Universidade
Estadual de Londrina

MARCELE TAVARES MENDES

UTILIZAÇÃO DA PROVA EM FASES COMO RECURSO PARA REGULAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM AULAS DE CÁLCULO

Londrina
2014

MARCELE TAVARES MENDES

UTILIZAÇÃO DA PROVA EM FASES COMO RECURSO PARA REGULAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM AULAS DE CÁLCULO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Doutor.

Orientadora: Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco

Londrina
2014

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

M538u Mendes, Marcele Tavares.
Utilização da prova em fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo / Marcele Tavares Mendes. – Londrina, 2014.
274 f. : il.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2014.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Cálculo – Teses. 3. Aprendizagem – Avaliação – Teses. 4. Educação matemática – Teses. 5. Estudantes – Testes e medidas educacionais – Teses. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

MARCELE TAVARES MENDES

UTILIZAÇÃO DA PROVA EM FASES COMO RECURSO PARA REGULAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM AULAS DE CÁLCULO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Doutor.

BANCA EXAMINADORA

____
Orientadora. Profª. Drª. Regina Luzia Corio de Buriasco
Universidade Estadual de Londrina – UEL

____
Profª. Drª. Andréia Büttner Ciani
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE

____
Profª. Drª. Angela Marta P. das D. Savioli
Universidade Estadual de Londrina – UEL

____
Prof. Dr. Carlos Roberto Vianna
Universidade Federal do Paraná – UTFPR

____
Profª. Drª. Helena Noronha Cury
Centro Universitário Franciscano – UNIFRA

Londrina, 18 de agosto de 2014.

Dedico este trabalho ao meu esposo Rafael e ao meu filho Miguel, meus amores, anjos de alegria em minha vida!

AGRADECIMENTO

“Quando se sonha sozinho é apenas um sonho. Quando se sonha juntos é o começo da realidade.” (Cervantes)

Agradeço à todos que de algum modo contribuíram ao alcance desse momento, desse sonho!

Em especial, agradeço:

- ✓ a Deus, por mais esta conquista;
- ✓ à minha orientadora Regina, “PROFESSORA”, por ter criado sempre uma oportunidade para eu aprender e ter me guiado nesses aprendizados;
- ✓ aos professores da banca pelo cuidado em suas leituras e por todas considerações apresentadas;
- ✓ aos meus queridos alunos, “MINHA INSPIRAÇÃO”, pela dedicação aos estudos, pela participação em minha pesquisa, pelo tempo dispensado, sem eles essa pesquisa não aconteceria;
- ✓ aos professores do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática pelos momentos de discussões e de aprendizagem;
- ✓ aos meus colegas de trabalho, “DAMAT-UTFPR”, por terem confiado e incentivado meus estudos;
- ✓ aos meus companheiros de estudo, “GEPEMA”, por todas as discussões e estudos teóricos, por todos pitacos no desenvolvimento desta pesquisa e deste texto, por todas as conversas não teóricas, por todos consolos e todas experiências que me proporcionaram;
- ✓ ao meu esposo Rafael, “MEU AMOR”, por todos os momentos e sonhos compartilhados e, sobretudo, por não me deixar por um segundo esquecer que sou muito amada e que tenho um parceiro que faz de meus sonhos os seus. Não posso esquecer de agradecer os cafés expressos feitos depois do almoço para meu

dia render mais e todos tipos de tarefa do lar para que eu pudesse escrever sossegada este trabalho;

- ✓ ao meu filho Miguel, "MEU PRÍNCIPE", por ser a minha alegria, por ter me apresentado o amor mais puro que já senti e ter sido meu equilíbrio nestes dois últimos anos;

- ✓ ao meu pai Tadeu, "MEU EXEMPLO", por ter acreditado que alcançaria esse título desde o momento em que saí de casa com 17 anos. Obrigada por ter carregado, sem reclamar, por anos, uma enxada pesada para que eu pudesse realizar um sonho nosso, o de estudar;
- ✓ à minha mãe, "MINHA FÉ", por ter me ensinado a ser disciplinada desde muito pequena, por ter deixado de lado o luxo de sua casa para que eu estudasse, por rezar sempre por mim e minha família;
- ✓ aos meus irmãos, "MARTINHA E MARQUINHO", por me incentivar e torcer pelo meu sucesso;
- ✓ aos meus sogros, Isabel e Luciano, e minhas cunhadas, Marcele e Cristiane, "FAMÍLIA AMPLIADA", por estarem sempre presente e me fazerem sentir acolhida;
- ✓ aos meus amigos Pamela, Rodrigo, André e Adriana, "CONFIDENTES", por terem me escutado além do que deviam, por terem me apoiado, por terem me ensinado que sempre posso olhar de outra forma ("Tem relevância acadêmica? Não tem, então não sofre!!!");
- ✓ à minha amiga Alessandra, "COMADRE", por ser minha irmã londrinense, por sempre me escutar e torcer por mim;
- ✓ à minha amiga Karina, "TELEATENDENTE", por sempre me ouvir e me trazer para a realidade;
- ✓ aos MUITOS amigos, de perto e distantes, que estiveram sempre presentes nesta caminhada. Obrigada pelo carinho e confiança.

“Se o educador pode ser considerado como um arquiteto, a sua ação não estaria diretamente voltada para o aluno, e sim para o espaço no qual o aluno se constrói e aprende”

(Hadji, 1995, p. 140).

MENDES, Marcele Tavares. **Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. 274 f. Trabalho Tese de doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2014.

RESUMO

Este trabalho descreve e analisa uma pesquisa com uma Prova em Fases (10 fases), realizada com 48 alunos matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral em um curso de engenharia de uma universidade pública. Nessa pesquisa visou-se investigar a utilização da Prova em Fases como um recurso para regulação da aprendizagem, em especial, regulação de conhecimentos básicos para a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Para tanto, pautou-se pela abordagem de ensino da Educação Matemática Realística e em autores que tratam da avaliação como elemento constituinte e permanente da prática pedagógica. No trabalho, a regulação esteve associada a ações realizadas pelo aluno sobre o seu processo de aprendizagem, com a intenção de fazê-lo progredir e/ou redirecioná-lo a partir das intervenções escritas do professor. Por conseguinte, os alunos desempenharam o papel de protagonistas da aprendizagem, e o professor, o de guia, intervindo no processo por meio de perguntas e considerações a respeito das produções escritas apresentadas em cada fase. A Prova em Fases revelou-se um recurso profícuo para o ensino, a aprendizagem e a avaliação, permitindo ao professor recolher informações e guiar o aluno em cada momento do processo. A reflexão do aluno sobre suas produções e o lidar com as intervenções do professor, mostraram que é preciso haver “boas” intervenções escritas para que aconteça uma regulação da aprendizagem satisfatória. As intervenções oportunizaram que alunos apresentassem seu poder matemático, bem como possibilitaram à professora/pesquisadora a realização de uma reinvenção-guiada, com a qual o aluno pôde iniciar um processo de matematização seguindo seu próprio percurso de aprendizagem. A construção do trabalho gerou indícios de que, por meio da análise da produção escrita em uma Prova em Fases, sustentada teoricamente pela RME, pode-se criar um contexto que favorece a regulação da aprendizagem, em especial da aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral.

Palavras-chave: Educação matemática. Prova em fases. Regulação da aprendizagem. Educação matemática realística. Ensino de cálculo.

MENDES, Marcele Tavares**. Use of Stage test as a resource for regulation of learning in a Calculus classes.** 2014. 274 p. Doctorate thesis (Post-Graduation Program on the Teaching of Sciences and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina, 2014.

ABSTRACT

This paper describes and analyzes a research of a Stage test (10 stages), using 48 students enrolled in the Differential and Integral Calculus course in an engineering school at a public university. This research aimed to investigate the use of Stage test as a resource for regulation of learning, in particular, regulation of basic knowledge of Differential and Integral Calculus learning. To do so, it was guided by the teaching approach of Realistic Mathematics Education and by the authors who considers assessment as a constituent and permanent element of teaching practice. In this work, the regulation was related with actions performed by the student on their learning process, with the intention of making them progress and/or redirect them from the writings interventions of teacher. Therefore, students played the main role in learning, and the teacher, the guide, intervening during the process by asking questions and considerations regarding the written productions presented at each stage. The Stage test showed to be a useful resource for teaching, learning and assessment, allowing the teacher to gather information and guide the student in each stage in the proceedings. The student reflection on their own productions and dealing with the teacher's interventions, showed that there must be "good" writtens intervention in order to occurs a satisfactory regulation of learning. Interventions gave to the students opportunities to show their mathematical power and also allowed the teacher/researcher to make a guided reinvention, in which students could initiate a process of mathematization following their own path of learning. The work construction has generated evidence that, through the analysis of written production in a Stage test, theoretically supported by RME, you can create a context that favors the regulation of learning, especially in the learning of Differential and Integral Calculus.

Key-words: Mathematics education. Stage test. Regulation of learning. Realistic mathematics education. Calculus teaching.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Sou professora de Cálculo Diferencial e Integral I e II desde 2006 e tenho me preocupado, ano após ano, com os altos índices de evasão e reprovação e, por mais que as dificuldades intrínsecas da disciplina, a falta de base dos alunos e um grande distanciamento metodológico entre o Ensino Médio e o Ensino Superior (NASCIMENTO, 2000; PEDROSO, 2009; BARICHELLO, 2008; CURY, 2003; REIS, 2001, 2009) sejam apontados como causas, sinto-me de alguma forma, responsável por esse fracasso.

Nesse contexto de altos índices de evasão e reprovação, conforme afirma Baldino (1995, p. 3), "supõe-se que o aluno aprenda vendo a exposição do professor e não se supõe que, tendo-a *visto*, vá ter dificuldades". Com relação à avaliação, de modo geral as atividades dos alunos são avaliadas de forma estanque, como se o conhecimento de um conteúdo não dependesse do que foi aprendido anteriormente, ou seja, faz uso de uma avaliação somativa, em que se pretende avaliar o desempenho final, com o objetivo de classificá-los ou certificá-los. As respostas dos alunos são consideradas apenas como "certas" ou "erradas", e não se busca analisar as produções na expectativa de aproveitá-las para propor mudanças, conforme Cury (2005, p. 2), perde-se a "oportunidade de compreender as habilidades já desenvolvidas pelos alunos ou a aprendizagem em cada etapa do processo de ensino".

Essa avaliação somativa e a dicotomia de "certo" e "errado" passaram a ser um forte incômodo para mim a partir do momento em que me pus frente às discussões de textos de Educação Matemática nas disciplinas do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, em 2009, e no GEPEMA[1], em 2010, em especial por reconhecer que a avaliação feita dessa forma distancia-se da sua

---

[1] O Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação - GEPEMA - está constituído no Departamento de Matemática e desenvolve suas atividades no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL. As principais atividades incluem o desenvolvimento da investigação no campo da Educação Matemática e Avaliação, bem como a formação de pesquisadores nesta área, nos níveis de Mestrado e Doutorado. Mais informações podem ser obtidas em: <http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/>.

função essencial - a de contribuir para a construção do conhecimento de todos os envolvidos no processo pedagógico (LIMA, BURIASCO, 2007).

Minhas crenças a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem foram abaladas na direção não mais platônica de um conhecimento ideal, da aprendizagem tomada como um construto do aluno dentro de um processo linear de transmissão de conhecimento do professor para o aluno, mas na direção de um conhecimento construído como resultado da atividade humana, nas e por meio das interações sociais em situações que favoreçam a construção de algum significado.

Em vista disso e da necessidade de discutir mais as causas dos erros das produções dos alunos nas disciplinas de Cálculo e de buscar estratégias para superá-los, pensei em fazer um estudo com a intenção de buscar meios que favorecessem alguma mudança no modelo de avaliação comumente desenvolvido nas disciplinas de Cálculo, impactando o modelo de ensino e de aprendizagem e, consequentemente e não por propósito, o grande número de repetências e evasões.

Inicialmente, a proposta era focada na análise da produção escrita[2] em uma Prova em Fases[3] como fio condutor da aprendizagem de alunos de Cálculo Diferencial e Integral, na pretensão de discuti-la como recurso de ensino baseado nas ideias da Educação Matemática Realística[4], e nas dos autores que escrevem acerca da avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem[5].

Esta pesquisa passou por transformações. A primeira mudança refere-se ao foco do olhar, que, além de discutir a análise da produção escrita

---

[2] Alguns dos trabalhos do GEPEMA publicados acerca da análise da produção escrita como uma estratégia para investigar os processos de ensino e aprendizagem, numa perspectiva de avaliação como prática de investigação: (BURIASCO, 1999, 2004; NAGY-SILVA, 2005; PEREGO, S., 2005; SEGURA, 2005; PEREGO, F., 2006; NEGRÃO DE LIMA, 2006; ALVES, 2006; DALTO, 2007; VIOLA DOS SANTOS, 2007; CELESTE, 2008; SANTOS, 2008, 2014; ALMEIDA, 2009; FERREIRA, 2009; BEZERRA, 2010; LOPEZ, 2010).

[3] A Prova em Fases pode ser utilizada sob várias perspectivas de ensino. As ideias da Educação Matemática Realística neste trabalho demarcam os pressupostos da perspectiva adotada pela professora/pesquisadora em sua ação de ensino a partir da utilização do instrumento Prova em Fases.

[4] DE LANGE, J. (1987, 1999, 2003); FREUDENTHAL, H. (1968, 1971, 1973, 1979, 1983, 1991); GRAVEMEIJER, K. P. E. (1994, 2004, 2005); TREFFERS, A. (1987); VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M (1996, 2000, 2001, 2002).

[5] BARLOW, M (2006); ESTEBAN, M. T (2000, 2003); HADJI, C (1994, 2001); SANTOS, L. (2002, 2003, 2008) e alguns dos trabalhos do GEPEMA: (VIOLA DOS SANTOS, 2007; PIRES, BURIASCO, 2011, CIANI, 2012; PEDROCHI JUNIOR, 2012; PIRES, 2013, TREVISAN, 2013).

em uma Prova em Fases como recurso de ensino, buscou também investigar a utilização da Prova em Fases como recurso para a regulação da aprendizagem[6]. Essa ampliação deve-se principalmente às leituras realizadas ao cursar a disciplina "Avaliação da Aprendizagem Escolar" oferecida pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, no segundo semestre de 2011 e de responsabilidade da orientadora deste trabalho. As leituras na disciplina eram oriundas, basicamente, de Hadji (1994) e de Barlow (2006), que apontam que uma avaliação pode "alimentar" um diálogo permanente de modo que oportunize ao aluno cogerir a sua aprendizagem e ao professor esclarecer, guiar a sua atividade, chamando atenção para os pontos fortes e para as debilidades e permitindo ao aluno "ver" o estado em que se encontra.

A segunda refere-se à ampliação da dinâmica metodológica que havia concebido inicialmente: decidiu-se que a prova seria aplicada ao longo do semestre, semanalmente, com duração de três horas-aula (de cinquenta minutos cada uma) em vez de sete fases com um total de quinze horas-aula. Essa mudança fortaleceu o objetivo de gerar, no decorrer da trajetória avaliativa, uma oportunidade de regular e orientar o processo de ensino e de aprendizagem. Com essa expectativa, é desejável que a comunicação escrita vá além das pilhas de provas corrigidas e pontuadas pelo professor em momentos formais que demarcam o fim do estudo de um determinado tema. Espera-se, assim, que a prática avaliativa, um elemento rotineiro dos processos de ensino e de aprendizagem, forneça um *feedback* instrucional, podendo ser materializada indiretamente por uma "prova" em várias fases, na qual o número de fases seja determinado pela necessidade de comunicação entre professores e alunos.

Por fim, a terceira mudança é consequência das discussões no GEPEMA, de leituras das produções do grupo baseadas na abordagem de ensino Educação Matemática Realística e das leituras dos autores Barlow (2006), Esteban (2000, 2003), Hadji (1994), Santos L. (2002, 2003, 2008) que tratam de avaliação. Concomitantemente a essas leituras, percebeu-se que

---

[6] Neste trabalho, a regulação da aprendizagem está associada às ações realizadas pelo aluno sobre o seu processo de aprendizagem, com a intenção de fazê-lo progredir e/ou redirecioná-lo a partir de intervenções escritas do professor.

este trabalho tem, quase por elemento primário, a necessidade de ampliar e aprofundar as compreensões do processo de avaliação integrado ao processo de ensino e de aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, tendo como intenção favorecer a regulação da aprendizagem.

Com isso, estabeleceu-se o objetivo da pesquisa como sendo:

investigar a utilização da Prova em Fases como recurso para a regulação da aprendizagem.

Mais especificamente, a proposta é investigar:

- a utilização da produção escrita dos alunos em uma Prova em Fases como recurso de ensino;
- a utilização da produção escrita dos alunos em uma Prova em Fases como propulsor da regulação da aprendizagem;
- a utilização da Prova em Fases como meio de repensar a prática letiva, em especial, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral;
- características de "boas" questões para uma prova, em particular, para uma Prova em Fases.

O resultado dessa investigação e minha[7] reflexão (juntamente com minha orientadora e membros do GEPEMA) a respeito dela constituem este trabalho, assim composto: (1) Introdução, (2) Fundamentação Teórica, (3) Estratégia Metodológica, (4) Análises e Resultados e (5) Algumas Considerações.

A segunda parte contém dois capítulos, nos quais são apresentados os fundamentos que serviram de referência para o desenvolvimento e delineamento desta pesquisa, bem como para a análise e para a discussão dos dados coletados. Esses capítulos, Capítulo 2 e Capítulo

---

[7] Uma vez estabelecida as minhas intenções, passo a me nominar, ao longo do texto, por professora/pesquisadora nas ações em que há foco na didática e na pesquisa; professora nas ações com fins didáticos; pesquisadora nas ações com fins aos objetivos da pesquisa, uma vez que fui a professora responsável pela disciplina em que a pesquisa foi desenvolvida.

3, revelam os pressupostos adotados pela professora/pesquisadora frente à utilização da Prova em Fases como instrumento de ensino, de aprendizagem e de avaliação.

O Capítulo 4 trata da estratégia metodológica e compõe a terceira parte. Nele apresentam-se o tipo de pesquisa desenvolvida, a descrição detalhada do seu contexto, algumas características da prova elaborada, o planejamento e a participação dos alunos, a dinâmica desenvolvida e a validação pelos pares referente as classificações realizadas pela professora/pesquisadora para enquadramento dessa Prova em Fases no modelo da “Pirâmide de Avaliação” de De Lange (1999).

Dois capítulos constituem a quarta parte. No primeiro, Capítulo 5, apresenta-se o caminho seguido para a escolha dos dados selecionados para descrição e análise. Em seguida, uma descrição de um recorte de vinte e cinco produções escritas dos participantes e uma análise específica para cada uma delas. Por fim, uma análise geral da utilização da análise da produção escrita em uma Prova em Fases como recurso de ensino, de aprendizagem e as características de boas questões para uma Prova em Fases. No Capítulo 6 apresenta-se uma discussão de algumas percepções dos alunos recolhidas por meio de um instrumento escrito sobre suas vivências no processo de realizar a Prova em Fases.

Na última parte, Capítulo 7, apresentam-se alguns resultados do trabalho, reflexões acerca do processo de avaliação integrado ao processo de ensino e de aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, alguns indicativos de futuras investigações a serem realizadas.

2 DEMARCANDO O TERRENO – ENSINAR/APRENDER MATEMÁTICA À LUZ DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

Neste capítulo, pretende-se delinear os pressupostos[8] de ensino e de aprendizagem de matemática nos quais esta pesquisa foi desenvolvida.

Esses pressupostos se fundamentam na Educação Matemática Realística[9] – RME[10] – abordagem de ensino cujo desenvolvimento foi inspirado, principalmente, nas ideias e contribuições do educador matemático *Hans Freudenthal* (1905-1990) e tem se tornado um referencial teórico para os estudos/pesquisas[11] do GEPEMA[12].

Essa abordagem de ensino foi uma resposta holandesa à reforma do ensino da matemática denominada Matemática Moderna, no fim dos anos 50. As bases dessa resposta/proposta se localizam no projeto Wiskobas, iniciado por Wijdeveld e Goffree em 1968 (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 9), no então IOWO (*Institute for Development of Mathematics Education*), que desde 1991 passou a se chamar Instituto Freudenthal.

---

[8] Pressupostos utilizados na elaboração da Prova em Fases, no planejamento e em sua aplicação ao longo da pesquisa, assim como nas análises realizadas. Estão intimamente ligados às atitudes da professora/pesquisadora, de tal forma que não são apresentados no intuito direto de serem fundamentos para a criação da pesquisa, mas para demarcar a perspectiva de ensino e de aprendizagem aqui considerada.

[9] O termo *realistic* [...] foi traduzido, para o português, também pelo GEPEMA, para "realístico" ao invés de "realista", porque parece estar mais relacionado ao significado de "imaginar", "realizar", "fazer ideia", "tomar consciência de" (*realistic* no inglês) e, por sua vez, à possibilidade de "tornar real" na mente dos estudantes, o que sugere que os contextos ou situações nos quais alunos se envolvem não precisam ser autenticamente "reais", mas precisam ser imagináveis, realizáveis, concebíveis (FERREIRA, 2013, p.30).

[10] Realistic Mathematics Education.

[11] Buscando conhecer como estudantes lidam com questões não-rotineiras de Matemática, em 2006, o GEPEMA iniciou estudos a respeito da análise da produção escrita em itens do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA, por serem validadas e caracterizadas como não-rotineiras. Como o PISA apresentava em seus documentos indícios da RME como fundamentação teórica, o GEPEMA, a partir de 2006, começou a estudar essa abordagem que, além de continuar sendo tema atual de estudo do GEPEMA, tem se tornado um referencial teórico para nossos estudos/pesquisas em Avaliação e Educação Matemática.

[12] Alguns dos trabalhos de dissertação e de tese do GEPEMA que adotam a Educação Matemática Realística como abordagem à Educação Matemática: FERREIRA, 2009, 2013; LOPEZ, 2010; CIANI, 2012; PEDROCHI JUNIOR, 2012; PIRES, 2013; MORAES, 2013; TREVISAN, 2013; OLIVEIRA; 2014; SANTOS, 2014.

O IOWO na época era presidido por Hans Freudenthal, que, por suas ideias em direção divergente à abordagem mecanicista[13] e à abordagem estruturalista[14] do ensino da matemática, impulsionou a reforma curricular da Holanda. Freudenthal (1979, p. 323) sublinha alguns princípios que considera fundamentais para o ensino da matemática que diferenciam a abordagem RME de outras consideradas mais tradicionais. O Quadro 1 apresenta aspectos tomados por Freudenthal em relação às tendências tradicionais de ensino.

Quadro 1 – Aspectos para ensino da matemática na RME em relação a Tendências Tradicionais.

RME	Tendências Tradicionais
Atividade humana	Disciplina preestabelecida
Matematização da realidade	Realidade matematizada
Reinvenção de conceitos	Transmissão de conceitos
Realidade como fonte da matemática	Realidade como domínio de aplicação
Articulação da matemática com outros domínios	Matemática isolada
Contextos ricos de significado	Reunião de problemas linguísticos
Elaboração de representações mentais	Conceitos
Compreensão de mecanismos	Reprodução de mecanismos
Abordagens múltiplas em relação a conceitos novos	Concretização múltipla

Fonte: autora – baseado em Freudenthal (1979, p. 323).

Em oposição ao pressuposto de matemática como uma ciência acabada, *a*-histórica e organizada logicamente, Freudenthal (1979) considera a matemática como uma atividade humana, como outras atividades tais como a palavra, a escrita e o desenho, e a situa “entre as primeiras actividades cognitivas conhecidas e a primeira disciplina a ser ensinada, mas que evoluiu e

---

[13] Nessa abordagem, a matemática é vista como um sistema de regras, as quais são dadas aos alunos para que treinem e depois as apliquem em problemas similares aos exemplos anteriores mostrados pelo professor (DE LANGE, 1987).

[14] Nessa abordagem, o ensino e a aprendizagem da matemática são focados em conceitos abstratos, como teoria de conjuntos, funções, bases diferentes de dez (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).

transformou-se sob a influência das modificações sociais, bem como a sua filosofia e a maneira de ser ensinada" (FREUDENTHAL, 1979, p. 321).

Para o autor, a matemática como atividade humana é

> uma atividade de resolver problemas, de procurar problemas, e também uma atividade de organização de um assunto. Esta pode ser uma questão da realidade, a qual tem de ser organizada de acordo com padrões matemáticos se tiver de ser resolvida. Também pode ser uma questão matemática, resultados novos ou velhos de produção própria ou de outros, que têm de ser organizados de acordo com novas ideias, para ser melhor entendida, em um contexto mais amplo ou por uma abordagem axiomática (FREUDENTHAL, 1971, pág. 414) (tradução nossa)[15].

Em consonância com a matemática como uma atividade humana, aprender matemática significa fazer matemática. Nesse sentido, devem-se propor situações que oportunizem a emersão de ideias e conceitos matemáticos a partir da organização matemática de situações, favorecendo a oportunidade de o aluno ser construtor/elaborador/reinventor da matemática. Freudenthal chamou de matematização a essa atividade de organização da situação (realidade) usando ideias e conceitos matemáticos. Na perspectiva da RME, a matemática torna-se um meio de organizar uma situação e deve ser conectada à realidade para que possa ser de valor humano (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001).

Freudenthal (1991) aponta a matematização como o núcleo da atividade na Educação Matemática por dois motivos. Em primeiro lugar, por familiarizar os estudantes a abordarem matematicamente situações cotidianas, atividade desenvolvida pelos matemáticos. E, em segundo, por acreditar que, por meio de uma reinvenção-guiada, podem experimentar um processo similar aos processos pelos quais a matemática foi "inventada" pelos matemáticos, em que a formalização por meio de axiomas é o estágio final do processo e não o ponto de partida. Para esse mesmo autor, iniciar a instrução a partir dos axiomas é uma inversão anti-didática, pois o processo pelo qual os matemáticos chegaram a tais conclusões é inverso ao escolar, sugerindo que

[15] "It is an activity of solving problems, of looking for problems, but it is also an activity of organizing a subject matter. This can be a matter from reality which has to be organized according to mathematical patterns if problems from reality have to be solved. It can also be a mathematical matter, new or old results, of your own or of others, which have to be organized according to new ideas, to be better understood, in a broader context, or by an axiomatic approach".

esse estágio final não deveria ser o ponto de partida para o ensino da matemática, como é frequentemente praticado no ensino tradicional de matemática (FIGUEIREDO, 2000). Esse caminho não favorece a participação dos alunos nas sistematizações dos conteúdos, nem nos questionamentos e interações, não oportuniza que os estudantes sejam guiados a "reinventar" a matemática (FREUDENTHAL, 1991, VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).

Nessa perspectiva, a matemática deve estar conectada à realidade, ser pertinente à sociedade, e aos estudantes deve ser dada a oportunidade "guiada" para "re-inventá-la", (FREUDENTHAL, 1979, 1983, 1991, TREFFERS, 1987; DE LANGE, 1987; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996; GRAVEMEIJER, 2005).

Por reinvenção-guiada Freudenthal (1973, p. 120) denomina a estratégia de ensino construída a partir da análise e da interpretação da matemática como uma atividade humana. Ainda destaca que nessa estratégia o aluno deve inventar algo que é novo para ele, mas bem conhecido para o professor (FREUDENTHAL, 1991, p. 48). O foco do ensino passa da matemática (produto de um processo de matematização) para o processo de matematizar, de organizar a realidade usando ideias e conceitos matemáticos.

A autoridade do professor como aquele que valida conhecimento é trocada pela autoridade como guia, pela maneira com que seleciona as tarefas[16], inicia e encaminha as discussões e as construções matemáticas dos estudantes (GRAVEMEIJER, 1994). Nessa perspectiva, a da reinvenção-guiada, ao estudante cabe ser o autor do seu próprio conhecimento e ao professor se estabelece a responsabilidade de criar um cenário que oportunize "essa autoria".

Para isso, Van den Heuvel-Panhuizen (2000) ressalta a importância de manter uma perspectiva da trajetória de ensino e de aprendizagem com base nos objetivos desejados e afirma que sem essa perspectiva não é possível orientar a aprendizagem dos alunos. Nessa trajetória, os professores devem ser capazes de prever e retratar as principais

[16] Tarefa é o trabalho que o professor propõe na sala de aula e que constitui o ponto de partida para o desenvolvimento da atividade matemática do aluno. Nesta pesquisa, as tarefas dos alunos são as questões propostas na Prova em Fases.

ações e tarefas, deixar claro como as competências serão desenvolvidas em conexão com outras. Para Van den Heuvel-Panhuizen (2002), uma trajetória de ensino e de aprendizagem tem três propósitos entrelaçados: *uma trajetória de aprendizagem*, uma visão geral dos processos de aprendizagem dos estudantes; *uma trajetória de ensino* com indicações didáticas que descrevem um ensino que articula e estimula a aprendizagem e *um esboço do assunto* do currículo de matemática a ser ensinado.

Segundo Freudenthal (1983), os conceitos matemáticos, estruturas, ideias foram desenvolvidos como ferramentas para organizar fenômenos do mundo físico, social e mental, uma vez que resultaram da resolução de problemas. Algo é considerado um fenômeno quando se pode ter experiência com ele, considerando também os próprios meios de organização da matemática (estratégias, conceitos, notações) desde que tomados como objetos de experiência (PUIG, 1997, p. 63-64).

Esse pressuposto apresenta reflexos nas aulas de matemática, uma vez que a aprendizagem matemática é iniciada a partir de fenômenos significativos para o estudante, que precisa organizá-los, porque são eles que fomentam o processo. Isso ressalta o papel do professor de buscar, investigar e organizar fenômenos (situações) suscetíveis à matematização.

É esperado que o ambiente de sala de aula oportunize ao estudante se colocar em um contexto em que seu compromisso com a aula de matemática transpasse o desenvolvimento fragmentado, mecânico e reprodutor de competências, para que possa tornar-se o condutor do próprio processo de aprendizagem, por meio de tarefas que suscitem e abranjam competências cognitivas dos níveis de conexão e de reflexão. De Lange (1999) configura esses níveis.

Para De Lange (1999), uma tarefa que envolve informações de linhas curriculares diferentes, que requer a decodificação e a interpretação de linguagem simbólica e formal, entendendo suas relações com a linguagem natural, ou, ainda, diferentes representações de um mesmo problema, enquadra-se no conjunto de tarefas ditas de “conexão”. Esse nível inclui, além de formulação e solução de problemas e situações, o desenvolvimento de estratégias, a previsão e a verificação de soluções.

Já uma tarefa de reflexão requer que os estudantes analisem, interpretem, desenvolvam seus próprios modelos e estratégias e apresentem argumentos matemáticos incluindo provas e generalizações. Com tarefas desse nível de competência, os estudantes são convidados a matematizar.

Para autores da Educação Matemática Realística, é relevante escolher tarefas que propiciem a organização de um ambiente de aprendizagem autêntico. Segundo Van den Heuvel-Panhuizen (1996), “boas” tarefas:

- permitem que o processo de aprendizagem seja transparente para os professores e para os estudantes;
- oportunizam ir de competências básicas para o pensamento de ordem superior;
- são familiares aos estudantes;
- oferecem oportunidade para a matematização;
- são resolvíveis de formas diferentes e em diferentes níveis.

Considerando o valor da matematização na RME, é pertinente retomar o conceito no sentido de apresentá-lo em suas perspectivas. Treffers (1987) descreveu a matematização como

> uma atividade organizada. Ela refere-se à essência da atividade matemática, à linha que atravessa toda educação matemática voltada para a aquisição de conhecimento factual, à aprendizagem de conceitos, à obtenção de competências e ao uso da linguagem e de outras organizações, às habilidades na resolução de problemas que estão, ou não, em um contexto matemático (TREFFERS, 1987, p. 51-52, tradução nossa)[17].

Ainda, segundo De Lange (1987, p. 42)[18], matematização “é uma atividade de organização e de estruturação para a qual conhecimento e habilidades adquiridos[19] são usados para descobrir regularidades

---

[17] Is an organized activity. It refers to the essence of mathematical activity, to the thread that runs through all mathematics education directed towards the acquisition of factual knowledge, the learning of concepts, the attainment of skills and the use of language and other organizations, skills in solving problem that are, or are not, placed in a mathematical context.

[18] Is an organizing and structuring activity to which acquired knowledge and skills are used to discover unknown regularities, relations and structures.

[19] Nas definições apresentadas por TREFFERS (1987) e DE LANGE (1987), são usadas as expressões “aquisição de conhecimento” e “adquire-se conhecimento”, respectivamente, o que pode ser indício de uma concepção que pressupõe que o conhecimento já existe e que o aluno simplesmente se apropria de tal, ou que não houve preocupação com a linguagem. A partir da leitura de seus livros, considera-se mais provável a segunda opção.

desconhecidas, relações e estruturas”. Segundo esse autor, dois tipos de matematização podem ser definidos: horizontal e vertical. A matematização horizontal compreende o processo de transpor uma situação para uma outra matematicamente formulada, podendo ser entendido como o processo de ir do mundo real para o mundo matemático por meio de esquematização, padrões e regularidade e relações. São consideradas demandas da matematização horizontal:

- identificar alguma matemática específica em um contexto geral;
- esquematizar;
- formular e visualizar um problema de diferentes modos;
- descobrir relações;
- descobrir regularidades;
- reconhecer aspectos isomórficos em diferentes problemas;
- transpor um problema do mundo real para um problema matemático;
- transpor um problema do mundo real para um modelo matemático conhecido (DE LANGE, 1987, p. 43).

A matematização vertical se apresenta tão logo o problema esteja transposto em um problema matemático e possa ser tratado com ferramentas matemáticas. Algumas demandas são:

- representar uma relação em uma fórmula;
- provar regularidades;
- refinar e ajustar modelos;
- usar diferentes modelos;
- combinar e integrar modelos;
- formular um novo conceito matemático;
- generalizar (DE LANGE, 1987, p. 44).

De Lange (1987) reconhece que essa distinção entre matematização horizontal e vertical é um pouco artificial pelo fato delas estarem fortemente relacionadas, mas a considera significativa para deixar claro que atividades como construção, experimentação e classificação estão no processo de matematização, assim como simbolização e formalização. Para Freudenthal (1991), as duas formas de matematizar possuem igual valor e merecem mesma importância.

O aprender matemática, no processo de matematização, configura-se na ação de construção de significados por meio das relações reflexivas no desenvolvimento e tratamento das situações, ou nas problematizações do cotidiano.

A constante construção/reconstrução do conhecimento por meio dessas relações e das interações sociais permite que o sujeito desenvolva competências necessárias à constituição de um cidadão matematicamente letrado. O letramento matemático corresponde à:

> capacidade que o indivíduo tem em identificar e compreender o papel que a matemática desempenha no mundo, de fazer julgamentos bem fundamentados, e de usar a Matemática de modo a atender as suas necessidades presentes e futuras como cidadão construtivo, interessado e reflexivo (OECD, 1999, *apud* De LANGE, 2003, p. 76, tradução nossa)[20].

O desenvolvimento de competências necessárias ao letramento matemático é fortemente influenciado pela maneira que o professor enxerga a matemática e pelo modo como ela é trabalhada em uma sala de aula. Para De Lange (2003), é imprescindível que o professor propicie aos estudantes situações dos contextos sociocultural, escolar, familiar, pessoal, entre outros, de tal forma que a matemática seja vista como um conhecimento que ajuda a resolver problemas. Para isso, há a necessidade de o professor organizar um ambiente de aprendizagem com tarefas que propiciem aos estudantes a oportunidade de aplicar a matemática de forma flexível, em situações que sejam significativas para eles e que tais tarefas sejam o veículo por meio do qual o professor ensine e oportunize a aprendizagem aos seus estudantes. Enfim, que oportunize aos estudantes matematizar.

---

[20] individual's capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded judgments, and to engage in mathematics in ways that meet the needs of that individual's current and future life as a constructive, concerned and reflective citizen (OECD 1999).

3 AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM E ALGUNS DE SEUS ELEMENTOS

Neste capítulo, as seções contextualizam o modo de lidar com a avaliação da aprendizagem neste trabalho. A primeira revela características da natureza didática da avaliação, na busca de configurá-la como uma oportunidade de aprendizagem, seguida de seções que caracterizam funções da avaliação escolar, regulação e intervenção dos processos de ensino e de aprendizagem aqui consideradas primordiais.

Também se dedicam a discutir a produção escrita como um construto a favor da aprendizagem; a apresentar o instrumento de avaliação Prova em Fases, instrumento que foi utilizado ao longo da pesquisa; a comentar algumas características de "boas" questões para uma avaliação da aprendizagem como oportunidade de aprendizagem e a apresentar o modelo da "Pirâmide de Avaliação" construído por De Lange (1999).

3.1 Avaliação como Oportunidade de Aprendizagem

Uma avaliação escolar restrita à função de classificar e certificar torna-se um elemento de demarcação e exclusão de pessoas: "o aluno sabe ou não sabe", "o aluno acertou ou errou", "o aluno está aprovado ou está reprovado" e pouco (ou nada) da avaliação é aproveitado para os processos de ensino e de aprendizagem, tornando-se, conforme Esteban (2000):

> uma das práticas centrais nos processos escolares para disciplinarizar o conhecimento, disciplinar e hierarquizar os sujeitos, prever e homogeneizar resultados e processos dando informações que permitem ordenar diversas outras práticas cotidianas, atos que pretendem garantir, pela uniformidade dos parâmetros e dos resultados, a qualidade da dinâmica pedagógica. (ESTEBAN, 2000, p. 3).

Para mais dessa demarcação, a avaliação escolar constitui-se em uma prática complexa e integrada no âmbito escolar e por ser, em princípio, parte da prática educacional tem sua natureza revelada: uma natureza educativa/didática.

Essa natureza implica em exercê-la como processo, ao longo de toda a ação de formação, com o objetivo de

> contribuir para melhorar a aprendizagem em curso, informando o professor sobre as condições em que está a decorrer essa aprendizagem, e instruindo o aprendente sobre o seu próprio percurso, os seus êxitos e as suas dificuldades (HADJI, 1994, p. 63).

A avaliação tomada como processo remete a uma de suas características essenciais: tornar-se parte da prática educacional diária, na pretensão de, conforme Van den Heuvel-Panhuizen (1996), tornar-se apoio aos processos de ensino e de aprendizagem e fonte para as decisões educacionais.

Ainda, a avaliação tomada como um processo único e contínuo faz-se, segundo Barlow (2006, p.16), "como eco em torno da ação, estímulo a completar, a modificar, a aperfeiçoar a tarefa em andamento", revelando a sua função de implementar os processos de ensino e de aprendizagem.

Ao reconhecer a natureza educativa/didática da avaliação e ao vê-la como um processo integrado aos processos de ensino e de aprendizagem, pode-se configurar o que este trabalho considera por "avaliação como oportunidade de aprendizagem", uma oportunidade de aprendizagem conveniente ao ato de aprender, conforme proposto pelo GEPEMA e explicitado em Pedrochi Junior[21] (2012).

Assim, a avaliação está a serviço da aprendizagem, oportunizando momentos de reflexão tanto para o aluno quanto para o professor; a este, para que regule seu processo de ensino e intervenha, àquele, para que regule seu próprio processo de aprendizagem. A avaliação como oportunidade de aprendizagem abarca as funções de intervenção e regulação no ensino e na aprendizagem, tratadas nas próximas seções.

Compor um ambiente de avaliação como oportunidade de aprendizagem pressupõe que propósitos, conteúdos, métodos aplicados e ferramentas utilizadas sejam de natureza educativa/didática. O propósito de a avaliação ser didática é reafirmar um processo de avaliação em proveito da

---

[21] A dissertação teve como um de seus objetivos configurar a visão dos trabalhos desenvolvidos pelos participantes do GEPEMA a respeito da avaliação da aprendizagem escolar como oportunidade de aprendizagem.

educação, um processo que, conforme Hadji (1994), tem por primeira função contribuir para uma boa gestão da aprendizagem dos estudantes, “uma atividade que deve ser exercida em proveito daqueles sobre as quais ela exerce, ou daqueles que dizem respeito ao objeto sobre o qual ela se debruça” (HADJI, 1994, p. 90).

Nessa direção, Hadji (1994, p. 88) toma-a como um processo que faz emergir informações de qualidade e que subsidia decisões necessárias nos processo de ensino e de aprendizagem. Barlow (2006, p. 74) ressalta que ela não terá utilidade se não for utilizada pelo estudante na construção de seu conhecimento. Ainda, segundo Van den Heuvel-Panhuizen (1996), seu propósito pode ser traduzido na ação de

> coletar alguns dados a respeito dos alunos e de seus processos de aprendizagem, a fim de tomar decisões educacionais específicas. Essas decisões podem envolver todos os níveis da educação e podem variar de decisões locais adequadas às atividades de instrução para futuras aulas de matemática, para as decisões mais amplas sobre a possibilidade de aprovação ou reprovação, sobre a necessidade ou não de assistência extra para os alunos, sobre se deve ou não introduzir algo de novo, sobre uma determinada abordagem para um determinado componente do programa, ou sobre a possibilidade de tomar certas medidas de larga escala em relação ao projeto da educação matemática. A natureza didática do propósito da avaliação é expressa com maior clareza no foco sempre presente da melhoria educacional (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 85, tradução nossa).[22]

Com isso, a fim de atender ao propósito didático da avaliação, os conteúdos abarcados nas situações de avaliação devem alcançar os componentes curriculares e as ligações entre eles e, também, os níveis de competências esperados por essa educação. Nessa perspectiva, os conteúdos das tarefas de avaliação são também meios (ferramentas) utilizados pelos

[22] collect certain data on the students and their learning processes, in order to make particular educational decisions. These decisions may involve all levels of the education and may vary from local decisions on suitable instructional activities for tomorrow’s mathematics lessons, to broader decisions on whether to pass or fail, on which students need what extra assistance, on whether or not to introduce something new, on a given approach to a given program component, or on whether to take certain large-scale measures regarding the design of the mathematics education. The didactical nature of the purpose of assessment is expressed most clearly in the ever present focus on educational improvement (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 85).

alunos para lidar com as situações, não estando restritos ao papel de fim (objetos matemáticos), que devem apenas ser alcançados.

Pela localização do processo de avaliação, suas ferramentas não se distinguem das ferramentas utilizadas nas aulas. Barlow (2006, p. 74) lembra quando a intenção é gerir aprendizagem, não é possível tratar separadamente problemas de avaliação e problemas de gestão didática.

A natureza didática dos métodos da avaliação torna-os imersos em cada uma das fases dos processos de ensino e de aprendizagem. Com isso favorece um olhar, por parte dos envolvidos, para trás (no sentido de determinar o que os alunos aprenderam) e um olhar para frente (no sentido de produzir informações para ações futuras).

Por fim, como é propósito da avaliação fazer emergir informações de qualidade para os envolvidos – informações a respeito da atividade dos alunos em organizar e tratar um assunto por meio de objetos matemáticos, é desejável o uso de diversificados instrumentos para a recolha de informações para que, na medida do possível, "exponha os processos de aprendizagem e forneçam um repertório das habilidades, conhecimentos e *insights* dos estudantes em um dado momento" (TREVISAN, 2013, p. 74).

3.2 Um Destaque para a Intervenção do Professor

Uma vez reconhecido que a avaliação é uma oportunidade de aprendizagem, faz-se necessário buscar indícios de formas de o professor intervir no desenvolvimento dos estudantes a partir do processo de avaliação.

O professor, sujeito que avalia, precisa conhecer os limites dessa sua ação. Hadji (1994) apresenta esse conhecimento como uma regra fundamental, sugerindo ao professor interrogar-se sobre o uso social real de sua atividade de avaliação e sobre o poder real da sua intervenção, quer dizer, de inflexão dos respectivos processos de que participa.

É papel do professor desenvolver diálogos com os estudantes para que da melhor maneira possível resolvam suas tarefas, construindo um diagnóstico das estratégias por eles utilizadas e de suas dificuldades e, a partir dessa exploração e identificação, decidir a forma de intervir. Nesses diálogos, conforme Barlow (2006), o professor não fala apenas para expor saberes e habilidades, mas também fornecer informações de retorno sobre a qualidade das realizações dos alunos.

A palavra 'intervir', segundo o dicionário Houaiss (2001, CD-ROM), tem origem no latim (estar entre, sobrevir, entremeter-se), e pode ser entendida como "ingerir-se (em matéria, questão etc.), visando influir sobre seu desenvolvimento; interferir; interceder"; "interpor autoridade, usar de poder de controle (sobre)"; "suceder incidentemente; sobrevir"; "estar presente; assistir".

Nas diversas interações emergentes do ambiente educacional, na medida em que tem "em suas mãos" a liberdade de sua sala de aula, é desejável que o professor saiba a respeito da qualidade do que é desenvolvido por cada estudante e, a partir disso, aja no desenrolar da ação num contexto de ensino, em favor da aprendizagem.

De Lange (1999) sugere que os professores devam saber dos problemas de aprendizagem de seus alunos enquanto ensinam, dos seus progressos e do nível de formalidade em que eles estão operando, de modo que eles possam adaptar as suas estratégias de ensino para atender às necessidades desses alunos.

A intervenção do professor no processo de aprendizagem de seus alunos tem maior influência à medida que esse professor observa, avalia, recolhe informações das situações vivenciadas e reconhece seus estudantes em processos de constante evolução.

Um professor que busca intervir na aprendizagem dos seus alunos precisa ter clareza de suas intenções educativas e de seu planejamento de trabalho, escolhendo conteúdos, métodos aplicados e instrumentos coerentes com suas intenções. Essa intervenção, conforme Hadji (1994, p. 43), "não tem sentido se não se efetuar em nome de uma ideia daquilo que é conveniente criar, e na medida em que se exprime o projeto de contribuir para o aparecimento de um estado de coisas desejável".

Na mesma direção, é desejável que o professor possua experiência pessoal em situações com diferentes contextos que abordem o conhecimento a ser desenvolvido pelos estudantes para aproveitar e intervir em cada "maneira de lidar[23]", fazendo que sejam responsáveis pelo desenvolvimento de uma situação ou de um conhecimento necessário para a resolução de uma situação.

Por último, o professor precisa saber lidar com a singularidade de cada estudante, respeitando o seu modo de lidar com a matemática. Tais modos "devem ser tomados como ponto de partida para construir um espaço de negociação e legitimação dos significados produzidos, no qual o professor possa interagir e intervir" (VIOLA DOS SANTOS, BURIASCO, CIANI, 2008, p. 41).

3.2.1 Intervenção em um Contexto de Ensino e Avaliação

A integração do processo de avaliação aos processos de ensino e de aprendizagem permite ver o ensino como um processo em permanente avaliação, em que o professor investiga para definir qual o próximo passo a dar.

Em uma perspectiva que busca integrar atividades de ensino e de avaliação, o professor transforma os instrumentos de avaliação em favor da aprendizagem, usando-os para recolha de pistas para guiar-se na elaboração de intervenções necessárias no processo de matematizar dos estudantes.

Assim, o professor, durante o desenvolvimento de uma tarefa proposta, ao mesmo tempo, observa: "a motivação dos alunos, sua interpretação dos enunciados, sua percepção da meta, seu método de trabalho, sua produção, sua progressão" (BARLOW, 2006, p. 95) e a origem de suas dificuldades.

Mais que observar, é desejável que o professor aproveite todas as situações emergentes ou propostas num contexto de sala de aula, fazendo delas o veículo por meio do qual ensina e oportuniza a aprendizagem aos seus estudantes. Para tanto, considera-se fundamental que esse professor perceba as diferentes compreensões dos estudantes acerca das situações vivenciadas e saiba aproveitá-las nos processos de ensino e de aprendizagem; esteja alerta

---

[23] Viola dos Santos (2007, p.22) substitui a palavra "erro" por "maneiras de lidar", expressão com a qual caracteriza os alunos pelo que eles têm num determinado momento e não pelo que lhes falta.

às oportunidades de intervenção, para que, ao dialogar com estudantes, não indique um único caminho de lidar com as situações; esteja aberto ao surgimento do "novo" e do "não saber" em sua prática (MENDES, TREVISAN, BURIASCO, 2012).

De Lange (1999, p. 10) apresenta uma lista de nove princípios para a avaliação:

1. o objetivo da avaliação em sala de aula é melhorar a aprendizagem;
2. a matemática deve estar incorporada em situações que fazem parte do mundo real do aluno – sejam realísticas;
3. os métodos de avaliação devem ser tais que permitam aos estudantes revelarem o que sabem, mais do que aquilo que eles não sabem;
4. um plano de avaliação equilibrado deve incluir múltiplas e variadas oportunidades para os alunos mostrarem e documentarem suas realizações;
5. as tarefas devem operacionalizar todas as metas do currículo;
6. os critérios de classificação devem ser públicos e consistentemente aplicados;
7. o processo de avaliação, incluindo a pontuação e a classificação, deve ser aberto aos estudantes;
8. os estudantes devem ter oportunidades para receber *feedback* a respeito de seu trabalho;
9. a qualidade de uma tarefa deve ser definida por sua autenticidade e equidade na medida em que atende aos princípios acima mencionados.

3.3 PRODUÇÃO ESCRITA: UM CONSTRUTO A FAVOR DA APRENDIZAGEM

Mesmo com uma grande variedade de instrumentos para avaliação escolar, a prova escrita tem sido utilizada como principal e, em muitos casos, como único instrumento. Para Hadji (1994, p. 168), um instrumento adequado para avaliação é “aquele que permite um dialogar com o aprendente enquanto efetua a sua aprendizagem”.

Ressalta-se que a virtude do instrumento está no uso que dele fazemos e na utilização das informações produzidas a partir dele,

> o equívoco mais flagrante não é tomar a prova escrita como único meio de avaliação, mas sim deixar de olhá-la como um meio pelo qual se podem obter informações a respeito de como se tem desenvolvido o processo de aprendizagem dos estudantes (BURIASCO, FERREIRA, CIANI, 2009, p. 77).

A prova escrita, por si só, não dá conta de promover as respostas necessárias para gerir e compreender os processos de ensino e de aprendizagem, mas favorece um construto – a produção escrita de cada estudante – que auxilia o agir do professor e do aluno, a qualquer momento nos processos de ensino e de aprendizagem.

Neste trabalho, a produção escrita é o meio pelo qual se estabelece um diálogo entre professor e aluno a partir de uma prova escrita realizada em fases – Prova em Fases.

A análise da produção escrita pode ser vista como uma estratégia para gerar informações e ações de intervenções do professor e, por conseguinte, a regulação da aprendizagem por parte dos estudantes, configurando-se, conforme Ciani (2012, p. 43), em “um caminho para conhecer múltiplos aspectos da atividade matemática dos alunos e, também, como uma possibilidade para capacitar e reorientar sua prática pedagógica”.

Viola dos Santos (2007, p. 27) toma a análise da produção escrita como

> uma das formas [...] de buscar conhecer mais detalhadamente como os alunos lidam com os problemas matemáticos, como se configuram seus processos de aprendizagem, quais dificuldades encontram, tomando as maneiras de lidar dos alunos, diferentes da correta, como constituintes dos processos de aprendizagem.

Viola do Santos, Buriasco e Ferreira (2010, p. 145) enfatizam que

> [...] a análise da produção escrita se apresenta como uma estratégia, que pode possibilitar conhecer características e

> particularidades da atividade matemática dos alunos por meio de seus registros. [...] é possível [...] realizar uma leitura na busca de evidências e pistas que eles dão sobre a relação que estabelecem com o enunciado e quais os contextos que constituem nos processos de resolução e mobilização de conceitos matemáticos. Com isso, ao invés de se limitar à identificação de que um problema, quando "não resolvido" pelo estudante, é diferente do considerado correto, emerge a pergunta: qual foi o problema resolvido por ele?

A análise da produção escrita de uma prova escrita, conforme Ferreira (2013), pode servir para

> detectar erros frequentes, recorrentes, dificuldades; simular formas de pensar, tipos de raciocínio; investigar causas de erros, obstáculos didáticos, obstáculos epistemológicos; investigar acertos casuais; produzir e emitir *feedback*; dar suporte para a reelaboração do próprio instrumento de avaliação utilizado (FERREIRA, 2013, p. 24).

Por meio da análise da produção escrita de alunos, os professores podem sair de uma cultura de demarcação e exclusão de pessoas para, conforme Ciani (2012, p. 42), "uma cultura da multiplicidade das maneiras de lidar com os conhecimentos, que está ligada à solidariedade e à cooperação". Com essa prática, os professores têm a oportunidade de conhecer o fazer matemática de seus alunos – a atividade de matematizar –, respeitando idiossincrasias, de ampliar as possibilidades de guiar o processo de aprendizagem e, de modo especial, de tomar os estudantes como participantes ativos do processo educacional.

Assim, além de diagnosticar, a análise da produção escrita é uma prática que serve à avaliação, uma avaliação como prática de investigação. Nesta perspectiva, a avaliação possibilita ao professor apreciar, bem como acompanhar e participar do processo de aprendizagem dos estudantes.

Esteban (2003) configura a avaliação como prática de investigação

> pelo reconhecimento dos múltiplos saberes, lógicas e valores que permeiam a tessitura do conhecimento. Nesse sentido, a avaliação vai sendo constituída como um processo que indaga os resultados apresentados, os trajetos percorridos, os percursos previstos, as relações estabelecidas entre as

> pessoas, saberes, informações, fatos, contextos (ESTEBAN, 2003, p. 11).

Segundo Buriasco e Soares (2008, p. 110), “a avaliação da aprendizagem matemática deve ser vista como um processo de investigação, uma atividade compartilhada por professores e alunos, de caráter sistemático, dinâmico e contínuo”.

O GEPEMA tem se debruçado sobre a análise da produção escrita em questões de matemática resolvidas por alunos e por professores, sob a perspectiva da avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem. O quadro a seguir apresenta as teses e dissertações já elaboradas por membros do grupo nessa perspectiva.

Quadro 2 – Teses e Dissertações publicadas pelo GEPEMA.

Autor	Tese/ dissertação	Foco
BURIASCO (1999)	Tese	Procurou evidenciar como estudantes e professores lidaram com questões da prova de matemática da 8ª série do programa de avaliação do Sistema Educacional do Paraná relativo a 1997.
NAGY-SILVA (2005); SEGURA (2005); PEREGO, S. (2005); ALVES (2006); NEGRÃO DE LIMA (2006); PEREGO, F. (2006); DALTO (2007); VIOLA DOS SANTOS (2007)	Dissertações	Dedicaram-se a analisar produções escritas de estudantes e professores em questões rotineiras de matemática da aferição da AVA/2002 (Avaliação do Rendimento Escolar do Estado do Paraná).
CELESTE (2008); SANTOS E. (2008); ALMEIDA (2009); FERREIRA (2009); LOPEZ (2010); BEZERRA (2010)	Dissertações	Dedicaram-se a analisar produções escritas de estudantes e professores em questões não-rotineiras de matemática do PISA (Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes).
PEDROCHI JUNIOR (2012)	Dissertação	Configura a avaliação como oportunidade de aprendizagem a partir das ações de autoavaliação; *feedback*; avaliação como prática de investigação e a utilização da análise da produção escrita.

CIANI(2012)	Tese	Apresenta duas propostas de intervenção como subsídio operacional para a constituição de oportunidade de aprendizagem, por meio da análise da produção escrita, como prática de investigação.
FERREIRA (2013)	Tese	Apresenta um estudo a respeito de enunciados de tarefas de matemática e um quadro de referência com base na perspectiva da Educação Matemática Realística que permite analisar tarefas de matemática.
PIRES (2013)	Tese	Descreve e analisa uma pesquisa com uma Prova em Fases realizada com professoras do Ensino Fundamental, em que a prova foi analisada como uma forma de realizar uma reinvenção-guiada na perspectiva da Educação Matemática Realística.
TREVISAN (2013)	Tese	Apresenta reflexões oriundas da utilização da Prova em Fases como instrumento de avaliação em aulas de matemática e um repensar da prática avaliativa em matemática.
MORAES (2013)	Dissertação	Apresenta um episódio de múltiplas correções de uma prova escrita de matemática e reflexões a respeito do papel do professor tanto nas suas aulas quanto na correção das provas que aplica.
SANTOS (2014)	Tese	Investigou a utilização da análise da produção escrita em aulas de matemática, sob a luz da reinvenção guiada, para além de ser uma estratégia de avaliação.

Fonte: autora.

Esses trabalhos revelam indícios da análise da produção escrita como estratégia de investigação que possibilita obter informações do processo de aprendizagem e, ao mesmo tempo ser uma oportunidade de aprendizagem.

Conforme Esteban (2000, p. 6), “todo conhecimento pode ser ampliado e todo saber, ou não saber, redefinido”. Ainda completa: “todo conhecimento, como todo desconhecimento, é provisório e parcial, o que permanece é o ainda não saber, que revela a possibilidade e a necessidade de novos e mais profundos conhecimentos". Nessa direção, o não saber ou o errar, identificados como a impossibilidade de seguir adiante, deslocam-se, por meio da análise da produção escrita, para dentro dos processos de ensino e de aprendizagem na forma de referência para a ação do professor e para a ação do aluno.

Em um ambiente em que o processo de avaliação está imerso nos processos de ensino e de aprendizagem, trata-se de assumir a avaliação como uma prática de investigação que, por meio da análise da produção escrita, pode, segundo Esteban (2000, p. 14)

> responder à impossibilidade de reduzir os processos ao que é imediatamente observável. Interroga as respostas, indaga sua configuração, procura encontrar as relações que as constituem. Não se satisfaz com a constatação do erro e do acerto, à resposta dada faz novas perguntas. Sobretudo, como prática de investigação, não nega o erro, tampouco lhe atribui um valor negativo (ESTEBAN, 2000, p. 14).

Com isso, o aspecto dinâmico da avaliação se apresenta. Uma avaliação que não se restringe a indicar ao aluno se ele atingiu ou não o objetivo que lhe foi fixado, mas favorece ao professor e ao aluno desenvolver meios para que supere sua eventual dificuldade, ou, se já os domina perfeitamente, sugere-lhe que os transfira a outros âmbitos.

Isso possibilita maiores condições para o estudante se envolver e se comprometer com a sua aprendizagem, além de viabilizar a construção de um conhecimento para além do desenvolvimento fragmentado, mecânico e reprodutivo de competências.

3.4 Regulação da Aprendizagem a partir da Avaliação da Aprendizagem

Na perspectiva de ensino e de aprendizagem da RME adotada neste trabalho, que atribui ao aluno o papel central na construção do conhecimento, isto é, o aluno aprende por sua própria ação, e na qual o professor é responsável por propor situações que favoreçam o matematizar, por gerir e por orientar o desenvolvimento de tais situações, faz-se pertinente configurar o que neste trabalho se assume por regulação da aprendizagem e a quem compete essa ação.

Segundo o dicionário Houaiss (2001, CD-ROM), o verbo regular pode, entre outras coisas, significar: “estabelecer regras para regulamentar”; “sujeitar a regras; dirigir regrar”, “estabelecer ordem, moderação, conter, moderar, reprimir”; “regularizar o movimento de; acertar, ajustar”; “fazer o confronto, a aferição de; conformar, comparar”; funcionar devidamente”, nortear, guiar”.

No contexto escolar, a ação de regulação pode *ajustar* os objetivos de aprendizagem e as tarefas a utilizar a fim de clarificá-los, *estabelecer regras* de avaliação para conhecimento e negociação por parte dos alunos (critérios de avaliação), *nortear/guiar* a interpretação e tomada de consciência dos erros cometidos na realização de uma dada tarefa (SANTOS L., 2008, p. 14).

Para Hadji (1994, p. 188, grifo nosso), regulação significa “operação de condução de uma acção que se apoia em informações de retorno (*feedback*) para <u>ajustar</u> a acção realizada ao fim perseguido”. Com isso, ao considerar a regulação da aprendizagem como função também da avaliação, tem-se que ela possa “permitir ajustar o tratamento didático à natureza das dificuldades constatadas e à realidade dos progressos registrados” (HADJI,1994, p. 125).

Para esse autor, a função de regulação recobre certo número de funções anexas, tais como:

- segurança – consolidar a confiança do aluno nele mesmo;
- assistência – fornecer um “ponto de apoio” para o progresso do aluno;
- *feedback* – fornecer informações úteis sobre as etapas vencidas e as dificuldades encontradas;
- diálogo – promover a existência de um verdadeiro diálogo entre professor e aluno.

Santos L. (2002, p. 77) caracteriza regulação da aprendizagem como “todo o acto intencional que, agindo sobre os mecanismos de aprendizagem, contribua directamente para a progressão e/ou redireccionamento dessa aprendizagem". Contudo, todo ato de regulação envolve necessariamente um papel ativo do estudante, porque nenhuma "intervenção externa age se não for percebida, interpretada e assimilada pelo próprio" aluno.

No que diz respeito às funções que a avaliação desempenha, Hadji (1994) apresenta a função de regular com o objetivo de guiar constantemente o estudante no seu processo de aprendizagem para diagnosticar as suas lacunas e as suas dificuldades em relação aos saberes a serem elaborados. Ainda, denomina por reguladora a avaliação exercida durante o trabalho do estudante, tendo o papel de aperfeiçoar a ação do estudante e a do professor. "Sua característica essencial é a de ser integrada na acção de 'formação', de ser integrada ao próprio ato de ensino" (HADJI, 1994, p. 63).

Na direção de uma avaliação como oportunidade de aprendizagem, Nagy-Silva (2005, p. 29) ressalta a função de regulação da aprendizagem:

> para o aluno, a avaliação pode servir para regular sua aprendizagem, sendo capaz de orientá-lo para que ele tenha autonomia para perceber suas dificuldades, analisá-las e descobrir caminhos para superá-las. Para o professor, serve para que ele possa repensar e reorientar a sua prática pedagógica, além de possibilitar-lhe entender e interferir nas estratégias utilizadas pelos alunos (NAGY-SILVA, 2005, p. 29).

Assim, a ação de regular cabe ao professor e ao aluno, o professor regula o processo de ensino, e o aluno, o da sua aprendizagem. É objetivo da escola possibilitar que o aluno se torne autônomo no seu processo de aprendizagem, permitindo que seja contínua ao longo da vida. Conforme Hadji (1994, p. 120), "só o aprendente é verdadeiramente capaz de regular a sua actividade de aprendizagem, porque só ele é capaz de conhecer os seus processos e de os corrigir".

A interação professor e aluno no processo de regulação pedagógica é indispensável, ela se faz por meio da comunicação gerada entre os envolvidos, seja por diálogo presencial, seja por escrito. A qualidade dessa comunicação é o que assegura que professor e alunos se entendam mutuamente.

A avaliação pode tornar-se um processo de diálogo entre professor e aluno que, “partindo de pontos de vista diferentes, é capaz, através da explicitação das suas divergências, de construir entendimentos comuns e partilhados” (SANTOS L., 2008, p. 14).

Para Allal (1986), as

> modalidades de avaliação adoptadas por um sistema de formação têm sempre uma função de regulação, o que significa que a sua finalidade é sempre a de assegurar a articulação entre as características das pessoas em formação, por um lado, e as características do sistema de formação, por outro (ALLAL, 1986, p. 176).

O dizer avaliativo, entretanto, não é sinônimo de regulação pedagógica. É preciso que as informações geradas sejam usadas para a aprendizagem, servindo para o professor reorientar a sua prática e para o aluno regular a sua aprendizagem, conforme Ferraz (1994, p. 3), conscientizando-o de que “a aprendizagem não é um produto de consumo, mas um produto a construir, e de que ele próprio tem um papel fundamental nessa construção”.

Uma fonte rica de informação para a regulação é a produção escrita do aluno, na qual ele apresenta suas “maneiras de lidar” com a situação, que revelam uma concepção associada a uma dada representação que o aluno formou.

No processo de regulação da aprendizagem, o aluno busca compreender a situação de aprendizagem, sendo, para isso, necessário compreender sua produção no que tange tanto ao que acertou ou errou quanto aos progressos para, respectivamente, corrigi-los e desenvolver os conceitos envolvidos. Para o alcance desse objetivo, cabe ao professor interpretar sua produção, formular hipóteses a respeito do raciocínio do aluno, não apontando erros, mas questionamentos ou pistas de orientação da ação a ser desenvolvida pelo aluno.

Os questionamentos e as pistas de orientação por parte do professor também se revelam como fundamentais no processo de regulação da aprendizagem por parte dos alunos, já que boas questões colocadas continuamente poderão desenvolver no aluno a capacidade de autoquestionamento sobre o que está a fazer e como se está a fazer.

Para Santos L. (2002), esses questionamentos podem partir das produções dos alunos em situações de avaliação, em que o professor deixa de registrar juízos de valor, que pouco ou nada contribuem para aprendizagem, e passa a aproveitar para construir contextos favoráveis ao desenvolvimento de uma atitude autorreflexiva nos seus alunos, questionando estratégias e procedimentos adotados ao lidar com a situação proposta.

Uma forma de desenvolver a regulação da aprendizagem é permitir que o aluno aprecie e aperfeiçoe uma primeira versão de um trabalho realizado, podendo repensar a situação. O professor nesse contexto é um orientador da aprendizagem que orienta a produção e não aquele que fornece respostas certas. Santos L. (2003) considera que um comentário que serve ao processo de regulação deve apresentar as seguintes características:

- ser claro, para que autonomamente possa ser compreendido pelo aluno;
- apontar pistas de acção futura, de forma que a partir dele o aluno saiba como prosseguir;
- incentivar o aluno a reanalisar a sua resposta;
- não incluir a correcção do erro, no sentido de dar ao próprio aluno a possibilidade de ser ele mesmo a identificar o erro e a alterá-lo de forma a permitir que aconteça uma aprendizagem mais duradoura ao longo do tempo;
- identificar o que já está bem feito, no sentido não só de dar autoconfiança como igualmente permitir que aquele saber seja conscientemente reconhecido (SANTOS L., 2003, p. 6).

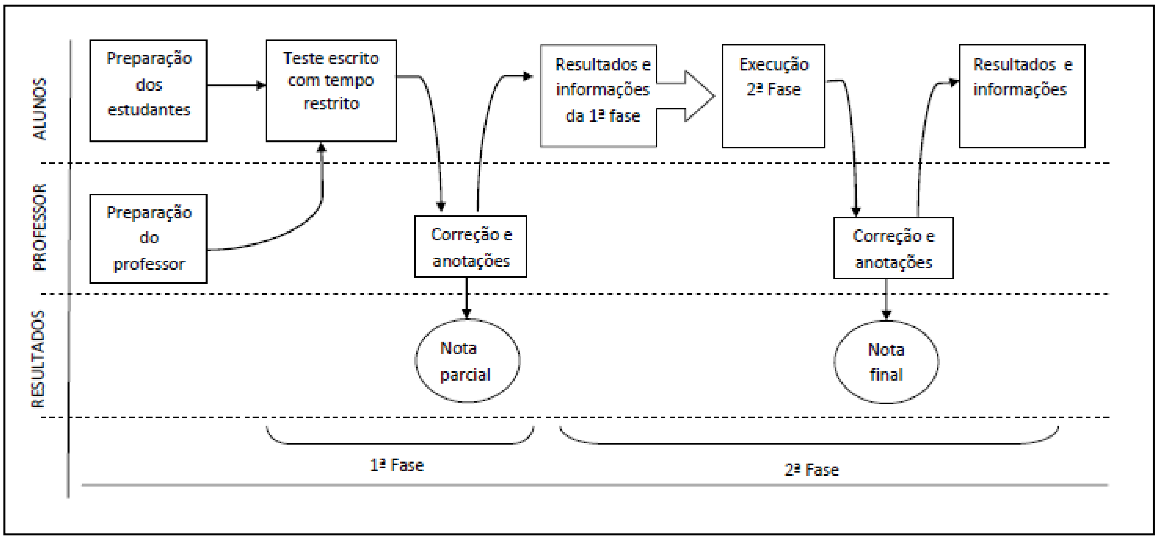
Os itens apresentados anteriormente fornecem algumas estratégias que podem ser adotadas pelo professor. Porém, no campo da educação, não existem receitas prontas. Sendo assim, cabe ao professor planejar estratégias de intervenção que contribuam para desenvolver a autonomia do seu aluno. Nesta pesquisa, por meio de uma Prova em Fases, buscou-se criar um ambiente de sala de aula favorável ao alcance desse objetivo, ou seja, ao desenvolvimento da autonomia dos alunos com relação aos seus processos de aprendizagem.

3.5 PROVA EM FASES

Um dos instrumentos de avaliação que pode atender aos propósitos de uma avaliação como oportunidade de aprendizagem e desencadear a regulação pedagógica a partir da análise da produção escrita é a Prova em Fases. A Prova em Fases é uma adaptação da Prova em Duas Fases idealizada por De Lange (1987).

A Prova em Duas Fases mencionada é uma prova com questões abertas[24] e de ensaio[25]. A primeira fase dessa prova é realizada como uma prova escrita tradicional em que os alunos respondem a tantas perguntas quanto for possível dentro do período de tempo estipulado. Depois de corrigida pelo professor, a prova é devolvida aos alunos com indicação do resultado parcial e do apontamento dos erros mais graves. Na segunda fase, o aluno provido, dessas informações, repete o trabalho em casa, podendo (re)fazer as questões. Após o tempo combinado, a prova é devolvida ao professor e novamente corrigida. A figura 1 apresenta um esquema da Prova em Duas Fases apresentado por De Lange (1987, p. 186):

Figura 1 – Esquema para a Prova em Duas Fases.



Fonte: (DE LANGE,1987, p. 186, tradução nossa).

[24] "Aberta" corresponde a um item ou uma questão que oportuniza ao aluno descrever fenômenos observados, favorecendo o desenvolvimento ou uso de conceitos, não exigindo um raciocínio específico (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).
[25] "Ensaio" corresponde a um item ou a uma questão em que se propõe ao estudante discorrer a respeito de um tema (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

Para o autor, algumas das características da primeira fase são: todos os alunos realizam o mesmo teste ao mesmo tempo e por um período fixo; revela o que os alunos não sabem e não o que eles sabem; é dado mais atenção aos objetivos de reprodução e compreensão, havendo pouca conexão e reflexão; a pontuação busca ser objetiva.

Na segunda fase, as características da prova deslocam-se para um instrumento de avaliação de natureza didática que oportuniza a aprendizagem. Para De Lange (1987, p. 184), a prova, na segunda fase pode ser realizada em qualquer momento conveniente para o aluno em sua casa; a quantidade de tempo dedicado é determinada pelo aluno; a ênfase é sobre o que o aluno sabe; por conta das correções e comentários, cada aluno realiza uma prova diferente; é dada mais atenção aos objetivos de interpretação, conexão e reflexão; a estrutura das questões é aberta, com perguntas de respostas longas e a intersubjetividade é salientada.

A segunda fase não é vista como uma segunda chance, mas como um meio para "*forçar* o estudante a refletir a respeito da sua primeira fase" (DE LANGE, 1987, p. 207, grifo do autor, tradução nossa), dando-lhe oportunidade de demonstrar sua capacidade de organizar, integrar e desenvolver novos padrões de resposta e para professores, como um meio de recolherem dela informações que possam reorientar sua prática.

De Lange ressalta que a Prova em Duas Fases combina as vantagens de uma prova escrita com os cinco princípios desenvolvidos por ele para a elaboração de provas, que são:

> **1º Princípio**: "O objetivo primeiro e principal das provas é melhorar a aprendizagem" (DE LANGE, 1987, p. 179).
> **2º Princípio**: "Métodos de avaliação devem permitir que os candidatos demonstrem mais o que sabem do que aquilo que eles não sabem" (DE LANGE, 1987, p. 180).
> **3º Princípio**: "A tarefa deve operacionalizar os objetivos tanto quanto possível" (DE LANGE, 1987, p. 180).
> **4º Princípio**: "A qualidade de uma prova não é definida pela acessibilidade a uma pontuação objetiva" (DE LANGE, 1987, p. 180).

5º Princípio: "Ao desenvolver formas alternativas de avaliar os alunos, devemos limitar-nos a testes que podem ser facilmente realizados na prática escolar" (DE LANGE, 1987, p. 183).

É possível reconhecer na segunda fase um processo de comunicação escrito que favorece, por parte do aluno, a explicação e reconstituição crítica de seus raciocínios, uma comunicação que não foca a busca de uma resposta correta, mas favorece a oportunidade de regular e orientar o processo de aprendizagem por meio das informações levantadas pelo professor e fornecidas ao aluno.

Neste trabalho, foi feito um desdobramento desse instrumento em mais fases, aqui denominado por Prova em Fases[26], na expectativa de aperfeiçoar sua natureza didática reconhecida no devir entre as fases e de fazê-lo um meio que favorece a regulação da aprendizagem a partir da análise da produção escrita.

A Prova em Fases configura-se, em princípio, como um instrumento de avaliação da produção escrita do aluno, de caráter individual, realizada na sala de aula em momentos estabelecidos pelo professor, não havendo consulta de materiais nesses momentos.

Na primeira fase, o estudante conhece o instrumento construído pelo professor, caderno de questões. Concomitantemente a esse ato de conhecer, o estudante resolve questões que compõem a prova e com essa primeira produção escrita, dá-se largada à análise da produção escrita como propulsora da regulação da aprendizagem. O professor analisa as resoluções e, com base nelas, escreve questionamentos para o estudante e tece considerações a respeito das respostas dadas. Com isso, encerra-se a primeira fase.

Os questionamentos e considerações do professor não são correções, mas, intervenções escritas, não há menção a certo ou a errado. O aluno interpreta e decide o caminho que deve seguir tanto na produção escrita nessa prova, como em seus estudos. Ao julgar oportuno, o professor pode indicar livros, *sites*, sugerir atendimentos individuais, uma vez que se espera

[26] A Prova em Fases foi um dos elementos de pesquisa de outros trabalhos de teses desenvolvidos no GEPEMA (PIRES, 2013; TREVISAN, 2013) – vide Quadro 2.

que esse instrumento favoreça a aprendizagem. Com isso amplia-se a função do instrumento, torna-se um instrumento de ensino e de aprendizagem.

A segunda fase inicia no momento em que o professor devolve a prova comentada para o estudante ler e analisar os questionamentos e apontamentos realizados pelo professor e, também, resolver novas questões ou responder aos questionamentos do professor. Do mesmo modo que na primeira fase, o lidar com as questões (produção escrita) é de caráter individual, é realizada na sala de aula em momentos estabelecidos pelo professor, sem consulta de materiais nesses momentos. Essa fase se encerra após o professor fazer a leitura das produções escritas dos alunos e realizar novas intervenções.

Na data agendada, o professor entrega aos estudantes a prova e inicia-se a terceira fase, com as mesmas características das fases anteriores. Esse processo recomeça até terminar/esgotar o número de fases previsto pelo professor[27].

O caminho que cada aluno segue a partir das intervenções escritas, durante cada fase, para regular a sua produção escrita, consequentemente sua aprendizagem, não é passível de ser acompanhado. Entretanto, a análise da produção escrita das diferentes fases pode revelar algumas das "pegadas" desse caminhar.

O resultado final (nota) dessa prova pode surgir a partir da utilização de uma escala de classificação, na qual, para cada questão, são consideradas as escolhas das estratégias, os procedimentos escolhidos para efetivação das estratégias, as respostas dadas tanto às questões quanto aos questionamentos levantados pelo professor ao longo da prova.

A Figura 2 apresenta um esquema[28] da Prova em Fases[29] que esta pesquisa está caracterizando:

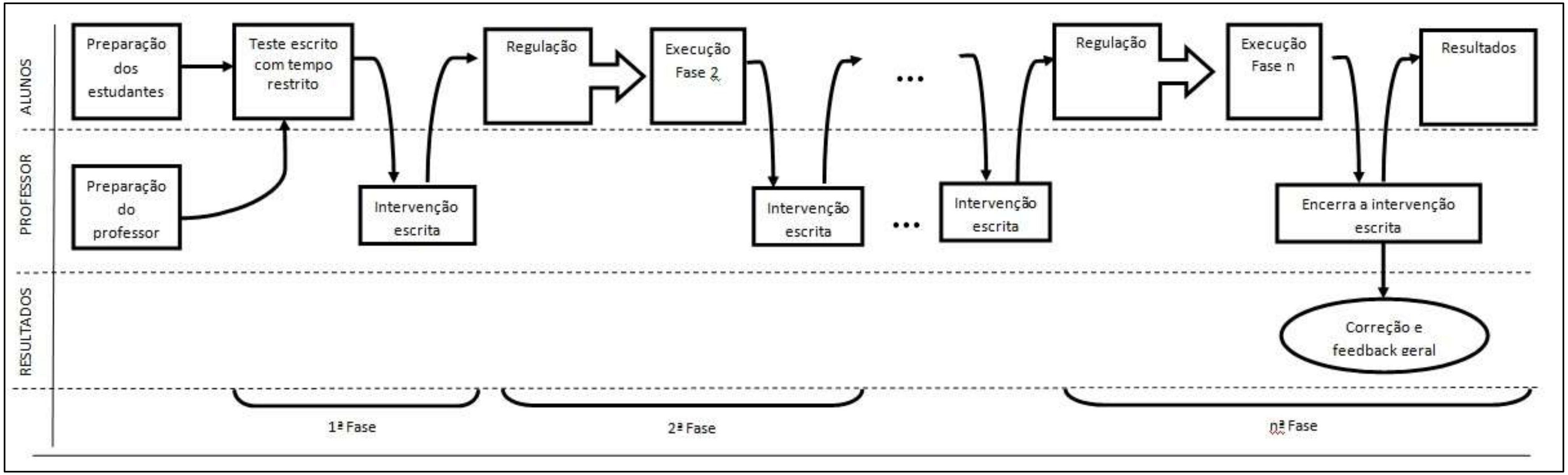
---

[27] Apesar do número de fases depender do cronograma estabelecido pelo professor, pode acontecer de um aluno participar de um número menor de fases por não estar presente ou não apresentar produção escrita a partir de uma data.

[28] No capítulo de procedimentos metodológicos, seção 4.3.3, há uma descrição da utilização desse esquema nesta pesquisa.

[29] Esse esquema é para uma Prova em Fases como recurso para a regulação da aprendizagem, se a intenção mudar, o esquema provavelmente mudará.

Figura 2 – Esquema para a Prova em Fases.



Fonte: autora.

3.6 Um Realce nos Problemas Significativos e Informativos

Nesta pesquisa, assim como na abordagem da Educação Matemática Realística e no GEPEMA, a atividade do aluno ao solucionar um problema/tarefa em sala de aula – gestão didática ou avaliação –, não se resume a realizar um conjunto de procedimentos, é uma oportunidade para matematizar – para aprender matemática.

Van den Heuvel-Panhuizen (1996), Santos L. (2002, 2008), Esteban (2000, 2003) e autores membros do GEPEMA – Ferreira (2013), Pires (2013), Trevisan (2013) – sugerem que não é possível tratar separadamente os problemas de avaliação dos problemas de gestão didática, quando se busca uma avaliação da aprendizagem que vem gerir a aprendizagem, que vem a ser uma oportunidade de aprendizagem, ou seja, uma avaliação com natureza didática.

Apesar de não ser possível separar os problemas de avaliação dos problemas de gestão didática, reconhecem-se diferenças, conforme Ferreira (2013, p. 59), a respeito de seus objetivos, contexto de aplicação, duração das tarefas, autonomia.

Em vista disso e no contexto da pesquisa, é coerente realçar as características dos problemas de avaliação baseado em Van den Heuvel-Panhuizen (1996).

Para Van den Heuvel-Panhuizen (1996), os problemas de avaliação possuem o requisito de serem *significativos e informativos*. A característica de ser significativa se baseia na ideia de Freudenthal (1973) que anuncia como o principal objetivo da educação os alunos aprenderem a fazer matemática como uma atividade humana. Nessa direção, o problema precisa ser familiar ao aluno, de tal forma que seja acessível, convidativo. Ser acessível e convidativo não implica em ter diretamente contextos de relevância prática, apesar de ser apontado como um componente facilitador que aumenta a transparência da avaliação e oferece mais liberdade aos alunos em abordar e mostrar as suas competências, mas em valer a pena no sentido de exigir uma solução.

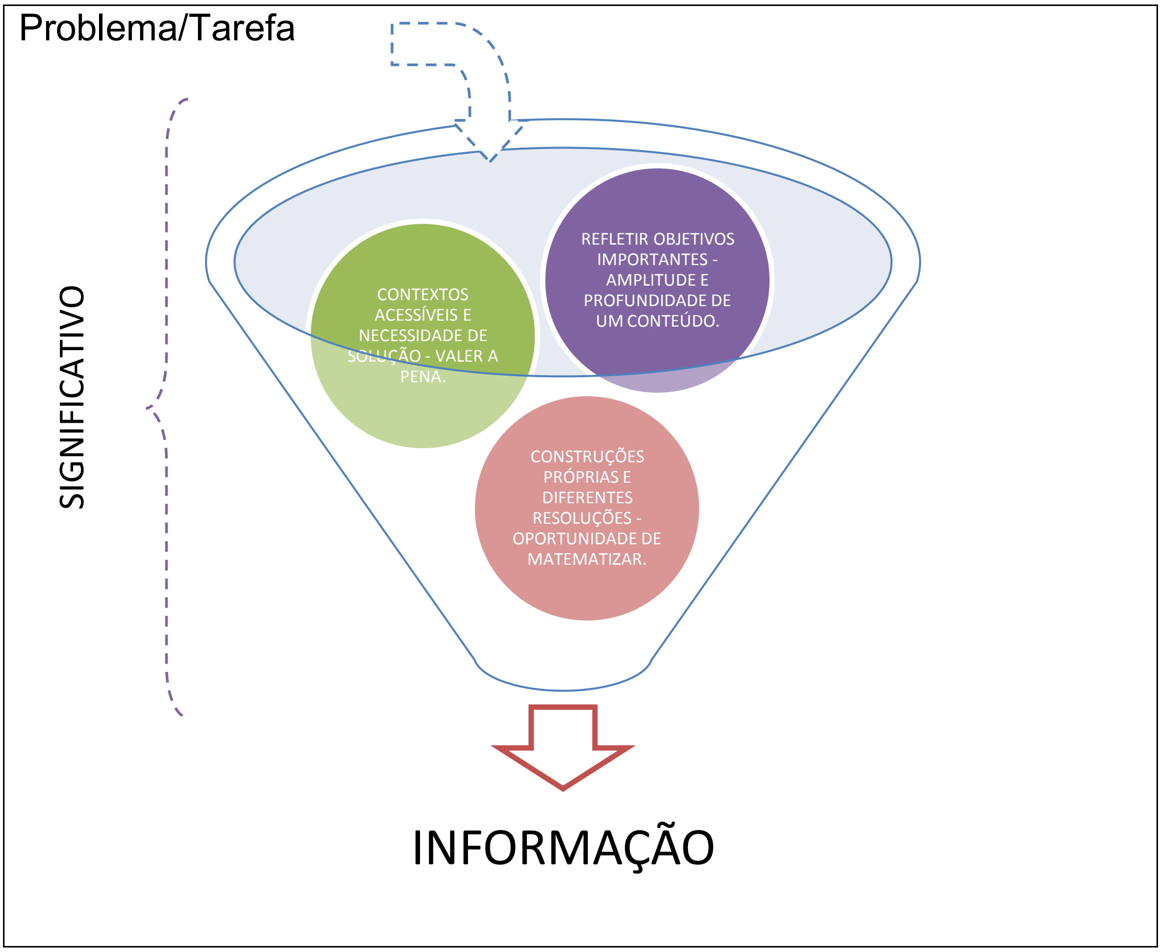
Uma tarefa significativa tem que refletir objetivos relevantes, de tal forma que o aluno, ao lidar com o problema, desenvolva estratégias e procedimentos que abranjam tópicos do assunto da área matemática em amplitude e profundidade. Por conseguinte, os problemas podem ser resolvidos de diferentes formas e em diferentes níveis, o que favorece algum aprendizado a todos os alunos envolvidos em sua resolução, atendendo ao Terceiro Princípio de De Lange (1987, p.180).

Mais do que favorecer algum aprendizado, os problemas de avaliação devem revelar aos professores e aos alunos o máximo de informações acerca dos processos de ensino e de aprendizagem, ou seja, precisam ser informativos.

Contudo, para gerar uma informação de qualidade[30], é preciso que o problema seja significativo. Tanto melhores serão as informações recolhidas quanto maior flexibilidade o problema tiver para possibilitar aos alunos mostrar o que eles sabem, para matematizar e para ser resolvido de formas diferentes, o que permite ao aluno mostrar em que nível se encontra. A Figura 3 representa o entrelace de características dos problemas de avaliação consideradas: significativas e informativas.

[30] Informação de qualidade é considerada aquela que informa/fornece indícios do que os alunos sabem, em vez de simplesmente revelar o que eles não sabem.

Figura 3[31] **–** Entrelace de características de problemas de avaliação.



Fonte: autora.

Esse entrelace é relevante na perspectiva de ensino e de aprendizagem adotada nesta pesquisa, já que os alunos desempenham um papel ativo na construção de seu próprio conhecimento e se faz uso do conhecimento do sujeito representado por sua produção escrita para alcançar um maior nível de compreensão. A informação gerada pelo aluno, ao lidar com um problema nessa direção, serve ao professor e ao aluno.

3.7 A PIRÂMIDE DE AVALIAÇÃO

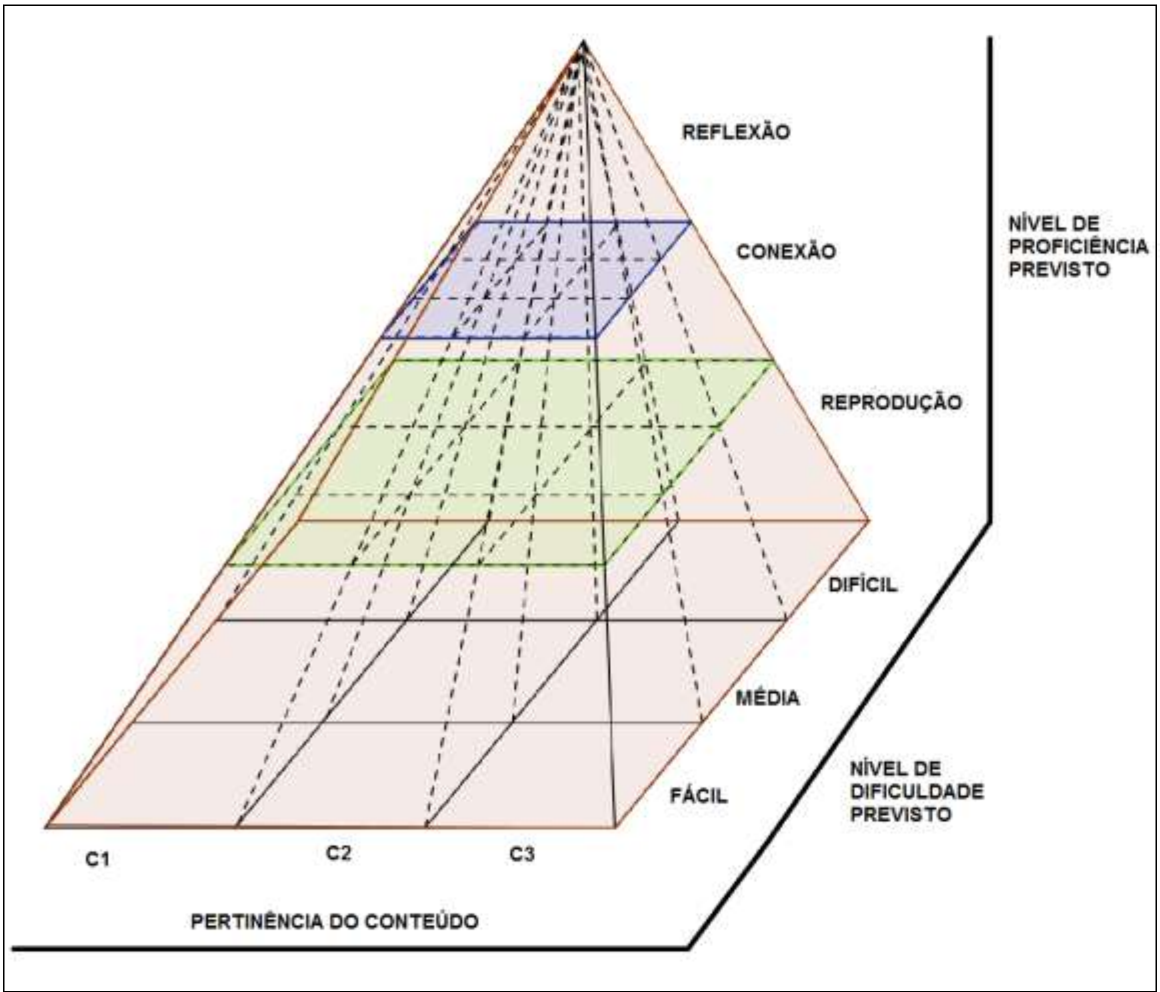
Além de considerar as características dos problemas de avaliação mencionados, é preciso refletir a respeito do que os itens de uma prova elaborada na perspectiva da RME devem abordar. De Lange (1999)

---

[31] No esquema, foi utilizada uma espécie de funil na intenção de gerar a sensação de fluidez. A fluidez da informação depende diretamente do quão significativo é o problema/questão.

propõe um modelo de “Pirâmide de Avaliação” (Figura 4), no qual fornece uma representação das necessidades de uma prova.

Figura 4: Pirâmide de Avaliação proposta por De Lange (1999).



Fonte: autora – baseado em De Lange (1999).

Segundo o autor, a representação tem em cada uma de suas dimensões os aspectos necessários em uma avaliação: (a) o conteúdo ou os domínios da matemática, (b) os níveis de raciocínio e compreensão matemática - níveis de proficiência e (c) o nível de dificuldade dos itens.

Essa representação atende a uma distribuição “justa” do número relativo de itens necessários para representar a compreensão dos conteúdos matemáticos por um estudante. Essa distribuição se deve à complexidade de realização de cada item, ao tempo destinado a sua resolução, já que, conforme De Lange (1999), os itens com nível de proficiência de:

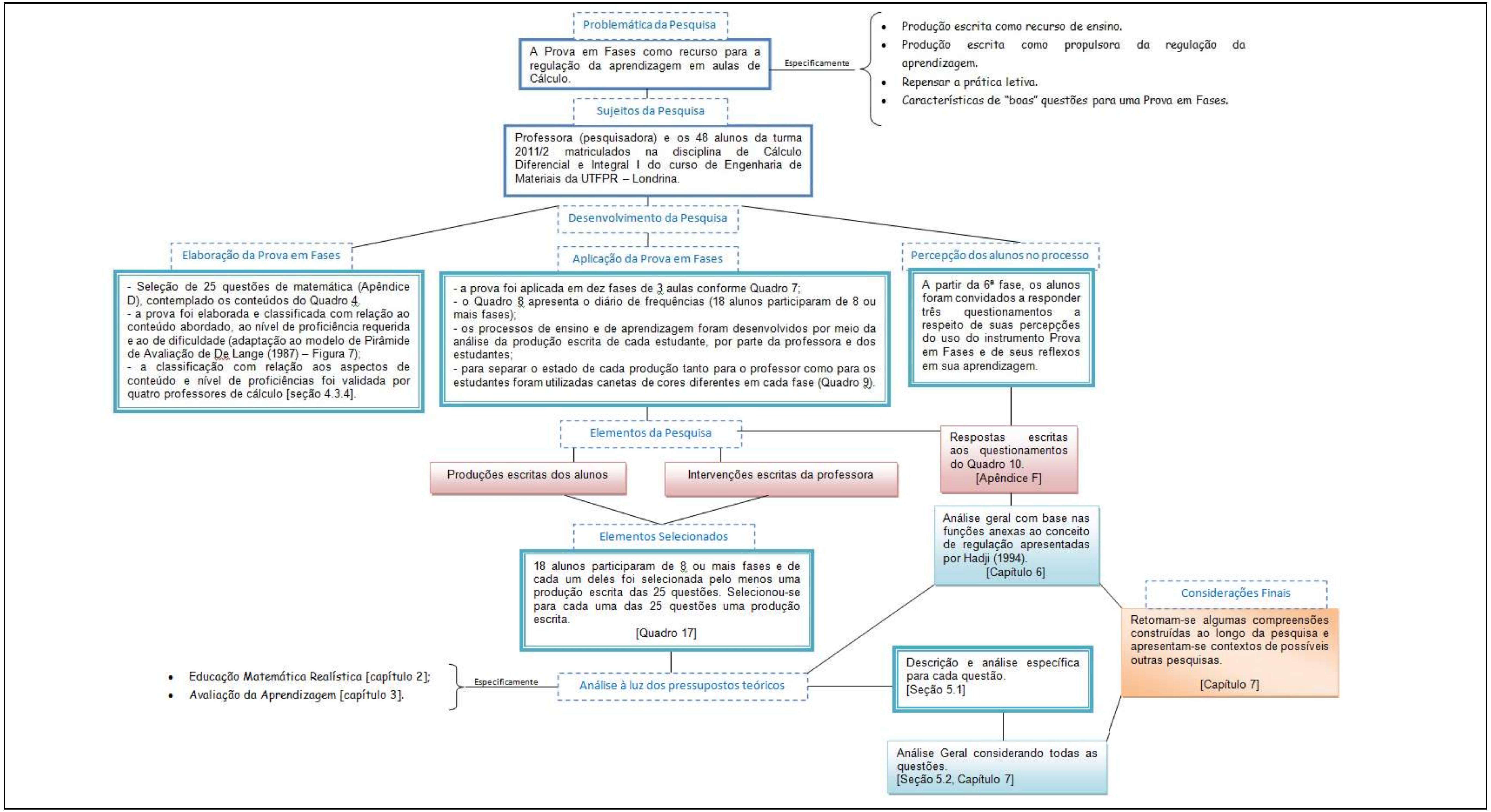
- **reprodução** abrange itens relativamente familiares aos estudantes, para os quais são necessárias essencialmente a reprodução de conhecimentos frequentemente praticados e a utilização de procedimentos rotineiros, como, por exemplo, a resolução de problemas–tipo, execução de operações de rotina;
- **conexão** envolve itens com contextos ainda familiares ou quase familiares aos estudantes, mas que, para resolvê-los, são necessários mais do que simples procedimentos de rotina, por exemplo, requerem integrar, conectar e ampliar modestamente material já praticado anteriormente;
- **reflexão** que envolve, além das competências descritas nos outros dois agrupamentos, a capacidade de refletir e planejar estratégias para resolver problemas poucos familiares. Os itens podem ser descritos como requerendo raciocínio avançado, argumentação, abstração, generalização e modelagem aplicada a contextos novos.

De Lange (1999) ressalta que enquadrar um item em um dos três níveis de proficiência é uma atividade um tanto arbitrária por não haver uma distinção precisa entre eles e por ocorrer de um item poder incorporar competências associadas a mais de um nível. Entretanto, dado que uma prova vem a ser uma medida e uma descrição do crescimento do aluno com relação aos conteúdos matemáticos e em todos os três níveis de pensamento, pressupõe-se que os itens de uma prova devem preencher a pirâmide, ou seja, haver itens em todos os níveis de proficiência, em diferentes graus de dificuldade e que contemplem todo o conteúdo.

4 O PROCESSO METODOLÓGICO

Neste capítulo apresenta-se uma descrição de aspectos metodológicos da pesquisa. A Figura 5 é um esquema que resume informações detalhadas nas próximas seções e um esboço de aspectos gerais da estrutura deste trabalho.

Figura 5 – Aspectos da Pesquisa



Fonte: autora.

4.1 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

A pesquisa aqui apresentada tem a natureza de uma investigação qualitativa de cunho essencialmente interpretativo. O fato de se pretender recolher dados no ambiente natural em que as ações ocorrem, descrever as situações vividas pelos participantes e interpretar os significados que estes lhes atribuem justifica a realização de uma abordagem qualitativa. Algumas das características principais da natureza qualitativa nesta pesquisa são:

1. o fenômeno estudado, a Prova em Fases como recurso para a regulação da aprendizagem, foi observado e teve seus dados recolhidos em situações de avaliações no cotidiano de uma sala de aula de Cálculo Diferencial e Integral I em uma Instituição Pública de Ensino Superior pelo professora/pesquisadora;
2. uma descrição da universidade, do curso, da disciplina de Cálculo Diferencial Integral I, dos sujeitos envolvidos, dos instrumentos utilizados – Prova em Fases (elaboração, planejamento, participação e validação) e Questionário das percepções dos alunos ao lidar com essa Prova em Fases – foi considerada potencial para clarear o caminho seguido e para fornecer pistas na construção do fenômeno estudado;
3. mais do que a utilização da Prova em Fases como instrumento de ensino e de aprendizagem em uma turma de Cálculo Diferencial e Integral I, da análise da produção escrita dos alunos em questões da prova e de suas percepções, o interesse principal foi estudar a Prova em Fases como um recurso para a regulação da aprendizagem;
4. junto com a percepção da professora/pesquisadora em "constante construção", houve também a preocupação em buscar caracterizar a percepção dos alunos a respeito desse processo, do instrumento e de possíveis impactos já sentidos por eles;
5. o presente estudo teve seus primeiros desenhos nas discussões do GEPEMA, na sequência vieram a seleção das questões e elaboração da prova em fase e um (re)início a cada fase da prova aplicada e suas análises.

4.2 O CONTEXTO DA PESQUISA

A Prova em Fases foi utilizada como instrumento de ensino, de aprendizagem e também de avaliação[32] na turma de Cálculo Diferencial e Integral I do curso de Engenharia de Materiais durante o segundo semestre[33] de 2011, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, *campus* Londrina.

A Figura 6 é um esquema que intenciona sintetizar a Prova em Fases no contexto desta pesquisa como instrumento de ensino, de aprendizagem e de avaliação.

Figura 6 – Prova em Fases – no ensino, na aprendizagem, na avaliação.

ENSINO	O professor guia o aluno a construir ou a fazer uso de seus conhecimentos relativos aos conteúdos necessários para resolver as questões da prova por meio das intervenções escritas.
APRENDIZAGEM	O aluno constrói ou faz uso de seus conhecimentos a partir do lidar com as questões, das intervenções do professor, das apreciações de sua produção escrita ao longo das fases, regula seu próprio percurso de aprendizagem.
AVALIAÇÃO	As fases favorecem uma avaliação integrada ao processo de ensino e de aprendizagem. A nota final surge a partir da correção das escolhas das estratégias ao longo da prova, dos procedimentos escolhidos para efetivação das estratégias, das respostas dadas aos problemas, assim como das intervenções escritas.

Fonte: autora.

[32] A partir da Prova em Fases, obteve-se uma nota que foi utilizada na avaliação de rendimento da disciplina conforme Plano de Ensino (Apêndice A), mas esse construto não é de interesse desta pesquisa, por isso não será apresentado. O foco da pesquisa é o processo ao longo da realização da Prova em Fases.

[33] Apesar de ser 2011/02 a turma era de calouros. Os cursos da UTFPR, *campus* Londrina, são ofertados em regime semestral. O processo de seleção dos alunos é feito para ingresso no início do 1º semestre e no início do 2º semestre letivo.

4.2.1 A UTFPR

A Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) é a primeira assim denominada no Brasil, foi transformada a partir do Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná (CEFET-PR).

Sua missão é promover a educação de excelência por meio do ensino, pesquisa e extensão, interagindo de forma ética e produtiva com a comunidade para o desenvolvimento social e tecnológico. E tem como visão ser modelo educacional de desenvolvimento social e referência na área tecnológica.

Com ampla abrangência no Paraná, a UTFPR tem doze câmpus no Estado e pretende ampliar essa atuação. Cada *campus* mantém cursos planejados de acordo com a necessidade da região onde está situado, e boa parte deles oferta cursos técnicos, de Engenharia e de Tecnologia.

O *campus* de Londrina, em especial, foi implantado em fevereiro de 2007 e atualmente oferta seis cursos de graduação: Tecnologia em Alimentos, Engenharia Ambiental, Engenharia de Materiais, Engenharia Mecânica, Engenharia de Produção e Licenciatura em Química; três cursos de mestrado: Mestrado Profissional em Tecnologia de Alimentos, Mestrado Acadêmico em Engenharia Ambiental e Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Humanas, Sociais e da Natureza; Curso de Formação Pedagógica; cursos de Qualificação Profissional destinados aos alunos e à comunidade, e cursos de especialização.

De modo particular, o curso de Engenharia de Materiais da UTFPR, *campus* Londrina, que teve sua primeira turma no segundo semestre de 2010, tem duração de 5 anos e é um curso em turno integral (matutino e vespertino).

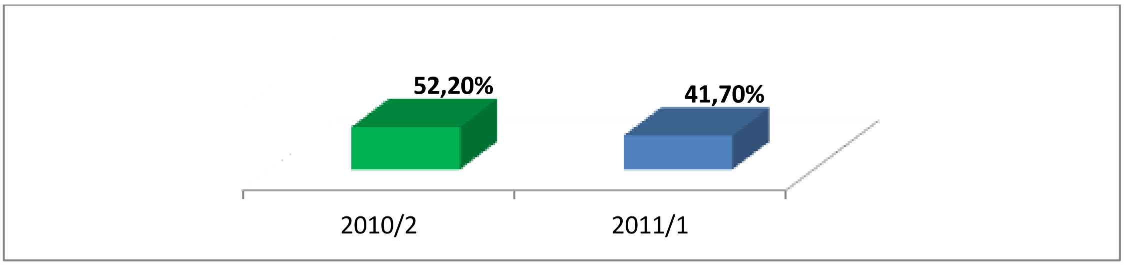
A Engenharia de Materiais compreende o estudo de materiais e como podem ser usados para criar produtos associados às atividades do cotidiano. A busca por compreender a estrutura e as propriedades dos materiais, suas formas de processamento e o desempenho dos dispositivos desenvolvidos são atividades inerentes a essa área de conhecimento.

4.2.2 A Disciplina e a Turma Escolhida

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do curso de Engenharia de Materiais está sob responsabilidade da professora/pesquisadora desta pesquisa desde a implantação do curso de Engenharia de Materiais, ou seja, desde o segundo semestre de 2010.

Os percentuais de reprovação por nota[34] na disciplina nos semestres anteriores à pesquisa estão representados no gráfico que segue.

Gráfico 1 – Percentual de reprovação por nota.



Fonte: Sistema Acadêmico da UTFPR.

Nesses dois semestres, o desenvolvimento da disciplina se deu, geralmente, por meio de aulas expositivas, durante as quais os alunos foram incentivados a participar a fim de esclarecer as dúvidas e contribuir com exemplos e sugestões. Por consequência dessa prática, em grande parte das aulas, os alunos tornavam-se colaboradores em seus processos de aprendizagem, não podendo construir significados próprios e vivenciar a atividade de matematizar.

A avaliação dos alunos nesses semestres não pode ser tomada como um processo, já que foi pautada na média aritmética de poucos momentos estanques[35] de avaliação. Em resumo, a avaliação constitui-se em três avaliações parciais de igual valor (10,0), cada avaliação composta por uma prova escrita e/ou por demais atividades desenvolvidas como complemento às

---

[34] A construção desses gráficos gera um mal-estar na pesquisadora/professora por seus altos percentuais de reprovação. Entretanto, reforça a necessidade de investigar meios de favorecer a aprendizagem de seus estudantes e, por consequência e não propósito, melhorar futuros resultados dos alunos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

[35] Estanques no sentido de o professor deixar de ser professor e passar a ser avaliador e, também, no sentido de olhar a avaliação como momentos formais que demarcam o fim do estudo de um determinado tema, neste caso: limite, derivada e integral.

provas. A nota final foi obtida por meio da média aritmética de três notas parciais resultantes das avaliações parciais após a computação da substituição ou não da menor nota por meio da prova substitutiva.

Em paralelo a esse cenário tradicional de ensino e de avaliação, a professora/pesquisadora estava mergulhada nas leituras acerca da avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem, dos princípios da Educação Matemática Realística. Primeira confusão gerada! Como pode permanecer com essa prática de ensino após as leituras e discussões realizadas no GEPEMA? Como pode não se sentir um fator de forte impacto nos resultados da disciplina? Não pode...

Assim surgem os sujeitos desta pesquisa: professora e alunos da turma 2011/2 matriculados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do curso de Engenharia de Materiais da UTFPR – Londrina.

No início do semestre de 2011/2, estavam matriculados 58 alunos na disciplina citada. Desse total, 9 alunos cancelaram a matrícula antes da 2ª fase da Prova em Fases e 1 aluno convalidou a disciplina. Assim, 48 é o número de alunos envolvidos na pesquisa.

O plano de ensino organizado para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I naquele semestre encontra-se no Apêndice A e contém a ementa, as estratégias de ensino utilizadas, a bibliografia e os critérios de avaliação.

Como forma de autorizar o uso de suas produções escritas para o desenvolvimento do trabalho, todos foram convidados a assinar um *Termo de consentimento livre e esclarecido* (Apêndice B) e as chefias do *campus* assinaram um termos de anuência (Apêndice C).

4.3 Uma Prova em Fases

4.3.1 Escolha das Questões

A Prova em Fases utilizada como instrumento de coleta de informação foi composta por vinte e cinco (25) questões de matemática (Apêndice D). Cada uma das questões foi selecionada levando-se em conta as expectativas sobre o aluno que vai ser formado pelo curso de Cálculo

Diferencial e Integral I, o conhecimento de conceitos básicos de matemática exigidos em cada questão, as competências apresentadas nos PCN+ e os níveis de proficiência discutidos por De Lange. Para tanto, em cada questão selecionada, relacionaram-se as seguintes informações:

Quadro 3 – Informações relacionadas em cada questão.

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Competências (PCN+)
Nível de Competência (DE LANGE)
Nível de Dificuldade Previsto

Fonte: autora.

A descrição do que é necessário o aluno saber para resolver a questão refere-se aos conteúdos, estratégias e procedimentos possivelmente aprendidos no Ensino Médio que poderão ser usados pelos alunos ao lidar com a questão. Com isso, pressupõe-se uma comunicação escrita que formaliza o conhecimento do aluno a partir da sua própria regulação da aprendizagem.

Consideram-se as competências dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (1998) por ser um documento nacional que norteia as demais diretrizes educacionais do país tendo em vista que a prova contempla conteúdos de matemática que também fazem parte do programa do Ensino Médio.

Por buscar construir um instrumento de avaliação que favoreça a avaliação integrada ao processo de ensino e de aprendizagem, ou seja, uma avaliação como oportunidade de aprendizagem, fez-se uma adaptação do modelo de “Pirâmide de Avaliação” de De Lange (1999), modelo que organiza uma avaliação na perspectiva da RME. Do modelo, usaram-se as classificações com relação ao conteúdo abordado, ao nível de proficiência e ao de dificuldade. Não se respeitou uma proporção que configura a representação piramidal por ser uma Prova em Fases que tem a intenção de tornar-se um recurso de ensino e de aprendizagem para retomar conteúdos que foram estudados na Educação Básica.

Os conteúdos contemplados na Prova em Fases são os primeiros três blocos do programa da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I conforme consta no Quadro 4.

Quadro 4 – Conteúdos contemplados na Prova em Fases.

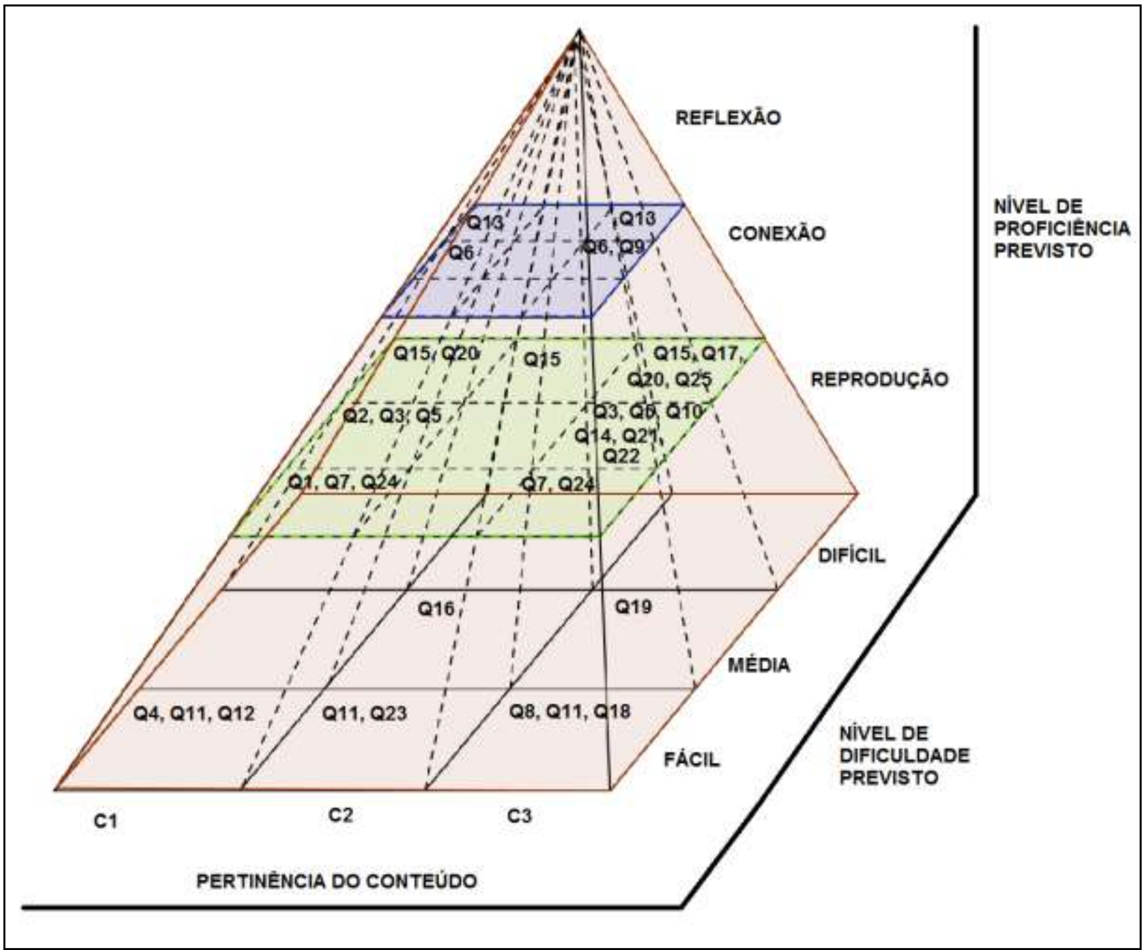
C1	Sistematização dos Conjuntos Numéricos	Identificação dos conjuntos numéricos; o corpo dos números reais; a reta numerada real; valor absoluto, desigualdades reais e algumas propriedades algébricas dos números reais.
C2	Sistema Cartesiano Ortogonal	Representação de dados em sistemas de eixos coordenados: Sistema Cartesiano Ortogonal.
C3	Relações e Funções no Espaço Real Bidimensional	Definição de Relação e de Função; funções e representações gráficas de funções elementares; funções pares e ímpares; transformação de funções por meio de: translação, compressão e estiramento etc.; funções compostas; funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas; funções inversas; funções exponenciais e logarítmicas; funções trigonométricas e suas inversas.

Fonte: autora.

Uma possível representação[36] da “Pirâmide de Avaliação” de De Lange (1999) para a Prova em Fases elaborada é:

[36] Observa-se um número maior de questões de conexão por considerá-las mais apropriadas para o alcance do objetivo do trabalho e considerar os assuntos abordados na prova como conteúdos do Ensino Médio.

Figura 7 – As questões da Prova em Fases na Pirâmide de Avaliação.



Fonte: autora.

No Quadro 5 apresenta-se a fonte de cada uma das questões. Algumas questões sofreram adaptações de unidades de medida e tradução.

Quadro 5 – Fontes das questões da Prova em Fases.

Questão 1	www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/BrevetAntillessept.2001.pdf Brevet - Antilles-Guyane septembre 2001
Questão 2	www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=272&fileName=Ficha_3.pdf Séries de Problemas de Matemática A - 10º ano
Questão 3	www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/BrevetFrancesept2001.pdf Brevet - Grenoble septembre 2001
Questão 4	www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/BrevetPondichery2002.pdf Brevet Pondichéry juin 2002
Questão 5	www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=272&fileName=Ficha_5.pdf Séries de Problemas de Matemática A - 10º ano
Questão 6	www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=272&fileName=Ficha_4.pdf Séries de Problemas de Matemática A - 10º ano
Questão 7	www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=272&fileName=Ficha_5.pdf Séries de Problemas de Matemática A - 10º ano
Questão 8	Rotineira em livros de Cálculo.
Questão 9	www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=272&fileName=Ficha_4.pdf Séries de Problemas de Matemática A - 10º ano

Questão 10	http://bi.gave.min-edu.pt/bi/es/880/2889 GAVE – Banco de itens – Ensino Secundário
Questão 11	www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=272&fileName=Ficha_4.pdf Séries de Problemas de Matemática A - 10º ano
Questão 12	Rotineira em livros de Matemática para o Ensino Básico.
Questão 13	www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=272&fileName=Ficha_5.pdf Séries de Problemas de Matemática A - 10º ano
Questão 14	http://bi.gave.min-edu.pt/bi/es/880/2664 GAVE – Banco de itens – Ensino Secundário
Questão 15	www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=272&fileName=Ficha_6.pdf
Questão 16	Rotineira em livros de Matemática para do Ensino Médio.
Questão 17	http://bi.gave.min-edu.pt/bi/es/860/1537 GAVE – Banco de itens – Ensino Secundário
Questão 18	www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=9&fileName=MatA11_Mai2011_V1.pdf GAVE - Teste Intermédio de Matemática A - 11.º Ano de Escolaridade
Questão 19	www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=9&fileName=MatA11_Mai2011_V1.pdf GAVE - Teste Intermédio de Matemática A - 11.º Ano de Escolaridade
Questão 20	www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=9&fileName=MatA11_Mai2011_V1.pdf GAVE - Teste Intermédio de Matemática A - 11.º Ano de Escolaridade
Questão 21	www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=9&fileName=MatA11_Jan2011_V1.pdf GAVE - Teste Intermédio de Matemática A - 11.º Ano de Escolaridade
Questão 22	www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=9&fileName=MatA10_Mai2011_V1.pdf GAVE - Teste Intermédio de Matemática A - 10.º Ano de Escolaridade
Questão 23	www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=9&fileName=MatA10_Mai2011_V1.pdf GAVE - Teste Intermédio de Matemática A - 10.º Ano de Escolaridade
Questão 24	www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=9&fileName=MatA12_Jan2011_V1.pdf GAVE - Teste Intermédio de Matemática A - 12.º Ano de Escolaridade
Questão 25	www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=9&fileName=MatA12_Jan2011_V1.pdf GAVE - Teste Intermédio de Matemática A - 12.º Ano de Escolaridade

Fonte: autora.

4.3.2 Planejamneto e Participação

O grande número de alunos matriculados nos cursos de Engenharias, de modo especial, o número de alunos matriculados nas engenharias oferecidas pela UTFPR de Londrina, dificulta a interação aluno-professor nessa fase de transição de Ensino Médio para Ensino Superior. Por conseguinte, a oralidade individual é quase inviabilizada, com base na falta de oportunidade para todos os alunos se posicionarem numa turma típica de Cálculo. Na prática, a comunicação individual é feita por meio da linguagem escrita, o que direciona a necessidade de um olhar reflexivo para esse meio de comunicação, a fim de fazê-lo um instrumento que não apenas comunica, mas oferece a oportunidade de regular e orientar o processo de ensino e de aprendizagem.

Nessa expectativa, professora/pesquisadora e orientadora elaboram a Prova em Fases, com base nos conteúdos do QUADRO 4. A intenção é fazê-la um instrumento de comunicação entre professora e aluno, que oportunize identificar as dificuldades e potencialidades dos alunos nos conceitos envolvidos para melhorar as decisões relativas à aprendizagem e, de modo especial, instruir o aluno sobre seu próprio percurso para regular a aprendizagem. Também buscou, por meio das questões da "prova", gerar a oportunidade ao aluno de possivelmente reelaborar os conceitos que são básicos para um curso de Cálculo Diferencial e Integral I.

Ressalta-se que esse instrumento[37] foi o meio pelo qual a professora guiou o aluno a construir ou fazer uso de seus conhecimentos a respeito dos conteúdos contemplados. Conforme consta no Plano de Ensino (Apêndice A), foi, também, o instrumento para a primeira avaliação parcial da disciplina. Não foram realizadas aulas específicas para tratar desses conteúdos, e os processos de ensino e de aprendizagem foram desenvolvidos exclusivamente por meio da análise da produção escrita de cada estudante, por parte da professora e dos alunos.

A princípio foram previstas sete fases. As datas para cada uma das fases foi definida previamente, com base no calendário acadêmico da UTFPR, e repassadas aos alunos via o plano de ensino (APÊNDICE A).

Quadro 6 – Cronograma para aplicação da Prova em Fases (previsão).

Data	FASE	Número de aulas para realização
19/08/2011	**1ª fase**	**3 aulas**
26/08/2011	**2ª fase**	**1 aula**
02/09/2011	**3ª fase**	**2 aulas**
28/09/2011	**4ª fase**	**2 aulas**
14/10/2011	**5ª fase**	**2 aulas**
16/11/2011	**6ª fase**	**3 aulas**
07/12/2011	**7ª fase**	**2 aulas**

Fonte: autora.

[37] Isso justifica dizer que a Prova em Fases foi utilizada como instrumento de ensino, de aprendizagem e também de avaliação.

Foram destinadas 15 aulas para a realização da Prova em Fases, de um universo de 102 aulas presenciais[38]. Esse número de aulas foi, em média, o dobro do número de aulas destinadas nos semestres anteriores ao desenvolvimento do conteúdo dos blocos contemplados na Prova em Fases.

Entretanto, ao realizar a primeira fase, os alunos sentiram a necessidade de ampliar esse número de aulas para a realização da Prova em Fases, primeiro indício de que reconheceram que a aprendizagem não mais seria a partir da apropriação de conhecimentos transmitidos pela professora, mas da sua própria elaboração, tornando-se condutor do próprio processo de aprendizagem e a professora um guia. Com isso, aconteceram fases em horários extraclasse[39], o número de aulas em contato com a prova foi ampliado para 30 aulas e as fases seguiram as datas apresentadas no Quadro 7.

Quadro 7 – Datas de realização da Prova em Fases (ocorreu).

Data	FASE	Número de aulas para realização
24/08/2011	**1ª fase**	**3 aulas**
14/09/2011	**2ª fase**	**3 aulas**
28/09/2011	**3ª fase**	**3 aulas**
04/10/2011	**4ª fase**	**3 aulas**
14/10/2011	**5ª fase**	**3 aulas**
18/10/2011	**6ª fase**	**3 aulas**
01/11/2011	**7ª fase**	**3 aulas**
16/11/2011	**8ª fase**	**3 aulas**
22/11/2011	**9ª fase**	**3 aulas**
07/12/2011	**10ª fase**	**3 aulas**

Fonte: autora.

Para ser possível se remeter a cada aluno e fazer referência às suas respectivas produções escritas, foi elaborada uma sigla para cada um. As siglas identificadoras são compostas pelas letras EM que representam Engenharia de Materiais; seguidas de 11, que faz referência ao ano de 2011;

[38] No restante das aulas presenciais o cronograma foi baseado no desenvolvimento dos conceitos de limites, derivadas e integrais.
[39] O horário extra classe foi agendado em acordo com toda a turma, em horário de “janela”. Não foi incluído no horário das aulas presenciais por haver um cronograma acerca de outros conteúdos a ser seguido e, conforme a turma mencionou, nos horários extras eles poderiam se responsabilizar pela necessidade ou não de ir fazer a prova.

depois de CDI, Cálculo Diferencial e Integral I, e, por fim, dois dígitos que representam o número da prova[40] do estudante.

O Quadro 8 apresenta o diário de frequência dos estudantes às fases da prova.

Quadro 8 – Diário de Frequência.

	24/08	14/09	28/09	04/10	14/10	18/10	01/11	16/11	22/11	07/12	Total de fases de que participou
EM11CDI01	X	X	X	X			X	X	X		7
EM11CDI02	X	X	X	X							4
EM11CDI03	X	X			X	X		X			5
EM11CDI04	X	X	X	X	X		X	X			7
EM11CDI05	X	X	X	X	X	X		X		X	8
EM11CDI06	X	X	X	X		X		X	X	X	8
EM11CDI07	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	10
EM11CDI08	X	X	X	X	X	X		X	X		8
EM11CDI09	X	X	X	X	X		X				6
EM11CDI10	X	X	X	X	X				X		6
EM11CDI11	X	X	X	X							4
EM11CDI12	X	X	X	X	X	X		X	X	X	9
EM11CDI13	X	X	X	X	X			X		X	7
EM11CDI14	X	X	X					X			4
EM11CDI15	X	X	X	X		X					5
EM11CDI16	X	X	X	X	X		X	X	X		8
EM11CDI17	X	X	X	X	X	X	X		X	X	9
EM11CDI18	X		X		X	X		X	X		6
EM11CDI19	X	X	X			X					4
EM11CDI20	X	X	X	X		X		X	X	X	8
EM11CDI21	X	X	X	X	X	X		X	X	X	9
EM11CDI22	X	X	X	X	X		X	X	X		8
EM11CDI23	X	X	X	X	X			X	X		7
EM11CDI24	X	X	X		X			X			5
EM11CDI25	X	X	X	X	X	X		X			7
EM11CDI26	X	X	X	X	X	X	X		X	X	9
EM11CDI27	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	10
EM11CDI28	X	X	X		X						4
EM11CDI29	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	10
EM11CDI30	X	X	X	X	X	X	X		X		8
EM11CDI31	X	X		X	X						4

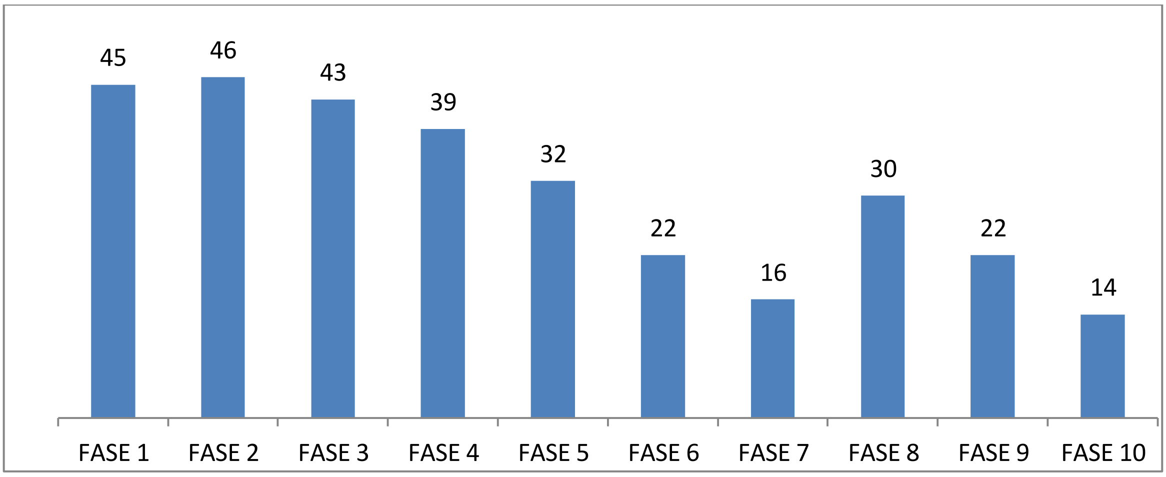
[40] A enumeração das provas seguiu a ordem da análise da produção escrita da primeira fase, não está relacionada a ordem alfabética, ou a outra relação que pudesse identificar os estudantes.

EM11CDI32	X	X									2
EM11CDI33	X	X	X	X		X	X				6
EM11CDI34	X	X	X	X	X			X		X	7
EM11CDI35	X	X	X	X	X						5
EM11CDI36	X	X	X	X	X						5
EM11CDI37	X	X	X				X				4
EM11CDI38	X	X	X	X							4
EM11CDI39	X	X	X	X	X	X		X	X		8
EM11CDI40	X	X	X	X	X	X		X	X		8
EM11CDI41	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	10
EM11CDI42	X	X	X	X	X	X		X	X	X	9
EM11CDI43		X	X	X			X	X			5
EM11CDI44		X	X	X	X		X	X			6
EM11CDI45		X	X	X	X			X	X		6
EM11CDI46	X	X	X	X				X			5
EM11CDI47	X	X					X				3
EM11CDI48	X			X				X			3
	45	46	43	39	32	22	16	30	22	14	Total de presentes

Fonte: autora.

No Gráfico 2, é representado o número de alunos presentes em cada encontro agendado para a realização da Prova em Fases.

Gráfico 2 – Participação dos alunos em cada fase.



Fonte: autora.

4.3.3 Dinâmica

A Prova em Fases configurou-se, a princípio, como um instrumento de avaliação da produção escrita do aluno, de caráter individual, realizada na sala de aula em momentos estabelecidos conforme apresentado no Quadro 7, não havendo consulta de materiais nesses momentos, e a produção escrita do estudante em cada fase foi exclusivamente à caneta, sendo que, em cada fase, a professora forneceu a todos os estudantes uma caneta de cor diferente[41] e os avisou para não rasurar a produção de fases anteriores.

No Quadro 9, apresentam-se as cores das canetas utilizadas em cada fase.

Quadro 9 – Cores das canetas utilizadas pelos alunos e pela professora.

		Aluno	Professora
1ª Fase	24/08	Preto/azul	Laranja
2ª Fase	14/09	Vermelho	*pink*
3ª Fase	29/09	Verde	
4ª Fase	04/10	Verde	Azul
5ª Fase	14/10	Roxo(meninas)/Azul(meninos)*	
6ª Fase	18/10	Roxo(meninas)/Azul(meninos)*	Marron
7ª Fase	01/11	Azul(meninas)/Roxo(meninos)*	Vermelho
8ª Fase	16/11	Rosa	
9ª Fase	22/11	Diversas (cor ainda não usada)	Roxo
10ª Fase	07/12	Azul (folha em anexo)	

*A distinção de gênero foi apenas para a logística de distribuição das canetas

Fonte: autora.

Os espaços em branco, na coluna da professora, representam que naquela fase não foram feitas novas intervenções escritas, por

[41] Um ponto peculiar do utilização que aqui se apresenta desse instrumento são as canetas de cores diferentes nas diferentes fases. Esse apetrecho é relevante por separar o estado de cada produção, tanto para professor como para os alunos, e facilitar a apreciação de cada fase e, assim, a comunicação escrita entre estudante e professor.

consequência, os alunos podiam continuar a sua produção com a mesma cor de caneta. A não intervenção escrita da professora foi uma decisão acordada com os alunos, eles sentiam que precisavam de um tempo maior para lidar com as questões e também com os questionamentos das fases anteriores. Na última fase, foi utilizada uma folha anexa, na expectativa de fazer os alunos “garimparem” a prova em busca de questões ainda abertas.

Na primeira fase, o estudante conheceu o instrumento construído pela professora/pesquisadora, caderno de questões (apresentado na próxima seção), que foi utilizado para recolher informações e juntos regular o processo de aprendizagem. Concomitante a esse ato de conhecer, o estudante resolveu algumas das questões que compõem a prova e, com essa primeira produção escrita, foi dada a largada à análise da produção escrita como reveladora do processo de matematizar de cada estudante. A professora/pesquisadora analisou as resoluções e, com base nelas, escreveu questionamentos para o estudante e teceu considerações a respeito das respostas dadas. Com isso, encerrou-se a primeira fase.

A segunda fase iniciou-se no momento em que a professora devolveu a prova comentada para os estudantes lerem e analisarem os questionamentos e os apontamentos realizados pela professora/pesquisadora, e também resolverem e responderem a novas questões e aos questionamentos da professora/pesquisadora. Após isso, a professora recolheu novamente a prova em fases e firmou (conforme Quadro 9) a nova data para continuarem a resolver os problemas (se julgarem necessário refazer) e responderem aos questionamentos da professora/pesquisadora.

Cada aluno apresentou à professora/pesquisadora uma nova produção escrita, na qual esta analisou e teceu novos questionamentos e comentários e, com isso, encerrou a segunda fase e iniciou a terceira, repetindo-se o processo até a décima fase.

Frente às necessidades, esperou-se que cada estudante buscasse estratégias e procedimentos que poderiam servir para lidar com as questões e com os comentários da professora/pesquisadora. Também foi avisado aos estudantes que era necessário responder aos questionamentos da professora/pesquisadora, uma vez que, além de servirem como *starts* para suas reflexões, esses questionamentos materializaram a comunicação entre a professora e o aluno. Ao julgar oportuno, a professora indicou livros, *sites*, sugeriu atendimentos individuais, monitores, uma vez que se espera que esse instrumento favoreça a aprendizagem e não que seja algo penoso e árduo para o aluno.

As ações que cada aluno realizou a partir das intervenções escritas para regular a sua produção escrita, consequentemente, sua aprendizagem, não foram passíveis de serem registradas, entretanto, na sua produção escrita das diferentes fases, buscaram-se indícios dessas ações (capítulo de análise).

A partir da 6ª fase, os alunos foram convidados a responder a três questionamentos a respeito de suas percepções do uso do instrumento Prova em Fases e de seus reflexos em sua aprendizagem. Suas respostas serão apresentadas e discutidas no capítulo de análise. Os questionamentos estão descritos no Quadro 10.

Quadro 10 – Questionamentos a respeito das percepções dos alunos.

Q1: O que você tem achado de fazer essa prova em várias fases? Q2: O processo de realização desse tipo de prova modificou sua atuação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral? Argumente. Q3: O processo de realização desse tipo de prova modificou sua atuação nas outras disciplinas? Argumente.

Fonte: autora.

Por ser um instrumento utilizado para além do desenvolvimento dos conteúdos, instrumento para Avaliação Parcial 1 (conforme Plano de Ensino – Apêndice A), a nota final dessa prova surgiu a partir do uso de uma escala de classificação[42] para cada questão em que foram consideradas as escolhas das estratégias ao longo da prova, os procedimentos escolhidos para efetivação das estratégias, as respostas dadas aos problemas, assim como aos questionamentos levantados pela professora/pesquisadora.

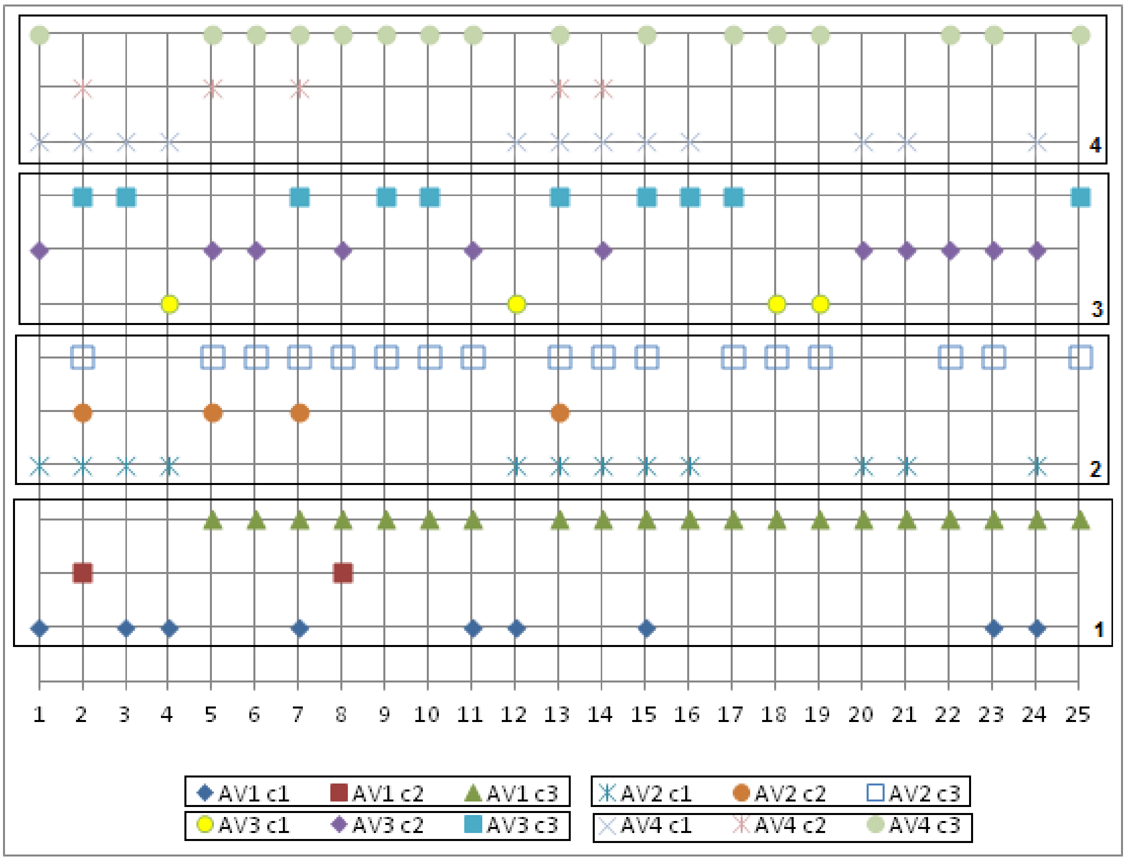
[42] No momento da elaboração da escala de classificação foram considerados os procedimentos de todas as estratégias escolhidas ao longo das fases. Exemplo: escolhe estratégia que não resolve o problema, desenvolve quase que completamente o procedimento que efetiva pelo menos uma estratégia, não responde aos questionamentos levantados pelo professor e apresenta uma resposta consistente.

4.3.4 Características da Prova Elaborada (validação pelos pares)

Como forma de aumentar a credibilidade do potencial da Prova em Fases utilizada e de uma representação no modelo da “Pirâmide de Avaliação de De Lange”, realizou-se a validação das questões por quatro professores de Cálculo Diferencial e Integral I de duas instituições públicas de Ensino Superior de Londrina. Esses professores examinaram as questões, uma a uma, com relação a: pertinência de conteúdo, nível de dificuldade previsto e nível de proficiência previsto. Cada professor recebeu o formulário do Apêndice E, seguido das questões resolvidas.

O Quadro 11 representa as respostas dos professores[43] com relação ao conteúdo das questões:

Quadro 11 – Validação pelos pares com relação ao conteúdo das questões.



Fonte: autora.

[43] A legenda do gráfico representa, por exemplo, AV2 C3 – avaliador 2 classifica que a questão pode ser resolvida com os conteúdos C3 do Quadro 4.

A classificação da professora/pesquisadora partiu da especificação dos conteúdos abordados no curso de Cálculo Diferencial e Integral I apresentados no Apêndice D, seguidos do enquadramento deles por C1 ou C2 ou C3 no quadro de distribuição de conteúdos. Aos validadores solicitou-se apenas a classificação do enquadramento de cada questão por C1 ou C2 ou C3 no quadro de distribuição de conteúdos, conforme Apêndice E.

Para validação desse aspecto, foi realizada a comparação do universo[44] das respostas obtidas pelos validadores com a classificação prévia realizada pela professora/pesquisadora em que cada questão teve uma classificação, e conforme o Quadro 12, obteve-se que a classificação da professora/pesquisadora para cada questão é subconjunto do universo de respostas dos pares, com exceção[45] da Questão 6.

Quadro 12 – Conteúdo: universo de respostas x classificação da professora/pesquisadora.

	UNIVERSO DE RESPOSTAS PELOS PARES	**CLASSIFICAÇÃO DA PROFESSORA/PESQUISADORA**
QUESTÃO 1	**C1, C3**	**C1**
QUESTÃO 2	**C1, C2, C3**	**C1, C2**
QUESTÃO 3	**C1, C3**	**C1, C3**
QUESTÃO 4	**C1**	**C1**
QUESTÃO 5	**C2, C3**	**C2, C3**
QUESTÃO 6	**C2, C3**	**C1, C3**
QUESTÃO 7	**C1, C2, C3**	**C1, C3**
QUESTÃO 8	**C2, C3**	**C3**
QUESTÃO 9	**C3**	**C3**
QUESTÃO 10	**C3**	**C3**
QUESTÃO 11	**C1, C2, C3**	**C1, C2, C3**

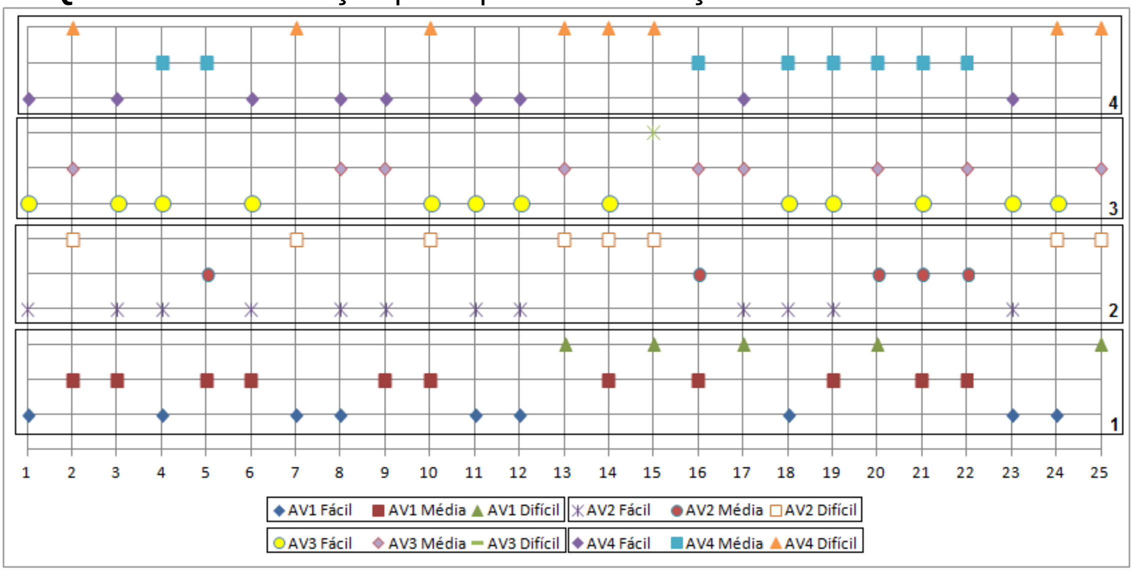
[44]Pois cada questão pode ser classificada por C1 ou C2 ou C3 – respostas inclusivas.
[45]Para a resolução da Questão 6 (Apêndice D), não foi necessário fazer uso de representações no Sistema Cartesiano Ortogonal (C2). Ainda na seção 5.1.6 será visto um exemplo de produção escrita em que a professora e o aluno lidaram com conceitos enquadrados em C1 e C3. Com isso em vista, nesse trabalho, foi considerado C1 e C3 a pertinência de conteúdos na qual o aluno poderia utilizar na Questão 6. Ressalta-se que essa validação não buscou enquadramentos fixos, mas ser mais uma reflexão para a professora/pesquisadora a respeito da representação da Pirâmide de Avaliação elaborada para essa Prova em Fases, Figura 5.

QUESTÃO 12	**C1**	**C1**
QUESTÃO 13	**C1, C2, C3**	**C1, C3**
QUESTÃO 14	**C1, C2, C3**	**C3**
QUESTÃO 15	**C1, C3**	**C1, C3**
QUESTÃO 16	**C1, C3**	**C3**
QUESTÃO 17	**C3**	**C3**
QUESTÃO 18	**C1, C3**	**C3**
QUESTÃO 19	**C1, C3**	**C3**
QUESTÃO 20	**C1, C2, C3**	**C1, C3**
QUESTÃO 21	**C1, C2, C3**	**C3**
QUESTÃO 22	**C2, C3**	**C3**
QUESTÃO 23	**C1, C2, C3**	**C2**
QUESTÃO 24	**C1, C2, C3**	**C1, C3**
QUESTÃO 25	**C3**	**C3**

Fonte: autora.

O segundo aspecto validado foi o nível de dificuldade das questões em relação ao quadro de conteúdo de acordo com a opinião do professor[46] validador, que teve as suas classificações conforme Quadro 13.

Quadro 13 – Validação pelos pares com relação ao nível de dificuldade.



Fonte: autora.

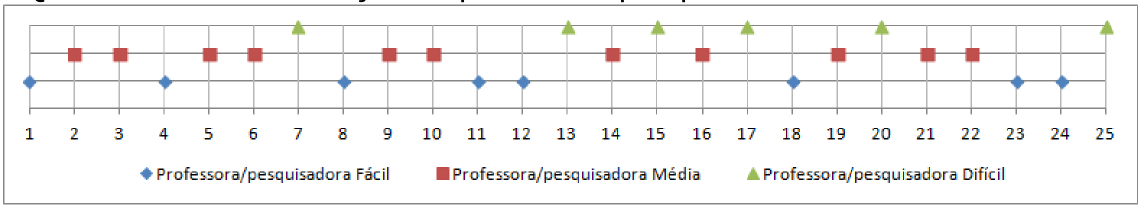
---

46 A legenda do gráfico representa, por exemplo, AV2 Fácil – avaliador 2 classifica a questão com um nível de dificuldade fácil com relação ao conteúdo abordado.

Para esse aspecto, considerou-se pertinente realizar apenas uma comparação direta, sem a intenção de provocar ou não modificações na classificação da professora/pesquisadora, uma vez que a dificuldade de uma questão é essencialmente relativa às pessoas que a resolvem, não se tratando de um aspecto intrínseco à própria questão. Nesse caso, classificar o nível de dificuldade de uma questão foi apenas a opinião do professor.

A professora/pesquisadora classificou as questões segundo esse aspecto, conforme Quadro 14. Nessa comparação direta, é possível ver que a classificação de cada uma das questões é comum ao menos a um dos validadores.

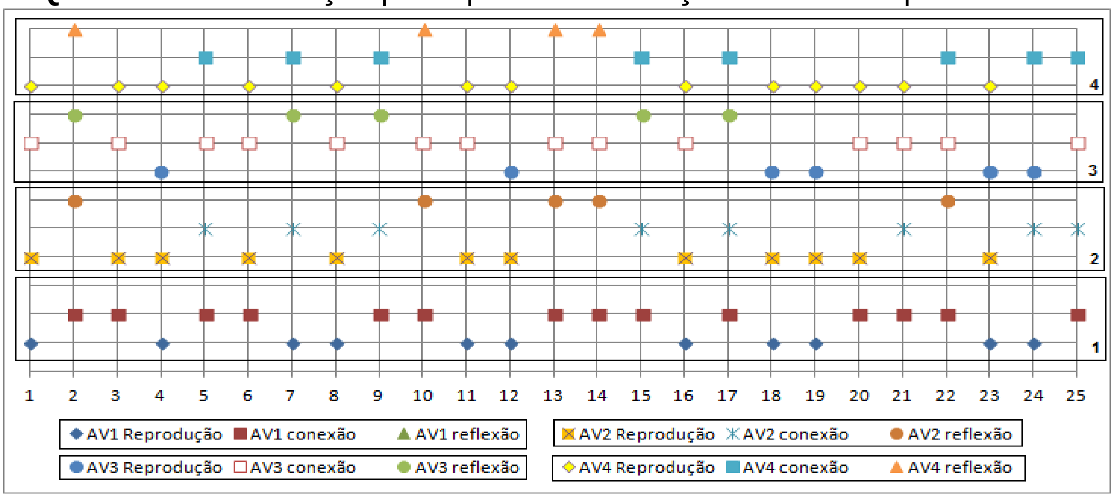
Quadro 14 – Classificação da professora/pesquisadora - Nível de Dificuldade



Fonte: autora.

O último aspecto validado foi o nível de proficiência requerido em cada questão. Segue o Quadro 15, que representa as respostas dos professores[47]:

Quadro 15 – Validação pelos pares com relação ao nível de proficiência.



Fonte: autora.

[47] A legenda do gráfico representa, por exemplo, AV2 conexão – avaliador 2 classifica que a questão contempla até um nível de proficiência de conexão.

Neste caso, cada questão, para cada professor, também teve uma classificação exclusiva – reprodução, conexão, reflexão – considerando-se pertinente comparar a classificação da pesquisadora com a moda no conjunto de respostas dos professores validadores. Segue Quadro 16 que representa a moda obtida pelos pares e a classificação da professora/pesquisadora para cada questão:

Quadro16 – Competências requeridas: a moda das respostas x classificação da professora/pesquisadora.

	MODA OBTIDA PELOS PARES	CLASSIFICAÇÃO DA PROFESSORA/PESQUISADORA
QUESTÃO 1	REPRODUÇÃO	CONEXÃO
QUESTÃO 2	REFLEXÃO	REFLEXÃO
QUESTÃO 3	REPRODUÇÃO, CONEXÃO	CONEXÃO
QUESTÃO 4	REPRODUÇÃO	REPRODUÇÃO
QUESTÃO 5	CONEXÃO	CONEXÃO
QUESTÃO 6	REPRODUÇÃO, CONEXÃO	REFLEXÃO
QUESTÃO 7	CONEXÃO	CONEXÃO
QUESTÃO 8	REPRODUÇÃO	REPRODUÇÃO
QUESTÃO 9	CONEXÃO	REFLEXÃO
QUESTÃO 10	CONEXÃO, REFLEXÃO	CONEXÃO
QUESTÃO 11	REPRODUÇÃO	REPRODUÇÃO
QUESTÃO 12	REPRODUÇÃO	REPRODUÇÃO
QUESTÃO 13	CONEXÃO, REFLEXÃO	REFLEXÃO
QUESTÃO 14	CONEXÃO, REFLEXÃO	CONEXÃO
QUESTÃO 15	CONEXÃO	CONEXÃO
QUESTÃO 16	REPRODUÇÃO	REPRODUÇÃO
QUESTÃO 17	CONEXÃO	CONEXÃO
QUESTÃO 18	REPRODUÇÃO	REPRODUÇÃO
QUESTÃO 19	REPRODUÇÃO	REPRODUÇÃO
QUESTÃO 20	REPRODUÇÃO, CONEXÃO	CONEXÃO
QUESTÃO 21	CONEXÃO	CONEXÃO
QUESTÃO 22	CONEXÃO	CONEXÃO
QUESTÃO 23	REPRODUÇÃO	REPRODUÇÃO

QUESTÃO 24	**REPRODUÇÃO, CONEXÃO**	**CONEXÃO**
QUESTÃO 25	**CONEXÃO**	**CONEXÃO**

Fonte: autora.

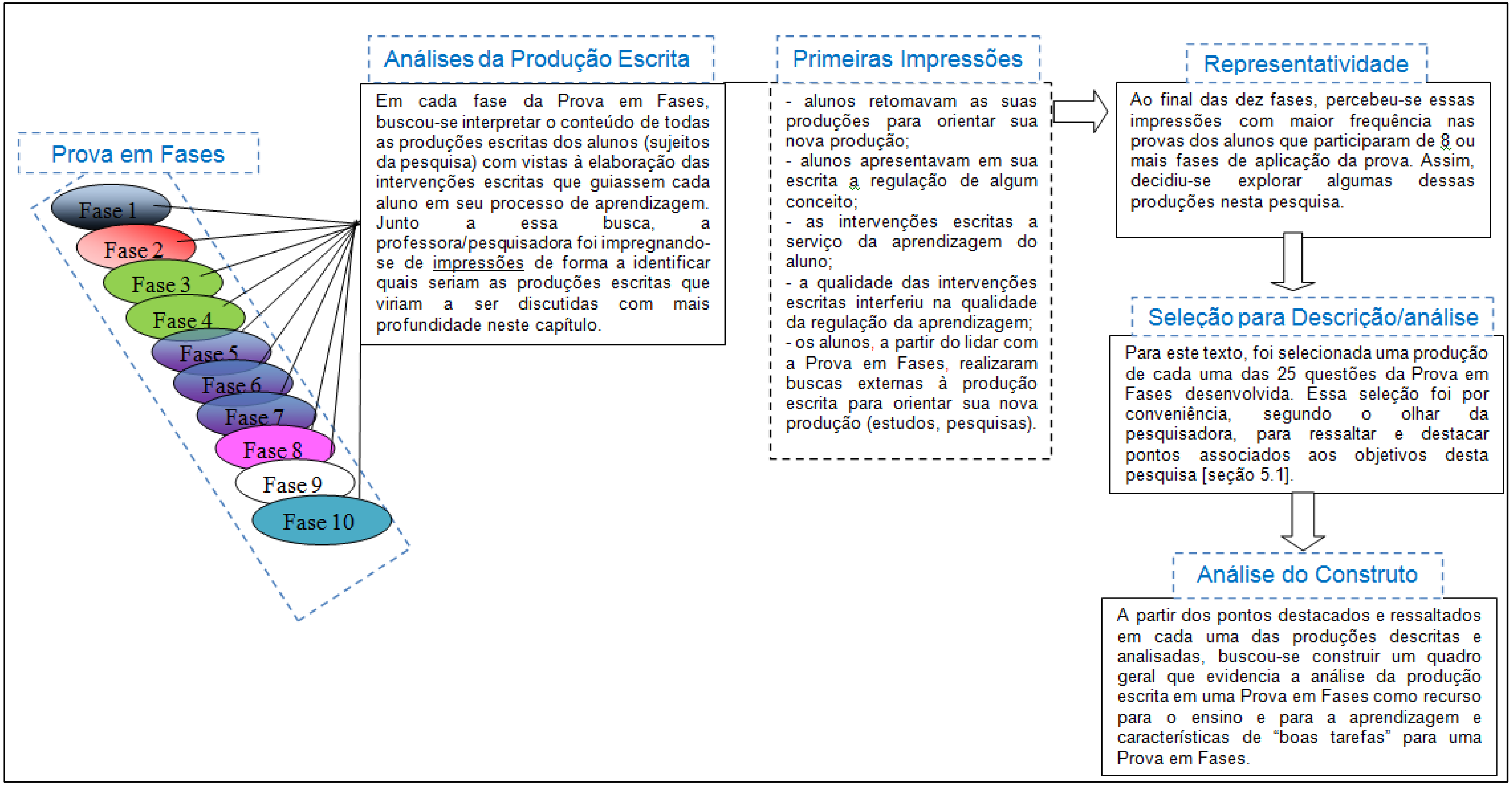
A classificação da professora/pesquisadora não foi validada, com relação à moda das respostas obtidas pelos validadores nas questões 1, 6, 9. De modo especial, essas questões serão discutidas, com relação a esse aspecto, no capítulo 5 e, se considerado pertinente, nova classificação será apresentada.

5 O MEIO DE COMUNICAÇÃO GERADO – A PRODUÇÃO ESCRITA DOS ALUNOS

Apresentam-se, neste capítulo, uma análise e uma discussão da produção escrita de alguns alunos em questões da Prova em Fases (análise específica) desenvolvida com o intuito de caminhar na direção do objetivo desta pesquisa: investigar a utilização da Prova em Fases como recurso para a regulação da aprendizagem e, a partir disso, elaborar um quadro geral que relaciona possíveis potencialidades da Prova em Fases (análise geral).

A Figura 8 é um esquema que resume o modo como foi conduzida essa análise. Além desse esquema, antes de iniciar propriamente as descrições e as análises, são feitas algumas considerações a respeito das escolhas para a elaboração deste capítulo. Os dados para a construção do 5º capítulo são constituídos pelo conjunto das resoluções de cada aluno matriculado na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, no semestre de 2011/02, para cada uma das 25 questões da prova, em todas as dez fases de aplicação, e pelo conjunto das intervenções escritas da professora.

Figura 8 – O caminho das escolhas das produções para a análise.



Fonte: autora.

Durante a coleta de dados, à medida que em cada fase da resolução era lida e relida para a elaboração das intervenções por meio de questionamentos ou comentários, buscou-se interpretar o conteúdo da produção escrita dos alunos – sujeitos da pesquisa – para conhecer aquilo que estava por trás das palavras sobre os quais se debruçou o professora/pesquisadora.

Nessas leituras e releituras em cada fase, o objetivo era impregnar a pesquisadora dos dados coletados de forma a identificar características gerais, formular os objetivos e as hipóteses da análise e escolher as resoluções que seriam discutidas com mais profundidade e utilizadas para fomentar os fenômenos que se pretendem destacar.

A pesquisadora fez um levantamento, ao longo das dez fases de aplicação da prova, de algumas impressões em produções escritas que serviram como elementos para a primeira seleção de dados. Algumas delas são: há alunos que retomavam as suas produções para orientar sua nova produção, outros apresentavam em sua escrita a regulação de algum conceito, e ainda outros que utilizam as intervenções no seu processo de aprendizagem, há alunos que apresentam estudos e pesquisas realizadas para auxiliá-los em sua nova produção.

Essas impressões foram mais frequentes nas provas dos alunos que participaram de 8 ou mais fases de aplicação da prova (18 alunos), razão pela qual decidiu-se explorar essas produções. Entre elas, escolheu-se uma produção de cada uma das questões da prova (selecionou-se aquelas que, aos olhos do pesquisadora, iriam servir para discutir os objetivos desta investigação), que serão apresentadas e discutidas na próxima seção.

Na seção 5.2, os dados selecionados serão interpretados e tecidas algumas conclusões que emergiram a partir deles, referentes aos objetivos da pesquisa - investigar a utilização da prova em fases como recurso para a regulação da aprendizagem.

5.1 A Produção Escrita dos Alunos (descrição)

Para cada uma das produções das 25 questões, a pesquisadora considerou conveniente ressaltar e destacar alguns pontos associados aos objetivos da pesquisa – a produção escrita como recurso de ensino; a análise da produção escrita em uma prova em fases como propulsor da regulação da aprendizagem; um repensar da prática letiva, características de questões para uma prova em fases e a avaliação como oportunidade de aprendizagem.

As subseções que seguem nesta seção apresentam as descrições das questões da Prova em Fases com relação a sua posição na *Pirâmide de Avaliação* de De Lange (1999), isto é, uma descrição das competências requeridas, do conteúdo abordado e do nível de dificuldade em relação ao quadro de conteúdo, seguida de uma descrição de uma interação escrita nesse processo e de alguns pontos destacados e ressaltados.

O Quadro 17 apresenta a demarcação das escolhas das produções. A intenção da pesquisadora foi descrever pelo menos uma produção escrita de cada aluno que participou de oito ou mais fases.

Quadro17 – Produção escrita escolhida para cada questão.

Aluno /questão	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
EM11CDI05																									
EM11CDI06																									
EM11CDI07																									
EM11CDI08																									
EM11CDI12																									
EM11CDI16																									
EM11CDI17																									
EM11CDI20																									
EM11CDI21																									
EM11CDI22																									
EM11CDI26																									
EM11CDI27																									
EM11CDI29																									
EM11CDI30																									
EM11CDI39																									
EM11CDI40																									
EM11CDI41																									
EM11CDI42																									

Fonte: autora.

O Quadro 18 exemplifica a estrutura e a legenda utilizada na descrição de cada questão da prova em fases.

Quadro18 – Estrutura e legenda usadas em cada descrição.

Fase n	Especifica em qual fase o aluno realizou a produção escrita.
R *O aluno ...*	A letra R refere-se à primeira produção escrita do aluno nessa questão. Em itálico, a professora aponta a leitura que fez da produção do aluno.
Fase n	
Na expectativa de fazê-lo ... **Q1** **RQ1** **R1**	*Em itálico a professora aponta razões que a fazem intervir por meio de um questionamento, solicitação ou sugestão.* A letra Q, Em Comic Sans MS, denota a intervenção escrita da professora e o número, sua ordem. As letras RQ denotam uma produção escrita do aluno a partir de uma intervenção escrita da professora, e o número refere-se a qual intervenção se remete. A letra R refere-se a uma produção escrita que não é resposta direta a uma intervenção escrita da professora, e o número refere-se à ordem de resposta desse tipo.

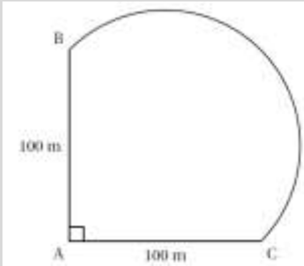
Fonte: autora.

Buscou-se fazer a descrição das produções dos alunos e das intervenções da professora fielmente, sem fazer correções de português ou de escritas matemáticas. Preferiu-se a digitação dessas produções devido à quantidade de idas e de vindas dos alunos em cada questão, os quais podiam escrever em qualquer lugar da folha por usar cores diferentes.

5.1.1 Questão 01 – produção EM11CDI26

O enunciado da Questão 01 e a descrição da resolução[48] de EM11CDI26 são apresentados nos respectivos quadros que seguem:

O Sr. Silva tem um terreno com o seguinte formato:



O lado $\overline{AB}$ do triângulo isósceles ABC mede $100\ m$, e o semicírculo tem um diâmetro $\overline{BC}$.

A) Calcule o valor exato da medida de $\overline{BC}$.

B) Calcule a área do terreno.

A Questão 01 exige, ao resolvê-la, um nível de proficiência de conexão porque requer, além do uso de procedimentos de cálculo de área de figuras planas, utilizar o Teorema de Pitágoras, operar com números irracionais na análise de uma situação.

Apesar da divergência na validação pelos pares, a pesquisadora mantém a sua classificação do nível de proficiência por considerar que lidar com números irracionais, sem fazer uso de aproximações, abrange conhecimentos pouco rotineiros e familiares aos alunos.

Uma questão de nível fácil de dificuldade, em relação ao conteúdo que aborda, contempla conteúdos enquadrados em C1 do Quadro 4 – identificação dos conjuntos numéricos, números reais, definição de relação e função.

[48] No quadro de descrição de cada questão consta menção às fases em que o aluno produziu algo na respectiva questão, independente ou não das intervenções do professor, exemplo: o aluno EM11CDI26 esteve presente em nove fases, mas apenas nas Fases 1, 2, 3, 6, 7, 9 e 10 produziu algo relacionado à Questão 01. Isso se repete nos quadros das descrições realizadas nas subseções de 5.1.

Fase 1
R – a) $a^2 = b^2 + c^2$ $a^2 = 100^2 + 100^2$ $a^2 = 20000$ $a = \sqrt{20000}$ $a \cong 141{,}42$ *O aluno utiliza estratégia correta, entretanto utiliza um valor aproximado para o número irracional* $\sqrt{20000}$ *e não utiliza a notação apresentada no enunciado da questão.* b) $A_{\Delta} = b.h \Rightarrow$ $A_{\Delta} = 100.100 \Rightarrow A_{\Delta} = 10000$ $A_{\ominus} = \frac{\pi r^2}{2} \Rightarrow A_{\ominus} = \frac{3{,}14.(70{,}71)^2}{2} \Rightarrow 7849{,}85$ $A_T = A_{\Delta} + A_{\ominus} \Rightarrow A_T = 17849{,}85$ A_{Δ} = área triângulo $A_{\ominus}$ =área semicírculo *O aluno divide a região em duas, uma triangular e um semicírculo, mas ao fazer uso das relações que fornecem o valor da área triangular, utiliza a relação base vezes altura, o que fornece o dobro da área compreendida. O aluno utiliza o símbolo de condicional em igualdades, não se atentando para a relação de causa-consequência.*
Fase 2
Na expectativa de fazê-lo utilizar a notação do enunciado, seguiu o questionamento: **Q1** – O que é o valor de a? **RQ1 –** a = hipotenusa do triângulo $A\dot{B}C$. **Q2** – Essa relação $[A_{\Delta} = b.h]$ fornece o cálculo da área do triângulo? **RQ2 –** Sim.

Fase 3
Na expectativa de fazê-lo perceber o seu equívoco na relação considerada para o cálculo da área solicitada (estratégia correta, procedimento errado)[49], *segue o seguinte questionamento.* **Q3** – Qual é a relação que determina a área do quadrado de lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$? **RQ3 –** Seria $\lvert\overline{AB}\rvert\,.\lvert\overline{AC}\rvert$. $A_{\Delta} = \dfrac{base.altura}{2}$ Retificando: $A_{\Delta} = \dfrac{b.h}{2} = \dfrac{10000}{2} = 5000$ $A_T = 7849{,}85 + 5000$ $= 12749{,}85.$ **Q4** – Formule sua resposta. **RQ4 –** A área total do terreno do Sr. Silva é de $12849{,}85\ m^2$.
Fase 6
Com os questionamentos, o aluno reconhece o equívoco de seu procedimento, no entanto, apesar de ter desenvolvido corretamente os procedimentos envolvidos na sua retificação, ele não percebe que a questão solicitava que não fossem feitas aproximações, assim questiono: **Q5** – Você considera que fez o que foi solicitado na *alternativa a*? Justifique. **RQ5 –** Sim, mas o valor foi aproximado.

[49] Nos últimos estudos desenvolvidos no GEPEMA, estratégia é a forma como o aluno aborda a questão, e procedimento, o que ele realiza para efetivar a estratégia que escolhe (ALMEIDA, 2009).

Fase 7
Apesar de afirmar que fez o que foi solicitado, vê a necessidade de acrescentar algo a sua afirmação. Na expectativa de saber a razão desse acréscimo, questiono: **Q6** – Mas foi pedido um valor aproximado? **RQ6 –** Não, mas foi preciso por ter realizado cálculo com números irracionais.
Fase 9
Nesse momento, o aluno apresenta algo de sua concepção de número irracional, que o incapacita de realizar cálculos não aproximados. Assim, questiono: **Q7** – Busque uma estratégia que não o faça fazer aproximações, que lhe permita responder exatamente o solicitado. **RQ7 –** Não tinha pensado nisso, mas agora vejo que poderia ter feito o cálculo utilizando $100\sqrt{2}$ e π, sem substituir por valores aproximados, estudei que não é possível de se colocar na forma decimal um número irracional.
Fase 10
O aluno reconhece a impossibilidade de tomar aproximações para os irracionais em seus cálculos e ainda aponta características da natureza dos irracionais. Com vista a explorar sua concepção de números irracionais, o questiono. **Q8** – O que é um número irracional para vc? *O aluno não responde ao questionamento.*

A comunicação gerada entre o aluno EM11CDI26 e a professora, na produção, no desenrolar da Questão 01, proporcionou ao estudante rever a sua produção, corrigir erros e aperfeiçoar seus conceitos matemáticos. Pode-se inferir que o aluno, ao escrever a RQ7, refinou o seu conceito de número irracional e avaliou os seus resultados ao comparar a produção das fases anteriores, sendo, assim, sujeito ativo no seu processo de aprendizagem.

O aluno, ao responder ao Q7, explicitou uma estratégia que fornece uma representação numérica do valor da área atrelado aos usos dos procedimentos utilizados em R e RQ3, entretanto não desenvolveu, deixando o problema sem uma resposta.

Apesar de não ser possível dizer por que razão o aluno não respondeu ao Q8, é preciso ressaltar que um aluno deve lidar com uma questão em fases tanto quanto acredite que venha a ser importante e necessária para a sua aprendizagem e para a resolução do problema. No caso de desistir, precisa refletir sobre os condicionamentos de tal ato.

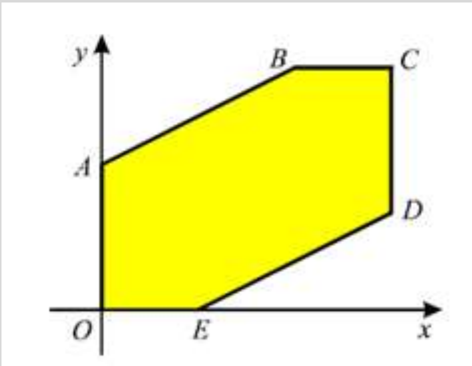
Freudenthal (1991, p. 48) discute o direito que o aluno tem de entender as definições e as suas necessidades por meio de uma reinvenção realizada por ele próprio e ser capaz de comunicá-las aos outros e a si próprio. Essa produção escrita fornece indícios de que a Prova em Fases pode ser um meio de favorecer esses direitos do aluno. Na RQ7, o aluno demonstrou ter revisitado o conceito de número irracional e que foi capaz de comunicar uma síntese do modo como o caracteriza.

5.1.2 Questão 02 – produção EM11CDI06

O enunciado da Questão 02 e a descrição da resolução de EM11CDI06 são apresentados nos quadros que seguem:

O hexágono $OABCDE$ está representado na figura a seguir, em um eixo cartesiano xOy.

Sabe-se que:



- os lados do hexágono são paralelos entre si e iguais dois a dois;
- os pontos A e E pertencem aos eixos coordenados Oy e Ox, respectivamente;
- o ponto B tem coordenadas $(4,5)$;
- o ponto D tem coordenadas $(6,2)$.

A) Determine as coordenadas dos pontos C, E e A.

B) Seja M o ponto simétrico do ponto B em relação ao eixo Oy e seja N o ponto da reta que contém $\overline{OD}$ e que é colinear aos pontos M e A. Determine as coordenadas do ponto N.

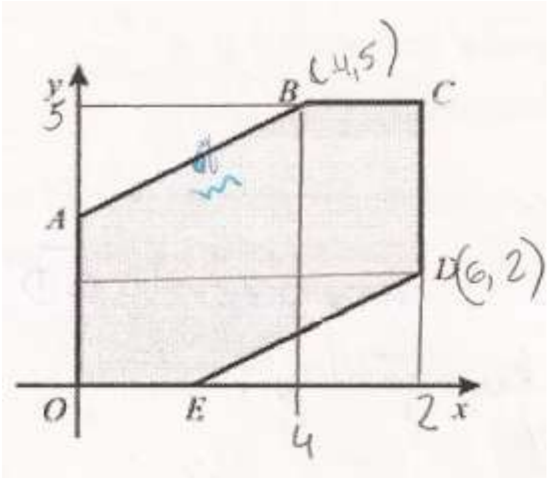
C) Escreva uma condição que define o segmento de reta $\overline{ED}$.

D) Escreva uma condição que define o conjunto dos pontos que constituem a região interior do hexágono.

A Questão 02 exige, ao resolvê-la, um nível de proficiência de reflexão por envolver criação e planejamento de estratégias em sua resolução, por ser necessário perceber as relações em diferentes formas de um dado objeto e elaborar modelos que expressem uma situação pouco familiar. Com relação ao conteúdo abordado, esta questão se enquadra em C1 e C2 do Quadro 4 e seu nível de dificuldade é médio, uma vez que é preciso, em sua resolução, representar coordenadas de um ponto em sistemas de eixos coordenados, calcular a distância entre dois pontos, simetria, equação de reta, intersecção entre retas, sistemas lineares e desigualdades.

Fase 1

R –



a) Ponto $C(6,5)$, Ponto $E(2,0)$
   Ponto $A(0,3)$

O aluno apresenta as coordenadas dos pontos C, E e A, o que permite dizer que reconhece os sistemas de eixos coordenados e lida com propriedades de paralelismo nesse sistema. Por meio dos traços realizados e dos números colocados na figura, pode-se inferir que o aluno reconhece que à medida do segmento $\overline{OE}$ é equivalente a medida do segmento $\overline{BC}$, o que, junto da condição de E pertencer ao eixo-x, permite concluir que $E(2,0)$. O mesmo raciocínio pode ter sido utilizado para obter as coordenadas de A.

b) Para que o segmento $\overline{ED}$ exista, ele precisa passar por dois pontos.

O aluno apresenta uma condição suficiente para garantir a existência do segmento $\overline{ED}$, mas não a explora.

Fase 2

Para favorecer um momento em que o aluno transita entre uma representação algébrica e uma geométrica, sigo com o questionamento.

Q1 – Como as coordenadas desses pontos poderiam ser obtidas algebricamente?

RQ1 –
Encontra pela fórmula $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$= distância de ponto a ponto.

Na expectativa de fazê-lo ir à busca da escrita da condição que define o segmento, questiono:

Q2 – Mas como se encontra cada ponto desse segmento?

Fase 3
Na RQ1, o aluno confirma as inferências da professora ao fazer a leitura de sua resposta inicial à alternativa a, entretanto, não desenvolve algebricamente. Isso não é problema, porque não foi solicitado e não faz falta nas futuras interpretações. O uso da representação geométrica foi suficiente para esse aluno. Já a questão Q2 continua em aberto. **RQ2 –** Pelo ponto $E(2{,}0)$ encontramos a reta $\overline{ED}$ $y-0=\frac{2-0}{0}(x-2)$ $y=x+2$ Essa é a condição que define o segmento $\overline{ED}$. *O aluno descreve o segmento $\overline{ED}$ como uma reta e determina uma lei de formação. Não se atenta para a escolha dos pontos, nem para o seu domínio de existência.*
Fase 4
Para corrigir o equívoco com as escolhas dos pontos para obtenção do coeficiente angular, questiono: **Q3** – Quais pontos foram utilizados para se obter o valor do coeficiente angular da equação do segmento $\overline{ED}$? **RQ3 –** Os pontos $E(2{,}0)$ e $D(6{,}2)$. equação da reta $y-y_0=m(x-x_0)\quad E(2{,}0)\quad D(6{,}2)$ $y-0=\frac{2-0}{6-2}(x-2)$ $y=\frac{1}{2}(x-2)$ $y=\frac{1}{2}x-1$ Equação que define o segmento $\overline{ED}$. *Apesar de retificar sua produção escrita, ainda não se atentou para a natureza da condição do que foi solicitado – ser um segmento de reta, ou seja, possui um domínio restrito a um intervalo de reta fechado.*

Fase 8
De forma a fazê-lo se atentar na condição de existência do segmento $\overline{ED}$, sigo com o questionamento direto: **Q4:** Qual é o domínio da função y? **RQ4:** O domínio é $[1{,}6]$. *Apesar de reconhecer que o domínio de y corresponde a um intervalo, esse intervalo apresenta um erro em seu extremo inferior.*
Fase 9
Na expectativa de o aluno, ao lidar com o item d, reconhecer seu equívoco na construção do domínio do segmento $\overline{ED}$, sugiro: **Q5** – Tente seguir o mesmo caminho na alternativa c. *O aluno não segue a sugestão e retoma a alternativa a, dando um tratamento algébrico na determinação do ponto A.* **R1 –** $\overline{ED} = \overline{AB}\ \ D(6{,}2)\ \ E(2{,}0)\ A(0, y_a)\ \ B(4{,}5)$ $\sqrt{(x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ $16 + 4 = 16 + 25 - 10y_a + {y_a}^2$ $20 - 16 - 25 = -10y_a + {y_a}^2$ ${y_a}^2 - 10y_a + 21 = 0$ $\Delta = 10 - 4.1.21$ $\Delta = 16$ $x = \frac{10 \pm 4}{2}$ $x' = 7$ não convém $x'' = 3$ convém $y_a = 3$ *Com essa resolução, verifica-se que o aluno explicita e confirma a estratégia utilizada em sua primeira versão de resposta da alternativa a.Vê-se também que utiliza fórmula de resolução da equação do 2º grau para encontrar valores de x, apesar de, ao final, validar a solução para y_a.*

Fase 10

Na expectativa de averiguar se o erro em RQ4 foi apenas uma troca de valores ou se está relacionada ao conceito de domínio, questiono:

Q6 – O que representam o número 1 e o número 6 na representação do segmento?

RQ6 –
O número 0 e 6 representam respectivamente o mínimo e o máximo que o x que é o domínio pode assumir. Refazendo que o domínio de y é $[0,6]$.

Em vista da última fase e na expectativa do aluno lidar com o item d, sugiro:

Q7 – Tente seguir o mesmo caminho na *alternativa c.* Encontre as fronteiras do hexágono e depois escreva as relações que apontam o seu interior.

RQ7 –
c) Para achar a região interior do hexágono

i. Achar a reta de cima

Ponto A e $B \rightarrow A(0,3)\ e\ B(4,5)$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 3 = \frac{5-3}{4}(x - 0)$$
$$y - 3 = \frac{1}{2}x$$
$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

Pontos de $\overline{BC}$

$B(4,5)\ \ C(6,5)$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 5 = 0(x - 4)$$
$$y = 5$$

Retas de cima $\frac{1}{2}x + 3 + 5 = y = \frac{1}{2}x + 8$

ii. Para achar as retas de baixo

Ponto $O(0,0)$ e $E(2,0)$

$$y - 0 = 0(x - 0)$$
$$y = 0$$

Ponto E e D

$E(2,0)\ \ D(6,2)$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 2)$$
$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

R: a condição que define o conjunto de pontos que constituem a região interior do hexágono é:

$$\frac{1}{2}x + 8 > conjunto > \frac{1}{2}x - 1$$

O aluno reproduziu o caminho seguido na resolução c, entretanto não escolheu a estratégia adequada para lidar com as relações encontradas e para interligá-las para apresentar uma condição que define o conjunto dos pontos interiores do hexágono.

Apesar de a Questão 02 ter sido considerada, *a priori*, pela pesquisadora como uma questão que exige, para resolvê-la, um nível de proficiência de reflexão, essa produção escrita revelou indícios de um nível de proficiência de conexão.

A partir do questionamento Q5, há um deslocamento das competências necessárias ao aluno para resolver o problema, de reflexão para conexão, uma vez que o professora propõe a repetição da estratégia já utilizada na *alternativa c* e deixa a cargo do aluno integrar os novos resultados, mas não o planejamento das estratégias necessárias para resolver o problema.

A produção escrita R, na Fase 9, não é resposta a uma intervenção escrita da professora, é um repensar do aluno, uma retomada de sua produção, na qual apresenta algebricamente seu raciocínio. Essa ação reflete possivelmente um automonitoramento e um comprometimento do aluno com sua aprendizagem dentro desse processo.

Os questionamentos Q4 e Q5 são intervenções oportunas em uma Prova em Fases que busca ser um recurso para o aluno regular a sua aprendizagem a partir do uso de sua própria produção. São questionamentos que dão pistas para o olhar do estudante, não apontam acertos ou erros e favorecem ao aluno mostrar à professora mais do que sabem. Em RQ4 e RQ6, o aluno demonstrou reconhecer que a função que descreve o segmento tem como domínio um intervalo fechado e seus extremos, para além do que pode ser evidenciado em RQ3.

5.1.3 Questão 03 – produção EM11CDI20

O enunciado da Questão 03 e a descrição da resolução de EM11CDI20 são apresentados nos quadros que seguem:

Para esta questão considera-se que a unidade de:

- comprimento é o centímetro;
- volume é o centímetro cúbico.

Ao colocar no fundo do cilindro (Figura 1) uma esfera de raio 6, constata-se que o cilindro fica totalmente cheio (Figura 2).

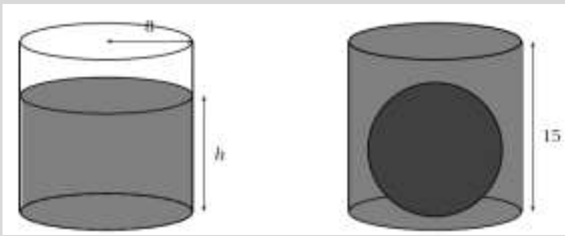


Figura 1 Figura 2

Deduza o valor do comprimento da altura *h* (Figura 1) do cilindro antes de a esfera ser colocada.

A Questão 03 é considerada uma questão que requer um nível de proficiência de conexão, pois, para resolvê-la, é necessário mais que reconhecer as relações que fornecem os volumes dos sólidos esfera e cilindro, é preciso relacioná-los. A questão aborda conteúdos C1 e C2 do Quadro 4 – números reais, relação e função – e é considerada uma questão de nível médio de dificuldade em relação ao conteúdo.

Fase 4[50]
R – Figura 1: $Vol = \pi(8)^2.h$ $\quad = 64\pi h$ Figura 2: $Vol_{cilindro} = \pi(8)^2.15$ $Vol_{cilindro} = \pi.64.15$ $Vol_{cilindro} = 960\pi$ Figura 2: esfera $Vol_{esfera} = \frac{4}{3}\pi(r)^2$ $Vol_{esfera} = \frac{4}{3}.\pi.36$ $Vol_{esfera} = \frac{144}{3}\pi = 48\pi\ cm^3$ Figura 1: $V_{cilindro} = Vol_{cilindro} - Vol_{esfera}$ *[figura 1] [figura 2]* $64\pi h = 912\pi$ $h = 14{,}25\ cm$ *A produção escrita revela que o aluno interpretou e identificou dados relevantes da situação, assim como os expressou com clareza por meio da linguagem matemática. Entretanto, o procedimento para o cálculo do volume não foi adequado.*

[50] Observa-se que o aluno apresenta alguma produção escrita para essa questão somente a partir da Fase 4, apesar de ter estado presente em fases anteriores. Nesta Prova em Fases não havia indicação de quais nem de quantas questões deviam ser resolvidas em cada fase, os alunos tinham a liberdade de lidar com as questões que quisessem, e sabiam que, ao final do processo das aplicações, haveria uma nota como resultado da avaliação de suas produções em todas as questões e intervenções escritas do professor.

Fase 9
Na expectativa de fazê-lo corrigir o equívoco solicito: **Q1** – Busque, em livros sobre o assunto, a fórmula do volume da esfera e veja se é diferente da que você apresentou. **RQ1 –** $Vol_{esf} = \frac{4}{3}\pi r^3$ $Vol_{esf} = \frac{4}{3}\pi 6^3$ $Vol_{esf} = \frac{4}{3}\pi 216$ $Vol_{esf} = \frac{864}{3}\pi$ $Vol_{esf} = 288\pi\ cm^3$ $V_{cilindro} = Vol_{cilindro} - Vol_{esfera}$ *[figura 1] [figura 2]* $64\pi h = 960\pi - 288\pi$ $64\pi h = 672$ $h = 10{,}5\ cm$ A altura (h) do cilindro (figura 1) antes da esfera ser colocada é de $10{,}5\ cm$. *O aluno corrige a relação que fornece o volume da esfera, adapta a estratégia escolhida aos novos valores e apresenta uma nova resposta à questão.*

Em sua primeira produção, o aluno revelou a capacidade de integrar os procedimentos necessários e de desenvolver uma estratégia que resolve o problema – competências do nível de conexão, equivocando-se essencialmente na utilização de um procedimento de rotina – calcular área de uma esfera.

A intervenção Q1 orienta o aluno a promover uma busca e uma validação do seu trabalho. Pode ser que o aluno apenas tenha verificado a existência de um erro na relação que fornece o volume da esfera, ou, idealmente, realizado um estudo baseado na construção da relação e dos conceitos envolvidos. Nessa produção não é possível afirmar qual caminho foi tomado, mas evidencia o aluno em um ambiente em que é responsável e controlador de sua própria aprendizagem.

5.1.4 Questão 04 – produção EM11CDI07

O enunciado da Questão 04 e a descrição da resolução de EM11CDI07 são apresentados nos respectivos quadros que seguem:

Mostre que $B = C = D$ efetuando, detalhadamente, os cálculos.
$B = \dfrac{2-\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$; $\quad C = -\dfrac{4\times 10^{-3}\times(-5)\times 10^{9}}{3\times 10^{6}}$; $\quad D = \dfrac{(3+\sqrt{11})^2 - 6\sqrt{11}}{3}$

A Questão 04 é uma questão que requer um nível de proficiência de reprodução ao resolvê-la – utilização de procedimentos de rotina –, envolve conhecimento de propriedades algébricas dos números reais, conteúdos enquadrados em C1 do Quadro 4 e considerada de nível fácil em relação ao quadro de conteúdo.

Fase 1
R – B) $\dfrac{2-\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{3}\times 4 = \frac{20}{3} \cong 6{,}66$ C) $-\dfrac{4\times10^{-3}\times(-5)\times10^{9}}{3\times10^{6}} = -\dfrac{4.10^{-3}\times(-5000000000)}{3000000} = \dfrac{20000000}{3000000} = \dfrac{20}{3} \cong 6{,}66$ D) $\dfrac{(3+\sqrt{11})^2-6\sqrt{11}}{3} = \dfrac{39{,}89-19{,}89}{3} = \dfrac{20}{3} \cong 6{,}666$ *Em sua produção vê-se um uso adequado dos procedimentos ao lidar com números representados na forma fracionária. Já com relação a lidar com potências, o aluno desenvolveu as potências com expoentes maiores e, conjuntamente, fez uso de propriedades. No último item, o aluno não desenvolveu os quadrados e usou aproximações, provavelmente por meio de uma calculadora.*

Fase 2
Buscando orientar e oportunizar ao aluno uma revisão das propriedades de potência, solicito: **Q1** – Refaça (item C) utilizando propriedades de potência. **RQ1 –** C) $\frac{4\times10^{-3}\times(-5)\times10^{9}}{3\times10^{6}}=\frac{4.10^{-3}\times-5.10^{9}}{3.10^{6}}=\frac{410^{-3}\times-5.10^{3}}{3}=\frac{4.5}{3}=\frac{20}{3}\cong 6{,}666$ *Para fazê-lo desenvolver o quadrado perfeito, trabalhar com números irracionais, solicito:* **Q2** – Apresente detalhadamente os cálculos (idem D). Não utilize calculadora. **RQ2 –** D) $\frac{(3+\sqrt{11})^{2}-6\sqrt{11}}{3}=\frac{9+6\sqrt{11}+\sqrt{11}^{2}-6\sqrt{11}}{3}=\frac{9}{11}=\frac{20}{3}\cong 6{,}666$

A evolução do aluno depende da sua capacidade de ajustar sua aprendizagem em função das intervenções externas e da compreensão da sua progressão na aprendizagem (SADLER, 1998). Nesta pesquisa, a intervenção primeira foi o questionar, o sugerir do professor a partir da produção escrita do aluno, por isso buscou-se carregá-la de intenção e de qualidade e fazê-la com muita reflexão e estudo. Entretanto, isso nem sempre foi suficiente para promover uma oportunidade de regulação da aprendizagem.

As intervenções realizadas no desenrolar desta questão ficaram restritas à ação de refazer a aplicação de procedimentos, exigiram apenas competências de reprodução, o que pode não ter favorecido ao aluno uma evolução, um tornar-se responsável por resolver uma situação ou um conhecimento.

Essas competências, entretanto, poderiam ter ultrapassado o caráter de utilização de procedimentos rotineiros, para a generalização e para a abstração de propriedades de números reais. Conforme Ferreira (2013, p.111), “uma tarefa por si só “não tem vida própria””, ela depende, entre outras coisas, do tratamento e da situação em que a professora trabalha com ela. Seguem alguns questionamentos que poderiam ter sido realizados:

Q1 – A potência de um número irracional pode ser um número racional? Justifique.

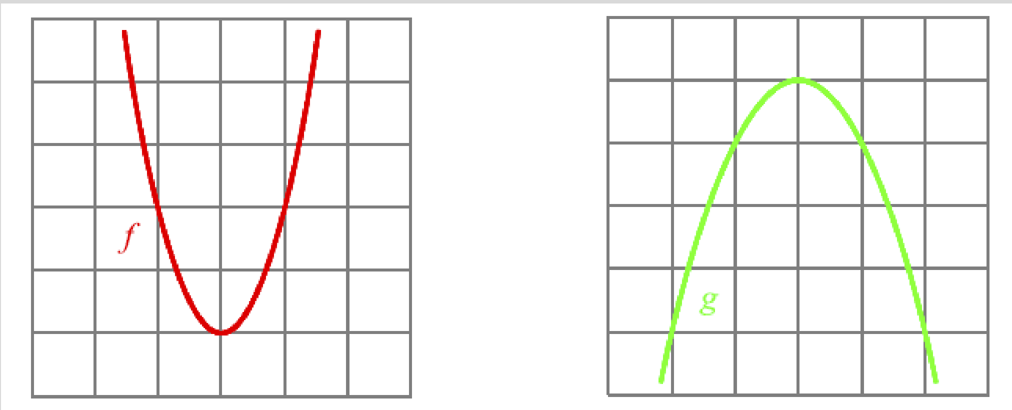
Q2 – Há inconsistências em escrever $6\sqrt{11} = 19{,}89$. Investigue e argumente.

Q3 – Explique cada uma das simplificações e utilização de propriedades que você fez em C para obter o valor de $\frac{20}{3}$.

5.1.5 Questão 05 – produção EM11CDI29

O enunciado da Questão 05 e a descrição da resolução de EM11CDI29 são apresentados nos quadros que seguem:

Na figura abaixo estão representações gráficas de duas funções quadráticas, f e g, em referenciais ortogonais, cujos eixos coordenados se ocultaram. A unidade, em qualquer dos referenciais, é o lado da quadrícula.



A) Desenhe os eixos do referencial de f, sabendo que a reta de equação $x = 2$ é eixo de simetria da parábola e que o contradomínio[51] da função é $[-1, +\infty[$.

B) Desenhe os eixos do referencial em g, sabendo que: $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0,4]$.

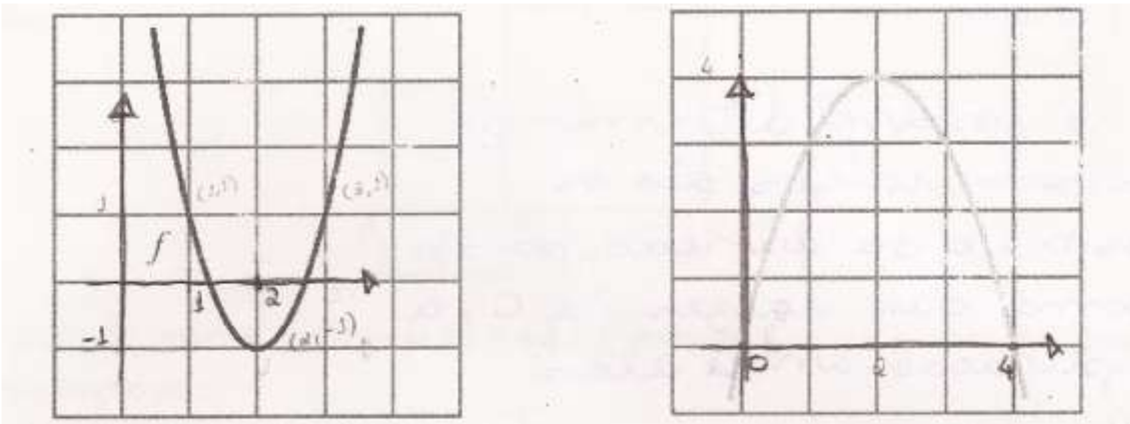
C) Defina analiticamente as funções f e g, considerando os referenciais que desenhou.

[51] Nessa disciplina, as funções foram consideradas sobrejetoras, ou seja, fez-se equivalência no uso dos termos contradomínio e imagem da função.

A Questão 05 é considerada uma questão que requer um nível de proficiência de conexão ao resolvê-la, uma vez que, para se buscar uma solução, é preciso decodificar e interpretar a linguagem simbólica e formal, entendendo suas relações com os conceitos envolvidos, e ainda explorar diferentes representações de um mesmo objeto matemático. Por pressupor o caminho[52] inverso ao frequentemente solicitado aos alunos, é considerada de nível médio de dificuldade – é preciso reconhecer a lei de formação de funções quadráticas a partir de suas representações gráficas e de alguns de seus elementos. O conteúdo abordado se enquadra em C2 e C3 do Quadro 4.

Fase 1

R –



O aluno identifica corretamente os eixos coordenados, o que mostra um saber reconhecer características de uma parábola como eixo de simetria, um lidar com domínios e conjuntos imagens de uma função e com notações para intervalos da reta real. Sua produção não deixa indícios das razões de não ter lidado com o item c.

[52] Em muitos casos, o caminho seguido por alunos é resolver tarefas rotineiras de construção de gráficos de parábolas por meio de procedimentos que envolvam habilidades de reprodução – essa afirmação baseia-se apenas em pesquisa em materiais didáticos de matemática para o Ensino Médio.

Fase 3
Apesar da falta de inícios na produção escrita do aluno, acredito que o não lidar com o item c está ligado a não entender o que significa definir analiticamente. Na expectativa de fazê-lo compreender o que é solicitado, circulo a palavra analiticamente e escrevo embaixo: **Q1** – Isto é, quais são as relações que definem f e g? **RQ1 –** c) $f(x) = ax^2 + bx + x$ $f(1) = a(1)^2 + b.1 + c \ \rightarrow a + b + c = 1$ $f(3) = a(3)^2 + b.3 + c \ \rightarrow 9a + 3b + c = 1$ $f(2) = a(2)^2 + b.1 + c \ \rightarrow 4a + 2b + c = -1$ $a + b + c = 1$ $4a + 2b + c = -1$ $9a + 3b + c = 1$ $a + b + c = 1 \ (-4)(-9)$ $-2b - 3c = -5$ $-6b - 8c = -8$ $-2b - 3c = -5 \ (-3)$ $c = 7$ $-2b - 3c = -5$ $-2b - 3.7 = -5$ $-2b = 16$ $b = -8$ $a - 8 + 7 = 1$ $a = 2$ $$f(x) = 2x^2 - 8x + 7$$ $f(x) = ax^2 + bx + x$ $f(0) = a(0)^2 + b.0 + c \ \rightarrow c = 1$ $f(4) = a(4)^2 + b.4 + c \ \rightarrow 16a + 4b = 0$ $f(2) = a(2)^2 + b.2 + c \ \rightarrow 4a + 2b = 4$ $4a + 2b = 4(-4)$ $16a + 4b = 0$ $-4b = 16$ $b = 4$ $4a + 2.4 = 4$ $4a + 8 = 4$ $4a = -4$ $a = -1$ $$g(x) = -x^2 + 4x$$ *O aluno reconhece a lei de formação de uma função quadrática e também que, para determinar seus coeficientes, é suficiente conhecer três pontos dela e resolver um sistema linear de três variáveis.*

Fase 5
Com intenção de iniciar um diálogo para orientá-lo na busca por obter a forma analítica das funções sem realizar os procedimentos já apresentados, mas a partir das transformações de $y = x^2$, questiono: **Q2** – Qual foi o deslocamento horizontal e vertical que f sofreu em relação à função $y = x^2$? Ela teve alguma outra transformação? **RQ2 –** O deslocamento horizontal foi de duas unidades para direita e o deslocamento vertical foi de uma unidade para baixo. *Na expectativa de fazê-lo utilizar/desenvolver, questiono-o sobre o fato de toda função quadrática com duas raízes reais poder ser escrita como o produto de dois fatores lineares.* **Q3** – Quais são as raízes da função g? É possível provar que $g(x) = -x^2 + 4x$ por meio delas? **RQ3 –** As raízes da função g são 0 e 4. O que é possível determinar com essas raízes são os termos b e c da função, pois b é a soma das raízes, e c, multiplicação entre elas. *Em RQ2, o aluno reconhece os deslocamentos horizontais e verticais e não menciona o alongamento que a função sofre.* *Em RQ3, apesar de não ir em direção ao que eu esperava, o aluno apresenta outro modo de encontrar as funções analíticas, a partir da soma e produto das raízes e suas relações com os coeficientes da lei de formação geral de uma função quadrática.*

Fase 7

Dando continuidade na busca de fazê-lo reconhecer que a partir das transformações sofridas com relação a $y = x^2$ é possível obter a lei de formação de uma função, sugiro:

Q4 - Investigue a afirmação: Toda função quadrática pode ser representada algebricamente por $y = a(bx + c)^2 + c$.
Sendo verdadeiro ou falso, justifique a partir das informações do gráfico da função f.

RQ4 –
Acho que a afirmação é verdadeira. Nos estudos que fiz vi usar o que chamam de completar quadrado para obter $y = a(x + b)^2 + c$, posso considerar $b = 0$. Nessa fórmula, o valor dentro do parêntese é do deslocamento horizontal. Já o valor de c é o valor do deslocamento vertical.

$$f(x) = (x + 2)^2 - 1$$

O aluno apresenta um argumento para confirmar sua escolha na afirmação apresentada, entretanto não faz relação com a lei de formação apresentada em RQ1 e comete um erro ao lidar com b a partir do deslocamento horizontal – sempre com sinal oposto ao deslocamento.

A estratégia apresentada pelo aluno em RQ3 precisa ser refinada e corrigida quanto a não mencionar como obter o coeficiente a e também fazer parecer que a soma das raízes e o produto das raízes dependem exclusivamente de, respectivamente, b e c. Nessa direção solicito:

Q5 – Verifique nos livros a afirmação "b é soma das raízes" e "c é a multiplicação entre elas" e use o que concluir para obter $g(x)$.

RQ5 –
O correto é que $-\frac{b}{a}$ é a soma das raízes e a multiplicação $\frac{c}{a}$.

$$\begin{cases} 0 + 4 = -\frac{b}{a} \\ 0.4 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$c = 0$
O valor de b não tem como encontrar.

O aluno corrige os procedimentos para a estratégia, porém não a refina.

Fase 9
Para fazê-lo refletir acerca da resposta em RQ5 e também que as leis de formações em RQ1 e RQ5 precisam ser equivalentes, questiono: **Q6** – É verdade que $f(x) = (x+2)^2 - 1 = 2x^2 - 8x + 7$? Justifique. **RQ6 –** $f(x) = (x+2)^2 - 1 = x^2 + 4x + 4 + 1 = x^2 + 4x + 5.$ Na verdade tá errado, tem que ser $f(x) = 2(x-2)^2 - 1$. $f(x) = 2(x-2)^2 - 1 = 2(x^2 + 4x + 4) - 1 = 2x^2 + 8x + 8 - 1 = 2x^2 - 8x + 7$ *O aluno parece reconhecer a necessidade das respostas RQ1 e RQ5 serem equivalentes e faz uso correto da representação de $f(x) = a(x-b)^2 + c$, mas não justifica esse uso.* *Na expectativa de fazê-lo completar a estratégia para obter a lei de formação de uma função quadrática conhecendo a soma e produto das raízes, o questiono:* **Q7** – É verdade que toda função quadrática possui um ponto de máximo ou de mínimo. Busque uma relação desse ponto com os coeficientes a, b e c de $f(x) = ax^2 + bx + c$. Use-a para determinar o valor de b que você não conseguiu encontrar. *O aluno não responde ao questionamento.*

Nessa interação escrita é possível identificar características de um nível de proficiência de um nível de reflexão, de conexão e de reprodução. Conforme De Lange (1999), um item pode incorporar competências associadas a mais de um nível de proficiência.

Na produção escrita R, o aluno revelou ser capaz de integrar conceitos de funções a partir da leitura de conjuntos numéricos expressos na linguagem numérica – nível de conexão.

Apressada e prematuramente, a professora conclui que o aluno não entendeu o que é definir analiticamente uma função e não permitiu ao aluno expressar o que compreendeu do que foi solicitado. Talvez o aluno não tenha realizado a *alternativa c* simplesmente por não haver tempo, mas isso já não é mais possível saber. Em vez de concluir as razões pelas as quais o aluno não resolveu a alternativa, o desejável teria sido a professora perguntar: "por que você não fez a *alternativa c*?" ou, esperar as próximas fases.

Uma vez resolvidas as *alternativas a* e *b*, a *alternativa c* transformou-se em um exercício de aplicação de procedimento de rotina, competências do nível de reprodução, conforme visto em RQ1.

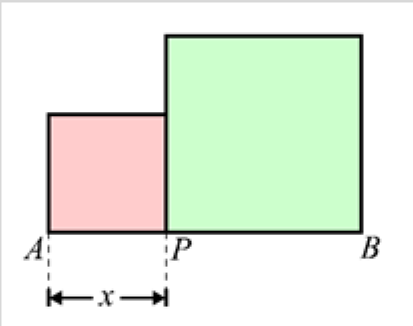
Ao fazer o questionamento Q3, a professora tem a intenção de guiar o aluno para uma discussão acerca da fatoração de uma função quadrática a partir de suas raízes. Entretanto, em RQ3, o aluno levou esse caminhar para outra direção, trabalhou com as relações entre as raízes e os coeficientes da função. Ressalte-se aqui a importância de a professora aproveitar todas as situações emergentes para oportunizar a aprendizagem do estudante. A professora, ao seguir na direção dada pelo aluno, evidenciada em Q5 e Q7, favoreceu ao aluno a oportunidade de regular os seus conceitos apresentados e de desenvolver um meio de obter a lei de formação de uma função quadrática a partir das raízes e do extremo da função.

Em Q4 houve um deslocamento do nível de proficiência exigido do aluno *a priori.* Por meio dessa intervenção, o aluno foi direcionado para a posição de investigador, na qual precisaria refletir e planejar estratégias para apresentar uma solução – competências do nível de reflexão. Entretanto, a estratégia escolhida pelo aluno para resolver esse questionamento no espaço de tempo entre uma fase e outra foi a de buscar como os outros fazem isso. Com isso ele deixou de se sentir construtor de um conhecimento e de alcançar uma abstração e generalização, mas revelou como o processo de realizar a Prova em Fases pode favorecer uma autonomia do aluno com relação ao modo de regular a sua aprendizagem.

5.1.6 Questão 06 – produção EM11CDI17

O enunciado da Questão 06 e a descrição da resolução de EM11CDI17 são apresentados nos quadros que seguem:

Considere que um ponto P se desloca num segmento de reta $\overline{AB}$, de comprimento 10 unidades, nunca coincidindo com o ponto A nem com o ponto B. Cada posição do ponto P determina em $\overline{AB}$ dois segmentos de reta, $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$, sendo cada um deles o lado de um quadrado, conforme exemplo apresentado na figura a seguir.



Em cada posição do ponto P, a distância de P a A é x unidades, e $a(x)$ é a soma das áreas dos dois quadrados, em função de x.

A) Calcule $a(2)$.

B) Indique o domínio da função a.

C) Mostre que $a(x) = 2x^2 - 20x + 100$.

D) Resolva a equação $a(x) = a(2)$ e interprete as soluções no contexto do problema.

A Questão 06 foi *a priori* considerada pela professora/pesquisadora como uma questão que requer um nível de proficiência de reflexão por considerar que, além de conectar os conceitos de cálculo de área e de função em problemas pouco familiares, considerou ser preciso abstrair e interpretar as soluções de um modelo desenvolvido pelo aluno ao resolvê-la.

A validação pelos pares, porém, apontou para uma classificação como uma questão de nível de reprodução ou como uma questão de conexão. Após refletir a respeito dessa divergência, considera-se pertinente alterar a classificação da professora/pesquisadora por estar explícita no enunciado da questão a relação da soma das áreas como uma função do comprimento x, não sendo necessário desenvolver modelos, mas fazer relações da linguagem simbólica com outra representação de um mesmo problema, reduzindo a necessidade para um problema de conexão.

Nessa questão podem ser abordados conteúdos em C1 e C3 do Quadro 4 – conjuntos numéricos, conceito de relação e de função, juntamente com suas representações gráficas, e é considerada com um nível médio de dificuldade em relação ao conteúdo abordado.

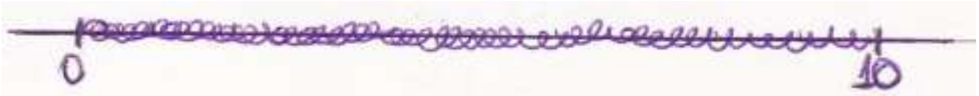
Fase 3
R – a) $x^2 + (10 - x)^2 = A$ $2^2 + (10 - 2)^2 = A$ $4 + (8)^2 = A$ $A = 4 + 64 = 68$ b) $Dom\ \{x \in \mathbb{R}/\ 0 > x > 10\}$ c) $x^2 + (10 - x)^2 = A$ $x^2 + 10^2 - 2.10x + x^2 = A$ $2x^2 - 20x + 100 = A$ d) $2x^2 - 20x + 100 = 68$ $2x^2 - 20x + 100 = 68$ $x^2 - 10x + 16 = 0$ $\left.\begin{matrix} S = 10 \\ P = 16 \end{matrix}\right\}\ x' = 2$ e $x'' = 8$ *O aluno traduz a situação por meio de uma lei de formação que responde ao problema, apresenta o domínio da função com problemas na linguagem matemática e no item d, determina o conjunto-solução da equação solicitada, mas não o interpreta no contexto do problema.*

Fase 5

Na expectativa de fazê-lo reconhecer o equívoco de notação no domínio apresentado no item b, solicito:

Q1 – Represente na reta o intervalo $Dom\,\{x \in \mathbb{R}/\ 0 > x > 10\}$. Use notação de colchetes também.

RQ1 –



$Dom\ ]0{,}10[$

Nas representações na reta real e por colchetes, o aluno respeita a relação de ordem dos números reais.

Com o interesse de fazê-lo interpretar os dados no item d, solicito:

Q2 – Interprete as raízes encontradas no contexto do problema.

O aluno não responde.

Fase 7

Apesar de reconhecer a relação de ordem nas outras notações apresentadas para o domínio da função, o aluno não retifica a sua resposta. Na expectativa de fazê-lo atentar na sua escrita, questiono:

Q3 – Você mantém a escrita do conjunto $\{x \in \mathbb{R}/\ 0 > x > 10\}$?

RQ3 –

$Dom\,\{x \in \mathbb{R}/\ 0 < x < 10\}$

A produção escrita do aluno EM11CDI17, todavia, não evidenciou competências de conexão, restringiu-se a competências de reprodução. O aluno não interpretou as suas respostas no contexto do problema apesar de a professora alertá-lo para essa necessidade.

Apesar do nível de competência apresentado ter sido de um nível abaixo do esperado, vê-se que a possibilidade de realizar a sua produção escrita em fases favoreceu ao aluno apreciar e aperfeiçoar sua primeira versão de resposta, o que foi evidenciado ao comparar R e RQ3.

A Prova em Fases permitiu à professora olhar para esse aluno individualmente e elaborar intervenções específicas para guiá-lo por um caminho que o conduzisse a algum aprendizado, em especial, para regulação de algum aprendizado. O conjunto apresentado como domínio da função em R possui problemas de ordem dos elementos e, a partir de Q5, o aluno revisitou usos de notações de conjuntos e teve a oportunidade de refletir a relação de ordem dos números reais ou seus subconjuntos e, com isso, regular sua aprendizagem e sua produção.

5.1.7 Questão 07 – produção EM11CDI41

O enunciado da Questão 07 e a descrição da resolução de EM11CDI41 são apresentados nos quadros que seguem:

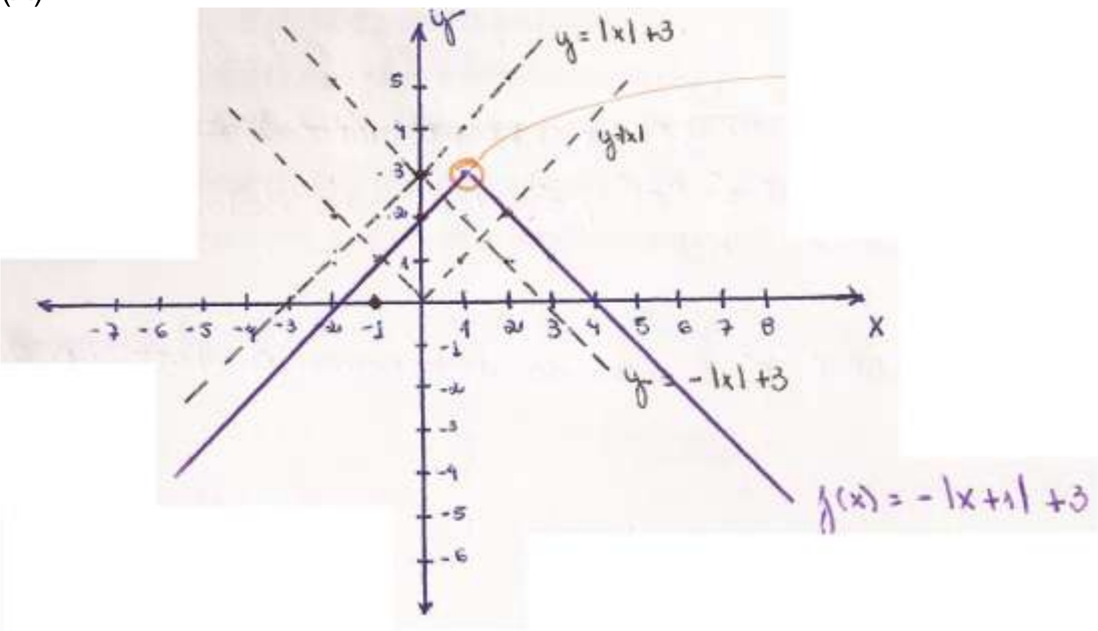
Considere a função j, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $j(x) = -\|x + 1\| + 3$. Construa o gráfico da função j a partir do gráfico da função definida por $y = \|x\|$. Caracterize as sucessivas transformações que permitem obter o gráfico da função j a partir do gráfico da função definida por $y = \|x\|$. Resolva analiticamente a inequação $j(x) > 2$. C) Resolva graficamente a inequação $j(x) > 2$.

A Questão 07 é considerada como uma questão que requer um nível de proficiência de conexão por ser necessário relacionar diferentes representações de uma mesma situação, representação gráfica e algébrica de um conjunto-solução de uma inequação modular. A questão aborda conteúdos C1 e C3 do Quadro 4 – identificação de conjuntos numéricos, desigualdades reais e transformações de funções por meio de translação, reflexão – e é considerada uma questão de nível fácil de dificuldade quanto ao conteúdo.

Fase 1

R –

(A)



(B) $-|x+1|+3>2$

O aluno reconhece a lei de formação como o comportamento de uma função módulo de uma função linear e a possibilidade de obter sua representação gráfica a partir da função $y=|x|$. Realiza a translação vertical e a reflexão corretamente. A translação horizontal foi realizada no sentido contrário, deveria ser de uma unidade para a esquerda de zero e foi realizada de uma unidade para a direita de zero. Somente escreve a inequação a ser resolvida.

Fase 2

Na expectativa de fazê-lo identificar o erro cometido no deslocamento horizontal, sigo com os questionamentos.

Q1 – Se $x=1$ então $y=-|1+1|+3=1$?

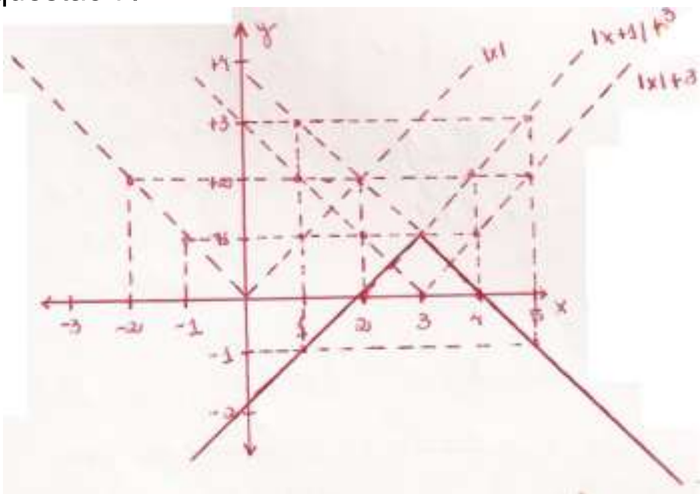
Q2 – Qual é o valor de x que zera $|x+1|$?

RQ2 –
O valor que zera $|x+1|$ é o -1.

Q3 – De que forma a resposta à pergunta anterior ajuda na construção do gráfico de $f(x)$?

RQ3 – Esse valor demonstra que Dv é -1.

R1 –
*Refazendo a questão 7.



(B) $-|x+1|+3>2$

$$j(x)=\begin{cases}-(x+1)+3\geq 2\ (I)\\ +(x+1)+3<2\ (II)\end{cases}$$

(I) $-x-1+3=2$

$-x-1+3-2=0$

$x=0$

(II) $x+1+3=2$

$x+4-2$

$x+2=0$

$x=-2$

Coerente com as respostas dadas à Q2 e à Q3 o aluno refaz a construção do gráfico evidenciando uma inversão nos deslocamentos que $j(x)$ sofreu com relação à função $y=|x|$. O aluno identifica as fases da função modular, ao representá-la por uma função por partes e determina os valores em $j(x)=2$, mas não estuda os valores no qual é maior que 2.

Fase 3

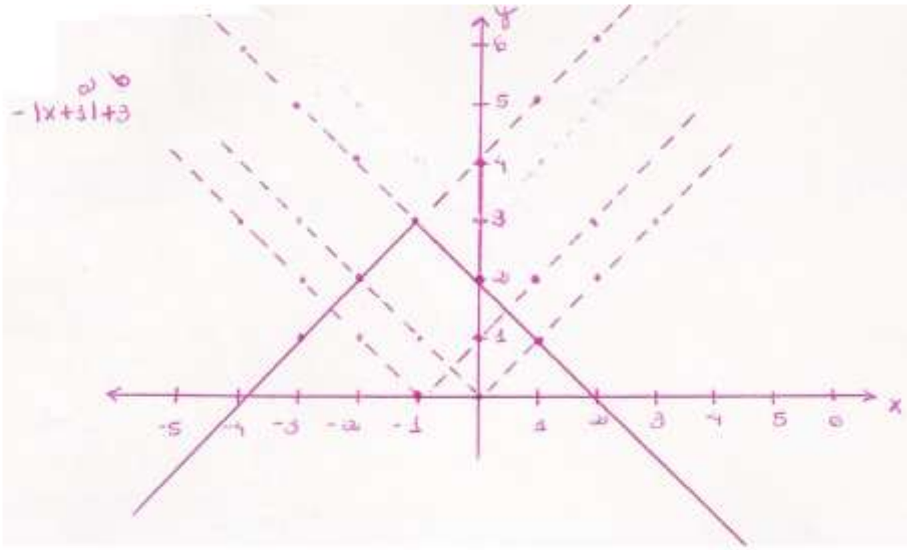
Na expectativa de fazê-lo mais uma vez refletir acerca de sua produção, reforço o questionamento.

Q4 – O que essa resposta [RQ3] garante sobre o gráfico de $y=|x+1|$?

RQ4 –
Que o seu deslocamento vertical será -1. Ou seja, ela sofrerá a translação de -1 no gráfico.

RQ1 –
O gráfico foi feito erroneamente.

Essa resposta fornece indícios de que o aluno não só inverteu os deslocamentos horizontal e vertical, como também possui dificuldades para lidar com esses deslocamentos.

Fase 8
Tendo em vista as respostas anteriores, nas quais o aluno reconhece a possibilidade de construir os gráficos a partir das transformações em $y = \|x\|$, mas realiza de forma errada, solicito: **Q5** – Explique o deslocamento vertical e horizontal de uma função modular $y = \|x + a\| + b$. **RQ5 –** Em uma função modular, como no caso de $y = \|x + a\| + b$, o valor dentro do modulo que é somado ou subtraído, no caso dessa função é "a", é o valor do deslocamento horizontal da função. Já o valor de "b" na função modular é o valor do deslocamento vertical da função. **R2 –**  Analisando o gráfico acima, $j(x) > 2$ pode ser observado quando $x < 0$ e com $x > -2$. O intervalo está no meio dos valores encontrados em b. *O aluno identifica os deslocamentos na lei de formação solicitada e refaz corretamente a construção do gráfico associando os valores dados aos parâmetros a e b. Também identifica o conjunto-solução da inequação a partir do gráfico e faz relação com os valores encontrados em seu estudo analítico.*

Nas produções R1, RQ3, RQ4 e RQ5, o aluno executou um procedimento de rotina. Em sua escrita é possível perceber que não relacionou as respostas analíticas com as gráficas, ou seja, lidou com o problema em um nível de competências de reprodução. Já em R2 revelou uma análise gráfica para uma resolução de uma inequação e trouxe os valores encontrados em R1 para essa análise, evidenciando competências do nível de conexão.

Em R, o aluno pareceu cometer apenas um equívoco, entretanto a professora, ao investigá-lo, na expectativa de favorecer uma reflexão acerca de sua produção, deparou-se com um entendimento invertido do aluno ao lidar com os deslocamentos horizontal e vertical sofridos por uma função, que foi evidenciado em RQ3 e R1.

Em RQ5 e R2, além de apresentar um procedimento correto para identificar os deslocamentos sofridos por uma função modular linear, o aluno refez o gráfico corretamente e o observou para obter o conjunto-solução da inequação da alternativa b.

Essa interação reforça o quanto a análise da produção escrita serve à avaliação, a qual possibilitou à professora investigar causas de erros e acertos casuais para acompanhar e guiar o aluno em sua aprendizagem.

5.1.8 Questão 08 – produção EM11CDI06

O enunciado da Questão 08 e a descrição da resolução de EM11CDI06 são apresentados nos quadros que seguem:

Ache a equação da reta que:

A) passa por $(-2, 3)$ e tem declividade -4.
B) passa por $(-4, 2)$ e $(3, -1)$.
C) tem declividade 2/3 e coeficiente linear -4.
D) passa por $(2, -4)$ e paralela ao eixo x.
E) passa por $(1, 6)$ e paralela ao eixo y.
F) passa por $(1,6)$ e $(3,4)$ e tem declividade 2.
G) passa por $(4, -2)$ e paralela a $x + 3y = 7$
H) passa por $(5, 3)$ e perpendicular a $y + 7 = 2x$.
I) passa por $(-4, 3)$ e paralela à reta determinada por $(-2, 2)$ e $(1, 0)$.

A Questão 08 é considerada como uma questão que requer um nível de proficiência de reprodução ao resolvê-la, por ser necessário utilizar um procedimento rotineiro, determinar a equação de reta a partir de seus elementos (pontos, declividade). A questão aborda conteúdos enquadrados em

C3 do Quadro 4 – funções elementares – e é considerada uma questão de nível fácil de dificuldade em relação ao conteúdo.

Fase 2
R – f) $y - 6 = 2(x - 1)$ $y = 2x - 2 + 6$ $y = 2x + 4$ *O aluno faz uso da equação geral da reta e dos elementos trazidos na alternativa sem fazer conferência – o valor da declividade da reta não é* 2 *a partir dos pontos dados.*
Fase 4
Na expectativa de fazê-lo refletir acerca da existência de uma reta com tais especificações, questiono: **Q1** - Prove esse valor [2 - declividade] a partir dos pontos dados na alternativa. **RQ1 –** $A(1{,}6) \quad B(3{,}4)$ $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{6-4}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1$ Não há solução pois a declividade é a mesma coisa que coeficiente angular e os coeficientes angulares -1 e 2 não são iguais. *O aluno reconhece a necessidade de o cálculo do coeficiente angular de uma reta ser constante e independente dos pontos escolhidos.*

* Apenas descrição de uma produção escrita da alternativa f será apresentada na Questão 08.

A Questão 08 exige em todas as alternativas a execução de procedimentos de rotina associados à determinação de uma equação de reta. Além disso, é preciso relacionar os elementos apresentados em cada alternativa. A produção R revelou que o aluno não associou os elementos apresentados, apenas executou um procedimento.

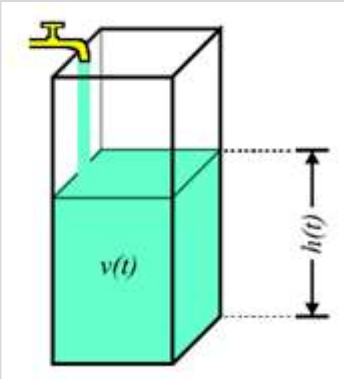
Por meio de Q1, a professora buscou investigar se o erro foi por falta de atenção ou por problemas no entendimento acerca dos conceitos envolvidos e ofereceu ao aluno a oportunidade de refletir e regular a sua resposta. Em RQ1, o aluno apresentou uma nova resposta e nela escreveu as relações que fez, evidenciando que o seu erro deveu-se a ter levado os elementos apresentados na alternativa diretamente ao procedimento, sem validá-los.

Essa interação escrita pode ter favorecido ao aluno a reflexão de que, mesmo em questões de rotina, é preciso monitorar, avaliar os procedimentos escolhidos, relacionando-os com os conceitos envolvidos, ações que se esperam de um sujeito autônomo ao lidar com uma situação qualquer.

5.1.9 Questão 09 – produção EM11CDI20

O enunciado da Questão 09 e a descrição da resolução de EM11CDI20 são apresentados nos quadros que seguem:

A figura a seguir representa um depósito com a forma de um prisma quadrangular regular. Em um determinado instante, uma torneira, com um caudal constante, começa a verter água no depósito, que inicialmente se encontra vazio, terminando o processo quando o depósito fica completamente cheio de água.



Seja v a função que, ao tempo t decorrido desde que se iniciou o enchimento, faz corresponder o volume de água no depósito.

Seja h a função que, ao tempo t decorrido desde que se iniciou o enchimento, faz corresponder a altura que a água atinge no depósito.

Admita que o tempo é expresso em minutos, que o volume de água é expresso em decímetros cúbicos e que a altura da água no depósito é expressa em decímetros.

Admita que:

- a vazão da torneira é de $20\ dm^3$ por minuto;
- a aresta da base do depósito mede $0{,}5m$;
- o depósito tem $1{,}2m$ de altura.

a) O que representa $v(1)$? E o que representa $v(t)$?

b) Qual é o contradomínio da função v?

c) Qual é o domínio da função v?

d) O que representa a solução da equação $v(t) = 300$?

e) Defina a função v por uma expressão analítica.

f) Represente graficamente a função v.

g) Indique o domínio e o contradomínio da função h

Defina a função h por uma expressão analítica.

Para resolver a Questão 09, é necessário desenvolver algum modelo para lidar com a situação e apresentar uma argumentação matemática que inclui uma generalização da situação abordada. Por isso, apesar da divergência na validação pelos pares, a professora/pesquisadora manteve a sua classificação quanto ao nível de proficiência requerida - reflexão.

A questão aborda conteúdos enquadrados em C3 do Quadro 4 – definição de função e de relação, representação gráficas de funções – e é considerada uma questão de nível médio de dificuldade em relação ao conteúdo.

Fase 1
R – a) $v(1)$ representa a vazão da torneira em um minuto. $v(t)$ representa a vazão da torneira em t minutos. d) $t = 15\ min$ *O aluno interpreta a função volume do tanque como a função que mede a vazão acumulada da torneira em um período de tempo, o que não fere a compreensão do problema, pois a torneira verte água diretamente no depósito. A resposta do aluno na alternativa d não menciona a vazão ou o volume do tanque, mas o tempo decorrido para se ter* $300\ dm^3$.

Fase 2

Na expectativa de fazê-lo retornar ao enunciado da alternativa e verificar o que realmente é solicitado, questiono:

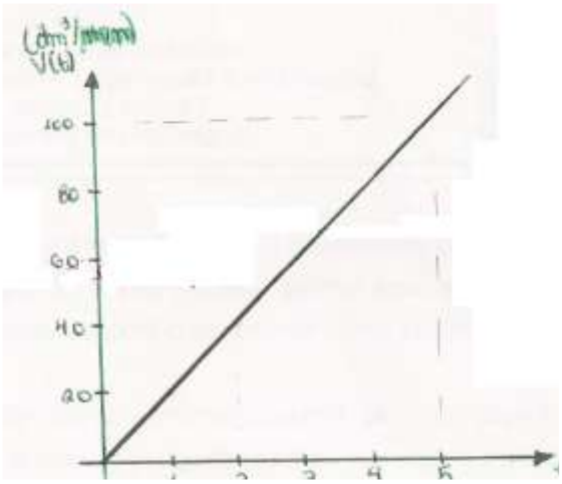
Q1 – *O que é* $t = 15min$?

RQ1 –
Significa que vazão da torneira em 15 minutos é $300\ dm^3$.

O aluno reconhece que o tempo de 15 minutos está relacionado ao volume de $300dm^3$*. A sua resposta confirma que considera a vazão acumulativa da torneira, o que equivale ao volume do depósito.*

R1 –
f)
$v(t) = 20t$

t	$v(t)$
0	0
1	20
2	40
3	60
4	80
5	100



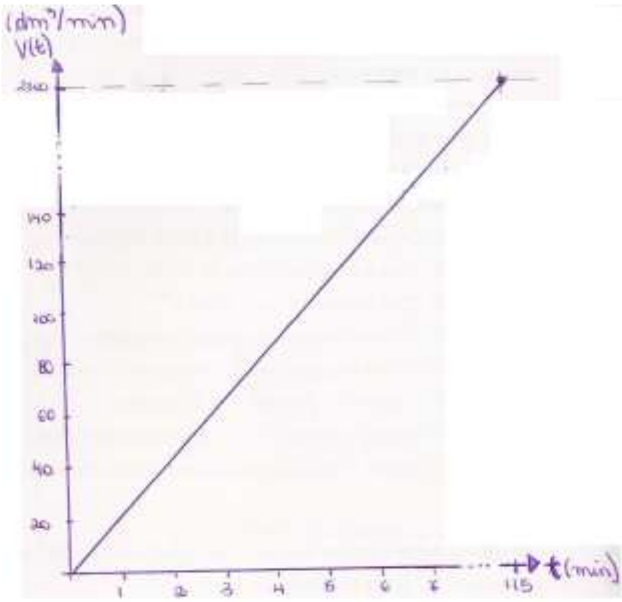
e) $v(t) = 20t$
b) $CDV(t) = [0, +\infty[$
c) $CDV(t) = [0, +\infty[$
g) $D(h(t)) =$
h) $h(t) = tv$
$v \rightarrow$ volume de água

B) I. $c =$ volume total do prisma.

Domínio, contradomínio e gráficos ilimitados podem estar relacionados ao fato de considerar a função $v(t)$ *como a função que mede a vazão acumulada da torneira em relação à variação do tempo, uma vazão pode ocorrer indefinidamente.*

Fase 3
Para fazê-lo repensar sobre a função volume e sobre a vazão constante da torneira e seu papel na lei de formação de v, solicito que analise a afirmação e responda aos questionamentos: **Q2** – A vazão da torneira muda com o passar do tempo. Justifique. **RQ1 –** A vazão da torneira não muda com o passar do tempo, ela é constante, o que muda é o volume. **Q3** – Se c é o volume total, então o que ocorre quando o tempo passa na Expressão $v(t) = ct$? **RQ3 –** Com maior tempo, o volume total do prisma aumenta, então c não é o volume do prisma. $c =$ a vazão da torneira. **Q4** – O tanque possui uma capacidade máxima? **RQ4 –** Sim. **Q5** – O tanque pode receber água indefinidamente? **RQ5 –** Não. **Q6** – Tempo vezes o volume resulta em altura? Justifique. **Q7** – Com as dimensões do tanque prove essa afirmação [$Vol = 2300\ dm^3$]? **RQ7 –** $Vol = 2300\ dm^3$ $2300 = 20t$ $t = 115$ **R2 –** b) $CDV(t) = [0{,}2300]$ c) $CDV(t) = [0{,}115]$

f)



O aluno reconhece a função $v(t)$ e a vazão da torneira no contexto do problema, e, com isso, restringe o domínio e contradomínio da função. Não justifica a obtenção do valor de 2300 para o volume máximo do tanque.

Fase 6

RQ6 –
Sim, pois quanto mais o tempo passa maior é o volume, e quando o volume aumenta, a altura da água no tanque também aumenta.

Apesar de o aluno apresentar uma relação que não fornece a altura do tanque, reconhece que essa altura varia com relação ao tempo e que está diretamente ligada ao aumento do volume do tanque.

Com a intenção de fazê-lo repensar o volume máximo apresentado, solicito:

Q8 – Explique esse valor [2300].

RQ8 –
Esse valor representa a capacidade máxima do tanque.

Sua resposta confirma que considera esse valor de 2300 como a capacidade máxima, continua não apresentando como o obteve.

Fase 8
Na expectativa de fazê-lo repensar a resposta apresentada para o volume máximo do tanque e para a função altura, sigo com os questionamentos: **Q9** – Apresente os cálculos realizados para obter o valor de 2300. **Q10** – Suponha uma caixa retangular com dimensões 2, 3, e x, com capacidade de $40\ dm^3$. Explique um caminho para determinar o valor de x. Busque relacionar o caminho escolhido para obter uma relação que fornece o valor da altura do depósito com o passar do tempo e para explicar o que representa $\frac{c}{k}$ no item b. **R3 –** b) O contradomínio da função é $[0{,}2300]$ c) O domínio da função é $[0{,}115]$ g) O contradomínio da função é $[0{,}115]$ O domínio da função é $[0{,}2300]$ B) I. A constante c representa a vazão da torneira. II. O quociente $\frac{c}{k}$ representa o volume de água no prisma. *O aluno não responde aos questionamentos e reescreve respostas anteriormente apresentadas.*

Apesar de a Questão 09 ter sido considerada como uma questão que requer um nível de proficiência de reflexão, nessa produção foi possível ver indícios de competências de conexão. O aluno buscou uma interpretação e uma representação simbólica e formal para a situação, entretanto não apresentou argumentos que justificassem seus modelos e suas estratégias.

Os questionamentos da professora deram ao aluno a oportunidade de alterar a maneira de interpretar a situação, o que foi evidenciado em R1 e RQ3. As intervenções da professora não foram demarcadoras no sentido de apontar erros ou acertos, mas foram pistas que em parte serviram para o aluno adaptar a sua produção.

O aluno não apresentou justificativas para a capacidade máxima considerada apesar das intervenções em Q7, Q8 e Q9. A professora, nesse contexto, orientou o aluno na apreciação e no aperfeiçoamento de sua produção, mas não decidiu o caminho e os meios que o aluno deveria seguir.

Ao realizar Q10, a professora possibilitou ao aluno lidar com a questão a partir de competências de conexão em vez de competências de reflexão. Essa oportunidade é pertinente na medida em que a produção do aluno indicava que as competências requeridas seriam um impeditivo para o aluno e que, a partir dessa ação, o aluno poderia produzir algum aprendizado.

Essa produção evidencia indícios de a intervenção escrita ter promovido uma flexibilidade na questão, com relação a possibilitar ao aluno mostrar o que ele sabe e revelar em que nível de compreensão se encontra. Van den Heuvel-Panhuizen (1996) considera desejável essas características em uma questão de avaliação.

5.1.10 Questão 10 – produção EM11CDI17

O enunciado da Questão 10 e a descrição da resolução de EM11CDI17 são apresentados nos quadros que seguem:

Considere, num referencial ortogonal, xOy, a curva, que representa graficamente a função f de domínio $[0,1]$, definida por $f(x) = e^x + 3x$, e a reta r de equação $y = 5$. Sem recorrer à calculadora, comprove que a reta r intercepta a curva C em pelo menos um ponto.

A Questão 10 é considerada uma questão que requer um nível de proficiência de conexão para resolvê-la, pois é necessário argumentar a respeito do comportamento de uma função exponencial adicionada de uma linear e, a partir disso, analisar a intersecção entre duas funções. A questão aborda conteúdos enquadrados em C3 do Quadro 4 – funções elementares e suas representações gráficas – e é considerada uma questão de nível médio de dificuldade em relação ao conteúdo.

Fase 3

R –

$F(x) = e^x + 3x$
$F(x) = 2{,}7^0 + 3.0$
$F(x) = 1 + 0$
$F(x) = 1$

$F(x) = 2{,}7^1 + 3.1$
$F(x) = 2{,}7 + 3$
$F(x) = 5{,}7$

A função $f(x)$ é uma função exponencial somada a um polinômio, então o resultado será a soma entre valores positivos. Com isto podemos dizer que a reta $y = 5$ corta a função pois pertence ao intervalo encontrado.

O aluno afirma que a função $f(x)$ terá imagem sempre positiva, o que não é verdade uma vez que o comportamento de e^x tende a zero e o de $3x$ tende a a menos infinito quando x tende a menos infinito. Basta testar um valor menor que -1 (sem a pretensão de discutir a partir de qual valor $f(x) < 0$) para se ver que essa afirmação não é verdadeira.
Mas, mesmo que a afirmação fosse verdade, é necessário incluir em sua argumentação a condição de f ser contínua para se ter a garantia de que existe intersecção entre f e $y = 5$.

Fase 5

Na expectativa de fazê-lo reconhecer a necessidade de usar a hipótese de f ser contínua, questiono:

Q1 – O que garante que não vai haver um salto na função próximo de $y = 5$?

RQ1 –
Pois estas funções são contínuas, não permitindo que ocorra um salto e garantindo que para todo x haverá um y correspondente.

Na busca de fazê-lo corrigir a afirmação feita a respeito do sinal de $f(x)$ e perceber que pode restringir a afirmação para valores maiores que zero, solicito:

Q2 – Justifique a sentença: "A função $f(x)$ é uma função exponencial somada a um polinômio, então o resultado será a soma entre valores positivos."

O aluno não apresenta uma justificativa.

Nessa produção escrita, o aluno fez uma relação de causa e consequência em sua argumentação e, apesar dos erros existentes, (a soma das funções $h(x) = e^x$ e $p(x) = 3x$ não é sempre positiva e não utilizar a hipótese de f ser contínua) demonstrou um raciocínio avançado e generalizado com relação ao comportamento de funções elementares, competências do nível de reflexão.

O fato de a produção escrita do aluno revelar um nível de proficiência superior ao esperado pela professora vai ao encontro do Terceiro Princípio apresentado por De Lange (1987), que sugere que o aluno, ao lidar com uma tarefa (questão), deve ter a oportunidade de desenvolver estratégias e procedimentos que abranjam tópicos do assunto da área matemática em sua amplitude e profundidade.

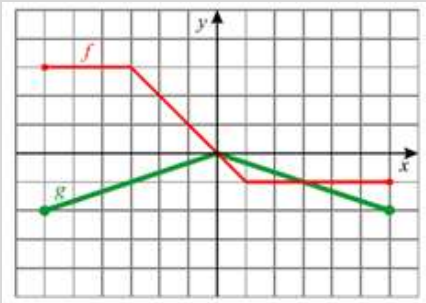
A professora, ao realizar Q1 e Q2, não indicou ao aluno diretamente a incompletude da resposta R, mas o incentivou a analisá-la. É possível ver em RQ1 uma adequação da resposta a partir de Q1, entretanto, por não ter respondido à Q2, não é possível afirmar se o aluno refletiu acerca da restrição necessária em seu argumento – considerar, por exemplo, valores maiores que zero.

Esse questionamento oportunizou que o próprio aluno sentisse a necessidade de alterar a sua resposta e refletisse a respeito das condições necessárias para validar a sua argumentação. Santos L. (2002) considera que comentários de um professor com essas características servem ao processo de regulação da aprendizagem.

5.1.11 Questão 11 – produção EM11CDI27

O enunciado da Questão 11 e a descrição da resolução de EM11CDI27 são apresentados nos quadros que seguem:

Considere as funções f e g, representadas graficamente no plano cartesiano abaixo. A unidade, em qualquer dos eixos, é o lado da quadrícula.



Indique o domínio da função f e o domínio da função g.

A) Indique o contradomínio da função f e o contradomínio da função g
B) Indique o conjunto solução de cada uma das condições seguintes:
  a) $f(x) = 2$
  b) $f(x) = -3$
  c) $g(x) = -1$
  d) $f(x) > 0$
  e) $g(x) \geq 0$
  f) $g(x) < -1$
  g) $f(x) = g(x)$
  h) $f(x) > g(x)$

A Questão 11, considerada uma questão que requer um nível de proficiência de reprodução, abrange itens relativamente familiares aos alunos, sendo necessária a identificação de conjuntos numéricos a partir de uma representação gráfica para resolvê-la. A questão aborda conteúdos enquadrados em C1, C2 e C3 do Quadro 4 – identificação dos conjuntos numéricos; números reais e a reta real; funções e representações gráficas de funções elementares – e é considerada uma questão de nível fácil em relação ao conteúdo.

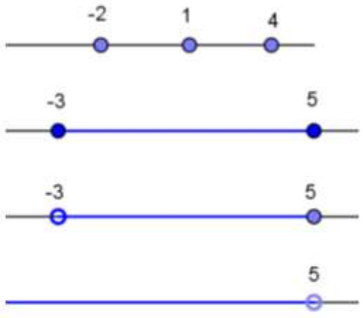
Fase 1
R – A) $[-6,6]\ f$ $[-6,6]\ g$ B) $[-1,3]$ $[-1,1]$ C) a) $S = \{-2,2\}$ *O aluno identifica os conjuntos solicitados nas alternativas A e B, mas o contradomínio de g está errado.*
Fase 2
Na expectativa de fazê-lo refazer a leitura do contradomínio da função g, o questiono: **Q1** – Quais são os valores que estão neste intervalo [$[-1,1]$]? **RQ1 –** $CD_g: [-2,0]$ *O aluno apresenta uma nova resposta para o contradomínio de g, agora corretamente representado.* **R1 –** C) b) $\emptyset$ c) $S = [-3,3]$ d) $S = [-6,-1]$ e) $S = \{0\}$ f) $S = [-6,6]$ g) $S = \{0\}$ h) $\nexists$ *O aluno continua a resolução da questão. Nas respostas da alternativa C, não utiliza corretamente a notação para conjuntos discretos. Na alternativa g, escreve que há apenas uma intersecção entre os gráficos e, na alternativa que h, que não há solução.*

Fase 3
Para entender o que o aluno compreende do item h da alternativa C, questiono: **Q2** – O que representa no gráfico dizer que $f(x) = g(x)$? **RQ2 –** Contradomínio $f(x) = CDg(x)$. *O aluno responde ao questionamento sem fazer relação com o item h da alternativa C, apesar de ser verdade que a igualdade de duas funções depende da igualdade dos contradomínios, também é preciso ter os domínios iguais.* *Na expectativa de fazê-lo analisar as respostas dadas no item C, questiono:* **Q3** – Qual é a diferença entre $\{-2,2\}$ e $[-2,2]$? **RQ3 –** Chaves é utilizada para dar a solução. Ex: $S = \{\ \}$ Colchetes para indicar o contradomínio (imagem) da função. Ex: $[-2,2]$ C) b) $\emptyset$ c) $S = \{-3,3\}$ d) $S = \{-6,-1\}$ e) $S = \{0\}$ f) $S = \{-6,6\}$ g) $S = \{0\}$ h) sim *O aluno apresenta razões para o uso de chaves e colchetes em conjuntos de uma forma restrita. Em sua resposta, parece estar o uso de chaves ligado a soluções finitas e colchetes a intervalos. O aluno corrige o uso de colchetes por chaves na alternativa C, não reconhece mais de uma intersecção entre as funções e, apesar de escrever sim na frente do item h da alternativa C, não apresenta o conjunto-solução da inequação.*

Fase 5

Com vistas a refinar o uso de chaves e colchetes em conjuntos numéricos, questiono:

Q4 – Como se escrevem os seguintes conjuntos utilizando colchetes ou chaves?



RQ4 –
$\{-2,1,4\}$
$[-3,5]$
$]-3,5]$
$]-\infty,5[$

O aluno representa corretamente os conjuntos solicitados.

Fase 6

Para auxiliar o aluno a refletir sobre a natureza de conjuntos discretos e intervalos de reta, sigo com os questionamentos:

Q5 – Quantos elementos há no conjunto $\{-2,2\}$? Quantos elementos há no conjunto $[-2,2]$?

RQ5 – $\{-2,2\}$ tem só dois números, $[-2,2]$ tem todos os números de -2 até 2, são infinitos números.

Q6 – Busque razões que justifiquem o uso da notação de colchetes e de chaves para conjuntos numéricos.

O aluno não apresenta resposta ao questionamento 6.

Fase 7

RQ6 – O uso de colchetes é para conjuntos com infinitos números e eles são intervalos da reta. O uso de chaves é para um conjunto com um número finito de elemento.

Com essa resposta, o aluno apresenta indícios de uma reconstrução de seus conceitos de conjuntos discretos e de intervalos da reta.

Fase 8
Haja vista as considerações feitas pelo aluno, é oportuno solicitar que reflita acerca das respostas dadas ao problema. **Q7** – Verifique as soluções apresentadas para a questão inicial. Veja se há necessidade de correções com base no que você estudou a respeito de conjuntos numéricos. *O aluno não apresenta uma nova resposta, mas não é possível saber se reviu sua produção.*

Apesar de, *a priori,* a Questão 11 ter sido considerada como uma questão do nível de reprodução, vê-se, no desenrolar dessa produção escrita, que o aluno, apesar de reconhecer a intenção da questão – identificação de conjuntos numéricos a partir de uma representação gráfica, precisou ampliar seus conceitos relacionados a subconjuntos da reta, configurado-se como uma ação para além da utilização ou execução de procedimentos de rotina, isto é, foi necessário competências do nível de conexão.

As escritas RQ3 e RQ6 evidenciam alguma transformação no entendimento do aluno a respeito de intervalos de reta e conjuntos discretos, o que permite afirmar que ele regulou a sua aprendizagem com relação a estes conceitos.

A produção R1 e RQ3 fornecem à professora indícios da falta de compreensão ou dificuldade do aluno em identificar o conjunto-solução, ao igualar duas funções, e também em identificar a solução de uma inequação. Apesar disso, apenas em Q2 a professora procurou intervir na direção de oportunizar ao aluno alguma reflexão a respeito da intersecção entre funções e não fez intervenção na solução de uma inequação a partir da análise gráfica.

Por meio de Q2, a professora esperava entender o que o aluno compreendia do conjunto-solução de intersecções de funções para orientá-lo por caminhos que favoreceriam discutir esse conceito. Entretanto, apesar de o aluno, ao produzir RQ2, dar indícios de não ter feito relações com o conjunto-solução da intersecção entre funções e sim com a condição de igualdade entre duas funções, a professora não prosseguiu com novas intervenções que poderiam fazê-lo alcançar seu objetivo, e não oportunizou ao aluno materializar uma regulação da aprendizagem por meio de sua produção escrita.

A decisão de continuar ou não na direção de intervir em alguma produção do aluno é do professor. O professor é o que analisa o trabalho do aluno a cada fase e faz as intervenções que julgar oportunas. Ele pode decidir não fazer algumas intervenções em prol de outras para não confundir o desenvolvimento do aluno por uma sobrecarga de informações escritas. Nessa produção há indícios de que a professora objetivou guiar o aluno na regulação de conceitos relacionados a intervalos de reta e conjuntos discretos, evidenciados em Q4, Q5 e Q6.

5.1.12 Questão 12 – produção EM11CDI39

O enunciado da Questão 12 e a descrição da resolução de EM11CDI39 são apresentados nos quadros que seguem:

Escreva um número que seja, simultaneamente, múltiplo de $2{,}3$ e 5.

A Questão 12 é considerada uma questão que requer um nível de proficiência de reprodução, pois, para resolvê-la, é necessário executar um procedimento rotineiro, cálculo do mínimo múltiplo comum. A questão aborda conteúdos enquadrados em C1 do Quadro 4 por ser preciso identificar números reais e compreender as definições de múltiplos e divisores de um número, é considerada uma questão de nível fácil de dificuldade em relação ao conteúdo.

Fase 1
R – Como $2, 3, 5$ são primos, o único que é múltiplo dos três é 30. $2.3.5 = 30$ *O aluno apresenta uma resposta à questão, mas ao elaborá-la faz menção ao fato de os números serem primos e apresenta a resposta 30 como o único múltiplo entre eles.*

Fase 2
Na expectativa de fazê-lo refletir acerca dos conceitos apresentados em sua resposta, questiono: **Q1** – O que significa dizer que $2, 3, 5$ são primos? **RQ1 –** Dizer que os números são primos significa que eles são divisiveis por eles mesmos e por 1. **Q2** – Qual é a relevância disso [serem primos] para se determinar um valor múltiplo entre eles? **RQ2 –** Quando os números são primos e queremos achar um número que seja multiplo dos três simultaneamente aplicamos o método do m.m.c (minimo multiplo comum) então multiplicamos $2 \times 3 \times 5$ para achar o menor múltiplo entre eles. É como fazermos separadamente a tabuada de cada um e olharmos o primeiro que coincide na tabuada dos três números. **Q3** – Apenas o número 30 é múltiplo de $2, 3, 5$ simultaneamente? **RQ3 –** Não é apenas o número 30 que é múltiplo dos 3 números ao mesmo tempo. Ele é o menor número que aparece primeiro.
Fase 4
Com vistas a fazê-lo apresentar o que entende por múltiplo e refletir a respeito, questiono: **Q4** – O que significa dizer que 30 é múltiplo de 3? **RQ4 –** Significa que ele aparece na tabuada do 3 ou seja o número “3” multiplicará um número que nesse caso é 10 e resultará em 30. *Sua resposta está atrelada à tabuada e não à definição de múltiplo de números inteiros.*
Fase 6
Com o propósito de ampliar o seu conceito de múltiplo, questiono: **Q5** – Posso dizer que 6 é múltiplo de $1{,}5$? **RQ5 –** Pode dizer que 6 é múltiplo de $1{,}5$ porém $1{,}5$ é um número que não é natural e positivo e não aparece na tabuada. *Nesta resposta o aluno afirma que 6 pode ser múltiplo com uma ressalva que contradiz respostas anteriores.*

Fase 8
Para fazê-lo confrontar suas respostas e investigar o conceito de múltiplo, solicito: **Q6** – Na sua resposta anterior dizia que, para ser múltiplo, precisa estar na tabuada, agora que, mesmo não estando pode ser múltiplo. Investigue uma condição para definir múltiplo de um número. **RQ6 –** Tem que ser os inteiros, por isso na tabuada só tem números naturais. $\frac{C}{A} = B \Rightarrow C$ (se for inteiro) será múltiplo de A (inteiro) pois contém A multiplicando B (inteiro) vezes. *O aluno apresenta uma definição de múltiplo independente da tabuada, de forma generalizada e abstrata.*

Pedir a um aluno para obter o mínimo múltiplo comum entre três números é solicitar que execute um procedimento de rotina, são competências do nível de reprodução. Agora, pedir ao aluno que reflita e discorra a respeito de cada conceito envolvido nesse procedimento são competências do nível de reflexão, pois isso requer argumentação, abstração, generalização de conceitos matemáticos.

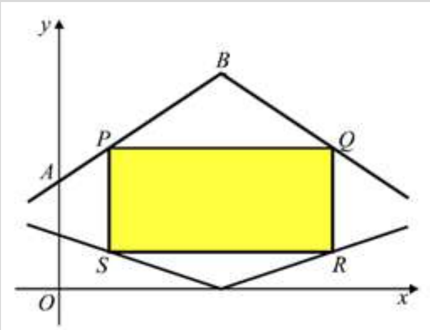
Um movimento dos níveis das competências ao lidar com a questão, a partir das intervenções da professora, é evidenciado em R, RQ4 e RQ6. Em R, o aluno demonstrou uma competência de reprodução ao executar um procedimento de rotina para determinar um múltiplo. Em RQ4, o aluno trouxe a tabuada para sua resposta, evidenciando alguma ampliação do que havia apresentado em R, mais do que a execução de um procedimento de rotina. Por fim, em RQ6, o aluno articulou as respostas anteriores e apresentou uma abstração e generalização para o conceito de múltiplo, revelando competências de reflexão e uma regulação da aprendizagem.

A possibilidade de passar por diferentes níveis de compreensão do conceito de múltiplo não dependeu das características da questão posta *a priori* (primeiro enunciado que o aluno lidou), mas do compromisso do aluno com o lidar com a Prova em Fases a partir das intervenções realizadas pela professora, intervenções carregadas de intenção de conduzi-lo ao que se desejava que ele aprendesse. Conforme Pires (2013), “aprender supõe passar por diferentes níveis de compreensão”.

5.1.13 Questão 13 – produção EM11CDI22

O enunciado da Questão 13 e a descrição da resolução de EM11CDI22 são apresentados nos quadros que seguem:

Na figura abaixo estão os gráficos das funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respectivamente, por $f(x) = -\frac{2}{3}|x-6|+8$ e $g(x) = \frac{1}{3}|x-6|$.



Os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f:

- A é o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas;
- B é o ponto do gráfico que tem maior ordenada.

Seja P um ponto que se desloca sobre $\overline{AB}$, nunca coincidindo com o ponto B

Para cada posição do ponto P, considere:

- o ponto Q, sobre o gráfico da função f, de modo que a reta que contém $\overline{PQ}$ seja paralela ao eixo das abscissas;

- os pontos R e S, sobre o gráfico da função g, de modo que $PQRS$ seja um retângulo.

Seja x a abscissa do ponto P e seja h a função que, a cada valor de x, faz corresponder a área do retângulo $PQRS$.

a) Qual é o domínio da função h?
b) Mostre que $h(x) = 24 + 8x - 2x^2$.
c) Determine as dimensões do retângulo que tem maior área.

A Questão 13 é considerada uma questão que requer um nível de proficiência de reflexão por requerer o desenvolvimento de um modelo e de sua validação. A questão aborda conteúdos enquadrados em C1 e C3 no Quadro 4 – identificação de conjuntos numéricos, valor absoluto, funções e representações gráficas. É uma questão considerada de nível difícil de dificuldade em relação ao conteúdo.

Fase 1
R – a) $-\frac{2}{3}\|x-6\|+8=\frac{1}{3}\|x-6\|$ Caso $x \geq 0$ $-\frac{2}{3}(x+6)+8=\frac{x-6}{3}$ $-2(x-6)+24=x-6$ $-2x+12+24=x-6$ $42=3x$ $x=14$ Caso $x<0$ $-\frac{2}{3}(6-x)+8=\frac{1}{3}(6-x)$ $-2(6-x)+24=6-x$ $-12+2x+24=6-x$ $3x=6-12$ $x=-2$ $D=\{x \in \mathbb{R}/-2<x<6\ e\ 6<x<14\}$ c) $24+8x-2x^2$ $h(x)=-2x^2+8x+24$ $h'(x)=-4x+8$ $-4x+8=0$ $x=2$ Quando x for igual a 2, o retângulo terá a maior área possível. *O aluno determina as intersecções entre as funções f e g e faz uso desses pontos para restringir o domínio da função h, entretanto não respeita a hipótese de P pertencer ao interior de $\overline{AB}$.* *O aluno não desenvolve o modelo que representa a situação, com isso, não mostra a equivalência sugerida na letra b. Sem justificar as razões, utiliza a função derivada para determinar a resposta da letra c a partir do modelo apresentado na alternativa b.*

Fase 3
Para fazê-lo reler as hipóteses do enunciado da questão e corrigir o domínio da função h, sugiro: **Q1** – Verifique se o domínio apresentado para a função h respeita as hipóteses do enunciado da questão. **RQ1 -** Não respeita, precisa ser $D = \{x \in \mathbb{R}/0 < x < 6\}$ *Para investigar a interpretação que faz do conceito de máximo e de mínimo a partir da função derivada, solicito:* **Q2** – Explique o procedimento utilizado para obter a resposta $x = 2$ e apresente razões que garantem que esse ponto é de máximo. *O aluno não apresenta uma explicação.*

A produção escrita do aluno evidencia que lidou com a questão por meio de competências de conexão, pois realizou interpretações e relações de uma linguagem simbólica com a linguagem natural para determinar o domínio da função h e de reprodução por executar um procedimento de rotina para determinar as dimensões que maximizam a área do retângulo.

O aluno não desenvolveu o modelo da função h, assim como não respondeu Q2, na oportunidade que teve de apresentar argumentos matemáticos que justificassem o uso da derivada como um procedimento adequado na busca de extremos. Nessas produções, é provável que o aluno evidenciasse competências do nível de reflexão.

Por meio de Q1, a professora não apontou o erro, nem o corrigiu, mas deu pistas de orientação da ação a ser desenvolvida pelo aluno, levando-o a identificar e corrigir o erro. A Prova em Fases tornou-se um meio de a professora buscar construir um contexto favorável ao desenvolvimento de uma atitude autorreflexiva no aluno.

Essa questão foi acessível ao aluno, uma vez que, mesmo sem desenvolver o modelo, ele conseguiu apresentar uma formulação de resposta. Conforme Van den Heuvel-Panhuizen (1996), essa acessibilidade deve estar presente em questões de prova.

5.1.14 Questão 14 – produção EM11CDI16

O enunciado da Questão 14 e a descrição da resolução de EM11CDI16 são apresentados nos quadros que seguem:

De uma função f, contínua no intervalo $[1,3]$, sabe-se que $f(1) = 7$ e $f(3) = 4$. Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira? Justifique. **i.** A equação $f(x) = 5$ tem pelo menos uma solução no intervalo real $[1,3]$. **ii.** A equação $f(x) = 5$ não tem solução no intervalo real $[1,3]$.

A Questão 14 é considerada uma questão que requer um nível de proficiência de conexão, pois para resolvê-la, é necessário avaliar as sentenças a partir de um conjunto de hipóteses que envolvem conceitos matemáticos que deverão ser integrados à análise, como o conceito de função contínua e o domínio em que a função está definida. A questão aborda conteúdos enquadrados em C3 do Quadro 4 – domínio, imagem, representação gráfica, função sobrejetora e também o conceito de continuidade que não consta no Quadro 4, mas que foi trabalhado ao longo do semestre, mais especificamente por volta da primeira quinzena de setembro de 2011. Essa questão foi considerada de nível médio de dificuldade em relação ao conteúdo.

Fase 3
R – A primeira afirmação é verdadeira, pois a função é contínua no intervalo $[1,3]$ e $f(1) = 7$ e $f(3) = 4$, então $f(x) = 5$ tem pelo menos uma solução, onde x está no intervalo real $[1,3]$. *O aluno apresenta um argumento correto. Apesar de mencionar a hipótese de f ser contínua no intervalo, não explora esse conceito.*

Fase 5

Na expectativa de fazê-lo refletir a respeito da implicação da hipótese em seu argumento, questiono:

Q1 – Se a afirmação de que a função f é contínua não estivesse no enunciado sua afirmação seria falsa? Justifique.

RQ1 –
Sim, pois com essa afirmação a função existe no intervalo e sem a afirmação não pode-se afirmar se existe ou não no intervalo.

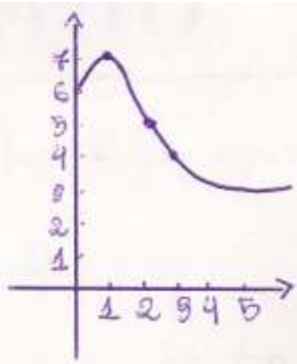
O aluno reconhece que a continuidade é uma condição necessária para a afirmação da existência da raiz no intervalo.

Fase 7

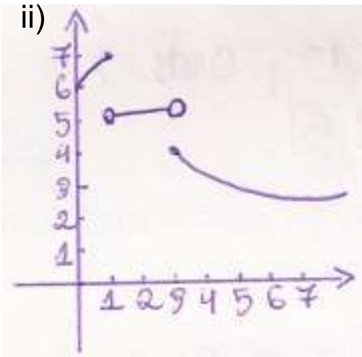
Para fazê-lo explorar a relevância da condição de f ser uma função contínua, solicito:

Q2 – Construa um gráfico que exemplifique as situações:
i) $f(x)$ é contínua no intervalo $[1,3], f(1) = 7, f(3) = 4$ e, por consequência, $f(x) = 5$ tem solução no intervalo.
ii) $f(x)$ é descontínua no intervalo $[1,3], f(1) = 7, f(3) = 4$ e $f(x) = 5$ tem solução no intervalo $[1,3]$.
iii) $f(x)$ é descontínua no intervalo $[1,3], f(1) = 7, f(3) = 4$ e $f(x) = 5$ não possui solução no intervalo $[1,3]$.

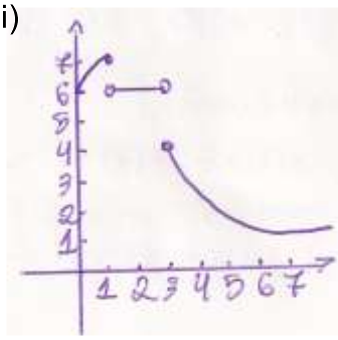
RQ2 –
h)



ii)



iii)



O aluno apresenta exemplos que satisfazem as sentenças.

Na produção R, primeira escrita, o aluno já demonstrou articular os conceitos necessários para formular um argumento satisfatório na resposta da questão – competências de conexão.

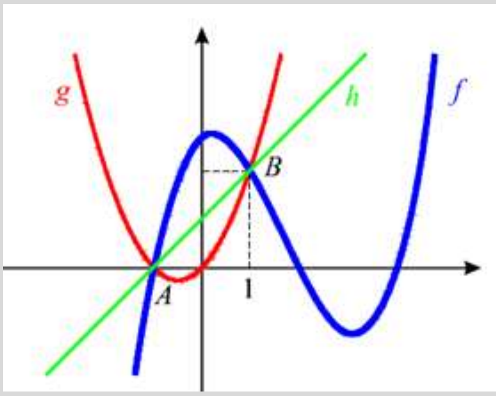
A interação escrita tornou-se um meio de constituir uma prática de avaliação a serviço da regulação da aprendizagem, isso pode ser evidenciado nas intervenções Q1, Q2, as quais orientaram o aluno a promover reflexões a respeito de sua produção R e a do conceito de continuidade.

Em RQ1, o aluno apontou consequências na resposta da questão no caso de o enunciado não trazer a hipótese de f ser contínua. Apesar de Q2 ter favorecido alguma exploração dessas consequências, o desejável seria um questionamento que exigisse do aluno a formulação das três situações mencionadas, ou seja, um questionamento que fizesse o aluno investigar e comunicar as consequências na resolução da questão.

5.1.15 Questão 15 – produção EM11CDI29

O enunciado da Questão 15 e a descrição da resolução de EM11CDI29 são apresentados nos respectivos quadros que seguem:

Na figura abaixo estão representadas graficamente três funções, f, g e h, todas de domínio $\mathbb{R}$.



Sabe-se que

- a função f é definida pela expressão $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$;
- o gráfico da função g é uma parábola que passa na origem do plano cartesiano;
- os pontos A e B pertencem aos gráficos das três funções;
- o ponto A tem ordenada 0;
- o ponto B tem abscissa 1.

a) Defina analiticamente a função h, depois de determinar a ordenada do ponto B.
b) Defina analiticamente a função g, depois de determinar a abscissa do ponto A.
c) Determine o conjunto-solução da inequação $f(x) > 0$, sem recorrer à calculadora.

A Questão 15 é considerada uma questão que requer um nível de proficiência de conexão por ser necessário interpretar e relacionar uma linguagem simbólica e gráfica de diferentes funções ao resolvê-la. A questão aborda conteúdos enquadrados em C1 e C3 do Quadro 4 – identificação de conjuntos numéricos, desigualdades reais e funções elementares – e é considerada uma questão de nível difícil de dificuldade em relação ao conteúdo.

Fase 1

R –
$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$
$f(1) = 1^3 - 5.1^2 + 2.1 + 8$
$f(1) = 1 - 5 + 2 + 8$
$f(1) = 6$
$B(1{,}6)$

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$
$0 = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

O aluno determina um ponto B, entretanto, para isso, utiliza a função $3.f(x)$, o que altera as coordenadas do ponto procurado.

Fase 3

Com o intuito de fazê-lo continuar sua produção e refletir a respeito do impacto da operação de multiplicar por 3 a função $f(x)$, sugiro:

Q1 – Encontre a expressão $h(x)$.
Q2 – Encontre $g(x)$.

R1 –
a) $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -5 & 2 & 8 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & 0 \end{array}$$

$(x^2 - 3x - 4).(x - 2) = 0$ pois A está a esquerda do eixo-x.

$x_2 = -1$ $A(-1{,}0)$
$x^2 - 3x - 4 = 0$
$x_1 = 2$ $x_3 = 4$

b)
$g(0) = a0^2 + b.0 + c$
$g(0) = c, c = 0$
$g(x) = ax^2 + bx + c$
$6 = a(1)^2 + b.1 + c$
$a + b + c = 6$
$g(-1) = a - b + c$
$$\underline{\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = 6 \end{cases}}$$
$2a + 2c = 6$
$a + c = 3$
$a + 0 = 3$
$a = 3$
$a + b + c = 6$
$3 + b + 0 = 6$
$b = 3$
$g(x) = 3x^2 + 3x$

$$m_{AB} = \frac{6-0}{1+1} = 3$$
$y - 0 = 3(x + 1)$
$h(x) = 3x - 3$

O aluno determina as raízes da função f e desenvolve um procedimento coerente com os dados obtidos para determinar a função $g(x)$ e a função $h(x)$. Não identifica que as funções obtidas são as representadas no gráfico multiplicadas por 3.

Fase 6

Na expectativa de guiar o aluno na reflexão sobre os impactos causados a partir da multiplicação de $f(x)$ por 3, questiono:

Q3 – $f(x)$ é definida por esta [$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$] expressão?

RQ3 –
Sim, pois dividi todos os termos por 3.

O aluno reconhece que fez uma operação elementar na função, mas considera que essa operação não a alterou.

Fase 7
Dando continuidade ao objetivo de fazê-lo reconhecer as consequências da operação realizada em f, questiono: **Q4** – Isso não altera a igualdade? Experimente aplicar $x = 1$ antes de simplificar. **RQ4 –** Caso aplique $x = 1$ antes de simplificar, terá o ponto $P(1{,}2)$, mas a simplificação não altera o resultado de $h(x)$ e $g(x)$. *O aluno reconhece a alteração na imagem da função, mas considera que isso não altera as funções h e g.* **R3 –** c) $S = [-1{,}2] \cap [4, +\infty[$ *O aluno apresenta uma solução para a alternativa c. É possível que tenha associado as raízes encontradas e a representação gráfica.*
Fase 9
Com a expectativa de fazê-lo perceber que as funções h e g sofreram impactos por conta da função f considerada, questiono: **Q5** – Mas, na sua resolução em verde, você não usou outro ponto para encontrar $g(x)$ analiticamente? Mesma pergunta para $h(x)$. **RQ5 –** Usei. Agora é preciso dividir as funções por 3. $h(x) = x + 1$ $g(x) = x^2 + x$ **Q6** – Qual é a imagem de f para $x = -1$, para $x = 4$ e para $x = 2$? **RQ6 –** A imagem para $x = -1$, $x = 2$ e $x = 4$ é zero. Aqui não muda os pontos, pois $y = 0$. *O aluno reconhece que o impacto sofrido pelas funções são diretamente proporcionais à operação realizada sobre f e, assim, faz a operação inversa para obter as funções procuradas. Ele parece reconhecer que as raízes não são alteradas a partir de a operação realizada por conta de a imagem ser zero.*

A produção do aluno fornece indícios de seu conhecimento a respeito dos procedimentos necessários para realizar a questão e de sua competência em relacioná-los – nível de conexão.

A produção R possui um erro, entretanto a professora a aceitou como uma forma de o aluno lidar com polinômios. A partir dela, buscou fazê-lo revelar sua concepção associada às transformações de uma função ao realizar uma multiplicação ou divisão por um escalar real e o conduziu para uma regulação de seu conhecimento e de sua resposta ao problema.

Ao questionar ou sugerir ao aluno que retomasse a sua produção, favoreceu desenvolvesse as competências de avaliar o que fizera e o que está fazendo. Isso é evidenciado em Q4 e RQ4, nas quais, além de seguir as orientações da professora, apresenta uma reflexão associada a sua produção.

Em RQ5, o aluno demonstrou competências do nível de reflexão. Em vez de desenvolver novamente a estratégia apresentada em R1 com as novas coordenadas do ponto B, ele conclui que realizar a operação elementar inversa feita em R nas duas funções encontradas é o suficiente para reparar o erro cometido. Isso demonstrou um raciocínio avançado e uma capacidade de refletir e planejar suas ações para além de aplicação de procedimentos.

5.1.16 Questão 16 – produção EM11CDI40

O enunciado da Questão 16 e a descrição da resolução de EM11CDI40 são apresentados nos quadros que seguem:

Usando as propriedades de divisão, determine:

a) O polinômio $p(x)$ de grau 5, tal que $p(-2) = p(-1) = p(0) = p(1) = p(2) = 0$.
b) O(s) valor(es) de n, tal que -8 é o resto da divisão de $x^2 + 5x - 2$ por $x + n$.
c) O valor de a para que $x + 6$ divida $x^4 + 4x^3 - 21x^2 + ax + 108$.

A Questão 16 é considerada uma questão que requer um nível de proficiência de reprodução por ser necessário executar operações de rotina – fatoração de polinômios, determinar raízes de um polinômio. A questão aborda conteúdos enquadrados em C3 do Quadro 4 – funções elementares –, considerada uma questão de nível médio de dificuldade em relação ao conteúdo.

Fase 1
R – (c) $x+6$ e $x^4+4x^3-21x-21x^2+ax+108$ $x=-6$ Substituindo no polinômio: $(-6)^4+4(-6)^3-21(-6)^2+a(-6)+108$ $1296+(-864)-21(36)+a(-6)+108$ $-6a=216$ $a=\frac{-216}{6}$ $a=36$ $\therefore$ Para que $x+6$ divida $x^4+4x^3-21x^2+ax+108$, a tem que possuir valor 36. *O aluno reconhece que se $x+6$ divide o polinômio, então -6 é raiz do polinômio.*
Fase 3
R1 – (a) Por $p(-2)=p(-1)=p(0)=p(1)=p(2)=0$, pode-se afirmar que $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ tem o termo sem a (incógnita) variável x com valor igual a 0. Pode ser que o polinômio seja: $-2x^5-x^4+x^2+2=0$ (b) $\begin{array}{l\|l} x^2+5x-2 & x+n \\ \hline -x^2+nx & x+5(x+n) \\ \quad 5(x+n)-2 & \\ \quad -[5(x+n)] & \\ \hline \qquad -2 & \end{array}$ *A resolução da alternativa <u>a</u> mostra que o aluno fez uma relação de igualdade entre os coeficientes do polinômio procurado e as raízes dadas no enunciado.* *O aluno apresenta como resposta a alternativa a, uma equação em vez de um polinômio* *O aluno identifica um procedimento para dividir polinômios, entretanto apresenta um erro no desenvolvimento e não mostra em sua resolução qual é a sua intenção em usar esse procedimento.*

Fase 5
Buscando compreender a relação realizada na resposta anterior e fazê-lo reconhecer que não foi uma estratégia adequada, questiono: **Q1** – Como você comprova que $p(x)$ é ou não é escrito por meio destes coeficientes? *Na expectativa de fazê-lo reconhecer as diferenças entre equação e polinômio e ainda se atentar ao que foi solicitado no item, questiono:* **Q2** – Qual é a diferença entre polinômio e equação? **R2 –** (b) $x^2+5x-2 \quad \lvert\, x+n$ $\underline{-x^2-nx} \qquad x+(5-n)$ $x(5-n)-2$ $\underline{-x(5-n)-n(5-n)}$ n^2-5n-2 $n^2-5n-2=-8$ $n^2-5n-2+8=0$ $n^2-5n+6=0$ $\Delta=(-5)^2-4.1.6$ $\Delta=25-24$ $n=\frac{5\pm 1}{2}$ $n'=\frac{5+1}{2}=3$ $n''=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$ *O aluno corrige o procedimento de divisão e encaminha a resolução do item b de forma coerente. Apesar de evidente, não formaliza uma resposta para o item.*
Fase 8
RQ2 – <u>Definição de polinômio</u>: um polinômio pode ser composto por várias expressões algébricas, desde que essas expressões envolvam apenas números, e até apresentem diversas letras, potências e coeficientes. Um polinômio é uma função. <u>Definição de uma equação</u>: uma equação é uma expressão algébrica com igualdade, onde a igualdade é satisfeita pelos seus valores de domínio. *Podendo-se concluir que um polinômio é uma função e uma equação não é uma função por conta da igualdade. *O aluno apresenta uma reflexão a respeito de polinômio e equação a partir de definições apresentadas por ele.*

Fase 9
RQ1 – Resolvendo o exercício para responder a pergunta: $p(x)$ é um polinômio de 5 grau. $p(-2) = p(-1) = p(0) = p(1) = p(2) = 0$ $(x-2)(x-1)(x)(x+1)(x+2) = 0$ $(x^2-3x+2)(x-1)(x)(x+1)(x+2) = 0$ $(x^3-3x^2+2x)(x+1)(x+2) = 0$ $(x^4-2x^3-1x^2+4x)(x+2) = 0$ $\therefore x^5-5x^3+2x^2+8x = p(x)$ * O polinômio $p(x)$ é igual a $x^5-5x^3+2x^2+8x$. *O aluno apresenta a fatoração linear do polinômio a partir das raízes dadas e a desenvolve para obter sua forma reduzida.*

Apesar de, *a priori*, a Questão 16 ser considerada como uma questão do nível de reprodução, vê-se na produção escrita R1 que o aluno não aplicou um procedimento de rotina, mas fez uma relação que julgou pertinente entre as raízes de um polinômio e seus coeficientes. Mesmo que a estratégia não tenha resolvido o problema, ele evidencia competências do nível de conexão. Se, além de desenvolver as relações citadas, o aluno tivesse incluído a tentativa de validá-las e a conclusão de falha de seu argumento, sua produção evidenciaria competências de reflexão.

A intervenção Q1 foi um questionamento que não apontou erros ou acertos, mas direcionou o aluno a uma analise de sua resposta, a uma tomada de consciência de erros e a busca de novos procedimentos que resolvem a questão. A professora orientou, mas foi o aluno que teve papel fundamental na construção da produção RQ1, na qual apresentou uma produção coerente com as hipóteses do enunciado e os conceitos envolvidos.

Após o aluno elaborar R1, a professora realizou os questionamentos Q1 e Q2 como forma de incentivá-lo a revisitar sua produção e, se assim julgasse necessário, a apresentar uma nova produção. O aluno entra em contato com essas intervenção no máximo na Fase 5, uma vez que apresentou nova produção nessa questão, entretanto apenas nas fases 8 e 9 respondeu aos questionamentos. É possível que ele tenha refletido sobre os questionamentos nas fases em que os respondeu, mas é também possível que tenha aproveitado o período entre as fases 5 e 8 para regular a sua aprendizagem.

Não é possível afirmar com certeza o que aconteceu entre as fases em que as intervenções foram feitas e as respostas elaboradas, mas RQ1 e RQ2 evidenciam que a Prova em Fases favoreceu a regulação da aprendizagem.

Em RQ2, o aluno apresentou uma definição para polinômio e uma definição[53] para equação. A partir dessas definições, desenvolveu um argumento matemático generalizado para responder Q2. Essa construção evidencia competências de reflexão.

A Prova em Fases para esse aluno foi um recurso que favoreceu revisitar definições e ver pelo menos uma de suas necessidades, conforme Freundenthal (1991), essa atividade é um dos direitos do aluno.

5.1.17 Questão 17 – produção EM11CDI21

O enunciado da Questão 17 e a descrição da resolução de EM11CDI21 são apresentados nos quadros que seguem:

De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- $f(5) = 0$
- f é uma função par.

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x+3)$. Explicite um possível conjunto dos zeros de g. Apresente argumentos que fundamentem sua resposta.

A Questão 17 é considerada uma questão que requer um nível de proficiência de conexão por ser necessário, ao resolvê-la, argumentar sobre

[53] Em situações em que o aluno apresentou conceitos e definições incorretos, a professora solicitou novas buscas e comparações em outras fases ou, ainda, em momentos oportunos inseriu o conceito ou definição em discussões de situações desenvolvidas em sala de aula, sem destacar que se tratava de um “erro” reconhecido na produção de alunos na Prova em Fases. Ressalta-se que essa intervenção podia ou não ser percebida e interpretada pelo aluno, uma vez que o professor não agia diretamente com o aluno, mas no contexto da discussão de uma situação/tarefa.

o comportamento de uma função e este argumento basear-se em hipóteses que conectam outros conceitos não tão familiares aos estudantes, como o de função par e de translação de funções. A questão aborda conteúdos enquadrados em C3 do Quadro 4 – identificação de conjuntos numéricos e funções pares – e é considerada uma questão de nível difícil de dificuldade em relação ao conteúdo.

Fase 1

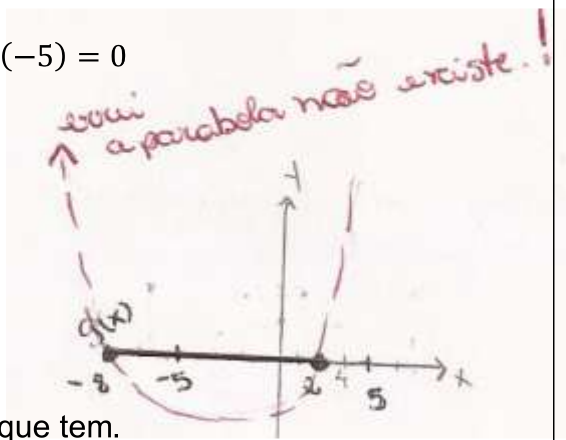
R –

f é uma função par, então se $f(5) = 0$, $f(-5) = 0$

$g(x) = f(x + 3)$

$f(\underbrace{x + 3}_{3 \text{ unidades a esquerda}})$ é uma translação

Ou também faz por tabela
$f(x + 3) = f(5)$
Porque $f(5)$ é a única solução/resultado que tem.



$$\begin{array}{l|l} x = 2 & g(2) = f(2+3) = f(5) = 0 \\ x = -8 & g(-8) = f(-8+3) = f(-5) = 0 \end{array}$$

$\downarrow$

3 unidades a esquerda.

O aluno faz uso da definição de uma função par e reconhece que $g(x)$ é a função $f(x)$ deslocada 3 unidades para a esquerda, mas não escreve o conjunto solução.

Fase 2

Na expectativa de fazê-lo prestar atenção na necessidade de apresentar uma resposta à questão, questiono:

Q1 – Qual é o conjunto solução?

RQ1 –
$CD(g(x)) =$
$g(-8) = 0$
$g(2) = 0$

Apesar de ser claro que o aluno reconhece os zeros de g, ele não especifica o conjunto solução.

Fase 3
Para fazê-lo reconhecer que o problema pede um conjunto-solução, faço o seguinte questionamento: **Q2** – Como expressar o conjunto solução do problema 17? **RQ2 –** $g(x)\ \{-8,2\}$ temos que, $g(x) = f(x+3)$, então ficará sempre 3 unidades a esquerda de $f(x)$. *Apesar de haver problemas na linguagem matemática, o aluno reconhece o conjunto-solução e ainda apresenta o comportamento do gráfico de $g(x)$ com relação à $f(x)$.*
Fase 5
Com a intenção de abordar o conceito de função ímpar, questiono: **Q3** – Se a função f fosse ímpar, daria a mesma resposta para o problema? **RQ3 –** Não, pois a função par é $f(x) = f(-x)$ e na função ímpar $f(x) = -f(-x)$ *Apesar de reconhecer a definição de função ímpar, o aluno não apresenta uma resposta usando as condições da questão, $f(5) = 0$.*
Fase 8
Para fazê-lo refletir sobre as implicações caso f fosse ímpar, questiono: **Q4** – Qual seria a resposta no caso de f ser uma função ímpar? **RQ4 –** Neste caso seria a mesma coisa, pois os resultados que tenho da $f(x)$ são iguais a zero, então não faz diferença ser par ou ímpar. *O aluno refaz sua resposta anterior incluindo o fato de as condições serem baseadas nas raízes de uma função ímpar.*

Apesar da Questão 17 ser considerada uma questão que requer um nível de competência de conexão, a produção escrita R revela competências de reflexão – o aluno compreendeu o enunciado da questão, escolheu uma estratégia que articula o conceito de função par com o conceito generalizado de deslocamento de funções.

Em R e RQ1, apesar de ser evidente a solução, o aluno não escreveu uma resposta que se refira à ação solicitada no enunciado: explicitar um conjunto-solução. Por meio de Q2, a professora procurou orientar o aluno para a necessidade de fazer um fechamento de sua produção, ou seja, a necessidade de apresentar uma resposta à ação exigida no enunciado da questão.

Em Q3 vê-se uma provocação da professora ao aluno na direção de incentivá-lo a reanalisar a sua resposta e o valor de suas hipóteses, atendendo também ao princípio de uma avaliação da aprendizagem: dar ao aluno a oportunidade de mostrar as novas relações que pode fazer, a partir do seu conhecimento de funções pares e ímpares, e servir para promover alguma aprendizagem. Em RQ3, entretanto, o aluno não apresentou uma discussão a respeito dos impactos da troca da hipótese no enunciado da questão, apenas revelou que conhece a definição de uma função ímpar.

A Prova em Fases inclui múltiplas e variadas oportunidades para o aluno mostrar e documentar suas realizações. Por exemplo, nessa produção, a intervenção Q4 é mais uma oportunidade dada ao aluno para refletir e argumentar sobre os conceitos de função par e de função ímpar no contexto da questão, e RQ4 evidencia que essa oportunidade foi aproveitada.

5.1.18 Questão 18 – produção EM11CDI08

O enunciado da Questão 18 e a descrição da resolução de EM11CDI08 são apresentados nos quadros que seguem:

Seja f a função de domínio $[1, +\infty]$, definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$. Determine o valor de $f^{-1}(3)$.

A Questão 18 é considerada uma questão que requer um nível de proficiência de reprodução ao resolvê-la, por ser necessário executar operações de rotina e considerar o conceito de função inversa relativamente familiar aos alunos. A questão aborda conteúdos enquadrados em C3 do

Quadro 4 – Funções elementares, injetivas, sobrejetivas, inversas. Considerada uma questão de nível fácil de dificuldade em relação ao conteúdo.

Fase 1

R –

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{3-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

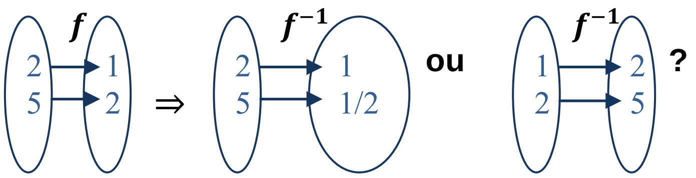
O aluno parece reconhecer a função inversa como a função inversa multiplicativa, ou seja, $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Fase 2

Na expectativa de reconhecer o que o aluno entende por função inversa, questiono:

Q1 - O que significa encontrar a inversa de uma função?

Q2 -



R1 –

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{3-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

O aluno não responde aos questionamentos e, apesar de não confirmar seu entendimento com relação a funções inversas, mantém indícios em sua produção que reconhece $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$

Fase 4

R2 –

$f(x) = \sqrt{x-1}$
$(x)^2 = (\sqrt{x-1})^2$
$x^2 = x - 1$
$y = x^2 - 1$
$f^{-1}(3) = x^2 - 1$
$\qquad = 3^2 - 1 = 9 - 1$
$f^{-1}(3) = 8$

O aluno refaz a questão e apresenta uma lei de formação para a função inversa. Em sua produção não é possível observar o que ele entende por função inversa. Parece ter realizado a aplicação de um procedimento de rotina, sem reflexão do conceito envolvido, pois não valida a sua resposta.

Fase 5

Com a intenção de verificar se o aluno reconhece a relação entre f e f^{-1} questiono:

Q3 – Você consegue tirar a prova real deste resultado?

RQ3 – Não.

Fase 8

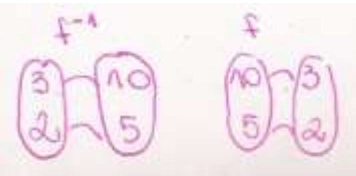
Diretamente solicito que confira os seus cálculos, a partir disso e dos questionamentos anteriores espero que perceba que $f^{-1}(3) = 10$ e, consequentemente, é preciso ter $f(10) = 3$.

Q4 – Confira os "jogos" de sinais [R2] ?

RQ4 –

$x^2 = x - 1$
$y = x^2 + 1$
$f^{-1}(3) = 3^2 - 1$
$f^{-1}(3) = 10$

Na função inversa, o valor de $f^{-1}(3)$ é 10. Para comprovar se está certo, o resultado (imagem) tem que ser substituído na função original para retornar o valor do domínio.
Exemplo:



O aluno não só corrige sua produção como também retoma o conceito de função inversa.

Essa produção escrita evidencia, ao comparar R e RQ4, que o aluno regulou o seu conceito de função inversa, vide R e RQ4. Não é possível afirmar que foram as intervenções escritas que favoreceram essa regulação, mas é próvavel que tenham apontado pistas para a necessidade de pesquisar a respeito do conceito de função inversa e de procedimentos de rotina no espaço de tempo entre os dias da prova.

As produções R, R1 e R2 evidenciam a busca do aluno por um procedimento de rotina que permitisse encontrar a resposta da questão, ou seja, competências do nível de reprodução. Entretanto, é possível ver nessa interação escrita, destaque em RQ4, que o aluno desenvolveu competências de conexão, pois não só executou um procedimento de rotina, mas também o conectou ao conceito relacionado e validou a sua resposta.

5.1.19 Questão 19 – produção EM11CDI12

O enunciado da Questão 19 e a descrição da resolução de EM11CDI12 são apresentados nos quadros que seguem:

Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = x + 1$ e seja g a função de domínio $\mathbb{R}^*$, definida por $g(x) = \frac{1}{x}$. Para certo número real a, tem-se $(g \circ h)(a)$ = $\frac{1}{9}$. Qual o valor de a?

A Questão 19 é considerada uma questão que requer um nível de proficiência de reprodução ao resolvê-la, por ser necessário executar operações de rotina e considerar o conceito de funções compostas, relativamente familiar aos alunos. A questão aborda conteúdos enquadrados em C3 do Quadro 4 – funções compostas –, e é considerada uma questão de nível médio de dificuldade em relação ao conteúdo.

Fase 2
R – $x + 1\,.\dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x}.a = \dfrac{1}{9}$ $\dfrac{ax+1}{x} = \dfrac{1}{9}$ $x = 9ax + 1$ $\dfrac{x(1+\frac{1}{x})}{x} = \dfrac{1}{9}$ $1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{9}$ $\dfrac{x+1}{x} = \dfrac{1}{9}$ *O aluno não reconhece a operação de composição de funções, parece que identifica o símbolo ∘ por multiplicação de funções, e ainda estabelece igualdades e simplificações incorretas.*
Fase 4
Com a intenção de fazê-lo reparar na operação em questão – composição de função, faço a seguinte observação: **Q1** – Essa operação [∘] não é multiplicação de funções, mas a composição de funções. **RQ1 –** $h(x) = x + 1$ $g(x) = \dfrac{1}{x}$ $(h \circ g)(x) = h(g(x))$ $h(x) = x + 1$ $h\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x} + 1$ $h\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x+1}{x}$ $(g \circ h)(x) = g\big(h(x)\big)$ $g(x) = \dfrac{1}{x}$ $g(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$ $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{9}$ $x + 1 = 9$ $x = 8 \therefore a = 8$ *O aluno refaz a questão obedecendo à composição das funções e usando os dados no enunciado da questão.*

A apreciação da produção escrita R permitiu à professora intervir na compreensão do aluno acerca do enunciado da questão, evidenciado em Q1. O comentário da professora direcionou o olhar do aluno para o conceito de composição, e o recurso Prova em Fases oportunizou ao aluno demonstrar a sua capacidade de desenvolver uma nova resposta mais coerente com os objetivos da questão.

A clareza do comentário serviu para que o aluno autonomamente compreendesse e prosseguisse, ou seja, serviu ao processo de regulação da aprendizagem do estudante.

Essa nova resposta permitiu que o aluno demonstrasse saber um procedimento de rotina de composição de funções. Realizar a Prova em Fases oportunizou ao aluno demonstrar mais o que sabia do que aquilo que não sabe – terceiro princípio de elaboração de provas de De Lange (1987).

5.1.20 Questão 20 – produção EM11CDI05

O enunciado da Questão 20 e a descrição da resolução de EM11CDI05 são apresentados nos quadros que seguem:

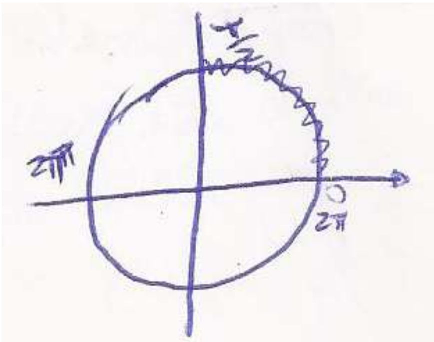
Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de $(3 - \frac{1}{tg\ \alpha})$ sabendo que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e que $cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{4}{5}$.

A Questão 20 é considerada uma questão que requer um nível de proficiência de conexão ao resolvê-la, por ser necessário utilizar relações trigonométricas e, concomitantemente, analisar o sinal de funções trigonométricas e resolver equações. A questão aborda conteúdos enquadrados em C3 do Quadro 4 – conjuntos numéricos, intervalos de reta e funções trigonométricas –, e é classificada como uma questão de nível difícil de dificuldade em relação ao conteúdo.

Fase 1
R-

$cos\ a \cos b + sen\ a\ sen\ b$

$cos\ \frac{3\pi}{2}.\cos\alpha + sen\ \frac{3\pi}{2}.sen\ \alpha$



$cos\ 270.\cos\alpha + sen\ 270\ .sen\ \alpha$

$0.\cos\alpha - 1.sen\ \alpha = -\frac{4}{5}$

$-sen\ \alpha = -\frac{4}{5} \quad (-1)$

$sen\ \alpha = \frac{4}{5}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5}.\frac{5}{3} = \frac{4}{3} = tg\ \alpha$

$(cos^2) + (sen^2) = 1$

$cos^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

$cos^2 + \frac{16}{25} = 1$

$cos^2 = 1 - \frac{16}{25}$

$cos^2 = \frac{9}{25}$

$cos = \sqrt{\frac{16}{25}}$

$cos = \frac{3}{5}$

$3 - \frac{1}{\frac{4}{3}} = 3 - \frac{1}{1}.\frac{3}{4} = \frac{3}{1} - \frac{3}{4} = \frac{12-3}{4} = \frac{9}{4}$

O aluno reconhece a relação do cosseno da diferença de arcos, as relações fundamentais da trigonometria, o intervalo que contém a solução no círculo trigonométrico e faz uso de uma identidade trigonométrica. O aluno não considera a solução negativa da equação e apresenta problemas na escrita, escreve cos, sen sem relacionar a um arco. Ele também não escreve a resposta da questão.

Fase 2
Para fazê-lo prestar atenção na necessidade de apresentar uma resposta para questão, questiono: **Q1** – Escreva a resposta do seu exercício. **RQ1 –** O valor de $\left(3-\frac{1}{tg\ \alpha}\right)$ é $\frac{9}{4}$. *Para fazê-lo relacionar as raízes de uma equação com intervalo que contém a solução, questiono:* **Q2** – Existe a possibilidade de $cos\alpha = \frac{-3}{5}$? **RQ2 –** Pela equação pode, mas no enunciado temos como condição o intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (primeiro quadrante) em que o cosseno tem seus valores positivos.
Fase 3
Para fazê-lo identificar os problemas de escrita de notação questiono: **Q3** – O que significa cos? **RQ3 –** cosseno
Fase 5
Ainda com a intenção de modificar a sua escrita, questiono: **Q4** – Faz sentido escrever a equação $(cos^2) + (sen^2) = 1$? **RQ4 –** Sim, pq está é a lei fundamental, já que eu tenho o cosseno aplicando na lei eu acho o seno. *O aluno não compreende a intenção das últimas perguntas e não reconhece problemas em sua escrita.*

Fase 8
Na expectativa de fazê-lo refletir a respeito de sua escrita, questiono diretamente: **Q5** – Por que em alguns momentos você carrega o α (escreve $\cos\alpha$, $sen\ \alpha$...) e em outros apenas cos, sen ...? **RQ5 –** Falta de atenção, fiz esta questão em dias diferentes. É preciso escrever um “valor” p/ cos e sen e outros arcos, pois só assim sabemos p/ qual ang estamos falando. *Ao ser questionado diretamente a respeito da escrita, o aluno reconhece os problemas e os corrige.*

O aluno, em R, revela competências de conexão e apresenta uma resposta correta para a questão, entretanto sua produção traz problemas com a simbologia e não traz justificativa para o descarte de uma das raízes de uma equação.

A Prova em Fases, por meio da análise da produção escrita foi um recurso que permitiu ao aluno reconhecer uma falta de atenção e apresentar à professora seu conhecimento a respeito da necessidade de um argumento para uma função trigonométrica e das validações que precisaram ser feitas no lidar com as raízes de uma equação, respectivamente, evidenciado em RQ5, RQ2.

Apesar de o aluno se atentar aos problemas de escrita, o mais forte são as oportunidades que teve para refletir sobre o seu trabalho e aspectos atrelados a ele, favorecendo à professora conhecer mais detalhadamente o caminho seguido para a obtenção da resposta da questão, o que dá indícios de que a professora preocupou-se mais com o processo de resolução do aluno, do que com a resposta.

5.1.21 Questão 21 – produção EM11CDI30

O enunciado da Questão 21 e a descrição da resolução de EM11CDI30 são apresentados nos quadros que seguem:

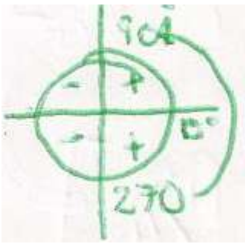
Considere, em $\mathbb{R}$, a equação trigonométrica $cos\, x\ = 0{,}9$. Justifique a existência ou não de solução para esta equação em cada um dos seguintes intervalos: a) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ b) $[0, \pi]$ c) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ d) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

A Questão 21 é considerada uma questão que requer um nível de proficiência de conexão ao resolvê-la, por ser necessário interpretar e relacionar uma linguagem simbólica e gráfica de funções trigonométricas. A questão aborda conteúdos enquadrados em C3 do Quadro 4 – conjuntos numéricos, intervalos reais e funções trigonométricas –, e é considerada uma questão de nível médio de dificuldade em relação ao conteúdo.

Fase 3

R –

a) $\frac{\pi}{2} = 90^0 \quad -\frac{\pi}{2} = 270^0$

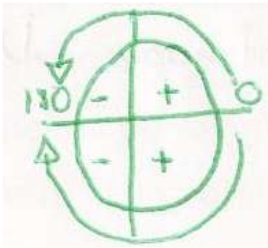


$\cos x = 0{,}9$

$\cos 90^0 = 0$
$\cos 270 = 0$

Não existe pois os dois cos tem o mesmo valor de $= 0$
Não há intervalo.

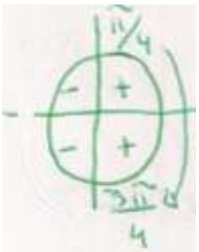
b)



$\cos 0 = 1$
$sen\ 0 = 0$
$\pi = 180$
$\cos 180 = -1$
$\cos 0 = 1$

Existe pois $\underset{\cos 180}{\underset{\downarrow}{-1}} < 0{,}9 < \underset{\cos 0}{\underset{\downarrow}{1}}$

c) $\frac{\pi}{4} = 45^0 \quad \frac{3\pi}{4} = 135^0$



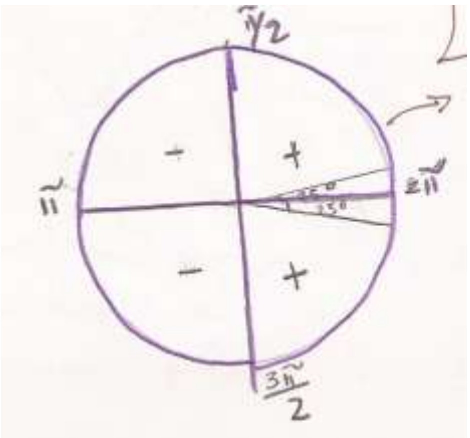
Não existe solução para este intervalo pois ele vai $0{,}7$ a ele mesmo.

O aluno estabelece uma relação de igualdade entre radiano e graus. Determina a existência ou não da solução da equação a partir da criação de intervalos cujas extremidades são os valores do cosseno nas extremidades dos intervalos de cada alternativa, não se atenta para o fato de a função cosseno não ser estritamente crescente.

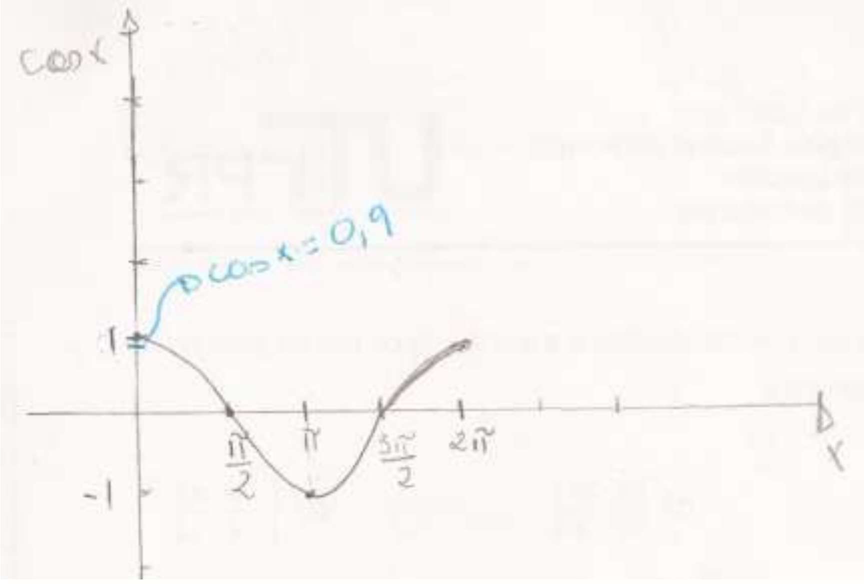
Fase 5
Esperando fazê-lo utilizar o comportamento gráfico da função cosseno para a obtenção da solução da equação e para reavaliar a resposta anterior, sugiro:

Q1 – Construa o gráfico de $f(x) = cos\, x, x \in [0,2\pi]$ e interprete a solução da equação $cos\, x = 0,9$ a partir desse gráfico.

RQ1 –



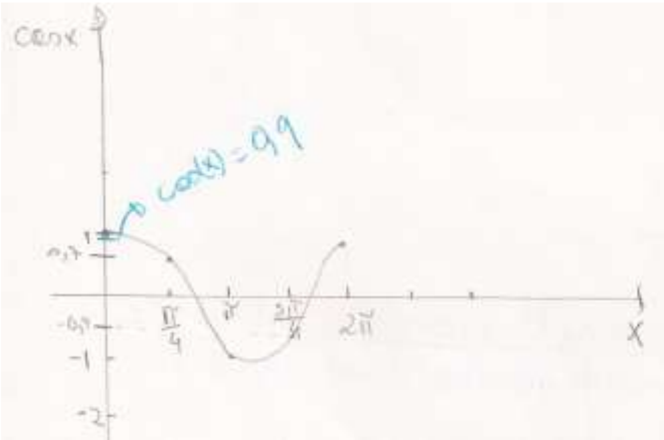
O aluno não constrói o gráfico da função, mas um círculo trigonométrico, no qual identifica graus como unidade de um ângulo e radiano como comprimento de arco. Neste círculo parece reconhecer a existência de duas soluções para a equação, mas não as escreve claramente.

Fase 7
Ainda na expectativa de fazê-lo identificar as raízes a partir da análise gráfica, retomo a sugestão: **Q2** – Faça esse $[y = cos\,x]$ gráfico para destacar sua interpretação realizada a partir do ciclo trigonométrico.  a) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ Não existe porque $cos\,x$ estão no intervalo $[0,0]$ b) $[0, \pi]$ Existe Está no intervalo de $cos\,x\ =\ [0,1]$ c) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ Não existe. Está no intervalo $cos\,x\ =\ [-1; 0,7]$ d) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ Não existe. Está no intervalo $cos\,x\ =\ [-1; 0,7]$ *Apesar de ter construído o gráfico da função $y =\ cos\,x$ e ter destacado o valor de $0,9$ no eixo-y, ele não marca os pontos que geram a solução da equação. Ele mantém a construção de intervalos a partir das extremidades dos intervalos de cada alternativa.*

Fase 9
Com a intenção de reforçar a sua leitura do gráfico e guiá-lo em sua análise, questiono e sugiro:

Q3 – A partir deste gráfico você mantém suas respostas anteriores? Marque todos os pontos que possuem o valor de $y = 0{,}9$.

RQ3 –



A partir do novo gráfico eu não mantenho minhas respostas anteriores. Com o novo gráfico fui capaz de fazer uma nova análise.

Agora vejo que tem dois x que tem y igual a 0,9. Os mesmos do ciclo trigonométrico.

a) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Existe, o valor de y é de 0 até 1.

b) $[0, \pi]$

Existe, o valor de y é de 0 até 1 e depois de 0 a -1.

c) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

Não existe. O valor de y diminui, pra baixo de $0{,}7$.

d) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Existe. O valor de y decresce de 1 até $0{,}7$.

O aluno demonstra ter relacionado o comportamento do gráfico de $y = \cos x$ à busca de solução da equação. Sua análise foi para a função cosseno definida no intervalo de $[0{,}2\pi]$.

O aluno em R apresenta uma produção que evidencia a execução de um procedimento de rotina para a resolução da Questão 21, competências do nível de reprodução. A partir de Q1, a professora busca fazê-lo perceber que, mais do que aplicação de um procedimento, é preciso analisar o comportamento da função cosseno e relacioná-lo com a equação $cos\, x = 0{,}9$, competências do nível de conexão.

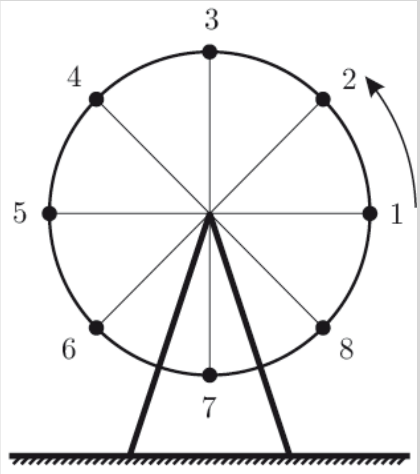
Essa interação escrita tornou-se uma rica fonte de informação, servindo para a professora formular hipóteses a respeito do raciocínio do aluno e, assim, por meio de intervenções escritas, orientá-lo na sua regulação da aprendizagem, o que foi evidenciado em RQ3.

O aluno, ao escrever "*Agora vejo que tem dois x que tem y igual a 0,9. Os mesmos do ciclo trigonométrico*", expressa o sujeito consciente das ações e procedimentos adotados e dos resultados obtidos.

5.1.22 Questão 22 – produção EM11CDI26

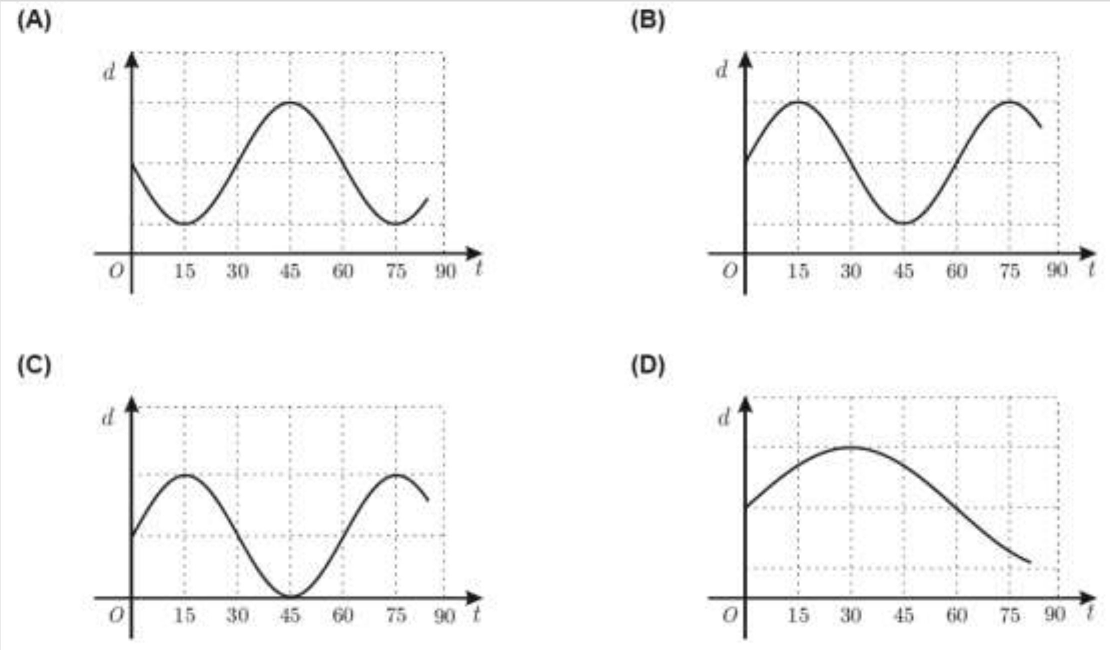
O enunciado da Questão 22 e a descrição da resolução de EM11CDI26 são apresentados nos quadros que seguem:

Na figura a seguir está representada uma roda gigante de um parque de diversões.



Um grupo de amigos foi andar nessa roda. Depois de todos estarem sentados nas cadeiras, a roda começou a girar. Uma das garotas, a Beatriz, ficou sentada na cadeira número 1, que estava na posição indicada na figura em tela, quando a roda começou a girar.

A roda gira no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e demora um minuto para dar uma volta completa. Seja d a função que fornece a distância da ***cadeira 1*** ao solo, t segundo após a roda ter começado a girar. Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função d?



Justifique a opção escolhida e a negação das outras.

A Questão 22 é considerada uma questão que requer um nível de proficiência de conexão ao resolvê-la, por ser necessário traduzir uma situação por meio de uma representação gráfica. A questão aborda conteúdos enquadrados em C3 do Quadro 4 – conjuntos numéricos, intervalos reais e funções trigonométricas. É considerada uma questão de nível médio de dificuldade em relação ao conteúdo.

Fase 3
R – Alternativa c). A a) está errada, pois a roda gira no sentido anti-horário e o gráfico contradiz a imagem fornecida em que deveria ter aumento da distância e não seu abaixamento. A b) está errada, pois o gráfico deveria chegar até o solo. A d) está errada, pois no gráfico mostra que a roda vai demorar mais de um minuto para dar a volta. *O argumento do aluno para justificar o erro das alternativas a, b e d parece basear-se em uma roda gigante que toca o solo.*
Fase 5
Na expectativa de fazê-lo refletir a respeito do contexto do problema e das implicações de a roda gigante tocar no solo, questiono. **Q1** – Justifique essa afirmação [o gráfico deveria chegar até o solo]. **RQ1 –** Por ser um brinquedo de parque ele deve passar perto do solo para que possa subir, assim tendo ele que ter seu ponto de mínimo no solo. *Apesar de o aluno reconhecer a roda gigante como um brinquedo de um parque, a partir da resposta, parece que o aluno não identifica o papel da cadeira 1 na função d.*
Fase 7
Em busca de fazê-lo constatar a necessidade de haver espaço entre a roda gigante e o chão para as cadeiras, questiono. **Q2** – Então essa cadeira vai arrastar no chão? **RQ2 –** Não, tendo que ter uma altura mínima do solo a alternativa (B) seria a mais coerente. *O aluno reconhece o papel da cadeira na escolha da alternativa que traduz a situação e retifica sua resposta.*

Em sua produção escrita R, o aluno apresentou uma argumentação para a tradução gráfica que julgou coerente para a situação, competências do nível de conexão.

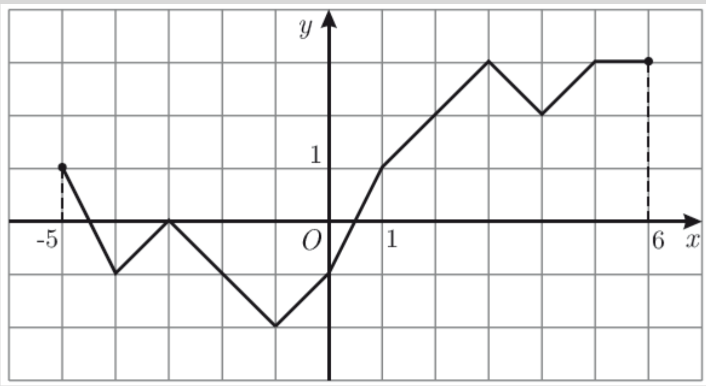
Entretanto, por meio de Q1 e Q2, a professora buscou atentá-lo para a necessidade de refletir acerca de sua resposta, de identificar os erros de interpretação e superá-los, o que favoreceu ao aluno regular a sua produção escrita. Em RQ1 e RQ2, o aluno revisita o enunciado da questão e busca comunicar o que realmente foi solicitado.

A interação escrita promovida oportunizou à professora uma investigação e uma análise de qual foi o problema resolvido pelo aluno (no caso, *a priori* o aluno não incluiu a cadeira), na intenção de guiá-lo em direção ao problema que precisava resolver. Isso pode ter favorecido ao aluno um desenvolvimento de competências de compreensão escrita, tanto no nível de redação como de interpretação.

5.1.23 Questão 23 – produção EM11CDI27

O enunciado da Questão 23 e a descrição da resolução de EM11CDI27 são apresentados nos quadros que seguem:

O gráfico de uma função f de domínio $[-5,6]$ está representado, em referencial ortogonal xOy, na figura a seguir. Qual o contradomínio de f?



a) Indique todos os números reais cujas imagens, por meio de f, são iguais a -1.

b) Indique o conjunto solução da condição $f(x) > 2$. Apresente a sua resposta como união de intervalos de números reais.

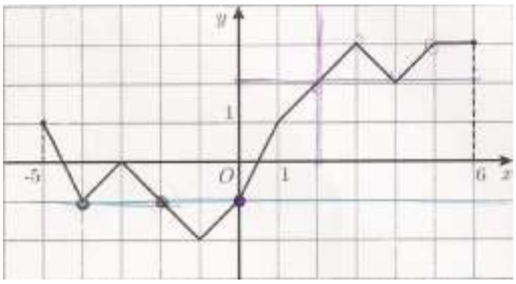
A Questão 23 é considerada uma questão que requer um nível de proficiência de reprodução ao resolvê-la, por ser relativamente familiar aos estudantes e ser necessário reproduzir conhecimentos frequentemente praticados. A questão aborda conteúdos enquadrados em C2 do Quadro 4 – conjuntos numéricos, sistema cartesiano, função e seus elementos –, e é considerada uma questão de nível fácil de dificuldade em relação ao conteúdo.

Fase 3
R – a) $[-2{,}3]$ b) 0 *O aluno apresenta uma resposta adequada na alternativa a, na qual evidencia saber reconhecer o contradomínio de uma função. Na alternativa b apresenta apenas uma solução e não é possível saber o que o fez identificar somente esse valor.*
Fase 5
Na expectativa de orientá-lo na resolução do item b, solicito: **Q1** – Marque os pontos no gráfico tais que $f(x) = -1$. **RQ1 –** $(0, -1)$ **R1 –** c) $(x \in \mathbb{R}\ /\ x > 2)$ *O aluno apresenta apenas um ponto em que $f(x) = -1$. Pode ser que o aluno tenha buscado por pontos sobre o eixo-y.* *Apresenta uma solução para a alternativa c, e os traços no gráfico dão indícios de como a obteve, entretanto há problemas no uso de notações, no reconhecimento de valores em que $f(x)$ é estritamente maior que 2 e na restrição do domínio da função.*

Fase 7
Com vistas a orientá-lo no que se espera com o item b, solicito:

Q2 – Trace a reta horizontal $y = -1$ e verifique em quais pontos ela intercepta o gráfico f. Em que conhecer esses pontos altera a sua resposta?

RQ2 –



$P_1(-4, -1)$; $P_2(-2, -1)$; $P_3(0, -1)$
Resposta da alternativa b.

O aluno reconhece a relação entre o questionamento da professora e apresenta uma nova resposta para o item contendo todos os pontos em que $f(x) = -1$.

Na expectativa de fazê-lo utilizar uma simbologia correta de conjuntos numéricos e refletir acerca da solução apresentada no item c, sigo com os questionamentos:

Q3 – Nesta linguagem de conjuntos, a notação mais adequada são os parênteses?

RQ3 –
Não, a mais adequada são as chaves: $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 2\}$.

Q4 – Qual é o domínio desta função?

RQ4 –
$[-5,6]$ intervalo de x.

Q5 – Conhecer esse domínio altera sua resposta na alternativa c?

RQ5 –
$\{x \in \mathbb{R} \ / \ 2 < x < 6\}$.

Q6 – Qual é o valor de $f(x)$ quando $x = 4$? A resposta a esta alternativa tem algum impacto na resolução da questão?

RQ6 –
$f(x) = 2$
O domínio da função é $\{x \in \mathbb{R} \ / \ 2 < x < 6, x \neq 4\}$.

O aluno adapta a resposta às condições apresentadas na questão.

A interação escrita gerada no desenrolar da Questão 23 pelo aluno EM11CDI27 e a professora proporcionou ao estudante rever a sua produção, corrigir erros e aperfeiçoar o uso de simbologia para notação de conjuntos.

As intervenções realizadas foram claras e compreendidas pelo aluno, uma vez que não só lidou com elas, como também as usou para reanalisar e apresentar respostas aos itens da questão.

Em RQ3, RQ5, RQ7, o aluno apresentou um repensar e alterações em direção a uma resposta coerente ao que foi solicitado a partir do gráfico dado, o que pode ter favorecido, além de uma adaptação de resposta, uma regulação da aprendizagem.

Apesar de a interação escrita ter priorizado mecanismos de reprodução, ao invés da compreensão dos conceitos matemáticos, essa produção mostra que é possível utilizar a própria produção do aluno para encaminhá-lo em direção ao que se deseja que ele faça.

5.1.24 Questão 24 – produção EM11CDI41

O enunciado da Questão 24 e a descrição da resolução de EM11CDI41 são apresentados nos quadros que seguem:

Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são solução da inequação $log_3(7x+6) \geq 2 + log_3(x)$. Apresente a sua resposta usando a notação de intervalos de números reais.

A Questão 24 é considerada uma questão que requer um nível de proficiência de conexão para resolvê-la, por ser necessário mais do que procedimentos de rotina, ser preciso fazer uso da condição de existência da função para obter um conjunto-solução. A questão aborda conteúdos enquadrados em C1 e C3 do Quadro 4 – conjuntos numéricos e funções logarítmicas – sendo considerada uma questão de nível fácil de dificuldade em relação ao conteúdo.

Fase 3
R – $log_3(7+6) \geq 2 + log_3(x)$ *Resolvendo uma parte da inequação: $log_3 9 = 2$, com isso: $log_3 9 + log_3(x)$. Com isso na mesma base: $log_3 9x$. Resolvendo a inequação: $log_3(7+6) - log_3 9x \geq 0$ $log_3 13 - log_3 9x \geq 0$ • Como está subtraindo, usando uma das propriedades do log, $log \frac{13}{9x} \geq 0$ $\frac{13}{9x} \geq 1$ $\therefore \frac{13}{9} \geq x$ *Pode-se concluir que $\{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 < x \geq \frac{13}{9}\}$. Ignorar tudo, feito abaixo! *Resolução da 24: $log_3(7x+6) \geq 2 + log_3(x)$ $log_3(7x+6) \geq 0 + log_3 9x$ $log_3(7x+6) - log_3 9x \geq 0$ Como está na mesma base: $7x + 6 - 9x \geq 0$ $-2x + 6 \geq 0$ $x \geq \frac{6}{2}$ $x \geq 3$ *Pode-se concluir que $\{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 < x \geq 3\}$. *O aluno inicia a resolução do item utilizando uma inequação diferente da que foi solicitada no enunciado da questão, entretanto reconhece o erro e inicia uma nova solução. O aluno faz uso da propriedade da soma de logaritmos de mesma base, mas não utiliza a propriedade da diferença de logaritmos de mesma base e, para finalizar a resolução da inequação, decide trabalhar somente com os logaritmandos, sem refletir sobre os impactos que isso causa na desigualdade.*

Fase 5
Na expectativa de fazê-lo comunicar a propriedade utilizada e fazê-lo reparar que, se há uma propriedade para a soma, então na diferença haverá uma equivalente, questiono: **Q1** – Qual foi a propriedade utilizada nessa passagem [de $log_3(7+6) \geq 2 + log_3(x)$ para $log_3(7+6) \geq 0 + log_3 9x$]? **RQ1 –** Quando os log da soma possuem a mesma base, pode-se multiplicar os dois termos e obter um só log. *Além de reconhecer a necessidade de utilizar a propriedade para a diferença de logaritmos de mesma base, é preciso que perceba a condição do logaritmando ser maior que 1 para que o logaritmo seja maior que 0.* **Q2** – Qual foi a propriedade utilizada para se concluir que $7x+6-9x \geq 0$? **RQ2 –** A propriedade de log que foi utilizada é que se o log está na mesma base em toda a soma você pode somar os termos, sem utilizar o log no momento, para obter o resultado. *O aluno, em sua resolução, desconsidera a função que o log tem na desigualdade.*
Fase 8
Para fazê-lo refletir acerca da resposta anterior, questiono: **Q3** – Então, $\log a + \log b = \log\ (a+b) = a+b$? Exemplifique numericamente. **RQ3 –** Exemplificando numericamente: $log\ a +\ log\ b \neq log\ (a+b)$ $log\ 10 + log\ 100 \neq log\ (10+100)$ $1+2 \neq log\ (10+100)$ $3 \neq 2{,}041$ *Concluindo então que $log\ a +\ log\ b \neq log\ (a+b)$. *O aluno dá um exemplo para mostrar que a igualdade apresentada não é verdadeira, entretanto parece não fazer relação com os erros apresentados em sua produção.*

Fase 10
Para guiá-lo em sua produção, alertando-o para os erros cometidos, e fazê-lo refletir para superá-los, sigo com os questionamentos: **Q4** – Que propriedade pode ser utilizada para calcular $log\ a - logb$? Essa propriedade pode ser usada em sua resolução? **RQ4 –** $log\ a - logb = log\frac{a}{b}$. Pode ser usada. **Q5** – Investigue o comportamento da função $y = log\,x$. Em especial, apresente os valores de x em que $y > 0$, $y = 0$ e $y < 0$ e relacione o resultado de sua investigação com sua resolução. **RQ5 –** O valor de x tem que ser maior que zero e para cima de 1 é maior que zero, em 1 é zero e para baixo é negativo. **R2 –** *corrigindo: $log_3(7x + 6) - log_3 9x \geq 0$ $log_3\dfrac{(7x+6)}{9x} \geq 0$ Como quer valores maiores que zero: $\dfrac{(7x+6)}{9x} \geq 1$ $7x + 6 \geq 9x$ $-9x + 7x \geq 6$ $-2x \geq 6$ $x \leq 3$ *Pode-se concluir que $\{x \in \mathbb{R}\ /\ 0 < x < 3\}$. *O aluno adapta as propriedades utilizadas e traz para a sua solução a condição de existência do logaritmo.*

A produção escrita R evidencia que o aluno lidou no primeiro momento com a questão por meio de procedimentos de rotina, sem ter a preocupação de refletir a respeito das condições de existência da função logaritmo e seu comportamento, ou seja, por meio de competências do nível de reprodução.

A intervenção Q5 fez o aluno se atentar para a necessidade de, além de aplicar procedimentos diretamente, fazer uso do comportamento da função logarítmica na sua produção, evidenciado em RQ5. Nessa produção, o aluno mobilizou competências do nível de conexão.

O aluno autonomamente reanalisou a sua resposta, prosseguiu e demonstrou a sua capacidade de organizar uma resposta coerente, evidenciado ao comparar R e R2. Essas produções sugerem que a Prova em Fases foi um instrumento de avaliação que favoreceu um processo de comunicação escrito em que o aluno teve a oportunidade de regular a sua aprendizagem orientado pelas intervenções escritas da professora e de revelar à professora mais o que sabe do que aquilo que não sabe.

5.1.25 Questão 25 – produção EM11CDI42

O enunciado da Questão 25 e a descrição da resolução de EM11CDI42 são apresentados nos quadros que seguem:

Na década de sessenta do século passado, uma doença infecciosa atacou a população de algumas regiões do planeta. Admita que, ao longo dessa década e, em qualquer uma das regiões afetadas, o número, em milhares, de pessoas que estavam infectadas com a doença t anos após o início de 1960, é dado, aproximadamente, por

$$I(t) = \frac{3e^{kt}}{1 + pe^{kt}}$$

em que k e p são parâmetros reais.

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar cálculos numéricos.

A) Admita que, para certa região, $k = \frac{1}{2}$ e $p = 1$.

Determine o ano em que o número de pessoas que estavam infectadas, nessa região, atingiu 2500.

Sempre que, nos cálculos intermediários, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

A Questão 25 é considerada uma questão que requer um nível de proficiência de conexão ao resolvê-la, por ser necessário fazer uso de um modelo para analisar uma situação, conectando as propriedades de funções exponenciais e logarítmicas aos dados fornecidos no enunciado. A questão aborda conteúdos enquadrados em C3 do Quadro 4 – Funções e propriedades exponenciais e logarítmicas. É considerada uma questão de nível difícil de dificuldade em relação ao conteúdo.

Fase 3
R – $I(t) = \frac{3e^{kt}}{1+pe^{kt}} \Rightarrow 2500 = \frac{3e^{\frac{1}{2}t}}{1+(1)(e^{\frac{1}{2}t})} \Rightarrow 2500 = \frac{3e^{\frac{1}{2}t}}{1+e^{\frac{1}{2}t}}$ $\Rightarrow 2500 + 2500e^{\frac{1}{2}t} = 3e^{\frac{1}{2}t} \Rightarrow 2497e^{\frac{1}{2}t} = -2500$ $e^{\frac{1}{2}t} = \frac{-2500}{2497}$ $(e^{\frac{1}{2}t})^2 = (-1{,}0012)^2$ $e^t = 1{,}0012$ *A produção do aluno não apresenta a conversão 2500 pessoas para $2{,}5$ milhares de pessoas e pode ser que o aluno não tenha reconhecido a necessidade de compor a função inversa da função exponencial, a logarítmica, em ambos os membros para poder obter o valor de t.*
Fase 6
Na expectativa de fazê-lo reconhecer um meio de se resolver uma equação exponencial, questiono: **Q1** – Qual função é inversa da função exponencial? **RQ1 –** O logaritmo *Para fazê-lo reparar no fato de o modelo responder o número de infectados em milhares, questiono.* **Q2** – [Em milhares] Isso muda sua resolução?

R2 –

A) $I(t) = \frac{3e^{kt}}{1+pe^{kt}} \Rightarrow 2{,}5 = \frac{3e^{\frac{1}{2}t}}{1+(1)(e^{\frac{1}{2}t})} \Rightarrow 2{,}5 = \frac{3e^{\frac{1}{2}t}}{1+e^{\frac{1}{2}t}}$

$\Rightarrow 2{,}5 + 2{,}5e^{\frac{1}{2}t} = 3e^{\frac{1}{2}t} \Rightarrow 2{,}5 = 0{,}5e^{\frac{1}{2}t}$

$\Rightarrow (e^{\frac{1}{2}t})^2 = (5)^2$

$\Rightarrow e^t = 25$

$\Rightarrow e^{\log e^t} = 25 \Rightarrow t = 25$

B) $I(t) = \frac{3e^{kt}}{1+pe^{kt}} \Rightarrow 1 = \frac{3e^{k.1}}{1+pe^{k.1}} \Rightarrow 1 + pe^k = 3e^k$

$\Rightarrow pe^k - 3e^k = -1$

$\Rightarrow (p-3)e^k = -1$

$\Rightarrow (p-3)e^{log_e^k} = -1$

$\Rightarrow (p-3)k = -1$

$\Rightarrow k = \dfrac{-1}{p-3}$

Converteu a quantidade de 2500 pessoas para 2,5 milhares.
O aluno faz uso da função logarítmica para obter o tempo em que haverá 2,5 milhares de pessoas, entretanto não obedece ao princípio da igualdade.

Fase 8

Para fazê-lo prestar atenção na necessidade de respeitar o princípio da igualdade, questiono a respeito da validação da resposta obtida e solicito que explique a passagem e as propriedades utilizadas no momento em que errou:

Q3 – É verdade que $e^{25} = 25$?

Q4 – Explique essa passagem $e^{\log e^t} = 25 \Rightarrow t = 25$

Q5 – Verifique a propriedade que você está utilizando. Você está aplicando log no expoente? Isso pode? Tudo o que se faz em um membro de uma igualdade deve ser realizado no outro membro.

R3 –

b)

$1 = \dfrac{3e^{k.1}}{1+pe^{k.1}} \Rightarrow 1 + pe^k = 3e^k$

$\Rightarrow 1 = (3-p)e^k$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3-p} = e^k$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{3-p}\right) = \ln e^k \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{3-p}\right) = k$

$\Rightarrow \ln(1) - \ln(3-p) = k$

$\Rightarrow k = \dfrac{-1}{p-3}$

a)

$$2{,}5 = \frac{3e^{\frac{1}{2}t}}{1 + e^{\frac{1}{2}t}}$$
$$\Rightarrow 2{,}5 + 2{,}5e^{\frac{1}{2}t} = 3e^{\frac{1}{2}t}$$
$$\Rightarrow 2{,}5 = 0{,}5e^{\frac{1}{2}t}$$
$$\Rightarrow 5 = e^{\frac{1}{2}t}$$
$$\ln 5 = \ln e^{\frac{1}{2}t}$$
$$\ln 5 = \frac{1}{2}t$$
$$t = \ln 5 \,.\frac{2}{1} = 2\ln 5$$

O aluno não responde aos questionamentos, mas apresenta uma correção em sua produção. O aluno não apresenta uma resposta ao problema.

Fase 10

Para fazê-lo atentar para a necessidade de usar os valores encontrados na elaboração de uma resposta para a questão e de comunicá-la, questiono:

Q7 – Qual é a sua resposta na alternativa a?

R4 –

a) O ano em que o número de pessoas que estavam infectados atingiu 2500 foi 1963, pois
$t = 2ln\, 5 \Rightarrow t = 3{,}21 \cong 3$ anos
$1960 + 3 = 1963.$

b) A relação entre k e p é $k = -\,ln(3 - p)$.

O aluno apresenta uma resposta para o problema.

A Prova em Fases se apresentou como um recurso que permitiu ao aluno ajustar as estratégias e os procedimentos, o que foi evidenciado ao comparar R1, R2 e R3.

Apesar de o aluno não ter respondido ou comentado diretamente as intervenções Q2, Q3, Q4 e Q5, é possível perceber que elas serviram como orientações para a sua ação. A intervenção Q2 serviu para produzir R2 e as intervenções Q3, Q4 e Q5 serviram para produzir R3. As intervenções não incluíram a correção de um erro, ou o caminho a ser seguido pelo aluno em suas novas produções, mas permitiram que o aluno autonomamente prosseguisse e, com isso, serviram ao processo de regulação.

5.2 ANÁLISE DO CONSTRUTO – PRODUÇÃO ESCRITA

A partir da descrição e de alguns pontos destacados em uma interação escrita entre alunos e professora, em cada uma das vinte e cinco questões, buscou-se construir um quadro geral que relaciona indícios de algumas das possíveis potencialidades da Prova em Fases à luz do referencial teórico constituído.

5.2.1 Análise da produção escrita em uma Prova em Fases – Recurso de Ensino

A análise da produção escrita nessa Prova em Fases possibilitou à professora observar, analisar e recolher informações para agir num contexto de ensino, em favor da aprendizagem, e ao aluno, ser respeitado em suas idiossincrasias no processo de aprender. De acordo com Van den Heuvel-Panhuizen (1996, 2000, 2002), os alunos, em vez de serem receptores de uma matemática pronta, foram tratados como participantes ativos no processo educacional. Nesse processo, aos alunos foi dada a oportunidade de desenvolverem e revisitarem ferramentas matemáticas para lidar com as questões da Prova em Fases.

Freudenthal (1979) discute a necessidade de evitar materiais didáticos pré-estruturados, em que o conteúdo e a aprendizagem se tornam derivados exclusivos dessa estrutura. Nesta pesquisa, cada aluno, guiado por sua produção escrita e pelas intervenções escritas do professor, pôde seguir um caminho ao lidar com conteúdos contemplados na prova. Esses caminhos revelam a flexibilidade que a Prova em Fases proporciona na organização de tópicos da disciplina.

A Prova em Fases foi um recurso que permitiu à professora, por meio da análise da produção escrita, criar um ambiente em que os alunos sentiram-se dispostos a refletir sobre o seu trabalho à medida que se envolveram com ele, na direção de construir e reconstruir suas próprias respostas. A própria produção do aluno foi tanto uma aprendizagem quanto uma ferramenta de ensino primordial, a qual determinou o progresso de matematização e das intervenções. Na RME, a produção dos alunos funciona como uma imagem no espelho da atividade didática do professor, um de seus traços característicos e é considerada com um valor prognóstico inconfundível (TREFFERS, 1987).

Para Freudenthal (1973), toda atividade de matematização de um aluno é relevante e pode ser refinada a partir da capacidade do aluno de refletir a respeito, sendo que essa reflexão pode ser provocada pela interação e por suas próprias produções. Nesta pesquisa, a professora teve a oportunidade de conhecer os níveis de formalismo em que o aluno estava operando e de adaptar intervenções de ensino para atender às suas necessidades, aspectos considerados necessários ao professor quando ensina, segundo De Lange (1999). Ao refletir sobre sua produção e lidar com as intervenções, o aluno pode evoluir nos níveis de compreensão dos conceitos e ferramentas matemáticas utilizados na resolução das questões da Prova em Fases.

Por meio das intervenções escritas, é possível reconhecer a responsabilidade da professora em criar um ambiente que oportunizasse aos estudantes revisitar e construir/reconstruir seus conhecimentos. Essa atitude evidencia que a Prova em Fases serviu a um ensino com foco no processo de matematizar, em que o aprender teve origem no "fazer" matemática, como indicado na RME, seguindo o princípio da reinvenção-guiada.

Esse recurso posicionou a professora como um guia, na medida em que elaborou a escrita de questionamentos, comentários ou sugestões que avaliou pertinentes para o processo de aprendizagem do estudante. Assim como proposto por Van den Heuvel-Panhuizen (2000), a professora elaborou intervenções que buscavam fazer uso da própria produção do aluno para encaminhá-lo ao entendimento do que se desejava que ele aprendesse e não orientá-lo de modo fixo, apontando o que ele devia aprender. É possível reconhecer em algumas produções que elas se mostraram interferentes nas atividades matemáticas dos alunos.

As intervenções foram resultado de reflexões da atividade da professora em busca de atender às suas intenções com a tarefa, de realçar aspectos da questão que lhe favorecessem perpassar por diferentes níveis de competência, sem eliminá-lo da posição de sujeito ativo e regulador de seu processo de aprendizagem. Para isso, a professora, intuitivamente, elaborou trajetórias de ensino e de aprendizagem individuais, as quais davam a ideia dos objetivos para a aprendizagem dos alunos, do modo como alcançá-los, das tarefas a serem utilizadas (intervenções escritas) bem como dos percursos dos alunos (produções escritas). Esses elementos são destacados por Van den Heuvel-Panhuizen (2001, 2002) no que se refere à elaboração da trajetória.

Na direção de assistir o aluno na reflexão e na compreensão autônoma de seu conhecimento, a escrita avaliativa deve ser clara, apontar pistas para as ações futuras sem incluir a correção de erros, incentivar o aluno a reanalisar a sua resposta (SANTOS L., 2003).

A Prova em Fases se mostrou um recurso adequado para findar o propósito de assistir os alunos, pois permitiu ir a cada fase conhecendo o perfil de cada aluno e, com isso, elaborar uma intervenção mais adequadada a esse perfil. As intervenções individuais foram apontadas como importantes em Dias S. e Santos L. (2008), por evidenciar que o mesmo *feedback* escrito não serve da mesma forma a todos os alunos.

Além disso, a Prova em Fases serviu também a um ensino respaldado no preceito da matemática como atividade humana ao habituar os estudantes a abordar matematicamente diferentes situações e por guiar o aluno na construção de uma formalização da matemática (essa formalização foi o estágio final do processo e não o ponto de partida).

5.2.2 Análise da produção escrita em uma Prova em Fases – Regulação da Aprendizagem

A utilização de questões (para ensinar, aprender e avaliar) em uma Prova em Fases revelou-se uma prática avaliativa de natureza didática que favoreceu ao professor elaborar intervenções escritas e ao aluno, promover o desenvolvimento de competências de regulação da própria aprendizagem matemática.

O feedback é uma forma de operacionalizar a regulação da aprendizagem. Entretanto, ele não é garantia de uma regulação pedagógica por depender de sua qualidade e de sua utilização pelo aluno em seu processo de aprendizagem. Tanto o aluno, ao acompanhar e desenvolver suas produções, quanto o professor ao elaborar as intervenções escritas (*feedbacks* escritos) nessa Prova em Fases, tiveram a oportunidade de estabelecer um processo de comunicação de qualidade, no qual puderam vir a se entender mutuamente e, com isso, a partir da valorização do que os alunos já eram capazes de fazer, evoluir em sua aprendizagem.

A reflexão do aluno sobre sua produção escrita tornou-se um elemento de destaque no processo de aprendizagem, no qual ele pôde diagnosticar suas lacunas e suas dificuldades em relação ao que almejava revisitar ou aprender. Conforme Dias P. e Santos L. (2010a), a regulação da aprendizagem é um ato pessoal e carregado de intenção, em que o aluno é que decide se vale a pena fazer algum investimento, mas o professor, por meio do *feedback* escrito, pode exercer um papel fundamental para o aluno em sua reflexão sobre o trabalho realizado.

O lidar com sua produção escrita na Prova em Fases e com as intervenções escritas do professor, favoreceu uma experiência, na qual o aluno pôde tornar-se menos dependente da professora/pesquisadora para validar seu conhecimento.

As questões da Prova em Fases eram as mesmas para todos os alunos, o que, *a priori*, criou a expectativa de que poderiam decorar os enunciados das questões e assim apresentarem as soluções "corretas" em fases futuras, a partir da troca de resolução entre eles (transmissão de um conhecimento que resolve uma questão). Ressalta-se que eles sabiam que aqueles conteúdos não seriam trabalhados especificamente nas aulas, mas seriam importantes para o andamento da disciplina, ou seja, que precisavam ser aprendidos.

Essa expectativa revelou uma concepção de ensino e de aprendizagem matemática dos alunos como o estabelecimento de conexões com um corpo exterior de conhecimento, uma vez que, reproduzido na prova o que foi "trocado de conhecimento", eles já consideravam suficiente para dizer que tinham aprendido os conteúdos abordados. Para Gravemeijer (2005), nessa concepção há um fosso entre o conhecimento matemático formal, um produto pronto para o consumo, e o do aluno, que vive em um mundo à parte do mundo desse conhecimento, logo é tarefa do professor construir uma ponte para que aluno chegue a esse mundo do conhecimento matemático; tarefa que ele julga não ser garantida, ou talvez possível, porque esse outro mundo pode nem existir para o aluno.

No decorrer do processo, entretanto, a possibilidade de "trocar conhecimento" foi sendo deixada de lado por perceberem que a individualidade nas produções se estabelecia por meio das intervenções escritas da professora. Os alunos reconheceram seu papel de aprendiz ao realizar essa Prova em Fases, e o fato de que, mais do que reproduzir procedimentos, é preciso ter argumentos para defender a sua resolução, que o aprender matemática, conforme Freudenthal (1968), não estava relacionado a aprender um sistema fechado, mas a um processo de matematização como uma atividade humana.

No realizar a Prova em Fases, o aluno teve a possibilidade de avaliar quais questões conseguia fazer em cada fase e de desenvolver, autonomamente, estratégias para resoluções de novas[54] questões ou ajustes em resoluções já apresentadas (esses ajustes variam de simples correções de nomenclatura à apresentação de uma nova resolução). Com isso, mais do que apenas resolver questões de uma prova escrita, o aluno teve uma mudança de atitude relativa ao conhecimento em geral, de modo a construir significados próprios, refletir sobre o quê e como aprendeu, mudança essa que muniu o aluno da oportunidade de se auto-avaliar ao refletir e comunicar.

As intervenções escritas geradas a partir do lidar com a Prova em Fases favoreceram aos alunos o desenvolvimento de uma regulação da aprendizagem com relação:

a) ao compromisso com as questões matemáticas na

- identificação de erros;
- busca por compreender o enunciado da questão;
- busca por contradições em produções de fases anteriores;
- avaliação de sua produção.

b) à estratégia de resolução individual na

- elaboração de hipóteses;
- orientação por meio das produções de fases anteriores;
- identificação e retificação dos erros.

[54] Novas questões no sentido de lidar com uma questão ainda não resolvida ou com as intervenções escritas do professor.

c) a articular ideias próprias

- na justificativa da resolução;
- no desenvolvimento de conceitos.

d) à eficiência[55] matemática na

- reflexão a respeito dos erros e de sua superação;
- comparação entre as produções de fases anteriores.

e) à autoavaliação na

- busca de validar suas respostas;
- revisão do processo de resolução.

Essas ações foram ao encontro de uma regulação da aprendizagem cujo objetivo era compreender e aprofundar conhecimentos matemáticos, ultrapassar erros e dificuldades, utilizando-os para prosseguir e desenvolver a autonomia no sentido de serem protagonistas de seus processos de aprendizagem. O alcance desse objetivo aconteceu ao longo do processo de exploração e desenvolvimento da tarefa.

5.2.3 De um modelo de Pirâmide de Avaliação para muitos modelos

De Lange (1999), ao trazer os princípios para uma avaliação em sala de aula, especificamente no nono princípio, afirma que a qualidade de uma tarefa não deve ser definida por sua acessibilidade a uma pontuação objetiva, confiabilidade ou validade, no sentido tradicional[56], mas por sua autenticidade[57] e equidade[58] na medida em que atende aos outros primeiros princípios.

Em um contexto que considera a avaliação como um processo que faz emergir informações para professores e alunos de modo a poderem

[55] Eficiência no sentido de realizar uma tarefa da melhor forma possível, apesar do professor ter uma intenção em relação ao que se espera que o aluno aprenda ou revisita.
[56] Ao ter um outro entendimento a respeito do ensino e da aprendizagem de matemática, é consenso entre os educadores matemáticos da RME a necessidade de pensar a respeito de questões tais como confiabilidade e validade de uma avaliação (Van den HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).
[57] Autenticidade significa que os problemas são "dignos" e se relacionam com o mundo real, têm possibilidade de construção pelos alunos, se relacionam com critérios claros, pedem explicações acerca das estratégias e oferecem possibilidade de discussões (DE LANGE, 1999).
[58] Equidade no sentido de dar a cada aluno a oportunidade potencializada para demonstrar seu poder matemático (DE LANGE, 1999).

reorientar suas práticas, não faz sentido pensar em uma pontuação objetiva (notas), ou resoluções consideradas apenas como corretas ou incorretas para questões de uma prova, uma vez que o aluno precisa ter a oportunidade de revelar o que sabe, independentemente se é o que o professor estipulou que saiba, e a professora de, a partir desta recolha, guiar o alunos em sua evolução.

Não se trata de abandonar as notas ou os conceitos, mas de buscar olhar para cada aluno com relação a ele mesmo e não com relação aos colegas de sala ou à expectativa platônica do professor. Nesse olhar, o professor analisa o desenvolvimento do aluno e o seu modo de lidar com ferramentas matemáticas.

Ao pensar uma avaliação que oportuniza aprendizagem, não é razoável esperar que o desempenho dos alunos em tarefas semelhantes e em momentos diferentes seja o mesmo (conceito de confiabilidade), pois é, de fato, esperado que os alunos aprendam por meio da avaliação, consequentemente, evoluam em suas produções e interpretações. Da mesma forma, em vez de averiguar se as inferências feitas a partir do resultado de uma determinada prova são válidos, confiáveis (conceito de validade), seria mais adequado julgar a validade examinando as inferências feitas a partir da avaliação (DE LANGE, 1999).

Nessa direção, na perspectiva da RME, conforme Ciani (2012, p. 51),

> mais importante que a “precisão matemática” de uma nota, ou a garantia de que um problema será interpretado da mesma maneira em diferentes momentos, são as inferências sobre a possibilidade de as tarefas propiciarem oportunidades para todos os alunos se envolverem com os problemas e mostrarem sua compreensão e poder matemático, bem como de possibilitarem maneiras de os professores conhecerem essa compreensão e poder matemático para que possam reorientar suas práticas e auxiliar os alunos nos seus processos de aprendizagem (CIANI, 2012, p. 51).

Nesta pesquisa, a Prova em Fases foi um recurso associado à análise da produção escrita que favoreceu a cada aluno seguir um[59] seu trajeto de aprendizagem e de avaliação, deu-lhes a oportunidade de compartilhar com

[59] Porque em outro momento poderia ser outro trajeto.

a professora/pesquisadora (produções escritas) e seus colegas (conversas e estudos entre as fases) as estratégias e descobertas, possibilitando conhecer suas competências matemáticas e, juntamente com a professora, reorientar suas práticas associadas ao processo de aprendizagem e, com isso, aumentar seu poder com as ferramentas matemáticas.

Por mais que os enunciados das questões da prova não tenham permitido, *a priori,* que alguns alunos se envolvessem com o problema e, com isso, revelassem o que sabem, a professora/pesquisadora pôde investigar e orientar o aluno mediante as intervenções escritas.

Ao elaborar essas intervenções escritas, a professora/pesquisadora teve em suas mãos a possibilidade de flexibilizar as competências requeridas das questões e permitir algum aprendizado ao aluno. Essa flexibilização serviu tanto para as demandas dos alunos que não apresentavam nenhuma produção na direção de resolver uma questão específica, ou nenhuma, quanto para as demandas daqueles alunos que apresentaram uma resolução coerente para todas as questões. O interesse maior não era fazer com que os alunos apenas resolvessem as questões, mas promover um diálogo por meio de suas produções que trouxesse enriquecimento a seus conhecimentos matemáticos, ou seja, fazer dessa prática de resolver questões de Prova em Fases uma oportunidade de aprendizagem.

A professora/pesquisadora estava carregada de intenções ao escolher cada uma das questões para essa Prova em Fases, uma vez que, por meio delas, conduziria a comunicação escrita e os processos de ensino e de aprendizagem. Conforme Van den Heuvel-Panhuizen (2000), sem manter uma perspectiva da trajetória de ensino e de aprendizagem com vistas ao que se almeja, não é possível orientar a aprendizagem dos alunos. Entretanto, não era objetivo da professora escolher uma condução para todos os alunos, mas respeitar os caminhos que cada um seguisse.

De Lange (1999) propõe adequadamente a necessidade de refletir a respeito do que os itens de uma prova devem abordar (pensar na prova como um todo) e apresenta o modelo da “Pirâmide de Avaliação”. Esse modelo ganhou dinamismo em uma Prova em Fases.

Primeiramente, com relação ao número de itens, De Lange (1999) não escreve a respeito do número de questões, apenas que é desejável que os itens de uma prova devem preencher a pirâmide. Nesta pesquisa, todos os alunos receberam na primeira fase o mesmo número de questões (25), mas a partir da segunda fase esse número variou, uma vez que as intervenções escritas podiam ser novos questionamentos que viriam a orientar os alunos nas resoluções das primeiras questões da prova, orientar os alunos na regulação de algum conceito matemático utilizado inadequadamente, sugerir novos caminhos a serem perseguidos e desenvolvimento de novas ferramentas matemáticas mesmo para um aluno que apresentou uma produção com êxito. Com isso, a densidade[60] da prova dependeu diretamente do que o aluno apresentou e da forma com que a professora/pesquisadora interveio.

Com relação aos níveis de competência, De Lange (1999) sugere a escolha de questões de reprodução, conexão e reflexão, respeitada a proporção conforme Figura 4. Ao elaborar a Prova em Fases para esta pesquisa, tal proporção não foi respeitada, mas, independente disso, as intervenções da professora/pesquisadora interferiram nas competências requeridas em cada questão, e, como eram intervenções individuais, ao final das dez provas havia um sólido diferente, não necessariamente convexo[61], mas um sólido coerente com a produção escrita do aluno e das competências apresentadas por ele.

Orientar o aluno por meio de sua produção escrita não implica que o não produzir, a pouca dedicação do aluno, ou a sua não evolução serão suficientes para certificar uma aprovação; implica que ao aluno será permitido revelar o que sabe, terá a oportunidade de receber intervenções e *feedbacks* a respeito de seu trabalho, terá o professor como um guia companheiro[62] em seu processo de aprendizagem como um todo.

Por exemplo, em uma Prova em Fases, pode-se organizar uma grade de correção para cada questão considerando as escolhas das estratégias ao longo da prova, os procedimentos para efetivação das

---

[60] Densidade no sentido de medir o grau de concentração de questões em cada prova ao final das dez fases.

[61] Uma vez que pode ter acontecido (por exemplo) um número de questões de reprodução e reflexão igual, mas maior que as de conexão.

[62] Aquele que acompanha.

estratégias, as respostas dadas aos problemas, assim como os encaminhamentos dados pelos estudantes frente às intervenções escritas do professor. Quando necessário, a nota será, então, atribuída no final de todas as fases da prova, de tal forma que essa nota não é seja de uma escala objetiva de pontuação, mas de um acompanhamento refletido do trabalho realizado pelo aluno.

Outro aspecto do modelo de "Pirâmide de Avaliação" é a pertinência de conteúdo. Van den Heuvel-Panhuizen (1996) considera que os problemas de avaliação devem provocar o conhecimento a ser avaliado, ou seja, envolver o que se pretende avaliar e expressar o máximo possível o quanto os alunos integraram esse conhecimento e podem aplicá-lo em outras situações. Com isso, uma vez realizada a escolha das questões para uma Prova em Fases com base nos conteúdos do Quadro 4, as intervenções escritas da professora ao longo das fases serviram como carreadores do conhecimento a ser avaliado e de sua evolução nas produções escritas.

A possibilidade da professora/pesquisadora de olhar para a produção do aluno em cada uma das fases da prova e, a partir disso, conhecer um pouco mais das competências do aluno e seu modo de lidar com a matemática, favoreceu construir "novas provas" cada vez mais adequadas ao aluno, à sua realidade e ao seu modo de aprender. Nessas "novas provas", a professora construiu um modelo para cada aluno, associando a pertinência das competências requeridas, a profundidade do conteúdo abordado e o nível de dificuldade exigido. Ou seja, de um modelo de Pirâmide de avaliação *a priori* obteve-se 48 novos modelos que buscaram oportunizar ao aluno lidar com tarefas autênticas e que potencializassem seu poder matemático.

A Prova em Fases mostrou-se um recurso que combina os cinco princípios desenvolvidos por De Lange (1987) para a elaboração de provas escritas: objetivou ser uma oportunidade de aprendizagem, favorecendo aos alunos a oportunidade de regular suas produções escritas (1º princípio); as intervenções escritas da professora guiaram os alunos a mostrar seus conhecimentos matemáticos (2º princípio); as intervenções escritas do professor permitiram desenvolver competências de diferentes níveis e trabalhar com os conceitos em diferentes amplitudes e profundidade (3º princípio); mais do que uma prova objetiva, foi um instrumento que favoreceu ao professor conhecer o modo de lidar do aluno com a matemática e a partir disso guiá-lo (4º princípio); a realização da prova foi facilmente inserida na prática letiva dos alunos (5º princípio).

Com relação ao quinto princípio, apesar de ter sido facilmente realizado, é bem verdade que lidar com uma Prova em Fases com muitas questões e em uma turma com muitos alunos é uma tarefa bastante trabalhosa para o professor, exige horas de dedicação para a análise das produções e elaboração das intervenções, essa pode ser uma dificuldade desse recurso. Entretanto, com um número reduzido de questões, a tarefa do professor também se reduz e as potencialidades da prova se mantêm.

Com a prática desta pesquisa foi possível observar que, para além de características específicas do enunciado da questão, para ser considerada uma boa questão de uma Prova em Fases, as intervenções escritas do professor precisam ser adequadas[63] ao que se deseja, são essas intervenções que irão potencializar sua utilização em um contexto de avaliação como oportunidade de aprendizagem.

Nesta pesquisa foi descrita ao menos uma questão que *a priori* era rotineira, com nível de competência de reprodução e que alcançou uma produção escrita com competência de reflexão. Também foi descrita ao menos uma questão que exigia competências de reflexão, mas que, a partir das intervenções escritas da professora, o nível de exigência foi para a de reprodução.

Caso sejam as intervenções escritas que potencializam os enunciados das questões de uma Prova em Fases, então vale a pena apontar (de forma específica) o que esta pesquisa acredita ter se revelado adequado na hora de elaborá-las. Elas precisam

1. ser claras no sentido de refletir o que o professor realmente deseja e que o aluno as interprete;

[63] A arte de elaborar intervenções é uma tarefa que exige muita reflexão e estudo, e como foi visto nesta pesquisa, mesmo assim, com chances de ser uma intervenção precipitada ou inadequada ao que se deseja.

2. ser coerentes com o nível de competência apresentado pelo aluno em sua produção escrita e ao mesmo tempo permitir que desenvolva novas competências;
3. oferecer aos alunos segurança, assistência, *feedback* e promover um “diálogo”;
4. oportunizar ao aluno revelar o que sabe;
5. refletir conteúdos que se deseja avaliar, ou que se deseja que o aluno desenvolva.

6 COMO OS ESTUDANTES SE RECONHECEM NESSE PROCESSO?

Neste Capítulo é apresentada uma discussão acerca de algumas percepções[64] dos alunos de suas vivências no processo de realizar a Prova em Fases, do instrumento Prova em Fases e de possíveis impactos já sentidos por eles em suas aprendizagens.

Faz-se pertinente buscar essas percepções nesta pesquisa por entender que a ação de promover uma comunicação no dizer avaliativo não é sinônimo de regulação da ação pedagógica, mas um primeiro passo para ela. Conforme Santos L. e Dias S. (2006) corresponderá a um processo de regulação apenas quando o estudante usar esse dizer, esse *feedback*, para melhorar a sua aprendizagem.

Essa discussão tem como ponto de partida a resposta escrita de alunos[65] aos questionamentos:

Q1: O que você tem achado de fazer essa prova em várias fases? Justifique. Q2: O processo de realização desse tipo de prova modificou sua atuação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral? Argumente. Q3: O processo de realização desse tipo de prova modificou sua atuação nas outras disciplinas? Argumente.

Com a primeira questão, Q1, havia expectativa de buscar indícios de um dos objetivos específicos dessa pesquisa - a utilização da produção escrita dos alunos em uma Prova em Fases como propulsor da regulação da aprendizagem em aulas de Cálculo.

Conforme De Lange (1999), é preciso assegurar que cada avaliação realizada em sala de aula seja apropriada para a finalidade na qual é

---

[64] No Apêndice F encontram-se todas as respostas colhidas por meio desse instrumento. Neste capítulo apenas algumas respostas serão citadas diretamente (sem alterações da escrita dos alunos), e a escolha não tem associação com as produções descritas no Capítulo 5, mas estão diretamente ligadas aos pontos de interesse de discussão da professora/pesquisadora: evidenciar o lidar com a Prova em Fases como um agente regulador da aprendizagem, mudança de atitude dos estudantes com relação à regulação de suas aprendizagens.

[65] EM11CDI02, EM11CDI11, EM11CDI28, EM11CDI31, EMCDI32, EM11CDI35, EMCDI36, EM11CDI38 não responderam ao instrumento por terem participado, no máximo, das cinco primeiras fases, pois o instrumento foi apresentada aos alunos na 6ª fase. EM11CDI24, EM11CDI46 não quiseram participar, apenas disseram que não tinham o que escrever.

utilizada. Com isso, nesse caso, é preciso, para além da análise da produção escrita e da utilização da Prova em Fases como recurso de ensino, evidenciar o lidar com a Prova em Fases como um agente regulador da aprendizagem, uma vez que tinha esse fim.

Tornar-se agente regulador da aprendizagem nesta pesquisa corresponde a ser atuante ao alcance dos aspectos das funções anexas da função geral de regulação apresentadas por Hadji (1994): segurança, assistência, *feedback*, diálogo.

Se o aluno é o responsável pela construção do seu conhecimento, então é preciso que ele sinta confiança em si, sinta-se capaz de identificar seus interesses, diagnosticando as suas lacunas, suas dificuldades e suas potencialidades. O lidar com Prova em Fases pode vir a favorecer esse estado de confiança, conforme identificado na resposta do aluno EM11CDI12,

> "*Eu acho muito bom [fazer a prova], por que mostra que o aluno tem que correr atrás de alguns assuntos no Cálculo Diferencial e Integral, mostra em qual assunto ele está com dificuldade, para assim ir melhor na matéria de cálculo, pois vamos usar isso no decorrer do curso e na nossa vida como engenheiros." (EM11CDI12, resposta a Q1).*

Vale ressaltar que nas intervenções da professora não havia menção a certo ou a errado, nem aos assuntos que deveriam pesquisar, assim o aluno não faz uma leitura direta daquilo em que está com dificuldade, mas uma inferência.

Na procura de um caminho que pudesse conduzir às resoluções de questões da Prova em Fases, o aluno fez experimentações, estabeleceu conjecturas e avaliou a sua razoabilidade, na medida em que reconheceu a necessidade de colocar-se em movimento na direção de aprender ou revisitar conteúdos matemáticos que, em sua opinião, eram importantes na disciplina e em sua formação.

Um aluno seguro de sua condição de construtor de seu próprio conhecimento reconhece sua autonomia no processo de aprender e desfaz a figura do professor como o portador/transmissor do conhecimento. A utilização da Prova em Fases pode provocar esse comportamento autônomo, nesta pesquisa isso pode ser exemplificado na escrita do aluno EM11CDI25:

> *"Acho um método interessante [fazer a prova], pois acaba forçando o aluno a ir atrás de soluções, respostas, estudos por conta própria. Com isso acaba com aquela dependência que o aluno possui em aprender somente o que o professor ensina, ou até mesmo depender das explicações do mesmo". (EM11CDI25, resposta a Q1).*

Sendo papel da escola/universidade desenvolver práticas letivas que encorajem os alunos a desenvolverem-se autonomamente, a Prova em Fases tornou-se, neste estudo, um recurso adequado para esse fim. Esse estado de segurança se revela nas respostas dos alunos EM11CDI04, EM11CDI05, EM11CDI08, EM11CDI09, EM11CDI10, EM11CDI17, EM11CDI19, EM11CDI20, EM11CDI21, EM11CDI22, EM11CDI26, EM11CDI29, EM11CDI30, EM11CDI34, EM11CDI37, EM11CDI39, EM11CDI41, EM11CDI42, EM11CDI47.

As outras funções mencionadas também podem ser evidenciadas na produção escrita dos alunos ao responder Q1.

A função de assistência está relacionada com ser um ponto de apoio, ser fonte de informação para que o aluno saiba como prosseguir ou redirecionar sua aprendizagem. É bem verdade que, seguros por seus processos de aprendizagem, os alunos alcançaram a função de assistência, porém a contrapositiva não é verdadeira. Há alunos que viram na prova um ponto de apoio para suas aprendizagens, entretanto não apresentam indícios de confiança neles próprios. Isso pode ser verificado na resposta do aluno EM11CDI23:

> *"A prova em fases está sendo uma ótima oportunidade de conseguir nota, mesmo não conseguindo responder as questões, ele serve para que eu possa enxergar minhas dificuldades." (EM11CDI23, resposta a Q1).*

É possível que esse aluno tenha percebido a Prova em Fases como uma forma de evidenciar suas dificuldades, mas ele não o mobilizou a superá-las, ou a se responsabilizar por sua aprendizagem.

Para além de fazê-lo evidenciar suas dificuldades, tinha-se a intenção primeira de gerar um processo centrado no seu percurso e de privilegiar uma evolução sua e de sua produção escrita, ou seja, fazer dessa prática (realizar uma Prova em Fases) uma oportunidade de aprendizagem. Conforme Hadji (1994), uma avaliação a serviço da regulação da aprendizagem não se resume, simplesmente, em situar, mas dar ao aluno elementos para analisar e compreender a sua situação a fim de progredir em direção ao objetivo pretendido. As intervenções escritas da professora, entretanto, podem não ter sido suficientemente orientadoras para esse aluno (evidenciado ao comentar que não conseguiu responder a todas as questões). Conforme Barlow (2006), a qualidade das intervenções (mensagens de retorno) possui um peso fundamental nas próximas ações dos alunos.

A resposta do aluno EM11CDI27 foi a seguinte:

> *“Achei muito interessante [fazer a prova], pois foi possível rever alguns conceitos no qual eu não me lembrava e, também, me ajudou a saber o que deveria ser estudado.” (EM11CDI27, resposta a Q1).*

Nessa resposta, o aluno parece sentir-se assistido em relação a rever alguns conceitos esquecidos e ao que precisa estudar, entretanto não revela indícios de segurança ou autonomia para a realização de mais estudos que os necessários na resolução das questões da prova. Contudo esse processo parece ter favorecido que esse aluno alcançasse um dos objetivos de uma avaliação formativa, segundo Hadji: permitir que o aprendente saiba o que se espera dele e que se saiba situar em função disso (HADJI, 1994).

Outras respostas que evidenciam a função de assistência sem parecer revelar a segurança são: EM11CDI06, EM11CDI07, EM11CDI14, EM11CDI16, EM11CDI18, EM11CDI40, EM11CDI43, EM11CDI44.

Os *feedback*s em uma avaliação devem ajudar o aluno a tornar-se sujeito ativo de seu desenvolvimento e fornecer informações a respeito de seus processos de aprendizagem, promovendo, então, suas próximas ações (DE LANGE,1999, VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996), carregando a função de segurança e assistência discutida por Hadji (1994).

Todo comentário, questionamento ou sugestão escritos pela professora, em cada uma das fases da Prova em Fases utilizada nessa pesquisa, tinham essas intenções. Entretanto, como já foi direcionado um olhar às respostas dadas pelos alunos ao questionamento Q1 com relação à segurança e à assistência, busca-se, nesse momento, indício do *feedback* com a função de ser fornecedor de informações úteis sobre as etapas vencidas e as dificuldades encontradas nas respostas dos alunos ao questionamento Q1 – uma função anexa da regulação proposta por Hadji(1994).

A resposta do aluno EM11CDI04 dá indícios de que o *feedback* escrito foi útil no seu desenvolvimento com vistas a buscar uma solução a cada questão proposta:

> *"É interessante [fazer a prova], pois a partir das observações da professora desenvolvemos um raciocínio com o objetivo de encontrar nossos erros e assim chegar a solução correta." (EM11CDI04, resposta a Q1).*

Em sua pesquisa, Dias P. (2008) aponta que os alunos tendem a aprender por meio do processo de verbalização das suas ideias e de respostas às questões do professor. Nesta pesquisa, os alunos tendem a aprender por meio do processo de escrita de suas ideias ao resolver as questões e responder às intervenções escritas do professor em cada uma das fases.

O aprendizado não se dá no ato da escrita, mas em todo o processo: na reflexão sobre os enunciados das questões, nas pesquisas e estudos realizados, também extraclasse, entre uma fase e outra, na apreciação de suas respostas de fases anteriores, por meio do lidar com as intervenções escritas da professora, nas conversas entre os colegas sobre suas produções. A resposta do aluno EMCDI04 não apresenta todos esses elementos, contudo é provável que eles estejam presentes para o desenvolvimento do raciocínio citado.

A resposta do aluno EM11CDI19 afirma que resolver a Prova em Fases, ou seja, lidar com a sua produção escrita e os *feedbacks* da professora, tem revelado o que lhe falta de aprendizado, ou seja, tem sido útil para as suas dificuldades.

> *"Bom [fazer a prova]. Porque revela o que nos falta de aprendizado de Matemática e nos incentiva a estudar matérias que já nem lembrava mais." (EM11CDI19, reposta a Q1).*

O ideal seria que, ao lidar com a Prova em Fases, o aluno reconhecesse também o que sabe, ou seja, as etapas vencidas, mesmo sem os tradicionais "certos" do professor. Conforme Hadji (1994), a avaliação de um professor pode alimentar um diálogo permanente que permitirá ao aluno cogerir a sua aprendizagem a partir da mediação do professor, o qual deverá apoiá-lo com informações que vão esclarecer, guiar, encorajar e ajudar a sua atividade, chamando-lhe a atenção para os pontos fortes e debilidades e, com isso fazê-lo ver o estado em que se encontra.

A regulação da aprendizagem esteve ligada à capacidade do aluno de realizar ajustes no seu processo de aprendizagem em função do *feedback* e da observação de sua progressão. A resposta do aluno EM11CDI14 deu indícios de que os *feedbacks* realizados na Prova em Fases favoreceram um olhar para a evolução do seu conhecimento, não demarcando apenas dificuldades.

> *"Fazer essa prova de várias fases tem sido muito bom até mesmo para cada um fazer uma avaliação pessoal, por ser dividida em muitas fases se torna cansativa, mas assim tem sido bom para observar a evolução do nosso conhecimento durante o curso." (EM11CDI14, resposta a Q1).*

As respostas dos alunos EM11CDI03, EM11CDI04, EM11CDI12, EMCDI07, EMCDI13, EM11CDI23, EM11CDI27, EM11CDI37, EM11CDI39, EM11CDI40, EM11CDI41, EM11CDI45, EM11CDI46 também trazem algum indício de o *feedback* ser útil sobre as etapas vencidas ou dificuldades apresentadas.

A última função anexa da regulação apresentada por Hadji (1994) é a de promover um verdadeiro diálogo entre professor e aluno. Essa função foi evidenciada nas respostas EM11CDI08, EM11CDI21.

A resposta do aluno EM11CDI21 revela a sua preocupação na escolha das palavras e nos procedimentos escolhidos. Essa preocupação parece ser em direção de estabelecer um diálogo permanente, um diálogo que vem permitir ao aluno cogerir a sua aprendizagem:

> *"Acho que [fazer a prova] faz com que nos preocupemos com o que temos dificuldade, faz com que nos preocupemos também em buscar conhecimentos, enfim a correr atrás do prejuízo e estudar. É bom, as vezes não penso em tudo o que faço ou que fiz no exercício, apenas faço e assim temos que pensar o porque de tudo que fazemos e quais as palavras que vou utilizar para que não fique confuso, você já deve ter percebido que eu me confundo toda com as palavras." (EM11CDI21, resposta a Q1).*

Nessa direção, o aluno procura interpretar e compreender o que lhe foi solicitado para elaborar uma resolução entendível para os que vão ler, o que pode desenvolver a capacidade de compreensão da escrita, de ultrapassar erros e dificuldades e avançar em seus êxitos. O professor tem a oportunidade de dialogar/guiar o aluno em função do que interpretou e compreendeu da questão na direção do que se espera que resolva. Buriasco, Ferreira e Ciani (2009) sugerem que a produção escrita deve receber uma atenção especial, porque, muitas vezes, é a única forma de “diálogo” existente entre professor e seus alunos.

Ao invés de o professor apenas apontar erros do aluno, é desejável que ele busque compreender a solução apresentada na direção de reconhecer qual problema foi de fato resolvido (o proposto pelo professor ou o compreendido pelo aluno), e, a partir disso, orientar o aluno nesse reconhecimento, tendo em vista contribuir com a aprendizagem.

Nas respostas dos alunos EM11CDI01, EM11CDI15, EM11CDI33, EM11CDI48 não há indícios de nenhum dos aspectos das funções anexas da regulação da aprendizagem apresentadas por Hadji (1994). Para esses alunos o lidar com a Prova em Fases pode não ter sido um agente de regulação da aprendizagem.

As respostas dos alunos EM11CDI01 e EM11CDI45 sugerem que a Prova em Fases cria a possibilidade de revisar conteúdos, mas não de construí-los. Esse olhar pode ser referente as suas expectativas de aprendizagem, uma aprendizagem associada a apropriação de um conhecimento transmitido pelo professor. Seguem as respostas dos alunos EM11CDI01, EM11CDI45, respectivamente:

> *“Acho bem interessante fazer essa prova em várias fases, contempla vários conteúdos do Ensino Médio, sendo assim possível revisá-los, mas como fiz um Ensino Médio em escola pública, não vi muitas das matérias aplicados nessa prova.” (EM11CDI01, resposta a Q1).*

> *“A prova em fases como a matéria Cálculo Diferencial me mostrou que minha base de matemática é péssima. A cada fase tento resolver uma questão, ao contrário dos meus colegas. Estou observando que coisas simples para os outros não é para mim.” (EM11CDI45, resposta a Q1).*

Um dos objetivos da professora/pesquisadora ao utilizar esse recurso era criar uma oportunidade de aprendizagem de conceitos básicos para a aprendizagem de Cálculo, de tal forma que essa oportunidade não fosse a mesma para todos os alunos, mas uma adaptada e regulada às necessidades específicas de cada um. Não era intenção ensinar conceitos por meio da transmissão, mas sim guiar o aluno dando-lhe segurança, assistência, *feedback* e promovendo um diálogo para que, autonomamente, revisitasse e construísse ferramentas e conceitos matemáticos. Para esses alunos, isso não se consolidou. .

A resposta do aluno EM11CDI15 não permite trazer elementos para a pesquisa com relação ao lidar com a Prova em Fases ser um agente regulador da aprendizagem.

> *"Mesmo sendo uma experiência nova para mim, eu estou achando muito interessante." (EM11CDI15, resposta a Q1).*

A resposta do aluno EM11CDI33 revela que o aluno não se adaptou com a utilização do instrumento, que o apontar seus erros diretamente é um *feedback* mais adequado para favorecer uma regulação de sua aprendizagem.

> *"Um pouco cansativo, eu acho melhor fazer uma prova só porque se eu errar a questão, erro de uma vez e já corro atrás dela e busco conhecimento sabendo onde foi que eu errei exatamente." (EM11CDI33, resposta a Q1).*

Entretanto, para além de permitir aos alunos identificar seus erros, esperava-se que esse instrumento fosse uma oportunidade de o aluno aprender novos conhecimentos e aprofundar seus êxitos e também uma oportunidade para a professora recolher informações que serviriam para reorientar sua prática e guiar o aluno em suas aprendizagens.

Já a resposta do aluno EM11CDI48 revela que ele reconhece que precisa ser um aluno aplicado para lidar com esse instrumento, mas que não é. Isso é uma informação importante, que vem na direção de um dos objetivos do uso desse instrumento em aulas de Cálculo: fazer com que o aluno reconheça seu papel em seus processos de aprendizagem. Entretanto, mais que reconhecer, é preciso exercê-lo.

> *"Legal, seria mais legal se eu fosse uma aluna mais aplicada." (EM11CDI48, resposta a Q1).*

Contudo as outras respostas evidenciam pelo menos uma das funções e indícios da regulação da aprendizagem que corresponde a agir sobre os mecanismos de aprendizagem contribuindo diretamente para a progressão ou redirecionamento dessa aprendizagem (SANTOS L., 2002), podendo dizer que há indícios de que a utilização da Prova em Fases pode tornar-se propulsora da regulação da aprendizagem em aulas de Cálculo.

Em relação às outras duas questões, Q2 e Q3, havia expectativa de buscar indícios acerca de reflexos que a utilização da produção escrita dos alunos em uma Prova em Fases gerou nas atitudes dos estudantes quanto à regulação de suas aprendizagens, uma vez que qualquer intervenção externa[66] no espaço pedagógico só poderá ter algum efeito se for percebida, interpretada e assimilada pelo próprio estudante (SANTOS L., 2002).

As respostas a Q2 dos alunos EM11CDI01, EM11CDI04, EM11CDI05, EM11CDI06, EM11CDI07, EM11CDI08, EM11CDI09, EM11CDI10, EMCDI12, EM11CDI13, EM11CDI14, EM11CDI15, EM11CDI17, EM11CDI18, EMCDI19, EM11CDI20, EMCDI21, EM11CDI22, EM11CDI23, EM11CDI25, EMCDI26, EMCDI27, EM11CDI29, EM11CDI30, EM11CDI33, EM11CDI34, EMCDI39, EMCDI40, EM11CDI41, EM11CDI42, EM11CDI43, EM11CDI44 e EM11CDI48 revelam indícios de que o lidar com a sua produção escrita e as intervenções escritas da professora tiveram algum impacto em seus desenvolvimentos como sujeitos ativos em seus processos de aprendizagem e na percepção de que os muitos conceitos básicos de matemática trabalhados no Ensino Médio serão úteis e fundamentais ao lidar com os conceitos de Derivada e Integrais e que, para aprendê-los, precisam ir em busca do conhecimento e não esperar a sua transmissão. As respectivas respostas dos alunos EM11CDI17, EM11CDI25, EM11CDI43 são exemplo disso.

> *"Sim [fazer a prova modificou minha atuação na disciplina], pois a disciplina de cálculo utiliza conteúdos de matemática básica que já não estavam mais tão claros e que tiveram que ser estudados para a realização da prova em fase." (EM11CDI17, resposta a Q2).*

> *"Modificou [minha atuação na disciplina fazer a prova em fases], pois fez com que eu corresse atrás de estudos básicos, fundamentais para a realização de cálculo, no qual eu não aprendi ou não lembrava desses estudos." (EM11CDI25, resposta a Q2).*

---

[66] Neste trabalho uma intervenção externa foi a comunicação escrita gerada a partir do recurso Prova em Fases.

> *"Para um bom entendimento da matéria de Cálculo a prova em fases modificou minha atuação [fazer a prova em fases] devido alguns conteúdos que eu não lembrava que foram utilizado na prova de limites e derivadas e também do qual eu simplesmente não sabia fazer, me fez buscar sobre esses conteúdos e revisá-los para melhor aprimoramento na disciplina." (EM11CDI43, resposta a Q2).*

Dessa maneira, a Prova em Fases possibilitou a esses alunos se conhecerem um pouco mais com relação aos seus conhecimentos matemáticos, em especial aqueles que as questões da prova abordaram, e, com isso, favoreceu uma tomada de consciência na busca de aprimorá-los para um melhor andamento no restante das atividades da disciplina.

"Recuperar" conhecimento matemático básico em aulas de matemática do Ensino Superior que deveriam ser aprendidos pelos alunos no Ensino Fundamental e Médio é um desafio discutido em pesquisas da Educação Matemática e nos corredores das universidades pelos professores e alunos. As respostas desses alunos apresentaram indícios do que esta pesquisa acredita ser um caminho profícuo: orientar os alunos a elaborar (e não "recuperar") o conhecimento matemático por meio da análise de sua produção escrita e das intervenções escritas da professora que atenderam as individualidades e favoreçam a tomada de consciência de suas dificuldades e seus êxitos. Conforme Hadji (1994), somente o aluno é capaz de regular a sua atividade de aprendizagem e somente ele é capaz de conhecer seus processos e corrigi-los. Cabe ao professor assumir seu papel de guia.

O aluno EM11CDI01 revela ao responder Q2 que realizar esse tipo de prova interviu em seu modo de estudar, fazendo-o ser ativo e autônomo nas escolhas de materiais de estudo:

> *"Modificou sim [minha atuação na disciplina fazer a prova em fases], com a realização desse tipo de prova, tive que sair da rotina de ficar só lendo slides e correr atrás de livros e outras fontes de pesquisa, sendo assim afetando meu modo de estudar a matéria de Cálculo Diferencial e Integral." (EM11CDI01, resposta a Q2).*

Ainda é comum práticas de ensino em que o professor elabora suas aulas sem se preocupar com o que os alunos já sabem; nas quais cria a hora da explicação, parte maior das aulas, em que o aluno deve apenas copiar e ouvir para depois tentar reproduzir em exercícios semelhantes aos exemplos trabalhados pelo professor. Nessas aulas o aluno resolve o exercício como se estivesse repetindo uma receita de bolo[67]. De encontro com essa prática, o lidar com a Prova em Fases favoreceu ao professor conhecer as potencialidades e dificuldades matemáticas de seus alunos e os trouxe para a atividade de fazer matemática, construir suas próprias produções matemáticas, por meio de pesquisa em livros e outras fontes de pesquisa.

Van den Heuvel-Panhuizen (1996, 2000), De Lange (1999) e Gravemeijer (1994) apresentam e defendem a ideia de os alunos utilizarem suas próprias produções e construções, tornando-se agentes em seus processos de aprendizagem. Ciani (2012) sintetiza essa defesa: “como a matemática é uma atividade humana, os alunos devem ser estimulados a usar as suas próprias estratégias no processo denominado de “re-invenção guiada”, uma vez que diferentes estratégias, por vezes, refletindo diferentes níveis, podem ser provocadas e utilizadas de forma produtiva no processo de aprendizagem” (CIANI, 2012, p. 33) .

O aluno EM11CDI12, ao responder Q2, revela um maior compromisso com a sua aprendizagem e também a utilidade de aprender alguns dos conceitos abordados na prova.

> *“Sim [fazer a prova modificou minha atuação na disciplina], eu comecei a estudar mais, fiquei sabendo de fórmulas que nem lembrava mais e que estou usando em derivação no momento.” (EM11CDI25, resposta a Q2).*

Por meio dos enunciados das questões e das intervenções escritas da professora, os alunos tiveram a oportunidade de lidar com conceitos matemáticos referentes aos tópicos do Quadro 4. A não compartimentação dos conteúdos em aulas expositivas (por exemplo: hoje é aula sobre conjuntos numéricos, amanhã intervalos de reta, depois...) pode ter favorecido a esse aluno reconhecer as “fórmulas” citadas por ele como ferramentas com alguma utilidade, e não apenas como uma “peça” fragmentada de conhecimento. Conforme Freudenthal (1968), o objetivo principal do ensino é que os alunos aprendam a fazer matemática como uma atividade. Isso implica que se deve “ensinar matemática de modo a ser útil”.

[67] Mera reprodução de um conjunto de procedimentos passo a passo.

De Lange (1999) organiza os conteúdos matemáticos em torno de “grandes ideias” ou “temas”. Considera que o domínio da matemática é tão rico e variado que não é difícil identificar uma lista extensa de grandes ideias. Para ele os fundamentos da matemática e suas relações com as vertentes tradicionais podem ser encontrados na seguinte lista de grandes ideias: mudança e crescimento; espaço e forma; raciocínio quantitativo; incerteza.

A resposta do aluno EM11CDI44 para Q2 dá indícios de uma responsabilidade e de um olhar crítico maior com, e para, sua produção escrita. Apenas dar qualquer resposta a um problema não basta, é preciso estudá-lo antes de resolvê-lo.

> *“Sim [fazer a prova modificou minha atuação na disciplina], pois está nos ajudando a raciocinar melhor, nos mostrando, que deve-se pensar, analisar, entender o problema para depois começar resolvê-lo.” (EM11CDI44, resposta a Q2).*

Dias P. e Santos L. (2008, p. 185) defendem que “o confronto entre a necessidade de responder a uma solicitação e a consciencialização de que é necessário desenvolver mecanismos de procura de resposta, promove também a regulação da aprendizagem”. As ações de pensar, analisar, entender o problema antes de agir revelam um aluno ativo, reflexivo e responsável por sua aprendizagem, uma vez que precisa desenvolver os procedimentos necessários para alcançar êxito em uma dada estratégia.

Na resposta do aluno EM11CDI13 a Q2, há indícios de o aluno reconhecer sua evolução e de como pode ser percebida em sua atividade de estudante:

> *“Sim [fazer a prova modificou minha atuação na disciplina], eu comecei a entender melhor a linguagem matemática, ligando melhor o nome de coisas a que eu tenho que fazer, isso me atrapalhava muito e também me ajudou na realização de exercícios dessa e de outras matérias que para sua resolução necessita de algum destes conhecimentos básicos de matemática.” (EM11CDI13, resposta a Q2).*

O aluno apresenta uma avaliação sobre a sua atitude perante sua aprendizagem e competências desenvolvidas, o que favorece gerir seu desempenho e refletir sobre ele, tornando-se regulador da sua aprendizagem. O aluno, ao se autoavaliar, compara o que fez com aquilo que espera fazer, reconhecendo as diferenças e, numa segunda fase, age para reduzir essas diferenças. A Prova em Fases oportuniza esse segundo momento, uma vez que a cada fase pode retomar as suas produções escritas anteriores.

As respostas dos alunos EM11CDI03, EM11CDI37, EM11CDI45, EM11CDI47 a Q2 não revelam nenhum indício de que a Prova em Fases possa tem modificado a atitude dos alunos na direção de regular as suas aprendizagens.

As respostas dos alunos EM11CDI03, EM11CDI45 revelam que consideram possuir lacunas e dificuldades com relação aos conteúdos abordados na Prova em Fases, mas não que ela os tenha assistido ou gerado uma oportunidade de aprendizagem. Além disso, suas respostas não dão indícios de mudanças de atitude em relação às suas dificuldades, eles apenas as reconhecem.

> *“No meu caso não notei muita diferença, pois tenho dificuldade na parte de funções e limites, sendo assim não consigo realizar esta prova.” (EM11CDI03, resposta a Q2).*
>
> *“Bem sutilmente. Com a grande dificuldade na matéria e na matemática isso torna um pouco complicado.” (EM11CDI45, resposta a Q2).*

Para um aluno regular sua aprendizagem, precisa conhecer seu poder matemático, seus modos de estudos mais adequados e ser autônomo ao seguir um seu trajeto de aprendizagem (sempre guiado pelo professor).

Para o aluno EM11CDI37, a Prova em Fases parece que não só não o assistiu com relação às suas dificuldades, ou que não foi uma oportunidade de aprendizagem, como o fez desorientar-se em relação a outras disciplinas. Isso pode ser reflexo de uma mudança brusca do papel que a escola/universidade exige do aluno, possivelmente, não conseguiu administrar o papel de participante ativo no processo educacional e a professora/pesquisadora não conseguiu atentar-se para esse fato, assistindo-o de forma mais direta, sugerindo participações em horários de atendimentos individuais, monitorias.

> *“Um pouco. Pensando em alcançar um melhor desempenho acabei por deixar outras matérias de lado e me dedicar a matemática. Não obter o desempenho que esperava, não por falta de interesse a minha parte, e sim por não conseguir em muitos momentos interpretar o conteúdo solicitado diante da prova, desta maneira deixando por algumas vezes de*

> *freqüentar a prova em fases para estudar mais." (EM11CDI37, resposta a Q2)*

É fundamental nessa prática que o aluno seja ativo e autônomo a respeito de sua aprendizagem, mas não menos fundamental é o professor observar e guiar esse caminho ao que se deseja, por meio de *feedbacks* de qualidade e de uma assistência específica às necessidade de cada aluno. Parece que, neste caso, o aluno não se sentiu guiado.

Já a resposta do aluno EM11CDI47 revela indícios de que o aluno não reconheceu a Prova em Fases como um recurso para a sua aprendizagem, mas para a aplicação de seus conhecimentos como uma prova escrita tradicional.

> *"Sim, pois algumas coisas que eu aprendi posso aplicar na prova de fases." (EM11CDI47, resposta a Q2)*

Uma forma de ressignicar a avaliação da aprendizagem nas salas de aula como uma oportunidade de aprendizagem, é, por meio da Prova em Fases, mostrar insistentemente ao aluno que a sua produção escrita é o texto de um diálogo entre aluno e professor na direção de trazer um enriquecimento de seus conhecimentos matemáticos, e não de ser aplicação de um conhecimento a ser conferido como correto ou errado.

As respostas a Q3 podem ser divididas em três grupos. No primeiro, as respostas dão indícios de alguma mudança da atitude dos alunos com relação aos seus processos de aprendizagem, na direção de se tornarem sujeitos mais críticos, reflexivos e autônomos. Esse grupo é composto pelas respostas dos alunos EM11CDI01, EM11CDI03, EM11CDI04, EM11CDI07, EM11CDI08, EM11CDI09, EM11CDI12, EM11CDI13, EM11CDI14, EM11CDI17, EM11CDI19, EM11CDI23, EM11CDI25, EM11CDI30, EM11CDI37, EM11CDI39, EM11CDI40, EM11CDI43. No segundo, as respostas parecem relacionar a mudança com relação aos conteúdos aprendidos: sendo as respostas dos alunos: EM11CDI05, EM11CDI06, EM11CDI10, EM11CDI15, EM11CDI16, EM11CDI21, EM11CDI22, EM11CDI26, EM11CDI27, EM11CDI29, EM11CDI33, EM11CDI34, EM11CDI41, EM11CDI42, EM11CDI44, EM11CDI45, EM11CDI48. E o terceiro grupo com as respostas dos alunos que não apresentaram nenhum indício de modificação em sua atuação nas outras disciplinas, sendo elas: EM11CDI18, EM11CDI20, EM11CDI47.

A resposta do aluno EM11CDI01 a Q3 fortalece os indícios de que a Prova em Fases pode ser usada como um recurso para a regulação da aprendizagem e um caminho para promover a autonomia do aluno em seus processos de aprendizagem, percebendo as suas dificuldades, analisando-as e buscando meios para superá-las.

> *"Sim [fazer a prova modificou minha atuação na disciplina], Essa prova me ajudou e ensinou a correr atrás do que eu preciso e não ficar esperando tudo na mão. Também aprendi a revisar o conteúdo do Ensino Médio em outras matérias facilitando assim meu aprendizado e enriquecendo minhas informações." (EM11CDI25, resposta a Q3).*

Conforme Dias P. e Santos L. (2010b, p. 5), "para aprender um aluno precisa compreender as estratégias a que pode recorrer, colocando-as ao seu serviço, assim como ser capaz de selecionar as mais adequadas, monitorando e avaliando o uso que delas faz". Sem ter a pretensão de generalizar as respostas dos alunos e as inferências a partir delas, nesta pesquisa a Prova em Fases, aliada às intervenções escritas a partir da análise da produção escrita, favoreceu ao aluno analisar a sua produção escrita, desenvolvendo o senso crítico, a reflexão e a autonomia.

Contudo, a partir da grande maioria das respostas dos alunos aos questionamentos Q1, Q2 e Q3, evidencia-se que a interação escrita promovida por meio da Prova em Fases constitui uma forma de levar à prática de uma avaliação a serviço da regulação da aprendizagem, tornando-se um meio de orientar o aluno e promover a reflexão a respeito de sua aprendizagem.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde o ínicio desta pesquisa, durante a elaboração da prova, a escolha da turma e toda a sua aplicação (10 fases), havia a preocupação de encontrar elementos que pudessem subsidiar a utilização da Prova em Fases como recurso para a regulação da aprendizagem - objetivo geral desta investigação.

A partir das reflexões realizadas, tendo em vista também os objetivos específicos, retomam-se aqui, de modo geral, algumas das considerações feitas ao longo da pesquisa. A partir dessas reflexões também surgiram contextos de possíveis outras pesquisas aqui anunciados.

7.1 A PROVA EM FASES – ALGUMAS CONSIDERAÇÕES DE SUA POTENCIALIDADE

A Prova em Fases revelou-se um recurso profícuo que permite ao professor recolher informações e guiar o aluno em suas aprendizagens a cada momento do processo por meio de oportunas intervenções escritas. Nessa direção a Prova em Fases serviu a uma avaliação que inventariou, diagnosticou e prognosticou funções da avaliação apresentadas por Hadji (1994).

A potencialidade dessa Prova em Fases enquanto um recurso de ensino mostrou-se dependende direta da qualidade das intervenções escritas da professora/pesquisadora, uma vez que é por meio delas que o professor guia o aluno em sua aprendizagem e intervém nas competências requeridas das questões. Com relação à aprendizagem, esse recurso oportunizou ao aluno desempenhar o papel de protagonista, em um processo baseado nas suas próprias produções escritas, no qual revisitou ou desenvolveu conhecimentos matemáticos básicos para a disciplina de Cálculo.

Já com relação a sua potencialidade como rescurso para a avaliação, a Prova em Fases, aliada à análise da produção escrita, mostrou ser um meio de superar um modelo tradicional classificatório, proveniente de práticas baseadas na transmissão e verificação de conteúdos e que buscam homonegeneizar os resultados, na medida em que permitiu à professora rever a sua ação e suas escolhas didáticas e aos alunos, repensar suas estratégias de estudo e regular suas produções escritas.

As limitações do uso deste instrumento em uma sala de aula centram-se essencialmente no professor e estão associados à sobrecarga de trabalho que o seu uso pode acarretar, uma vez que as intervenções individuais do professor podem tornar individualizadas as provas, o que demandará um tempo para fazer intervenções oportunas, de modo a guiar cada aluno em relação as suas próprias escolhas. Uma possibilidade é o professor escolher um número reduzido de questões e buscar, a cada fase, formar grupos de alunos com intervenções comuns (uma espécie de Prova em Fases em grupo). Essa possibilidade pode vir a ser objeto de pesquisa do papel das intervenções de colegas na regulação da aprendizagem de cada aluno.

Com relação às características de "boas" questões para compor uma Prova em Fases, este trabalho mostrou que, mais que "boas" questões, é preciso haver boas intervenções escritas, pois por meio delas é possível flexibilizar e oportunizar que os alunos apresentem seu poder matemático, bem como abrir a possibilidade de realizar uma reinvenção-guiada, com a qual o aluno pode iniciar um processo de matematização, seguindo seu próprio percuso de aprendizagem.

Por meio dos materiais colhidos nesta pesquisa, é possível dizer que o professor, ao fazer uso de uma Prova em Fases, tem a possibilidade de:

- desenvolver um diálogo escrito com o aluno que vai ao encontro do principal propósito da avaliação escolar: promover a aprendizagem;
- elaborar para os seus alunos retornos a respeito de seus trabalhos – o *feedback* proposto na RME (DE LANGE, 1987, 1999; VAN DEN HEUVEL- PANHUIZEN, 1996);
- analisar o desenvolvimento do trabalho do estudante a cada momento para fazer as intervenções oportunas ao longo do processo de aprendizagem;
- olhar a produção dos alunos na direção de ver o que eles sabem, em vez do que eles não sabem (DE LANGE, 1987, 1999);

- analisar o desenvovimento do aluno e o seu modo de lidar com ferramentas matemáticas;
- flexibilizar as competências requeridas em uma questão, na direção de dar a oportunidade de todos os alunos apresentarem uma evolução em relação aos seus conhececimentos matemáticos, e não em comparação com outrem;
- repensar e reorientar o encaminhamento das aulas a partir das informações de cada fase;
- proporcionar momentos oportunos para, em sala de aula, discutir as diferentes maneiras de lidar encontradas nas quais o diálogo escrito não foi suficiente;
- promover uma flexibilização na ordem dos conteúdos a serem ensinados;
- guiar cada aluno em seu processo de aprender por meio da análise de sua própria produção escrita, favorecendo o desenvolvimento de diferentes níveis de competência;
- construir uma grade de correção que reflita o percurso percorrido pelo aluno.

Ao aluno, por meio de suas produções escritas, é dada a possibilidade de:

- aprender em momentos de avaliação;
- seguir um seu trajeto de aprendizagem e de avaliação;
- reorientar suas práticas associadas ao processo de aprendizagem e aos seus modos de estudar;
- participar de um diálogo escrito que traga enriquecimento a seus conhecimentos matemáticos;
- diagnosticar suas lacunas e suas dificuldades com relação ao conteúdo abordado na prova a partir da reflexão a respeito de sua produção;
- autoavaliar;
- refletir sobre uma produção e utilizá-la para prosseguir em sua aprendizagem;
- desenvolver autonomia no sentido de ser protagonista de seu processo de aprender;

- revisitar e elaborar conhecimentos matemáticos.

Por conseguinte, essas possibilidades permitem ao professor e ao aluno regular seus processos de ensino e de aprendizagem.

7.2 Um Repensar a Prática Letiva a Partir do Contexto desta Pesquisa

Espera-se que nas salas de aula o processo avaliativo preste-se à regulação das aprendizagens, na qual o aluno seja orientado para que situe, ele mesmo, suas dificuldades e analise e descubra, ou pelo menos operacionalize os procedimentos que lhe permitam progredir (HADJI, 2001).

Um processo de avaliação a serviço da aprendizagem não se configura plenamente em uma sala de aula sem um repensar de toda a prática pedagógica, uma vez que não é possível pensar um aluno ativo e autônomo em momentos de avaliação, e passivo na condição de apenas observador em aulas que apresentam um raciocínio pronto e acabado. Até porque a prática avaliativa é um elemento da prática pedagógica, realizada permanentemente, com tarefas que não se diferenciam das tarefas de sala de aula (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996; BARLOW; 2006)

Nessa direção, acredita-se que uma maneira de potencializar a tomada de consciência dos alunos a respeito de seus processos de regulação da aprendizagem observada no lidar com a Prova em Fases nesta pesquisa, seja: ter a oportunidade de vivenciar um progressivo processo de matematização por meio de tarefas propostas em sala de aula, refletindo e compartilhando com os colegas as ferramentas matemáticas utilizadas. Pressupõe-se que essas tarefas funcionem como pontos de ancoragem para a reinvenção da matemática por parte dos alunos, ajudando-os a estabelecer relações do conhecimento informal e formal. Isto é, construir um espaço de aprendizagem baseado nos pressupostos da RME .

A partir do lidar com essas tarefas, presume-se que o aluno aprenda, por meio de sua produção, não só no fazer, mas progressivamente no entender e no explicar suas escolhas, sendo capaz de corrigi-las assim como às dos colegas. Com isso, pode-se dizer que o aluno desenvolve uma tarefa em fases (não basta resolver, precisa também refletir, comunicar, validar as ferramentas matemáticas), em que tem a oportunidade de regular a sua aprendizagem e orientar a aprendizagem de seus colegas. Nesse contexto o professor é um guia, não apenas por intervenções escritas.

A experiência de fazer este estudo mostrou que é possível o professor, por meio de intervenções escritas, guiar o aluno para o entendimento do que se deseja na disciplina em tela. Entretanto, esse resultado não diminui os outros modos de intervir do professor, ao contrário, agrega possibilidades.

A partir desse olhar, elaborado ao longo das discussões no GEPEMA e no desenvolvimento desta pesquisa, não foi possível à professora/pesquisadora ir para as suas aulas de Cálculo sem buscar tarefas que julgou serem ancoragem para um ensino que favorece ao aluno regular a sua aprendizagem. Assim, a elaboração/adaptação de tarefas de Cálculo tem sido o mote do projeto de pesquisa intitulado “Problemas de contexto para o ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral”, que, a partir de 2012, vem sendo desenvolvido na UTFPR, câmpus Londrina, sob coordenação desta pesquisadora e de seu colega Prof. Dr. André Luis Trevisan também membro do GEPEMA, que desenvolveu sua tese[68] com a mesma orientadora.

No mesmo sentido desse projeto, podem ser desenvolvidas novas pesquisas com o desafio de organizar tarefas de Cálculo Diferencial e Integral em ambientes que ofereçam aos estudantes oportunidades para matematizar, para “re-inventar” matemática, com o intuito de propiciar o desenvolvimento de competências de conexão e de reflexão; tarefas que possibilitam explorar a intuição e a capacidade de organizar matematicamente situações que sejam “realizáveis” para que, guiados pelo professor, os estudantes possam construir conceitos formalizados referentes aos tópicos do curso de Cálculo Diferencial e integral.

Uma intenção subjacente a este trabalho é a de servir como uma forma de fazer nascer experiências comprometidas com outros instrumentos de avaliação, reconhecendo neles recursos para fazer da avaliação uma oportunidade de aprendizagem, em especial, para a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

[68] Trevisan, 2013.

REFERÊNCIAS

ALLAL, L. Estratégias de avaliação formativa: concepções psicopedagógicas e modalidades de aplicação. In: ALLAL, L.; CARDINET, J.; PERRENOUD, P. (org.). **A avaliação num ensino diferenciado**. Coimbra: Almedina, p. 175-209, 1986.

ALMEIDA, V. L. C. de. **Questões não-rotineiras**: a produção escrita de alunos da graduação em Matemática. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

ALVES, R. M. F. **Estudo da produção escrita de alunos do Ensino Médio em questões de matemática**. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

BALDINO, R. R. Ensino Remedial em Recuperação Paralela .**Zetetiké**. FE-Unicamp, v.2, n. 3, p. 73-95, 1995.

BARICHELLO, L. **Análise de resoluções de problemas de cálculo diferencial em um ambiente de interação escrita**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2008.

BARLOW, M. **Avaliação escolar**: mitos e realidades. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BEZERRA, G.C. **Registros escritos de alunos em questões não-rotineiras da área de conteúdo quantidade**: um estudo. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

BURIASCO, R. L. C. de. **Avaliação em Matemática**: um estudo das respostas de alunos e professores. 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Marília, 1999.

BURIASCO, R. L. C. de. Análise da produção escrita: a busca do conhecimento escondido. In: XII ENDIPE - Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino, 2004, Curitiba. **Anais**. Curitiba: Editora Champagnat, 2004. v. 3, p. 243-251.

BURIASCO, R. L. C.; SOARES, M. T. C. Avaliação de sistemas escolares: da classificação dos alunos à perspectivas de análise de sua produção matemática. In: VALENTE, W. R. (org.). **Avaliação em Matemática**: história e perspectivas atuais. Campinas: Papirus, p. 1001-142, 2008.

BURIASCO, R. L. C.; FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A. B. Avaliação como prática de investigação (alguns apontamentos). **BOLEMA** - Boletim de Educação Matemática, UNESP - Rio Claro, v. 22, n. 33, p. 69-96, 2009.

CELESTE, L. B. **A Produção Escrita de alunos do Ensino Fundamental em questões de matemática do PISA**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2008.

CIANI, A. B. **O realístico em questões não-rotineiras de Matemática**. 2012. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

CURY, H. N. Análise de erros em cálculo diferencial e integral: resultados de investigações em cursos de engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, COBENGE, 31, 2003, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: IME, 2003.

CURY, H. N. Aprendizagem em cálculo: uma experiência com avaliação formativa. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, CNMAC, 28, 2005, Santo Amaro, SP. **Anais ...** Santo Amaro, SP: SBMAC, 2005.

DALTO, J. O. **A produção escrita em matemática**: análise interpretativa da questão discursiva de matemática comum à 8ª série do ensino fundamental e a 3ª série do ensino médio da AVA/2002. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

DE LANGE, J. **Mathematics, Insight and Meaning**. Utrecht: OW &OC, 1987.

DE LANGE, J. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Utrecht: Freudenthal Institute and National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 1999.

DE LANGE, J. Mathematics for Literacy. In: MADISON, B. L.; STEEN, L. A. (eds). **Quantitative Literacy**: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges. Princeton, New Jersey: National Council on Education and the Disciplines, 2003, p. 75 – 89.

DIAS, P. **Práticas letivas promotoras da regulação das aprendizagens pelos alunos**. 2009. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

DIAS, P.; SANTOS, L. Reflectir antes de agir: a avaliação reguladora em Matemática. In: L. Menezes, L.; Santos, H.; Gomes, C.; Rodrigues, C. (org.). **Avaliação em Matemática**: problemas e desafios. Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, 2008, p. 183 – 194.

DIAS, P.; SANTOS, L. A intencionalidade de uma professora no desenvolvimento da auto-regulação das aprendizagens matemáticas. In: SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, SIEM, 21, 2010a, Vieiro. **Anais...** SIEM, 2010, p. 109 – 125.

DIAS, P.; SANTOS, L. Práticas avaliativas e auto-regulação da aprendizagem matemática pelos alunos. In: ENCONTRO NACIONAL DE JOVENS INVESTIGADORES EM EDUCAÇÃO, ENJIE, 2010b, Aveiro. **Anais...**ENJIE – Desafios teóricos e metodológicos emergentes em Educação, 2010.

DIAS, S.; SANTOS, L. Por que razão é importante identificar e analisar os erros e dificuldades dos alunos? O *feedback* regulador. In: L. Menezes, L.; Santos, H.; Gomes, C.; Rodrigues, C. (org.). **Avaliação em Matemática**: Problemas e desafios. Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, 2008, p.133-143.

ESTEBAN, M. T. Avaliar: ato tecido pelas imprecisões do cotidiano. In: GARCIA, R.L. (Org.). **Novos olhares sobre a alfabetização**. São Paulo: Cortez, 2000. p.175-192.

ESTEBAN, M. T. A avaliação no cotidiano escolar. In: ESTEBAN, M. T. et al. **Avaliação**: uma prática em busca de novos sentidos. 5 ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2003, p. 7-28.

FERREIRA, P. E. A. **Análise da produção escrita de professores da Educação Básica em questões não-rotineiras de matemática**. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

FERREIRA, P. E. A. **Enunciados de Tarefas de Matemática**: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística. 2013. 121f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

FERRAZ, M. J. et al. A Avaliação Formativa: algumas notas. In: I.I.E. (ed.). **Pensar Avaliação, Melhorar a Apredizagem**. Lisboa: I.I.E., 1994, p.1-17.

FIGUEIREDO, N. Realistic Mathematics Education: a different approach to learning and instruction. **Quadrante**, Lisboa, v.9, n.1, p. 87-107, 2000.

FREUDENTHAL, H. Why to teach mathematics so as to be useful. **Educational Studies in Mathematics.** Holanda, v. 1, n. 1-2, p. 3-8, 1968.

FREUDENTHAL, H.. Geometry between the devil and the deep sea. **Educational Studies in Mathematics**. Holanda, v. 3, n. 3-4, p. 413-435, 1971.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an Educational Task**. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1973.

FREUDENTHAL, H. Matemática nova ou educação nova? **Perspectivas,** Portugal, v. 9, n.3, p. 317-328, 1979.

FREUDENTHAL, H.. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1983.

FREUDENTHAL, H.. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GRAVEMEIJER, K. P. E. **Developing realistic mathematics education**. Utrecht: Utrecht University, 1994.

GRAVEMEIJER, K. P. E. Creating Opportunities for Students to Reinvent Mathematics. In: **The Proceedings of ICME-10**, Kopenhagen, Dinamarca, 2004.

GRAVEMEIJER, K. P. E. O que torna a Matemática tão difícil e o que podemos fazer para o alterar? **Educação matemática**: caminhos e encruzilhadas. Lisboa: APM, p. 83-101, 2005.

HADJI, C. **A avaliação, regras do jogo**: das intenções aos instrumentos. Tradução Júlia Lopes Ferreira e José Manuel Cláudio. 4. ed. Portugal: Porto, 1994.

HADJI, C. **Avaliação desmistificada**. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

INTERVIR. In: HOUAISS, A. **Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. CD-ROM.

LIMA, R. C. N. de; BURIASCO, R. L. C. Saberes revelados em questões discursivas numa prova de Matemática da 4a. série. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, EBRAPEM, 21, 2007, Curitiba. **Anais** ....Curitiba: UFPR, 2007. v. 1. p. 1-13.

LOPEZ, J. M. S. **Análise interpretativa de questões não-rotineiras de matemática**. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2010.

MENDES, M. T; TREVISAN, A. L; BURIASCO, R. L. C. Possibilidades de intervenção num contexto de ensino e avaliação em matemática. **EM TEIA**: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 3, p. 01-13, 2012.

MORAES, M. A. G. **Correção de uma prova escrita de matemática**: algumas considerações. 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

NAGY-SILVA, M. C. **Do Observável ao Oculto:** um estudo da produção escrita de alunos da 4ª série em questões de matemática. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

NASCIMENTO, J. L. A recuperação dos pré-conceitos do Cálculo. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, COBENGE, 28, 2000, Ouro Preto, MG, **Anais**...Ouro Preto: UFOP, 2000.

NEGRÃO DE LIMA, R. C. **Avaliação em Matemática**: análise da produção escrita de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental em questões discursivas. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2006.

OLIVEIRA, R. C. de. **Matematização**: estudo de um processo. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PEDROCHI JUNIOR, O. **Avaliação como oportunidade de aprendizagem em matemática**. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

PEDROSO, C.M. Análise de alternativas para recuperação de fundamentos de matemática no ensino de cálculo em cursos de engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, COBENGE, 27, 2009, Recife, PE, **Anais...**Recife: POLI/UPE, 2009.

PEREGO, F. **O que a produção escrita pode revelar? Uma análise de questões de matemática**. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006.

PEREGO, S. C. **Questões Abertas de Matemática: Um estudo de Registros Escritos**. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

PIRES, M. N. M.; BURIASCO, R. L. C. de. Prova em fases: uma oportunidade para aprender**.** In: I SIPERE, 2011, Curitiba. **Anais** eletrônico do 1º SIPERE, Curitiba, 2011, p. 146-155.

PIRES, M. N. M. **Oportunidade para aprender**: uma Prática da Reinvenção Guiada na Prova em Fases. 2013. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

PUIG, L. Análisis fenomenológico. In: RICO, L. (org.) **La educación matemática em la enseñanza secunduaria**. Barcelona: Horsori/ICE, 1997, p. 61-94.

REGULAR. In: HOUAISS, A. **Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. CD-ROM.

REIS, F. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise**: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos. 2001. 302f. Tese (Doutorado Programa de Pós-Graduação em Educação), UNICAMP, Campinas, 2001.

REIS, F. S. Rigor e intuição no ensino de cálculo e análise. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: pesquisas e debates. Recife: SBEM, p. 81-97, 2009.

SADLER, D. R. Formative assessment: Revisiting the territory. In: **Assessment in Education**, v. 5(1), 1998, p. 77 – 84.

SANTOS, E. R. dos. **Estudo da Produção Escrita de Estudantes do Ensino Médio em Questões Discursivas Não Rotineiras de Matemática**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

SANTOS, E. R. dos. **Análise da produção escrita em matemática**: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

SANTOS, L. Auto-avaliação regulada. Porquê, o quê e como? In: ABRANTES, P.; ARAUJO, F. (coord.). **Reorganização Curricular do Ensino Básico**. **Avaliação das Aprendizagens - Das concepções às práticas**. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica, 2002.

SANTOS, L. Avaliar competências: uma tarefa impossível? **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 74, p. 16-21, 2003.

SANTOS, L.; DIAS, S. Como entendem os alunos o que lhes dizem os professores? A complexidade do feedback. In: **Profmat2006** (CD-ROM). Lisboa: APM, 2006.

SANTOS, L. Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In: MENEZES, L.; SANTOS, L.; GOMES, H.; RODRIGUES, C. (eds.). **Avaliação em Matemática**: Problemas e desafios. Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, 2008. p. 11-35.

SEGURA, R. O. **Estudo da Produção Escrita de Professores em Questões Discursivas de Matemática**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

TREFFERS, A. **Three dimensions**: a model of goal and theory description in mathematics instruction – the wiskobas project. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987.

TREVISAN, A. L.. **Prova em fases e um repensar da prática avaliativa em Matemática**. 2013. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. **Assessment and Realistic Mathematics Education**. Utrecht: CD-ß Press/Freudenthal Institute, Utrecht University, 1996.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. Mathematics education in the Netherlands: a guided tour. In: **Freudenthal Institute**. Utrecht: Utrecht University, 2000. CD-ROM.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. A Learning-teaching trajectory as a hold for teaching primary-school mathematics in the Netherlands. In: TZAKAKI,

M. **Didactics of Mathematics and Informatics in Education**, 2001, Thessaloniki, Aristotle University of Thessaloniki/University of Macedonia, Thessaloniki, p.21-39.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. Realistic Mathematics Education: work in progress. In: LIN, F. L. (ed.), **Common Sense in Mathematics Education.** Proceedings of The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education, 2002, Taipei, Taiwan, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, p. 1–42.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In: **The Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**, 2010, Australia, p. 3-7.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. **O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

VIOLA DOS SANTOS, J. R; BURIASCO, R. L. C de; CIANI, A. B. Uma análise interpretativa da produção escrita em matemática de alunos da escola básica. In: **Zetetiké.** FE-Unicamp, v. 16, n. 30, p. 11-44, 2008.

VIOLA DOS SANTOS, J. R.; BURIASCO, R. L. C. de; FERREIRA, P. E.A. Interpretações de alunos da Educação Básica para a ideia de recorrência em uma questão aberta de matemática. **Educação Matemática Pesquisa** (Online), v. 12, p. 143-163, 2010.

APÊNDICES

APÊNDICE A - PLANO DE ENSINO DA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA

Ministério da Educação
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Campus Londrina

PLANO DE ENSINO

CURSO	Engenharia de Materiais	MATRIZ	02

FUNDAMENTAÇÃO LEGAL	Resolução nº 069/10 - COEPP, de 14 de maio de 2010 e Resolução nº 017/11 - COGEP, de 10 de junho de 2011.

DISCIPLINA/UNIDADE CURRICULAR	CÓDIGO	PERÍODO	CARGA HORÁRIA (aulas)					
			AT	AP	APS	AD	APCC	Total
Cálculo Diferencial e Integral 1	MA91A	1º	102	0	6	0	0	108

AT: Atividades Teóricas, AP: Atividades Práticas, APS: Atividades Práticas Supervisionadas, AD: Atividades a Distância, APCC: Atividades Práticas como Componente Curricular.

PRÉ-REQUISITO	Sem pré-requisito
EQUIVALÊNCIA	

OBJETIVOS

Estabelecer os conceitos básicos do Cálculo Diferencial e Integral para funções de uma variável real a fim de levar o aluno a se familiarizar com a linguagem da matemática e com os métodos de construção do conhecimento matemático, bem como capacitar os alunos para a resolução de problemas relacionados a área específica de formação.

EMENTA

Sistematização dos conjuntos numéricos; sistema cartesiano ortogonal; relações e funções reais de uma variável real; limites e continuidade de funções reais de uma variável real; estudo das derivadas de funções reais de uma variável real; estudo da variação de funções através dos sinais das derivadas; teoremas fundamentais do cálculo diferencial; estudo das diferenciais e suas aplicações; estudo das integrais indefinidas; estudo das integrais definidas; aplicações das integrais definidas; integrais impróprias.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

ITEM	EMENTA	CONTEÚDO
1	Sistematização dos Conjuntos Numéricos	Identificação dos conjuntos numéricos; o corpo dos números reais; a reta numerada real; valor absoluto, desigualdades reais e algumas propriedades algébricas dos números reais.
2	Sistema Cartesiano Ortogonal	Representação de dados em sistemas de eixos coordenados: Sistema Cartesiano Ortogonal.
3	Relações e Funções no Espaço Real Bidimensional	Definição de Relação e de Função; funções e representações gráficas de funções elementares; funções pares e ímpares; transformação de funções por meio de: translação, compressão e estiramento etc.; funções compostas; funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas; funções inversas; funções exponenciais e logarítmicas; funções trigonométricas e suas inversas. Equações paramétricas.
4	Limites e Continuidade de Funções Reais de Variável Real.	Conceito intuitivo de limites; definição de limites de funções reais; propriedades algébricas dos limites; obtenção de limites e limites laterais; limites envolvendo o infinito; limites fundamentais; continuidade de funções de uma variável real.
5	Estudo das Derivadas de Funções Reais de Variável Real.	Retas tangentes; a derivada por definição; interpretação geométrica da derivada; derivada como função real; diferenciabilidade e continuidade; propriedades algébricas das derivadas; a derivada como taxa de variação; regras de derivação: potência, produto, quociente; derivadas de funções trigonométricas; a regra da cadeia; derivação implícita; taxas relacionadas; derivadas de funções

		trigonométricas inversas; derivadas de funções exponenciais e logarítmicas.
6	Estudo da Variação de Funções através dos Sinais das Derivadas.	A forma do gráfico de uma função real a partir de sua derivada; extremos de funções de uma variável real.
7	Teoremas Fundamentais do cálculo Diferencial.	Teoremas Fundamentais do cálculo Diferencial: teorema do Valor Médio. Cálculo de limites indeterminados pela regra de L'Hôpital.
8	Estudo dos Diferenciais e suas Aplicações.	Linearização e diferenciais de funções de uma variável real e suas Aplicações.
9	Fórmula de Taylor e de McLaurin.	Fórmula de Taylor e de McLaurin.
10	Estudo das Integrais Indefinidas	Antiderivadas e a integral indefinida; interpretação geométrica da integral indefinida; equações diferenciais elementares: solução algébrica e interpretação gráfica; propriedades da integral indefinida; métodos de cálculo das integrais: integração por substituição, integração por partes, substituição trigonométrica; frações parciais.
11	Estudo das Integrais Definidas	Estimativas de somas finitas; integral definida a partir da Somas de Riemann; propriedades e cálculo das integrais definidas; o Teorema do Valor Médio e o Teorema Fundamental do Cálculo.
12	Aplicações das Integrais Definidas.	Resolução de problemas de variação total; cálculo de volumes por rotação em torno de um eixo; comprimento de curvas planas.
13	Integrais Impróprias	

PROFESSOR	TURMA
Marcele Tavares Mendes	EM11-EM11-01EM

ANO/SEMESTRE	CARGA HORÁRIA (aulas)					
	AT	AP	APS	AD	APCC	Total
2011/2	102		6			108

AT: Atividades Teóricas, AP: Atividades Práticas, APS: Atividades Práticas Supervisionadas, AD: Atividades a Distância, APCC: Atividades Práticas como Componente Curricular.

DIAS DAS AULAS PRESENCIAIS						
Dia da semana	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
Número de aulas no semestre			48		54	

PROGRAMAÇÃO E CONTEÚDOS DAS AULAS (PREVISÃO)

Dia/Mês ou Semana	Conteúdo das Aulas	Número de Aulas
10/08	Apresentação da disciplina: ementa, critérios de avaliação e condutas; **APRESENTAÇÃO DO APS – Cabo de Alta Tensão.** Definição de relação e função, definição e determinação de domínio, imagem, gráfico de funções.	3
12/08	Abordagem do conceito de limite por meio de situação problema.	3
17/08	Introdução ao estudo de Limites: noção intuitiva; definição de limite em um ponto; propriedades operatórias; funções definidas por partes; e limites laterais.	3
19/08	***Aplicação da prova de matemática básica – 1ª fase – 3 aulas.***	3
24/08	Cálculo de limites em um ponto; limites de funções racionais e algébricas, algumas formas indeterminadas.	3
26/08	Estudo de algumas formas indeterminadas. ***Aplicação da prova de matemática básica – 2ª fase – 1 aula***	3
31/08	Noção intuitiva de limites no infinito; propriedades operatórias de limites no infinito;	3
02/09	***Aplicação da prova de matemática básica – 3ª fase – 2 aulas*** Resolução de Exercícios.	3
09/09	Funções Exponenciais, Logarítmicas e Trigonométricas: conceitos básicos, propriedades, representação gráfica e estudo de limites fundamentais para estas funções.	3

PROGRAMAÇÃO E CONTEÚDOS DAS AULAS (PREVISÃO)		
Dia/Mês ou Semana	**Conteúdo das Aulas**	**Número de Aulas**
14/09	Continuidade de funções. Continuidade e Teoremas de Bolzano e do Valor intermediário. Resolução de Exercícios.	3
16/09	**Prova 2 e Entrega da APS (Fase 1)**	3
21/09	Retas tangentes; introdução as derivadas; a derivada por definição; interpretação geométrica da derivada. Derivada como função real; diferenciabilidade e continuidade.	3
23/09	Diferenciabilidade e continuidade. Dedução de regras de derivação por definição, das funções: constante, potência, múltiplo constante de uma função, propriedades de adição, multiplicação e divisão de funções; e exemplos de uso das regras.	3
28/09	***Aplicação da prova de matemática básica – 4ª fase – 2 aulas*** Derivadas de funções trigonométricas.	3
30/09	Derivadas de funções da função exponencial e logarítmica. Regra da Cadeia; derivadas de ordem superior. Derivadas implícitas; taxas relacionadas.	3
05/10	Taxas relacionadas. Estudo de extremos de funções, pontos de inflexão, concavidade. Gráficos por meio de transformações em funções elementares; paridade de funções; assíntotas verticais e horizontais.	3
07/10	Extremos relativos; gráfico de funções e propriedades gráficas; extremos Absolutos; Teorema do Valor Extremo; Teorema do valor médio.	3
14/10	***Aplicação da prova de matemática básica – 5ª fase – 2 aula*** Aplicações de Derivadas.	3
19/10	Aplicações de Derivadas.	3
21/10	Regra de L'Hopital.	
26/10	**Prova 3 e Entrega da APS (Fase 2)**	3
04/11	Introdução a integrais: antiderivadas; integrais indefinidas pelo Método da Substituição; introdução a integrais definidas, por Somas de Riemann.	3
09/11	Integral definida; teorema Fundamental do Cálculo; cálculo de áreas.	3
11/11	Volume de sólidos de revolução; Método de integração por Partes.	3
16/11	***Aplicação da prova de matemática básica – 6ª fase – 3 aulas***	3
18/11	Integração por frações parciais; integração por substituição trigonométrica.	3
23/11	Aplicações de integrais definidas e indefinidas; Lei de resfriamento de Newton.	3
25/11	Integrais Impróprias	3
30/11	Integrais Impróprias	3
02/12	**Prova 4 e Entrega da APS (Fase 3)**	3
07/12	***Aplicação da prova de matemática básica – 7ª fase – 2 aulas*** Vista de Prova.	3
09/12	**Prova de Recuperação**	3
14/12	Correção e Vista de prova.	3
16/12	Encerramento da Disciplina.	3

PROCEDIMENTOS DE ENSINO
AULAS TEORICAS
As aulas teóricas serão expositivas dialogadas permeadas com atividades de resolução de exercícios. Como meios de ensino serão utilizados: lousa e equipamento multimídia.
As aulas teóricas serão, em sua maioria, aulas expositivas, durante as quais os alunos serão incentivados a participar a fim de esclarecer as dúvidas e contribuir com exemplos e sugestões. No decorrer das aulas alguns momentos serão destinados a resolução de algumas atividades. Os alunos serão estimulados a conhecer e fazer uso de softwares que possam auxiliar na compreensão dos conceitos do Cálculo.
AULAS PRÁTICAS
Não consta
Não consta
ATIVIDADES PRÁTICAS SUPERVISIONADAS
A Atividade Prática Supervisionada (APS) consistirá na busca de solução de um problema de investigação multidisciplinar, fruto do Projeto Integrador do Curso.

O desenvolvimento da atividade se dará ao longo do semestre. Os alunos terão conhecimento do problema já na primeira semana de aula e terão uma semana para se organizarem em grupos de 5 alunos e iniciarem a busca da solução.

Para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, conforme as datas previstas na programação das aulas, os alunos deverão entregar soluções parciais, apresentando os conceitos buscados, o uso dos conceitos abordados nas disciplinas envolvidas e cálculos realizados. O professor devolverá o relatório parcial com novas perguntas que nortearão os próximos passos e pesquisas em busca da solução final, FASE 3 da APS, que deverá sistematizar todo o estudo realizado e abarcar todas as questões que nortearam o desenvolvimento da APS.

Os professores responsáveis pelas disciplinas envolvidas avaliaram em conjunto a APS e converterão as notas para sua disciplina de acordo com as condições especificadas em cada plano.

ATIVIDADES A DISTÂNCIA

Não consta

ATIVIDADES PRÁTICAS COMO COMPONENTE CURRICULAR

Não consta

PROCEDIMENTOS DE AVALIAÇÃO

A Avaliação nesta disciplina se dará ao longo do semestre por meio de quatro avaliações parciais de igual valor (10,0). Cada avaliação será composta por uma prova escrita e/ou por demais atividades desenvolvidas como complemento às provas e que poderão ser com consulta ou em duplas, em sala de aula ou extraclasse. A nota final será obtida por meio da média aritmética de quatro notas parciais resultantes das avaliações parciais após a computação da substituição ou não da menor nota por meio da prova substitutiva.

A Avaliação nesta disciplina se dará ao longo do semestre por meio de quatro avaliações parciais de igual valor (10,0). Cada avaliação será composta por uma prova escrita e/ou por demais atividades desenvolvidas como complemento às provas e que poderão ser com consulta ou em duplas, em sala de aula ou extraclasse.

Descrição das Avaliações Parciais:
1ª Avaliação Parcial: Como instrumento de avaliação, será utilizada uma prova contemplando os conteúdos dos três primeiros blocos do conteúdo programático, e que será realizada individualmente e sem consulta, em sete fases, conforme cronograma que segue:

19/08	*Aplicação da prova de matemática básica – 1ª fase – 3 aulas.*
26/08	*Aplicação da prova de matemática básica – 2ª fase – 1 aula*
02/09	*Aplicação da prova de matemática básica – 3ª fase – 2 aulas*
28/09	*Aplicação da prova de matemática básica – 4ª fase – 2 aulas*
14/10	*Aplicação da prova de matemática básica – 5ª fase – 2 aulas*
16/11	*Aplicação da prova de matemática básica – 6ª fase – 3 aulas*
07/12	*Aplicação da prova de matemática básica – 7ª fase – 2 aulas*

Não haverá indicação de quais questões devem ser resolvidas em cada etapa, de modo que os próprios alunos devem ser capazes de identificá-las, podendo alterar as resoluções, nas etapas subsequentes, sempre que julgarem necessário, caracterizando uma proposta de reavaliação. Além disso, ao fim de cada, ao lado de cada resolução, será apresentado um questionamento, independentemente de estar correta ou incorreta, de modo que os alunos possam refletir sobre as resoluções apresentadas. A nota final será atribuída ao fim da última etapa com valor de 10 pontos.

2ª Avaliação Parcial: A segunda avaliação será composta de atividades (trabalhos e listas de exercícios) com valor de 1,0 ponto, e prova escrita individual valendo 9,0 pontos.
Data da 2ª Prova escrita: 16/09
Data de entrega do Trabalho de APS (Fase 1): 16/09

3ª Avaliação Parcial: A terceira avaliação será composta de atividades (trabalhos e listas de exercícios) com valor de 1,0 ponto, desenvolvimento e entrega das APS (Fase 2) com valor de 1 ponto e prova escrita individual valendo 8,0 pontos.
Data da 3ª Prova escrita: 26/10
Data de entrega do Trabalho de APS (Fase 2): 26/10

3ª Avaliação Parcial: A terceira avaliação será composta de atividades (trabalhos e listas de exercícios) com valor de 1,0 ponto, desenvolvimento e entrega das APS (Fase 3) com valor de 1 pontos e prova escrita individual valendo 8,0 pontos.
Data da 3ª Prova escrita: 02/12
Data de entrega do Trabalho de APS (Fase 3): 02/12

Ao final do semestre haverá um momento de recuperação, na qual, por meio de uma prova substitutiva que contempla o conteúdo de todo o bimestre o aluno substituirá a nota da menor avaliação parcial. O aluno deve estar ciente de que, ao comparecer à recuperação, será computada a nota obtida no local da menor nota parcial, mesmo que esta seja menor.

A **nota final** será obtida por meio da média aritmética de quatro notas parciais resultantes das avaliações parciais após a computação da substituição ou não da menor nota por meio da prova substitutiva.

Data da Prova de Recuperação: 09/12 (o conteúdo abordado será o mesmo de todas provas escritas realizadas das três últimas avaliações parciais).

REFERÊNCIAS

Referencias Básicas:
ANTON, H., BIVENS, I. e DAVIS, S. *Cálculo*. vol. 1 e vol. 2. Tradução: Claus I. Doering. 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.
FLEMMING, D. M. e GONÇALVES, M. B. *Cálculo A.*: Funções, limite, derivação, integração. Makron Books do Brasil: Editora da UFSC, 1992.
LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. vol.I e vol.II. São Paulo: Harbra, 1994.
STEWART, James. *Cálculo*. Vol. I. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005

Referências Complementares:
GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*, vol.1. LTC Editora, Rio de Janeiro, RJ: 2001.
HOFFMANN, Laurence D. *Cálculo*: um curso moderno e suas aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
FINNEY, R. L; WEIR, M. D; GIORDANO, F. R. *Cálculo de George B. Thomas*, vol. 2. 10ª edição. Trad. Cláudio H. Asano. São Paulo: Addison Wesley, 2003.
SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com geometria analítica*. Vol. 1 e 2. 2. ed. São Paulo: Makron Books do Brasil,1994.

ORIENTAÇÕES GERAIS

É aconselhado aos alunos, procurar o professor nos horários de permanência a fim de esclarecer dúvidas relacionadas ao conteúdo e buscar orientação para o estudo. Além disso, é muito importante procurar o professor, nos horários de atendimento, para fazer a vista de prova após a correção das mesmas, a fim de tomar ciência dos acertos e erros no desenvolvimento.

Assinatura do Professor

Assinatura do Coordenador do Curso

APÊNDICE B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Termo de consentimento livre e esclarecido

Tendo em vista a necessidade de coleta de dados para o desenvolvimento do projeto de investigação sobre a produção de estudantes que cursam Cálculo Diferencial e Integral, sob responsabilidade de Marcele Tavares, professora lotada no curso de Engenharia de Materiais da Universidade Tecnológica Federal do Paraná e aluna do Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina sob orientação da professora doutora Regina Luzia Corio de Buriasco, declaro que consinto que a mesma utilize integralmente ou em partes, meus registros escritos das aulas da disciplina de Cálculo Diferencial e Inegral, para fins de pesquisa, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área, sem restrições de prazo e citações, desde a presente data com a condição de que meu nome não seja citado, garantido o anonimato no relato da pesquisa. Declaro ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida. Abdicando direitos meus e de meus descendentes, subscrevo a presente carta.

Londrina, 09/10/2010.

Nome	Assinatura	N°. do documento

APÊNDICE C – ANUÊNCIA[69] DA UTFPR

[69] Apesar de constar no termo de anuência a solicitação para também trabalhar com os alunos do curso de Licenciatura em Química, nesta pesquisa foram utilizados apenas os dados recolhidos com os alunos do primeiro semestre de 2011/2 do curso de Engenharia de Materiais. Foi utilizado a Prova em Fases na turma dos alunos do curso de Licenciatura em Química 2011/2, mas não mais com a intenção de subsidiar essa pesquisa de doutorado por serem duas provas distintas com objetivos diferentes e considerar que os dados de uma turma suficiente para esta pesquisa.

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Departamento de Ensino
Coordenação Engenharia de Materiais

À chefe do Departamento de Ensino : Profª Ms. Janete Hruschka

De: Marcele Tavares, aluna regular do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina e professora desta Instituição.

Assunto: Solicitação para realização de um projeto de Avaliação da Aprendizagem em Cálculo diferencial e Integral I com os alunos do primeiro período de Engenharia de Materiais e do curso de Licenciatura em Química para fins de pesquisa do Doutorado.

TÍTULO DO PROJETO

Um olhar para a produção escrita de alunos que cursam Cálculo Diferencial e Integral

Venho por meio desta, solicitar a esta Instituição autorização para realizar um projeto com alunos do primeiro período de Engenharia de Materiais e de Licenciatura em Química.

Este projeto tem por finalidade a coleta de dados para subsidiar minha pesquisa de doutorado junto ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática e será desenvolvido a partir da investigação da produção escrita dos alunos em uma prova de matemática em várias fases ao longo do segundo semestre de 2011, na qual está inserida no processo avaliativo das disciplinas. Toma-se neste projeto a avaliação como prática de investigação, em que a análise da produção escrita mostra-se um instrumento que permite desvelar as dificuldades enfrentadas pelos envolvidos para ir além de medir os resultados do rendimento escolar, fornece pistas sobre o processo de matematizar dos alunos e, de modo especial, permite construir um contínuo referente acerca dos conteúdos envolvidos para melhorar as decisões relativas à aprendizagem dos alunos e instruir o aprendente sobre seu próprio percurso.

Na expectativa de fazer uso deste instrumento, pretendemos desenvolver com os alunos do curso de Química um processo avaliativo essencialmente formativo em que utilizará como fonte de informação, uma prova contemplando todo o conteúdo da disciplina no semestre, e que será realizada individualmente e sem consulta, em cinco fases, sendo a primeira realizada na primeira semana de aula e as outras ao longo do semestre conforme previsto no plano de ensino da disciplina. Já com os alunos de Engenharia de materiais será realizada uma prova, individual e sem consulta, em sete fases, na qual contempla os três primeiros blocos do conteúdo programático (conteúdos presentes no currículo de matemática do Ensino Médio), objetiva-se identificar e intervir nas possíveis dificuldades básicas que um aluno enfrenta ao cursar Cálculo Diferencial e Integral. Os demais conteúdos da disciplina serão avaliados por meio de provas escritas e trabalhos conforme especificado no plano de ensino da disciplina. Será solicitada autorização dos alunos para utilização de suas produções escritas em nossa pesquisa.

Agradecemos sua atenção e aguardamos autorização.

Londrina, 09 de agosto de 2011

Marcele Tavares

Marcele Tavares

De acordo

Prof. Fabiano Moreno Peres
Coordenador do Curso de Engenharia de Materiais
UTFPR - Campus Londrina
15/08/2011

De Acordo,
informar as coordenações coliq e coema

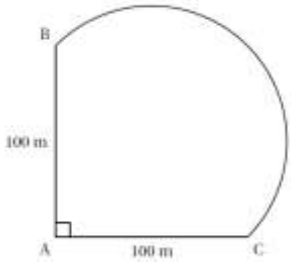
Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Campus Londrina
16.08.11

De acordo

Fábio Cezar Ferreira
Prof. Fábio Cezar Ferreira
Coordenador do Curso de Licenciatura em Química
UTFPR - Campus Londrina

APÊNDICE D – QUESTÕES DA PROVA EM FASES

1. O Sr. Silva tem um terreno com o seguinte formato:



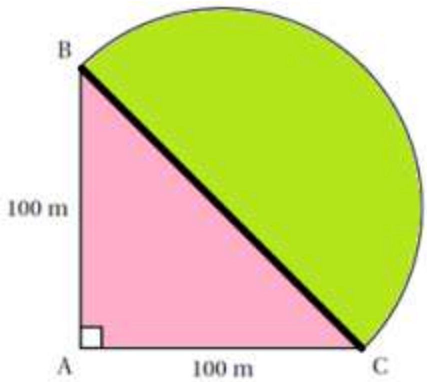
O lado $\overline{AB}$ do triângulo isósceles ABC mede $100\ m$, e o semicírculo tem um diâmetro $\overline{BC}$.

A) Calcule o valor exato da medida de $\overline{BC}$.

B) Calcule a área do terreno.

Resolução:

Pode-se calcular a área por meio da soma da área do triângulo BAC com a área do semicírculo de diâmetro $\overline{BC}$ (hipotenusa do triângulo BAC).



A_1: a área do triângulo retângulo BAC.
A_2: a área do semicírculo de diâmetro $\overline{BC}$
D: diâmetro da circunferência.

$$A_1 = \frac{100\ .100}{2} = 5000$$

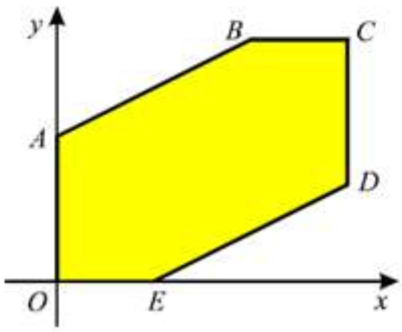
$$100^2 + 100^2 = D^2 \Longrightarrow D = 100\sqrt{2}$$

$$A_2 = \frac{\pi(50\sqrt{2})^2}{2} = 2500\pi$$

A área do terreno é de $2500(2+\pi)m^2$.

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Calcular área de figuras planas, utilizar o Teorema de Pitágoras, operar com números irracionais.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Identificação dos conjuntos numéricos; o corpo dos números reais. Definição de Relação e de Função.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Reconhecer e utilizar símbolos, códigos e nomenclaturas da linguagem matemática. Identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas. Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções. Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema. Identificar diferentes formas de quantificar dados numéricos para decidir se a resolução de um problema requer cálculo exato, aproximado.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE CONEXÃO

2. O hexágono $OABCDE$ está representado na figura a seguir, em um eixo cartesiano xOy.



Sabe-se que:

- os lados do hexágono são paralelos entre si e iguais dois a dois;
- os pontos A e E pertencem aos eixos coordenados Oy e Ox, respectivamente;
- o ponto B tem coordenadas $(4,5)$;
- o ponto D tem coordenadas $(6,2)$.

A) Determine as coordenadas dos pontos C, E e A.

B) Seja M o ponto simétrico do ponto B em relação ao eixo Oy e seja N o ponto da reta que contém $\overline{OD}$ e que é colinear aos pontos M e A. Determine as coordenadas do ponto N.

C) Escreva uma condição que define o segmento de reta $\overline{ED}$.

D) Escreva uma condição que define o conjunto dos pontos que constituem a região interior do hexágono.

Resolução:

A) C: mesma abscissa que D, pois $\overline{CD}//\overline{AO}$ e $\overline{AO}$ está contido no eixo$-y$.

Mesma ordenada que B, pois $\overline{BC}//\overline{OE}$ e $\overline{OE}$ está contido no eixo$-y$.

Logo, $C(6,5)$.

E: $|\overline{OE}| = |\overline{BC}| = \sqrt{(6-4)^2 + (5-5)^2} = 2$

Logo, como E pertence ao eixo-x tem-se que $E(2,0)$.

A: $|\overline{OA}| = |\overline{DC}| = \sqrt{(6-6)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{0+9} = 3$

Logo, como A pertence ao eixo-y tem-se que $A(0,3)$.

B) $M(-4,5)$: simétrico do ponto B em relação ao eixo$-y$.

Reta definida por $O(0,0)$ e $D(6,2)$.

$$m_1 = \frac{2-0}{6-0} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x$$

Reta definida por M e A: $M(-4{,}5)$ e $A(0{,}3)$

$$m_2 = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3.$$

N é o ponto de intersecção entre as duas retas:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 \end{cases}.$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{3}x = -\frac{1}{2}x + 3 \Longrightarrow \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x = 3 \Longrightarrow \frac{2x+3x}{6} = 3 \Longrightarrow 5x = 18 \Longrightarrow x = \frac{18}{5}.$$

Logo, $y = \frac{1}{3}\frac{18}{5} = \frac{6}{5}$. Portanto, $N(\frac{18}{5}, \frac{6}{5})$.

C) $\overline{ED}$:

$$m = \frac{2-0}{6-2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow y = \frac{1}{2}x - 1, x \in [2{,}6].$$

D) $0 < x < 6, 0 < y < 5$ tal que $-\frac{1}{2}x - 1 < y < \frac{1}{2}x + 3$.

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Representar coordenadas em sistemas de eixos coordenados; nomenclatura das coordenadas de um ponto; calcular a distância entre dois pontos; identificar coordenadas simétricas; determinar equação de reta; encontrar as coordendas de pontos de intersecção entre retas; resolver sistema linear de duas variáveis, elaborar desigualdades.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Desigualdades reais e algumas propriedades algébricas dos números reais. Representação de dados em sistemas de eixos coordenados – sistema cartesiano ortogonal. Funções elementares.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra; Reconhecer e utilizar símbolos, códigos e nomenclaturas da linguagem matemática. Identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas. Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO -** Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções. Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema. Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto. Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto. Interpretar, fazer uso e elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE REFLEXÃO

3. Para esta questão considera-se que a unidade de:

- comprimento é o centímetro;
- volume é o centímetro cúbico.

Ao colocar no fundo do cilindro (Figura 1) uma esfera de raio 6, constata-se que o cilindro fica totalmente cheio (Figura 2).

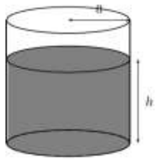


Figura 1

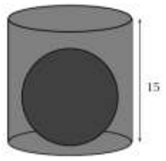


Figura 2

Deduza o valor do comprimento da altura h (Figura 1) do cilindro antes de a esfera ser colocada.

Resolução:

V_e: Volume da esfera:

$$V_e = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V_e = \frac{4}{3}\pi 6^3 = 288\pi.$$

V_c: Volume do cilindro

$$V_c = \pi r^2 . h = \pi 8^2 . 15 = 960\pi.$$

V: volume procurado

$V_c - V_e = V \Longrightarrow V = 960\pi - 288\pi = 672\pi.$

$$672\pi = \pi 8^2 h \Longrightarrow h = 10{,}5.$$

A altura h é de $10{,}5\ cm$.

O que é necessário que o aluno saiba para resolver
Calcular volumes de figuras geométricas espaciais – esfera e cilindro, operar com números irracionais.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral
O corpo dos números reais. Definição de relação e de função.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Reconhecer e utilizar símbolos, códigos e nomenclaturas da linguagem matemática. Identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas. Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções. Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema. Identificar diferentes formas de quantificar dados numéricos para decidir se a resolução de um problema requer cálculo exato, aproximado.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE CONEXÃO

4. Mostre que $B = C = D$ efetuando, detalhadamente, os cálculos .

$$B = \frac{2 - \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \;;\quad C = -\frac{4 \times 10^{-3} \times (-5) \times 10^9}{3 \times 10^6} \;;\quad D = \frac{\left(3 + \sqrt{11}\right)^2 - 6\sqrt{11}}{3}.$$

Resolução:

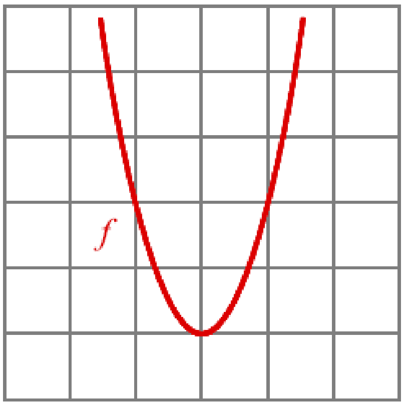
$$B = \frac{2 - \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{6-1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{3} . \frac{4}{1} = \frac{20}{3}$$

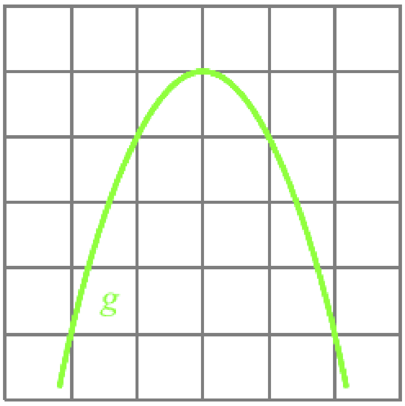
$$C = -\frac{4.10^{-3}.(-5).10^9}{3.10^6} = \frac{-20.10^6}{3.10^6} = \frac{20}{3}$$

$$D = \frac{(3 + \sqrt{11})^2 - 6\sqrt{11}}{3} = \frac{9 + 6\sqrt{11} + 11 - 6\sqrt{11}}{3} = \frac{20}{3}$$

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Operar com frações – adição, subtração, multiplicação e divisão; fazer uso das regras de potenciação, de radiciação e do desenvolvimento do quadrado da soma.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
O corpo dos números reais. Propriedades algébricas dos números reais.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas apresentados sob diferentes formas. Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Reconhecer a conservação contida em toda igualdade, congruência ou equivalência para calcular.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE REPRODUÇÃO

5. Na figura abaixo estão representações gráficas de duas funções quadráticas, f e g, em referenciais ortogonais, cujos eixos coordenados se ocultaram. A unidade, em qualquer dos referenciais, é o lado da quadrícula.



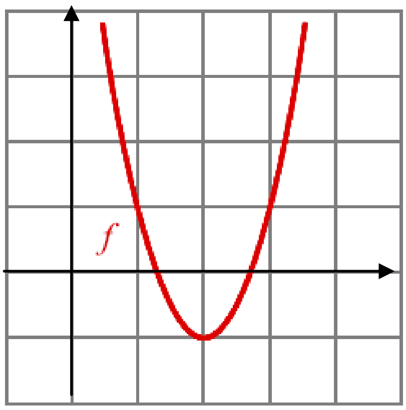


A) Desenhe os eixos do referencial de f, sabendo que a reta de equação $x = 2$ é eixo de simetria da parábola e que o contradomínio da função é $[-1, +\infty[$.

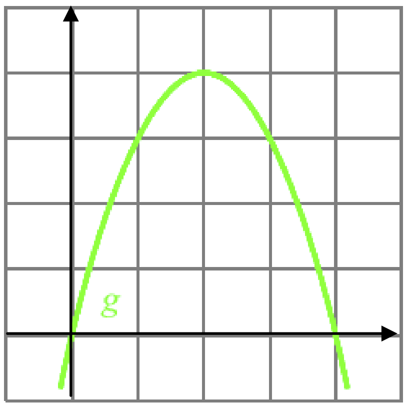
B) Desenhe os eixos do referencial em g, sabendo que: $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0,4]$.

C) Defina analiticamente as funções f e g, considerando os referencias que desenhou.

Resolução:



$y = 2(x-2)^2 - 1$



$y = -(x-2)^2 + 4$

Outro modo de resolução:

Dado que $x_v = 2,$ temos que $-\frac{b}{2a} = 2$, logo $b = -4a$.

Dois pontos da parábola são $P_1(1,1)$ e $P_2(2,-1)$ e a equação geral de uma função quadrática é $y = ax^2 + bx + c$, logo:

$$\begin{cases} 1 = a + b + c \\ -1 = 4a + 2b + c \end{cases} \Rightarrow -1 = -b + 2b + c \Rightarrow -1 = b + c \Rightarrow 1 = a + (-1) \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = -8 \Rightarrow c = 7 \Rightarrow y = 2x^2 - 8x + 7.$$

Outro modo de resolução:

Três pontos da parábola são $P_1(1,1)$, $P_1(3,1)$ e $P_2(2,-1)$ e a equação geral de uma função quadrática é $y = ax^2 + bx + c$, logo:

$$\begin{cases} 1 = a + b + c \\ -1 = 4a + 2b + c \\ 1 = 9a + 3b + c \end{cases} \Rightarrow -1 = -b + 2b + c \Rightarrow -1 = b + c \Rightarrow 1 = a + (-1)$$

$$\Rightarrow a = 2 \Rightarrow 1 = 18 + 2b + (b + c) \Rightarrow 1 = 18 + 2b - 1$$

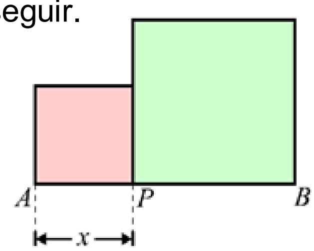
$$\Rightarrow 1 = 17 + 2b \Rightarrow b = -8$$

$$\Rightarrow c = -1 + 8 \Rightarrow c = 7$$

$$\Rightarrow y = 2x^2 - 8x + 7.$$

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Identificar diferentes representações de uma função quadrática e coordenadar essas representações, a saber, representação gráfica, tabular e algébrica, expressar-se com intervalos reais, articular e interpretar transformação de funções por meio de translação, compressão, estiramento, fazer uso de lei de formação de uma função.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Sistema Cartesiano Ortogonal. Funções elementares, desigualdades reais, transformação de funções por meio de: translação, compressão, estiramento. Definição de função.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Ler e interpretar dados ou informações apresentadas em diferentes linguagens e representações. Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra. Selecionar diferentes formas para representar um dado ou conjunto de dados e informações. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE CONEXÃO

6. Considere um ponto P que se desloca num segmento de reta $\overline{AB}$, de comprimento 10 unidades, nunca coincidindo com o ponto A nem com o ponto B. Cada posição do ponto P determina em $\overline{AB}$ dois segmentos de reta, $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$, sendo cada um deles o lado de um quadrado, conforme exemplo apresentado na figura a seguir.



Em cada posição do ponto P, a distância de P a A é x unidades, e $a(x)$ é a soma das áreas dos dois quadrados, em função de x.

A) Calcule $a(2)$.

B) Indique o domínio da função a.

C) Mostre que $a(x) = 2x^2 - 20x + 100$.

D) Resolva a equação $a(x) = a(2)$ e interprete as soluções no contexto do problema.

Resolução:

A) $a(x) = x^2 + (10 - x)^2 \Longrightarrow a(2) = 2^2 + 8^2 = 68$.

B) $x \in (0,10)$

C) $a(x) = x^2 + (10 - x)^2 \Rightarrow a(x) = x^2 + 100 - 20x + x^2 \Longrightarrow a(x) = 2x^2 - 20x + 100$

D) $a(x) = a(2) \Longrightarrow 2x^2 - 20x + 100 = 68 \Longrightarrow 2x^2 - 20x - 32 = 0 \Longrightarrow x^2 - 10x - 16 = 0 \Longrightarrow x' = 8\ e\ x'' = 2$

Para $x = 2$ se obtém um quadrado equivalente a um dos quadrados que se obtém para $x = 8$.

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Fazer uso de função e de equação do segundo grau, se expressar por meio de intervalos reais, traduzir uma situação-problema por meio de uma lei de formação de uma função, encontrar o conjunto solução de uma equação do 2º grau.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Identificação dos conjuntos numéricos. Corpo dos números reais. Definição de Relação e de Função. Funções e representações gráficas de funções elementares.

Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Ler e interpretar dados ou informações apresentadas em diferentes linguagens e representações. Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra. Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções. Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema. Interpretar, fazer uso e elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE REFLEXÃO

7. Considere a função j, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $j(x) = -|x + 1| + 3$.

A) Construa o gráfico da função j a partir do gráfico da função definida por $y = |x|$.

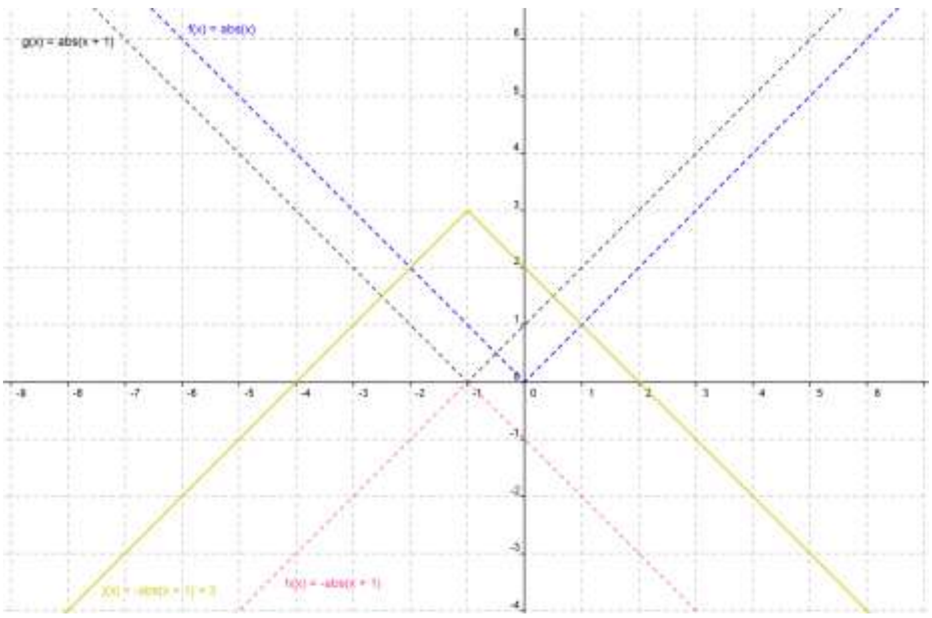
Caracterize as sucessivas transformações que permitem obter o gráfico da função j a partir do gráfico da função definida por $y = |x|$.

B) Resolva analiticamente a inequação $j(x) > 2$.

C) Resolva graficamente a inequação $j(x) > 2$.

Resolução:

A)



$f(x) = |x|$;

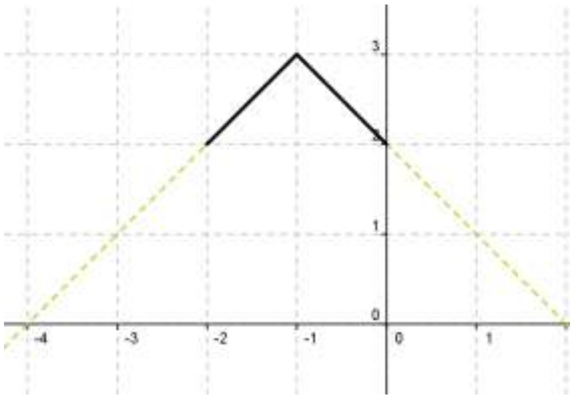
$g(x) = |x + 1|$: módulo de x deslocado horizontalmente uma unidade para esquerda;

$h(x) = -|x+1|$: módulo de x deslocado horizontalmente uma unidade para esquerda e refletido em relação ao eixo-x;

$j(x) = -|x+1| + 3$: módulo de x deslocado horizontalmente uma unidade para esquerda, refletido em relação ao eixo-x e deslocado três unidades na vertical.

B) $j(x) > 2 \Rightarrow -|x+1| + 3 > 2 \Rightarrow -|x+1| > -1 \Rightarrow |x+1| < 1 \Rightarrow -1 < x + 1 < 1 \Rightarrow -2 < x < 0$

C)



O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Ler e interpretar diferentes linguagens e representações de função modular, expressar-se por meio de intervalos reais, articular e interpretar transformação de funções por meio de translação e reflexão, fazer uso de inequação.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Identificação dos conjuntos numéricos. Funções elementares, desigualdades reais, transformação de funções por meio de: translação, compressão, estiramento. Definição de função.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Ler e interpretar dados ou informações apresentadas em diferentes linguagens e representações. Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO -** Compreender a necessidade e fazer uso apropriado de escalas.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE REPRODUÇÃO

8. Ache a equação da reta que:

A) passa por $(-2, 3)$ e tem declividade -4.

B) passa por $(-4, 2)$ e $(3, -1)$.

C) tem declividade $2/3$ e coeficiente linear -4.

D) passa por $(2, -4)$ e paralela ao eixo$-x$.

E) passa por $(1, 6)$ e paralela ao eixo$-y$.

F) passa por $(1,6)$ e $(3,4)$ e tem declividade 2.

G) passa por $(4, -2)$ e paralela a $x + 3y = 7$.

H) passa por $(5, 3)$ e perpendicular a $y + 7 = 2x$.

I) passa por $(-4, 3)$ e paralela à reta determinada por $(-2, 2)$ e $(1, 0)$.

Resolução:

A) $m_1 = -4 \Longrightarrow y - 3 = -4(x + 2) \Longrightarrow y = -4x - 8 + 3 \Longrightarrow y = -4x - 5$.

B) $m_2 = \frac{-1-2}{3+4} = -\frac{3}{7} \Longrightarrow y - 2 = -\frac{3}{7}(x + 4) \Longrightarrow y = -\frac{3}{7}x - \frac{12}{7} + 2 \Longrightarrow y = -\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}$.

C) $y = -\frac{2}{3}x - 4$.

D) $m = 0 \Longrightarrow y + 4 = 0(x - 2) \Longrightarrow y = -4$.

E) $x = 1$.

F) não existe equação com tais especificações.

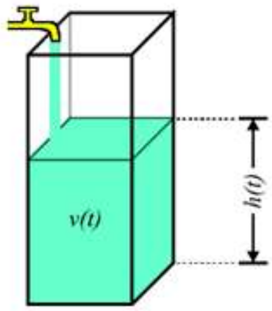
G) $m = \frac{-1}{3} \Longrightarrow y + 2 = -\frac{1}{3}(x - 4) \Longrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} - 2 \Longrightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

H) $m = \frac{-1}{2} \Longrightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 5) \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} + 3 \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$

I) $m = \frac{0-2}{1+2} = \frac{-2}{3} \Longrightarrow y - 3 = -\frac{2}{3}(x + 4) \Longrightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3} + 3 \Longrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Identificar e usar os componentes básicos de função linear.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Definição de relação e de função. Funções elementares.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Ler e interpretar dados ou informações apresentadas em diferentes linguagens e representações. Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE REPRODUÇÃO

9. A figura a seguir representa um depósito com a forma de um prisma quadrangular regular. Em um determinado instante, uma torneira, com um caudal constante, começa a verter água no depósito, que inicialmente se encontra vazio, terminando o processo quando o depósito fica completamente cheio de água.



Seja v a função que, ao tempo t decorrido desde que se iniciou o enchimento, faz corresponder o volume de água no depósito. Seja h a função que, ao tempo t decorrido desde que se iniciou o enchimento, faz corresponder a altura que a água atinge no depósito.

Admita que o tempo é expresso em minutos, que o volume de água é expresso em decímetros cúbicos e que a altura da água no depósito é expressa em decímetros.

A) Admita que:

- a vazão da torneira é de $20\ dm^3$ por minuto;
- a aresta da base do depósito mede $0{,}5m$;
- o depósito tem $1{,}2m$ de altura.

a) O que representa $v(1)$? E o que representa $v(t)$?

b) Qual é o contradomínio da função v?

c) Qual é o domínio da função v?

d) O que representa a solução da equação $v(t) = 300$?

e) Defina a função v por uma expressão analítica.

f) Represente graficamente a função v.

g) Indique o domínio e o contradomínio da função h

h) Defina a função h por uma expressão analítica.

Resolução:

a) $v(1)$ representa o volume de água no depósito, em dm^3, 1 minuto depois de começar o preenchimento e $v(t)$ representa o volume de água no depósito, em dm^3, t minutos depois de começar o preenchimento.

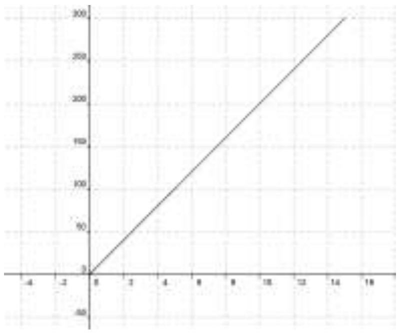
b) $C_v = [0{,}300]$

c) $D_v = [0{,}15]$

d) $v = 0{,}5m$ x $0{,}5m$ x $1{,}2m$

$\Rightarrow v = 5\ dm$ x $5dm$ x $12dm \Rightarrow v = 300dm^3$

Representa, em minutos, o tempo necessário para encher completamente o reservatório.



e) $v(t) = 20t \Longrightarrow 300 = 20t \Longrightarrow 15 = t$

f)

g) $D_h = [0{,}15]$ e $C_h = [0{,}12]$

h) $h(t) = \frac{v(t)}{A_b} \Longrightarrow h(t) = \frac{20t}{25} \Longrightarrow h(t) = 0{,}8t.$

B) Admita agora que, em relação a outro depósito, também com a forma de um prisma, tem-se $v(t) = c \times t$ e $h(t) = k \times t$ (c e k constantes).

I. O que representa a constante c, no contexto da situação?

II. O que representa o quociente $\frac{c}{k}$, no contexto da situação?

Resolução:

I) Representa a vazão da torneira em dm^3 por minuto.

II) A área da base do depósito em dm^3.

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Identificar e expressar relações entre grandezas, domínio e contradomínio de uma função, fazer uso de intervalos reais, transformar unidades de medida, interpretar proporções, fazer uso de represetação gráfica de funções, utilizar escalas.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Definição de relação e de função. Funções e representações gráficas de função.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas. Ler e interpretar dados ou informações apresentadas em diferentes linguagens e representações. Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra. Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática. Compreender e emitir juízos próprios. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções. Compreender a necessidade e fazer uso apropriado de escalas. Identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras. Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto. Interpretar, fazer uso e elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE REFLEXÃO

10. Considere, num referencial ortogonal, xOy, a curva, que representa graficamente a função f de domínio $[0,1]$, definida por $f(x) = e^x + 3x$, e a reta r de equação $y = 5$.

Sem recorrer à calculadora, comprove que a reta r intercepta a curva C em pelo menos um ponto.

Resolução:

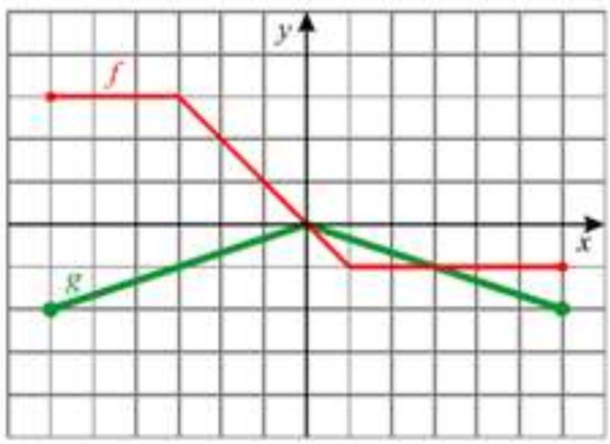
$y = e^x + 3x$ é contínua por ser soma de funções contínuas e

$$5 = e^x + 3x \Rightarrow \begin{cases} para\ x = 0 \Rightarrow y = 1 < 5 \\ para\ x = 1 \Rightarrow y = e + 3 > 5 \end{cases}.$$

Logo, existe pelo menos um ponto de intersecção entre f e r.

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Identificar e argumentar a respeito do comportamento de uma função exponencial e de uma função constante positiva, analisar a intersecção entre essas funções.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Funções elementares e suas representações gráficas. Funções exponenciais.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra. Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática. Compreender e emitir juízos próprios. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções. Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto. Interpretar, fazer uso de modelos e representações matemáticas para analisar situações.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE CONEXÃO

11. Considere as funções f e g, representadas graficamente no plano cartesiano abaixo. A unidade, em qualquer dos eixos, é o lado da quadrícula.



A) Indique o domínio da função f e o domínio da função g.

B) Indique o contradomínio da função f e o contradomínio da função g

C) Indique o conjunto solução de cada uma das condições seguintes:

a) $f(x) = 2$
b) $f(x) = -3$
c) $g(x) = -1$
d) $f(x) > 0$
e) $g(x) \geq 0$
f) $g(x) < -1$
g) $f(x) = g(x)$
h) $f(x) > g(x)$

Resolução:

A) $D_f = D_g = [-6,6]$.

B) $C_f = [-1,3]$ e $C_g = [-2,0]$.

C)

$a)\ \{-2\}$
$b)\ \{\ \}$
$c)\ \{-3,3\}$
$d)\ [-6,0[$
$e)\ \{0\}$
$f)\ ]-6,-3[\cup]3,6]$
$g)\ \{0,3\}$
$h) [-6,0[\cup]3,6]$

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Identificar e expressar conjuntos numéricos, assim como, suas operações. Identificar e expressar domínios e imagens de funções.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Identificação dos conjuntos numéricos; o corpo dos números reais; a reta numerada real. Definição de Relação e de Função; funções e representações gráficas de funções elementares.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Ler e interpretar dados ou informações apresentadas em diferentes linguagens e representações. Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática, ou seja, decidir-se pela utilização das formas algébrica, numérica, geométrica.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE REPRODUÇÃO

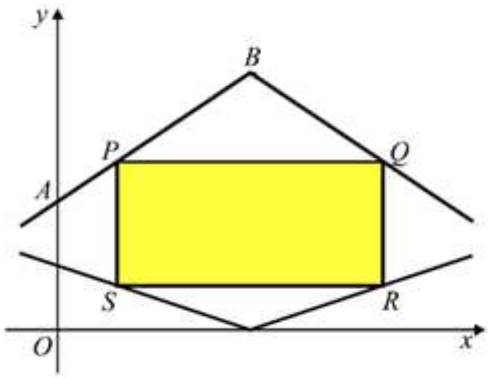
12. Escreva um número que seja, simultaneamente, múltiplo de 2,3 e 5.

Resolução:

$$M(2{,}3{,}5) = \{0, 30{,}60{,}90, \dots\}.$$

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Identificar números reais e compreender as definições de múltiplos e divisores de um número.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Identificação de números reais.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Reconhecer e utilizar símbolos, códigos e nomenclaturas da linguagem matemática.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE REPRODUÇÃO

13. Na figura abaixo estão os gráficos das funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respectivamente, por $f(x) = -\frac{2}{3}|x-6|+8$ e $g(x) = \frac{1}{3}|x-6|$.



Os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f:

- A é o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas;
- B é o ponto do gráfico que tem maior ordenada.

Seja P um ponto que se desloca sobre $\overline{AB}$, nunca coincidindo com o ponto B
Para cada posição do ponto P, considere:

- o ponto Q, sobre o gráfico da função f, de modo que a reta que contém $\overline{PQ}$ seja paralela ao eixo das abscissas;
- os pontos R e S, sobre o gráfico da função g, de modo que $PQRS$ seja um retângulo.

Seja x a abscissa do ponto P e seja h a função que, a cada valor de x, faz corresponder a área do retângulo $PQRS$.

a) Qual é o domínio da função h?

b) Mostre que $h(x) = 24 + 8x - 2x^2$.

c) Determine as dimensões do retângulo que tem maior área.

Resolução:

Pelas informações dadas no enunciado tem-se:

- $f(0) = -\frac{2}{3}|0-6| + 8 \Longrightarrow f(0) = -4 + 8 \Longrightarrow f(0) = 4 \Longrightarrow A(0,4)$
- $B(6,8)$

a) $[0,6[$

b) $|\overline{PS}| = \left[-\frac{2}{3}(-x+6)+8\right] - \frac{1}{3}(-x+6) = -(-x+6)+8 = x+2$

$|\overline{SR}| = 12 - 2x$

$h(x) = (x+2)(12-2x) \Longrightarrow h(x) = 12x - 2x^2 + 24 - 4x \Longrightarrow h(x)$

$= -2x^2 + 8x + 24$

c) $x_v = \frac{-8}{-4} = 2$ (x_v: abscissa do vértice)

Logo, as dimensões que determinam o retângulo de maior área são

$|\overline{PS}| = 2 + 2 = 4$ e $|\overline{SR}| = 12 - 2.2 = 8.$

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Compreender e expressar domínio e imagem de uma função, traduzir coordenadas do plano cartesiano para linguagem analítica, reconhecer e articular valores absolutos, expressar-se por meio de intervalos reais, fazer uso das relações por partes de uma função modular, representar uma situação por meio de função quadrática, otimizar.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Identificação de conjuntos numéricos, valor absoluto, definição de função e de relação, funções e representações gráficas de funções elementares.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra; Reconhecer e utilizar símbolos, códigos e nomenclaturas da linguagem matemática. Identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas. Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções. Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema. Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto. Interpretar, fazer uso e elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE REFLEXÃO

14. De uma função f, contínua no intervalo $[1{,}3]$, sabe-se que $f(1) = 7$ e $f(3) = 4$. Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira? Justifique.

i. A equação $f(x) = 5$ tem pelo menos uma solução no intervalo real $[1{,}3]$.

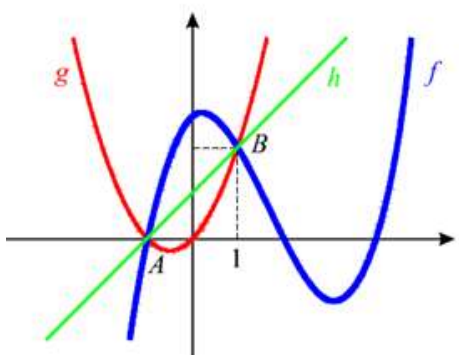
ii. A equação $f(x) = 5$ não tem solução no intervalo real $[1{,}3]$.

Resolução:

Se a função é contínua, então para todo $x \in [1{,}3]$, existe uma imagem e o comportamento em qualquer vizinhança de $x = a$ tende ao valor de $f(a)$. Logo, como 5 ∈ $[4{,}7]$ conclui-se que existe algum $x \in [1{,}3]$ tal que $f(x) = 5$, ou seja, há pelo menos uma solução no intervalo real $[1{,}3]$ para a equação $f(x) = 5$.

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Compreender e identificar domínio e imagem de uma função, elaborar representação gráfica de função, reconhecer nomenclaturas da linguagem matemática.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Domínio, Imagem e representação gráfica de função. Função sobrejetora.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra. Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática. Compreender e emitir juízos próprios. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções. Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto. Interpretar, fazer uso de modelos e representações matemáticas para analisar situações.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE CONEXÃO

15. Na figura abaixo estão representadas graficamente três funções, f, g e h, todas de domínio R.



Sabe-se que

- a função f é definida pela expressão $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$;
- o gráfico da função g é uma parábola que passa na origem do plano cartesiano;
- os pontos A e B pertencem aos gráficos das três funções;
- o ponto A tem ordenada 0;
- o ponto B tem abscissa 1.

a) Defina analiticamente a função h, depois de determinar a ordenada do ponto B.

b) Defina analiticamente a função g, depois de determinar a abscissa do ponto A.

c) Determine o conjunto solução da inequação $f(x) > 0$, sem recorrer à calculadora.

Resolução:

$$f(1) = \frac{1}{3}.1^3 - \frac{5}{3}.1^2 + \frac{2}{3}.1 + \frac{8}{3} = 2 \Rightarrow B(1,2)$$

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0 \Rightarrow x = -1,2,-4$$

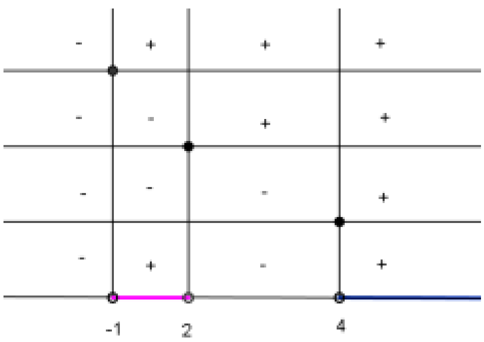
$$\Rightarrow A(-1,0)$$

a) A equação de reta definida por A e B é $h(x) = x + 1$.

b) A equação da parábola definida por A, O, B é $g(x) = x^2 + x$.

c) $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 > 0 \Rightarrow (x+1).(x-2).(x-4) > 0$

$$\Rightarrow x \in]-1,2[\cup]4,+\infty[$$



O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Compreender e identificar o conjunto imagem de função, operar com equações equivalentes, determinar raízes de equações, expressar as coordenadas de um ponto, determinar equação de reta por meio de dois pontos, determinar equação de uma parábola por meio de três de seus pontos, utilizar fatoração de polinômio, expressar-se por meio de intervalos de reta, analisar desigualdade reais.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Identificação de conjuntos numéricos, desigualdades reais. Funções elementares.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra. Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática. Compreender e emitir juízos próprios. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções. Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto. Interpretar, fazer uso de modelos e representações matemáticas para analisar situações.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE CONEXÃO

16. Usando as propriedades de divisão, determine:

a) O polinômio $p(x)$ de grau 5, tal que $p(-2) = p(-1) = p(0) = p(1) = p(2) = 0$.
b) O(s) valor(es) de n, tal que -8 é o resto da divisão de $x^2 + 5x - 2$ por $x + n$.
c) O valor de a para que $x + 6$ divida $x^4 + 4x^3 - 21x^2 + ax + 108$.

Resolução:

a) $p(x) = (x + 2)(x + 1)x(x - 1)(x - 2)$

b) Pelo Teorema do Resto, $p(-n) = r, r$ resto da divisão de $p(x)$ por $x + n$.

Logo,

$$n^2 - 5n - 2 = -8 \Longrightarrow n^2 - 5n + 6 = 0 \Longrightarrow n' = 2 \; e \; n'' = 3.$$

O valores de n são $\{2,3\}$.

c) Pelo Teorema do Resto $p(-6) = 0$.

$$p(-6) = 6^4 + 4.6^3 - 21.6^2 - 6a + 108 = 0$$

$$\Longrightarrow 1296 + 4.(-216) - 21(36) - 6a + 108 = 0 \Longrightarrow a = -36$$

Portanto, o valor de a é -36.

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Fatorar polinômios, operar com polinômios, determinar raízes de um polinômio, utilizar notação de conjunto discreto.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Funções elementares.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Ler e interpretar dados ou informações apresentadas em diferentes linguagens e representações. Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE REPRODUÇÃO

17. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:
    - $f(5) = 0$
    - f é uma função par.

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x+3)$. Explicite um possível conjunto dos zeros de g. Apresente argumentos que fundamentem sua resposta.

Resolução:

Como a função é par, tem-se que é simétrica com relação ao eixo-y, isto é, $f(x) = f(-x)$. Portanto, -5 também é raiz de $f(x)$.

Agora,

$$g(x) = f(x+3) \Longrightarrow g(2) = f(2+3) = 0 \Longrightarrow g(2) = 0;$$

$$g(x) = f(x+3) \Longrightarrow g(-8) = f(-8+3) = 0 \Longrightarrow g(-8) = 0;$$

Logo, $\{2, -8\}$ é um possível conjunto de zeros de f.

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Analisar as raízes de função, reconhecer as condições de uma função par,analisar o conjunto imagem de uma função.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Identificação de conjuntos numéricos. Funções pares.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra. Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática. Compreender e emitir juízos próprios. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções. Perceber as relações e

identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto. Interpretar, fazer uso de modelos e representações matemáticas para analisar situações.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE CONEXÃO

18. Seja f a função de domínio $[1,+\infty]$, definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$. Determine o valor de $f^{-1}(3)$.

Resolução:

$f^{-1}(3)$ é o número cuja imagem, por meio de f, é igual a 3. Como $f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 10$, conclui-se que $f^{-1}(3) = 10$.

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Reconhecer funções inversas e seus respectivos domínios e imagens.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Funções elementares, injetivas, sobrejetivas, inversas.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Ler e interpretar dados ou informações apresentadas em diferentes linguagens e representações. Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE REPRODUÇÃO

19. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = x + 1$ e seja g a função de domínio $\mathbb{R}^*$, definida por $g(x) = \frac{1}{x}$. Para certo número real a, tem-se $(g \circ h)(a) = \frac{1}{9}$. Qual o valor de a?

Resolução:

$$(g \circ h)(a) = \frac{1}{9} \Leftrightarrow g(h(a)) = \frac{1}{9} \Leftrightarrow g(a+1) = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{a+1} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow a = 8.$$

O valor de $a = 8$.

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Reconhecer e utilizar a operação de composição de funções e resolver equações algébricas.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Funções Compostas.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Ler e interpretar dados ou informações apresentadas em diferentes linguagens e representações. Traduzir uma situação dada

em determinada linguagem para outra. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE REPRODUÇÃO

20. Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de $(3-\frac{1}{tg\ \alpha})$ sabendo que $\alpha\ \in\ \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ e que $cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\frac{4}{5}$.

Resolução:

$$cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\frac{4}{5}\Longrightarrow -sen\ \alpha=-\frac{4}{5}\Longrightarrow sen\ \alpha=\frac{4}{5}$$

$$\Longrightarrow (\frac{4}{5})^2+cos^2\alpha=1\Longrightarrow cos^2\alpha=\frac{9}{25}$$

Como $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, tem-se $\cos\alpha=\frac{3}{5}$

Portanto,

$$tg\ \alpha=\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}.$$

Logo,

$$3-\frac{1}{tg\ \alpha}=3-\frac{1}{\frac{4}{3}}=3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}.$$

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Selecionar e utilizar algumas das relações trigonométricas, utilizar radianos, identificar o sinal de funções trigonométricas, resolver equações trigonométrica.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Conjuntos Numéricos, intervalos reais e funções trigonométricas.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra. Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática. Compreender e emitir juízos próprios. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções. Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto. Interpretar, fazer uso de modelos e representações matemáticas para analisar situações.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE CONEXÃO

21. Considere, em $\mathbb{R}$, a equação trigonométrica $\cos x = 0{,}9$. Justifique a existência ou não de solução para esta equação em cada um dos seguintes intervalos:

a) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

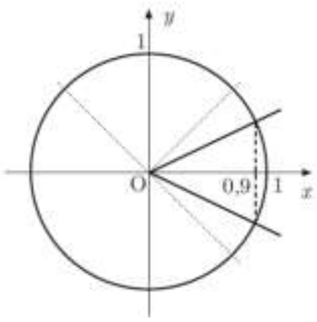
b) $[0, \pi]$

c) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

d) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Resolução:

Na figura, estão representados o círculo trigonométrico, os lados extremidade dos ângulos cujo cosseno é 0,9, e, os lados extremidade dos ângulos que têm $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$ radianos de amplitude.



a) no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, a equação $\cos x = 0{,}9$ tem duas soluções;

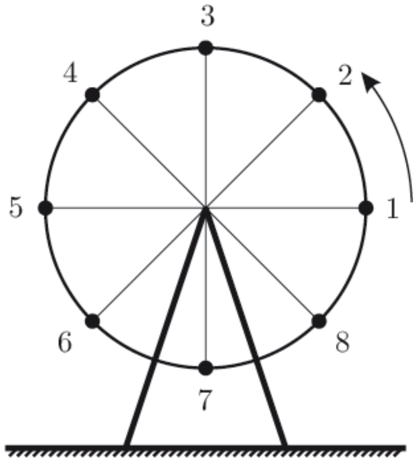
b) no intervalo $[0, \pi]$, a equação $\cos x = 0{,}9$ tem uma solução;

c) no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, a equação $\cos x = 0{,}9$ não tem solução;

d) no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, a equação $\cos x = 0{,}9$ tem duas soluções.

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Identificar o comportamento da função cosseno em diferentes intervalos de seu domínio, utilizar os valores do cosseno no círculo trigonométrico.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Conjuntos Numéricos, intervalos reais e funções trigonométricas.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra. Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática. Compreender e emitir juízos próprios. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções. Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto. Interpretar, fazer uso de modelos e representações matemáticas para analisar situações.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE CONEXÃO

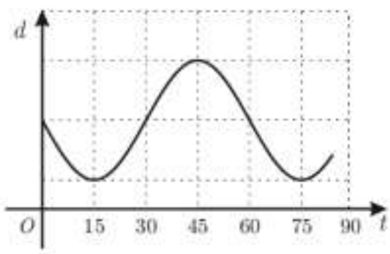
22. Na figura a seguir está representada uma roda gigante de um parque de diversões.



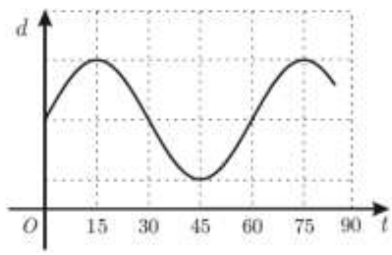
Um grupo de amigos foi andar nessa roda. Depois de todos estarem sentados nas cadeiras, a roda começou a girar. Uma das garotas, a Beatriz, ficou sentada na cadeira número 1, que estava na posição indicada na figura em tela, quando a roda começou a girar.

A roda gira no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio e demora um minuto a dar uma volta completa. Seja d a função que fornece a distância da ***cadeira 1*** ao solo, t segundo após a roda ter começado a girar. Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função d? Justifique a opção escolhida e a negação das outras.

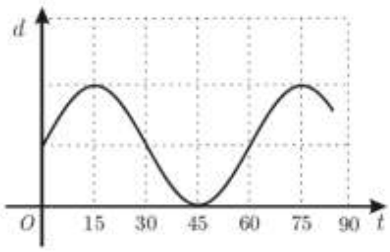
(A)



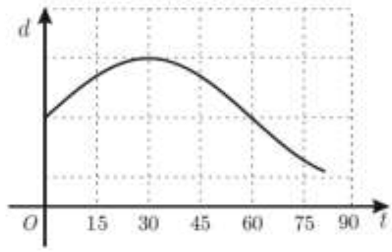
(B)



(C)



(D)



Resolução:

Opção A: A distância da cadeira 1 ao solo começa por aumentar com o decorrer do tempo até atingir o máximo, o que permite excluir a opção **A**.

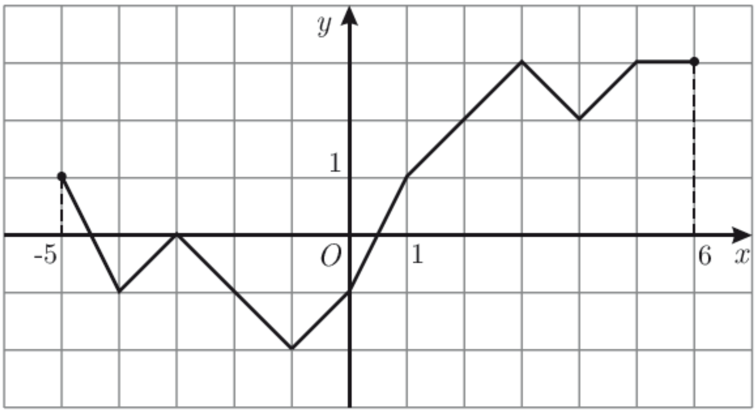
Opção B: A distância da cadeira 1 ao solo é não nula e começa por aumentar até atingir a altura máxima em um quarto de volta, isto é $15s$ depois, e então diminui durante os dois próximos quartos de volta e por fim volta a aumentar, o que permite escolher essa opção.

Opção C: A distância da cadeira 1 ao solo é sempre superior a zero. Tal informação permite excluir a opção **C**.

Opção D: A opção **D** deve ser excluída, pois, de acordo com o gráfico apresentado nesta opção, ao fim de um minuto a roda não teria completado uma volta.

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Analisar o comportamento de uma função periódica.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Funções trigonométricas.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra. Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática. Compreender e emitir juízos próprios. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções. Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto. Interpretar, fazer uso de modelos e representações matemáticas para analisar situações.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE CONEXÃO

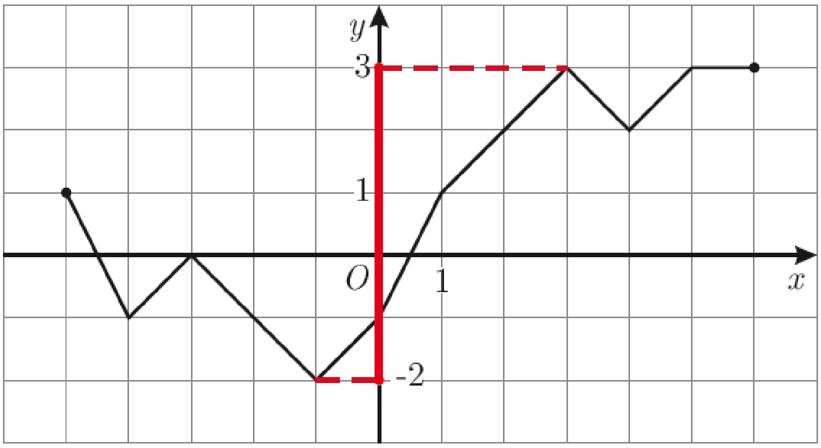
23. O gráfico de uma função f de domínio $[-5,6]$ está representado, em referencial ortogonal xOy, na figura a seguir.



a) Qual o contradomínio de f?

Resolução:

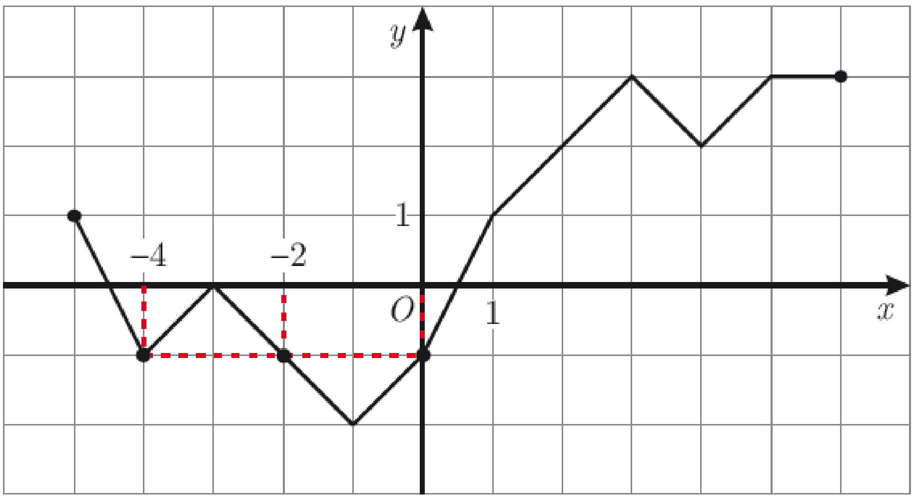
Como se pode observar, o contradomínio (conjunto das imagens) da função f é o conjunto $[-2{,}3]$.



b) Indique todos os números reais cujas imagens, por meio de f, são iguais a -1.

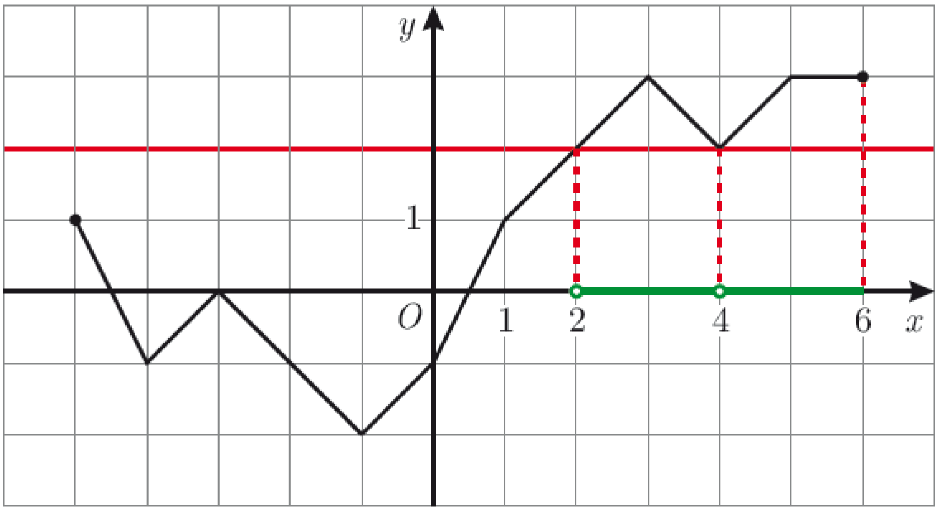
Resolução:

Na figura, está representado o gráfico da função f e estão assinalados os pontos do gráfico que têm ordenada -1. As abcissas desses pontos são os números $-4, -2$ e 0.



c) Indique o conjunto solução da condição $f(x) > 2$. Apresente a sua resposta como união de intervalos de números reais.

Resolução:



Da observação do gráfico, conclui-se que o conjunto solução da condição $f(x) > 2$ é $]2,4[\cup]4,6]$.

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Identificar conjuntos numéricos, analisar representações gráficas de desigualdades reais, identificar contradomínio de uma função, identificar a imagem para alguns valores do domínio.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Identificação dos conjuntos numéricos, desigualdades reais, representação de dados em sistemas de eixos coordenados, definição de função e representalçao gráfica.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Ler e interpretar dados ou informações apresentadas em diferentes linguagens e representações. Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE REPRODUÇÃO

24. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são solução da inequação

$$log_3(7x+6) \geq 2 + log_3(x).$$

Apresente a sua resposta usando a notação de intervalos de números reais.

Resolução:

Comecemos por observar que, em $\mathbb{R}$, apenas os números positivos têm logaritmo. Portanto, para que a expressão $log_3(7x+6) \geq 2 + log_3(x)$ tenha significado, em $\mathbb{R}$, é necessário que $7x+6>0$ e $x>0$.

$$7x+6>0 \text{ e } x>0 \Leftrightarrow x> -\frac{6}{7} \text{ e } x>0 \Leftrightarrow x>0$$

Para $x>0$, tem-se:

$$log_3(7x+6) \geq 2 + log_3(x) \Leftrightarrow log_3(7x+6) \geq log_3 9 + log_3(x) \Leftrightarrow log_3(7x+6) \geq log_3(9x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x+6 \geq 9x \Leftrightarrow -2x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

O conjunto solução da inequação é, portanto, o conjunto dos números reais satisfazem a condição $x>0$ e $x \leq 3$. Portanto, o conjunto dos números reais que são solução da inequação é $]0{,}3]$.

O que é necessário que o aluno saiba para resolver:
Identificar conjuntos numéricos, utilizar desigualdades reais, operar com funções logarítmicas e fazer uso de suas propriedades.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral:
Identificação dos conjuntos numéricos e funções logarítmicas.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra. Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática. Compreender e emitir juízos próprios. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções. Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto. Interpretar, fazer uso de modelos e representações matemáticas para analisar situações.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE CONEXÃO

25. Na década de sessenta do século passado, uma doença infecciosa atacou a população de algumas regiões do planeta. Admita que, ao longo dessa década e, em qualquer uma das regiões afetadas, o número, em milhares, de pessoas que estavam infectadas com a doença, t anos após o início de 1960, é dado, aproximadamente, por

$$I(t) = \frac{3e^{kt}}{1+pe^{kt}}$$

em que k e p são parâmetros reais.

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar cálculos numéricos.

A) Admita que, para certa região, $k = \frac{1}{2}$ e $p = 1$.

Determine o ano em que o número de pessoas que estavam infectadas, nessa região, atingiu 2500.

Sempre que, nos cálculos intermediários, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Resolução:

A) Como 2500 são $2{,}5$ milhares, o problema pode traduzir-se pela equação $I(t) = 2{,}5$.

Para $k = \frac{1}{2}$ e $p = 1$, tem-se:

$$I(t) = 2{,}5 \iff \frac{3e^{\frac{1}{2}t}}{1 + pe^{\frac{t}{2}}} = 2{,}5 \iff 3e^{\frac{t}{2}} = 2{,}5\left(1 + e^{\frac{1}{2}t}\right) \iff 3e^{\frac{t}{2}} = 2{,}5 + 2{,}5e^{\frac{t}{2}} \iff$$

$$\iff 0{,}5\, e^{\frac{t}{2}} = 2{,}5 \iff e^{\frac{t}{2}} = \frac{2{,}5}{0{,}5} \iff e^{\frac{t}{2}} = 5 \iff \frac{t}{2} = \ln(5) \iff t = 2\ln(5) \iff$$

$$t = \ln(25).$$

Portanto, $t \approx 3{,}219$.

B) Numa outra região constatou-se que havia um milhar de pessoas infectadas no início de 1961.

Qual é, para este caso, a relação entre k e p? Apresente a sua resposta na forma $k = -ln(A + Bp)$, em que A e B são números reais.

Resolução:

Como o início de 1961corresponde a $t = 1$, tem-se $I(1) = 1$

$$I(1) = 1 \iff \frac{3e^{kt}}{1 + pe^{kt}} = 1 \iff 3e^{k} = 1 + pe^{k} \iff 3e^{k} - pe^{k} = 1 \iff e^{k}(3 - p) = 1$$

$$\iff e^{k} = \frac{1}{3 - p} \iff$$

$$\iff k = \ln\left(\frac{1}{3-p}\right) \iff k = \ln(3 - p)^{-1} \iff k = -\ln(3 - p).$$

O que é necessário que o aluno saiba para resolver
Operar com funções exponenciais e com equações exponenciais.
Conteúdo abordado no curso de Cálculo Diferencial e Integral
Funções exponenciais.
Competências (PCN+)
REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO - Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra. Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática. Compreender e emitir juízos próprios. **INVESTIGAÇÃO E COMPREENSÃO** - Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções. Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto. Interpretar, fazer uso de modelos e representações matemáticas para analisar situações.
Nível de Competência (DE LANGE)
COMPETÊNCIAS DE CONEXÃO

APÊNDICE E – Instrumento de Validação

Eu, Marcele Tavares Mendes, docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) campus Londrina, doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), sob a orientação da Profª Drª Regina Luzia Corio de Buriasco, agradeço a prontidão em colaborar para a validação de informações necessárias em nosso projeto de tese.

Para essa pesquisa em desenvolvimento, utilizarei uma prova que será resolvida por alunos calouros do curso de Engenharia de Materiais, envolvendo um conteúdo, por assim dizer, de Pré-Cálculo[70] conforme Quadro 1.

Quadro 1 – Distribuição do conteúdo envolvido.

C1	Sistematização dos Conjuntos Numéricos	Identificação dos conjuntos numéricos; o corpo dos números reais; a reta numerada real; valor absoluto, desigualdades reais e algumas propriedades algébricas dos números reais.
C2	Sistema Cartesiano Ortogonal	Representação de dados em sistemas de eixos coordenados: Sistema Cartesiano Ortogonal.
C3	Relações e Funções no Espaço Real Bidimensional	Definição de Relação e de Função; funções e representações gráficas de funções elementares; funções pares e ímpares; transformação de funções por meio de: translação, compressão e estiramento etc.; funções compostas; funções injetivas, sobrejetivas e bjjetivas; funções inversas; funções exponenciais e logarítmicas; funções trigonométricas e suas inversas.

Para um procedimento de validação é preciso que as questões sejam examinadas por um pequeno grupo de professores da área de Cálculo Diferencial e Integral e classificadas, uma a uma, com relação a:

- **pertinência do conteúdo** (Quadro 2). Por exemplo, uma questão na qual o aluno pode utilizar a propriedade distributiva dos números reais estará classificada como sendo do C1;
- **nível de dificuldade previsto** (Quadro 3) como fácil, médio ou difícil em relação ao quadro do conteúdo, de acordo com a opinião do professor validador;
- **nível de proficiência previsto** (Quadro 4). Os três níveis de proficiência considerados são:
    - ✓ reprodução abrange itens relativamente familiares aos estudantes, para os quais são necessárias essencialmente a

[70] Conteúdo que faz parte da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I que tem por objetivo estabelecer os conceitos básicos do CDI para funções de uma variável real.

reprodução de conhecimentos frequentemente praticados e a utilização de procedimentos rotineiros, como por exemplo, a resolução problemas–tipo, execução de operações de rotina;

- ✓ conexão envolve itens com contextos ainda familiares ou quase familiares aos estudantes, mas que, para resolvê-los, são necessários mais do que simples procedimentos de rotina, por exemplo, requerem integrar, conectar e ampliar modestamente material já praticado anteriormente.
- ✓ reflexão que envolve, além das competências descritas nos outros dois agrupamentos, a capacidade de refletir e planejar estratégias para resolver problemas poucos familiares. Os itens podem ser descritos como requerendo raciocínio avançado, argumentação, abstração, generalização e modelagem aplicada a contextos novos.

Solicito então, que o(a) senhor(a) professor(a) validador(a) complete os quadros a seguir, de acordo com o especificado.

Quadro 2 – Classificação das questões da prova quanto ao conteúdo.

	C1	C2	C3
Questão 1			
Questão 2			
Questão 3			
Questão 4			
Questão 5			
Questão 6			
Questão 7			
Questão 8			
Questão 9			
Questão 10			
Questão 11			
Questão 12			
Questão 13			
Questão 14			
Questão 15			
Questão 16			
Questão 17			
Questão 18			
Questão 19			
Questão 20			
Questão 21			
Questão 22			
Questão 23			
Questão 24			
Questão 25			

Quadro 3 – Classificação das questões da prova quanto ao nível de dificuldade

	Fácil	Média	Difícil
Questão 1			
Questão 2			
Questão 3			
Questão 4			
Questão 5			
Questão 6			
Questão 7			
Questão 8			
Questão 9			
Questão 10			
Questão 11			
Questão 12			
Questão 13			
Questão 14			
Questão 15			
Questão 16			
Questão 17			
Questão 18			
Questão 19			
Questão 20			
Questão 21			
Questão 22			
Questão 23			
Questão 24			
Questão 25			

Quadro 4 – Classificação das questões da prova quanto ao nível de proficiência.

	Reprodução	Conexão	Reflexão
Questão 1			
Questão 2			
Questão 3			
Questão 4			
Questão 5			
Questão 6			
Questão 7			
Questão 8			
Questão 9			
Questão 10			
Questão 11			
Questão 12			
Questão 13			
Questão 14			
Questão 15			
Questão 16			
Questão 17			
Questão 18			
Questão 19			
Questão 20			
Questão 21			
Questão 22			
Questão 23			
Questão 24			
Questão 25			

APÊNDICE F – DESCRIÇÃO DAS PERCEPÇÕES

Q1

EM11CDI01	Acho bem interessante fazer essa prova em várias fases, contempla vários conteúdos do Ensino Médio, sendo assim possível revisá-los, mas como fiz um Ensino Médio em escola pública, não vi muitas das matérias aplicados nessa prova.
EM11CDI03	É um método muito bom, apesar de ser diferente da matemática básica que tive, acho que as perguntas tem um grau de dificuldade muito alto, mas ao longo do tempo se torna claro com a ajuda do professor.
EM11CDI04	É interessante, pois a partir das observações da professora desenvolvemos um raciocínio com o objetivo de encontrar nossos erros e assim chegar a solução correta.
EM11CDI05	Achei muito bom, pois tenho a oportunidade de estudar para as minhas dúvidas, e também estudar assuntos sobre a matemática básica.
EM11CDI06	Mesmo sendo uma prova extensa possui muito conteúdo de matemática básica e tem me ajudado a relembrar de conteúdos que aprendi no Ensino Médio. Foi uma prova que testa meus conhecimentos e minha capacidade.
EM11CDI07	Essa prova tem me ajudado a estudar os conteúdos do Ensino Médio que não foram bem fixados. Após cada fase, me vejo na obrigação de correr atrás dos conteúdos das questões que não soube resolver.
EM11CDI08	Fazer a prova em várias fases proporcionou uma melhor interpretação dos problemas propostos e incentivou a argumentação para a resolução das atividades.
EM11CDI09	É uma forma de estudarmos mais, pois vamos em busca da resolução do exercício preoposto.
EM11CDI10	Tenho achado um bom método de aplicar e relembrar a matemática básica aprendida durante toda a vida. Com isso, o desempenho tem sido melhor devido ao fato da matemática aplicada que estudamos agora, exigir maior conhecimento.
EM11CDI12	Eu acho muito bom, por que mostra que o aluno tem que correr atrás de alguns assuntos no Cálculo Diferencial e Integral, mostra em qual assunto ele está com dificuldade, para assim ir melhor na matéria de cálculo, pois vamos usar isso no decorrer do curso e na nossa vida como engenheiros.
EM11CDI13	No começo pensei que não faria diferença nenhuma, mas depois

	percebi que me ajudou bastante, me relebrando muitas coisas que já não lembreva mais e que uso bastante nessa disciplina e em outras.
EM11CDI14	Fazer essa prova de várias fases tem sido muito bom até mesmo para cada um fazer uma avaliação pessoal, por ser dividida em muitas fases se torna cansativa, mas assim tem sido bom para observar a evolução do nosso conhecimento durante o curso.
EM11CDI15	Mesmo sendo uma experiência nova para mim, eu estou achando muito interessante.
EM11CDI16	Uma boa maneira de relembrar os conceitos da matemática básica.
EM11CDI17	Esta sendo uma oportunidade de relembrar os conteúdos vistos no Ensino Médio que foram esquecidos. Podemos ler a questão e ir atrás do conteúdo que a envolve para resolvê-la sendo em livros ou com ajuda do colega em grupos de estudo.
EM11CDI18	A prova de fases é um método efetivo para ter uma revisão da matemática do Ensino Médio, além de tirar diversas dúvidas básicas.
EM11CDI19	Bom. Porque revela o que nos falta de aprendizado de Matemática e nos incentiva a estudar matérias que já nem lembrava mais.
EM11CDI20	Achei um método muito bom, pois quando fazemos uma prova em apenas uma fase, geralmente não nos interessamos em achar os erros, buscar a resposta correta depois de feita. Enquanto em várias fases, sempre buscamos achar a solução do exercício por que temos outras chances e isso nos faz com que aprendamos mais.
EM11CDI21	Acho que faz com que nos preocupemos com o que temos dificuldade, faz com que nos preocupemos também em buscar conhecimentos, enfim a correr atrás do prejuízo e estudar. É bom, as vezes não penso em tudo o que faço ou que fiz no exercício, apenas faço e assim temos que pensar o porque de tudo que fazemos e quais as palavras que vou utilizar para que não fique confuso, você já deve ter percebido que eu me confundo toda com as palavras.
EM11CDI22	Tenho achado bom, pois estou conseguindo estudar e relembrar a matéria do Ensino Médio aos poucos.
EM11CDI23	Concordo que a prova em fases está sendo uma ótima oportunidade de conseguir nota, mesmo não conseguindo responder as questões, ele serve para que eu possa enxergar minhas dificuldades.
EM11CDI25	Acho um método interessante, pois acaba forçando o aluno a ir atrás de soluções, respostas, estudos por conta própria. Com isso acaba com

	aquela dependência que o aluno possui em aprender somente o que o professor ensina, ou até mesmo depender das explicações do mesmo.
EM11CDI26	Tem sido bem construtivo, abrange de certa forma, meus conhecimentos básicos de matemática, mesmo a prova não sendo tão básica assim. As discussões sobre as questões com os colegas de sala fizeram aumentar o que eu já sabia e me ajudaram em coisas que não sabia.
EM11CDI27	Achei muito interessante, pois foi possível rever alguns conceitos no qual eu não me lembrava e, também, me ajudou a saber o que deveria ser estudado.
EM11CDI29	Achei interessante e importante, pois fez com que buscássemos os conceitos básicos de matemática, ajudando nas respostas e a relembrar conceitos esquecidos.
EM11CDI30	A prova em várias fases está sendo ótima para um melhor conhecimento ou melhor aprimoramento da matemática básica; essencial num curso de engenharia. Como a prova é em várias fases, nos alunos, podemos guardar as informações de uma questão que não sabemos resolver e estudá-la. Assim, o aprendizado é melhor em comparação apenas uma leitura, sem a prática.
EM11CDI33	Um pouco cansativo, eu acho melhor fazer uma prova só porque se eu errar a questão, erro de uma vez e já corro atrás dela e busco conhecimento sabendo onde foi que eu errei exatamente.
EM11CDI34	A prova de fases é interessante para nós, pois ela faz com nós alunos relembremos conteúdos do Ensino Médio e o que não lembramos, pesquisamos para fazer.
EM11CDI37	Interessante, pois posso analisar alguns erros que passaram por despercebido ao meus olhos antes, e agora posso corrigi-los.
EM11CDI39	Tem sido bom, porque muitas coisas dadas nesta prova em fases não tinha visto no Ensino Médio ou vi muito pouco, então isso tem feito eu correr atrás das coisas que não sei fazer.
EM11CDI40	Muitas vezes da medo, que nos mostra a real situação da minha matemática básica, ou pelo menos nunca tive um método de estudo diário e isso está sendo coisa bem difícil, com essa prova em fases está vindo uma cobrança própria, muitas vezes vergonha de não saber coisas tão básicas.
EM11CDI41	Eu tenho achado interessante fazer a prova em várias fases pelo fato de

	se eu não recordo algumas terias, ou como resolver os exercícios, eu pesquiso em livros, na internet ou mesmo pergunto aos monitores. A prova em várias fases me faz recordas teorias esquecidas e estudá-las novamente.
EM11CDI42	Tenho achado muito importante, pois me fez revisar conceitos do Ensino Médio que, na época, não fazia tanto sentido. Essa prova em fases é interessante pelo fato de os alunos tirarem suas próprias dúvidas e estarem sempre adquirindo conhecimento e reforçando as noções básicas de matemática que, com o tempo, vão sendo esquecidas.
EM11CDI43	Creio que a prova em fases é uma boa ferramenta para aquelas que já não lembram ou simplesmente, não tiveram uma boa base de matemática básico no Ensino Médio, com isso podemos trabalhar melhor os conteúdos das disciplinas mais avançadas como Cálculo I entre outras que necessitas da matemática básica.
EM11CDI44	A prova em fases é ótima para testar conhecimento, pois são poucas questões, porém relacionando todo o conteúdo de matemática básica, matemática mais avançada, cálculo, enfim entre outras coisas mas, tenho gostado, e acho interessante esse desafio.
EM11CDI45	A prova em fases como a matéria Cálculo Diferencial me mostrou que minha base de matemática é péssima. A cada fase tento resolver uma questão, ao contrário dos meus colegas. Estou observando que coisas simples para os outros não é para mim. Em umas das aulas a senhora comento: “quem não não conseguindo resolver a prova em fases, com certeza, não vai bem em cálculo”. Isso é fato.
EM11CDI47	Muito boa a idéia de separar a mesma prova em várias fases. Possibilita analisar meu desenvolvimento nas matérias. O que em uma fase não consegui resolver uma determinada questão, na fase seguinte posso ter capacidade de resolver a mesma.
EM11CDI48	Legal, seria mais legal se eu fosse uma aluna mais aplicada.

Q2

EM11CDI01	Modificou sim, com a realização desse tipo de prova, tive que sair da rotina de ficar só lendo slides e correr atrás de livros e outras fontes de pesquisa, sendo assim afetando meu modo de estudar a matéria de

	Cálculo Diferencial e Inegral.
EM11CDI03	No meu caso não notei muita diferença, pois tenho dificuldade na parte de funções e limites, sendo assim não consigo realizar esta prova.
EM11CDI04	Fez com que passasse a desenvolver questões que a primeira vista eu não saberia solucionar, mas a partir da análise interpretativa do exercício e do desenvolvimento da questão com o simples objetivo de descobrir como solucioná-la pude chegar a resultados satisfatórios.
EM11CDI05	Para mim mudou, pois agora tenho mais facilidade e praticidade na hora de efetuar contas básicas para resolver exercícios mais complexos.
EM11CDI06	Sim, está ajudando bastante pois a disciplina de Cálculo exige muito saber de matemática básica para o entendimento da matéria no decorrer do curso.
EM11CDI07	Sim, é muito. Devido ao fato de pesquisar os conteúdos básicos, durante a aula essa resolução de exercícios que exigiam saber essas conteúdos, foi mais fácil entender e resolver os problemas propostos. Devido ao fato da prova abranger conteúdos básicos do Ensino Médio, muitas vezes esses conteúdos não foram bem estudados, assim é necessário buscar informações que possam ajudar na resolução do problema. Nas outras disciplinas, que também contém matérias de Ensino Médio, e que foram esquecidas, a busca por solução é fundamental para o aprendizado total.
EM11CDI08	Sim, pois não só aumentou os meus conhecimentos matemáticos, como também, uma melhor argumentação e leitura dos problemas, além de incentivar a pesquisa na busca de soluções.
EM11CDI09	Sim, pois quando tenho uma dúvida em algum exercício não preciso necessariamente recorrer ao professor, posso buscar a solução em livros.
EM11CDI10	Mudou, além do fato de complementar, não só uso a matemática básica relembrada para as questões de cálculo como uso fórmulas de cálculo para resolver questões da básica.
EM11CDI12	Sim, eu comecei a estudar mais, fiquei sabendo de fórmulas que nem lembrava mais e que estou usando em derivação no momento.
EM11CDI13	Sim, eu comecei a entender melhor a linguagem matemática, ligando melhor o nome de coisas a que eu tenho que fazer, isso me atrapalhava muito e também me ajudou na realização de exercícios dessa e de outras matérias que para sua resolução necessita de algum destes

	conhecimentos básicos de matemática.
EM11CDI14	Em relação a matéria vista em sala de aula não houve muita mudança para mim, mas a prova aplicada dessa forma faz com que cada um corra atrás de conteúdos em que há dificuldade em relação a matemática básica, e com maior conhecimento nessa matéria, o aprendizado de Cálculo Diferencial e Integral se torna mais fácil
EM11CDI15	Sim, pois realizando a prova eu descubro as minhas dificuldades e procuro correr atrás para compreendê-las.
EM11CDI16	Sim, facilitando o uso da matemática básica na disciplina.
EM11CDI17	Sim, pois a disciplina de cálculo utiliza conteúdos de matemática básica que já não estavam mais tão claros e que tiveram que ser estudados para a realização da prova em fase.
EM11CDI18	Sim, quando aplicado os conceitos de função inversa, par, ímpar, domínio, contradomínio.
EM11CDI19	Sim, por que o conteúdo que tem nessa prova é praticamente um pré-requisito para cálculo.
EM11CDI20	Sim, cada detalhe da aula é fundamental para entendermos qualquer exercício. Por isso é preciso prestar muita atenção nas aulas e fazer as listas.
EM11CDI21	Sim, pois se não se matemática básica não se sabe cálculo.
EM11CDI22	Modificou, pois com a prova estou revendo conceitos matemáticos necessários para a disciplina, os quais eu não lembrava mais.
EM11CDI23	Modificou, pois estudando para prova em fases estou conseguindo entender com mais facilidade o conteúdo da disciplina de cálculo.
EM11CDI25	Modificou, pois fez com que eu corresse atrás de estudos básicos, fundamentais para a realização de cálculo, no qual eu não aprendi ou não lembrava desses estudos.
EM11CDI26	Sim, as dúvidas sobre essa prova esclareceram dúvidas sobre a matéria de cálculo, técnicas de simplificação, expressar gráficos.
EM11CDI27	Sim, está ajudando muito, pois a matemática que se pede nesta prova é a essência das matérias de Cálculo diferencial.
EM11CDI29	Modificou pelo fato de que, o estudo dos conceitos básicos, ajudou a entender o novo conteúdo passado.
EM11CDI30	Esta prova ajuda na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no quesito respostas; uma atenção maior para formular uma resposta melhor.

EM11CDI33	Sim, pois em cálculo é necessário ter conhecimento de matemática básica. Ajudou muito porque foi revisando matérias que eu não lembrava mais.
EM11CDI34	Sim, a maioria, aliás, todos esses conceitos é utilizado na disciplina, com a prova. Fui relembrando conceitos os quais facilitaram algumas coisas da disciplina.
EM11CDI37	Um pouco. Pensando em alcançar um melhor desempenho acabei por deixar outras matérias de lado e me dedicar a matemática. Não obter o desempenho que esperava, não por falta de interesse a minha parte, e sim por não conseguir em muitos momentos interpretar o conteúdo solicitado diante da prova, desta maneira deixando por algumas vezes de freqüentar a prova em fases para estudar mais.
EM11CDI39	Sim, pois coisas básicas da matemática que estava nas matérias de Cálculo e que ficava com um pouco de dúvida, com esta prova já está esclarecendo muito.
EM11CDI40	Sim, tanto uma visão de cálculo bem diferente, na primeira prova de limite ficou bem claro que a matéria em si eu sei, o que fez eu ter uma nota tão baixa foi a falta de conceitos básicos.
EM11CDI41	Sim, me auxiliam recordar teorias, soluções mais rápidas de exercícios e principalmente, a relembrar conceitos de funções esquecidos e não muito utilizados por mim.
EM11CDI42	Sim e muito. Percebi que na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, a matemática básica é o pré-requisito essencial para seu entendimento. Sem esses conceitos é impossível entender, resolver e usufruir da disciplina.
EM11CDI43	Para um bom entendimento da matéria de Cálculo a prova em fases modificou minha atuação devido alguns conteúdos que eu não lembrava que foram utilizado na prova de limites e derivadas e também do qual eu simplesmente não sabia fazer, me fez buscar sobre esses conteúdos e revisá-los para melhor aprimoramento na disciplina.
EM11CDI44	Sim, pois está nos ajudando a raciocinar melhor, nos mostrando, que deve-se pensar, analisar, entender o problema para depois começar resolvê-lo.
EM11CDI45	Bem sutilmente. Com a grande dificuldade na matéria e na matemática isso torna um pouco complicado.
EM11CDI47	Não, continuo abordando a matéria da mesma forma antes da prova.

EM11CDI48	Sim, pois algumas coisas que eu aprendi posso aplicar na prova de fases.

Q3

EM11CDI01	Sim. Essa prova me ajudou e ensinou a correr atrás do que eu preciso e não ficar esperando tudo na mão. Também aprendi a revisar o conteúdo do Ensino Médio em outras matérias facilitando assim meu aprendizado e enriquecendo minhas informações.
EM11CDI03	Ajuda a nos fazer refletir, pensar e calcular melhor os problemas, então acho que ajuda.
EM11CDI04	Sim. Da mesma maneira como argumentado na questão 2.
EM11CDI05	Sim, tive mais facilidade na matéria de Geometria Analítica, pois nesta prova estudei e revisei conceitos básicos de retas e alguns conceitos de parábolas.
EM11CDI06	Sim, em Geometria Analítica ampliou meus conhecimentos na resolução de exercícios principalmente nas provas pois percebi que uma matéria está ligada a outra.
EM11CDI07	Sim, pois quando o professor está falando de um assunto que é continuação do que já foi estudado, e eu não lembro, quando eu chego em casa, procuro em livros e na internet para que eu possa entender a proposta da aula.
EM11CDI08	Sim, pois a prova incentivou a pesquisa para a solução e análise de problemas, o que refletiu-se nas demais disciplinas.
EM11CDI09	Sim, fez com que me tornasse menos dependente do professor.
EM11CDI10	Até o momento não, mas já ouvi de outras pessoas que em matérias como física se usa muita.
EM11CDI12	Sim, por que eu vi que tenho que correr atrás para saber mais sobre algumas coisas para ir melhor na faculdade.
EM11CDI13	Sim, como já disse em entender mellhor o que se pede nos exercícios e suas resoluções.
EM11CDI14	Esse processo ajudou em outras disciplinas que também tem em sua base conceito de matemática. E em matérias como física e química acabei percebendo que podia buscar conceitos básicos como em cálculo para ajudar em conteúdos mais complexos
EM11CDI15	Sim, principalmente em Geometria Analítica, por envolver também

	matemática básica.
EM11CDI16	Sim, nas outras disciplinas o uso da matemática tem como base os conceitos aplicados nessa prova.
EM11CDI17	Sim, não muito pelo conteúdo referente na prova, mas por saber que muitos dos conteúdos se tornam complicados por não lembrarmos conteúdos bases para a disciplina. Assim, se estes forem estudados a compreensão da matéria será mais fácil.
EM11CDI18	Não.
EM11CDI19	Um pouco, pois é um tipo de prova bastante longa e nos ajuda a acostumar com os tipos de provas das outras matérias.
EM11CDI20	Sim, pois prestar atenção em todas as aulas é fundamental.
EM11CDI21	Alguns conhecimentos que tive que buscar ajudaram bastante, principalmente GA e também outras disciplinas, pois matemática básica é utilizada em tudo.
EM11CDI22	Sim, na disciplina de Geometria Analítica pelo mesmos motivos de Cálculo Diferencial e Integral.
EM11CDI23	Sim, modificou também minha atuação em outras disciplinas, por exemplo em geometria analítica, também estou tendo mais clareza para entender esta disciplina. Reconheço muito o esforço que a professora tem em nos ajudar, por isso não acho que tenho que desistir sem me esforçar também. Por mais que seja um conteúdo de Ensino Médio eu ainda apresenta dificuldade com essa prova em fases.
EM11CDI25	Sim, pois assim como pesquiso mais informações para realização desta prova, pesquiso para as outras matérias.
EM11CDI26	Em Geometria Analítica sim, para realização de gráficos.
EM11CDI27	Em minha opinião, para outras disciplinas, bem pouco. A única que poderia ajudar foi Geometria Analítica e o conteúdo desta matéria que contém na prova que já foi estudado.
EM11CDI29	Modificou mais precisamente na disciplina de Geometria Analítica, pois alguns conceitos básicos coincidem, melhorando também a compreensão dessa matéria.
EM11CDI30	Também ajuda no quesito elaboração de uma resposta melhor.
EM11CDI33	Ajudou. Em Geometria Analítica também, por que antes de ver os conceitos de equação de reta, coeficiente angular ou linear já lembrei com essa prova de fases.
EM11CDI34	Sim, tanto a prova ajudou nas outras disciplinas, como alguns conceitos

	relembrando em outra disciplina ajudou com minha atuação na prova também.
EM11CDI37	Algumas coisas consigo entender agora com mais facilidade, mas percebi que apresento uma grande deficiência em relação a matemática básica, não obtendo assim o progresso esperado para a disciplina de cálculo.
EM11CDI39	Sim, pois fez com que coisas que estão difícil de entender, eu correr atrás para aprender.
EM11CDI40	Sim, possa dizer que as matérias mais elementares se tornam uma das mais complexas por essa falaha na matemática básica. Isso me mostra que não tem muito sentido você saber bem a matéria de Cálculo, Geometria Analítica se não dominar o básico.
EM11CDI41	Essa prova de fases também me auxiliou em outras matérias, principalmente em Geometria Analítica, onde possuo grande dificuldade de visualizar e compreender os exercícios e tórias.
EM11CDI42	Sim, principalmente em geometria analítica e cálculo diferencial e integral, em que é exeigido mais conceitos da matemática básica.
EM11CDI43	Idem 2.
EM11CDI44	Em disciplinas como matemática, introdução a engenharia, tem modificado um pouco mais em outras matérias não acho que tenha me ajudado.
EM11CDI45	Acho que nas outras muito pouco. Talvez em geometria analítica.
EM11CDI47	Não. O conteúdo da prova abrange um pouco de outras matérias porém seu processo, eu diria que é a mesma das demais provas, porém com mais chances, e isso não afeta minha atuação.
EM11CDI48	Idem 2.