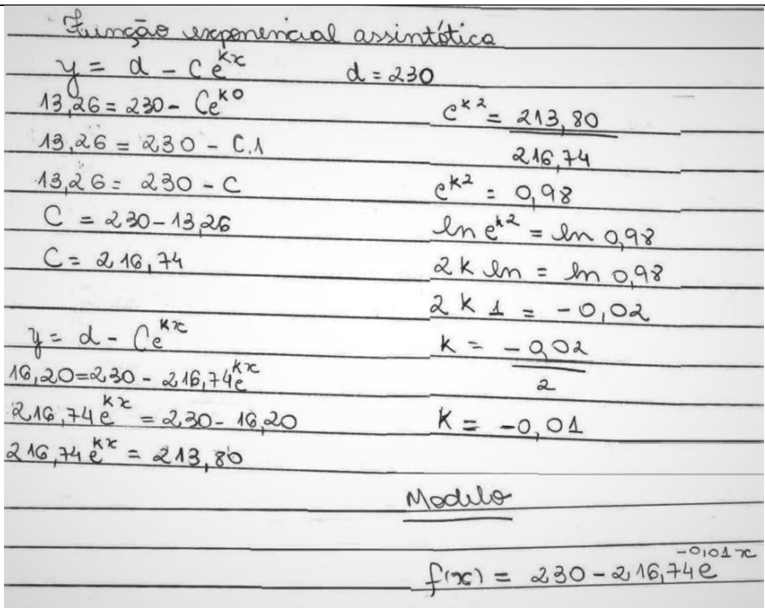
$U(32) = 230 - 174{,}96\; e^{-1{,}6}$

$U(32) = 230 - 174{,}96 . 0{,}20$

$U(32) = 230 - 35{,}32$

$\boxed{U(32) = 194{,}67}$

**Procedimentos adotados por E3 (G2)**



Função exponencial assintótica

$y = d - Ce^{kx}$ $\quad d = 230$

$13,26 = 230 - Ce^{k0}$

$13,26 = 230 - C.1$

$13,26 = 230 - C$

$C = 230 - 13,26$

$C = 216,74$

$y = d - Ce^{kx}$

$16,20 = 230 - 216,74e^{kx}$

$216,74e^{kx} = 230 - 16,20$

$216,74e^{kx} = 213,80$

$e^{k2} = \frac{213,80}{216,74}$

$e^{k2} = 0,98$

$\ln e^{k2} = \ln 0,98$

$2k \ln = \ln 0,98$

$2k1 = -0,02$

$k = \frac{-0,02}{2}$

$k = -0,01$

Modelo

$f(x) = 230 - 216,74e^{-0,01x}$

**Procedimentos adotados por E6 (G3)**

**Fonte**: relatórios dos estudantes.

O segundo modelo determinado por G1 foi $y = 230 - 176{,}96 \,.\, e^{-0{,}03241\,.\,x}$ em que $y$ representa o número de usuários de internet (em milhões) e $x$ a variável auxiliar que representa o tempo em anos. Já o grupo G2 definiu o modelo $U(k) = 230 - 174{,}96 \,.\, e^{-0{,}05\,.\,k}$, sendo $U(k)$ o número de usuários de internet no Brasil (em milhões) e $k$ a variável auxiliar que representa o tempo.

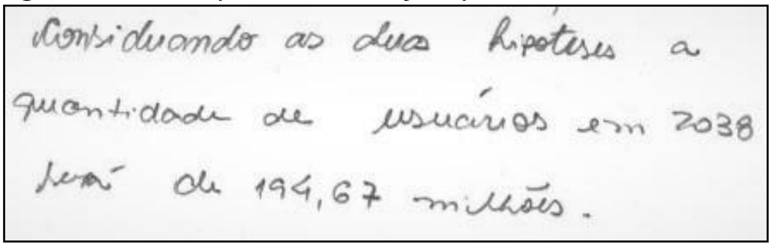
O grupo G3, por sua vez definiu o modelo $f(x) = 230 - 216{,}74 \,.\, e^{-0{,}01\,.\,x}$, sendo $f(x)$ o número de domicílios com acesso à internet no Brasil (em milhões) e $x$ a variável auxiliar que representa o tempo em anos. No entanto, aqui, foi evidenciado um equívoco no modelo deste grupo. Conforme falas transcritas anteriormente, o grupo G3 decidiu trabalhar com o número de domicílios e não o número de usuários de internet. No entanto, para obterem o segundo modelo, a hipótese do grupo foi de que a população brasileira se estabilizaria em 230 milhões de habitantes e, este valor foi utilizado pelo grupo como assíntota de sua função. Porém, apesar de a assíntota da função estar em número de usuários de internet, a variável dependente ($f(x)$) estava em número de domicílios.

Visto isso, o professor pesquisador alertou o grupo de que havia um equívoco com relação às unidades utilizadas no modelo e, para solucionar este problema, os integrantes do grupo informaram que, diferentes dos demais grupos, eles estavam assumindo que, no Brasil, haverá no máximo 230 milhões de domicílios.

Vale ressaltar aqui que, considerando que os modelos matemáticos são, para os intérpretes, signos que, mesmo que em partes, representam o fenômeno, estes podem ser tidos como signos de lei.

Todos os grupos fizeram as validações do segundo modelo de forma semelhante a validação anterior (Figura 5) e, tendo-os como válidos, responderam a primeira situação-problema concluindo que, em 2038, haverá no Brasil cerca de 194,67 milhões de usuários de internet, conforme Figura 13.

**Figura 13** - Resposta à situação-problema 1 de G2


Considerando as duas hipóteses a quantidade de usuários em 2038 será de 194,67 milhões.

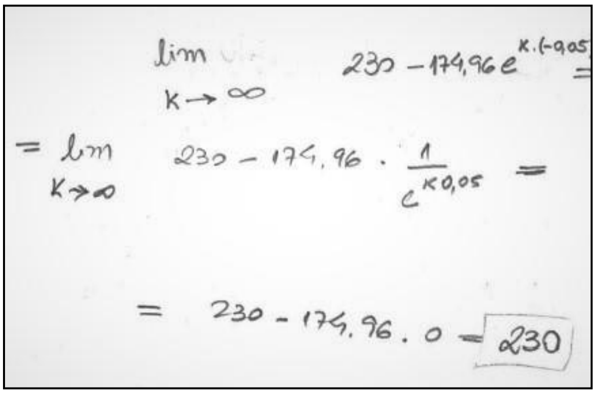
**Fonte**: relatório dos estudantes.

Para o grupo G1 em 2038 haverá cerca de 167,27 milhões de usuários de internet no Brasil e, para o grupo G3 este número será aproximadamente 290,45 milhões.

Para responder a situação-problema 2, assim como a anterior, os grupos analisaram os limites do segundo modelo obtido com o tempo tendendo ao infinito, conforme a transcrição do diálogo e a Figura 14.

*E10: Aqui a gente pode pensar igual o anterior: é um número elevado a outro muito grande.*
*E1: Então, mas aqui o elevado é negativo.*
*E2: Nesse caso a gente deixa ele positivo. Aí vai ficar 1 dividido por um número muito grande.*
*E10: Aí isso se aproxima de zero [apontando para o expoente negativo da função].*

**Figura 14** - Cálculo para responder à situação-problema 2 de G2




**Fonte**: relatório dos estudantes.

Com essa análise, os grupos concluíram que, com o passar dos anos, a tendência é que toda a população brasileira tenha acesso à internet. Com isso, os alunos fizeram uma previsão a respeito do comportamento do fenômeno. Tal ação, também é um dos princípios que Ärlebäck e Doerr (2015) apresentam para atividades de aplicação de modelos. Além disso, com a análise do limite da função, os intérpretes buscaram olhar para aquilo cujo o fenômeno tende.

Como já citado, com relação ao Cálculo Diferencial e Integral, buscamos explorar (mesmo que intuitivamente) a questão de limites para, posteriormente, apresentar aos alunos a definição de derivadas.

Após a conclusão da atividade, foi realizada com os estudantes uma discussão a respeito do desenvolvimento das mesmas com o intuito de sintetizar os conceitos matemáticos explorados, as principais dificuldades, os padrões encontrados, os procedimentos matemáticos adotados, dentre outros aspectos. Tais discussões, reflexões e esclarecimentos está em conformidade com o proposto por Lesh et al. (2003) no que diz respeito a uma atividade de aquecimento em uma sequência de atividades de modelagem matemática.

### 5.2.2 Atividade 2: Qual tamanho de cabo elétrico usar? (G2)

Diferente da atividade anterior, nesta, o intuito foi trabalhar a ideia de derivada e suas aplicações, tanto que, na data de sua realização (01.07.17 - conforme Quadro 2) os estudantes já haviam estudado com a professora regente da disciplina a definição formal do conceito de derivada e algumas das principais regras de derivação de uma função.

Assim, esta atividade teve como intuito permitir que os alunos reconhecessem algumas conexões entre o conhecimento de derivadas e situações cotidianas, portanto, esta pode ser caracterizada como uma das atividades de acompanhamento, em referência ao esquema de uma sequência de atividades de modelagem matemática proposto por Lesh et al. (2003), apresentado na figura 2 deste texto.

Esta atividade, proposta pelo professor pesquisador, refere-se à *Escolha do cabo de energia em função da bitola*, e, inicialmente a mesma foi apresentada aos estudantes por meio do texto “Instalação Elétrica segura com a Norma Técnica ABNT 5410”, conforme Quadro 5. O texto completo encontra-se no Apêndice D.

**Quadro 5 -** Texto introdutório da Atividade 2

**Instalação Elétrica segura com a Norma Técnica ABNT NBR 5410**[20]

Tratando-se de eletricidade, o essencial é a segurança. Uma instalação elétrica mais segura e com maior qualidade é o que garante a Norma Técnica Brasileira Regulamentadora (NBR) 5410:2004. Esta Norma estabelece as condições a que devem satisfazer as instalações elétricas de baixa tensão, a fim de garantir a segurança de pessoas e animais, o funcionamento adequado da instalação e a conservação dos bens. Esta NBR 5410 determina, dentre outras coisas, a seção nominal (bitola) dos cabos, ou condutores elétricos, a ser utilizada nas instalações elétricas. Tal seção é definida de acordo com a carga elétrica que passará por este condutor.

Além da proteção, a escolha do cabo ideal pode gerar economia, uma vez que, dentre outras coisas, ela poderá minimizar o desperdício de energia. Em qualquer circuito elétrico, a queda de tensão elétrica é um fator presente. Esta queda trata-se de uma anomalia causada pelas distâncias percorridas pela corrente elétrica em determinado circuito: quanto maior for o comprimento do condutor, maior será a queda de tensão, já que há o aumento de resistência elétrica devido a quantidade maior de material utilizado para fazer maiores condutores.

**Fonte**: Portal da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).

Além do texto introdutório, os grupos tiveram acesso também aos dados coletados pelo professor pesquisador em um laboratório de Controle e Automação que simula a queda de tensão de um condutor elétrico de acordo com a sua bitola (seção nominal) conforme mostra a Tabela 6.

[20] Reportagem publicada no Portal da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) em 05.01.2017. Disponível em: <http://abnt.org.br/paginampe/noticias/234-instala%C3%A7%C3%A3o-el%C3%A9trica-mais-segura-com-a-norma-t%C3%A9cnica-abnt-nbr-5410 (Adaptado)>. Acesso em 07.mar.2017.

**Tabela 6 -** Queda da tensão de acordo com a bitola do cabo

| Bitola do cabo (mm²) | Queda de tensão por metro de cabo (Volt - V) |
|---|---|
| 1,5 | 0,023 |
| 2,5 | 0,017 |
| 4,0 | 0,012 |
| 6,0 | 0,02 |
| 10,0 | 0,095 |
| 16,0 | 0,35 |
| 25,0 | 0,98 |
| 35,0 | 2 |
| 50,0 | 4,5 |
| 70,0 | 9,5 |

**Fonte:** Dados coletados pelo pesquisador.

A partir da discussão do grupo com relação aos dados, ficou definido o problema que deveria ser investigado nesta atividade: *Para a montagem de uma extensão elétrica (para uso residencial) quais seriam as bitolas dos cabos elétricos que apresentariam a menor e a maior queda de tensão?*

Com o diálogo iniciado entre os integrantes dos grupos G1 e G2, após a leitura do texto introdutório que compunha a atividade, foi possível notar que alguns termos abordados não eram familiares a eles, conforme indicam as transcrições:

Discussões do Grupo G1:

*E1: Queda de tensão é o valor da tensão que cai será?*
*E2: Não, tem alguma coisa ver com diferença de potencial, mas não é necessariamente a tensão que cai. Já estudei isso alguma vez.*

*E10:Olha, na internet está assim: queda de tensão elétrica é uma anomalia causada pelas distâncias percorridas pela corrente elétrica, ou seja, quanto maior o condutor maior será a sua queda de tensão.*

Discussões do Grupo G2:

*E3: os valores da tabela estão dando a queda de tensão, minto, estão dando o valor da oscilação;*
*E7: mas a oscilação não é a queda de tensão?*
*E3: sim, pelo que eu vi é a mesma coisa.*
*E7: será? Porque olha aqui... A oscilação depende do tamanho do cabo e da distância da fonte de energia.*

*E3: então quanto maior o tamanho do cabo, maior a queda de tensão.*
*E7: não, isso não faz sentido. Porque imagina um cabo de 20km... Perderia toda energia. É isso?*
*E3: aqui no texto consta que é a seção nominal.*
*E7: pesquisa aí direitinho o que significa esse termo.*

Conforme diálogos, assim como na atividade anterior, alguns termos aqui também pareciam desconhecidos por alguns integrantes dos grupos G1 e G2, ou seja, têm-se aqui indícios daquilo que o signo imediatamente expressa que, neste caso, é o fato de os estudantes desconhecerem alguns termos de elétrica. E, a reação dos estudantes de efetuarem pesquisas complementares para a atividade pode ser caracterizada como um efeito semiótico imediato do representâmen, uma vez que tal pesquisa resulta daquilo que o signo imediatamento expressou.

Após ambos os grupos efetuarem algumas pesquisas sobre o termo desconhecido, começaram a pensar em estratégias para resolverem o problema definido na atividade.

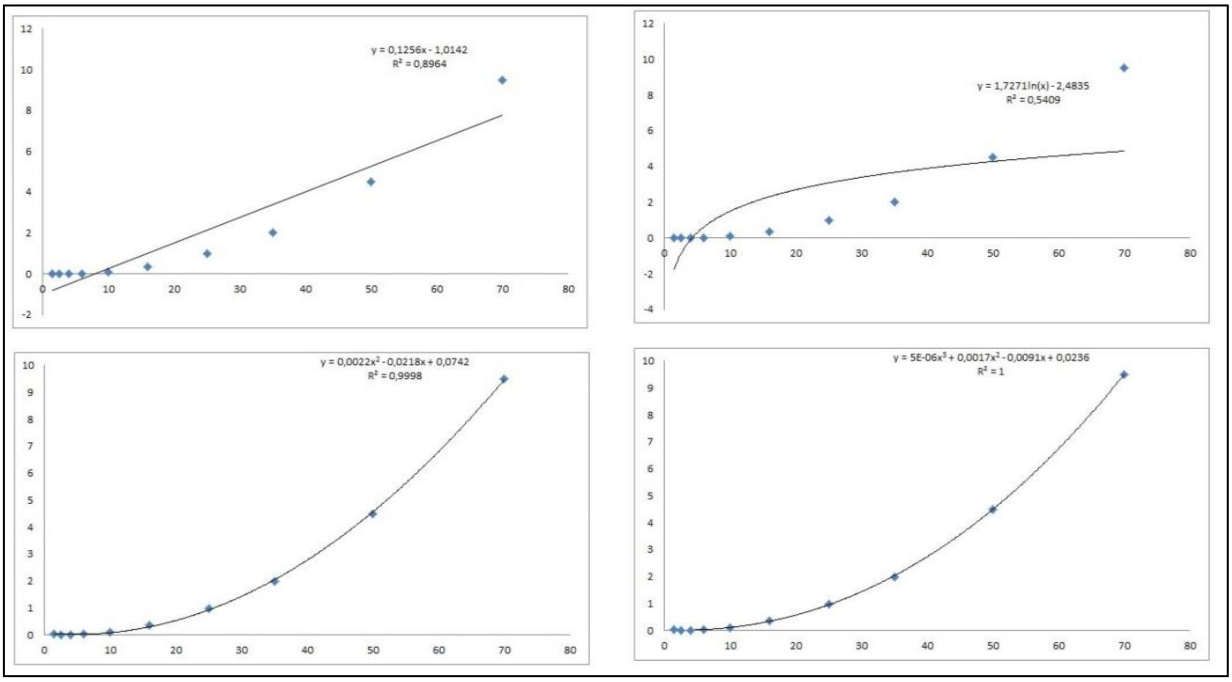
Discussões do grupo G2:

*E3: acho que o único jeito de resolver essa situação aqui é tentar encontrar a relação entre a queda e a bitola. Vamos colocar esses dados no computador e ver quais as funções que ele sugere.*
*E5: mas será que pode usar a função que o software dá? A gente não tem que encontrar?*
*E3: Não, mas aí a gente só vê as opções do computador e depois a gente encontra o modelo à mão. No computador é só pra gente ter uma ideia de qual função vamos ter que encontrar.*

Assim, com a intenção de encontrar a relação entre a queda de tensão e a bitola do cabo, o grupo G2 decidiu analisar os dados da Tabela 6 a partir de um *software*, para que, observando o gráfico de dispersão dos dados e a linha de tendência, definirem qual o comportamento dos dados da atividade.

Na Figura 15 estão os signos que os estudantes tiveram acesso a partir da análise dos dados em um *software* computacional.

**Figura 15 -** Análise da dispersão dos dados por meio do *software* (G2)




**Fonte**: Relatório dos estudantes

Ter as duas representações dos dados (gráfico e tabela) pode permitir aos estudantes contrastar pontos fortes e fracos das diferentes representações. Tal contraste é um dos princípios para desenvolvimento de atividades de exploração de modelos conforme discutido por Ärlebäck e Doerr (2015).

A partir dos dados da Figura 15 os estudantes iniciaram outra discussão a fim de determinarem qual dos comportamentos dos dados apresentados pelo *software* seria mais adequado para a situação-problema explorada.

*E3: a função do terceiro grau é a ideal.*
*E7: será? Mas olha o valor do $x^3$* [referindo-se ao coeficiente]*... é muito pequeno. Acho que não compensa.*
*E7: sim, vai ser no máximo uma função de terceiro grau... O $R^2$ já está igual a 1.*
*E3: a de segundo grau está bem perto de 1 também* [referindo-se aqui ao coeficiente de Pearson ($R^2$)]. *Podemos encontrar uma assim então.*

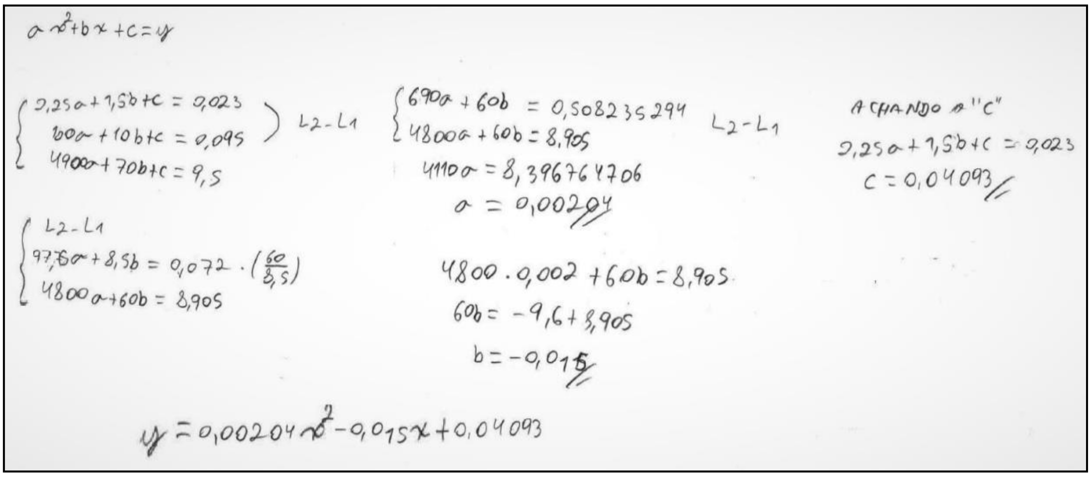
Uma análise interpretativa das funções representadas na Figura 15 é feita pelo grupo e os mesmos decidiram determinar, por meio de ajuste de curva, uma função polinomial de grau 2 que possibilite responder a situação-problema proposta, ou seja, a primeira hipótese formulada pelo grupo foi de que a situação poderia ser representada por uma função de segundo grau.

Sobre isso, a partir da fala de E7 *(vai ser no máximo uma função de terceiro grau... O R² já está igual a 1)* podemos inferir que os interpretantes que este estudante gerou se localizam em um limite pensável para a situação - todas as funções polinomiais que tiverem um grau maior que 3, não representariam a situação. Tais conclusões podem evidenciar aquilo que o estudante conhece a respeito de análise de dispersão de dados, por exemplo, seria o coeficiente de Pearson ($R^2$ a que o intérprete se referiu) suficiente para determinar a função mais adequada? Essas características sobre dispersão de dados foram retomadas pela professora regente da disciplina em aulas posteriores ao desenvolvimento desta atividade.

Ainda com relação à elaboração da hipótese, a mesma se deu em decorrência dos entendimentos sobre a situação-problema gerados pelos intérpretes a partir da análise dos signos representados na Figura 15, portanto, trata-se de uma ação ulterior à impressão do signo.

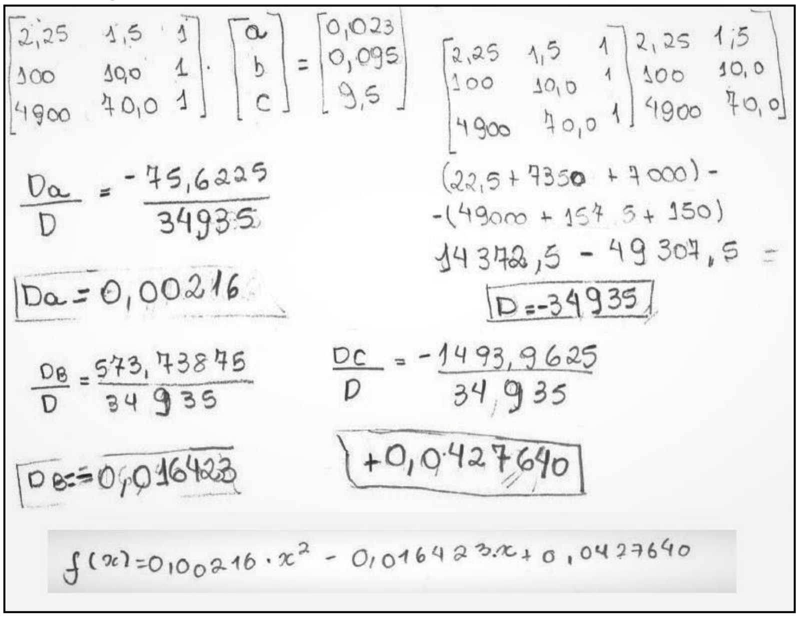
Os três grupos optaram por ajustar uma função polinomial de grau 2 com a resolução de sistema linear para definirem um modelo que representasse a situação explorada. O procedimento matemático adotado por G1 para resolver o sistema foi o escalonamento, enquanto G2 e G3 trabalharam com a regra de Cramer, conforme Figura 16 e Figura 17.

**Figura 16 -** Procedimentos adotados por E2 (G1)




**Fonte**: Relatório dos estudantes.

**Figura 17 -** Procedimentos adotados por E7 (G2)




**Fonte**: Relatório dos estudantes.

Os modelos deduzidos pelos grupos para a situação-problema estão descritos na Quadro 6. No entanto, antes de G2 definir tal modelo, os estudantes tinham definido, por meio de seus procedimentos matemáticos, a seguinte função polinomial de segundo grau: $f(x) = 2{,}16x^2 - 16{,}423x + 42{,}76$, sendo $f(x)$ a queda de tensão em Volts (V) e $x$ o tamanho da bitola do cabo em mm². Com este modelo, iniciou-se a discussão de G2 conforme transcrição:

*E3: essa função não é a mais adequada para a situação não, a queda de tensão vai ficar muito alta. Não faz sentido esse valor para uma instalação residencial.*
*E7: mas quais valores você está aplicando na função? Usa os da tabela. Professor, essa função não deu certo.*
*PP: mas esses coeficientes estão corretos? É a solução para o sistema linear de vocês?*
*E7: vamos confirmar.*

Perceber que a função não era adequada por que a queda de tensão estava muito alta mostra um entendimento de E3 que se fundamenta em algumas de suas experiências empíricas anteriores à atividade. Ao refazerem os cálculos, os mesmos perceberam que não estavam considerando as potências decimais indicadas no visor da calculadora. Fazendo essa correção, obtiveram o modelo do Quadro 6.

**Quadro 6 -** Modelos matemáticos obtidos pelos grupos na Atividade 2

$$y = 0{,}00204x^2 - 0{,}015x + 0{,}04093$$

**Modelo obtido por G1 e G3 para A2**

$$f(x) = 0{,}00216 \cdot x^2 - 0{,}016423 \cdot x + 0{,}0427640$$

**Modelo obtido por G2 para A2**

**Fonte**: relatórios dos estudantes.

Após a obtenção dos modelos $f(x) = 0{,}00216x^2 - 0{,}016423x + 0{,}0427640$, e $f(x) = 0{,}00204x^2 - 0{,}015x + 0{,}04093$, em que $f(x)$ representa o valor da queda de tensão da corrente elétrica e $x$ representa a bitola do cabo elétrico, os grupos fizeram a validação dos mesmos, conforme exemplificado na Figura 18.

**Figura 18 -** Validação do modelo matemático de E7 (G2)

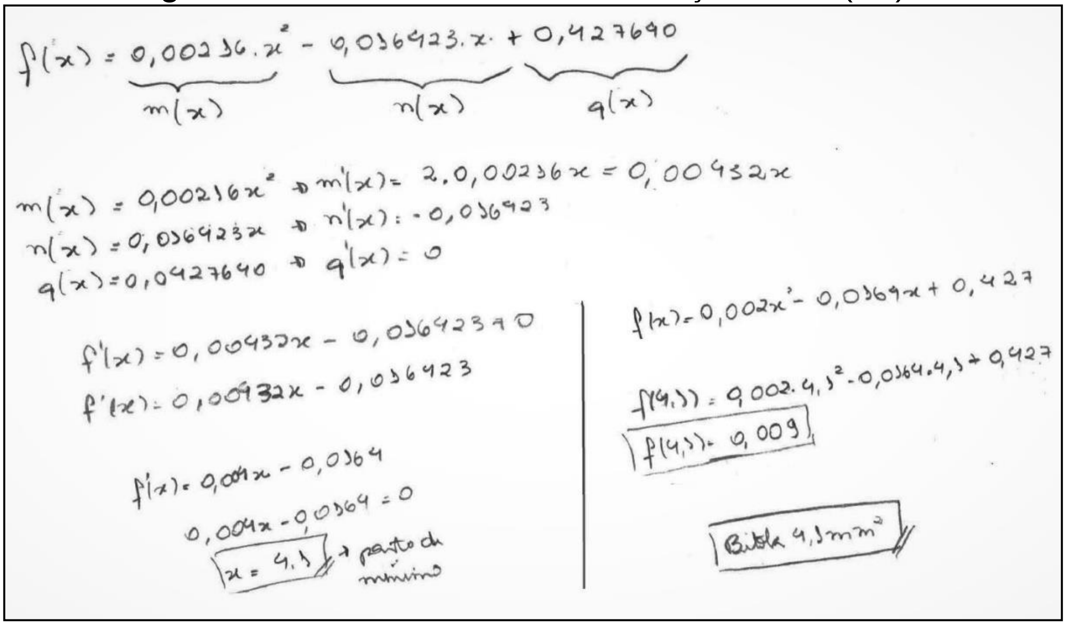
| Bitola do cabo ($mm^2$) | Queda de tensão por metro de cabo (V) | Validação |
|---|---|---|
| 1,5 | 0,023 | 0,0229 |
| 2,5 | 0,17 | 0,0152 |
| 4,0 | 0,012 | 0,011632 |
| 6,0 | 0,021 | 0,021986 |
| 10,0 | 0,095 | 0,094514 |
| 16,0 | 0,35 | 0,332956 |
| 25,0 | 0,98 | 0,972189 |
| 35,0 | 2 | 2,113959 |
| 50,0 | 4,5 | 4,621619 |
| 70,0 | 9,5 | 9,4771 |

**Fonte**: Relatório dos estudantes

Vale ressaltar aqui que, assim como na atividade anterior, os modelos para os intérpretes são signos de lei uma vez que representam a situação, mesmo que em partes. Além disso, o método para validação do modelo desta atividade foi bastante semelhante ao utilizado na atividade anterior o que começa a evidenciar um tipo de norma ou padrão sígnico no comportamento dos intérpretes.

Como já citado, diferentemente da anterior, nesta atividade o intuito era explorar com os estudantes a ideia de derivada e suas aplicações, por isso, tendo validado os modelos matemáticos obtidos, os mesmos foram introduzidos à teoria do cálculo de máximos e mínimos de uma função por meio do uso da análise da função derivada (Figura 19) para, a partir do modelo, responderem à situação-problema determinada no início da atividade: *Para a montagem de uma extensão elétrica (para uso residencial) quais seriam as bitolas dos cabos elétricos que apresentariam a menor e a maior queda de tensão?*

**Figura 19 –** Análise da derivada da função de E5 (G2)



$$f(x) = \underbrace{0{,}00236 . x^2}_{m(x)} - \underbrace{0{,}036423 . x}_{n(x)} + \underbrace{0{,}427640}_{q(x)}$$

$$m(x) = 0{,}00216x^2 \Rightarrow m'(x) = 2 . 0{,}00236x = 0{,}00432x$$

$$n(x) = 0{,}036423x \Rightarrow n'(x) = -0{,}036423$$

$$q(x) = 0{,}0427640 \Rightarrow q'(x) = 0$$

$$f'(x) = 0{,}00432x - 0{,}036423 + 0$$

$$f'(x) = 0{,}00432x - 0{,}036423$$

$$f'(x) = 0{,}004x - 0{,}0364$$

$$0{,}004x - 0{,}0364 = 0$$

$$\boxed{x = 4{,}5} \rightarrow \text{ponto de mínimo}$$

$$f(x) = 0{,}002x^2 - 0{,}0364x + 0{,}427$$

$$f(4{,}5) = 0{,}002 . 4{,}5^2 - 0{,}0364 . 4{,}5 + 0{,}427$$

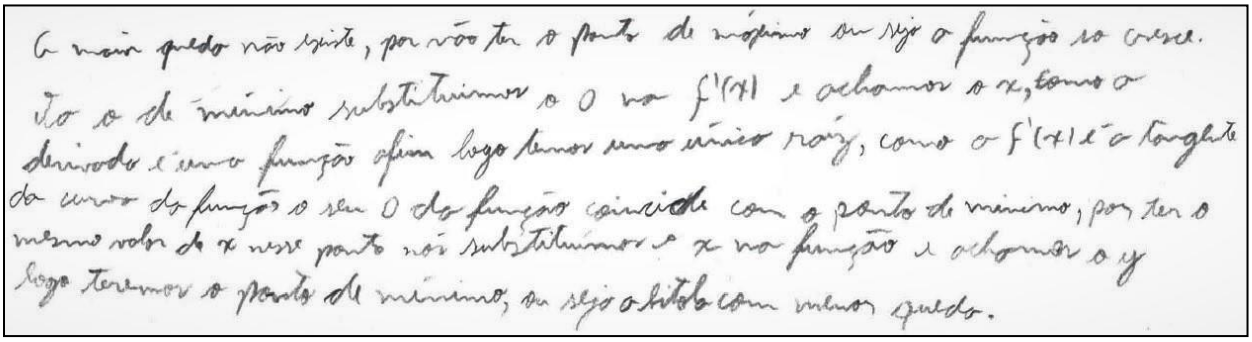
$$\boxed{f(4{,}5) = 0{,}009}$$

$$\boxed{\text{Bitola } 4{,}5\,mm^2}$$

**Fonte**: relatório dos estudantes.

Na Figura 20, o estudante E2 (G1) detalha como fez a análise da derivada da função.

**Figura 20 -** Interpretação de E2 (G1) do modelo a partir da análise da derivada

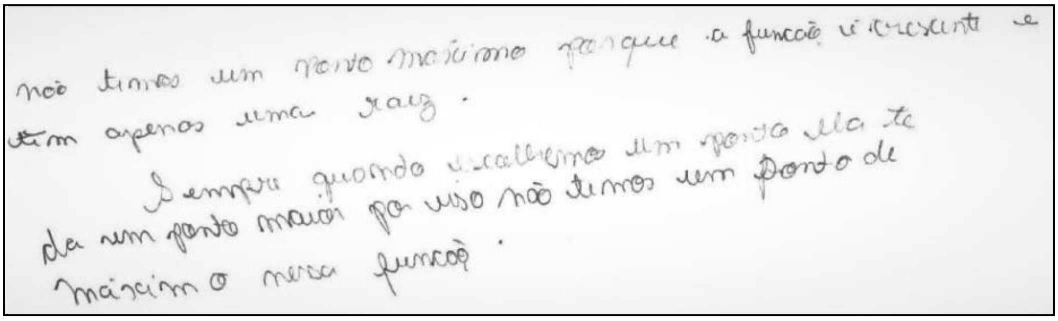

A maior queda não existe, por não ter o ponto de máximo ou seja a função só cresce.
Já o de mínimo substituímos o 0 na f'(x) e achamos o x, como a
derivada é uma função afim logo temos uma única raiz, como a f'(x) é a tangente
da curva da função o seu 0 da função coincide com o ponto de mínimo, por ter o
mesmo valor de x nesse ponto nós substituímos o x na função e achamos o y
logo teremos o ponto de mínimo, ou seja a bitola com menor queda.

**Fonte**: Relatório dos estudantes

Transcrição da Figura 20: *A maior queda não existe, por não ter o ponto de máximo, ou seja, a função só cresce. Já o* [ponto] *de mínimo, substituímos o 0 na f'(x) e achamos o x, como a derivada é uma função afim, logo temos uma única raiz, como a f'(x) é a tangente da curva da função, o seu 0 da função coincide com o ponto de mínimo, por ter o mesmo valor de x nesse ponto, nós substituímos o x na função e achamos o y, logo, teremos o ponto de mínimo, ou seja, a bitola com menor queda.*

Assim como G1, a partir da análise da derivada primeira da função, os demais grupos concluíram que a bitola que apresentaria a menor queda de tensão seria a de 4,1 mm² e que não é possível determinar a bitola que apresentaria a menor queda. Na Figura 21 é apresentada a resposta do grupo G2 e na Figura 22, a resposta de G3.

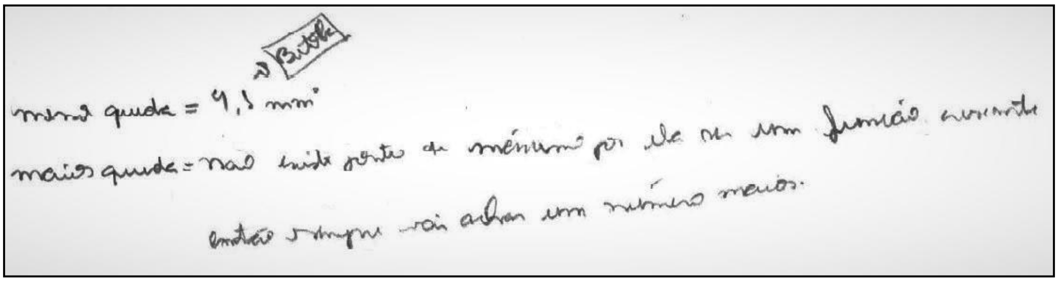
**Figura 21 -** Interpretação de E7 (G2) do modelo a partir da análise da derivada


não temos um ponto máximo porque a funcão é crescente e
tem apenas uma raiz.
Sempre quando escolhemos um ponto ela te
da um ponto maior por isso não temos um ponto de
máximo nessa funcão.

**Fonte**: Relatório dos estudantes

Transcrição da Figura 21: *Não temos um ponto de máximo porque a função é crescente e tem apenas uma raiz* [referindo-se à derivada da função]*. Sempre* *quando escolhemos um ponto ela terá um ponto maior, por isso, não temos um ponto de máximo nessa função.*

**Figura 22 -** Interpretação de E12 (G3) do modelo a partir da análise da derivada



**Fonte**: Relatório dos estudantes

Transcrição da Figura 22: *menor queda = 4,1 mm² (bitola); maior queda = não existe ponto de máximo por ela ser uma função crescente então sempre vai achar um número maior.*

Além dos *entendimentos gerados* nos intérpretes conforme expresso nas figuras 21 e 22, a análise da derivada primeira da função também gerou alguns outros entendimentos nos intérpretes, conforme transcrição do diálogo abaixo do grupo G2.

*E5: Será que é isso mesmo? Vê lá no gráfico se esse é o menor ponto da função.*
*E7: É esse sim.*
*E5: Que legal, fica bem mais fácil... não é sempre que a gente pode usar computador, dá pra achar o máximo assim né. Será que dá pra achar essa derivada aplicando aquele outro limite?*

As colocações de E5 mostram que neste momento da atividade, o estudante tenta estabelecer algumas relações entre a aplicação da derivada e sua definição (limite).

### 5.2.3 Atividade 3: Perda de Água na Distribuição em Uraí-PR (G2)

Nesta terceira atividade, o grupo G2 ficou responsável por toda a elaboração da mesma, desde a escolha do tema até a obtenção, validação e interpretação do modelo obtido.

Diferente das atividades anteriores, com relação à sequência de atividades, esta tinha como intuito a inserção formal dos teoremas de derivadas. Assim, no decorrer do desenvolvimento da atividade, a professora regente da disciplina solicitou que os estudantes, em algum momento, aplicassem os conhecimentos de derivada estudados em aula na resolução da atividade.

Esta atividade, assim como as posteriores (A4 e A5), foi solicitada no início do semestre letivo e os grupos deveriam apresentar o relatório da atividade no final do semestre como requisito parcial para aprovação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

A apresentação do relatório da atividade, tinha como objetivo, além de esclarecer algumas questões referentes ao desenvolvimento da atividade, discutir semelhanças estruturais entre a atividade desenvolvida sob responsabilidade dos grupos e as demais atividades trabalhadas em sala de aula. Esta discussão vai ao encontro do que Lesh et al. (2003) propõem ao abordarem as sequências de atividades de modelagem matemática.

De acordo com o relatório da atividade, a escolha do tema *Perda de Água na Distribuição em Uraí-PR* se deu pelos seguintes motivos: problemas mundias sobre o disperdício de água; facilidade de o grupo conseguir dados sobre a distribuição e perda de água na região norte do Paraná, considerando que um dos integrantes do grupo trabalha na empresa responsável pela distribuição de água nesta região; fato de a cidade de Uraí ser uma das cidades mais problemáticas, com relação à perda de água na distribuição, da região segundo dados extraídos de documentos da SANEPAR-PR[21].

Dada a escolha do tema, no relatório do grupo é apresentado um breve relato histórico da cidade de Uraí, uma descrição referente à SANEPAR-PR e alguns dados gerais sobre vazamentos na tubulação da cidade escolhida, tais dados continham informações a respeito da água que entra no sistema hidráulico da cidade, o consumo faturado e a perda de água registrada.

A situação-problema determinada pelo grupo foi *elaborar um modelo que apresente previsões da perda de água ao decorrer de muitos anos*. Para isso, a primeira hipótese elaborada pelo grupo foi a descrita na Figura 23.

[21] Companhia de Saneamento do Paraná

**Figura 23 -** Hipótese 1 da Atividade 3 elaborada por G2

Hipótese: O volume perdido nunca ultrapassará 40% do volume distribuído.

**Fonte**: relatório dos estudantes.

A hipótese foi elaborada devido a um critério imposto pela empresa de que, considerando os problemas nas instalações residenciais, problemas na tubulação da própria empresa e demais fatores de desperdício de água, a perda com relação ao volume de água distribuído não deve ultrapassar 40%.

Tendo determinada a situação-problema a ser estudada, o grupo apresentou a coleta dos dados por meio de 7 tabelas (Figura 24) contendo o volume de água presente, ou seja, distribuído (VP), o volume de água micromedido (VM) e o volume de água perdido mensalmente, durante os anos de 2010 a 2016.

**Figura 24 -** Dados da Atividade 3 coletados por G2

Tabela 1 - Relação de perda de água em 2010

| Referencia | Quantidade de dias | Água Totais Mensal (Ligações ) | VP | VM | PERDA MENSAL |
|---|---|---|---|---|---|
| Jan/2010 | 31 | 3135 | 55641,33 | 41547,56 | 14093,77 |
| Fev/2010 | 28 | 3140 | 49599,19 | 34833,90 | 14765,28 |
| Mar/2010 | 31 | 3146 | 51784,36 | 37138,88 | 14645,48 |
| Abr/2010 | 30 | 3148 | 50236,41 | 38851,67 | 11384,74 |
| Mai/2010 | 31 | 3163 | 50921,86 | 35744,24 | 15177,62 |
| Jun/2010 | 30 | 3187 | 49214,29 | 32458,64 | 16755,65 |
| Jul/2010 | 31 | 3195 | 51876,80 | 35370,95 | 16505,85 |
| Ago/2010 | 31 | 3200 | 53656,29 | 35319,17 | 18337,12 |
| Set/2010 | 30 | 3213 | 53144,63 | 39787,86 | 13356,76 |
| Out/2010 | 31 | 3226 | 51864,11 | 37549,25 | 14314,86 |
| Nov/2010 | 30 | 3231 | 53771,92 | 38520,95 | 15250,97 |
| Dez/2010 | 31 | 3238 | 56691,49 | 37715,03 | 18976,46 |

Fonte: Arquivos SANEPAR

Tabela 2 - Relação de perda de água em 2011

| Referencia | Quantidade de dias | Água Totais Mensal (Ligações ) | VP | VM | PERDA MENSAL |
|---|---|---|---|---|---|
| Jan/2011 | 31 | 3245 | 55827,21 | 41489,40 | 14337,81 |
| Fev/2011 | 28 | 3253 | 50927,80 | 37538,45 | 13389,35 |
| Mar/2011 | 31 | 3267 | 57713,71 | 37405,65 | 20308,06 |
| Abr/2011 | 30 | 3282 | 53327,91 | 38740,07 | 14587,83 |
| Mai/2011 | 31 | 3289 | 52976,88 | 35994,59 | 16982,29 |
| Jun/2011 | 30 | 3295 | 48969,30 | 36268,07 | 12701,24 |
| Jul/2011 | 31 | 3300 | 51677,87 | 34051,58 | 17626,29 |
| Ago/2011 | 31 | 3313 | 53074,86 | 34924,16 | 18150,70 |
| Set/2011 | 30 | 3317 | 54418,04 | 38528,28 | 15889,76 |
| Out/2011 | 31 | 3317 | 56896,24 | 39799,19 | 17097,05 |
| Nov/2011 | 30 | 3324 | 53270,42 | 38649,48 | 14620,95 |
| Dez/2011 | 31 | 3330 | 60647,63 | 40267,96 | 20379,67 |

Fonte: Arquivos SANEPAR

Tabela 3 - Relação de perda de água em 2012

| Referencia | Quantidade de dias | Água Totais Mensal (Ligações ) | VP | VM | PERDA MENSAL |
|---|---|---|---|---|---|
| Jan/2012 | 31 | 3343 | 55648,85 | 42594,20 | 13054,65 |
| Fev/2012 | 28 | 3344 | 53778,48 | 38493,05 | 15285,42 |
| Mar/2012 | 31 | 3354 | 59980,52 | 40793,16 | 19187,36 |
| Abr/2012 | 30 | 3362 | 55231,94 | 39099,39 | 16132,56 |
| Mai/2012 | 31 | 3368 | 56678,93 | 36714,03 | 19964,90 |
| Jun/2012 | 30 | 3375 | 54934,20 | 35327,14 | 19607,06 |
| Jul/2012 | 31 | 3376 | 57959,54 | 34171,23 | 23788,31 |
| Ago/2012 | 31 | 3393 | 64110,09 | 39154,37 | 24955,72 |
| Set/2012 | 30 | 3418 | 60878,00 | 43175,49 | 17702,51 |
| Out/2012 | 31 | 3447 | 62844,74 | 41199,78 | 21644,95 |
| Nov/2012 | 30 | 3455 | 65546,19 | 41786,50 | 23759,69 |
| Dez/2012 | 31 | 3459 | 64285,93 | 39820,56 | 24465,37 |

Fonte: Arquivos SANEPAR

Tabela 4 - Relação de perda de água em 2013

| Referencia | Quantidade de dias | Água Totais Mensal (Ligações ) | VP | VM | PERDA MENSAL |
|---|---|---|---|---|---|
| Jan/2013 | 31 | 3468 | 62878,20 | 44083,66 | 18794,55 |
| Fev/2013 | 28 | 3484 | 56950,86 | 40788,44 | 16162,42 |
| Mar/2013 | 31 | 3489 | 64975,44 | 36906,01 | 28069,42 |
| Abr/2013 | 30 | 3498 | 64395,38 | 38035,50 | 26359,88 |
| Mai/2013 | 31 | 3508 | 67284,56 | 37393,00 | 29891,56 |
| Jun/2013 | 30 | 3512 | 63268,68 | 35341,96 | 27926,72 |
| Jul/2013 | 31 | 3511 | 67528,22 | 34326,27 | 33201,95 |
| Ago/2013 | 31 | 3526 | 66753,17 | 38497,57 | 28255,60 |
| Set/2013 | 30 | 3540 | 59690,77 | 41399,95 | 18290,83 |
| Out/2013 | 31 | 3544 | 58492,69 | 38789,68 | 19703,01 |
| Nov/2013 | 30 | 3548 | 61065,69 | 42004,42 | 19061,28 |
| Dez/2013 | 31 | 3558 | 67780,33 | 40744,08 | 27036,25 |

Fonte: Arquivos SANEPAR

Tabela 5 - Relação de perda de água em 2014

| Referencia | Quantidade de dias | Água Totais Mensal (Ligações ) | VP | VM | PERDA MENSAL |
|---|---|---|---|---|---|
| Jan/2014 | 31 | 3558 | 66111,52 | 47648,74 | 18462,78 |
| Fev/2014 | 28 | 3565 | 59601,52 | 44488,78 | 15112,75 |
| Mar/2014 | 31 | 3574 | 64089,90 | 39165,68 | 24924,22 |
| Abr/2014 | 30 | 3573 | 63379,30 | 37435,04 | 25944,27 |
| Mai/2014 | 31 | 3581 | 62434,81 | 39279,02 | 23155,78 |
| Jun/2014 | 30 | 3584 | 61067,06 | 35328,92 | 25738,14 |
| Jul/2014 | 31 | 3587 | 61733,24 | 36405,90 | 25327,34 |
| Ago/2014 | 31 | 3597 | 63117,42 | 38542,39 | 24575,03 |
| Set/2014 | 30 | 3610 | 62069,98 | 38714,00 | 23355,98 |
| Out/2014 | 31 | 3624 | 68287,18 | 40204,55 | 28082,63 |
| Nov/2014 | 30 | 3634 | 61052,29 | 44750,53 | 16301,76 |
| Dez/2014 | 31 | 3644 | 64270,87 | 37968,33 | 26302,54 |

Fonte: Arquivos SANEPAR

Tabela 6 - Relação de perda de água em 2015

| Referencia | Quantidade de dias | Água Totais Mensal (Ligações ) | VP | VM | PERDA MENSAL |
|---|---|---|---|---|---|
| Jan/2015 | 31 | 3650 | 66479,02 | 47269,54 | 19209,48 |
| Fev/2015 | 28 | 3651 | 57657,61 | 39992,62 | 17665,00 |
| Mar/2015 | 31 | 3665 | 64245,87 | 36102,30 | 28143,57 |
| Abr/2015 | 30 | 3672 | 63701,12 | 38103,24 | 25597,88 |
| Mai/2015 | 31 | 3688 | 63320,56 | 36275,13 | 27045,43 |
| Jun/2015 | 30 | 3686 | 61012,52 | 35502,81 | 25509,70 |
| Jul/2015 | 31 | 3682 | 60899,32 | 33904,74 | 26994,58 |
| Ago/2015 | 31 | 3684 | 65130,54 | 36163,84 | 28966,70 |
| Set/2015 | 30 | 3689 | 60712,46 | 38124,71 | 22587,75 |
| Out/2015 | 31 | 3690 | 63740,40 | 37937,44 | 25802,95 |
| Nov/2015 | 30 | 3698 | 59376,20 | 38933,28 | 20442,91 |
| Dez/2015 | 31 | 3698 | 65951,24 | 35847,30 | 30103,94 |

Fonte: Arquivos SANEPAR

Tabela 7 - Relação de perda de água em 2016

| Referencia | Quantidade de dias | Água Totais Mensal (Ligações ) | VP | VM | PERDA MENSAL |
|---|---|---|---|---|---|
| Jan/2016 | 31 | 3710 | 65727,06 | 42536,45 | 23190,62 |
| Fev/2016 | 28 | 3719 | 61060,92 | 37145,97 | 23914,96 |
| Mar/2016 | 31 | 3716 | 67244,51 | 38387,92 | 28856,60 |
| Abr/2016 | 30 | 3711 | 67415,88 | 40042,06 | 27373,82 |
| Mai/2016 | 31 | 3715 | 59280,03 | 35853,17 | 23426,86 |
| Jun/2016 | 30 | 3711 | 57613,28 | 33986,82 | 23626,45 |
| Jul/2016 | 31 | 3708 | 63146,68 | 36852,33 | 26294,36 |
| Ago/2016 | 31 | 3724 | 61909,15 | 40406,55 | 21502,60 |
| Set/2016 | 30 | 3733 | 62400,83 | 36605,05 | 25795,78 |
| Out/2016 | 31 | 3742 | 67485,32 | 39006,83 | 28478,49 |
| Nov/2016 | 30 | 3742 | 61628,49 | 41069,20 | 20559,30 |
| Dez/2016 | 31 | 3747 | 66568,42 | 40681,67 | 25886,75 |

Fonte: Arquivos SANEPAR

**Fonte**: relatório dos estudantes.

No entanto, devido a grande quantidade de dados obtidos, o grupo iniciou uma discussão:

*E5: Tem muito dado aqui gente. Precisamos diminuir a quantidade de informações ou juntar tudo, senão não vai dar pra calcular nada.*
*E3: E se a gente trabalhasse com o total?*
*E7: Como assim? Somar tudo?*
*E5: Acho melhor a gente trabalhar com a média, pelo menos a gente consegue justificar.*

Assim, objetivando facilitar a análise dos dados, o grupo decidiu sintetizá-los trabalhando com a média anual do volume de água perdido (Figura 25). Essa necessidade de síntese dos dados a fim de responder a situação-problema definida dá indícios daquilo que o signo imediatamente expressa (com essa quantidade de dados não vai dar pra calcular). Consequentemente, o ato de sintetizar os dados se caracteriza como o efeito semiótico imediato do *representâmen*, efeito este que se dá em decorrência da primeira impressão do intérprete.

**Figura 25 -** Dados sintetizados da Atividade 3 coletados por G2

Tabela 8 - Média anual de perdas de água

| ANO | VARIÁVEL AUXILIAR | MÉDIA ANUAL DE PERDAS | MÉDIA EM mil $m^3$ |
|---|---|---|---|
| 2010 | 0 | 15297,0474 | 15,30 |
| 2011 | 1 | 16339,24873 | 16,34 |
| 2012 | 2 | 19962,37477 | 19,96 |
| 2013 | 3 | 24396,12128 | 24,40 |
| 2014 | 4 | 23106,93438 | 23,11 |
| 2015 | 5 | 24839,15784 | 24,84 |
| 2016 | 6 | 24908,88119 | 24,91 |

Fonte: Elaborada pelos autores.

**Fonte**: relatório dos estudantes.

Podemos considerar que calcular as médias anuais da perda de água e organizar esses dados em uma nova tabela (Figura 25) foi uma estratégia dos estudantes para ver os dados de maneira diferente (mais organizada, no caso). Essa estratégia permitiu os estudantes expandirem as representações dos dados que tinham inicialmente.

Tendo os dados sintetizados conforme Figura 25, o grupo realizou duas análises de tais dados visando conhecer o comportamento dos mesmos. Além disso, decidiram analisar a dispersão dos dados em um *software* para melhor visualizar seu comportamento. Tais análises podem ser vistas na Figura 26 e no diálogo que segue.

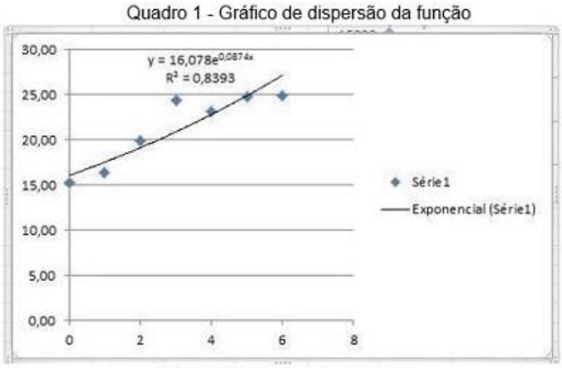
**Figura 26 -** Análise dos dados da Atividade 3 de G2

Tabela 9 - Análise do crescimento da função

| ANÁLISE DE CRESCIMENTO ARITMÉTICO | ANÁLISE DE CRESCIMENTO GEOMÉTRICO |
|---|---|
| 0,78 | 1,068,131 |
| 1,21 | 1,221,744 |
| -0,81 | 1,222,105 |
| -3,50 | 947,156 |
| -0,30 | 1,074,966 |
| 0,05 | 1,002,807 |
| 2,25 | 0 |

Fonte: Elaborada pelos autores.

Quadro 1 - Gráfico de dispersão da função




Fonte: Elaborado pelos autores.

**Fonte**: relatório dos estudantes.

*E5: Cresce geometricamente, olha! O crescimento geométrico varia muito.*
*E3: Sim, se aproxima mais de uma constante né?*
*E5: Isso, igual naquela outra atividade* [referindo-se à Atividade 1].

Analisando o crescimento aritmético e geométrico dos dados, o grupo decidiu calcular um modelo do tipo $F(x) = a + b.e^{x \cdot k}$, sendo $F$ o volume de água perdido (em m³) e $x$ o tempo em anos. Portanto, a análise do comportamento do crescimento dos dados e a análise da dispersão dos pontos no gráfico são signos capazes de transmitir informações importantes aos intérpretes com relação ao fenômeno perda de água na distribuição.

Neste caso, os alunos já haviam trabalhado com uma função exponencial do tipo assintótica o que foi determinante para escolha deste tipo de comportamento para a situação (conforme expresso por E5 no diálogo transcrito anteriormente). Aqui, os mesmos fazem uso do modelo desenvolvido na atividade 1 (Usuários de Internet no Brasil), em uma situação distinta daquela (perda na distribuição de água). Essa expansão e adaptação do modelo é uma das características de uma atividade de aplicação de modelos conforme discutido por Ärlebäck e Doerr (2015) que se insere na sequência de atividades de modelagem matemática de acordo com Lesh et al. (2003).

Na Figura 27 são apresentados os procedimentos matemáticos adotados pelo grupo para obtenção dos parâmetros da função $F$.

**Figura 27 -** Procedimentos adotados na Atividade 3 por G2

Para obter os valores para a função:

$$F(x) = a + b.e^{(x.k)}$$

Foram substituídos os valores para então identificar os valores das incógnitas presentes na função:

$$F(x) = 23{,}912 + b.e^{(x.k)}$$
$$15{,}3 = 23{,}912 + b.e^{(x.k)}$$
$$\mathbf{b = -8{,}61}$$

$$16{,}34 = 23{,}912 - 8{,}61.e^{(1.k)}$$
$$16{,}34 - 23{,}912 = -8{,}61.e^{k}$$
$$-7{,}57 = -8{,}61.e^{k}$$
$$-7{,}57/-8{,}61 = e^{k}$$
$$0{,}87 = e^{k}$$
$$log.0{,}87 = log.e^{k}$$
$$-0{,}06 = k.log.e$$
$$-0{,}06/0{,}43 = k$$
$$\boldsymbol{k{=}{-0{,}13}}$$

O qual atribuindo os valores das incógnitas resulta em um modelo para essa função, que é:

$$F(x) = 23{,}912 - 8{,}61.e^{(-0{,}13*x)}$$

Como o objetivo era encontrar um modelo que possa ser usado em relação ao ano em que se deseja investigar a perda de água, adequamos o modelo que está relacionado à variável auxiliar, de modo que obtemos:

$$F(x) = 23{,}912 - 8{,}61.e^{(-0{,}13*x)}$$
Sendo $x = a - 2010$
onde $a = ano$
temos que:
$$F(\text{a}) = 23{,}912 - 8{,}61.e^{[(-0{,}13.(a-2010)]}$$
$$F(\text{a}) = 23{,}912 - 8{,}61.e^{(-0{,}13a+261{,}3)}$$

**Fonte**: relatório dos estudantes

Após determinarem o modelo $F(x) = 23{,}912 - 8{,}61\;.\,e^{(-0{,}13x+261{,}3)}$, o grupo G2 realizou a validação do mesmo (conforme Figura 28).

**Figura 28 -** Validação do modelo $\boldsymbol{F(x) = 23,912 - 8,61\;.\;e^{(-0{,}13.x+261{,}3)}}$

| ANO | MÉDIA ANUAL DE PERDAS | MÉDIA em mil m³ | APLICANDO A FUNÇÃO $F(\text{a}) = 23{,}912 - 8{,}61.e^{(-0{,}13a+261{,}3)}$ |
|---|---|---|---|
| 2010 | 15297,0474 | 15,30 | 15,30 |
| 2011 | 16339,24873 | 16,34 | 15,62 |
| 2012 | 19962,37477 | 19,96 | 17,27 |
| 2013 | 24396,12128 | 24,40 | 18,14 |
| 2014 | 23106,93438 | 23,11 | 18,79 |
| 2015 | 24839,15784 | 24,84 | 19,41 |
| 2016 | 24908,88119 | 24,91 | 19,96 |

Apesar de uma variação entre os dados reais, consideramos essas funções como válida, pois a taxa de variação entre os valores são cabíveis dentro da problemática que envolve a modelagem, no que existem casos que o modelo exato às vezes não é possível; os modelos são utilizados para fornecer a probabilidade de um determinado valor ocorrer para uma variável. A solução desses modelos é uma probabilidade e não um valor exato.

**Fonte**: relatório dos estudantes

Conforme exposto na Figura 28, apesar da variação entre os dados coletados e os valores obtidos a partir do modelo definido, os mesmos consideraram o modelo válido, uma vez que este expressa uma probabilidade e não um valor exato. Olhando semioticamente para a situação, este pode ser visto como um entendimento sobre a situação gerada a partir do signo.

Considerando válido o modelo obtido, o grupo o utilizou para prever a perda de água nos próximos 5 anos, a partir de 2017 (Figura 29).

**Figura 29** – Previsão da perda de água nos próximos anos

| ANO | VOLUME DE PERDA DE ACORDO COM O MODELO |
|---|---|
| 2017 | 20,44 |
| 2018 | 20,86 |
| 2019 | 21,23 |
| 2020 | 21,56 |
| 2021 | 21,85 |
| 2022 | 22,1 |

**Fonte**: relatório dos estudantes

Uma segunda previsão foi realizada pelo grupo a fim de determinar o ano em que a perda de água atingirá o percentual máximo determinado pela empresa SANEPAR-PR (40%), de acordo com a hipótese elaborada no início da atividade (Figura 30).

**Figura 30** – Previsão da perda de água

Em detrimento dos dados encontrados por meio da validação, nos preocupamos em encontrar o ano em que a quantidade de perda de água por vazamento será próxima aos 40% da média de quantidade de água distribuída, considerando que a média da distribuição anual: 23,912m³ seria sempre a mesma. Adotamos um valor próximo ao da assíntota: 23,89m³. E substituímos no modelo algébrico encontrado.

$$f(a) - 23{,}912 - 8{,}61.\,e^{-0.13a+261.3}$$
$$23{,}89 = 23{,}912 - 8{,}61.\,e^{-.13a+261.3}$$
$$-0{,}02 = 8{,}61.\,e^{-0.13+261.3}$$
$$-\frac{0{,}02}{-8{,}61} = e^{-0.13a+261.3}$$
$$0{,}0025 = e^{-0.13a+261.3}$$
$$ln\,0{,}0025 = ln\,e^{-0.13a+261.3}$$
$$-2{,}6 = (-0{,}13a + 261{,}3)\log e$$
$$-\frac{2{,}6}{0{,}43} = -0{,}13a + 261{,}3$$
$$-6{,}0465 = -0{,}13a + 261{,}3$$
$$-267{,}34 = -0{,}13a$$
$$\frac{267{,}34}{0{,}13} = a$$
$$\mathbf{2056.46 = a}$$

O tempo encontrado foi o ano de 2056.

**Fonte**: relatório dos estudantes

Como já citado, previsões do comportamento de fenômenos é um dos princípios defendidos por Ärlebäck e Doerr (2015) para atividades de aplicação de modelos que, no que diz respeito à sequência de atividades de modelagem matemática, se insere dentre as atividades de acompanhamento.

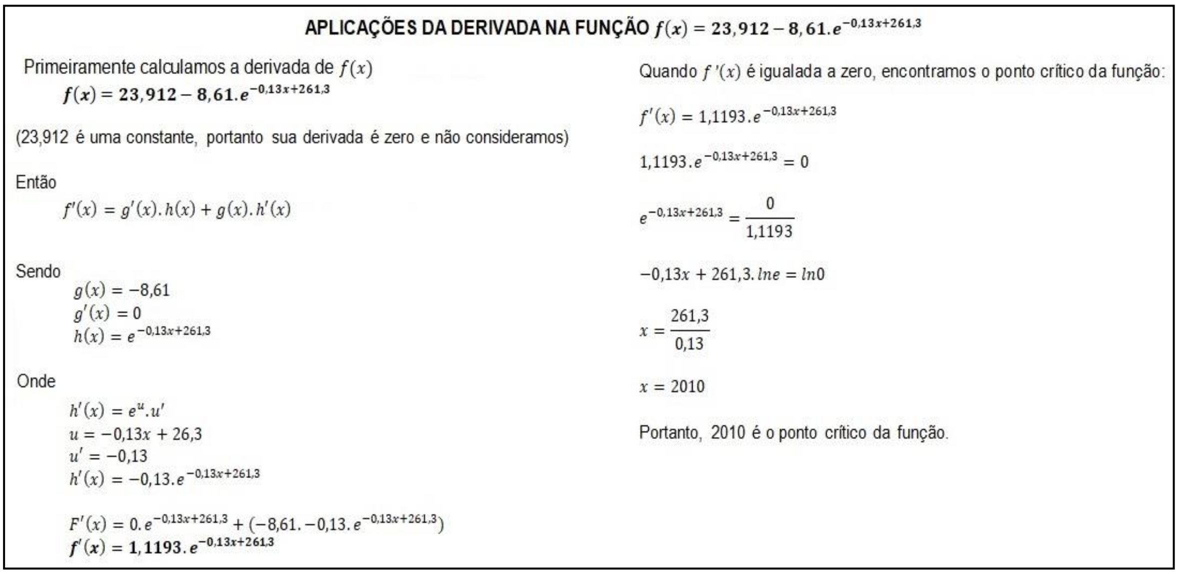
Além disso, ao fazer tais previsões, fica evidenciada a intenção do grupo de olhar para aquilo cujo fenômeno tende.

Sobre os encaminhamentos adotados pelo grupo para o desenvolvimento da atividade *Perda de água na distribuição em Uraí-PR*, fica evidenciada a aplicação de um modelo desenvolvido pelo mesmo grupo em atividades anteriores (atividade 1, mais especificamente) em uma situação diferente. Ao fazerem tal aplicação, os estudantes são levados a estabelecerem novas adaptações ao modelo aprofundando, assim, seus conhecimentos.

Neste momento, houve a interferência da professora regente da turma solicitando que os mesmos aplicassem os conhecimentos de derivadas na atividade. Para isso, o grupo definiu um segundo problema a ser solucionado: *considerando o modelo matemático definido, em qual ano haverá a menor perda de água na distribuição?*

Os procedimentos realizados pelo grupo estão descritos na Figura 31.

**Figura 31** - Análise da função derivada do modelo obtido (G2)



**APLICAÇÕES DA DERIVADA NA FUNÇÃO $f(x) = 23,912 - 8,61.e^{-0,13x+261,3}$**

Primeiramente calculamos a derivada de $f(x)$

$$f(x) = 23,912 - 8,61.e^{-0,13x+261,3}$$

(23,912 é uma constante, portanto sua derivada é zero e não consideramos)

Então

$$f'(x) = g'(x).h(x) + g(x).h'(x)$$

Sendo

$$g(x) = -8,61$$
$$g'(x) = 0$$
$$h(x) = e^{-0,13x+261,3}$$

Onde

$$h'(x) = e^{u}.u'$$
$$u = -0,13x + 26,3$$
$$u' = -0,13$$
$$h'(x) = -0,13.e^{-0,13x+261,3}$$

$$F'(x) = 0.e^{-0,13x+261,3} + (-8,61.-0,13.e^{-0,13x+261,3})$$
$$f'(x) = 1,1193.e^{-0,13x+261,3}$$

Quando $f'(x)$ é igualada a zero, encontramos o ponto crítico da função:

$$f'(x) = 1,1193.e^{-0,13x+261,3}$$

$$1,1193.e^{-0,13x+261,3} = 0$$

$$e^{-0,13x+261,3} = \frac{0}{1,1193}$$

$$-0,13x + 261,3.lne = ln0$$

$$x = \frac{261,3}{0,13}$$

$$x = 2010$$

Portanto, 2010 é o ponto crítico da função.

**Fonte**: relatório dos estudantes

Com a análise da função derivada, o grupo conclui que 2010 foi o ano em que ocorreu a menor perda de água na distribuição na cidade de Uraí-PR. No entanto, em determinado momento, é possível perceber que o grupo considerou que $ln0 = 0$, o que, matematicamente está equivocado. Com o decorrer das aulas, o grupo entregou uma nova versão do relatório contendo uma correção com relação à aplicação da derivada no modelo obtido pelos mesmos. Essa correção consta na Figura 32.

**Figura 32 -** Correção do grupo G2 quanto à análise da função derivada do modelo

Com o decorrer das aulas foi possível uma melhor compreensão a respeito do comportamento da função. Por se tratar de uma função exponencial, a mesma é crescente a todo momento. Portanto, já que o seu comportamento é totalmente crescente, é possível concluir que a função não possui ponto crítico, nem ponto de inflexão (que é o momento em que a curvatura da função é modificada). Por isso, os cálculos anteriores estão equivocados.
O que faz sentido para o nosso modelo, uma vez que, dentro dos dados obtidos, não houve um momento em que a perda de água diminui no decorrer dos anos, a perda é sempre maior com o passar dos anos.

**Fonte:** relatório dos estudantes (G2).

Essa correção apresentada pelo grupo G2 a respeito da análise da função derivada do modelo obtido pelos mesmos está associado, no que diz respeito à sequência de atividades de modelagem matemática, às atividades de acompanhamento.

### 5.2.4 Atividade 4: Análise da Germinação da Semente de Pepino (G1)

O grupo G1 ficou responsável por toda a elaboração da Atividade 4, desde a escolha do tema, até a obtenção, validação e interpretação do modelo obtido.

Assim como a atividade 3, esta também foi solicitada no início do semestre letivo e foi desenvolvida pelo grupo durante todo o período.

De acordo com o relatório do grupo, na elaboração do trabalho houve parceria entre os alunos do grupo e duas alunas do curso de Licenciatura em Biologia da mesma Universidade. O objetivo da atividade foi analisar a germinação da semente de pepino por meio do uso de extrato de amora e água potável. Para isso, foi necessário realizar estudos no laboratório Interdisciplinar de Pesquisa e Ensino de Botânica e Educação Ambiental (LIPEBEA) da Universidade em que estudam.

Os estudantes do LIPEBEA estudam o efeito que o extrato de amora tem no desenvolvimento das sementes de pepino porque, segundo eles, na região norte do estado do Paraná há muitas regiões rurais cujas plantações de pepino e amora são próximas umas das outras, considerando que a época de germinação de ambas as plantações é coincidente.

Em resumo, o grupo teve acesso a um banco de dados do LIPEBEA que continha o comportamento do crescimento das sementes de pepinos em pratos com diferentes concentrações do extrato de amora. Esse extrato é obtido a partir de folhas sadias de amoreira que são pesadas, esterilizadas e batidas no liquidificador com água destilada. Após batido, o material é filtrado e diluído em diferentes concentrações.

As concentrações do extrato de amora determinam diferentes grupos de sementes, conforme Tabela 7:

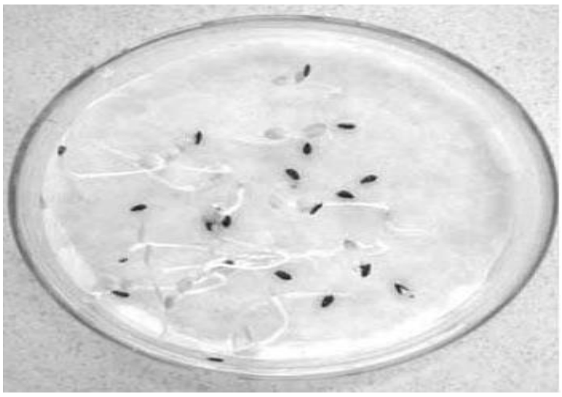
**Tabela 7 -** Grupos de sementes de pepino

| Grupo | Concentração do extrato de amora |
|---|---|
| T1 | 0% |
| T2 | 100% |
| T3 | 80% |
| T4 | 60% |
| T5 | 40% |
| T6 | 20% |
| T7 | 10% |

**Fonte:** relatório dos estudantes (G1)

A partir disso, os alunos do LIPEBEA montaram quatro placas contendo, cada uma, 15 sementes de pepino com 15 ml do extrato de amora (em suas diferentes concentrações), conforme exemplificado na Figura 33 e, a cada 24 horas, os alunos de biologia contavam quantas sementes haviam germinado[22]. Todos os dados obtidos foram sintetizados, conforme Figura 34.

**Figura 33 -** Sementes de pepino na placa com extrato de amora



**Fonte:** relatório dos estudantes (G1)

[22] Neste experimento, as sementes foram consideradas germinadas quando apresentavam, pelo menos, 2mm de raiz.

**Figura 34 -** Dados fornecidos pelos alunos do LIPEBEA

| N sementes germinad. | T1 | T2 | T3 | T4 | T5 | T6 | T7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 24h | | | | | | | |
| R1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| R2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| R3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| R4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 48h | | | | | | | |
| R1 | 10 | 7 | 5 | 8 | 12 | 10 | 9 |
| R2 | 12 | 7 | 9 | 12 | 13 | 13 | 9 |
| R3 | 11 | 2 | 4 | 5 | 11 | 12 | 9 |
| R4 | 14 | 9 | 4 | 7 | 9 | 11 | 5 |
| 72h | | | | | | | |
| R1 | 13 | 9 | 6 | 10 | 12 | 13 | 14 |
| R2 | 14 | 7 | 11 | 12 | 15 | 15 | 11 |
| R3 | 13 | 5 | 5 | 6 | 13 | 13 | 14 |
| R4 | 15 | 11 | 5 | 8 | 13 | 14 | 10 |
| 96h | | | | | | | |
| R1 | 15 | 10 | 8 | 12 | 12 | 13 | 15 |
| R2 | 14 | 10 | 12 | 13 | 15 | 15 | 11 |
| R3 | 15 | 6 | 9 | 9 | 13 | 14 | 15 |
| R4 | 15 | 11 | 9 | 9 | 13 | 14 | 11 |
| 120h | | | | | | | |
| R1 | 15 | 10 | 8 | 12 | 12 | 13 | 15 |
| R2 | 14 | 10 | 12 | 13 | 15 | 15 | 11 |
| R3 | 15 | 6 | 9 | 9 | 13 | 14 | 15 |
| R4 | 15 | 11 | 9 | 9 | 13 | 14 | 11 |
| 148h | | | | | | | |
| R1 | 15 | 10 | 8 | 12 | 12 | 13 | 15 |
| R2 | 14 | 10 | 12 | 13 | 15 | 15 | 11 |
| R3 | 15 | 6 | 9 | 9 | 13 | 14 | 15 |
| R4 | 15 | 11 | 9 | 9 | 13 | 14 | 11 |

**Fonte:** relatório dos estudantes (G1)

Na figura 34 as colunas (T1, T2, T3, ..., T7) indicam a concentração do extrato de amora utilizada em cada placa, conforme especificado na Tabela 7 e as linhas (R1, R2, R3, R4) indicam as quatro placas utilizadas em cada experimento.

Tendo acesso a todas essas informações, algumas discussões foram iniciadas no grupo:

*E10: Como a gente vai fazer para relacionar todas essas informações?*
*E2: A gente vai ter que escolher uma concentração. Não dá pra trabalhar com todas. São coisas distintas. É como se cada T* [referindo-se às concentrações do extrato de amora] *fosse um produto diferente.*
*E9: Será? Acho que a gente consegue trabalhar com todas elas.*
*E1: E se a gente trabalhar com as médias.*
*E2: Então, mas é justamente isso que não dá. Como vamos calcular as médias de coisas distintas?*

A primeira dificuldade encontrada pelo grupo, foi uma maneira de trabalhar com todas as informações que tinham obtido, ou seja, de forma semelhante ao do grupo anterior na atividade de perda de água, a impressão imediata que os estudantes tiveram a partir dos dados foi a necessidade de síntese, no entanto, neste caso, a efeito semiótico dos intérpretes foi selecionar as informações, ao invés de trabalhar com médias, como fez o grupo anterior.

Após algumas discussões com o professor pesquisador e com a professora regente da disciplina, o grupo decidiu que a situação-problema e a questão que iriam investigar é a descrita na Figura 35.

**Figura 35 -** Situação-problema da Atividade 4 (G1)

**Definição Situação-Problema**

**Situação Problema:** Analisar a germinação das sementes com 60% de extrato de amora selvagem e 40% de água em função do tempo.

**Qual é a questão?**

Considerando um total de 15 sementes, quantas serão germinadas em 92 horas?

**Fonte:** relatório dos estudantes (G1)

A hipótese elaborada pelo grupo, as variáveis definidas e o modelo obtido estão descritos na Figura 36.

**Figura 36 -** Procedimentos adotados por G1 na Atividade 4

**Hipótese:** Que a partir de 148 horas a função começa a decair.

**Definição das variáveis:**
Variável dependente $x$: Tempo em horas das germinações
Variável independente $f(x)$: Quantidades de sementes germinadas

**Dados:**
**Germinação da semente da placa R1**

| Quantidades de sementes germinadas com 60% de extrato da placa R1 | Tempo em horas das germinações |
|---|---|
| 0 | 12 |
| 8 | 48 |
| 10 | 72 |
| 12 | 96 |
| 12 | 120 |
| 12 | 148 |

**Modelo**
$f(x) = -0{,}00103\,x^2 + 0{,}25335\ x - 2{,}89164$

O domínio da função será as horas, pertencente as conjuntos dos números reais positivos.

$D = \{x \mid x \in \mathbb{R}_+, x \geq 0\}$.

A imagem da função será o número de sementes germinadas em função tempo.

$Im = \{f(x) \mid f(x) \in \mathbb{N}, f(x) \geq 0\}$.

**Procedimentos:**

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$\begin{cases} A12^2 + B12 + C = 0 \\ A72^2 + B72 + C = 10 \\ A148^2 + B148 + C = 12 \end{cases}$$

$$A = \frac{DA}{D} \qquad B = \frac{DB}{D} \qquad C = \frac{DC}{D} \qquad D = \begin{vmatrix} 144 & 12 & 1 \\ 5184 & 72 & 1 \\ 21904 & 148 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow D = -620160$$

$$DA = \begin{vmatrix} 0 & 12 & 1 \\ 10 & 72 & 1 \\ 12 & 148 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow DA = 640 \qquad A = \frac{640}{-620160} \rightarrow \mathrm{A} = -0{,}00103$$

$$DB = \begin{vmatrix} 12 & 0 & 1 \\ 72 & 10 & 1 \\ 148 & 12 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow DB = -157120 \qquad B = \frac{-157120}{-620160} \rightarrow B = 0{,}25335$$

$$DC = \begin{vmatrix} 12 & 12 & 0 \\ 72 & 72 & 10 \\ 148 & 148 & 12 \end{vmatrix} \rightarrow DC = 1793280 \qquad C = \frac{1793280}{-620160} \rightarrow C = -2{,}8916$$

**Fonte:** relatório dos estudantes (G1)

Determinado o modelo $f(x) = -0{,}00103x^2 + 0{,}25335x - 2{,}89164$ em que $f$ representa a quantidade de sementes germinadas e $x$ representa o tempo (em horas) de germinação, o grupo respondeu que, considerando um total de 15 sementes, 11 delas serão germinadas em 92 horas, ou seja, determinado um signo de lei para a situação explorada, um entendimento geral sobre o fenômeno foi produzido pelos intérpretes.

Nesta etapa, houve interferência da professora regente da disciplina no sentido de solicitar que o grupo utilizasse conhecimentos de derivada em sua atividade. Sendo assim, o grupo definiu uma segunda situação-problema para ser respondida com o modelo obtido anteriormente: *Em qual tempo ocorre o máximo de germinação de sementes através da concentração de 60% de extrato?*

Para responder a essa segunda situação-problema, os procedimentos adotados pelos grupos foram conforme Figura 37.

**Figura 37 -** Procedimentos adotados por G1 na Atividade 4

| | |
|---|---|
| Função<br>$f(x) = -0{,}00103x^2 + 0{,}25335x - 2{,}89164$<br>Derivada da função $f(x)$ usando a primeira regra da derivação:<br>$f'(x) = 2(-0{,}00103x^{2-1}) + 0{,}25335x^{1-1} - 0$<br>$f'(x) = -0{,}00206x + 0{,}25335$<br>Para definir em quantas horas teremos o máximo ou mínimo de germinações, consideramos $f'(x) = 0$, assim:<br>$0 = -0{,}00206x + 0{,}25335$<br>$-0{,}00206x = -0{,}25335$<br>$x = \frac{-0{,}25335}{-0{,}00206} = 122{,}98$ | Substituindo o valor de $x$ encontrado acima, para definir o número máximo de germinações em função das horas.<br>$f(122{,}98) = -0{,}00103(122{,}98)^2 + 0{,}25335(122{,}98) - 2{,}89164$<br>$f(122{,}98) = -15{,}578 + 31{,}157 - 2{,}89164$<br>$f(122{,}98) = 12{,}68$ sementes germinadas, ou seja 12 sementes<br>Logo pelo coeficiente angular da parábola ser negativo sabemos que temos um ponto de máximo, e por meio da derivada definimos o valor de seu vértice. $V(122{,}98; 12{,}68)$.<br>Como temos somente uma raiz da derivada desta função, não haverá o ponto de mínimo, apenas ponto de máximo desta função. |

**Fonte:** relatório dos estudantes (G1)

A partir da análise da derivada da função (para definir em quantas horas teremos o máximo ou mínimo de germinações consideramos $f'(x) = 0$), o grupo concluiu que a germinação máxima das sementes aconteceria após quase 123 horas de procedimento.

### 5.2.5 Atividade 5: Dinâmica das matrículas no Ensino Superior na modalidade EAD e presencial (G3)

Como já citado anteriormente, a quinta atividade foi desenvolvida pelo Grupo G3, composto pelos estudantes E4, E6 e E12.

Nesta atividade o objetivo do grupo foi encontrar um modelo que explicasse a dinâmica das matrículas no Ensino Superior na modalidade de Educação à Distância (EAD) e outro que explicasse a dinâmica das matrículas na modalidade presencial para, com ambos os modelos, analisar se em algum momento a quantidade de matrículas na modalidade EAD irá ultrapassar a quantidade de matrículas na modalidade presencial.

De acordo com o relatório da atividade, os dados foram obtidos a partir de dois documentos: o Relatório Analítico da Aprendizagem à Distância no Brasil - Censo EAD de 2014, disponibilizado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP); e o Relatório do Censo Educacional de 2014, disponibilizado pelo Ministério da Educação (MEC).

Os dados obtidos são apresentados na Figura 38.

**Figura 38 -** Dados da Atividade 5 (G3)

| Ano | Matrículas EAD (em milhares) | Matrículas Presenciais (em milhares) |
|---|---|---|
| 2005 | 114,512 | 4,093,980 |
| 2006 | 207,128 | 4,314,981 |
| 2007 | 368,525 | 4,527,865 |
| 2008 | 764,208 | 4,748,136 |
| 2009 | 830,489 | 4,909,504 |
| 2010 | 930,179 | 6,063,315 |
| 2011 | 992,928 | 5,955,306 |
| 2012 | 1,113,820 | 7,015,262 |
| 2013 | 1,153,572 | 7,282,230 |
| 2014 | 1,341,842 | 8,614,529 |

**Fonte:** relatório dos estudantes (G3)

Algumas informações com relação aos procedimentos matemáticos adotados, a situação-problema e as variáveis definidas estão descritas na Figura 39.

**Figura 39 -** Dados da Atividade 5 (G3)

**SITUAÇÃO PROBLEMA:**

Será que a quantidade de matrículas em cursos EAD em algum momento será igual a quantidade de matrículas em cursos presenciais no Brasil?

**VARIÁVEIS**

T: tempo (em anos, com uso da variável auxiliar)

Mp(T): quantidade de matriculas na modalidade presencial no ano T (em milhares).

Me(T): quantidade de matriculas na modalidade EAD no ano T (em milhares).

**INFORMAÇÕES**

1) Tomaremos como tempo inicial o ano de 2010 e o chamaremos de ano 0 (variável auxiliar) para facilitar a matematização da atividade.
2) Consideraremos a quantidade total de matrículas em cada ano, independente do curso, tipo de instituição de ensino (federal, estadual, particular) ou modalidade de título (bacharel, tecnólogo, licenciado), conforme apresentado nos relatórios utilizados na coleta de dados.

**Fonte:** relatório dos estudantes (G3)

*E12: Pela situação, eu acho que a gente consegue definir aqui uma função quadrática que represente a situação, igual na atividade anterior.*

*E6: Será? Mas aí, como a gente faria?*

*E12: Dá pra gente tentar usar o mesmo procedimento, por resolução de sistemas.*

A partir do diálogo transcrito acima é possível inferir que a primeira intenção dos estudantes do Grupo G3 foi ajustar uma função polinomial de grau dois, aproximando a atividade desolvida por eles, da atividade 2, desenvolvida pelo grupo em aulas anteriores, ou seja, aqui a mesma expande seu modelo anterior aplicando-o em uma nova situação. Essa aplicação de um modelo em uma nova situação é discutida por Ärlebäck e Doerr (2015). O cálculo das funções quadráticas estão descritos na Figura 40.

Além disso, essa impressão que o grupo teve ao entrar em contato com os dados (que o comportamento deve ser semelhante ao fenômeno anterior) representa aquilo que o signo imediatamente expressa.

**Figura 40 -** Cálculo do primeiro modelo da Atividade 5 (G3)

**OBTENÇÃO DO MODELO**

*Para encontrar a função quadrática Mp(T):*

$$\begin{cases} a1^2 + b1 + c = 6063315 \\ a2^2 + b2 + c = 5955306 \\ a5^2 + b5 + c = 8614529 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 6063315 \\ 4a + 2b + c = 5955306 \\ 25a + 5b + c = 8614529 \end{cases}$$

*Para encontrar a função quadrática Me(T):*

$$\begin{cases} a1^2 + b1 + c = 930179 \\ a2^2 + b2 + c = 992928 \\ a5^2 + b5 + c = 1341842 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 930179 \\ 4a + 2b + c = 992928 \\ 25a + 5b + c = 1341842 \end{cases}$$

Para resolver ambos os sistemas foi usado uma calculadora *online* disponível em: http://www.profcardy.com/calculadoras/aplicativos.php?calc=21. E encontramos os seguintes modelos:

$$Mp(T) = 248604{,}17\,.\;T^2 - 853821{,}5\,.T + 6668532{,}33$$

$$Me(T) = 13388{,}92\,.T^2 + 22582{,}25\,.\;T + 894207{,}833$$

**Fonte:** relatório dos estudantes (G3)

Definidos os dois modelos descritos na Figura 39 e validado-os com os dados obtidos, o grupo iniciou uma outra discussão:

*E4: Gente, parece que não faz sentido isso não. As matrículas não podem crescer pra sempre. Nem a população cresce assim.*
*E12: É verdade. Está acontecendo igual na primeira atividade lembra? Dos usuários de internet...*
*E4: Então vamos inibir o crescimento e determinar um outro tipo de modelo.*

Novamente aqui, E12 faz uma relação entre a atividade que está sendo desenvolvida pelo grupo, com a atividade de aquecimento trabalhada no início da sequência de atividades.

Além disso, considerar que o número de matrículas não pode crescer infinitamente é, de alguma forma, inferir sobre aquilo para qual o fenômeno tende.

Ao decidirem deduzir outro modelo, o grupo definiu, também, uma nova situação-problema, sendo ela: *No ano de 2042, a quantidade de matrículas em cursos EAD será maior que a quantidade de matrículas em cursos presenciais no Brasil?*

Neste caso, o ano de 2042 foi escolhido para ser explorado devido a uma reportagem publicada no Portal G1 que, citando uma pesquisa do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), afirma que a população brasileira atingirá máximo de 228,4 milhões no ano de 2042. Novamente aqui há indícios de aplicação de modelos considerando que esta mesma informação foi utilizada na Atividade 1: Usuários de Internet no Brasil.

Além disso, de acordo com o relatório do grupo, ao realizar uma busca por modelos assintóticos populacionais na literatura disponível e ao analisar o comportamento dos dados a partir de um *software* computacional, ficou decidido que os mesmos definiriam um modelo logístico para a quantidade de matrículas EAD e um modelo exponencial com comportamento assintótico para a quantidade de matrículas na modalidade presencial.

O modelo do tipo logístico e o modelo do tipo exponencial assintótico obtidos estão na Figura 41 e na Figura 42, respectivamente.

**Figura 41 -** Modelo logístico da Atividade 5 (G3)

**OBTENÇÃO DO MODELO LOGISTICO** $\left(y = \frac{a}{1+be^{-ct}}\right)$

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow Mp(0) = 114512 \\ t = 4 \rightarrow Mp(4) = 830489 \\ t = 8 \rightarrow Mp(8) = 1153527 \end{cases}$$

Assim temos o sistema:

$$\begin{cases} 114512 = \dfrac{a}{1+be^{-c0}} \\ 830489 = \dfrac{a}{1+be^{-c4}} \\ 1153527 = \dfrac{a}{1+be^{-c8}} \end{cases}$$

Teremos:

$$Me(T) = \frac{1177297{,}872}{1+9{,}281e^{-0{,}775t}}$$

**Fonte:** relatório dos estudantes (G3)

**Figura 42 -** Modelo exponencial assintótico da Atividade 5 (G3)

**OBTENÇÃO DO MODELO EXPONENCIAL ASSINTÓTICO** $(y = k + a\,.\ e^{b.x})$

Para encontrar a assíntota do modelo foi realizada uma média do crescimento da quantidade de matrículas existente em 2014 em relação à população, desde o ano inicial da pesquisa (2005), e depois foi feita uma previsão do número de matrículas com base no valor da população estimada em 230 milhões. Número este que já é uma previsão do IBGE. Assim, obtivemos o numero 7.466.089 para o número de matrículas.

Escolheu-se os pontos $t = 0$ e $t = 8$ para ajuste por meio de sistema de duas equações:

$$\begin{cases} 7.466.089{,}60 + a\,.\ e^{b\,\cdot\,0} = 4.093.980 \\ 7.466.089{,}60 + a\,.\ e^{b\,\cdot\,8} = 8.614.529 \end{cases}$$

Teremos:

$$Mp(T) = 7466089{,}60 - 3372109{,}60e^{-0{,}0748\,.\,T}$$

**Fonte:** relatório dos estudantes (G3)

Para responder a situação-problema proposta, os estudantes calcularam os valores de $Mp(37)$ e $Me(37)$, considerando que 37 é o valor da variável auxiliar que representa o ano de 2042 e, com isso, concluíram que, neste ano, a quantidade de matrículas em cursos superiores presenciais é superior que as matrículas nos cursos da modalidade EAD. Além disso, a partir do signo de lei estabelecido, um novo entendimento sobre o fenômeno parace ter sido produzido, conforme Figura 43.

**Figura 43 –** Conclusão de G3 a partir dos modelos obtidos

Ao analisar o limite da função logística pode-se perceber que ele é menor que Mp(0), ou seja, a quantidade de matrículas EAD será sempre menor que a quantidade de matrículas presenciais.

**Fonte:** relatório dos estudantes (G3)

Ao serem solicitados a aplicarem seus conhecimentos de derivadas na atividade, a resposta do grupo foi de que utilizar derivada nesta atividade possibilitaria responder perguntas como: *Quão rápido cresce o número de matrículas* ou *qual a velocidade de crescimento das matrículas na modalidade EAD*. No entanto, os estudantes não conseguiram aplicar os conhecimentos de derivadas pelo motivo exposto na Figura 44.

**Figura 44 –** Justificativa do grupo G3 sobre a aplicação de derivadas

O cálculo do nosso trabalho está incompleto, pois ao se tratar de funções logística e exponencial ao aplicarmos logaritmo não conseguimos encontrar valores para x.

**Fonte:** relatório dos estudantes (G3)

A partir desta colocação dos estudantes do grupo G3 a professora regente da disciplina retomou algumas regras de derivação e apresentou à turma outras teorias relacionadas à aplicação de derivadas em situações cotidianas.

## 5.3 Os Signos Interpretantes da Sequência de Atividades de Modelagem Matemática

A análise dos encaminhamentos dos estudantes no desenvolvimento da sequência de atividades sinaliza a produção e utilização de signos interpretantes.

Para realizar a análise, buscamos, a partir de várias leituras do *corpus* de análise, agrupar fragmentos do desenvolvimento das atividades do grupo (registros escritos, gravações de áudio e vídeo) de acordo com seu sentido pertinente à cada fase de resolução das atividades. A partir disso, foram identificadas características comuns aos diferentes signos e, assim, podemos determinar algumas unidades de análise.

Portanto, seguindo os encaminhamentos da análise textual discursiva, buscaremos agora comparar as unidades de análise definidas a fim de agruparmos os elementos semelhantes. A esse processo dá-se o nome de categorização (MORAES; GALIAZZI, 2007).

Bardin (2011, p. 147) define a categorização como

> uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto por diferenciação e, em seguida, por reagrupamento segundo o gênero (analogia), com os critérios previamente definidos. As categorias são rubricas ou classes, as quais reúnem um grupo de elementos (unidades de registro, no caso da análise de conteúdo) sob um título genérico, agrupamento esse efetuado em razão das características comuns destes elementos.

Além disso, com um viés semiótico, conforme apontado por Sandovo e Laburú (2017, p. 767) “olha-se para a questão dos meandros do significado por meio dos níveis significantes, o que permite ao pesquisador entender e acompanhar a construção do significado pelo aprendiz.”

Nesse contexto, consideramos três categorias *a priori*, que revelam os signos interpretantes produzidos ou utilizados pelos estudantes no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.

1) Nível significante imediato em uma sequência de atividades de modelagem matemática;
2) Nível significante dinâmico em uma sequência de atividades de modelagem matemática;
3) Nível significante final em uma sequência de atividades de modelagem matemática;

Tais níveis significantes se caracterizam pelo modo como os signos se apresentam aos intérpretes e os efeitos que causam.

Na sequência, descrevemos cada uma das categorias, justificando sua construção e apontando exemplos das unidades de análise a que a elas pertencem.

### 5.3.1 Os Níveis Significantes Imediatos

Conforme descrito nas análises apresentadas, em relação à sequência de atividades de modelagem matemática, ao terem acesso às atividades, os grupos geraram uma série de signos interpretantes que os permitiram a exploração das diferentes temáticas abordadas nas atividades, este fato nos leva a perceber um fundamento inerente aos signos que lhes dá o *potencial para significar*[23] algo aos estudantes. De acordo com Santaella (2007), esse potencial inerente ao signo é o que Peirce classifica como interpretante imediato.

Além disso, esses mesmos signos geraram nos intérpretes diferentes impressões (por exemplo: que as reportagens estavam equivocadas ou que seria necessário sintetizar ou selecionar os dados). Tais impressões dão indícios daquilo que o *signo imediatamente expressa ou está apto a produzir* como efeito numa mente interpretadora qualquer. Essa possibilidade de interpretação tem características de primeiridade e, portanto, é classificada como interpretante imediato (PEIRCE, 2005).

[23] Nos subitens 5.3.1, 5.3.2 e 5.3.3, na apresentação das categorias da análise dos dados, os termos em itálico indicam as unidades de análise assumidas em cada uma das categorias.

No momento de definirem metas para a resolução das problemáticas das diferentes atividades, os estudantes buscaram analisar o comportamento dos dados de diferentes maneiras (análise da dispersão dos dados; análise do crescimento aritmético e geométrico). Tais *signos foram capazes de transmitir informações* importantes aos intérpretes com relação ao comportamento do fenômeno explorado. Essa capacidade também é classificada na semiótica peirceana como característica de interpretantes imediatos (DRIGO, 2007).

No Quadro 7 buscamos sintetizar o que foi evidenciado com relação aos interpretantes imediatos relacionados à modelagem matemática no desenvolvimento da sequência de atividades.

**Quadro 7 -** Categoria: Nível significante imediato

| Categoria | Unidade de Análise | Ocorrência |
|---|---|---|
| Nível significante imediato em uma sequência de atividades de modelagem matemática | *Potencial do signo para significar* | Primeiras interpretações dos intérpretes ao entrarem em contato com as atividades. |
| | *Aquilo que o signo imediatamente expressa ou está apto a produzir* | Primeiras impressões tidas pelos intérpretes ao se inteirarem das situações a serem estudadas. |
| | *Capacidade do signo de transmitir informação* | Análise gráfica e da variação de dados a fim de determinarem o comportamento do fenômeno. |

**Fonte**: o próprio autor.

Já no Quadro 8 apresentamos o que foi evidenciado com relação aos interpretantes imediatos relacionados ao conhecimento matemático de derivadas no desenvolvimento da sequência de atividades.

**Quadro 8 -** Categoria: Nível significante imediato

| **Categoria** | **Unidade de Análise** | **Ocorrência** |
|---|---|---|
| Nível significante imediato em uma sequência de atividades de modelagem matemática | *Indícios de noção intuitiva de limites de função* | Busca pela solução do problema de forma intuitiva (análise do limite da função) |

**Fonte**: o próprio autor.

Seguido dos interpretantes imediatos, algumas reações são tomadas. Tais reações se caracterizam como os interpretantes dinâmicos, descritos no próximo subitem.

5.3.2 Os Níveis Significantes Dinâmicos

As primeiras impressões que os intérpretes tiveram a partir dos signos das atividades geraram uma série de reações nos mesmos. Tais reações (pesquisar termos desconhecidos, por exemplo) podem ser consideradas um *efeito semiótico imediato do signo* para com o intérprete.

Além disso, após compreenderem o contexto das atividades, por vezes os grupos julgaram necessária a formulação de hipóteses para, assim, darem sentido à situação. Julgar a necessidade de formulação de hipóteses também é uma reação que o intérprete tem após suas impressões iniciais do fenômeno. D'Amore; Fandiño Pinilla e Iori (2015) chamam esta reação de uma *ação ulterior à impressão do signo*.

Assim, tanto o *efeito semiótico imediato do signo* quanto a *ação ulterior à impressão do signo* tem em comum seu caráter de reação, características de um segundo (reações) que vem após um primeiro (impressões imediatas). Disso, tem-se nesses dois casos características de secundidade (PEIRCE, 2005) ou, no que diz repeito à classificação dos interpretantes, como colocado por Drigo (2007), interpretantes dinâmicos.

Após se familiarizarem com a situação-problema e definirem metas para sua resolução, os estudantes adotaram procedimentos matemáticos a fim de obterem um modelo matemático que representasse o fenômeno. A partir disso, diferentes *entendimentos sobre as situações-problema foram produzidos pelos intérpretes a partir dos signos*. Exemplos de entendimentos produzidos a partir dos signos são os fatos de o grupo refazer seu modelo matemático, inicialmente validado, por considerarem absurdo que o número de usuários de internet no Brasil no ano de 2038 seria superior a 980 milhões, ou considerarem (na atividade A5) que o número de matrículas cresceria infinitamente com o decorrer dos anos.

Ao analisaram a resposta da situação com o "olhar da realidade", ou seja, analisarem se a resposta matemática condiz com o fenômeno real, os estudantes estão fazendo o que Drigo (2007, p. 89) chama de "checagem com o real", sendo que tal ação está relacionada às experiências do intérprete. Na ideia de realidade, secundidade é predominante, portanto, tem-se também características de interpretante dinâmico.

No Quadro 9 sintetizamos o que foi evidenciado com relação aos interpretantes dinâmicos no desenvolvimento da sequência de atividades.

**Quadro 9 -** Categoria: Nível significante dinâmico

| Categoria | Unidade de Análise | Ocorrência |
|---|---|---|
| Nível significante dinâmico em uma sequência de atividades de modelagem matemática | *Efeito semiótico imediato do signo* | Pesquisa na internet sobre termos desconhecidos das atividades; levantamento de hipóteses. |
| | *Entendimento geral produzido pelo signo* | Conclusões tidas após a determinação do modelo matemático; Analisar se a resposta é adequada para o fenômeno real. |

**Fonte**: o próprio autor.

No Quadro 10 são apresentadas algumas evidências de interpretantes dinâmicos relacionados ao conhecimento matemático de derivadas no desenvolvimento da sequência de atividades.

**Quadro 10 -** Categoria: Nível significante dinâmico

| Categoria | Unidade de Análise | Ocorrência |
|---|---|---|
| Nível significante dinâmico em uma sequência de atividades de modelagem matemática | *Indícios de fragilidades com relação ao conhecimento de derivadas* | Desconforto por não conhecer procedimentos matemáticos adequados para a situação |
| | *Aplicações de derivadas nos fenômenos estudados* | Ação de efetuar os cálculos necessários |
| | *Compreensão do fenômeno a partir da análise matemática* | Considerações a respeito do fenômeno a partir da análise da função derivada |

**Fonte**: o próprio autor.

### 5.3.3 Os Níveis Significantes Finais

Como posto por Drigo (2007, p. 89) “o caminhar dos interpretantes desvelados se faz no caminhar e o que os move é a tendência à generalização”. Na modelagem matemática, tal generalização pode ser tida na fase de resolução que, como posto por Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 16), “esta fase consiste na construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação”. Assim, podemos considerar os modelos obtidos pelos estudantes como *signos de lei*, que, de alguma forma, representam os fenômenos para os intérpretes. Para Peirce (1972) a generalização é a operação mais importante da mente.

Além disso, no desenvolvimento da sequência de atividades de modelagem matemática, foi possível perceber também que, em determinados momentos, o grupo buscou analisar a *tendência dos fenômenos*. Tais buscas ocorreram quando os estudantes fizeram previsões para o futuro a partir dos modelos matemáticos obtidos nas atividades.

Por fim, a análise semiótica do desenvolvimento das atividades, possibilitou perceber que nas três atividades desenvolvidas, os grupos seguiram alguns padrões de resolução, ou seja, pode-se dizer que os intérpretes fizeram uso de uma *norma ou tipo de padrão sígnico*. Tais padrões foram observados, principalmente, nas fases de matematização, resolução e interpretação dos modelos matemáticos.

Produção e utilização de signos de lei, análise daquilo para o qual o real tende e norma ou tipo de padrão sígnico são características de terceiridade, ou seja, interpretantes finais (Peirce, 1972).

No Quadro 11 sintetizamos o que foi evidenciado com relação aos interpretantes finais no desenvolvimento das atividades de G2.

**Quadro 11 -** Categoria: Nível significante final

| Categoria | Unidade de Análise | Ocorrência |
|---|---|---|
| Nível significante final em uma sequência de atividades de modelagem matemática | *Signo de Lei* | Obtenção de modelos que, de alguma maneira, representasse o fenõmeno |
| | *Aquilo para o qual o fenômeno tende* | Cálculo de previsões a partir dos modelos obtidos. |
| | *Norma ou tipo de padrão sígnico* | Padrão nos procedimentos adotados para análise da variação dos dados e validação do modelo. |

**Fonte**: o próprio autor.

No Quadro 12 são apresentadas evidências de interpretantes finais relacionados ao conhecimento matemático de derivadas no desenvolvimento da sequência de atividades.

**Quadro 12 -** Categoria: Nível significante final

| Categoria | Unidade de Análise | Ocorrência |
|---|---|---|
| Nível significante final em uma sequência de atividades de modelagem matemática | *Conclusões para o fenômeno a partir da matemática* | Solução para a situação-problema a partir da análise da derivada da função |

**Fonte**: o próprio autor.

## 5.4 A Compreensão do Novo: a evolução dos signos interpretantes e o conhecimento de derivadas na sequência de atividades de modelagem matemática

Como já descrito anteriormente, o objetivo da sequência de atividades foi trabalhar os usos da derivada de uma função, sendo assim, a atividade A1 abordou o conceito de limite (pré-requisito para a compreensão do conceito de derivada na ementa da disciplina da coleta de dados), na atividade A2 foi trabalhada a ideia de derivada e suas aplicações, nesta atividade os estudantes fizeram uso do teorema da análise da 1ª derivada de uma função; e nas atividades A3, A4 e A5, houve a inserção formal dos teoremas, nestas atividades houve interferência do professor para que os estudantes utilizassem os teoremas da 1ª e 2ª derivada das funções obtidas nas atividades, conforme especificado na Figura 4.

É importante ressaltar que, como afirma Steinbring (2006) o conhecimento matemático não pode ser traduzido e interpretado por uma mera leitura de signos. Neste sentido, Almeida e Silva (2017, p. 206) reiteram que é “preciso que a leitura seja carregada de experiência e conhecimento implícito, isto é, não podemos entender os signos sem alguns pressupostos de tal conhecimento ou de maneiras de utilizá-lo”.

Quando a atividade *Usuários de internet no Brasil* foi desenvolvida a maioria dos estudantes ainda não tinha tido acesso ao conhecimento matemático de derivadas (com exceção dos estudantes E11 e E12 que já haviam cursado a disciplina de CDI I), assim, com relação à sequência de atividades, A1 foi proposta como uma atividade de aquecimento, conforme proposto por Lesh et al. (2003), com o intuito de familiarizar os estudantes com atividades de modelagem matemática e abordar conceitos considerados pré-requisitos para o estudo da derivada de uma função.

Conforme já discutido na fundamentação teórica deste relatório de pesquisa, Drigo (2007) afirma que a semiose de um intérprete é desencadeada a partir da atualização da mente, ou seja, signos interpretantes são gerados a partir da “identificação de um desconforto ou uma instabilidade, cuja superação é mediada pela semiose” (ALMEIDA; SILVA, 2017, p. 207).

Neste contexto, na atividade de aquecimento, conforme classificação apresentada por Lesh et al. (2003), o desconforto com relação ao fenômeno foi identificado nos grupos no momento em que os mesmos julgaram necessário o levantamento de hipóteses para resolução da atividade e a necessidade de pesquisas complementares para compreenderem a situação em estudo.

Desta forma, considerando que a derivada de uma função $f(x)$ em relação à variável $x$ é a função $f'$ cujo valor em $x$ é $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (desde que o limite exista), antes de trabalharmos especificamente questões relacionadas a derivada, o intuito da primeira atividade foi explorar com os estudantes (mesmo que intuitivamente) conceitos de limite de uma função.

Assim, com relação ao conhecimento matemático de limites de uma função, ao olharem para a expressão $\lim_{k\to\infty} 55{,}04 \,.\, e^{k\,.0{,}09}$ (Figura 10), enquanto o estudante E6 afirma “não fazer ideia” de como efetuar o cálculo, o estudante E12 busca analisar esse limite de maneira intuitiva (*E12: Vamos ver aqui: é euler elevado a um número muito grande. Aí é esse número muito grande, vezes 55,04. Vai continuar sendo muito grande. Será que é assim que calcula? Vai dar igual a infinito).* Desta maneira, temos aqui evidências de que um interpretante emocional foi gerado em E6 (desconforto por não saber fazer) enquanto um interpretante lógico foi gerado por E12 (será igual a infinito). Além disso, a partir da explicação de E12, um interpretante lógico também pôde ser observado em E6, o fato de que, com aquele modelo, o fenômeno crescimento da população brasileira seria infinitamente crescente (*isso quer dizer que a população não parará de crescer nunca)*. Tais conclusões podem ainda ser vistas como interpretantes finais para estes estudantes no que diz respeito a essa situação específica.

É importante ressaltar que, os conhecimentos colaterais de E12 foram essenciais para que ele pudesse fazer a análise do limite da função, uma vez que, por já ter cursado a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (conforme Quadro 1) é bastante provável que o estudante já tenha estudado limite de funções.

No entanto, ao analisar o comportamento dos modelos matemáticos com o passar de muitos anos, todos os grupos concluíram que aqueles modelos não eram os mais adequados. Sendo assim, iniciou-se novamente o processo de matematização e um segundo modelo foi definido. E, assim como na função anterior, desta vez os estudantes também buscaram analisar o limite da referida função de forma intuitiva (*E2: Aí vai ficar 1 dividido por um número muito grande; E10: Aí isso se aproxima de zero.)*.

Com a resposta às situações iniciais propostas na atividade 1, a mesma é concluída e a professora regente da disciplina fez uma síntese com a turma no intuito de discutir os conhecimentos matemáticos abordados na atividade, especialmente, o que dizia respeito às funções matemáticas e limites de funções (tópicos estes que foram explorados nas aulas seguintes).

Com a atividade *Qual tamanho de cabo elétrico usar?*, o intuito foi explorar a ideia de derivada e suas aplicações em situações cotidianas. Assim, após se inteirarem da temática apresentada (Escolha do cabo de energia em função da bitola) e definirem metas para sua resolução, dois modelos matemáticos foram deduzidos pelos três grupos, sendo eles: $f(x) = 0{,}00216x^2 - 0{,}016423x + 0{,}0427640$ (G2) e $f(x) = 0{,}00204x^2 - 0{,}015x + 0{,}04093$ (G1 e G3), em que $f(x)$ representa o valor da queda de tensão da corrente elétrica e $x$ representa a bitola do cabo elétrico, os grupos foram introduzidos à teoria do valor extremo de uma função por meio do uso da análise da função derivada. Tais máximos e mínimos seriam utilizados para responder à questão: *Para montagem de uma extensão elétrica (para uso residencial) quais seriam as bitolas dos cabos elétricos que apresentariam a menor e a maior queda de tensão, respectivamente?*

Na data em que a atividade 2 foi desenvolvida (01/07/17) os grupos já haviam estudado algumas regras de derivação (conforme Quadro 2), portanto, explorar as aplicações de derivadas já era possível.

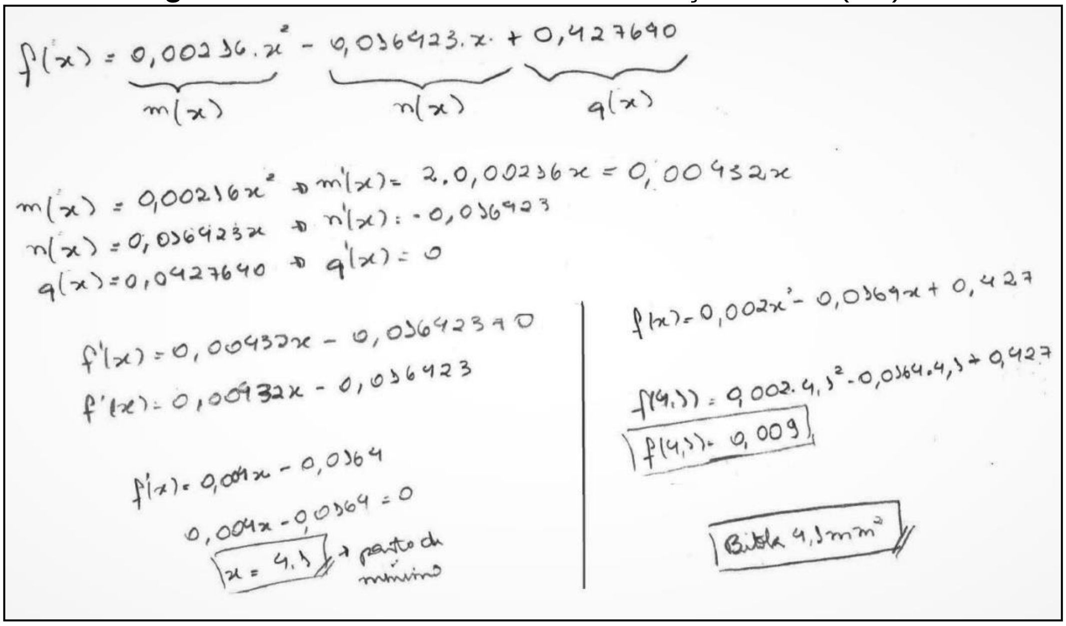
Thomas (2009, p. 267) define o teorema do valor extremo da seguinte maneira:

> Se $f$ é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então $f$ assume tanto um valor máximo $M$ como um valor mínimo $m$ em $[a, b]$. Ou seja, há números $x_1$ e $x_2$ em $[a, b]$ tais que $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$ e $m \leq f(x) \leq M$ para qualquer outr valor de $x$ em $[a, b]$.

Além disso, ainda segundo Thomas (2009), o primeiro teorema da derivada para valores de extremos diz que se $f$ possui um valor máximo ou mínimo em um ponto $c$ interior de seu domínio e se $f'$ é definida em $c$ então $f'(c) = 0$.

Tendo tais informações, os grupos iniciaram a análise das funções derivadas de seus modelos matemáticos (conforme exemplo apresentado na Figura 45).

**Figura 45 -** Análise da derivada da função de E5 (G2)



$f'(x) = \underbrace{0,00236.x^2}_{m(x)} - \underbrace{0,036923.x}_{n(x)} + \underbrace{0,427690}_{q(x)}$

$m(x) = 0,00236x^2 \to m'(x) = 2.0,00236x = 0,00432x$

$n(x) = 0,036923x \to n'(x) = -0,036923$

$q(x) = 0,0427690 \to q'(x) = 0$

$f'(x) = 0,00432x - 0,03692340$

$f'(x) = 0,00432x - 0,036923$

$f'(x) = 0,004x - 0,0364$

$0,004x - 0,0364 = 0$

$\boxed{x = 4,1}$ → ponto de mínimo

$f(x) = 0,002x^2 - 0,0364x + 0,427$

$f(4,1) = 0,002.4,1^2 - 0,0364.4,1 + 0,427$

$\boxed{f(4,1) = 0,009}$

$\boxed{\text{Bitola } 4,1mm^2}$

**Fonte**: relatório dos estudantes.

Fazendo uso das regras de derivação da função constante e da função $f(x) = x^n$ $(\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1})$ os grupos determinam as funções derivadas de seus modelos matemáticos e as igualaram a zero ($f'(x) = 0$). Com isso, encontram que um valor extremo da função é 4,1 (referente à bitola do cabo). Como os estudantes já conheciam regras de derivação, então ao se depararem com a necessidade de análise da derivada, interpretantes imediatos foram imperceptíveis. O que pôde ser evidenciado foram interpretantes dinâmicos energéticos relacionados à ação de efetuar os cálculos necessários.

A partir disso, algumas interpretações são registradas pelos estudantes em seus relatórios:

- Análise do estudante E2 (G1): *A maior queda não existe, por não ter o ponto de máximo, ou seja, a função só cresce. Já o* [ponto] *de mínimo, substituímos o 0 na f'(x) e achamos o x, como a derivada é uma função afim, logo temos uma única raiz, como a f'(x) é a tangente da curva da função, o seu 0 da função coincide com o ponto de mínimo, por ter o mesmo valor de x nesse ponto, nós substituímos o x na função e achamos o y, logo, teremos o ponto de mínimo, ou seja, a bitola com menor queda.*
- Análise do estudante E7 (G2): *Não temos um ponto de máximo porque a função é crescente e tem apenas uma raiz* [referindo-se à derivada da

função]. *Sempre quando escolhemos um ponto ela terá um ponto maior, por isso, não temos um ponto de máximo nessa função.*

- Análise do estudante E12 (G3): *menor queda = 4,1 mm² (bitola); maior queda = não existe ponto de máximo por ela ser uma função crescente então sempre vai achar um número maior.*

Todas as interpretações registradas demonstram uma compreensão dos grupos no que diz respeito aos modelos determinados por eles: não seria possível determinar um ponto de máximo, uma vez que, quanto maior a bitola do cabo, maior será a queda de tensão registrada. Tais conclusões dos estudantes podem ser tomados como interpretantes lógicos destes para a dada situação, uma vez que se caracterizam como um pensamento ou entendimento geral produzido pelo signo, como definido por Peirce (1972).

Nas atividades *Perda de água na distribuição em Uraí-PR*, *Análise da Germinação da Semente de Pepino* e *Dinâmica das matrículas no Ensino Superior na modalidade EAD e presencial* o intuito foi a inserção formal de teoremas relacionados à derivadas de funções, mais especificamente, a inserção dos teoremas da 1ª e 2ª derivada de uma função. Por isso, foi solicitado pela professora regente da disciplina que os estudantes fizessem uso da aplicação de derivadas no desenvolvimento de suas atividades.

Desta forma, inicialmente o problema definido pelo grupo G2, na atividade 3, foi *elaborar um modelo que apresenta previsões da perda de água no decorrer de muitos anos na cidade de Uraí-PR*. Algumas impressões, tidas como interpretantes iniciais, tanto em relação à matemática necessária para solucionar o problema, quanto ao fenômeno em si foram evidenciados (necessidade de síntese dos dados, necessidade de elaboração de hipótese). Após uma análise computacional do comportamento do fenômeno (perda de água na distribuição) o grupo decidiu ajustar uma função do tipo exponencial. Assim, o modelo deduzido pelos estudantes para a referida situação foi $f(x) = 23{,}912 - 8{,}61 \,.\, e^{(-0{,}13x+261{,}3)}$, sendo $f(x)$ a quantidade de água perdida na distribuição (em m³) e $x$ o tempo em anos.

A partir disto, objetivando a aplicação de derivadas na atividade, o grupo G2 definiu um segundo problema a ser solucionado: *considerando o modelo matemático definido, em qual ano haverá a menor perda de água na distribuição?*

De maneira semelhante à atividade 2, o grupo determina a função derivada do modelo definido, desta vez, usando outras regras de derivação já estudadas em aula, regra da derivada do produto ($\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$) e regra da cadeia para derivadas de funções compostas. O grupo concluiu que, de acordo com o modelo definido por eles para o fenômeno, 2010 foi o ano em que houve a menor perda de água na distribuição, sendo este ano o ponto crítico da função (a partir da análise da derivada da mesma). Neste momento, este é o interpretante final dos estudantes para este fenômeno (em 2010 houve a perda mínima).

No entanto, de acordo com o relatório dos alunos, é possível perceber um equívoco matemático nos procedimentos adotados (a fim de determinarem um extremo para a função definida na atividade, os estudantes consideraram $ln0 = 0$). Tal equívoco foi percebido pelo grupo no decorrer das aulas, ao compreenderem, matematicamente, os extremos de uma função.

Ao compreenderem o que significam os extremos de uma função e o ponto de inflexão da função o grupo refez o relatório da atividade acrescentando uma justificativa com relação ao ponto de mínimo encontrado anteriormente. Tal justificativa é apresentada na figura 46, em que os estudantes especificam que *com o decorrer das aulas foi possível uma melhor compreensão a respeito do comportamento da função* (relatório do grupo G2).

**Figura 46 -** Correção do grupo G2 quanto à análise da função derivada

> Com o decorrer das aulas foi possível uma melhor compreensão a respeito do comportamento da função. Por se tratar de uma função exponencial, a mesma é crescente a todo momento. Portanto, já que o seu comportamento é totalmente crescente, é possível concluir que a função não possui ponto crítico, nem ponto de inflexão (que é o momento em que a curvatura da função é modificada). Por isso, os cálculos anteriores estão equivocados.
> O que faz sentido para o nosso modelo, uma vez que, dentro dos dados obtidos, não houve um momento em que a perda de água diminui no decorrer dos anos, a perda é sempre maior com o passar dos anos.

**Fonte:** relatório dos estudantes (G2).

Assim, temos indícios de que, com o andamento das aulas, uma nova semiose foi desencadeada pelos estudantes e o interpretante final gerado na atividade, gerou novos interpretantes que resultaram em outra compreensão dos alunos com relação ao fenômeno de que: *como seu comportamento é totalmente crescente, é possível concluir que a função não possui ponto crítico, nem ponto de inflexão* (relatório de G2) o que vai ao encontro do que afirmam Almeida e Silva (2017, p. 218) de que “atividades de modelagem matemática desencadeiam semiose e, semiose realiza construção de conhecimento”.

Na atividade *Análise da Germinação da Semente de Pepino*, o grupo G1 se propôs a analisar a germinação de sementes de pepino em função do tempo com 60% de extrato de amora selvagem e 40% de água. Inicialmente, o grupo apresentou algumas dificuldades com relação aos procedimentos matemáticos que seriam adotados para efetuar tal análise.

No entanto, após a realização da atividade *Qual tamanho de cabo elétrico usar?* os integrantes deste grupo decidiram utilizar os mesmos procedimentos da atividade anterior (Regra de Cramer) para solucionarem este problema, uma vez que, segundo E10, o comportamento dos dados desta atividade (germinação da semente de pepino) é semelhante ao da atividade anterior (escolha do cabo elétrico em função da bitola).

Tendo definido o procedimento matemático a ser adotado, o grupo deduziu o seguinte modelo matemático para o fenômeno (germinação da semente de pepino em função do tempo): $f(x) = -0{,}00103x^2 + 0{,}25335x - 2{,}89164$, em que $f(x)$ representa a quantidade de sementes de pepino germinadas e $x$ representa o tempo em horas.

Assim como o grupo G2, para aplicar o conhecimento de derivadas nesta situação, o grupo G1 definiu outra situação-problema a ser respondida: *em qual tempo ocorre o máximo de germinação de sementes através da contração de 60% de extrato?*

De forma bastante semelhante à atividade 2, desta vez os estudantes também fizeram uso das regras de derivação da potenciação ($\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$) e da função constante (conforme figura 47) e os grupos determinam as funções derivadas de seus modelos matemáticos e a igualaram a zero ($f'(x) = 0$). Com isso, encontram que um valor extremo da função é 122,98 (referente ao tempo em horas de germinação das sementes de pepino).

**Figura 47 -** Procedimentos adotados por G1 na Atividade 4

| | |
|---|---|
| Função<br>$f(x) = -0{,}00103x^2 + 0{,}25335x - 2{,}89164$<br><br>Derivada da função $f(x)$ usando a primeira regra da derivação:<br>$f'(x) = 2(-0{,}00103x^{2-1}) + 0{,}25335x^{1-1} - 0$<br>$f'(x) = -0{,}00206x + 0{,}25335$<br><br>Para definir em quantas horas teremos o máximo ou mínimo de germinações, consideramos $f'(x) = 0$, assim:<br>$0 = -0{,}00206x + 0{,}25335$<br>$-0{,}00206x = -0{,}25335$<br>$x = \frac{-0{,}25335}{-0{,}00206} = 122{,}98$ | Substituindo o valor de $x$ encontrado acima, para definir o número máximo de germinações em função das horas.<br><br>$f(122{,}98) = -0{,}00103(122{,}98)^2 + 0{,}25335(122{,}98) - 2{,}89164$<br>$f(122{,}98) = -15{,}578 + 31{,}157 - 2{,}89164$<br>$f(122{,}98) = 12{,}68$ sementes germinadas, ou seja 12 sementes<br><br>Logo pelo coeficiente angular da parábola ser negativo sabemos que temos um ponto de máximo, e por meio da derivada definimos o valor de seu vértice. $V(122{,}98; 12{,}68)$.<br><br>Como temos somente uma raiz da derivada desta função, não haverá o ponto de mínimo, apenas ponto de máximo desta função. |

**Fonte:** relatório dos estudantes (G1)

Neste caso, como os estudantes já conheciam regras de derivação e também já haviam estudado o extremo de uma função por meio do uso da análise da função derivada, então ao se depararem com a necessidade da referida análise, interpretantes imediatos, novamente, foram imperceptíveis. O que se percebeu foram interpretantes dinâmicos energéticos relacionados à ação de efetuar as análises e interpretantes finais relacionados às conclusões do grupo: *haverá apenas o ponto de máximo desta função; a germinação máxima aconteria após quase 123 horas de procedimento* (relatório do grupo G1).

Na atividade *Dinâmica das matrículas no Ensino Superior na modalidade EAD e presencial* o grupo G3 buscou investigar se a quantidade de matrículas em cursos superiores EAD (à distância) em algum momento será igual à quantidade de matrículas em cursos superiores presenciais no Brasil.

Inicialmente, de forma semelhante ao que foi feito na atividade 2, o grupo decidiu ajustar uma função polinomial de grau 2 a fim de deduzir um modelo que representasse o fenômeno (matrículas nos cursos superiores). No entanto, tendo tais modelos definidos, o grupo percebeu a necessidade de inibir o crescimento das matrículas, uma vez que, como dito por E4: *as matrículas não podem crescer para sempre. Nem a população cresce assim* (fala de E4).

Desta maneira, outros procedimentos matemáticos foram adotados e o grupo definiu um modelo logístico para representar as matrículas nos cursos superiores EAD ($Me(t) = \frac{1177297{,}872}{1+9{,}281e^{-0{,}775\,.\,t}}$), sendo $Me(t)$ a quantidade de matrículas em cursos EAD no tempo $t$ em anos, e um modelo exponencial assintótico para representar a quantidade de matrículas em cursos presenciais ($Mp(t) = 7466089{,}60 -$

$3372109{,}60e^{-0{,}0748\,.\,t}$), em que $Mp(t)$ a quantidade de matrículas em cursos presenciais no tempo $t$ em anos.

Ao analisar a função derivada de seus modelos, conforme justificativa registrada no relatório do grupo (Figura 48), os alunos não conseguiram aplicar derivadas na situação.

**Figura 48 –** Justificativa do grupo G3 sobre a aplicação de derivadas

O cálculo do nosso trabalho está incompleto, pois ao se tratar de funções logística e exponencial ao aplicarmos logaritmo não conseguimos encontrar valores para x.

**Fonte:** relatório dos estudantes (G3)

De acordo com a justificativa do grupo, foi possível perceber uma fragilidade com relação às regras de derivação. A justificativa do grupo pode ser tomada como um interpretante final para essa situação (não é possível calcular a derivada). A partir disto, semioses não são mais desencadeadas.

No entanto, ao serem questionados sobre o que poderiam investigar a partir das funções derivadas dos modelos deduzidos pelos grupos os alunos citaram algumas situações: *quão rápido cresce o número de matrículas ou qual a velocidade de crescimento das matrículas na modalidade EAD*.

Tal registro foi utilizado pela professora regente da disciplina para retomar as regras de derivação e apresentar aos estudantes outras teorias com relação à aplicação de derivadas em situações cotidianas.

# 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desta pesquisa foi investigar o que os signos interpretantes produzidos ou utilizados em atividades de modelagem matemática nos permitem inferir com relação ao conhecimento matemático dos estudantes. Com tal finalidade, buscamos identificar e caracterizar os signos interpretantes produzidos ou utilizados no desenvolvimento de uma sequência de atividades de modelagem matemática. Além disso, buscamos investigar indícios de exploração e aplicação de modelos no desenvolvimento das atividades e relacionar a evolução dos signos interpretantes com o conhecimento de derivadas de uma função.

Assim, retomamos aqui, de forma geral, algumas das compreensões construídas ao longo da pesquisa.

A fim de alcançar o objetivo proposto analisamos uma sequência composta por cinco atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos do segundo ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade estadual localizada no Norte do Paraná. A análise dessa sequência de atividades foi realizada à luz da Análise Textual Discursiva considerando aspectos da modelagem matemática na Educação Matemática enquanto alternativa pedagógica e pressupostos da semiótica peirceana principalmente no que diz respeito à teoria dos interpretantes.

Tal análise resultou na categorização de elementos que nos permitiram identificar e caracterizar os signos interpretantes produzidos ou utilizados pelos estudantes no desenvolvimento das atividades. Para a análise, três categorias foram consideradas: *nível significante imediato em uma sequência de atividades de modelagem matemática; nível significante dinâmico em uma sequência de atividades de modelagem matemática; nível significante final em uma sequência de atividades de modelagem matemática*.

A categoria nível significante imediato em uma sequência de atividades de modelagem matemática explicita interpretantes imediatos, conforme classificação da semiótica peirceana, que são produzidos pelos intérpretes no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Tais interpretantes estão relacionados às primeiras impressões evidenciadas pelos intérpretes ao entrarem em contato pela primeira vez com as situações a serem explorada. Esta categoria ficou composta por três unidades de análise: *potencial do signo para significar*; *aquilo que o signo está apto a produzir*; *capacidade do signo de transmitir informações*.

A categoria nível significante dinâmico em uma sequência de atividades de modelagem matemática explicita os interpretantes dinâmicos evidenciados no desenvolvimento da sequência de atividades. Tais interpretantes estão relacionados, principalmente, às reações dos intérpretes aos seus interpretantes imediatos. Esta categoria ficou composta por duas unidades de análise: *efeito semiótico imediato do signo* e *entendimento geral produzido pelo signo*.

A categoria nível significante final em uma sequência de atividades de modelagem matemática explicita os interpretantes finais evidenciados no desenvolvimento da sequência de atividades. Esta categoria ficou composta por três unidades de análise: *signo de lei; aquilo para o qual o fenômeno tende; norma ou tipo de padrão sígnico*.

Com relação ao conhecimento matemático de derivadas, níveis significantes imediatos, dinâmicos e finais também foram evidenciados a partir da análise dos signos produzidos ou utilizados pelos estudantes no desenvolvimento da sequência de atividades de modelagem matemática.

Os *indícios de noção intuitiva de limites de função* evidenciados pelos estudantes, principalmente na primeira atividade, também foi uma unidade de análise relacionada à categoria nível significante imediato em uma sequência de atividades de modelagem matemática.

A categoria nível significante dinâmico em uma sequência de atividades de modelagem matemática também foi composta por unidades de análise relacionadas ao conhecimento de derivadas dos estudantes. Tais unidades de análise foram denominadas: *indícios de fragilidade com relação ao conhecimento de derivadas; aplicação de derivadas nos fenômenos estudados; compreensão do fenômeno a partir da análise matemática*.

As conclusões apresentadas pelos estudantes para as situações-problemas exploradas a partir dos conhecimentos matemáticos foram considerados aqui como de níveis significantes finais na sequência de atividades desenvolvida.

Além disso, como explicitado, os procedimentos dos estudantes no decorrer do desenvolvimento da sequência de atividade são mediados pelo uso, interpretação e produção de diferentes representações tomadas aqui como signos. Assim, indo ao encontro do que foi explorado por Almeida e Silva (2017), as representações ocupam um papel importante no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática oferecendo elementos para que a obtenção e a interpretação da solução possam ocorrer. Além disso, favorecem a compreensão, não só da matemática, mas também dos fenômenos em estudo.

A partir da análise dos signos produzidos ou utilzados pelos estudantes no desenvolvimento das atividades foi possível perceber que uma sequência de atividades de modelagem matemática propicia momentos de exploração e aplicação de modelos, seja no momento em que os estudantes sentem a necessidade de refinar seus modelos para melhor representar o fenômeno explorado ou mesmo quando usam os modelos obtidos em contextos distintos.

A análise nos permite inferir também que uma sequência de atividades de modelagem matemática possibilita a organização e a elaboração de signos de tal maneira que é possível ter acesso, mesmo que indiretamente, àquilo que o estudante está construindo em sala de aula no que diz respeito ao conhecimento matemático, possibilitando assim, que professor perceba dificuldades dos alunos com relação ao que está sendo estudado podendo fazer retomadas que julgar necessário.

Embora essa pesquisa contribua para o desenvolvimento da Modelagem Matemática na Educação Matemática, por exemplo, no que diz respeito ao desenvolvimento de sequências de atividades com estudantes, algumas limitações são presentes. Um dessas limitações é o fato de o pesquisador não estar em contato direto com os sujeitos de pesquisa e, por isso, não poder acompanhar o desenvolvimento integral de todas as atividades da sequência. Caso esse acompanhamento fosse integral, possivelmente, muitos outros signos seriam registrados e pudessem ser utilizados nas análises.

Além disso, investigar relações entre o conhecimento matemático dos estudantes e os signos interpretantes utilizados ou produzidos pelos mesmos em atividades de modelagem matemática em disciplinas posteriores a abordada aqui, por exemplo Cálculo Diferencial e Integral II, pode se constituir em inquietações para pesquisas futuras.

## REFERÊNCIAS


ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké. FE-Unicamp**, v. 18, número temático, p. 387-414, 2010.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; BRITO, Dirceus dos Santos. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?. **Ciência e Educação (UNESP)**, 11, 1-16, 2005.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; FATORI, Luci Harue; SOUZA, Luciana Gastaldi Sardinha. Ensino de Cálculo: uma abordagem usando a modelagem Matemática. **Revista Ciência e Tecnologia (UNISAL)**, Ano X, n. 16, p 47-59, 2007.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SILVA, Karina Alessandra Pessôa da. A Ação dos Signos e o Conhecimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática. **Boletim de Educação Matemática**, v. 31, n. 57, p. 202-219, abr., 2017.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SILVA, Karina Alessandra Pessôa da; VERONEZ, Michele Regiane Dias. Sobre a geração e interpretação de signos em atividades de modelagem matemática. *In:* VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - VI SIPEM, 2015, Pirenópolis. **Anais do VI SIPEM**. Rio de Janeiro: SBEM, 2015. v. 1. p. 1-12.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SILVA, Karina Alessandra Pessôa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. Sobre a categorização dos signos na Semiótica Peirceana em atividades de Modelagem Matemática. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias. REIEC**, v. 6, n. 1, p. 1-10, jul. 2011.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SILVA, Karina Alessandra Pessôa da; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ÄRLEBÄCK, Jonas; DOERR, Helen. Moving beyond a single modelling activity. In: **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**. Springer International Publishing, p. 293-303, 2015.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. **24ª RA da ANPED, Anais**. Rio de Janeiro: ANPED, 2001.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática em cursos para não-matemáticos. *In*: **Disciplinas Matemáticas em cursos superiores**, CURY, Helena Noronha. (org), EDIPUCRS, Porto Alegre, 2004, pp 85-110.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. 3. ed. Lisboa: Edições, v. 70, 2011.

BLOMHØJ, Morten; KJELDSEN, Tinne Hoff. Students' reflections in Mathematical Modelling Projects. *In*: KAISER, G. et al. (ed.). **Trends in Teaching and Learning of**

**Mathematical Modelling**: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14). New York: Springer, p. 385-395, 2011.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática e a sala de aula. **Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática**, 1, 1-10, 2004.

CABRAL, Tânia Cristina Baptista; CATAPANI, Elaine. Imagens e Olhares em uma disciplina de Cálculo em serviço, **Zetetikê**, Vol 11, nº. 09, 2003, pp- 101-115.

CALDEIRA, Ademir Donizeti. Modelagem Matemática: um outro olhar. **Alexandria Revista de Educação em Ciências e Tecnologia**, 2, 2, 33-54, 2009.

CARREIRA, Susana Paula Graça. Where there's a model, there's a metaphor: Metaphorical thinking in students' understanding of a mathematical model. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 3, n. 4, p. 261-87, 2001.

COLAPIETRO, Vincent. Reflective Acknowledgement and Practical Identity: Kant and Peirce on the Reflexive Stance, *in:* Rossella Fabbrichesi; Susanna Marietti (ed.), **Semiotics and Philosophy in Charles Sanders Peirce**. Cambridge Scholars Publishing, 2009.

D'AMORE, Bruno; FANDIÑO PINILLA, Martha Isabel; IORI, Maura. **Primeiros elementos de semiótica**. São Paulo: Editora Livrarua da Física, 2015.

DAVIS, Philip; HERSH, Reuben. **A experiência matemática**. Lisboa: Gradiva, 1995.

DRIGO, Maria Ogécia. Comunicação e cognição: semiose na mente humana. *In*: **Comunicação e cognição: semiose na mente humana**. Sulinas, 2007.

FERRUZZI, Elaine Cristina. et al. Modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem nos cursos superiores de tecnologia. **World Congress on Engineering and Technology Education**. São Paulo, 2004.

FIDALGO, Antônio; GRADIM, Anabela. **Manual de Semiótica**. UBI – PORTUGAL: UBI – PORTUGAL. www.ubi.pt, 2005.

FRANCHI, Regina Helena de Oliveira Lino. **A modelagem matemática como estratégia de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de engenharia**. Dissertação de Mestrado, Unesp, Rio Claro, 1993, 148p.

GALBRAITH, Peter. Models of modelling: genres, purposes or perspectives. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n. 5, p. 3-16, 2012.

GARZELLA, Fabiana Aurora Colombo**. A disciplina de Cálculo I**: análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos. Tese de Doutorado em Educação, Universidade Estadual de Campinas, 2013.

GODOY, Arilda Schmidt. Pesquisa Qualitativa: tipos fundamentais. **Revista e Administração e Empresas. São Paulo**, v. 35, n. 3, p. 20-29, 1995.

GREER, Brian; VERSCHAFFEL, Lieven. Modelling competencies – Overview. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), **Modelling and applications in mathematics educa-tion: The 14th ICMI study** (pp. 219–224). New York: Springer, 2007.

KAISER, Gabriele; BRAND, Susanne. Modelling competencies: Past development and further perspectives. In: **Mathematical modelling in education research and practice**. Springer International Publishing, 2015. p. 129-149.

KAISER, Gabriele; SRIRAMAN, Bharath. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

KEHLE, Paul; CUNNINGHAM, Donald. Semiotics and Mathematical Modeling. **International Journal of Applied Semiotics**, v. 3, n. 1, p. 113-129, 2000.

LESH, Richard; DOERR, Helen. Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. *In*: Richard Lesh & Helen Doerr (Eds.), **Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching** (pp. 3–33). Mahwah: Erlbaum, 2003.

LESH, Richard; CRAMER, Kathleen; DOERR, Helen; POST, Thomas; ZAWOJEWSKI, Judith. Model Development Sequences. *In*: Richard Lesh & Helen Doerr, (Eds.), **Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching**. Mahwah: Erlbaum, 2003.

LUCCAS, Simone. **O ensino introdutório de matemática em cursos de administração: construção de uma proposta pedagógica.** Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina (Brasil), Centro de Ciências Exatas, 2011.

MCCLAIN, Kay. Task-Analysis Cycles as Tools for Supporting Students' Mathematical Development. *In*: Richard Lesh & Helen Doerr (Eds.), **Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching** (pp. 3–33). Mahwah: Erlbaum, 2003.

MORAES, Roque. Análise de conteúdo. **Educação**, Porto Alegre, v. 22, n.37, p. 7-32, mar. 1999.

MORAES, Roque. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. **Ciência & Educação**, Bauru, v.9, n.2, p.191-211, 2003.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. **Análise textual discursiva.** Ijuí: Ed. Unijuí, 2007.

NÖTH, Winfred. **Panorama da Semiótica**: de Platão a Peirce. São Paulo: Annablume, 2008.

OTTE, Michael. Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. **Educational Studies in Mathematics**. Springer, v. 61, p. 11-38, 2006.

OTTE, Michael. The Analytic/Synthetic Distinction and Peirce's Conception of Mathematics, *In:* Rossella Fabbrichesi; Susanna Marietti (ed.), **Semiotics and Philosophy in Charles Sanders Peirce***.* Cambridge Scholars Publishing, 2009.

PEIRCE, Charles Sanders. **Semiótica e filosofia**. Editora Cultrix, 1972.

PEIRCE, Charles Sanders. **Semiótica**. 3. ed. São Paulo: Perspectiva, 2005.

PEIRCE, Charles Sanders; HARTSHORNE, Charles; WEISS, Paul; BURKS, Arthur. **The Collected Papers of Charles Sanders Peirce**. InteLex Corporation, 1994. (Aqui referido como CP; os números das citações referem-se aos volumes e parágrafos, respectivamente).

RAMOS, Daiany Cristiny. **O raciocínio abdutivo em atividades de Modelagem Matemática**. 2016. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SANZOVO, Daniel Trevisan; LABURÚ, Carlos Eduardo. Níveis Significantes do Significado das Estações do Ano com o Uso de Diversidade Representacional na Formação Inicial de Professores de Ciências. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, v. 17, n. 3, p. 745-772, 2017.

SANTAELLA, Lúcia. **Teoria geral dos signos. Semiose e Autogeração**. São Paulo: Ática, 1995.

SANTAELLA, Lúcia. Contribuições do pragmatismo de Peirce para o avanço do conhecimento. **Revista de Filosofia***.* Curitiba, v. 18, n. 18, p. 75-86, jan./jun., 2004a.

SANTAELLA, Lucia. O papel da mudança de hábito no pragmatismo evolucionista de Peirce. **Cognitio: Revista de Filosofia. ISSN 2316-5278**, v. 5, n. 1, p. 75-83, 2004b.

SANTAELLA, Lúcia. **Matrizes da linguagem e pensamento**: sonora visual verbal: aplicações na hipermídia. 3. ed. São Paulo: Iluminuras: FAPESP, 2005.

SANTAELLA, Lúcia. **Semiótica aplicada**. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

SANTAELLA, Lúcia. **A teoria geral dos signos**: como as linguagens significam as coisas. 2. reimpr. da 1. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

SANTAELLA, Lúcia. **O que é Semiótica**. Coleção Primeiros Passos. São Paulo: Brasiliense, 2012.

SAVAN, David. **An introduction to C. S. Peirce full system of semiotic**. Toronto: Victoria College of the University of Toronto, 1976. (Monograph Series of the Toronto Semiotic Circle, 1).

SILVA, Karina Alessandra Pessôa da. **Modelagem Matemática e Semiótica**: algumas relações. 2008. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SILVA, Karina Alessandra Pessôa da. **Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem Matemática: implicações para a atribuição de significado**. 2013. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SILVA, Karina Alessandra Pessôa da; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. Caminhos do Significado em Atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os interpretantes. **Boletim de Educação Matemática**, v. 29, n. 52, 2015.

STEINBRING, Heinz. What makes a sign a Mathematical Sign? An epistemological perspective on mathematical interaction. **Educational Studies in Mathematics**. New York: Ed. Springer, v. 61, n. 1, p.133-162, feb. 2006.

THOMAS, George. **Cálculo**, vol. 1. 11º edição. Editora: Prentice-Hall, 2009.

VILLARREAL, Mônica Ester. **O pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias informáticas**. 1999, Tese de Doutorado (Doutorado em Educação Matemática), UNESP- RC.

# APÊNDICES

## APÊNDICE A - QUESTIONÁRIO DE CARACTERIZAÇÃO DOS ESTUDANTES

| | | |
|---|---|---|
| **1) Dados pessoais do respondente:**<br>(Os dados preenchidos nesta página não serão divulgados. Servem apenas para esclarecimento para eventuais dúvidas do pesquisador). | | |
| Nome: | | |
| Endereço: | | |
| Telefone: | E-mail: | |
| Data de Nascimento: | Idade: | |
| **2) Formação Acadêmica** | | |
| ( ) Outro curso de graduação: | | |
| Ano de conclusão: | ( ) Instituição Pública | ( ) Instituição Privada |
| **3) Disciplina de Cálculo Diferencial Integral I (CDI - I)** | | |
| Quantidade de vezes que cursou a disciplina de CDI - I: ___________ | | |
| **4) Questionário:** | | |
| 4.1) Você tem experiência como professor de Matemática?<br>Se sim: Quanto tempo? Em que nível de escolaridade?<br><br>4.2) Você participa do PIBID? Se sim, quanto tempo?<br><br>4.3) Você já teve contato com a Modelagem Matemática?<br>Se sim: Quando? Como foi a experiência?<br><br>4.4) Assinale, em ordem de prioridade, aspectos que considera essenciais na resolução de problemas que envolvem matemática:<br>( ) Formulação de hipóteses explicativas para o problema.<br>( ) Conhecimento de conceitos matemáticos.<br>( ) Conceber diferentes representações para o problema<br>( ) Identificar o problema a partir de informações dadas em um texto.<br>( ) Identificar possíveis padrões.<br>( ) Outro aspecto (especificar):___________________________________________ | | |
| **5) Para uso do pesquisador** | | |
| Local: | Data: | |
| Código do respondente (para controle do pesquisador): | | |

## APÊNDICE B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Tendo em vista o desenvolvimento da pesquisa de mestrado, sob responsabilidade de **THIAGO FERNANDO MENDES**, estudante do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, gostaríamos de contar com sua participação, que se daria da seguinte forma: desenvolvimento de atividades matemáticas e entrevista, quando necessário, a respeito dos registros obtidos no desenvolvimento das atividades, bem como com sua autorização para analisar os registros escritos obtidos e gravar em áudio e vídeo as aulas com o intuito de esclarecer possíveis discussões.

Esclarecemos que sua participação é totalmente voluntária, podendo o (a) senhor (a): recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento, sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa. Esclarecemos, também, que suas informações serão utilizadas somente para os fins de pesquisa acadêmica e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade. Os registros gravados serão deletados e apagados após a utilização dos mesmos na pesquisa.

Eu, ______________________________________________________________, RG _______________, tendo sido devidamente esclarecido sobre os procedimentos da pesquisa, concordo em participar **voluntariamente** da pesquisa e autorizo por meio do presente termo o estudante **Thiago Fernando Mendes**, do mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, a utilizar integralmente ou em partes meus registros escritos e gravados para fins de pesquisa acadêmica, podendo divulgá-los em publicações científicas, com a condição de que estará garantido meu direito ao anonimato.

Assinatura:_____________________________
Data:____________________

# APÊNDICE C - ATIVIDADE 1: O USO DA INTERNET NO BRASIL

## TEXTO 1:

**Pesquisa revela que mais de 100 milhões de brasileiros acessam a internet**[24]

A 11ª edição da pesquisa TIC Domicílios 2015, que mede a posse, o uso, o acesso e os hábitos da população brasileira em relação às tecnologias de informação e de comunicação, mostra que 58% da população brasileira usam a internet – o que representa 102 milhões de internautas. A proporção é 5% superior à registrada no levantamento de 2014. De acordo com a pesquisa, o telefone celular é o dispositivo mais utilizado para o acesso individual da internet pela maioria dos usuários: 89%, seguido pelo computador de mesa (40%), computador portátil ou notebook (39%), tablet (19%), televisão (13%) e videogame (8%).

O resultado do estudo, divulgado nesta terça-feira (13), é fruto de entrevistas pessoais realizadas em 23.465 domicílios em todo o território nacional, entre novembro de 2015 e junho de 2016.

Fonte: Portal Brasil, com informações da Agência Brasil

De acordo com a reportagem divulgada no Portal Brasil o número de usuários da internet no Brasil vem crescendo com o passar dos anos. A Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (PNAD) realizada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) apresenta a quantidade de domicílio com acesso à internet no Brasil desde o ano de 2006, os dados são apresentados na Tabela 1.

| Ano | Domicílios com acesso à internet (em milhões) |
|---|---|
| 2006 | 13,26 |
| 2007 | 14,67 |
| 2008 | 16,20 |
| 2009 | 18,96 |
| 2010 | 19,81 |
| 2011 | 22,49 |
| 2012 | 24,14 |

[24] Reportagem publicada no Portal do Governo Federal em 13.09.2016. Matéria completa disponível em: http://www.brasil.gov.br/ciencia-e-tecnologia/2016/09/pesquisa-revela-que-mais-de-100-milhoes-de-brasileiros-acessam-a-internet - Acesso em 20.nov.2016

| | |
|---|---|
| 2013 | 26,36 |
| 2014 | 28,34 |
| 2015 | 30,32 |
| 2016 | 32,29 |

Tabela 1: Número de usuários de internet no Brasil de 2005 a 2016
Fontes utilizadas: PNAD 2015 (IBGE) e Banco Mundial.

**TEXTO 2:**

Conheça o bug do ano 2038, o novo "bug do milênio"[25]

Por **Gabriel Garcia**

Em 2038 os processadores de 32-bit podem parar de funcionar, pois não conseguirão mais contar o tempo. É um problema parecido com o "bug do milênio", quando se temia que os computadores não entendessem a mudança de numeral na casa do milhar.

O problema do ano 2038 é causado por uma limitação dos processadores de 32-bit. O processador é o componente central que faz funcionar todos os computadores. Ele faz os cálculos que permitem aos programas funcionarem e tomarem decisões.

Em 2038, às 3 horas, 14 minutos e 5 segundos de 19 de março, os computadores que estiverem usando sistemas de 32-bit não conseguirão lidar com a mudança de data, pois terão atingido seu limite máximo de contagem. Assim, os computadores não conseguirão saber a diferença entre 2038 e 1970, o primeiro ano no qual todos os sistemas atuais passaram a medir o tempo.

Não se sabe como os sistemas iriam se comportar ao chegar no seu limite de processamento. Alguns poderiam continuar a funcionar normalmente, apenas com a data incorreta. Outros, que dependem da data precisa, poderiam simplesmente parar.

[25] Reportagem publicada no site Exame.com em 18.12.2014. Matéria completa disponível em: http://exame.abril.com.br/tecnologia/conheca-o-bug-do-ano-2038-o-novo-bug-do-milenio/ - Acesso em 20.nov.2016

## APÊNDICE D - ATIVIDADE 2: QUAL TAMANHO DE CABO ELÉTRICO USAR?

**TEXTO:**

### Instalação Elétrica segura com a Norma Técnica ABNT NBR 5410[26]

Tratando-se de eletricidade, o essencial é a segurança. Uma instalação elétrica mais segura e com maior qualidade é o que garante a Norma Técnica Brasileira Regulamentadora (NBR) 5410:2004. Esta Norma estabelece as condições a que devem satisfazer as instalações elétricas de baixa tensão, a fim de garantir a segurança de pessoas e animais, o funcionamento adequado da instalação e a conservação dos bens. Esta NBR 5410 determina, dentre outras coisas, a seção nominal (bitola) dos cabos, ou condutores elétricos, a ser utilizada nas instalações elétricas. Tal seção é definida de acordo com a carga elétrica que passará por este condutor.

Além da proteção, a escolha do cabo ideal pode gerar economia, uma vez que, dentre outras coisas, ela poderá minimizar o desperdício de energia. Em qualquer circuito elétrico, a queda de tensão elétrica é um fator presente. Esta queda trata-se de uma anomalia causada pelas distâncias percorridas pela corrente elétrica em determinado circuito: quanto maior for o comprimento do condutor, maior será a queda de tensão, já que há o aumento de resistência elétrica devido a quantidade maior de material utilizado para fazer maiores condutores.

Os dados da Tabela 1 foram coletados a partir de uma experiência em um laboratório de Controle e Automação e apresentam a queda de tensão de um condutor elétrico de acordo com a sua bitola (seção nominal). Utilizando fios de cobre de mesmo comprimento (1 metro) e diferentes bitolas, e um voltímetro para medir a diferença de potencial entre dois pontos do circuito elétrico criado, obtivemos os seguintes valores:

| Bitola do cabo (mm²) | Queda de Tensão por metro de cabo (V) |
|---|---|
| 1,5 | 0,023 |
| 2,5 | 0,017 |
| 4,0 | 0,012 |
| 6,0 | 0,02 |
| 10,0 | 0,095 |
| 16,0 | 0,35 |
| 25,0 | 0,98 |
| 35,0 | 2 |
| 50,0 | 4,5 |
| 70,0 | 9,5 |

Tabela 1: Queda de Tensão de acordo com a bitola do cabo
Fonte: Dados coletados

[26] Reportagem publicada no Portal da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) em 05.01.2017. Matéria completa disponível em: http://abnt.org.br/paginampe/noticias/234-instala%C3%A7%C3%A3o-el%C3%A9trica-mais-segura-com-a-norma-t%C3%A9cnica-abnt-nbr-5410 (Adaptado) - Acesso em 07.mar.2017