Universidade
Estadual de Londrina

BIANCA DE OLIVEIRA MARTINS

A MODELAGEM MATEMÁTICA A PARTIR DE UM OLHAR SOBRE OS LIVROS DO ICTMA

Londrina
2019

BIANCA DE OLIVEIRA MARTINS

A MODELAGEM MATEMÁTICA A PARTIR DE UM OLHAR SOBRE OS LIVROS DO ICTMA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profª. Dr.ª Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

MARTINS, Bianca de Oliveira.
A Modelagem Matemática a partir de um olhar sobre os livros do ICTMA / Bianca de Oliveira MARTINS. - Londrina, 2019.
216 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, 2019.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Tese. 2. Modelagem Matemática - Tese. 3. ICTMA - Tese. 4. Fenomenologia - Tese. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. . III. Título.

BIANCA DE OLIVEIRA MARTINS

A MODELAGEM MATEMÁTICA A PARTIR DE UM OLHAR SOBRE OS LIVROS DO ICTMA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____

Prof. Dr. Dirceu dos Santos Brito
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____

Prof. Dr. Emerson Tortola
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Londrina, 25 de fevereiro de 2019.

AGRADECIMENTOS

Quando fecho os olhos e relembro os caminhos pelos quais fui guiada para contemplar esta etapa, lembro-me daqueles que com todo o carinho, com toda a paciência, e com toda a experiência e conhecimento se dispuseram a ensinar-me, a compartillhar tudo o que carregam de melhor, suas alegrias e seus jeitos que me serviram de inspiração e incentivo.

Embora as alegrias sejam contagiantes, nenhum caminho é perfeito! Pesar e medir torna-se mais corriqueiro, tentamos regular o tempo, mesmo que as vezes o imprevisível aconteça. A dissertação torna-se como que uma parte de nós, e por vezes, optamos fazer os “gostos” dela que ao nossos. Então, o caminho fica mais solitário, mas quando você para, e olha ao seu redor, aqueles que torcem por você estão sempre contigo!

Deus fez-me forte e deu-me luz para atravessar os momentos de escuridão. Presenteou-me com uma família que me apoia e zela por mim. Mostrou-me como os amigos podem ser como o sol que te aquece num dia frio. Amigos que nos amam e que a ternura transparece em seus olhares, que torcem conosco para que tudo dê certo! E além disso, concedeu-me a oportunidade de conhecer aqueles que me convidaram a voar, mesmo sabendo que este voar dependeria de minhas asas, estes nos quais tenho orgulho de chamá-los de meus professores.

Agradeço a meus pais e minhas irmãs por todo apoio, amor e compreensão concedidos.

Aos meus professores da graduação e, em especial, àqueles que se tornaram meus amigos, Bárbara e Rudolph, que estão ao meu lado e são parte de minha inspiração, de meu alicerce, de minha motivação e orientação. Vocês moram em meu coração!

Ao meu irmão de orientação Jeferson, por toda amizade, zelo, preocupação, desespero e risadas, obrigada pela companhia.

Aos integrantes do Grupo de Pesquisa sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática – GRUPEMMAT, pela recepção acolhedora, às possibilidades de discussões, reflexões e aprendizados proporcionados.

A minha orientadora – Lourdes Maria Werle de Almeida – pelas contribuições, reflexões e pela confiança que depositou em mim.

A todos os componentes da banca que se disponibilizaram a ler minha dissertação e a contribuir com a construção da pesquisa.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro no desenvolvimento da pesquisa.

“Toda a consciência é consciência de algo”

Edmund Husserl

MARTINS, Bianca de Oliveira. **A Modelagem Matemática a partir de um olhar sobre os livros do ICTMA**. 2019. 216 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

RESUMO

Nesta dissertação, a partir de uma atitude fenomenológica, objetivamos investigar o que se entende por modelagem matemática, a partir dos trabalhos publicados nos livros ICTMA nas edições de 2010 a 2017. Para detalhar uma compreensão da interrogação de pesquisa dois aspectos foram selecionados para realização do processo analítico: *as ideias do texto relativas ao que é ou o que caracteriza a modelagem matemática* e *a configuração de uma atividade de modelagem matemática nos capítulos analisados*. Os dados constituem-se de cinquenta e sete textos (capítulos dos livros ICTMA), selecionados a partir da aplicação subsequente dos critérios: os textos contemplam o termo modelagem no título ou no resumo do texto, os autores publicaram em pelo menos três edições diferentes do ICTMA e apresentam e descrevem uma atividade de modelagem matemática. O processo analítico contemplou uma Análise Ideográfica, uma Análise Nomotética e a construção de um metatexto. A Análise Ideográfica consistiu na identificação e descrição das Unidades de Significado nos textos para cada um dos aspectos analíticos, já a Análise Nomotética evidenciou a convergência das Unidades de Significado em Núcleos de Ideias e, por fim, elaboramos um metatexto vislumbrando apresentar o que se entende por modelagem matemática nos livros ICTMA nas edições de 2010 a 2017. No metatexto, elaboramos um diálogo entre a emergência dos Núcleos de Ideias e aspectos da literatura da área de Modelagem Matemática na Educação Matemática. Neste contexto, o entendimento de modelagem matemática emergiu a partir de seis Núcleos de Ideias acerca de do que se entende por modelagem matemática e de onze Núcleos de Ideias que detalham a configuração de atividades de modelagem matemática, os quais possibilitaram ampliar a compreensão de modelagem, por meio dos objetivos com as atividades, dos contextos e da forma como tais atividades são apresentadas ou foram modeladas. Por fim, essa dissertação lança um olhar sobre o que os autores mencionam sobre modelagem matemática e como a usam em suas diferentes práticas, concluindo que o entendimento de modelagem matemática está atrelado ao uso das atividades de modelagem matemática, em particular, quando o foco está no ensino e na aprendizagem da matemática ou da modelagem matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. ICTMA. Fenomenologia.

MARTINS, Bianca de Oliveira. **Mathematical Modelling from a look at the books of ICTMA**. 2019. 216 f. Dissertation (Masters in Science Teaching and Mathematics Education) – University State of Londrina, Londrina, 2019.

ABSTRACT

In this research, from a phenomenological attitude, we aimed to investigate what is meant by mathematical modelling, from the texts published in the ICTMA books in the editions from 2010 to 2017. To detail an understanding of the research question, two aspects were selected to make a analytical process: *the ideas of the text regarding what is or what characterizes mathematical modelling,* and *the configuration of a mathematical modelling activity in the texts analyzed*. Data consisted of fifty-seven texts (chapters of the ICTMA books), selected from the subsequent application of the criteria: the texts contemplate the term modelling in the title or in the text abstract, the authors that have published at least in three different editions of the ICTMA books and present and describe a mathematical modelling activity. The analytical process contemplated an ideographic analysis, a nomothetic analysis and the construction of a metatext. Ideographic analysis consisted of the identification and description of the meaning units in the texts for each of the analytical aspects, whereas in the nomothetic analysis we evidenced the convergence of the meaning units into nuclei of ideas and, finally, we elaborated a metatext, seeking to present what is meant by mathematical modelling in the texts of ICTMA books from 2010 to 2017. In the metatext, we elaborated a dialogue between the emergence of the nuclei of ideas and a few aspects of the literature of Mathematical Modelling in Mathematics Education. In this context, six Nuclei of Ideas regarding what are understood by mathematical modelling and eleven Nuclei of Ideas regarding configurations of mathematical modelling activities helped us to broaden a comprehension to understandings modelling, through the objectives with the activities, the contexts and the way in which these activities were presented or modeled inside the texts. Finally, this research takes a look at what the authors mention about mathematical modelling and how they use it in their different practices, we conclude particularly on the understanding that mathematical modelling it is related to the use of mathematical modelling activities, specially, when the focus is on teaching and learning of mathematics or of mathematical modelling.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Modelling. ICTMA. Phenomenology.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Esta investigação tem caráter fenomenológico. Segundo Bicudo (2011), o primeiro ponto de uma investigação fenomenológica é a interrogação. Ela orienta, indica o caminho e mostra o que queremos saber, o que estamos interrogando. Nesse sentido, interrogamos: *o que se entende por Modelagem Matemática nos trabalhos publicados nos livros do ICTMA?*

O ICTMA – *The International Community of Teachers of Modelling and Applications*, surgiu em 1983, quando educadores, pesquisadores e demais interessados em Modelagem Matemática na Educação Matemática, espalhados pelo mundo, organizaram-se em um grupo e, no mesmo ano, organizaram a primeira Conferência Internacional sobre o Ensino de Modelagem Matemática e Aplicações (ICTMA). Trata-se de um evento bienal e, com o início dos anos de 1990, passou a ser sediado por diferentes países do mundo. Cada edição deste evento resulta na produção de um livro ICTMA, cujos capítulos são trabalhos apresentados e discutidos no âmbito da conferência.

Sob um ponto de vista fenomenológico, a interrogação difere de um problema e de uma hipótese (BICUDO, 2011). O problema é expresso de modo a antever uma possibilidade de solução, ainda que não específica ou determinada, e refere a estudos e raciocínios logicamente conectados que apontam e conduzem a possíveis respostas (BICUDO, 2011). A hipótese, por sua vez, também se refere a uma predeterminação no contexto de uma teoria previamente assumida. A interrogação, entretanto, não nos dá possíveis resultados logo quando a colocamos em jogo e sim no desenrolar da investigação quando podemos constituir uma compreensão a respeito do que se investiga. Interrogar alguém, algo, a si mesmo, aos textos, é uma pergunta sob a qual não se tem respostas prévias. A interrogação traz consigo significados relacionados a dúvidas e incertezas, buscando esclarecer o que é percebido.

O significado da interrogação que orienta essa pesquisa está intimamente relacionado ao interesse em evidenciar o que se entende por Modelagem Matemática. Consideramos que o fenômeno "o entendimento de Modelagem Matemática" pode ser investigado mediante as configurações das atividades de Modelagem Matemática e as ideias ou caracterizações de Modelagem Matemática apresentadas nos artigos do ICTMA.

A opção pelo ICTMA se deu devido à relevância deste evento, em que diversos autores do cenário mundial compartilham suas experiências e pesquisas desenvolvidas na área de aplicações e modelagem matemática. Uma vez que o nosso fenômeno é o "entendimento de Modelagem Matemática" no cenário mundial, optamos por analisar produções que possam nos fornecer uma visão global e, neste caso, é necessário que o material para análise seja constituído por pesquisas desenvolvidas em diferentes países do mundo.

Outro critério utilizado para a escolha do ICTMA foi a participação de pesquisadores brasileiros nas últimas edições desse evento. Além disso, em 2013, o Brasil sediou o ICTMA 16, "com a colaboração dos professores, representantes brasileiros na comunidade internacional de Educação Matemática" (BIEMBENGUT, 2009).

No Brasil, com objetivo de fomentar e aprofundar as discussões a respeito da Modelagem Matemática na Educação Matemática é realizada, a cada dois anos, a Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM), que teve sua primeira edição realizada pelo Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista – UNESP, em Rio Claro, no ano de 1999.

O aumento considerável de publicações de artigos científicos, dissertações de mestrado e teses de doutorado, que relatam as pesquisas que se dedicam à Modelagem Matemática, contribuiu para com a consolidação da área e de grupos de pesquisas, bem como para a realização de eventos específicos (SOUZA; ALMEIDA; KLÜBER, 2018).

Alguns pesquisadores se referem a um panorama sobre as pesquisas na área de Modelagem Matemática na Educação Matemática, em que procuram entender e apresentar o que há nesse universo das publicações (ARAÚJO, 2010; BLUM, 2015; GEIGER; FREDJ, 2015; SILVEIRA, 2007; SOUZA; ALMEIDA; KLÜBER, 2018; entre outros).

Em relação ao foco das pesquisas em Modelagem Matemática, Souza, Almeida e Klüber (2018) realizaram um estudo diante das publicações enquadradas no Grupo de Trabalho de Modelagem Matemática (GT 10) nos anais do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM) nas edições de 2003 a 2015. Para os autores, é possível perceber que, em todas as edições, alguns aspectos surgiram e que novos pressupostos teóricos têm sustentado os argumentos de pesquisadores da área.

Além disso, tem sido recorrente nas publicações a discussão de aspectos epistemológicos referentes à caracterização do que é modelagem matemática e como sua prática ocorre em sala de aula (ALMEIDA; VERTUAN, 2011; MUTTI; KLUBER, 2018; KLUBER, 2012). Para esclarecer características das atividades de modelagem matemática as publicações amparam-se em fundamentos de perspectivas filosóficas, como o diálogo com a Filosofia da Linguagem de Ludwig Wittgenstein (1889-1951), a semiótica de Charles Peirce (1839-1914), perspectivas fenomenológicas fundamentadas na Fenomenologia de Husserl (1859- 1938), entre outras (SOUZA; ALMEIDA; KLÜBER, 2018).

Assumir uma atitude fenomenológica para investigar fenômenos tem sido a opção de alguns pesquisadores interessados em Modelagem Matemática na Educação Matemática (BRITO, 2018; KLÜBER, 2012; MUTTI, 2016; OLIVEIRA, 2016; MARTINS, 2016; entre outros).

Brito (2018) em sua tese procurou compreender como os estudantes aprendem geometria em práticas de modelagem matemática, assumindo que para compreender um fenômeno devemos ir a ele mesmo.

Com um viés ontológico a pesquisa de Klüber (2012), questionou a natureza da modelagem matemática. A investigação foi conduzida pela interrogação *o que é isto: a Modelagem Matemática na Educação Matemática?* O autor procurou por "explicitar uma compreensão mais ampla, descortinando possibilidades e abrindo interpretações sobre o fenômeno: Modelagem Matemática na Educação Matemática" (KLÜBER, 2012, p.13).

No que tange à Formação inicial e Continuada de professores em Modelagem Matemática pesquisas recentes foram desenvolvidas (OLIVEIRA, 2016, MUTTI, 2016, MARTINS, 2016). No contexto da Licenciatura em Matemática, Oliveira (2016) atentou-se ao que revela a presença da Modelagem Matemática em cursos de licenciatura de universidades estaduais do Paraná.

Em relação à Formação Continuada, Mutti (2016) investigou as revelações de práticas pedagógicas de professores da Educação Básica participantes de uma Formação Continuada em Modelagem Matemática na Educação Matemática. Já Martins (2016) em sua pesquisa de mestrado procurou responder a questão: *que sentido os professores participantes da Formação Continuada em Modelagem Matemática na Educação Matemática atribuem ao seu Grupo de formação?* Para tanto foi necessário analisar os discursos e as manifestações espontâneas de professores.

Essas pesquisas indicam possibilidades de investagação na área de Modelagem Matemática na Educação Matemática, tendo a fenomentologia como suporte para o encaminhamento metodológico e para a estruturação da pesquisa. Investimos em uma dessas possibilidades, com a finalidade de apresentar reflexões sobre "o que se entende por modelagem matemática". A relevância de nossa interrogação "*o que se entende por Modelagem Matemática nos trabalhos publicados nos livros ICTMA*?" pode ser justificada pela intenção de compreender de uma forma ampla "o que se entende por Modelagem Matemática", mediante ao aumento considerável de pesquisas que versam sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, destituindo-se de nossas crenças, conforme uma atitude fenomenológica, para que possamos olhar para o fenômeno, de modo a compreendê-lo, sob diferentes perspectivas.

No que tange à Fenomenologia, em meados do século XVIII, alguns filósofos já usavam este termo, como Lambert (1728-1777), Kant (1724-1804) e Fichte (1762-1814). O termo apareceu também em uma famosa obra de Hegel (1770-1831) "Fenomenologia do Espírito" (MOREIRA, 2010). Embora o termo já fosse utilizado, a fenomenologia, como entendemos hoje, foi fundamentada por Edmund Husserl (1859- 1938) no final do século XIX como um novo método de fazer filosofia.

> Uma tentativa de trazer a filosofia das especulações metafísicas abstratas para o contato com os problemas reais, com a experiência vivida e concreta. Inspirada na Psicologia Descritiva de Franz Brentano (1838-1917), que foi professor de Husserl, a fenomenologia foi desenvolvida por sucessores deste, tornando-se uma das grandes correntes filosóficas do século XX (MOREIRA, 2010, p.724).

Como corrente filosófica fundada por Husserl, a fenomenologia surgiu relativamente ligada à Matemática. O que motivou Husserl "o problema radical de uma clarificação dos conceitos fundamentais lógicos e matemáticos, e com isso o de uma fundamentação efetivamente radical da lógica e da matemática" (GARNICA, 1997, p.113).

A investigação fenomenológica pode seguir vertentes diferentes dependendo do modo como olhamos para o fenômeno (BICUDO, 2011). Neste contexto, Bicudo (2010) sinaliza que há dimensões ontológicas e epistemológicas *do quê* e *do como* se investiga. "As dimensões podem se separar nos desdobramentos da compreensão do produzido, uma vez que este, o produzido, se deixa captar na teia de expressões cujos significados se configuram e iluminam conforme os contextos em que são olhados" (BICUDO, 2011, p. 13).

Neste sentido, a fenomenologia pode ser entendida como a articulação do sentido que se mostra, ou também a reflexão a respeito do que se mostra, visto que etimologicamente o termo fenomenologia é composto de duas palavras *fenômeno* + *logos*:

> [...] fenômeno diz do que se mostra na intuição ou percepção e *lógos* diz do articulado nos atos da consciência em cujo processo organizador a linguagem está presente, tanto como estrutura, quanto como possibilidade de comunicação e, em consequência, de retenção em produtos culturais postos à disposição no mundo-vida (BICUDO, 2011, p. 30).

A autora se refere ao mundo como um espaço em que vivemos e que se expande na medida em que o sentido de ações se faz para cada um de nós e para a cultura da comunidade.

Venturin (2015) nos recorda que um aspecto que diz da Fenomenologia e evidencia o seu âmago é [...] *a busca do sentido que as coisas que estão à nossa volta, no horizonte do mundo-vida, fazem para nós.*

> Quando buscamos o sentido de alguma coisa, isso se revela nas experiências vivenciadas, em que o fazer, o lidar com o que é dado, no cotidiano, são questionados. O estado de perplexidade leva-nos a querer clarificar o que nos inquieta; por isso, interrogamos o que se destacou da realidade vivida. Ao assumir uma atitude de indagação não nos contentamos, simplesmente, com o visto ou o efetuado, tomado como um fato dado, mas buscamos compreender para além do que aí está. Essa é a atitude fenomenológica. Dizemos que ao buscar pelo sentido de... vamos *às coisas mesmas* com a intenção de indagar o que é isto que preocupa, ou seja, o que põe em movimento de pensar reflexivamente (VENTURIN, 2015, p. 27).

A opção pela fenomenologia ocorre no sentido de que existe o que é dito e existe aquilo que eu percebo. Por exemplo, Cerbone (2013) cita um trecho de uma obra de Quine (1976) cujo ponto de vista é considerado pertencente ao naturalismo[1]:

> Eu sou um objeto físico situado em um mundo físico. Algumas das forças desse mundo físico colidem contra minha superfície. Raios de luz atingem minhas retinas; moléculas bombardeiam meus tímpanos e as pontas de meus dedos. Eu revido, emanando ondas concêntricas de ar. Essas ondas tomam a forma de uma torrente de discurso sobre mesas, pessoas, moléculas, raios de luz, retinas, ondas de ar, número primários, classes infinitas, alegria e sofrimento, bem e mal (CERBONE, 2013, p.21).

Ao fazermos um exercício de *ver algo* por meio da fenomenologia, como ver um livro, “você vê o livro, e não ondas de luz atingindo sua retina; quando você ouve, você ouve música sendo tocada, não moléculas bombardeando seus tímpanos” (CERBONE, 2013, p. 21-22).

É neste sentido que adotamos a fenomenologia como perspectiva filosófica para sustentar o encaminhamento metodológico e a organização da estrutura deste trabalho, de modo que esta possibilita, a busca de sentido sobre o que se entende por modelagem matemática.

Para vislumbrar reflexões sobre o que se entende por Modelagem Matemática no âmbito dos trabalhos publicados nos livros ICTMA nas edições de 2010 a 2017, nossa atenção é dirigida aos artigos visando identificar: as ideias do texto relativas ao que é ou o que

[1] Segundo Houaiss (2009), pode ser entendida na Filosofia como: 1. doutrina que, negando a existência de esferas transcendentes ou metafísicas, integra as realidades anímicas, espirituais ou forças criadoras no interior da natureza, concebendo-as redutíveis ou explicáveis nos termos das leis e fenômenos do mundo; 2. escola de pensamento (p.ex., o epicurismo, o nietzschianismo) que elege os prazeres, inclinações ou instintos naturais como referência e padrão na prescrição da conduta moral; 3. doutrina intelectual (p.ex., o marxismo, a psicanálise) que busca em condicionamentos biológicos, inclinações ou necessidades orgânicas, a origem das manifestações culturais, institucionais ou psicológicas da humanidade.

caracteriza a modelagem matemática; e a configuração de uma atividade de modelagem matemática nos capítulos analisados. Para esta investigação fenomenológica entendemos que o *corpus* dos textos analisados deveria contemplar autores que publicam no evento com certa regularidade, ou seja, que pesquisam em modelagem matemática e divulgaram suas pesquisas em pelo menos três edições dos livros do ICTMA analisados. Neste contexto, 57 capítulos compõem os textos que formam a base para o detalhamento da investigação fenomenológica. A análise contempla as ideias veiculadas nos textos relativas ao que é ou o que caracteriza a modelagem matemática, bem como as especificidades que os autores abordam acerca da configuração de uma atividade de modelagem matemática, ou seja, qual o *locus* da atividade de modelagem matemática, o local de origem em que foram desenvolvidas, por exemplo, na sala de aula, no âmbito profissional com relação com a sala de aula, em semanas acadêmicas, projetos extra-classe, entre outros; o objetivo da proposição da atividade de modelagem matemática; quanto à formulação das atividades de modelagem matemática, por quem foram formuladas e a quem foram direcionadas; quanto aos dados e à origem da situação-problema; que modelos matemáticos foram utilizados e desenvolvidos nas atividades de modelagem matemática; como a validação dos modelos matemáticos foi realizada com vistas à situação inicial investigada na atividade de modelagem matemática.

Dada a interrogação que move esta pesquisa e o fato de assumirmos uma atitude fenomenológica de investigação, a dissertação contempla cinco capítulos, sendo o primeiro deles a introdução da pesquisa e o movimento que possibilita investigar a interrogação de pesquisa. O segundo capítulo contempla o encaminhamento metodológico da pesquisa, neste tecemos considerações a respeito da Fenomenologia, abordagem que utilizamos para coleta e análise dos dados, bem como as especificidades dos procedimentos de análise. O terceiro capítulo contém a análise dos dados coletados na pesquisa, subdividida em Análise Ideográfica e Análise Nomotética. No quarto capítulo visamos expressar a compreensão análitica advinda do capítulo três por meio da produção de um metatexto, que visa esclarecer a compreensão acerca do fenômeno investigado por meio do diálogo com a literatura existente acerca de Modelagem Matemática na Educação Matemática. Por fim, o quinto e último capítulo deste texto de dissertação aborda as considerações finais da pesquisa, os delineamentos futuros possíveis e as questões que poderiam ser aprimoradas.

2. ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

Com a finalidade de apresentar reflexões sobre o fenômeno “o que se entende por modelagem matemática” nos orientamos por uma atitude fenomenológica. Neste capítulo, apresentamos considerações sobre fenomenologia, o contexto de pesquisa e os aspectos investigados no decorrer da pesquisa.

2.1 SOBRE FENOMENOLOGIA

Em geral, as pesquisas que desfrutam de uma abordagem fenomenológica têm por essência certa *intencionalidade*, pois cada ato de consciência realizado por nós, é intencional (SOKOLOWSKI, 2014). Tal intenção é dita como a “relação de consciência que nós temos com um objeto” (SOKOLOWSKI, 2014, p.18), ou seja, cada ato de nossa consciência está direcionado de algum modo a um objeto, há uma atenção dirigida ao que se busca compreender, desta forma o fenômeno mostra-se para quem o interroga intencionalmente (BARROS, 2013). Assim, “separar e diferenciar todas essas intencionalidades, como também os tipos específicos de objetos correlatos com elas, é o que é feito pelo que a filosofia chamou de fenomenologia” (SOKOLOWISKI, 2014, p.22).

De acordo com Palmer (1996, p. 133), o termo fenomenologia “[...] significa deixar que as coisas se manifestem como o que são, sem que projetemos nelas as nossas próprias categorias. Significa uma inversão da orientação a que estamos acostumados”.

Neste contexto, adotar uma atitude fenomenológica significa que, na investigação do fenômeno, deixa-se de lado os ‘pré-conceitos’, as teorias e pressupostos que carregamos conosco (BICUDO, 2011). Sendo assim,

> A Fenomenologia aceita a realidade do mundo; não a coloca sob suspeição, isto é, não duvida dessa realidade considerada fenomênica. O **fenômeno** é o que é visto disso que se mostra. Nós o compreendemos como o encontro entre quem olha com atenção e o que é visto. O olhar e ser visto é denominado por Husserl o par *noesis-noema*[2]. Quando nos referimos ao ato intencional chamamos ***noesis;*** e quando nos referimos ao que está enlaçado por esse ato ***noema*** (BICUDO, 2010, p. 29).

Neste contexto, temos o fenômeno e o sujeito. O fenômeno, como já dito, é o que se mostra e o sujeito é aquele que “olha em direção ao que se mostra de modo atento e que percebe isso que se mostra nas modalidades pelas quais se dá a ver no próprio solo em que se

---

[2] Um exemplo trazido por Bicudo (2010) é sobre uma árvore. Ver a árvore é um ato da consciência, portanto, intencional; trata-se da *noesis;* o visto, a árvore, é o *noema*.

destaca como figura de mundo” (BICUDO, 2011, p. 30). Deste modo, quando o sujeito coloca em suspensão seus pré-conceitos para olhar em direção ao que se mostra, realiza-se o que na fenomenologia é conhecido por *epoché*[3], momento na investigação que viabiliza descrever o fenômeno sem que se recorra a elementos externos acerca daquilo que é visto.

Assim, a *descrição* é um procedimento da pesquisa fenomenológica que revela a estrutura do fenômeno investigado. Conforme o entendimento de Bicudo (2011),

> [...] a descrição deve permitir ao pesquisador evidenciar a estrutura do relatado, solicita um trabalho interpretativo hermenêutico visando compreender sentido, significação e significado [...] sabendo que a linguagem é polissêmica, o procedimento hermenêutico mostra-se significativo na busca do entendimento daquele constructo (BICUDO, 2011, p. 46-47).

Neste sentido, “interessa, a Husserl, descrever apenas unidades de sentido sem qualquer conteúdo, formas puras do pensamento que seriam, inclusive, o fundamento das próprias formas linguísticas de sua expressão” (MORENO, 2003, p.112).

Diante do texto que contempla a descrição do fenômeno, realiza-se uma *redução* que consiste em selecionar as partes da descrição consideradas essenciais do fenômeno, este procedimento conhecido como ato de destacar *Unidades de Significado* (BICUDO, 2011). Para realização deste procedimento Bicudo (2011, p. 50), considera ser necessário ler o texto da descrição muitas vezes, “com a finalidade de compreender o que está sendo dito pelo sujeito e, focando a interrogação diretriz da investigação, destacamos *Unidades de Significado* [...] estas são unidades que fazem sentido ao pesquisador, sempre tendo como norte o que é perguntado” (BICUDO, 2011, p. 50).

Então, podemos entender que as Unidades de Significado são unidades que fazem sentido para o pesquisador e “são postas em frases que se relacionam umas com as outras, indicando momentos distinguíveis na totalidade do texto da descrição. Elas não estão prontas no texto, mas são articuladas pelo pesquisador” (BICUDO, 2011, p. 58).

Destacadas as Unidades de Significado, o pesquisador pode realizar asserções, ou seja, “reescrever as unidades de significado utilizando uma linguagem própria da área de pesquisa na qual está inserida a investigação. Essa reescrita explicita o que compreendemos acerca do que se manifestou do fenômeno descrito” (MUTTI, 2016, p. 50).

[3] *Epoché* ou *epoqué* é uma palavra de origem grega e significa suspensão (BRITO, 2018, p. 64). A *epoché* é um procedimento utilizado na descrição fenomenológica, cujo o objetivo é descrever as coisas como elas nos mostram, colocando em suspensão nossos pressupostos, preconceitos e julgamentos (BICUDO, 2011).

Assim, é possível “construir uma rede de significados, com vistas às convergências para o estabelecimento do Núcleo de Ideias” (KLÜBER, 2012, p.89).

Portanto, a pesquisa fenomenológica busca “transcender o individualmente relatado na descrição e avançar em direção à sua estrutura, ou seja, do nuclear das vivências sentidas e descritas” este movimento pode ser encontrado na literatura fenomenológica como redução *eidética*, e significa que é relativo à essência das coisas (BICUDO, 2011, p. 46). Neste contexto, Giorgi (2014) comenta que o termo essência:

> [...] tem uma conotação negativa nos meios científicos, enquanto para Husserl ele não se refere nem às ideias de Platão, nem a uma simples análise de palavra. A essência representaria, isso sim, aquilo que, enquanto sentido, mantém-se mais duradouramente em um contexto determinado. É a articulação, baseada na intuição, de um sentido fundamental, sem o qual o fenômeno não poderia se apresentar tal como ele é: uma identidade constante que contém as variações que um fenômeno é capaz de sofrer, e que as limita. É por isso que o método encontrado para descobrir as essências é a variação livre e imaginária (GIORGI, 2014, p. 395).

Então, quando as Unidades de Significado convergem a uma mesma estrutura que revelam o modo de ser do fenômeno, é possível constituir os Núcleos de Ideias e para saber se a estrutura é a essência do fenômeno, sugere-se que seja realizado o procedimento de variação imaginativa. Isto quer dizer que, a estrutura encontrada deve ser submetida ao “procedimento intencional de imaginar outras maneiras de o núcleo estrutural, constituído ao longo das reduções, poder ser, trabalhando na esfera do ‘como se’” (BICUDO, 2010, p. 34). Como exemplifica Brito (2018, p. 67)

> [...] vamos supor que diferentes experiências de aprendizagem em geometria apontam a *visualização* como uma estrutura dessa aprendizagem, ou seja, a aprendizagem geométrica se mostra como *visualização*. Utilizando a variação imaginativa, perguntamos se, sem *visualização*, ainda há aprendizagem geométrica. Se a resposta é afirmativa, então concluímos que a visualização é um invariante desse tipo de aprendizagem.

Desta forma, o Núcleo de Ideia abarca as generalizações, as convergências das Unidades de Significado que revelam o modo de ser do fenômeno. Possibilitando perceber o que se mostra comum aos diferentes individuais (BICUDO, 2011).

Diante do exposto a respeito dos procedimentos que devem ser realizados em uma investigação fenomenológica, por meio da perspectiva utilizada de Bicudo (2011) duas são as etapas que compõem uma análise fenomenológica: Análise Ideográfica[4] e Análise Nomotética[5].

A Análise Ideográfica consiste na individualidade. Está ligada ao ato de realizar a descrição do fenômeno investigado, por meio de várias leituras do texto descrito destacar as Unidades de Significado que são dispostas em frases, e realizar as Asserções Articuladas às unidades de significando, reescrevendo as Unidades de Significado em uma linguagem própria da área, explicitando o que foi compreendido do que se manifestou do fenômeno (BICUDO, 2011).

De acordo com Bicudo (2011), a partir das compreensões realizadas na Análise Ideográfica, busca-se por generalizações, isto quer dizer que as Unidades de Significado destacadas, bem como as asserções redigidas pelo pesquisador, possibilitam uma redução transcendental que é o procedimento de construção dos Núcleos de Ideias, consistindo na realização da Análise Nomotética.

Para que seja possível apresentarmos as nuances de como procedemos fenomenologicamente nesta investigação torna-se necessário explicitar o contexto da pesquisa, para responder *o que se entende por modelagem matemática?* Neste sentido, explicitamos o contexto da pesquisa e apresentamos os aspectos investigados.

2.2 CONTEXTO DA PESQUISA

Um caminho para compreender o fenômeno, bem como uma síntese epistemológica, pode ser, segundo Klüber (2012), a análise do que já se tem publicado.

Seguindo os pressupostos da investigação fenomenológica, e mediante nossos objetivos, o material dessa pesquisa foi constituído pelos livros das últimas cinco edições da Conferência Internacional sobre o Ensino de Modelagem Matemática e Aplicações (*International Conference on Teaching Modelling and Applications*), sendo os livros ICTMA 13 a 17, publicados no período de 2010 a 2017. As conferências às quais os livros se referem e onde foram realizadas estão dispostas no Quadro 1.

[4] A Análise Ideográfica “se refere ao emprego de ideogramas, ou seja, de expressões de ideias por meio de símbolos” (BICUDO, 2011, p.58).
[5] A Análise Nomotética “indica o movimento de reduções que transcendem o aspecto individual da Análise Ideográfica” (BICUDO, 2011, p.58).

Quadro 1 - Edições das Conferências ICTMA selecionadas para a análise

Edição	**Ano da conferência**	**Ano da publicação do livro ICTMA**	**Local**
ICTMA 13[6] Reunião via satélite	2007	2010	*Indiana University*, Estados Unidos da América *Kathmandu University*, Nepal
ICTMA 14	2009	2011	*University of Hamburg*, Alemanha
ICTMA 15	2011	2013	*Australian Catholic University* (Melbourne), Austrália
ICTMA 16	2013	2015	Universidade Regional de Blumenau, Brasil
ICTMA 17	2015	2017	*University of Nottingham*, Inglaterra

Fonte: as autoras.

A conferência reúne pesquisadores de diferentes países que compartilham suas experiências e pesquisas desenvolvidas na área de aplicações e Modelagem Matemática. Por essa razão a análise dos livros ICTMA nos possibilita vislumbrar o que se entende por modelagem matemática em âmbito internacional.

O ICTMA reúne investigações relativas a aplicações da modelagem matemática e, também, investigações relativas à modelagem matemática. Com intuito de analisarmos somente os capítulos que tratam de modelagem matemática na Educação Matemática fizemos um recorte nestas edições utilizando os critérios sequenciais que delimitam:

- Os capítulos que contém o termo *modelagem* no título ou no resumo;
- Os autores dos capítulos que publicaram em, pelo menos, 3 edições diferentes do ICTMA no período de 2010-2017;
- Os capítulos que apresentam a descrição de uma atividade de Modelagem Matemática.

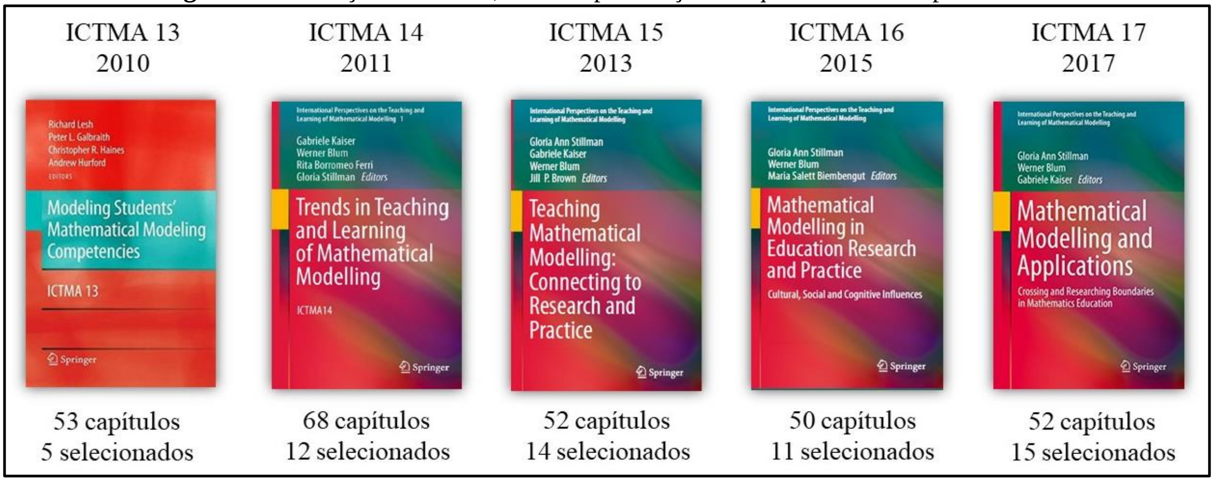
Por que adotamos estes critérios? O primeiro devido ao caráter do evento, pois o escopo acomoda tanto artigos a respeito de modelagem matemática, quanto acerca da área de aplicações. O segundo é para justificar a escolha de que não tínhamos por intenção selecionar artigos de pesquisadores que publicaram na conferência como um evento isolado de sua trajetória de pesquisa e ensino, mas sim aos que estão se dedicando e pesquisando sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática. O terceiro é para que possamos

[6] No ano de 2007 dois encontros foram realizados, porém apenas um livro – ICTMA 13 foi organizado.

compreender como é que se caracterizam os diferentes elementos de uma atividade de modelagem matemática.

Utilizando o primeiro e o segundo critérios identificamos 92 capítulos que contém o termo *modelagem* no título ou no resumo e que foram publicados por autores em pelo menos 3 edições diferentes. Destes 92 artigos, apenas 57 apresentavam a descrição de uma ou mais atividades de modelagem matemática e foram selecionados para a análise. A quantidade de capítulos em cada edição do evento é apresentada na Figura 1.

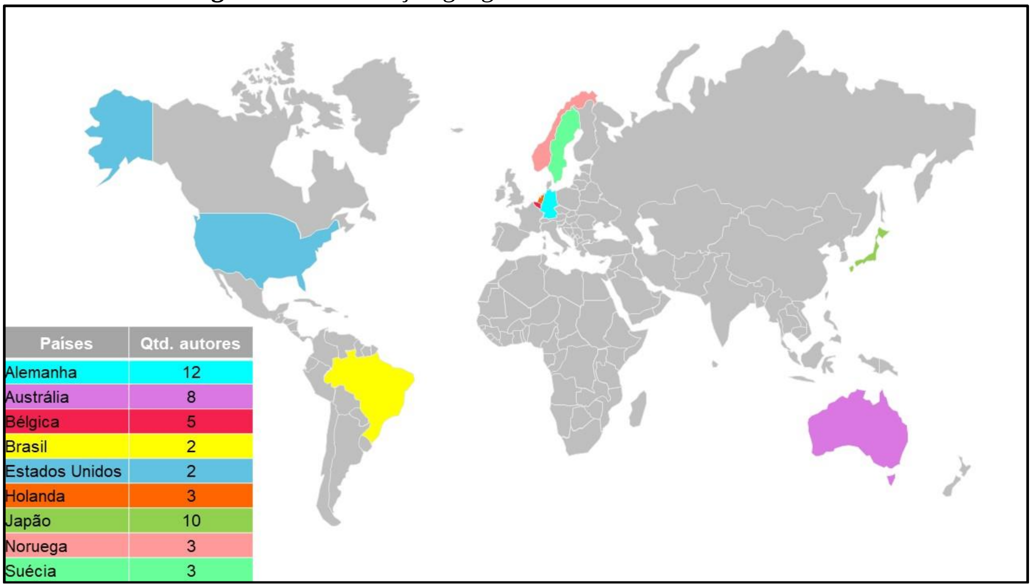
Figura 1 - Indicação dos livros, anos de publicação e a quantidade de capítulos selecionados



Fonte: as autoras.

Diante dos 57 capítulos selecionados, identificamos onde localizam-se os autores que as desenvolveram alocando-os em um mapa mundi conforme indica a Figura 2. Dos 48 autores destacados no mapa, apenas 24 publicaram em 3 edições dos livros ICTMA, e destes apenas 23 contém capítulos com descrições de atividades de modelagem matemática. Os demais são coautores que aparecem na pesquisa, dada a parceria com um dos autores selecionados de acordo com o critério *Os autores dos capítulos que publicaram em, pelo menos, 3 edições diferentes do ICTMA no período de 2010-2017*.

Figura 2 - Localização geográfica dos autores dos textos selecionados



Fonte: as autoras.

Os autores dos capítulos selecionados concentram-se em diferentes continentes, sendo o maior número de autores oriundos de países da Europa, seguidos de autores da Austrália, Japão, Brasil e Estados Unidos. Após a aplicação dos critérios de seleção, 57 capítulos foram selecionados para a análise. O Quadro 2 contempla os autores e seus respectivos textos, sendo que as células sombreadas indicam que o artigo aparece mais de uma vez na tabela, devido à possibilidade de coautoria entre os autores. Vale lembrar que nem sempre as publicações dos autores selecionados, ou seja, àqueles que publicaram em três edições diferentes do ICTMA, continham descrições de atividades de modelagem matemática e, assim, não foram selecionadas para análise.

Quadro 2 – Autores que publicaram em pelo menos 3 Edições do ICTMA nas edições de 2010-2017 e respectivos capítulos

AUTOR	EDIÇÃO	CAP.	TÍTULO DO CAPÍTULO
Akihiko Saeki	ICTMA 15	7	Dual Modelling Cycle Framework for Responding to the Diversities of Modellers
	ICTMA 15	17	Evidence of a Dual Modelling Cycle: Through a Teaching Practice Example for Pre-service Teachers
	ICTMA 16	15	How Do Students Share and Refine Models Through Dual Modelling Teaching: The Case of Students Who Do Not Solve Independently
	ICTMA 17	27	Case Study of Pre-service Teacher Education for Mathematical Modelling and Applications Connecting Paintings with Mathematics
	ICTMA 17	34	The Dual Modelling Cycle Framework: Report on an Australian Study

Akio Matsuzaki	ICTMA 15	7	Dual Modelling Cycle Framework for Responding to the Diversities of Modellers
	ICTMA 15	17	Evidence of a Dual Modelling Cycle: Through a Teaching Practice Example for Pre-service Teachers
	ICTMA 16	15	How Do Students Share and Refine Models Through Dual Modelling Teaching: The Case of Students Who Do Not Solve Independently
	ICTMA 16	41	Evidence of Reformulation of Situation Models: Modelling Tests Before and After a Modelling Class for Lower Secondary School Students
	ICTMA 17	34	The Dual Modelling Cycle Framework: Report on an Australian Study
Daniel Clark Orey	ICTMA 15	6	Ethnomodelling as a Methodology for Ethnomathematics
	ICTMA 16	32	Social-critical Dimension of Mathematical Modelling
	ICTMA 16	50	Modelling the Wall: The Mathematics of the Curves on the Wall of Colégio Arquidiocesano in Ouro Preto
	ICTMA 17	13	Ethnomodelling as the Mathematization of Cultural Practices
	ICTMA 17	48	Mathematical Modelling in a Long-Distance Teacher Education in Brazil: Democratizing Mathematics
Dirk De Bock	ICTMA 14	6	Word Problem Classification: A Promising Modelling Task at the Elementary Level
	ICTMA 15	32	How Students Connect Descriptions of Real-World Situations to Mathematical Models in Different Representational Modes
	ICTMA 17	20	How Students Connect Mathematical Models to Descriptions of Real-World Situations
Gabriele Kaiser	ICTMA 14	57	Authentic Modelling Problems in Mathematics Education
	ICTMA 15	23	Complex Modelling Problems in Co-operative, Self-Directed Learning Environments
Gilbert Greefrath	ICTMA 13	23	Analysis of Modeling Problem Solutions with Methods of Problem Solving
	ICTMA 14	32	Modelling Considering the Influence of Technology
	ICTMA 16	13	Problem Solving Methods for Mathematical Modelling
	ICTMA 17	44	Modelling and Simulation with the Help of Digital Tools
Gloria Ann Stillman	ICTMA 13	11	Turning Ideas into Modeling Problems
	ICTMA 13	33	Identifying Challenges within Transition Phases of Mathematical Modeling Activities at Year 9
	ICTMA 14	18	Applying Metacognitive Knowledge and Strategies in Applications and Modelling Tasks at Secondary School
	ICTMA 14	29	Pre-service Secondary Mathematics Teachers' Affinity with Using Modelling Tasks in Teaching Years 8–10
	ICTMA 14	66	Evolution of Applications and Modelling in a Senior Secondary Curriculum

	ICTMA 15	30	The Role of Textbooks in Developing a Socio-critical Perspective on Mathematical Modelling in Secondary Classrooms
	ICTMA 16	7	Facilitating Mathematisation in Modelling by Beginning Modellers in Secondary School
	ICTMA 17	7	The Primacy of 'Noticing': A Key to Successful Modelling
	ICTMA 17	14	Enabling Anticipation Through Visualisation in Mathematising Real-World Problems in a Flipped Classroom
Hans-Stefan Siller	ICTMA 14	32	Modelling Considering the Influence of Technology
	ICTMA 17	44	Modelling and Simulation with the Help of Digital Tools
	ICTMA 17	51	How to Build a Hydrogen Refuelling Station Infrastructure in Germany: An Interdisciplinary Project Approach for Mathematics Classrooms
Helen M. Doerr	ICTMA 14	26	Models and Modelling Perspectives on Teaching and Learning Mathematics in the Twenty-First Century
	ICTMA 16	24	Moving Beyond a Single Modelling Activity
Jill P. Brown	ICTMA 13	11	Turning Ideas into Modeling Problems
	ICTMA 13	33	Identifying Challenges within Transition Phases of Mathematical Modeling Activities at Year 9
	ICTMA 14	20	Modelling Tasks: Insight into Mathematical Understanding
	ICTMA 14	29	Pre-service Secondary Mathematics Teachers' Affinity with Using Modelling Tasks in Teaching Years 8–10
	ICTMA 15	24	Inducting Year 6 Students into "A Culture of Mathematising as a Practice"
	ICTMA 15	30	The Role of Textbooks in Developing a Socio-critical Perspective on Mathematical Modelling in Secondary Classrooms
	ICTMA 16	7	Facilitating Mathematisation in Modelling by Beginning Modellers in Secondary School
	ICTMA 17	18	Context and Understanding: The Case of Linear Models
	ICTMA 17	7	The Primacy of 'Noticing': A Key to Successful Modelling
Jonas B. Ärlebäck	ICTMA 13	52	On the Use of Realistic Fermi Problems in Introducing Mathematical Modelling in Upper Secondary Mathematics
	ICTMA 15	3	Modelling from the Perspective of Commognition – An Emerging Framework
	ICTMA 16	24	Moving Beyond a Single Modelling Activity
	ICTMA 17	43	Initial Results of an Intervention Using a Mobile Game App to Simulate a Pandemic Outbreak
Max Stephens	ICTMA 14	64	Making Connections Between Modelling and Constructing Mathematics Knowledge: An Historical Perspective
	ICTMA 17	33	Modelling as Interactive Translations Among Plural Worlds: Experimental Teaching Using the Night-Time Problem

Milton Rosa	ICTMA 15	6	Ethnomodelling as a Methodology for Ethnomathematics
	ICTMA 16	32	Social-critical Dimension of Mathematical Modelling
	ICTMA 16	50	Modelling the Wall: The Mathematics of the Curves on the Wall of Colégio Arquidiocesano in Ouro Preto
	ICTMA 17	13	Ethnomodelling as the Mathematization of Cultural Practices
	ICTMA 17	48	Mathematical Modelling in a Long-Distance Teacher Education in Brazil: Democratizing Mathematics
	ICTMA 14	15	Students Overcoming Blockages While Building A Mathematical Model: Exploring A Framework
	ICTMA 15	41	Assessment of Modelling in Mathematics Examination Papers: Ready-Made Models and Reproductive Mathematising
	ICTMA 16	8	Authenticity in Extra-curricular Mathematics Activities: Researching Authenticity as a Social Construct
	ICTMA 17	40	Long-Term Development of How Students Interpret a Model: Complementarity of Contexts and Mathematics
	ICTMA 17	50	Assessing Mathematizing Competences Through Multiple-Choice Tasks: Using Students' Response Processes to Investigate Task Validity
Peter Frejd	ICTMA 17	31	Mathematical Modelling as a Professional Activity: Lessons for the Classroom
	ICTMA 15	3	Modelling from the Perspective of Commognition – An Emerging Framework
	ICTMA 17	43	Initial Results of an Intervention Using a Mobile Game App to Simulate a Pandemic Outbreak
Peter Galbraith	ICTMA 13	11	Turning Ideas into Modeling Problems
	ICTMA 13	33	Identifying Challenges within Transition Phases of Mathematical Modeling Activities at Year 9
	ICTMA 14	66	Evolution of Applications and Modelling in a Senior Secondary Curriculum
	ICTMA 15	2	From Conference to Community: An ICTMA Journey— The Ken Houston Inaugural Lecture
	ICTMA 15	30	The Role of Textbooks in Developing a Socio-critical Perspective on Mathematical Modelling in Secondary Classrooms
	ICTMA 16	28	Modelling, Education, and the Epistemic Fallacy
	ICTMA 17	7	The Primacy of 'Noticing': A Key to Successful Modelling
Richard Lesh	ICTMA 14	26	Models and Modelling Perspectives on Teaching and Learning Mathematics in the Twenty-First Century
Rita Borromeo Ferri	ICTMA 13	36	Insights into Teachers' Unconscious Behaviour in Modeling Contexts
Tetsushi Kawasaki	ICTMA 14	58	Using Modelling Experiences to Develop Japanese Senior High School Students'

			Awareness of the Interrelations Between Mathematics and Science
	ICTMA 15	46	A Study of the Effectiveness of Mathematical Modelling of Home Delivery Packaging on Year 12 Students' Function Education
	ICTMA 16	49	A Mathematical Modelling Challenge Program for J.H.S. Students in Japan
Toshikazu Ikeda	ICTMA 14	64	Making Connections Between Modelling and Constructing Mathematics Knowledge: An Historical Perspective
	ICTMA 15	22	Pedagogical Reflections on the Role of Modelling in Mathematics Instruction
	ICTMA 17	33	Modelling as Interactive Translations Among Plural Worlds: Experimental Teaching Using the Night-Time Problem
Vince Geiger	ICTMA 15	9	Strässer's Didactic Tetrahedron as a Basis for Theorising Mathematical Modelling Activity Within Social Contexts
	ICTMA 15	30	The Role of Textbooks in Developing a Socio-critical Perspective on Mathematical Modelling in Secondary Classrooms
	ICTMA 16	7	Facilitating Mathematisation in Modelling by Beginning Modellers in Secondary School
Werner Blum	ICTMA 13	36	Insights into Teachers' Unconscious Behaviour in Modeling Contexts
	ICTMA 14	3	Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research
	ICTMA 15	40	Formative Assessment in Everyday Teaching of Mathematical Modelling: Implementation of Written and Oral Feedback to Competency-Oriented Tasks
	ICTMA 16	11	How to Support Teachers to Give Feedback to Modelling Tasks Effectively? Results from a Teacher-Training-Study in the Co²CA Project .
Wim Van Dooren	ICTMA 14	6	Word Problem Classification: A Promising Modelling Task at the Elementary Level
	ICTMA 15	32	How Students Connect Descriptions of Real-World Situations to Mathematical Models in Different Representational Modes
	ICTMA 17	20	How Students Connect Mathematical Models to Descriptions of Real-World Situations

Fonte: as autoras.

Diante dos capítulos selecionados nos debruçamos em um movimento de leitura orientado por nossa interrogação de pesquisa. A fim de delinear o foco da interrogação e tornar a leitura dos textos objetiva nos atentamos a alguns aspectos nos textos que serão elucidados na próxima seção.

2.3 Aspectos Investigados

Para olhar sobre “o que se entender por modelagem matemática no âmbito dos trabalhos publicados no ICTMA, nossa atenção é dirigida aos artigos visando identificar:

- As ideias dos textos relativas ao que é ou o que caracteriza a modelagem matemática;
- A configuração de uma atividade de modelagem matemática segundo os capítulos analisados.

Entendemos que nossa investigação solicita o auxílio dessas especificidades para o movimento da análise fenomenológica.

Buscamos identificar as ideias dos textos relativas ao que é ou o que caracteriza a modelagem matemática pois, entendemos que, por meio desse aspecto é possível evidenciar o que se entende por modelagem matemática no texto analisado.

No segundo aspecto, o termo “configuração” é usado no sentido apresentado pelo dicionário da língua portuguesa Houaiss (2009) como “arranjo de elementos interligados para operar como um todo ou um sistema; estrutura”. Assim, nossa atenção dirige-se aos elementos interligados que constituem uma atividade de modelagem matemática nos textos analisados. Consideramos esse aspecto em nossa investigação pois, a prática de modelagem matemática está incluída na configuração da atividade de modelagem matemática e, sendo assim, o que se entende por modelagem pode ser revelado por meio da configuração da modelagem matemática.

Dado o contexto da pesquisa e o material selecionado para compor nossa investigação, o Capítulo 3 apresenta os dados selecionados para análise bem como o movimento da Análise Ideográfica e da Análise Nomotética.

3. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Para que possamos compreender como se deu a análise fenomenológica, apresentamos como realizamos os procedimentos que nos levaram à composição da Análise Ideográfica e da Análise Nomotética. Ressaltamos que ao analisarmos os textos, fomos orientados por nossa interrogação de pesquisa: *o que se entende por modelagem matemática*? A identificação dos aspectos investigados (as ideias dos textos relativas ao que é ou o que caracteriza a modelagem matemática; e a configuração de uma atividade de modelagem matemática nos capítulos analisados) nos auxiliaram no enfrentamento do primeiro movimento de investigação, que é o procedimento de *descrição* do fenômeno.

O processo de descrição do fenômeno consistiu na leitura minuciosa de cada um dos 57 capítulos selecionados. Diante da leitura orientada pela interrogação de pesquisa, descrevemos o manifestado pelo fenômeno em relação aos aspectos específicos investigados. Neste sentido, para cada capítulo analisado, e amparados pelo movimento de *epoché* construímos um texto que descritivo sobre o que identificamos ser coerente aos aspectos específicos investigados nas Unidades de Significado. Embora tenhamos realizado uma tradução para cada texto, nos atentamos em manter fidedignamente a ideia dos autores.

Para auxiliar nossa análise, atribuímos um código às nossas Unidades de Significado (US) e para cada uma delas indicamos o título do artigo, o excerto em que foi identificada e fazemos Asserções Articuladas a estas unidades destacadas. Essas informações foram organizadas em um quadro, como ilustra o Quadro 3.

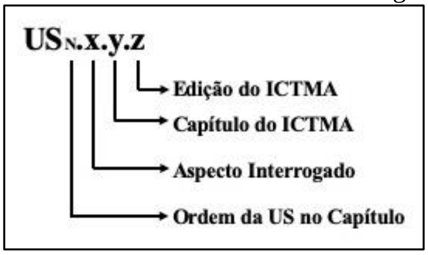
Quadro 3 - Quadro de Análise Ideográfica

Artigo	**Código da US**	**Unidade de Significado**	**Asserções Articuladas da US**
Título do artigo analisado.	US_N.x.y.z	Recortes extraídos dos capítulos selecionados.	Os excertos retirados dos capítulos são reescritos na linguagem do pesquisador, explicitando o sentido da Unidade de Significado.

Fonte: Adaptado de Brito (2018, p. 101).

A codificação foi necessária para auxiliar na visualização e na composição da Análise Nomotética. Usamos o **código** US_N.x.y.z de modo que: N é um número natural que refere-se a indicação da ordem da unidade dentro de cada texto, sendo que $N \geq 1$ e $N \in \mathbb{N}$; x identifica o aspecto investigado, 1 ou 2, sendo que o 1 indica o entendimento de modelagem matemática e 2 indica a configuração da atividade de modelagem matemática; y refere-se ao número do capítulo do ICTMA; e, z indica a edição do ICTMA a qual pertence o capítulo a que estamos nos referindo (Figura 3). Por exemplo, US1.1.11.13 é a primeira Unidade de Significado referente ao primeiro aspecto do capítulo 11 do ICTMA 13, US2.1.11.13 é a segunda Unidade de Significado referente ao primeiro aspecto do capítulo 11 do ICTMA 13. Isto quer dizer que a US1.1.11.13, é a primeira Unidade de Significado destacada sobre o primeiro aspecto investigado, no capítulo onze no ICTMA 13.

Figura 3 - Detalhamento da Unidade de Significado



Fonte: as autoras.

A partir do texto da descrição do fenômeno iniciamos a Análise Ideográfica que consiste em destacar as Unidades de Significado. Então, no texto da descrição selecionamos frases que foram partes do texto consideradas essenciais do fenômeno. Estas frases são as Unidades de Significado que segundo Garnica (1997) podem ser entendidas como:

> [...] recortes considerados significativos pelo pesquisador, dentre os vários pontos aos quais a descrição pode leva-lo. Para que as unidades significativas possam ser recortadas, o pesquisador lê os depoimentos à luz da sua interrogação por meio da qual pretende ver o fenômeno que é olhado de uma dentre as várias perspectivas possíveis (GARNICA,1997, p. 120).

Logo, a Análise Ideográfica tem por objetivo trabalhar com o destaque das ideias individuais daquilo que o fenômeno revela. Neste sentido, construímos nossas Asserções Articuladas às unidades, isto quer dizer que por meio de uma análise hermenêutica[7] efetuamos uma síntese de modo a explicitar o que compreendemos das Unidades de Significado destacadas.

3.1 ANÁLISE IDEOGRÁFICA REFERENTE AO PRIMEIRO ASPECTO: AS IDEIAS DO TEXTO RELATIVAS AO QUE É OU O QUE CARACTERIZA A MODELAGEM MATEMÁTICA

Apresentamos no Quadro 4, as Unidades de Significado, bem como nossas Asserções Articuladas referentes ao que se manifestou do fenômeno ao dirigirmos nosso olhar

[7] Segundo o dicionário Houaiss (2009) a Hermenêutica é uma palavra com origem grega e significa a arte ou técnica de interpretar e explicar um texto ou discurso.

para o primeiro aspecto que se refere às ideias do texto relativas ao que é ou o que caracteriza a modelagem matemática.

Quadro 4 - descrição das Unidades de Significado concernentes ao que se manifestou do fenômeno em relação as ideias do texto relativas ao que é ou o que caracteriza a modelagem matemática.

Artigo	**Código da US**	**Unidade de Significado**	**Asserção**
Turning Ideas into Modeling Problems	US1.1.11.13	"Na abordagem adotada a modelagem matemática é um processo para a solução de problemas que surgem nas *áreas de outras disciplinas* ou em um *ambiente do mundo real*. O processo pode não ser vivido inteiramente nas salas de aula de matemática (ele começa e termina no mundo real ou em assuntos de outros contextos). Observamos, ainda, que um *modelo matemático* (e vários podem estar envolvidos) é apenas uma *parte* do todo". "Nós vemos a modelagem matemática como uma atividade significativa, que pode ser útil tanto no desenvolvimento quanto na aplicação de conteúdos matemáticos".	Modelagem matemática como processo[8] para resolver problemas oriundos *de outras disciplinas* e *ambientes do mundo real*. Modelagem matemática como atividade para desenvolver ou aplicar conteúdos matemáticos.
Analysis of Modeling Problem Solutions with Methods of Problem Solving	US1.1.23.13	"Um ciclo bem conhecido de construção de modelos é descrito por Blum (1985, p. 200). Este ciclo representa em alguns aspectos um modelo de modelagem padrão. Um modelo de modelagem mais recente de Borromeo Ferri (2006, p. 92) foi concebido do ponto de vista cognitivo. Comparado ao modelo de Blum, ele foi estendido incluindo a representação mental da situação (modelo de situação). O modelo de Fischer e Malle (1985, p. 101) também descreve em detalhes o passo da situação para o modelo matemático. Especialmente a inclusão do processo de coleta de dados é de interesse para os problemas utilizados em nosso estudo. Com referência aos modelos mencionados acima, nem sempre é possível acompanhar todo o ciclo ou repeti-lo várias vezes. Dependendo do grupo-alvo, a questão a ser pesquisada ou o interesse especial, os modelos mencionados anteriormente se concentram em diferentes aspectos do processo de modelagem".	Modelagem matemática como aquilo que é representado pelos "ciclos de modelagem" ou pelos modelos de modelagem. Modelagem matemática como processo de resolução de problemas do mundo real.
Identifying Challenges within Transition Phase of Mathematical Modeling Activities at Year 9	US1.1.33.13	"Quando as questões de ensino e aprendizagem também estão em foco é desejável uma versão mais orientada para a resolução de problemas individuais (Borromeo Ferri, 2006) [...]. Nós usamos uma representação em diagrama que abrange tanto a orientação da tarefa quanto a necessidade de capturar o que está acontecendo individualmente na mente dos sujeitos enquanto trabalham de forma colaborativa, mas, muitas vezes, idiossincraticamente, em problemas de modelagem". "[...] a aplicação do Framework para investigação de bloqueios na fase de formulação, a mais desafiadora da modelagem matemática, levou a identificação de um novo constructo "o nível de intensidade". Além disso, com o foco em um ciclo de modelagem que inclui explicitamente o reconhecimento do processo não-linear do modelador e a presença da atividade metacognitiva, em cada parte do processo,	Modelagem matemática como aquilo que é sintetizado pelo Framework (linear), em o que ciclo indica a orientação da tarefa de modelagem e aspectos que podem ser considerados na atividade metacognitiva dos modeladores. Modelagem matemática como processo não linear. Modelagem matemática como atividade cognitiva.

[8] Segundo o dicionário Houaiss (2009) pode significar "uma série de coisas que acontecem, especialmente aquelas que resultam em mudanças naturais. Ex.: é uma parte normal do processo de aprendizagem".

		possibilitou a identificação da reflexão genuína como um meio potencial para superar os bloqueios de baixa intensidade”.	
Insights into Teachers' Unconscious Behaviour in Modeling Contexts	US1.1.36.13	“São necessários “óculos teóricos” que permitam visualizar como os dados foram analisados e interpretados. Estes “óculos” são a teoria dos estilos de pensamento matemático”. “As tarefas de modelagem selecionadas (todas tiradas do projeto DISUM) são de importância central, pois elas delineiam o campo para as análises. As tarefas foram analisadas quanto aos aspectos do conteúdo e do ponto de vista cognitivo”. “[...] nossos estudos visam auxiliar no aprimoramento no ensino de matemática e na formação de professores”. “[...] para apoiar a resolução bem-sucedida de tarefas de modelagem por parte dos alunos, e o desenvolvimento de competências de modelagem por parte dos alunos”.	Modelagem matemática como delineadores para o campo de análises dos aspectos do conteúdo e do ponto de vista cognitivo[9]. Modelagem matemática como desenvolvimento de competências[10].
On the Use of Realistic Fermi Problems in Introducing Mathematical Modelling in Upper Secondary Mathematics	US1.1.52.13	“De nossa perspectiva, a modelagem matemática é o processo de resolução de problemas inteiro (iterativo e/ou cíclico) ilustrado na Figura 52.1 [O ciclo de modelagem (Borromeo Ferri, 2006a, p. 92)] ”. “Ao analisar mais detalhadamente esse complexo processo de solução de problemas, pode-se usar a noção de competências (Maaβ, 2006) para dividir o ciclo de modelagem em subprocessos ou subatividades”. “Uma ideia é incorporar a dinâmica de grupo no diagrama, indicando em um segmento de subatividade o quanto cada membro do grupo contribui para a discussão. Pode-se também tentar modificar a estrutura para ser mais geral; [...] Em algumas situações, pode ser necessário dividir o modelo de subativação em estruturação e matematização de duas subatividades”.	Modelagem matemática como processo que integra todo o ciclo de resolução de problemas. Modelagem matemática como um conjunto de competências de modelagem matemática, conforme caracterizam Borromeo Ferri (2006) e Maaβ (2006), subdividida em subatividades.
Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research	US1.1.3.14	“Uma visão cognitiva sobre modelagem matemática”. “Neste capítulo, investiga-se o tratamento de alunos e professores com tarefas de modelagem. Para descrever, interpretar e explicar o que está acontecendo externamente e internamente, nas mentes dos professores e dos alunos, é necessária uma visão cognitiva da modelagem”. “[...] a demanda essencial da tarefa de modelagem é traduzir entre realidade e matemática”.	Modelagem matemática como a tradução entre o mundo real e a matemática. Modelagem matemática como dimensão cognitiva; como descrição do que acontece interna ou externamente na mente das pessoas.

[9] A perspectiva cognitiva é citada por Kaiser e Sriraman (2006, p. 304, tradução nossa) em que os objetivos centrais são: “a) Análise dos processos cognitivos que ocorrem durante os processos de modelagem e compreensão destes processos cognitivos e b) Promoção de processos de pensamentos matemáticos usando modelos como imagens mentais ou até mesmo retratos psicológicos ou enfatizando a modelagem como processo mental semelhante como a abstração ou generalização.”

[10] Competência de modelagem é descrita por Blum (2015, p. 78) como “a capacidade de identificar questões, variáveis, relações ou suposições relevantes em uma situação do mundo real, traduzi-las em matemática e interpretar e validar a solução para a situação dada, bem como a capacidade de analisar ou comparar determinados modelos, investigando as suposições.”

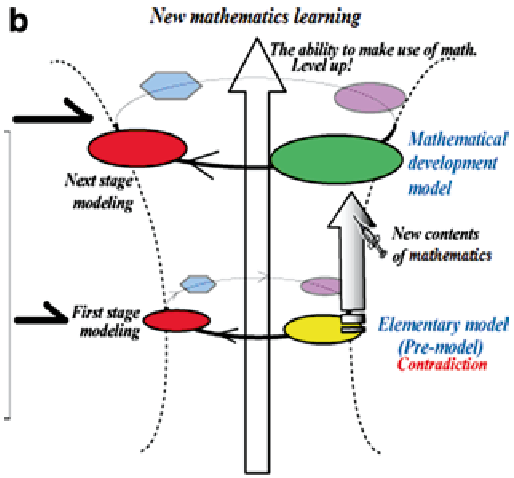
Word Problem Classification: A Promising Modelling Task at the Elementary Level	US1.1.6.14	"Neste capítulo, relatamos um estudo sobre classificação de problemas de palavras que provou ser uma tarefa de modelagem promissora no nível primário [...]". "As crianças do ensino fundamental frequentemente usam métodos proporcionais rotineiramente para problemas de valores desconhecidos, mesmo quando isso é inadequado. Testamos se essa tendência pode ser quebrada se as crianças prestarem mais atenção às fases iniciais do processo de modelagem." "Os passos essenciais na abordagem de modelagem matemática (por exemplo de Verschaffel et al. 2000), são: (1) entender o problema, (2) selecionar relações relevantes e traduzi-las em declarações matemáticas; (3) cálculos, (4) interpretar e avaliar o resultado. "[...] a atenção explícita da sala de aula para discutir semelhanças entre problemas de palavras (tanto em termos de características contextuais superficiais quanto em termos de estruturas subjacentes mais profundas) parece uma abordagem promissora para erradicar o uso excessivo de métodos proporcionais".	Modelagem matemática como uma possibilidade de romper com as padronizações na resolução de problemas, particularmente aos caracterizados como problemas de palavras[11].
Students Overcoming Blockages While Building A Mathematical Model: Exploring A Framework	US1.1.15.14	"Concebemos a atividade de "criar um modelo matemático" como uma subatividade da atividade "modelagem"". "Em nossa pesquisa, também concebemos a modelagem como um processo complexo, no qual o processo de tradução da realidade para a matemática desempenha um papel importante. E construir um modelo matemático, portanto, é um conjunto complexo de atividades dentro de todo o processo de modelagem". "Kaiser e Sriraman (2006) examinaram perspectivas internacionais sobre modelagem em educação matemática. Em sua terminologia, nossa pesquisa liga-se às direções nas quais o conhecimento matemático é usado para modelagem. Nossa pesquisa não se vincula às direções nas quais a modelagem é um veículo para aprender conceitos matemáticos. Bliss (1994) utilizou os termos modelagem explorativa e modelagem expressiva. No primeiro tipo, os alunos descobrem e testam modelos matemáticos e, no segundo tipo, os alunos constroem um modelo matemático usando a matemática de forma pragmática para resolver um problema. Nossa pesquisa se concentra na modelagem expressiva".	Modelagem matemática como um processo complexo de tradução da realidade para a matemática. Modelagem matemática como veículo para aprender. Modelagem matemática como conteúdo "conhecimento matemático para a modelagem matemática".
Applying Metacognitive Knowledge and Strategies in Applications and	US1.1.18.14	"Na modelagem, a reflexão só pode fazer sentido quando relacionada ao conteúdo matemático e às decisões de processamento por meio das quais o conteúdo é evocado e implementado". "O interesse na reflexão refere-se exclusivamente ao seu papel em facilitar a atividade metacognitiva no processo de modelagem. Na modelagem como conteúdo (Stillman e	Modelagem matemática como conteúdo que objetiva resolver problemas do mundo real e desenvolver meta-conhecimento[12] sobre como aplicar a matemática. Modelagem matemática

[11] Para Verschaffel, Greer e Corte (2000) um problema de palavras pode ser considerado como um exercício matemático em que informações advindas de um contexto são estudadas por meio de notação matemática. Estes problemas, geralmente, envolvem uma narrativa de algum tipo.

[12] Meta-conhecimento segundo Novak e Gowin (1999) se refere à preocupação epistemológica sobre conhecimento que se dirige à natureza do conhecimento e do processo e conhecer.

Modelling Tasks at Secondary School		Galbraith) aqui defendida, o objetivo é obter uma solução para um problema do mundo real, mas simultaneamente e cumulativamente, há um desejo de desenvolver meta-conhecimento consistente e robusto sobre o modelo e aplicar matemática (Blum e Kaiser 1984; Maaß 2007). O objetivo educacional é que os estudantes se tornem melhores modeladores e não apenas solucionadores de problemas separados".	como meio de tornar os estudantes modeladores melhores.
Modelling Tasks: Insight into Mathematical Understanding	US1.1.20.14	"As tarefas de modelagem escolar por natureza envolvem "vínculo(s) genuíno(s)" com algum contexto do mundo real (Galbraith 2007, p. 55), que por sua vez requer algum nível de complexidade do pensamento matemático - pensamento de ordem superior - ao tentar resolver tais tarefas". "As tarefas de modelagem, particularmente aquelas com os artefatos de comunicação necessários descritos neste capítulo, fornecem oportunidades para o desenvolvimento da compreensão matemática - à medida que o conhecimento matemático e o conhecimento prévio acerca dos contextos são integrados".	Modelagem matemática como vínculo de aspectos genuínos do mundo real e como pensamento matemático complexo. Modelagem matemática como integração entre conhecimentos prévios e conhecimento matemático.
Pre-service Secondary Mathematics Teachers' Affinity with Using Modelling Tasks in Teaching Years 8–10	US1.1.29.14	"Nessa pesquisa, foram investigadas as *Competências de Futuros Professores de Matemática* [CFMT], e a conexão entre os vários componentes do conhecimento profissional de professores de matemática em pré-serviço em relação à modelagem matemática e aos contextos do mundo real no nível secundário [...]. O objetivo geral deste estudo é avaliar as competências profissionais de professores de matemática secundária pré-serviço em universidades de vários países, adotando uma abordagem qualitativa e desenvolvendo estudos detalhados sobre o conhecimento profissional de professores em formação". "Com relação às competências para ensinar modelagem matemática, Kaiser et al. (2007, 2010) relatam resultados preliminares de professores alemães de formação inicial. Este capítulo relata as primeiras descobertas das universidades australianas".	Aborda-se a modelagem matemática a partir do entendimento de competências[13] que os professores devem ter/desenvolver para ensinar modelagem matemática.
Modelling Considering the Influence of Technology	US1.1.32.14	"Alguns pontos gerais são mencionados para melhor compreensão do papel da tecnologia no ciclo de modelagem". "Como o papel da tecnologia pode influenciar fortemente a educação matemática, em particular a modelagem matemática, é necessário incluir o papel da tecnologia no ciclo de modelagem". "Nos concentramos nas traduções da matemática para a tecnologia e vice-versa, o que constitui um obstáculo para os alunos no processo de modelagem". "A relação entre realidade e modelo de realidade, bem como a passagem para o modelo matemático podem ser influenciados pelo tipo de tecnologia utilizada".	Entende-se modelagem matemática como um processo para resolução de problemas reais cuja relação entre realidade e situação modelada pode ser influenciada por meio do uso de tecnologias.

[13] Pode ser entendido de acordo com Houaiss (2009) como a capacidade de fazer algo bem. Ex.: obter alto nível de competência em Inglês.

Authentic Modelling Problems in Mathematics Education	US1.1.57.14	“A abordagem descrita pertence a já denominada perspectiva de modelagem realística. Com base em nossa extensa pesquisa empírica (ver, por exemplo, Kaiser-Meßmer 1986), vemos a necessidade de tratar problemas autênticos de modelagem, que promovem uma gama de competências de modelagem e ampliem o raio de ação dos estudantes. A abordagem tem em como ponto de partida essencial que, para promover competências de modelagem, os alunos precisam ter suas próprias experiências com problemas autênticos de modelagem”.	A modelagem matemática é entendida a partir de uma perspectiva realística[14] de modelagem. Nessa perspectiva são tratados problemas autênticos cujo desenvolvimento visa promover uma gama de competências de modelagem e ampliar o raio de ação dos estudantes. Modelagem matemática como tratamento de problemas autênticos.
Using Modelling Experiences to Develop Japanese Senior High School Students’ Awareness of the Interrelations Between Mathematics and Science	US1.1.58.14	“Quando analisamos um evento real que precisa de matemática, é necessário aplicar matemática (Problema aplicado) e é necessário que pensemos na solução por meio do entendimento do significado do problema”. “Então, quando o modelo atual descreve a cena e o caso da realidade, nós a chamamos de “Modelo Elementar”. O modelo descrito usando a matemática que os estudantes estudaram é chamado de “Pré-modelo”, porque se torna uma parte e uma conexão com o modelo de desenvolvimento, embora seja insatisfatório como modelo. O modelo que orienta os alunos para a nova matemática é chamado de “modelo de desenvolvimento matemático”. Esses modelos fornecem a base para os materiais  de ensino introdutórios da nova unidade de matemática, onde os alunos desenvolvem uma imagem de modelagem (ver Fig. 58.3b).”	Modelagem matemática como desenvolvimento entre a matemática que os estudantes já sabem e a aprendizagem de novos conteúdos. Modelagem matemática com ênfase na prática educativa em sala de aula, para a análise de eventos reais em que a matemática se faz necessária para resolução de problemas.

14 Para Kaiser e Sriraman (2006, p. 304, tradução nossa) a perspectiva realística da modelagem tem raízes na matemática aplicada, tendo “objetivo pragmático utilitário, isto é, resolvendo problemas do mundo real, entendo o mundo real, promoção de competências de modelagem.”

Making Connections Between Modelling and Constructing Mathematics Knowledge: An Historical Perspective	US1.1.64.14	"Se a educação matemática tem como objetivo capacitar os alunos a formarem conceitos ou métodos matemáticos em seu mundo interno, e não simplesmente injetá-los a partir de um mundo externo, de um professor ou de um livro didático, é importante apresentar aos alunos modelos concretos que lhes permitam atribuir significados pessoais a esses conceitos matemáticos e validá-los". "Ambos os modelos abstraídos (mundo real → matemática) e modelos concretizados (matemática → mundo real) são tratados de forma complementar para encontrar um equilíbrio entre modelagem e construção de conceitos matemáticos".	A modelagem matemática é entendida como a criação de modelos matemáticos e sua validação no mundo real, permitindo aos alunos a atribuição de significados. Modelagem matemática como modo de introduzir conceitos matemáticos a partir seu mundo 'interno'.
Evolution of Applications and Modelling in a Senior Secondary Curriculum	US1.1.66.14		Não há um entendimento de modelagem matemática explicito. A investigação é feita com base nas diferenças que os professores fazem entre modelagem e aplicações da matemática.
From Conference to Community: An ICTMA Journey—The Ken Houston Inaugural Lecture	US1.1.2.15	"Em resumo, continua a ocupar um lugar central no domínio da comunidade ICTMA, as características da modelagem matemática como solução de problemas do mundo real, por meio da abordagem de questões de autenticidade".	Modelagem matemática como uma alternativa para resolver problemas do mundo real considerados autênticos[15].
Modelling from the Perspective of Commognition – An Emerging Framework	US1.1.3.15	"Uma conceituação de modelos matemáticos e modelagem em termos de *commognition* fornece uma estrutura para analisar a comunicação inter e intrapessoal, complementando as atuais perspectivas predominantes, atendendo às dimensões sociais e cognitivas da modelagem". "A cognição pode ligar e melhorar a compreensão de diferentes perspectivas de pesquisa em modelos matemáticos e modelagem, tornando diferenças e semelhanças explícitas e, simultaneamente, fornecendo um quadro para relacioná-los. Além disso, facilita a concepção de modelagem matemática como um tópico interdisciplinar, que pode incluir várias disciplinas diferentes". "Conceituar a modelagem por meio do destaque de discursos relevantes para construir e desenvolver um discurso subsumido, manifestado em significados relacionados e nas realizações dos sujeitos, fornece uma abordagem operacionalizável para analisar a complexidade envolvida na modelagem matemática ao abordar explicitamente esses aspectos".	Entende-se modelagem matemática como uma atividade interdisciplinar que evoca a *commognition*[16]. Neste contexto a comunicação inter e intrapessoal é relevante no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

[15] De acordo com Kaiser (2007, p. 113) os problemas autênticos são aqueles "[...] propostos por matemáticos que trabalham na indústria e que enfrentaram ou enfrentam estes problemas em seu ambiente de trabalho. De modo geral, estes problemas incluem poucas simplificações e suas soluções são desconhecidas ".

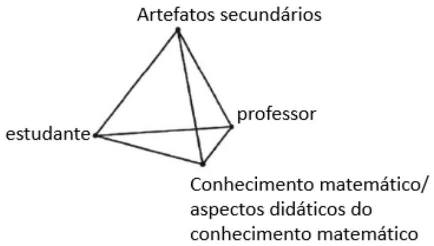
[16] "A *Commognition* é um referencial teórico desenvolvido por Sfard (2008), que enfoca os aspectos sociais e individuais do pensamento e da aprendizagem; funde e combina princípios das teorias da comunicação e da cognição" (ALERBÄCK; FREJD, 2013, p.48, tradução nossa).

Ethnomodelling as a Methodology for Ethnomathematics	US1.1.6.15	“Uma abordagem metodológica alternativa é a etnomodelagem (Rosa e Orey, 2010), uma aplicação prática da etnomatemática, e que acrescenta a perspectiva cultural aos conceitos de modelagem”. “Ao analisar a realidade como um todo, a etnomodelagem permite que os envolvidos no processo de modelagem estudem sistemas de realidade nos quais haja um esforço equitativo para criar um entendimento para todos os componentes do sistema, bem como as inter-relações entre eles (D'Ambrosio, 1993) ”. “O uso da modelagem como ação pedagógica para um programa de etnomatemática valoriza o conhecimento e as tradições anteriores dos alunos (Rosa e Orey, 2007). Isso é feito através do desenvolvimento da capacidade do aluno para avaliar e traduzir fenômenos diários por meio da elaboração de modelos matemáticos em suas diferentes aplicações”.	Modelagem matemática como ação pedagógica[17], um processo no qual é valorizada alinhada com pressupostos da etnomodelagem.
Dual Modelling Cycle Framework for Responding to the Diversities of Modellers	US1.1.7.15	“Usamos o ciclo de modelagem de Blum e Leiß (2007, p. 225), pois este ciclo indica como seu primeiro passo o processo de “construção” de “situação real e problema” para o “modelo de situação” no “resto do mundo”. A progressão deste processo depende, especialmente, das características de cada modelador e é a primeira barreira cognitiva na abordagem de tarefas de modelagem (Blum e Borromeo Ferri 2009). Borromeo Ferri (2007) focou no progresso da modelagem individual e chamou esse progresso de modelagem de “rota de modelagem” porque o progresso de modelagem de cada modelador é diferente”. “Uma das características importantes da modelagem é o aprofundamento dos modelos construídos através do progresso repetido, e os ciclos de modelagem convencionais também são destinados a essa representação”. “Introduzimos a estrutura do ciclo de modelagem dual[18] e explicamos três tipos típicos de ciclo de modelagem baseados nessa estrutura”.	Utiliza-se o entendimento de modelagem como processo de investigação de uma situação real associando as etapas descritas em um ciclo de modelagem matemática, bem como a construção teórica de Borromeo Ferri (2009) acerca das rotas de modelagem[19] dos alunos.

[17] “ A ação pedagógica não é um sinônimo de ação docente, mas a efetiva articulação da ação docente com a ação discente, mediante a obtenção de entendimento. Apenas a ação docente ou apena a ação discente ainda não constituem ação pedagógica, ela é a coordenação ente a ação docente e ação discente. Pode-se dizer que ação pedagógica é, mais propriamente, uma interação pedagógica. Discentes e docentes, orientados à aprendizagem, podem valer-se de meios reflexivos, no caso, argumentativos e não instrumentais. Esse conceito de ação pedagógica é a pretensão, pois poderia oferecer base teórica a uma didática comunicativa” (ZASLAVSKY, 2017, p.75).

[18] Modelagem Dual pode ser entendida como um processo para resolução de situações reais em que os alunos são orientados a desenvolver uma tarefa de modelagem com uma situação-problema inicial para partir para uma tarefa de modelagem cuja situação é semelhante, neste caso os autores teorizam a respeito de um ciclo de modelagem que envolve o desenvolvimento das duas situações-problema, este é caracterizado como ciclo de modelagem dual (SAEKI; MATSUZAKI, 2013).

[19] Rotas de modelagem “descreve um processo de modelagem individual em detalhes, referindo-se às várias fases do ciclo de modelagem. O indivíduo inicia esse processo em uma determinada fase, de acordo com suas preferências, e passa por diferentes fases, concentrando-se em certas fases ou ignorando outras. Para ser mais preciso, deve-se falar de rotas de modelagem visíveis, uma vez que só se pode referir a enunciados verbais ou representações externas para a reconstrução do ponto de partida e do curso de uma rota de modelagem” (BLUM; FERRI, 2009, p. 48, tradução nossa).

Strässer's Didactic Tetrahedron as a Basis for Theorising Mathematical Modelling Activity Within Social Contexts	US1.1.9.15	"[...] explorar o potencial de um modelo de ensino e aprendizagem proposto por Strässer (2009) para descrever e explicar a modelagem matemática e a atividade de aplicação que incorpora papéis de alunos, professores, conhecimento matemático e artefatos durante o engajamento com aplicações matemáticas e modelagem". "O modelo estendido de Strässer destaca a necessidade de desenvolver estruturas que descrevam, teorizem e interpretem as formas como professores e alunos se envolvem com conhecimentos matemáticos e artefatos secundários dentro das comunidades de aprendizagem."  	Modelagem matemática como parte de um modelo didático, que incorpora estudante, professor, conhecimento matemático e artefatos. O modelo didático faz a integração da perspectiva sociocultural com procedimentos que ocorrem no processo de modelagem matemática.
Evidence of a Dual Modelling Cycle: Through a Teaching Practice Example for Pre-service Teachers	US1.1.17.15	"Distinguimos três tipos de ciclos de modelagem (simples, duplo e dual) com base no que chamamos de estrutura de ciclo de modelagem dual conforme teoricamente elaborado e ilustrado em Saeki e Matsuzaki (2013)". "Uma estrutura de ciclo de modelagem dual é construída a partir do ciclo de modelagem de Blum e Leiß (2007) e é duplicado com vistas à progressão dos alunos em uma tarefa de modelagem inserida na tarefa inicial de modelagem. Em um caso típico, o ciclo de modelagem dual indica a alternância entre esses ciclos de modelagem".	A modelagem matemática é entendida como um processo para resolução de problemas reais, em que duas tarefas são desenvolvidas, sendo que a tarefa inicial dá suporte para o desenvolvimento de outra tarefa cuja situação é semelhante.
Pedagogical Reflections on the Role of Modelling in Mathematics Instruction	US1.1.22.15	"De uma perspectiva ampla, dois podem ser os objetivos pedagógicos da modelagem. O primeiro é a modelagem em si, com a modelagem tratada como o objetivo. [...] O segundo objetivo é a construção do conhecimento matemático, sendo a modelagem tratada como um método para alcançar uma meta". "[...] podemos considerar a construção do conhecimento matemático pela qual a modelagem é tratada como um meio para um fim".	Apresentam-se duas ideias de caracterização de modelagem matemática. Na primeira a própria modelagem matemática é tratada como objetivo e na segunda a modelagem é tratada como método para a construção do conhecimento matemático. Refere-se às perspectivas de modelagem matemática como veículo e como conteúdo já discutidas na literatura.
Inducting Year 6 Students into "A Culture of Mathematising as a Practice"	US1.1.24.15	"a lição se concentrou na modelagem matemática, com a intenção de induzir os alunos à importância do contexto durante a resolução dos problemas do mundo real. Elementos disto incluem: a natureza da modelagem matemática, aspectos importantes da modelagem matemática e o processo de modelagem como exemplificado por Galbraith et al. (2007)".	Modelagem matemática como um processo que visa resolver problemas do mundo real.
The Role of Textbooks in Developing a Socio-critical Perspective on Mathematical	US1.1.30.15	"Uma abordagem para o ensino usando modelagem matemática e aplicações é feita por meio da adoção de uma perspectiva sócio-crítica em que o objetivo é o desenvolvimento de uma compreensão crítica do mundo através da modelagem de fenômenos físicos e sociais".	Modelagem matemática como um ambiente para a compreensão crítica.

Modelling in Secondary Classrooms		“Em uma perspectiva sócio-crítica, o objetivo pedagógico é uma “compreensão crítica do mundo circundante e dos modelos e do processo de modelagem” (Kaiser et al., 2010, p. 224)”.	
How Students Connect Descriptions of Real-World Situations to Mathematical Models in Different Representational Modes	US1.1.32.15	“A tradução de uma situação problemática para um modelo matemático constitui uma etapa fundamental - mas não de todo óbvia - no processo de modelagem. Nós nos concentramos em dois elementos que podem atrapalhar o processo de tradução, relacionando-o ao fenômeno da excessiva dependência dos alunos com o modelo linear e sua (falta de) fluência representacional”. “Nossos resultados mostram que os alunos são proficientes em relacionar descrições de situações realistas a modelos, nos casos em que a situação descrita é linear”.	Entendida como um processo a modelagem matemática tem o início em situações realistas que são relacionadas pelos alunos à modelos matemáticos.
Formative Assessment in Everyday Teaching of Mathematical Modelling: Implementation of Written and Oral Feedback to Competency-Oriented Tasks	US1.1.40.15	“[...] pode ajudar os professores a melhorar os processos de aprendizagem dos alunos ao lidar com tarefas de competência-orientada (tarefas técnicas e tarefas de modelagem) e sua implementação no ensino cotidiano pode promover o desempenho dos alunos”. “[...] os professores foram formados para implementar um tipo especial de feedback oral relacionado aos requisitos de tarefas de competência-orientada no ensino de matemática, semelhante ao chamado método de ensino “operativo-estratégico” desenvolvido no projeto DISUM (em que os estudantes têm que lidar principalmente com tarefas de modelagem matemática em grupos e com pouco apoio do professor”.	A modelagem matemática é entendida como uma tarefa de competência-orientada, em que os estudantes lidam com tarefas de modelagem e tarefas técnicas, em grupos e com pouco apoio do professor.
Assessment of Modelling in Mathematics Examination Papers: Ready-Made Models and Reproductive Mathematising	US1.1.41.15	“Tarefas válidas em relação à modelagem matemática simulam o trabalho de modeladores profissionais, ou parte dele; portanto, elas exigem que os alunos se comprometam”. “atividades descritas no ciclo de modelagem de Blum e Leiss (2005) ”. “tarefas válidas relacionadas à modelagem podem exigir que os alunos trabalhem por um longo período de tempo e colaborativamente”. “Tarefas válidas em relação à modelagem podem exigir criatividade, solução de problemas e habilidades colaborativas, comunicativas e metacognitivas”. “as tarefas de modelagem matemática permitem vários métodos e respostas diversas. As habilidades de modelagem baseadas na criatividade e no pensamento matemático complexo são difíceis de avaliar separadamente e os avaliadores precisam ser flexíveis em seu julgamento, pois devem estar preparados para respostas surpreendentes dos alunos”.	O entendimento de modelagem matemática é colocado por meio da abordagem de tarefas que simulam o trabalho de modeladores profissionais, ou parte deste trabalho, exigindo criatividade, solução de problemas e habilidades colaborativas, comunicativas e metacognitivas. Tal entendimento está amparado na descrição do ciclo de modelagem de Blum e Leiss (2005).
A Study of the Effectiveness of Mathematical Modelling of Home Delivery Packaging on Year 12 Students’ Function Education	US1.1.46.15	“Uma atividade de modelagem matemática relacionada à entrega de uma embalagem em um domicilio no Japão, foi realizada com vistas à resolução de um problema em um cenário real”. “[...] o propósito é introduzir tarefas autênticas de modelagem matemática pela primeira vez no ensino secundário [...]”.	Atividades autênticas de modelagem matemática são abordadas tendo como ponto de partida um problema de um cenário da realidade, ou, ainda, um fenômeno da vida cotidiana dos alunos e professores.

		"Lições usando modelagem matemática devem ser desenvolvidas com um propósito claro para que os alunos possam reconhecer as conexões entre os conceitos matemáticos e os problemas do mundo real".	
Facilitating Mathematisation in Modelling by Beginning Modellers in SecondarySchool	US1.1.7.16	"Será apresentado um quadro de apoio para engajar modeladores novatos durante as transições associadas à especificação de problemas, formulação e matematização". "No contexto da modelagem matemática, definimos a antecipação como a previsão do que será útil matematicamente na transição entre as fases do processo de modelagem. Essa antecipação envolve previsões e feedback entre as fases, procedimentos que visam a tomada de decisão".	A modelagem matemática é entendida como uma atividade que pode ser orientada por meio de um quadro com questões que visam o desenvolvimento de competências de modelagem. A antecipação em modelagem matemática é vista como um auxílio disponível aos modeladores para facilitar a tomada de decisões nas fases da atividade de modelagem, o que acontece por meio de previsões e feedbacks entre as fases.
Authenticity in Extra-curricular Mathematics Activities: Researching Authenticity as a Social Construct	US1.1.8.16	"Quando uma atividade de modelagem contém aspectos autênticos, isso faz com que a atividade seja confusa, aberta, exigindo pensamento de ordem superior e assim por diante".	A modelagem matemática é entendida como uma atividade que contém aspectos autênticos[20].
How to Support Teachers to Give Feedback to Modelling Tasks Effectively? Results from a Teacher-Training-Study in the Co2CA Project	US1.1.11.16	"Modelagem matemática como parte da competência matemática". "[...] o conceito de modelagem matemática pode ser entendido como uma parte central da matemática voltado para o desenvolvimento de competências. Trabalhando com problemas do mundo real, os alunos não precisam apenas "resolver" tarefas puramente matemáticas, mas também têm que lidar com problemas cotidianos usando a matemática".	Entende-se modelagem matemática como uma das competências necessárias na Educação Matemática. As atividades de modelagem matemática são aquelas que permitem aos alunos trabalhar com problemas do mundo real por meio da matemática.
Problem Solving Methods for Mathematical Modelling	US1.1.13.16	"A modelagem matemática, portanto, foi identificada como uma das competências matemáticas gerais mais cruciais pelos padrões educacionais alemães em matemática. A competência de modelagem é descrita por NISS et al. (2007, p. 12) como "a capacidade de identificar questões, variáveis, relações ou suposições relevantes em uma situação do mundo real, traduzi-las em matemática e interpretar e validar a solução para a situação dada, bem como a capacidade de analisar ou comparar determinados modelos, investigando as suposições ", verificando propriedades, etc. Motivado pela importância dessa competência para a aprendizagem matemática, este capítulo tem como objetivo apresentar e discutir recursos para a solução de problemas que podem	A modelagem matemática é entendida como uma competência matemática, ou seja, como parte da capacidade de identificar questões, variáveis, relações ou suposições relevantes em uma situação do mundo real, bem como traduzi-las e interpreta-las por meio de conceitos matemáticos e interpretar e validar a solução para a situação dada, analisando e comparando modelos.

[20] A autora considera autenticidade como uma construção social, em que os aspectos autênticos são: "(1) a origem pode ser matemática, desde que seja de fora da escola, e (2) uma certificação também pode ser oferecida por outros especialistas do que "pessoas que trabalham em ", como as partes interessadas ligadas a outros problemas que não os do local de trabalho, como os problemas do consumidor ou ambientais" (VOS, 2015, p.108).

		ajudar os alunos em seus trabalhos com problemas de modelagem em aulas de matemática".	
How Do Students Share and Refine Models Through Dual Modelling Teaching: The Case of Students Who Do Not Solve Independently	US1.1.15.16	"No caso de usar um ciclo de modelagem dual, os modeladores progridem no primeiro ciclo de modelagem, aplicando ou referindo-se aos resultados do segundo ciclo de modelagem". "Um ponto crucial para a progressão no ciclo de modelagem dual é compartilhar vários modelos, que os modeladores não poderiam interpretar ou encontrar".	Aborda-se a modelagem matemática enfatizando a perspectiva de ciclo de modelagem dual. Neste entendimento, a progressão dos sujeitos de um ciclo a outro se dá a partir do compartilhamento de vários modelos.
Moving Beyond a Single Modelling Activity	US1.1.24.16	"As sequências de desenvolvimento de modelos estão situadas dentro de uma perspectiva contextual de modelagem (Kaiser e Sriraman 2006), na qual os alunos são confrontados com atividades em que precisam desenvolver a matemática para compreender diferentes situações".	Entende-se a modelagem matemática sob o ponto de vista da perspectiva contextual[21] conforme Kaiser e Sriraman (2006). Atividades de modelagem matemática são apresentadas por meio de uma sequência de desenvolvimento de modelos[22].
Modelling, Education, and the Epistemic Fallacy	US1.1.28.16	"a realidade subjacente diz respeito à modelagem matemática como solução de problemas do mundo real". "Diferentes abordagens para a modelagem são identificadas em termos de suas raízes ontológicas e as consequências epistemológicas que delas decorrem. Amostras de críticas de modelagem e considerações de autenticidade são então enquadradas em termos de propriedades intrínsecas a um gênero de modelagem, e não em termos de suposições definidas pelo usuário sobre a natureza dos ambientes educacionais, e um problema de modelagem é usado para instanciar cognatos".	Entende-se por modelagem matemática uma alternativa para a solução de problemas do mundo real. O capítulo apresenta as raízes ontológicas da modelagem matemática e indica as consequências epistemológicas para o ensino e a aprendizagem decorrentes de tais raízes, por exemplo quais consequências decorrem da consideração de modelagem matemática tendo como ponto de partida aspectos autênticos.
Social-critical Dimension of Mathematical Modelling	US1.1.32.16	"A modelagem matemática é usada para analisar, simplificar e descrever os fenômenos diários, a fim de prever resultados ou modificar os fenômenos. Neste processo, o propósito da modelagem matemática torna-se a capacidade de desenvolver habilidades críticas que permitem aos professores e alunos analisar e interpretar dados, formular e testar hipóteses e desenvolver e verificar a eficácia de modelos matemáticos".	A modelagem matemática é usada para analisar, simplificar e descrever os fenômenos com o propósito de desenvolver habilidades críticas que permitem aos professores e alunos analisar e interpretar dados, formular e testar hipóteses e desenvolver e verificar a eficácia de modelos matemáticos.

[21] A perspectiva contextual "considera a inclusão da Modelagem Matemática na sala de aula por meio de situações-problema reais, com o intuito de motivar os alunos e desse modo promover a aprendizagem. Está relacionada à interpretação de enunciados, sendo a obtenção do modelo matemático uma tarefa de resolução de problemas. A ideia é que em situações semelhantes àquelas já estudadas os estudantes identifiquem tais semelhanças e sejam capazes de reconstruir as ideias matemáticas que foram utilizadas" (TORTOLA; SILVA; ALMEIDA, 2011, p. 7).

[22] "O objetivo de tais atividades é que os alunos desenvolvam um sistema ou modelo conceitual que possa ser compartilhado com os outros e usado para criação de sentido em contextos estruturalmente semelhantes (ÄLERBÄCK; DOERR, 2015, p. 294).

Evidence of Reformulation of Situation Models: Modelling Tests Before and After a Modelling Class for Lower Secondary School Students	US1.1.41.16	“[...] as tarefas de modelagem capturaram situações modeladas e são preparadas para testar diferentes situações modeladas com base nas experiências individuais de cada modelador”. “Em outras palavras, esperávamos que os alunos conseguissem isso através dos processos de compreensão e/ou simplificação/estruturação da tarefa para criar um modelo real ou modelo matemático através de uma situação modelada, com questões ou demanda por conhecimento extra-matemático.	O entendimento de modelagem matemática está atrelado às situações de ensino por meio de tarefas que solicitam o relacionamento de situações reais com a matemática, bem como requerem para seu desenvolvimento conhecimentos extra-matemáticos.
A Mathematical Modelling Challenge Program for J.H.S. Students in Japan	US1.1.49.16	“A modelagem matemática é destinada a ajudar os alunos a entender melhor o mundo e contribuir para a formação de uma imagem adequada da matemática, e assim por diante”.	Entende-se modelagem matemática como uma atividade que visa auxiliar os alunos a entender melhor o mundo e contribuir para a construção de uma imagem adequada da matemática.
Modelling the Wall: The Mathematics of the Curves on the Wall of Colégio Arquidiocesano in Ouro Preto	US1.1.50.16	“Modelagem matemática é o estudo de problemas ou situações retiradas da realidade para compreensão, simplificação e resolução com *insights* para uma possível previsão ou modificação dos objetos estudados (Bassanezi 2002) ”. “[...] qualquer estudo de modelagem matemática representa um meio poderoso para validar situações matemáticas contextualizadas”.	Entende-se a modelagem matemática como o estudo de problemas ou situações retiradas da realidade para a compreensão, simplificação e resolução. Neste contexto, atividades de modelagem matemática são colocadas como um meio viável para validar situações matemáticas contextualizadas.
The Primacy of ‘Noticing’: A Key to Successful Modelling	US1.1.7.17	“O contexto do nosso trabalho envolve o desenvolvimento de habilidades de modelagem matemática para resolução de problemas no mundo real. Essa é uma habilidade necessária para os indivíduos, a fim de aplicar seus conhecimentos matemáticos em situações pessoais, relacionadas ao trabalho”.	A modelagem matemática é entendida como uma tarefa que envolve a resolução de problemas do mundo real e tem por objetivo o desenvolvimento de habilidades de modelagem matemática.
Ethnomodelling as the Mathematization of Cultural Practices	US1.1.13.17	“Uma abordagem metodológica alternativa é a etnomodelagem, que é considerada como a aplicação prática da etnomatemática (Rosa e Orey, 2010). Essa necessidade de formas culturalmente vinculadas de modelagem matemática está profundamente enraizada na teoria da etnomatemática”. “Nesse processo, o termo tradução é usado para descrever o processo de modelagem de sistemas culturais locais (*emic*) que podem ter representações acadêmicas ocidentais globais (*etic*) (Rosa e Orey, 2010) ”.	A modelagem é entendida como uma forma cultural profundamente enraizada nos pressupostos da etnomatemática e que compõe o conceito de etnomodelagem.
Enabling Anticipation Through Visualisation in Mathematising Real-World Problems in a Flipped Classroom	US1.1.14.17	“em uma abordagem que considerou a metodologia de sala de aula invertida vídeos foram designados aos alunos como uma tarefa que antecedeu a aula, a fim de que os alunos a partir dos vídeos fossem apresentados ao uso de técnicas matemáticas, que por vezes são incorporadas em cenários reais. Em sala de aula, os professores forneceram suporte enquanto os alunos trabalhavam em atividades de resolução de problemas”.	A modelagem matemática é entendida como uma atividade para resolver problemas do mundo real e o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática pode ser feito por meio de vídeos e do contato com cenários em que técnicas matemáticas são utilizadas para resolução de problemas reais.

Context and Understanding: The Case of Linear Models	US1.1.18.17	"Os problemas do mundo real são, por natureza, interessantes. Dois estudos colombianos ilustram a situação em que um contexto familiar era de interesse para os estudantes. Quiroz et al. (2015) utilizaram inundações escolares devido ao transbordamento de um rio próximo, enquanto Villa-Ochoa e Berrio (2015) usaram a cafeicultura local. O engajamento de alunos do 10º ano com um contexto de inundação permitiu que "os alunos se vissem como cidadãos que podem ler, pensar, refletir e propor soluções em seu próprio contexto" (Quiroz et al., P. 239). Da mesma forma, o contexto da cafeicultura destacou que não apenas as aplicações da matemática e a modelagem permitem que os alunos reconheçam usos da matemática, mas que também permitem a eles que apreciem a importância de conhecimentos não matemáticos na resolução de tarefas do mundo real".	Entende-se modelagem matemática como uma atividade de resolução de problemas do mundo real.
How Students Connect Mathematical Models to Descriptions of Real-World Situations	US1.1.20.17	"Relatamos o desenho e os resultados de um estudo empírico em que o potencial efeito positivo de uma variante específica de problematização, "modelagem inversa" (isto é, a seleção de uma situação do mundo real dada a um modelo matemático)[...]". "A modelagem matemática autêntica do mundo real inclui, entre outras coisas, que mesmo nas escolas, os próprios modeladores podem encontrar a situação do problema e formular o(s) problema(s) ". "Inspirados pelos resultados positivos da pesquisa sobre a problemática e em outras tarefas alternativas na educação matemática, começamos a pensar sobre uma atividade inversa da modelagem, ou seja, a reformulação de um determinado modelo matemático em uma situação do mundo real".	Modelagem matemática como solução de problemas autênticos, em que modeladores encontram soluções e formulam problemas do mundo real, os autores definem *modelagem inversa*, ou seja, a reformulação de um determinado modelo matemático em uma situação do mundo real.
Case Study of Pre-service Teacher Education for Mathematical Modelling and Applications Connecting Paintings with Mathematics	US1.1.27.17	"A modelagem matemática e as aplicações enfocam a resolução de problemas que conecta a matemática com domínios extra-matemáticos. As relações e limites nos contextos de cada domínio são importantes".	Entende-se que modelagem matemática e as aplicações enfocam a resolução de problemas que integram a matemática com domínios extra-matemáticos.
Mathematical Modelling as a Professional Activity: Lessons for the Classroom	US1.1.31.17	"[...] o uso de atividades de modelagem na sala de aula de matemática pode contribuir para desenvolver a compreensão de como e por que a matemática é usada no cotidiano e no trabalho, pelo menos se os problemas de modelagem forem escolhidos adequadamente". "[...] a transferência entre a matemática usada em diferentes locais de trabalho e a matemática ensinada e aprendida na escola nem sempre é direta. A matemática no local de trabalho pode ser mais complexa e inclui tecnologias específicas, dimensões sociais, políticas e culturais não encontradas em ambientes educacionais (Damlamian et al. 2013; Noss e Hoyles 1996; Wedege 2010)".	A modelagem matemática é caracterizada de acordo com o contexto em que é desenvolvida, distinguindo-se assim a modelagem matemática profissional da modelagem matemática escolar.

Modelling as Interactive Translations Among Plural Worlds: Experimental Teaching Using the Night-Time Problem	US1.1.33.17	“Este estudo examina as vantagens principais na interpretação de modelos de estudantes na perspectiva de traduções interativas entre mundos plurais. Essa perspectiva tem maior potencial pedagógico do que uma perspectiva simplificada que trata a modelagem matemática como envolvendo transições apenas entre dois mundos fixos - um mundo real e um mundo matemático”. “[...] adotamos a postura de que a modelagem matemática pode ser interpretada como traduções interativas, não entre dois mundos fixos, mas entre mundos plurais”.	A modelagem matemática é entendida como tradução interativa entre mundo plurais, não somente entre o mundo real e o mundo matemático, por exemplo, é possível uma relação com o mundo operacional geométrico.
The Dual Modelling Cycle Framework: Report on an Australian Study	US1.1.34.17	“A modelagem matemática é amplamente usada com contextos realistas de resolução de problemas como uma forma de capacitar o uso independente de conhecimentos matemáticos por modeladores de maneiras pensadas e criativas”. “Neste capítulo, exploramos uma extensão teórica para o modelo de Blum e Leiß (2007) com o objetivo de facilitar o ensino de modelagem matemática que considera uma diversidade de habilidades do modelador. Aqui a estrutura de modelagem teórica estendida de Saeki e Matsuzaki (2013), a Estrutura de Ciclo de Modelagem Dual [...]”.	A modelagem matemática é entendida como um processo para resolução de problemas em contextos reais.
Long-Term Development of How Students Interpret a Model: Complementarity of Contexts and Mathematics	US1.1.40.17	“Com base em quatro tipos de abordagens para tarefas de modelagem (ambivalentes, ligados à realidade, ligados à matemática ou integradas)”. “Na modelagem matemática, os estudantes têm que lidar com contextos do mundo real, por um lado, e matemática, por outro. A variedade de solicitações dentro de uma tarefa ativa o conhecimento dos alunos sobre o contexto ou seu conhecimento de matemática ou ambos. Como resultado, o pensamento e a atuação dos alunos são dinâmicos e diversos”. “Em tarefas de modelagem matemática, a dinâmica de lidar com contextos da vida real e da matemática ocorre em particular durante as fase de matematização e de interpretação. O estudo aqui apresentado trata apenas da atividade de interpretação”. “nós tomamos contextos e matemática como complementares”.	Modelagem matemática como matematização e interpretaçõ de contextos do mundo real. Na modelagem matemática os estudantes têm que lidar com contextos do mundo real, por um lado, e matemáticos, por outro. Isso ocorre por meio de quatro tipos de abordagens para as tarefas de modelagem – ambivalentes, ligadas à realidade, ligadas à matemática ou integradas.
Initial Results of an Intervention Using a Mobile Game App to Simulate a Pandemic Outbreak	US1.1.43.17	“Agora é possível fazer cálculos, visualizações e simulações mais avançados e complexos - geralmente necessários quando a matemática é aplicada para resolver problemas realistas ou autênticos do mundo real, um processo genérico de solução de problemas a que nos referimos como modelagem”.	Modelagem matemática é um processo genérico para a solução de problemas autênticos.
Modelling and Simulation with the Help of Digital Tools	US1.1.44.17	“[...] modelagem matemática como uma competência”. “As observações mostram que as ferramentas digitais podem, de fato, ser utilizadas em diferentes etapas do ciclo de modelagem. No entanto, se levarmos em conta apenas as competências parciais descritas no ciclo de modelagem com relação ao uso apurado de ferramentas digitais, foi demonstrado que os alunos não utilizavam as ferramentas ao interpretar e validar os resultados matemáticos, por exemplo, utilizando outra visualização ou verificação dos resultados, repetindo os passos”.	Modelagem matemática como competência.

Mathematical Modelling in a Long-Distance Teacher Education in Brazil: Democratizing Mathematics	US1.1.48.17	“A modelagem matemática tornou-se uma metodologia de ensino que enfocou o desenvolvimento de uma eficácia crítica e reflexiva que pode engajar os alunos em um processo de ensino-aprendizagem contextualizado que lhes permita envolver-se na construção de soluções de significância social”. “Essa dimensão crítica da modelagem matemática baseia-se na compreensão da realidade, que permite aos alunos aprender a refletir, analisar e agir em sua realidade usando ferramentas tecnológicas fornecidas em um ambiente virtual de aprendizagem. Assim, com fóruns de discussão e videoconferências, docentes, discentes e tutores têm o poder de analisar criticamente as interações possibilitadas por essas ferramentas, o que contribuiu para o desenvolvimento crítico-reflexivo da elaboração de modelos matemáticos nesse ambiente virtual de aprendizagem”.	Modelagem matemática como metodologia de ensino com foco no desenvolvimento crítico e reflexivo.
Assessing Mathematizing Competences Through Multiple-Choice Tasks: Using Students’ Response Processes to Investigate Task Validity	US1.1.50.17	“Para a avaliação da educação em modelagem matemática, diferentes modos de avaliação foram desenvolvidos: avaliação baseada em projeto, testes escritos, portfólio, concursos e assim por diante (Frejd 2013). Esses modos se baseiam em duas abordagens diferentes: (1) uma abordagem holística, que pede aos alunos que realizem um problema completo de modelagem, e (2) uma abordagem atomística, que solicita aos alunos competências separadas necessárias para realizar apenas parte da modelagem”. “Usamos uma ampla definição de competências de modelagem: elas incluem a capacidade dos alunos de realizar conscientemente todas as atividades de modelagem”. “Vamos indicar essas atividades pelo termo matematização guarda-chuva, que são atividades entre identificar um problema de modelagem e fazer uma tradução para um modelo matemático, a fim de chegar a uma solução para o problema.	A modelagem matemática é entendida como uma atividade em que tanto em uma abordagem holística na qual os alunos desenvolvem a atividade de acordo com o ciclo completo de modelagem, quanto em uma abordagem atomística, em que os alunos desenvolvem apenas parte da atividade. Neste sentido, a matematização pode ser entendida como a atividade entre a identificação de um problema de modelagem e a tradução para um modelo matemático.
How to Build a Hydrogen Refuelling Station Infrastructure in Germany: An Interdisciplinary Project Approach for Mathematics Classrooms	US1.1.51.17	“Referimo-nos aqui ao modelo do processo de modelagem como sugerido por Blum e Leiß (2007) e à indicação de conhecimento extra-matemático dentro deste modelo por Borromeo Ferri (2011) ”.	Entende-se a modelagem matemática como um processo para resolver problemas do mundo real, que faz uso de conhecimentos extra-matemáticos.

Fonte: as autoras.

Na sequência abordamos a Análise Nomotética, que consiste no agrupamento de convergências das Unidades de Significado, destacadas na Análise Ideográfica. Por meio da Análise Nomotética vislumbramos a emergência dos Núcleos de Ideias que possibilitam detalhar o fenômeno sob investigação (BICUDO, 2011).

3.2 ANÁLISE NOMOTÉTICA: A IDENTIFICAÇÃO DOS NÚCLEOS DE IDEIAS REFERENTE O PRIMEIRO ASPECTO

As Unidades de Significado US1.1.11.13, US1.1.23.13, US1.1.33.13, US1.1.52.13, US1.1.15.14, US1.1.32.14, US1.1.64.14, US1.1.7.15, US1.1.24.15, US1.1.32.15, US1.1.28.16, US1.1.41.16, US1.1.50.16, US1.1.7.17, US1.1.14.17, US1.1.18.17, US1.1.27.17, US1.1.34.17, US1.1.40.17, US1.1.43.17 e US1.1.51.17 indicam que a modelagem matemática pode ser entendida como um processo para resolver problemas advindos do mundo real. Envolvendo a relação entre a realidade e a matemática, por meio da matematização, construção do modelo, resolução do problema, interpretação e validação. Esses artigos, em sua maioria, utilizam-se de algum ciclo de modelagem matemática para caracterizar a modelagem matemática, como por exemplo Ferri (2006), Maaβ (2006), Blum e Leiβ (2007), entre outros. A Unidade de Significado US1.1.6.14, considera também a modelagem matemática como um processo de resolução de problema, porém é caracterizada segundo uma abordagem de problemas de palavras, que podem ser considerados como exercícios matemáticos, revestidos de informações contextuais. A Unidade de Significado US1.1.33.17, revela que a modelagem matemática pode ser entendida como traduções interativas entre mundos plurais, não somente entre o mundo real e o mundo matemático para resolver problemas do mundo real. Estas vinte e três Unidades de Significados revelam ideias e caracterizações a respeito da modelagem matemática como um processo para resolver problemas, neste sentido as ideias nucleares manifestadas podem dar constituição ao Núcleo de Ideias: *Modelagem Matemática como processo para resolver problemas*, que podem ser reais, de outras disciplinas ou problemas de palavras e este processo envolve uma gama de procedimentos, fases e técnicas, tais como a tradução interativa entre diferentes mundos, ou dito de outra forma, entre diferentes domínios.

As Unidades de Significado US1.1.18.14, US1.1.20.14 e US1.1.22.15, manifestam a caracterização de modelagem matemática associada ao seu uso em sala de aula. Estas unidades dizem respeito à modelagem matemática com o objetivo de desenvolver habilidades, conhecimentos, meta-conhecimentos relacionados a modelagem matemática em si. E a modelagem matemática, pode também ser entendida como veículo ou método para a construção do conhecimento matemático ou para aprender a matemática escolar. Estas três Unidades de Significado comungam de uma mesma ideia que constitui o Núcleo de Ideias: *Modelagem Matemática a partir da finalidade de seu uso em sala de aula*. Assim, o núcleo manifesta duas formas de se caracterizar a modelagem matemática, como objetivo de aprender fazer modelagem matemática ou com como aprender matemática por meio de atividades de modelagem matemática. Estes objetivos podem implicar em diferentes configurações de atividades de modelagem matemática.

As Unidades de Significado US1.1.29.14, US1.1.40.15, US1.1.44.17 e US1.1.50.17 caracterizam a modelagem matemática em conexão com a competência do sujeito, isto é, a capacidade do sujeito de fazer algo bem, de trabalhar com tarefas abertas, em grupo e com pouco apoio do professor, ou seja, para o desenvolvimento da autonomia. As Unidades de Significado US1.1.11.16, US1.1.13.16 e US1.1.52.13 indicam a modelagem matemática como competência matemática na Educação Matemática, sendo a competência entendida como a capacidade de identificar questões, variáveis, relações ou suposições relevantes em uma situação do mundo real, bem como traduzi-las em matemática, interpretar e analisar a solução para a situação dada, analisando e comparando modelos. Neste sentido, estas sete Unidades de Significado manifestam-se a respeito da caracterização da modelagem matemática como competência matemática e como competência do sujeito, deste modo estas unidades convergem para o Núcleo de Ideias*: Modelagem Matemática associada ao desenvolvimento de competências*. Este núcleo revela o entendimento de modelagem matemática como competência matemática do sujeito ser capaz de propor soluções à situações-problema do mundo real por meio da matemática.

As Unidades de Significado US1.1.57.14, US1.1.41.15 e US1.1.2.15, entendem a modelagem matemática como uma atividade que envolve problemas autênticos sob uma perspectiva realísticas, isto é, que são originárias da indústria ou da ciência com a finalidade de resolver problemas aplicados. As unidades US1.1.46.15, US1.1.8.16 e US1.1.20.17 entendem a modelagem matemática como uma atividade autêntica do mundo real, isto quer dizer que contém aspectos autênticos como: situação-problema fora da escola, de um cenário da realidade ou de um fenômeno da vida cotidiana dos alunos, bem como modelos matemáticos legitimados por especialistas que trabalham no contexto da situação proposta. Estas seis Unidades de Significado desvelam ideias que convergem para um Núcleo de Ideias: *Autenticidade nas atividades de modelagem matemática*.

O Núcleo de Ideias relativo a essas seis unidades pode ser descrito, sob dois pontos de vista: o primeiro relacionado a uma perspectiva realística em que a autenticidade da modelagem matemática refere-se aos problemas aplicados na indústria ou na ciência. O segundo está relacionado aos aspectos de autenticidade da atividade de modelagem matemática, em que a situação-problema advém de um contexto de fora da escola (do mundo real, ou da vida cotidiana dos alunos), sendo que os modelos matemáticos são certificados por especialistas que trabalham na área de aplicação da situação-problema. A diferença entre estes dois pontos de vista é que a segunda pode ser considerada mais ampla, pois as situações podem ser da vida cotidiana dos alunos e da matemática desde que seja fora da escola.

As Unidades de Significado US1.1.30.15, US1.1.32.16, US1.1.49.16 e US1.1.48.17 evidenciam um entendimento de modelagem matemática sob uma perspectiva sócio-crítica, cujo foco é desenvolver habilidades críticas e reflexivas para compreensão de fenômenos físicos e sociais. Além disso, tem como propósito fornecer aos alunos elementos para construir uma imagem adequada da matemática, isto é, do seu papel na sociedade. Essas três Unidades de Significado convergem para a constituição do Núcleo de Ideias: *Modelagem Matemática sob a perspectiva sócio-crítica.* Neste Núcleo de Ideias o entendimento de modelagem matemática emerge da função crítica e social que a modelagem matemática pode exercer na formação dos alunos.

As Unidades de Significado US1.1.36.13 e US1.1.3.14, evidenciam o entendimento de modelagem matemática sob uma perspectiva cognitiva, em que o objetivo é analisar os processos cognitivos que ocorrem durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Neste sentido, a atividade de modelagem matemática pode ser entendida como uma atividade que gera demandas cognitivas como abstração ou generalização em diferentes fases da atividade de modelagem matemática, principalmente, na tradução entre a realidade e a matemática. Outra ênfase pode ser considerada pela unidade US1.1.3.15 em que a modelagem matemática é caracterizada como um tópico interdisciplinar que combina aspectos sociais e individuais do pensamento e da aprendizagem por meio da *commognition*, que combina princípios das teorias de comunicação e cognição.

Foi revelado nas unidades US1.1.58.14, US1.1.9.15 e US1.1.31.17 que a modelagem matemática é vista como uma prática educativa que envolve ações didáticas e pedagógicas, a complexidade do sistema escolar e as diferenças entre a modelagem matemática profissional e a modelagem matemática escolar.

Ao encontro desta divergência da modelagem matemática profissional e a modelagem matemática escolar, as unidades US1.1.15.16 e US1.1.14.16 sugerem possibilidades de introduzir a modelagem matemática no contexto escolar.

Uma das formas do professor engajar os alunos em atividades de modelagem matemática no contexto escolar é evidenciada na unidade US1.1.7.16, que diz respeito a uma estrutura de antecipação implementada – um quadro com questões apoiadoras para facilitar o desenvolvimento da atividade.

Ainda, em relação ao contexto escolar as Unidades de Significado US1.1.6.15 e US1.1.13.17 revelam que a modelagem matemática pode ser entendida como uma ação pedagógica, que envolve uma formação cultural enraizada na etnomatemática denominando o que a unidade US1.1.6.15 revela como sendo a etnomodelagem, entendida como uma aplicação prática da etnomatemática de forma conjunta com a perspectiva cultural dos conceitos de modelagem.

As unidades US1.1.15.16, US1.1.7.15 e US1.1.17.15 abordam a modelagem matemática considerando a perspectiva de ciclo de modelagem dual, em que a progressão de um sujeito de um ciclo ao outro se dá a partir do compartilhamento de vários modelos. A modelagem dual pode ser considerada como um processo em que os alunos desenvolvem uma atividade de modelagem matemática com uma situação-problema inicial para partir para outra atividade de modelagem matemática com situação-problema semelhante. Já na unidade US1.1.24.16, a modelagem matemática é entendida sob uma perspectiva contextual, que considera a inclusão da modelagem matemática na sala de aula por meio de situações-problema reais, com o objetivo de motivar os alunos e promover a aprendizagem. Para essa inserção essa unidade sugere o uso de uma sequência de desenvolvimento de modelos, em que o objetivo é que os alunos desenvolvam um sistema ou um modelo conceitual que possa ser usado para criação de sentido em contextos estruturalmente semelhantes.

As quinze Unidades de Significado US1.1.24.16, US1.1.15.16, US1.1.7.16, US1.1.6.15, US1.1.13.17, US1.1.3.15, US1.1.36.13, US1.1.3.14, US1.1.58.14, US1.1.17.15, US1.1.52.13, US1.1.9.15, apresentam características que convergem para o entendimento de modelagem matemática dirigido a educação escolar. A modelagem matemática está vinculada com ações pedagógicas e educativas, e perspectivas que buscam fomentar a inserção de atividades de modelagem matemática no contexto escolar, bem como compreender diferentes nuances envolvidas na prática de modelagem matemática, tais como as dimensões cognitiva, comunicativa, contextual, cultural, didática e pedagógica. Estes aspectos presentes nas Unidades de Significado constituem o Núcleo de Ideias: *Modelagem matemática como prática educativa*.

Em síntese, nossa Análise Nomotética a respeito das ideias do texto relativas ao que é ou o que caracteriza a modelagem matemática, aponta para seis Núcleos de Ideias sistematizados no Quadro 5.

Quadro 5 - Núcleos de Ideia das ideias do texto relativas ao que é ou o que caracteriza a modelagem matemática

Núcleos de Ideias	Unidades de Significado	Descrição
Modelagem Matemática como processo para resolver problemas	US1.1.11.13; US1.1.23.13; US1.1.33.13; US1.1.52.13, US1.1.6.14; US1.1.15.14; US1.1.32.14; US1.1.64.14; US1.1.7.15; US1.1.24.15; US1.1.32.15; US1.1.28.16; US1.1.41.16; US1.1.50.16; US1.1.7.17; US1.1.14.17; US1.1.18.17; US1.1.27.17; US1.1.34.17; US1.1.40.17; US1.1.43.17; US1.1.51.17; US1.1.33.17	Modelagem Matemática como um processo para resolver problemas, que podem ser reais, de outras disciplinas ou problemas de palavras e este processo envolve uma gama de procedimentos, fases e técnicas, tais como a tradução interativa entre diferentes mundos, ou dito de outra forma, entre diferentes domínios.
Modelagem Matemática a partir da finalidade de seu uso em sala de aula	US1.1.18.14; US1.1.20.14; US1.1.22.15	Duas formas de se caracterizar a modelagem matemática, como objetivo de aprender fazer modelagem matemática ou com como aprender matemática por meio de atividades de modelagem matemática. Estes objetivos podem implicar em diferentes configurações de atividades de modelagem matemática.
Modelagem Matemática associada ao desenvolvimento de competências	US1.1.52.13, US1.1.29.14; US1.1.40.15; US1.1.11.16; US1.1.13.16; US1.1.44.17; US1.1.50.17	Entendimento de modelagem matemática como competência matemática do sujeito ser capaz de propor soluções à situação-problema do mundo real por meio da matemática.
Autenticidade nas atividades de modelagem matemática	US1.1.57.14; US1.1.2.15; US1.1.41.15; US1.1.46.15; US1.1.8.16; US1.1.20.17	Esse Núcleo de Ideias pode ser descrito, sob dois pontos de vista: o primeiro relacionado a uma perspectiva realística em que a autenticidade da modelagem matemática refere-se aos problemas aplicados na indústria ou na ciência. O segundo está relacionado aos aspectos de autenticidade da atividade de modelagem matemática, em que a situação-problema advém de um contexto de fora da escola (do mundo real, ou da vida cotidiana dos alunos), sendo que os modelos matemáticos são certificados por especialistas que trabalham na área de aplicação da situação-problema.
Modelagem Matemática sob a perspectiva sócio-crítica	US1.1.30.15; US1.1.32.16; US1.1.49.16; US1.1.48.17	O entendimento de modelagem matemática emerge da função crítica e social que a modelagem matemática pode exercer na formação dos alunos.
Modelagem matemática como prática educativa	US1.1.24.16; US1.1.15.16; US1.1.7.16; US1.1.6.15; US1.1.13.17; US1.1.3.15; US1.1.36.13; US1.1.3.14; US1.1.58.14; US1.1.17.15;; US1.1.9.15; US1.1.31.17;	A modelagem matemática está vinculada com ações pedagógicas e educativas e, perspectivas que buscam fomentar a inserção de atividades de modelagem matemática no contexto escolar, bem como compreender diferentes nuances envolvidas na prática de modelagem

	US1.1.14.16; US1.1.7.15; US1.1.16.15	matemática, tais como as dimensões cognitiva, comunicativa, contextual, cultural, didática e pedagógica.

Fonte: as autoras.

3.3 ANÁLISE IDEOGRÁFICA REFERENTE O SEGUNDO ASPECTO: A CONFIGURAÇÃO DE UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Ao voltarmos nosso olhar para o segundo aspecto investigado, a configuração de uma atividade de modelagem matemática nos capítulos analisados, destacamos 60 (sessenta) Unidades de Significado que, em geral, revelam: o local em que as atividades foram desenvolvidas, por exemplo em sala de aula, em semanas de modelagem, em projetos extra-classe, dentre outros; quanto às situações iniciais, se a atividade foi proposta pelo professor, ou elaborada pelos alunos; em relação ao conteúdo das situações-problema, se a situação é real, é simulada, se os conjuntos de dados são reais; quanto à resolução matemática das atividades, quais modelos matemáticos são utilizados; e, então, em relação à resposta da situação-problema, basta apenas encontrar um modelo? Uma análise com interpretação dos resultados é realizada?

Neste sentido, as Unidades de Significado foram organizadas nos Quadros de 6 a 66 juntamente com as asserções realizadas.

Quadro 6 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.11.13

Título: Turning Ideas into Modeling Problems	
Código da US	**US1.2.11.13**
Unidade de Significado (US)	“Na primeira parte articulamos e aplicamos princípios para ilustrar como uma ideia geral pode ser transformada em um problema de modelagem para o ensino médio”. “Em seu documentário, Spurlock descreveu o experimento de comida em *fast food* [...] a ideia da abordagem do documentário de Morgan Spurlock para sensibilizar a comunidade com questões em torno da obesidade desencadeou a criação de uma tarefa de modelagem. **Super Size Me: A Dieta do Palhaço (Filme de Morgan Spurlock)** O problema da obesidade/ dieta/ exercício é uma questão muito divulgada em vários países. Em alguns lugares, foi promulgada legislação que é dirigida, entre outras coisas, aos tipos de alimentos disponíveis em lojas especializadas, e à quantidade de horário de exercícios para estudantes em uma base diária ou semanal. Em seu filme/ documentário, Spurlock descreveu seu experimento de comer fast food. *Regras do experimento*: Por 30 dias consecutivos, Morgan Spurlock comeu três refeições, consistindo apenas de alimentos e bebidas do McDonalds (aproximadamente 5000 calorias por dia). • Deve escolher o tamanho "Super Size" de sua comida sempre que lhe for oferecido. • Ele comeu tudo no menu McDonalds pelo menos uma vez. • O exercício diário foi limitado ao de um trabalhador de escritório americano. *Consequência*: o Spurlock passou de 84 para 95,5 kg - houve outros efeitos, como um nível de colesterol perigosamente alto.

	Problema de modelagem aberta: Construa e teste um modelo para descrever o projeto de Morgan Spurlock de ganho de peso. “Como resolução assumindo a ingestão média diária de alimentos *(I)* = 5000 calorias (aproximadamente), deixe w_n peso depois do dia n − o peso original de Spurlock w_0 = 84 (kg) peso $_{\text{hoje}}$ = peso $_{\text{ontem}}$ + (consumo de energia $_{\text{hoje}}$ − energia usada $_{\text{hoje}}$)/7800 Assim, $w_n = w_{n-1}$ + [ingestão calórica (dia n) − calorias utilizadas (dia n)]/7800 $w_1 = w_0 + (I - 24 \times 1 \times w_0) / 7800 = I / 7800 + (1 - 24/7800)\, w_0$ como o estilo de vida é sedentário. Consequentemente, $w_1 = aI + bw_0$ onde a = 1/7800 = 0,000128 e b = (1–24 / 7800) = 0,997. similarmente $w_2 = aI + bw_1 \cdots w_{30} = aI + bw_{29}$ Uma solução usando planilha no computador obtém um valor final de 95,15 kg. Solução da Série Geométrica: $w_2 = aI + bw_1 = aI\,(1 + b) + b^2\, w_0$ leva a: $w_{30} = aI\,(1 + b + b^2 + \cdots + b^{29}) + b^{30}\, w_0$ Assim, $w_{30} = aI\,(1-b^{30}) / (1-b) + b^{30}\, w_0$ = 95,15 (aprox.) – respeitavelmente perto do valor real”. Ben pesa 72 kg e tem um nível de atividade ativo. Para diversão e exercício adicional, ele anda de skate uma hora por dia, normalmente ingere alimentos que mantém seu peso em 72 kg. Algumas lojas de *fastfood* abriram perto de sua casa, e agora depois de andar de skate Ben tem uma rotina diária em que ele come um cheeseburger e bebe uma coca-cola de 375 ml. O resto de sua dieta continua o mesmo. Qual o efeito desse hábito no peso de Ben depois de dois meses? (Ben poderia ser substituído por outro sujeito com rotina diferente).
Asserção Articulada da US	*Professor propõe o tema da atividade a partir de documentário sobre obesidade e foi criada para ser desenvolvida em salas de aula do ensino médio. A atividade envolvia construir e testar um modelo que descrevesse o ganho de peso do ator que fez a dieta para filmar o documentário. O autor do texto indica uma possível resolução para a situação-problema por meio de uma série geométrica. O contexto da atividade de ganho de peso, para torná-lo, ainda mais, próximo dos alunos pode desencadear uma nova atividade, em que os alunos usam seus próprios hábitos diários para analisar o ganho de peso próprio num período de dois meses.*

Fonte: as autoras

A Unidade de Significado US1.2.11.13 destacada no Quadro 6 evidencia uma situação-problema que aborda um importante tema a ser discutido mundialmente, a obesidade. A situação envolve construir e testar um modelo que descreva o ganho de peso de uma pessoa sedentária que segue uma dieta a base de alimentos *fastfood* e refrigerante. Os dados necessários para a resolução do problema também foram fornecidos na atividade. O autor aponta que para tornar o problema mais próximo aos alunos a atividade pode, em um segundo momento, ser desenvolvida usando os dados dos próprios hábitos dos alunos. Além disso, o autor apresenta a dedução de um modelo matemático que resolve a situação-problema: uma série geométrica, considerando que o valor encontrado se aproxima respeitavelmente dos dados apresentados pelo documentário.

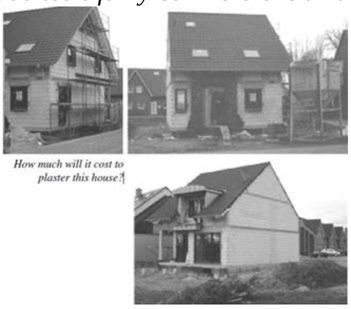
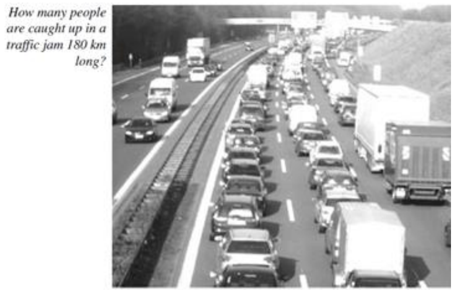
Quadro 7 - Descrição da Unidade de Significado US2.2.11.13

Título: Turning Ideas into Modeling Problems	
Código da US	**US2.2.11.13**
Unidade de Significado (US)	" Na segunda parte, ilustramos no contexto de uma oficina estudantil, como exemplos de interesse dos alunos e do meio ambiente podem ser usados para iniciar a atividade de modelagem e para levantar problemas para implementação de práticas de modelagem". "Uma equipe escolheu modelar o problema de uma espécie de praga introduzida na Austrália, o sapo-cururu. [...] Qual é a taxa de abate necessária para estabilizar a população de sapos-cururu na Austrália?". "A taxa de crescimento de sapos-cururu é constante; de acordo com a *Wikipedia* a taxa de crescimento é de 25% ao ano. Essa porcentagem leva em conta as taxas de mortalidade e as taxas de natalidade da população. A população inicial de sapos-cururu na Austrália em 1935 foi de 3102". "Modelo: População (ano) = $3102.(1{,}25)^n$ Taxa de abate: Pela taxa de crescimento de acordo com a *Wikipedia*; 25% a cada ano $(1-h)\times 1{,}25 = 1$ $1-h = 1\,/\,1{,}25\,;\, h = 1-(1\,/\,1{,}25) = 0{,}2$ A taxa de abate, de acordo com essa hipótese, é de 20%. Isso significa que todo ano precisa haver a morte de 20% da população de sapos para que a população se mantenha controlável e estável". A taxa de crescimento de 25% levaria a uma população de sapos de quase 19 bilhões em 2005, ou mais de 2400 sapos para cada quilômetro quadrado na Austrália. Isso demonstra que os dados fornecidos pela *Wikipedia* são incompatíveis.
Asserção Articulada da US	*Esta ativiade foi desenvolvida no âmbito de uma oficina estudantil. O problema formulado pelos alunos decorre de um descontrole ambiental, a população de sapos-cururu na Austrália. A resolução apresentada pelos alunos continha uma equação exponencial para modelar a população anual de sapos-cururu e uma equação foi utilizada para determinar o percentual da população de sapos-cururu que deve ser abatida anualmente. Após a resolução do problema houve uma análise dos resultados, sendo que o valor encontrado para solução do problema foi questionado. Neste sentido, a taxa de crescimento adotada, que foi retirada de uma pesquisa da internet, foi revista e modificada.*

Fonte: as autoras

Na Unidade de Significado US2.2.11.13 do Quadro 7 os alunos ficaram responsáveis pela formulação do problema e resolução deste. A temática abrange o estudo de um desequilíbrio ambiental da população de sapos-cururu na Austrália, visto que esta espécie há anos foi inserida em ambientes agrícolas para controle de pragas. No entanto, não foi previsto pelos especialistas que estes sapos poderiam futuramente dispor uma superpopulação. Neste sentido, os alunos estavam interessados em encontrar uma taxa de abate para tornar a população de sapos-cururu controlável e estável. Para resolução da situação-problema foi necessário que os alunos coletassem dados a respeito da população dos sapos desde o início de sua inserção em plantações australianas. Assim, pesquisando alguns fatores que afetam o crescimento de uma população, como as taxas de crescimento, natalidade e mortalidade, os alunos elaboraram dois modelos matemáticos para a situação: uma equação exponencial que representa a população anual de sapos e uma equação do primeiro grau para encontrar a taxa de abate anual necessária para o controle da população. Após a resolução da situação-problema o autor destaca que houve uma análise dos resultados, sendo que o valor encontrado para solução do problema foi questionado. Neste sentido, a taxa de crescimento adotada, que havia sido coletada em uma pesquisa na *internet*, foi revista e modificada.

Quadro 8 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.23.13

Título: Analysis of Modeling Problem Solutions with Methods of Problem Solving	
Código da US	**US1.2.23.13**
Unidade de Significado (US)	Alunos do ensino médio (10-16 anos) foram observados enquanto trabalhavam em problemas abertos e *fuzzy* com referência na realidade.  Quanto custará rebocar esta casa? Quantas pessoas estão presas em um engarrafamento de 180 km de extensão? Na "coleta de dados" os alunos adquiriram dados para seus trabalhos sobre o problema. Isso pode envolver adivinhar, contar, estimar, medir ou relembrar resultados intermediários que haviam sido alcançados anteriormente. No "processamento dos dados" os alunos descreveram o cálculo com valores reais. Isso pode ser feito com ou sem uma calculadora. Para todos os problemas, os alunos receberam uma calculadora (convencional). Na "verificação" do processamento de dados, a aquisição de dados ou planejamento foi questionado.
Asserção Articulada da US	*As atividades foram desenvolvidas com alunos do ensino médio. Os problemas são baseados na realidade e são caracterizados como abertos e fuzzy. Para resolver os problemas os alunos realizaram estimativas, bem como a coleta de alguns dados, descreveram o cálculo utilizado e ao final da atividade a coleta de dados e as estratégias adotadas foram avaliadas.*

Fonte: as autoras

A Unidade de Significado US1.2.23.13 do Quadro 8 evidencia duas atividades de modelagem matemática, realizadas no ensino médio, cujos problemas são considerados abertos e *fuzzy* que consistem em situações com referência na realidade. Neste caso, a subjetividade da situação está inerente a estimativas, suposições e simplificações realizadas pelos alunos diante do problema proposto. Como o grau de incerteza é relativamente grande as resoluções são aproximadas e podem envolver advinhar, contar, medir ou relembrar resultados intermediários de resoluções recentes. Os modelos matemáticos não são apresentados no artigo, porém os autores evidenciam que os alunos descreveram o cálculo com valores concretos, que puderam ser encontrados com ou sem o uso de uma calculadora. Por fim, uma verificação foi realizada, sendo que o processamento e a coleta de dados, bem como o planejamento para a resolução do problema foram questionados.

Quadro 9 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.33.13

Título: Identifying Challenges within Transition Phase of Mathematical Modeling Activities at Year 9	
Código da US	**US1.2.33.13**
Unidade de Significado (US)	"Uma tarefa de modelagem realizada por 21 alunos do 9º ano". "CHUTE AO GOL: Você se tornou um conselheiro de estratégia para os novos recrutas de futebol. Seu campo dos sonhos será o campo de futebol. Sua tarefa é educá-los sobre as posições no campo que maximizam suas chances de pontuar. Isso significa questionar quando eles estão levando a bola para o campo, correndo paralelo à linha lateral, onde está a posição que permite que eles tenham o valor máximo da meta exposta para o chute no gol? Inicialmente você assumirá que o jogador está correndo na linha lateral e não está correndo no corredor de gol a gol (ou seja, correndo de uma boca do gol para a outra). Encontre a posição para a abertura máxima da meta se a linha de execução estiver a uma determinada distância do próximo post. (Sugestões adicionais foram fornecidas sobre como o trabalho deveria ser estabelecido, e para cálculos intermediários, especialmente na área de uso de calculadoras gráficas, fornecendo andaimes extras para tarefas.)  MUDANDO A LINHA DE FUNCIONAMENTO: Investigue se a posição do local para o tiro máximo nas mudanças de gol quando você se aproxima ou se afasta do próximo post. O que a relação entre a posição do lugar para o arremesso máximo no gol e a distância da linha de chegada do próximo lance revelam? MUDANDO AS REGRAS: O futebol é muitas vezes um jogo de baixa pontuação. Alguns sugeriram que seria um jogo melhor se os atacantes tivessem mais chances de marcar, então a largura da boca do gol deveria ser aumentada. Outros afirmam que seria um jogo mais habilidoso se o goleiro tivesse mais chance de parar os gols reduzindo a largura da boca do gol. Investigue o efeito que a alteração da largura da boca do gol teria na posição do arremesso máximo na meta para as linhas de execução e forneça sua recomendação. "O professor usou o campo de futebol da escola nas proximidades para fornecer uma demonstração ao ar livre. Wayne indicou uma linha particular de corrida (run line) para os alunos usando uma corda e pediu a eles, um de cada vez, que corressem pela linha de corrida e parassem quando achassem que tinham o melhor chute a gol.
Asserção Articulada da US	*A atividade chute ao gol envolve uma situação real em que se estuda a melhor posição para marcar um gol. Nesta atividade os alunos construíram seus modelos utilizando diagramas que representam o campo de futebol e os postes do gol em que se deve pontuar. Para resolver o problema, o professor levou os alunos até um campo de futebol onde fizeram algumas experimentações e esclareceram algumas dúvidas. Os alunos usaram relações trigonométricas e o Teorema de Pitágoras.*

Fonte: as autoras

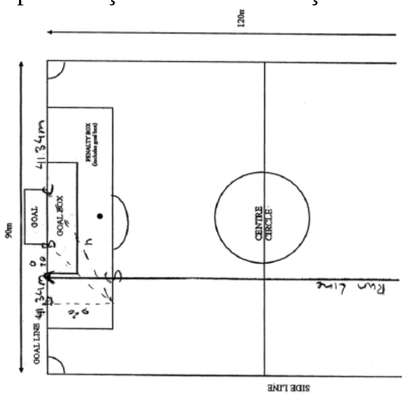
Os quadros 9 e 10 dizem respeito à mesma atividade de modelagem matemática, porém publicadas em edições diferentes do ICTMA.

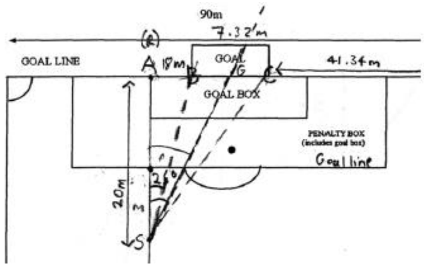
Quadro 10 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.18.14

<table>
<tr><td colspan="2">Título: Applying Metacognitive Knowledge and Strategies in Applications and Modelling Tasks at Secondary School</td></tr>
<tr><td>Código da US</td><td>US1.2.18.14</td></tr>
<tr><td>Unidade de Significado (US)</td><td>

“CHUTE AO GOL: Você se tornou um conselheiro de estratégia para os novos recrutas de futebol. Seu campo dos sonhos será o CAMPO DE FUTEBOL. Sua tarefa é educá-los sobre as posições no campo que maximizam suas chances de pontuar. Isto significa - quando eles estão levando a bola para frente do campo, correndo paralelo à LINHA LATERAL, onde está a posição que permite que eles tenham o valor máximo da meta exposta para o chute no gol?

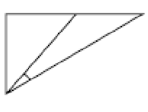
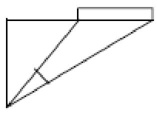
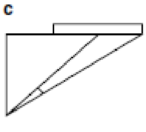
Inicialmente você assumirá que o jogador está correndo na ala (isto é, perto da linha lateral) e não está correndo no corredor de GOL a GOL (ou seja, correndo de uma boca do gol para a outra). Encontre a posição para a abertura máxima do gol se a linha de execução estiver a uma determinada distância do próximo poste.”
“Eles descobriram que, para encontrar o ângulo do chute, eles deveriam usar trigonometria. A representação de Jim da situação sendo modelada:





Ahmed, sugeriu uma estratégia alternativa que poderia ser usado o Teorema de Pitágoras quando Jim levantou dúvidas sobre a validade de um resultado provisório. Assim, como tinham uma segunda estratégia possível de usar, os meninos tiveram que fazer uma avaliação da viabilidade dessas alternativas.

“Ao correr pela linha de chegada em direção ao gol, o ângulo ficou maior porque você teria que virar mais para enfrentar o gol”. O ângulo que ela estava falando era o ângulo ASG no diagrama de Mia, quando na verdade ela deveria estar encontrando o ângulo BSC. [...] brecha na defesa do seu modelo começou a aparecer, pois ficaram perplexos com a aparente necessidade na folha de tarefas de um processo de várias etapas para encontrar o ângulo de chute, enquanto eles encontraram seu ângulo em um passo. [...] na discussão que seguiu, ficou claro que eles não haviam feito as coisas da maneira que o professor tinha feito.

<table>
<tr>
<td>Tanto o grupo quanto a professora viram o ângulo marcado na figura a:
a
</td>
<td>Como representando o ângulo que estavam encontrando, mas a interpretação do professor era de que o ângulo era para os postes da baliza cobrindo toda a face da baliza, como na figura b:
b
</td>
<td>As garotas viram que cobriam apenas metade da face do gol como na figura c:
c
</td>
</tr>
</table>

Como Mia salientou: "Mas não fizemos assim, não o fizemos para todo o gol". As meninas viram isso como uma representação alternativa do problema - não uma especificação incorreta do ângulo.
</td></tr>
</table>

	O professor usou o software dinamicamente para mostrar a eles como o modelo era insatisfatório, permitindo que eles percebessem que o máximo de seu ângulo ocorreria na linha do gol. Enquanto as garotas se agarravam ao seu modelo mental até o último momento em que finalmente tiveram que admitir que não fazia sentido, o professor tinha que permitir que elas fizessem essa conexão enquanto refletiam sobre o que estavam vendo na tela, como isso se conectava seu modelo e como isso se conectava à situação real de acertar um gol em um campo de futebol enquanto um jogador se movia em direção à linha de meta em tal linha de corrida.
Asserção Articulada da US	*A atividade chute ao gol envolve uma situação real em que se estuda a melhor posição para marcar um gol. Nesta atividade os alunos construíram seus modelos utilizando diagramas que representam o campo de futebol e os postes do gol em que se deve pontuar. Os alunos usaram relações trigonométricas e o Teorema de Pitágoras. Os autores explicitam que os alunos tiveram bloqueios durante as atividades, mesmo retomando a situação inicial, alguns alunos não conseguiam perceber seus equívocos e neste caso o professor por meio do uso de um software dinâmico realizou intervenções para que fosse possível terminar a resolução da atividade.*

Fonte: as autoras.

As Unidades de Significado US1.2.33.13 e US1.2.18.14, evidenciam a atividade nomeada chute ao gol. Ambas as unidades tratam da mesma implementação da tarefa realizada em um nono ano. Os artigos foram publicados em edições diferentes do ICTMA, porém os sujeitos e os dados analisados são os mesmos. As unidades destacam que o problema de modelagem “chute ao gol” consiste em otimizar uma posição para que um atacante tente um chute ao gol enquanto corre paralelamente à linha lateral. O professor inicialmente levou os alunos até um campo de futebol onde puderam fazer algumas experimentações, neste caso, os alunos replicaram o que dizia na atividade, correndo na linha lateral e parando num local, ao longo da linha lateral, onde julgavam ser a melhor posição para marcar um gol. Em sala os alunos utilizaram um diagrama fornecido pelo professor que representavam o campo de futebol, já com os dados de mensuração do campo, com os postes do gol e as linhas do campo. Para resolver o problema os alunos usaram relações trigonométricas e o Teorema de Pitágoras, no entanto estes modelos matemáticos não foram apresentados. Os autores, em ambos os artigos, apontam casos de bloqueios por parte dos alunos em meio ao processo de resolução, sendo necessário a intervenção do professor, que por meio do uso de um software dinâmico, orientou-os para conseguir finalizar a atividade.

Quadro 11 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.36.13

Título: Insights into Teachers’ Unconscious Behaviour in Modeling Contexts	
Código da US	**US1.2.36.13**
Unidade de Significado (US)	“Relatamos dois estudos em que professores alemães experientes foram observados enquanto lidavam com tarefas de modelagem na 8ª-10ª série (14 a 16 anos de idade) [...] Nossos exemplos são tirados de dois projetos: o projeto COM², e o projeto DISUM.” “Na baía de Bremen, diretamente na costa, um farol chamado “Roter Sand” foi construído em 1884, com 30,7 m de altura. O farol servia para avisar os navios que se aproximavam da costa. A que distância, aproximadamente, estava o navio da costa quando viu o farol pela primeira vez? Explique sua solução”. 

	“A matematização conduz a um modelo matemático da situação real, com H ≈ 30,7 m como a altura do farol, R ≈ 6370 km como o raio da terra e S como o farol de distância desconhecida. As considerações matemáticas mostram que há um triângulo retângulo, e o teorema de Pitágoras pode ser utilizado: $S^2 + R^2 = (R + H)^2, portanto\ S = \sqrt{2}RH + H^2 \approx \sqrt{2}\,RH \approx 19{,}81\ km$. Interpretar este resultado matemático proporciona a resposta “aproximadamente 20 km” à questão inicial. Este resultado real tem que ser validado: É razoável, as suposições são apropriadas? Se necessário, o ciclo pode começar de novo com novas suposições. O passo final é sempre a exposição do resultado”. “Um grupo de alunos de uma turma do 10º ano do Ginásio resolveu com sucesso a tarefa "Farol" (distância de 20 km). Depois, eles refinaram seu modelo incluindo a altura do navio (10 m), e o resultado foi que a distância ficou mais curta (16 km), ou seja, o farol agora pode ser visto mais tarde no navio - um absurdo óbvio! A razão para esse resultado é que os alunos usaram um modelo errado, que, com efeito, envolve $\sqrt{H} - h$ em vez de $\sqrt{H} + \sqrt{h}$ no cálculo da distância (aqui H, h são altura do farol e navio - os alunos usaram apenas números concretos em seus cálculos, sem variáveis). O professor deixou os alunos concluírem o trabalho e realizarem seus próprios cálculos em paralelo, com base nesse modelo, e somente na fase de reflexão, após a apresentação errada da solução, ele apontou o erro”.
Asserção Articulada da US	*As tarefas de modelagem foram desenvolvidas em turmas da oitava e décima série. A situação inicial decorre um contexto real, no entanto o problema proposto parte de uma situação simulada que envolve encontrar a distância em que estava um navio a primeira vez que avistou o farol “Roter Sand” na costa Alemã. O modelo matemático da situação foi construído por meio do uso de um triângulo retângulo e a relação do teorema de Pitágoras. Ao final da atividade há a exposição dos resultados. Se o resultado for validado termina-se a atividade e caso não seja validado, o aluno deve retomar o problema, porém com novas suposições.*

Fonte: as autoras

A Unidade de Significado destacada no Quadro 11, US1.2.36.13 diz a respeito de uma atividade de modelagem desenvolvida em turmas da oitava e décima série. A atividade foi retirada de dois projetos (COM^2 e DISUM)[23]. A situação-problema com base na realidade envolve o farol *Roter Sand*, considerado marco histórico da Engenharia Civil Alemã. A situação-problema proposta apresentava os dados necessários para a resolução, tendo o aluno que encontrar a que distância estava o navio da costa quando viu o farol pela primeira vez e explicar a própria solução. Os alunos modelaram a situação por meio de um triângulo retângulo e utilizaram o Teorema de Pitágoras para determinar a que distância estava o navio da costa ao avistar o farol. Os alunos ainda tentaram refinar o modelo incluindo a altura do navio, porém fizeram isto equivocadamente. Os autores sinalizam que após encontrar um resultado para o problema houve a exposição e discussão dos resultados, sendo que, no momento de reflexão o professor da turma apontou os equívocos presentes nas resoluções dos alunos.

[23] Ambos os projetos são desenvolvidos na Alemanha. O projeto COM² – *Cognitive-psychological analysis of modeling processes in mathematics lessons* e o projeto DISUM – *Didactical intervention modes for mathematics teaching oriented towards self-regulation and directed by tasks*.

Quadro 12 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.52.13

Título: On the Use of Realistic Fermi Problems in Introducing Mathematical Modelling in Upper Secondary Mathematics	
Código da US	**US1.2.52.13**
Unidade de Significado (US)	“[...] relata usos potenciais dos problemas de Fermi para introduzir modelagem matemática em estudantes suecos do ensino médio.” “Usando as características dos problemas realistas de Fermi, duas tarefas foram construídas para o estudo piloto. Este artigo relata o trabalho dos alunos em um desses problemas. O problema *Empire State Building*: Há um balcão de informações no nível da rua no *Empire State Building*. As duas perguntas mais frequentes para a equipe são: • Quanto tempo leva o elevador turístico chegar até o observatório do último andar? • Se alguém decidir andar pelas escadas, quanto tempo levará?” “Sua tarefa é escrever respostas curtas a essas perguntas, incluindo as suposições nas quais você baseia seu raciocínio, para dar à equipe no balcão de informações. Quando confrontados com os problemas, as primeiras reações dos alunos envolveram surpresa e frustração por não conhecer os dados para resolver o problema. Eles simplesmente calcularam a igualdade entre o tempo e a altura dividida pela velocidade média. [...] ao lidar com a segunda parte do problema, eles desenvolveram maneiras diferentes de como modelar a resistência das pessoas que usavam as escadas. O grupo A usou o mesmo modelo do problema com o elevador (usando uma velocidade média estimada), e o grupo C uma variante da mesma abordagem estimando o tempo médio necessário para caminhar pelas escadas de um andar e algum tempo adicional para descansar antes de caminhar o próximo. O Grupo B desenvolveu um modelo mais elaborado, em que o tempo gasto para caminhar dependia da altura em que o sujeito está no edifício”.
Asserção Articulada da US	*Um problema de Fermi foi utilizado para introduzir modelagem a alunos do ensino médio. O professor foi responsável pela construção da tarefa. O problema envolve uma situação real que busca responder a questões feitas diariamente à equipe de informações do Empire State Building. Como os problemas não possuíam dados, os alunos tiveram que fazer estimativas. Os modelos matemáticos dos alunos consistiam em equações físicas como a equação da velocidade média* $V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ *, em que* V_m *é a velocidade,* ΔS *é a variação da altura (a distância percorrida) e* Δt *a variação do tempo decorrido para subir o elevador ou as escadas. Para validar e criticar a resolução encontrada, os alunos utilizaram conhecimentos extra-matemáticos que fossem úteis para a situação.*

Fonte: as autoras

Já o Quadro 12 a Unidade de Significado US1.2.52.13 destaca o uso de problemas de Fermi para introdução de estudantes do ensino médio na modelagem matemática. A atividade proposta pelo professor envolve um problema de estimativa. Partindo de uma situação real que leva em conta o funcionalismo do *Empire State Building*, mais especificamente no balcão de informações no piso térreo, duas perguntas são frequentes realizada aos funcionários: uma sobre quanto tempo leva o elevador para chegar ao último andar e a segunda sobre quanto tempo leva para subir de escadas até o último andar. Estas perguntas foram direcionadas aos alunos. Na atividade não constava qualquer tipo de informação ou dado necessários para a resolução do problema. Os alunos por meio de estimativas resolveram o problema por meio de um modelo matemático já convencionado, neste caso, a equação da velocidade média $\mathrm{V_m} = \frac{\Delta \mathrm{S}}{\Delta \mathrm{t}}$, em que $\mathrm{V_m}$ é a velocidade, ΔS é a distância percorrida e no caso do elevador a variação da altura e Δt a variação do tempo decorrido para subir o elevador ou as escadas. Para validar e criticar a resolução encontrada, os alunos utilizaram conhecimentos extra-matemáticos que fossem úteis para a situação.

Quadro 13 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.3.14

Título: Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research	
Código da US	**US1.2.3.14**
Unidade de Significado (US)	"Este capítulo trata de descobertas empíricas sobre o ensino e a aprendizagem de modelagem matemática, com foco na 8ª e 10ª série, ou seja, estudantes de 14 a 16 anos de idade." "Em um centro de esportes nas Filipinas, Florentino Anonuevo Jr. poliu um par de sapatos. Eles são, de acordo com o *Guinness Book of Records*, o maior do mundo, com uma largura de 2,37 m e um comprimento de 5,29 m. Aproximadamente, quão alto seria um gigante para estes sapatos se encaixarem? Explique sua solução."  "Uma dupla de alunos do 9º ano do ginásio aplicou o Teorema de Pitágoras no problema dos "Sapatos do Gigante" e chegou à resposta de 33,6 m. Também nesta solução, nenhuma verificação foi realizada em relação às unidades (em ambos os casos, a unidade do resultado calculado teria sido m² em vez de m)."
Asserção Articulada da US	*A tarefa de modelagem matemática foi proposta pelo professor e embora tenha utilizado aspectos de uma situação real, o que o problema propõe é idealizar o tamanho de alguém grande o suficiente para calçar o sapato exposto nas Filipinas. Os alunos utilizaram o Teorema de Pitágoras para chegar a um resultado. Ao fim nenhuma verificação foi realizada em relação as unidades de medida (metro).*

Fonte: as autoras

A Unidade de Significado US1.2.3.14 revela uma atividade cuja situação real aborda faz parte de um recorde mundial classificado no *Guinness book of Records*, o maior par de sapatos do mundo (Quadro 13). A atividade "Sapatos do Gigante" foi proposta a alunos da oitava e décima série. Alguns dados referentes a dimensão dos sapatos foram fornecidos no texto da atividade. A situação-problema: quão alto seria um gigante para estes sapatos se encaixarem? Solicita ao aluno uma resolução e a explicação para o resultado encontrado. Os modelos não são apresentados no artigo, porém os autores indicam que os alunos utilizaram o teorema de Pitágoras para determinar o resultado e sinalizam que nenhuma verificação foi realizada e no caso desta situação-problema os alunos expressaram o resultado em uma unidade de medida elevada ao quadrado.

Quadro 14 - Descrição da Unidade de Significado US2.2.3.14

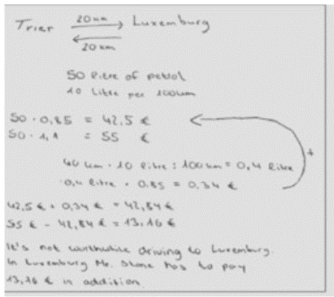
Título: Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research	
Código da US	**US2.2.3.14**
Unidade de Significado (US)	"trata de descobertas empíricas sobre o ensino e a aprendizagem de modelagem matemática, com foco na 8ª e 10ª série, ou seja, estudantes de 14 a 16 anos de idade." "A Sra. Stone mora em Trier, a 20 km da fronteira de Luxemburgo. Para encher o seu VW Golf, dirige-se para Luxemburgo, onde imediatamente atrás da fronteira há um posto de gasolina. Lá ela precisa pagar 1,10 euros por litro de gasolina enquanto em Trier tem que pagar 1,35 euros. Vale a pena a Sra. Stone dirigir para Luxemburgo? Justifique sua resposta".

	“A matematização, transforma o modelo real em um modelo matemático que consiste em certas equações, talvez com variáveis. Na etapa “trabalhando matematicamente” (calculando etc.), que produz resultados matemáticos [...] estes são interpretados no mundo real como resultados reais, terminando em uma recomendação para a Sra. Stone sobre o que fazer. Uma validação desses resultados, pode mostrar que é apropriado ou necessário dar uma volta no circuito uma segunda vez, por exemplo, para levar em conta mais fatores, como o tempo ou a poluição do ar.”
Asserção Articulada da US	*Esta tarefa contempla um contexto fictício, em que a distância entre as cidades, o valor do combustível e o carro escolhido foram uma suposição. No artigo não consta os modelos matemáticos e resultados dos alunos, no entanto o autor cita que os resultados matemáticos foram interpretados e também uma validação que pode mostrar se o resultado é ou não apropriado, além de analisar fatores como a poluição do ar e o tempo de deslocamento.*

Fonte: as autoras

Os quadros 14 e 15 dizem respeito à mesma atividade de modelagem matemática, porém publicadas em edições diferentes do ICTMA.

Quadro 15 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.11.16

Título: How to Support Teachers to Give Feedback to Modelling Tasks Effectively? Results from a Teacher-Training-Study in the Co2CA Project	
Código da US	**US1.2.11.16**
Unidade de Significado (US)	“No total, 67 professores participaram do estudo de formação de professores que começou em fevereiro de 2013 e terminou em dezembro de 2013. Devido a restrições organizacionais há quatro grupos experimentais menores”. “A Sra. Stone mora em Trier, a 20 km da fronteira de Luxemburgo. Para encher o seu VW Golf, dirige-se para Luxemburgo, onde imediatamente atrás da fronteira há um posto de gasolina. Lá você tem que pagar 1,10 euros por um litro de gasolina enquanto em Trier você tem que pagar 1,35 euros. Vale a pena a Sra. Stone dirigir para Luxemburgo? Justifique sua resposta. Dê um feedback por escrito ao aluno que tenha um grande potencial para apoiar o aprendizado adicional do aluno. 
Asserção Articulada da US	*A atividade foi desenvolvida em um curso de formação de professores em serviço. Esta tarefa contempla uma situação fictícia, em que a distância entre as cidades, o valor do combustível e quantos quilometros o carro percorre com um litro de combustível foram uma suposição. A construção do modelo matemático requer a formulação de suposições com base em informações adicionais ou na experiência pessoal. Por fim, a atividade contempla uma ação associada ao objetivo dos autores em relação à formação de professores.*

Fonte: as autoras

As Unidades de Significado US2.2.3.14 e US1.2.11.16 dizem a respeito da mesma atividade, porém as publicações são de edições diferentes. Na primeira Unidade de Significado (US2.2.3.14), trata-se da descrição do desenvolvimento da atividade em uma sala de aula. Na segunda Unidade de Significado (US1.2.11.16) a atividade foi utilizada em um curso de formação de professores e em um determinado momento a atividade juntamente com a resolução de um aluno foi entregue aos cursistas para que elaborassem um *feedback* escrito para o aluno, com o intuito apoiá-lo em sua aprendizagem. A atividade aborda uma situação inspirada na realidade sobre o abastecimento de um veículo. Embora o fato de analisar qual o local mais vantajoso para a senhora Stone abastecer o carro, alguns dados apresentados na situação são fictícios, como a distância de Trier à Luxemburgo. Para resolver esta situação-problema os alunos tiveram que realizar algumas suposições com base em suas experiências pessoais, como quantos quilômetros o carro percorre por litro de combustível. Após a resolução da atividade alguns pontos relevantes foram discutidos. Os autores comentam que os resultados matemáticos foram interpretados e validados o que pode mostrar se o resultado é ou não apropriado, além de analisar fatores como a poluição do ar e o tempo de deslocamento.

Quadro 16 - Descrição da Unidade de Significado US3.2.3.14

Título: Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research	
Código da US	**US3.2.3.14**
Unidade de Significado (US)	"trata de descobertas empíricas sobre o ensino e a aprendizagem de modelagem matemática, com foco na 8ª e 10ª série, ou seja, estudantes de 14 a 16 anos de idade." "Em 2004, o Corpo de Bombeiros de Munique adquiriu um novo veículo de escada aérea. Com isso, pode-se economizar mais de uma montada no final da cesta de pessoas de alta altitude. O carro de bombeiros deve estar a uma distância mínima de 12 m da casa em chamas. De qual altura máxima a brigada de incêndio de Munique pode resgatar pessoas com este motor?"
Asserção Articulada da US	*A situação-problema proposta para turmas de oitava e décima série recorre de uma situação real que envolvendo um novo veículo adquiro pelo Corpo de Bombeiros de Munique no ano de 2004. O novo veículo possui uma cesta que auxilia no resgate de pessoas a uma determinada altura do solo.*

Fonte: as autoras

A Unidade de Significado US3.2.3.14 do Quadro 16 apresenta uma situação-problema a respeito de um novo veículo adquirido pelo Corpo de Bombeiros de Munique, em que uma cesta movida por um motor os auxiliam no resgate de pessoas, o problema proposto aos alunos questiona qual a altura máxima que a brigada de incêndio de Munique pode resgatar pessoas usando este aparelho e apresenta algumas informações necessárias para a resolução do problema. O autor não evidencia no texto como ocorreu o desenvolvimento desta atividade, deste modo não houve a descrição dos procedimentos realizados pelos alunos para a obtenção de um modelo matemático ou mesmo do desfecho da atividade.

Quadro 17 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.6.14

Título: Word Problem Classification: A Promising Modelling Task at the Elementary Level	
Código da US	**US1.2.6.14**
Unidade de Significado (US)	"[...] o estudo sobre a classificação de problemas de palavras provou ser uma tarefa de modelagem promissora para o nível primário". "Johan e Herman compraram algumas rosas. Todas as rosas são caras, mas Johan comprou menos rosas. Johan comprou 4 rosas enquanto Herman comprou 20 rosas. Quando você sabe que Johan teve que pagar 16 euros, quanto Herman teve que pagar?" "Ellen e Kim estão correndo ao redor de uma pista. Eles correm igualmente rápido, mas Kim começou mais cedo. Quando Ellen corre 5 voltas, Kim corre 15 voltas. Quando Ellen fez 30 voltas, quantas voltas Kim correu?"

	“Jan e Tom estão plantando tulipas. Eles usam o mesmo tipo de bulbos de tulipa, mas Jan planta menos tulipas. Jan planta 6 tulipas enquanto Tom planta 18 tulipas. Quando você sabe que as tulipas de Jan florescem depois de 24 semanas, quanto tempo levará as tulipas de Tom para florescerem?” “[...] as tarefas de problemas de palavras tiveram um efeito relativamente profundo em quebrar a tendência bem documentada dos alunos de usar excessivamente o modelo linear ou proporcional.”
Asserção Articulada da US	*Os problemas foram desenvolvidos com alunos da sexta série. Neste artigo os autores apresentam exemplos de problemas de palavra que são considerados uma tarefa de modelagem. Os problemas são contextualizados e usam dados fictícios. Os alunos tiveram de classificar os problemas como: proporcionais, aditivos e constantes, além agrupar os problemas que possuíam algo em comum. Os autores não apresentam as resoluções dos alunos, porém apontam que os problemas de palavra como tarefas de modelagem matemática podem ter um efeito em quebrar a tendência do uso excessivo de modelos lineares e proporcionais.*

Fonte: as autoras

Já o Quadro 17 destaca a Unidade de Significado US1.2.6.14 que revela que os problemas de palavra podem ser considerados atividades de modelagem matemática. Os problemas de palavra foram propostos pelo professor a alunos da sexta série. Neste tipo de problema a operação a ser realizada está descrita no enunciado da atividade, que está de certa forma “mascarado” com um contexto, uma história fictícia. Os autores apontam que os problemas envolviam contextos baseados em situações do mundo real, sendo que os alunos ficaram encarregados por classificar tais problemas como proporcionais, aditivos e constantes dependendo do enunciado do problema e das operações matemáticas realizadas para resolvê-los. A resolução dos alunos não foi descrita no artigo, porém foi evienciado que os problemas de palavra como atividades de modelagem matemática podem auxiliar no rompimento do uso tendencioso e excessivo de modelos lineares e proporcionais pelos alunos.

Quadro 18 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.15.14

Título: Students Overcoming Blockages While Building A Mathematical Model: Exploring A Framework	
Código da US	**US1.2.15.14**
Unidade de Significado (US)	“Seis estudantes pré-universitários de cursos de ciências no 11º ano do Marecollege em Leiden (Países Baixos) participaram do estudo”. “Foram utilizadas cinco tarefas, as quais foram divididas entre os pares, de modo que cada dupla trabalhasse em quatro deles, e de tal forma que cada tarefa fosse tentada pelo menos uma vez. Selecionamos tarefas em sua demanda de matematização (implícita ou explicitamente solicitada) e na demanda por tempo (a ser completada dentro de um curto período de tempo). As tarefas foram selecionadas de diferentes fontes: a 'Tarefa da Piscina' de um curso sobre resolução de problemas, a 'Tarefa Horizonte' de um curso de modelagem para formação de professores e as restantes tarefas de um exame nacional, um manual e uma revista para professores de matemática.” “Tarefa do Horizonte Você está em pé na praia e está olhando para o horizonte. A visibilidade é excelente. A que distância está o horizonte? Tome 6370 km como raio da terra. Jonathan desenhou a situação novamente - desta vez nitidamente com o quadrado e a bússola. Desta forma, Jonathan descobriu que o ângulo entre o raio da Terra e a linha de visão era de 90 °. Depois disso, eles resolveram a tarefa com sucesso. O segundo par, Darlene e Dianne, discutiram o termo horizonte. Dianne descreveu-o como "o local onde ele desaparece assim", enquanto gesticulava com as mãos.

	Subsequente, Darlene fez uma suposição errônea de que o horizonte é um oitavo do perímetro da Terra, o que impedia seu progresso. Dianne notou que "quando você é mais alto, o horizonte estará mais distante", mas elas não conseguiram traduzir essa ideia em uma expressão matemática. As atividades malsucedidas são uma oportunidade de desenvolver mais profundamente o metacognitivo sobre modelagem e matematização em particular.
Asserção Articulada da US	*As tarefas foram desenvolvidas com alunos pré-universitários do 11º ano de cursos de ciências. Os autores selecionaram cinco tarefas para trabalhar com os alunos. A tarefa denominada 'Tarefa Horizonte' é descrita no artigo e foi retirada de um curso de modelagem para formação de professores. Nesta tarefa de modelagem o problema recorre de uma situação-real que envolve visualizar a paisagem do horizonte em uma praia, questionando-se a que distância está o horizonte em relação a uma pessoa que está em pé avistando-o. Nesta atividade os autores relatam que apensas uma dupla resolveu a tarefa com sucesso. Na resolução dos outros alunos os pesquisadores identificaram bloqueios como suposições errôneas, e bloqueios em encontrar algo no enunciado da atividade que pudesse auxilia-los, tendo a visão de que o que não é mencionado no texto do problema não precisa ser usado em cálculos. Estes bloqueios acabaram impedindo-os de resolver o problema. Neste sentido, os autores consideram que uma atividade malsucedida deve ser vista como uma oportunidade de desenvolver mais profundamente o metacognitivo sobre modelagem e matematização em particular*

Fonte: as autoras

A atividade destacada pela Unidade de Significado US1.2.15.14 do Quadro 18, traz como situação-problema a distância entre uma pessoa em relação ao horizonte, neste caso avistar o horizonte ao estar em pé na areia da praia. Apesar dos autores declararem que uma dupla conseguiu resolver o problema e os demais alunos tiveram bloqueios por não conseguirem encontrar algo no enunciado da atividade que pudesse auxiliá-los, não há registros apresentados sobre os modelos matemáticos, e a atividade mesmo considerada malsucedida foi vista como uma oportunidade para melhorar, principalmente a matematização em atividades de modelagem.

Quadro 19 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.20.14

Título: Modelling Tasks: Insight into Mathematical Understanding	
Código da US	**US1.2.20.14**
Unidade de Significado (US)	“Tabitha e Tanya, adotam uma abordagem integradora para lidar com a matemática e a realidade em tais tarefas e sua maneira de lidar com o contexto das tarefas do mundo real permaneceu estável do 9º ano ao 11º ano.” “Na primeira tarefa, os alunos tinham que escrever uma carta ao gerente da pescaria recomendando uma das quatro estratégias agrícolas propostas. Ambas as tarefas são definidas no ambiente geográfico local da escola que fica perto da base das cordilheiras de Dandenong, perto do cenário imaginário da fazenda de trutas, embora haja fazendas de trutas na área.” “Fazenda de trutas de Tommy Tinn (Tarefa do 9º ano) Um lago no Parque Nacional de Lilydale foi abastecido com aproximadamente 10000 trutas. Em lagos similares, quando deixados para fatores naturais, os números de trutas aumentam em média 20% ao ano. Para que a pesca permaneça viável, é necessário que haja pelo menos 750 peixes no lago. A superpopulação pode causar uma drástica mortandade de peixes, onde até 95% da população de peixes pode morrer. Supõe-se que a capacidade de carga do lago seja aproximadamente 5 vezes a capacidade atual de 10000 peixes. Considere as 4 estratégias e faça uma recomendação. 1: Não faça nada para perturbar o controle populacional normal dos peixes no lago. A pesca no lago deve ser feita com base na captura e liberação.

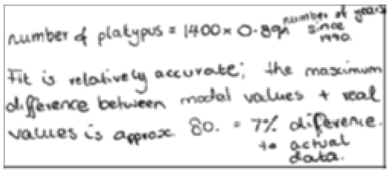
	2: Pesca permitida. A captura total permitida para todas as licenças de pesca é de 1800 peixes por ano. 3: Um empreiteiro licenciado para remover até 2500 peixes a cada temporada. 4: Permita que a população de peixes atinja 25.000 peixes, em seguida, emitir e monitorar licenças de pesca amadora que manteriam o estoque de peixes nesse nível". "na tarefa do 9º ano, verificou-se que ambos os alunos usaram o conhecimento prévio enciclopédico[24], mas para finalidades diferentes. Ambos usaram isso para melhorar a tomada de decisões durante a execução, por exemplo, quando Tanya fez estimativas razoáveis e Tabitha introduziu ideias alternativas, argumentando que é mais humano controlar a população de peixes pescando do que permitir superlotação e subsequentes mortes em massa de peixes. Além disso, Tanya usou esse tipo de conhecimento prévio para permitir que ela se relacionasse com o contexto da tarefa. Para Tabitha, o conhecimento prévio enciclopédico também foi usado para melhorar sua compreensão e tomada de decisões. Somente Tabitha mostrou conhecimento prévio acadêmico[25], ativando-o para melhorar a compreensão e permitir que ela se relacionasse com o contexto da tarefa."
Asserção Articulada da US	*A atividade foi desenvolvida com uma turma que em um primeiro instante cursava o 9º ano e um segundo momento em que eles estavam no 11º ano. As atividades tratam de temas da realidade que discutem questões econômicas e ambientais. Na primeira atividade fazenda de trutas de Tommy Tinn foi desenvolvida no 9º ano, e embora no entorno da escola houvesse fazendas de criação de trutas, esta utilizada na atividade era fictícia. Nesta atividade os alunos tinham que escrever uma carta ao gerente do pesqueiro recomendando uma de quatro estratégias de controle propostas no texto da atividade, além de examinar os resultados de uma análise matemática dos dados a respeito da superpopulação de trutas e elaborar uma apresentação em slides fazendo recomendações sobre a continuação de um projeto de intervenção.*

Fonte: as autoras

O Quadro 19 aborda a Unidade de Significado US1.2.20.14 que destaca uma atividade cujo problema advém de uma situação real. A atividade "fazenda de trutas de Tommy Tin" embora inspirada em uma situação real tem enredo fictício. A atividade consiste em escrever uma carta ao gerente de um pesqueiro tecendo recomendações a partir da escolha de uma estratégia para controle da população de trutas, que estava presente no texto da atividade, bem como examinar os resultados de uma análise matemática dos dados a respeito da superpopulação de trutas, sendo necessário a elaboração de uma apresentação em *slides* com orientações para a continuação de um projeto de intervenção. Para tanto, os dados foram fornecidos no texto da atividade. Os autores não apresentam as resoluções das alunas, apenas citam que os conhecimentos advindos de experiências acadêmicas e do mundo foram mobilizados durante o desenvolvimento da atividade.

[24] O conhecimento acadêmico envolve "experiências vicárias em outras áreas acadêmicas" (BROWN; EDWARDS, 2011, p.188).
[25] O conhecimento enciclopédico envolve "enciclopédico geral - conhecimento do mundo" (BROWN; EDWARDS, 2011, p.188).

Quadro 20 - Descrição da Unidade de Significado US2.2.20.14

Título: Modelling Tasks: Insight into Mathematical Understanding	
Código da US	**US2.2.20.14**
Unidade de Significado (US)	“Na segunda tarefa, eles tinham que examinar os resultados de uma análise matemática dos dados e fazer recomendações sobre a continuação de um projeto de intervenção na forma de uma apresentação em PowerPoint. Ambas as tarefas são definidas no ambiente geográfico local da escola que fica perto da base das cordilheiras de Dandenong, perto do rio Yarra a casa de ornitorrinco.” “Ornitorrinco em perigo (tarefa do 11º ano) O ornitorrinco é uma espécie em extinção que pode se tornar extinta a menos que seja tomada ação para salvá-lo. Uma pesquisa anual realizada em um parque nacional próximo mostrou uma diminuição alarmante no número de ornitorrinco ao longo dos anos 1993-1998. Dois conjuntos de dados representando uma população de ornitorrincos antes e depois de um projeto de intervenção foram apresentados. [...] Encontre um modelo para representar o número de ornitorrinco ao longo do tempo para os dois conjuntos de dados. As perguntas então consideradas incluíam: A intervenção melhorou a situação, qual era a população prevista para daqui uma década, e quando a população retornará ao valor inicial?  “Ao identificar o uso do conhecimento prévio pelos alunos na tarefa do 11º ano, mais uma vez foram notadas diferenças. Ambos usaram o conhecimento enciclopédico, e novamente apenas Tabitha usou conhecimento prévio acadêmico. Ambos usaram o conhecimento enciclopédico para facilitar a verificação de seu progresso. Além disso, Tanya usou para se relacionar com o contexto da tarefa, e Tabitha para facilitar a verificação de seu progresso e para melhorar sua compreensão. Tanya usou o conhecimento prévio acadêmico, para selecionar seu modelo matemático (em conjunto com o conhecimento matemático) e para aprimorar a tomada de decisões durante a execução.”
Asserção Articulada da US	*Um problema do mundo real envolvendo o processo de extinção dos ornitorrincos foi proposto para os alunos. Nesta atividade foram apresentados pelo professor dois conjuntos de dados representando uma população de ornitorrincos, antes e depois, de um projeto de intervenção. Neste sentido foi solicitado na atividade que os alunos encontrassem um modelo para representar a população de ornitorrinco ao longo do tempo para os dois conjuntos de dados. E a partir de uma análise responder se a intervenção melhorou a situação da população de ornitorrincos, qual será a população prevista para daqui 10 anos, e quando a população retornaria ao valor inicial? Fazendo um comparativo entre as resoluções das alunas quando realizaram a atividade no 9º ano e depois no 11º ano. As alunas utilizaram conhecimentos prévios de caráter enciclopédico e acadêmico. Esses conhecimentos foram utilizados para melhorar a tomada de decisões, para fazer estimativas razoáveis, para melhorar a compreensão e permitir que ela se relacionasse com o contexto da tarefa, para facilitar a verificação de seus progressos e para selecionar seu modelo matemático.*

Fonte: as autoras

Conforme destaca a Unidade de Significado US2.2.20.14 do Quadro 20, a atividade de modelagem matemática “Ornitorrincos em perigo” foi proposta pelo professor a alunos do décimo primeiro ano. O problema real envolve um desastre ecológico, o processo de extinção dos ornitorrincos, sendo que dados reais foram fornecidos aos alunos. Par resolver a situação-problema os alunos tiveram que modelar o número de ornitorrincos ao longo tempo, e por meio de uma análise responder apontar se um projeto de intervenção melhorou ou não a situação da população de ornitorrincos. Além disso foi necessário realizar uma previsão da população para daqui 10 anos, e encontrar quando a população retornaria ao valor inicial. Os alunos utilizaram seus conhecimentos acadêmicos e de mundo para a tomada de decisões, realização de estimativa, obtenção do modelo matemática e para facilitar a verificação de seus progressos. A descrição dos procedimentos realizados pelos alunos durante a atividade não foi apresentada no artigo.

Quadro 21 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.29.14

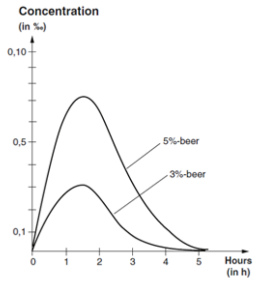
Título: Pre-service Secondary Mathematics Teachers' Affinity with Using Modelling Tasks in Teaching Years 8–10	
Código da US	**US1.2.29.14**
Unidade de Significado (US)	"[...] dados coletados como parte do estudo internacional de futuros professores de matemática: Competências de futuros professores de matemática. Os dados foram coletados de 73 futuros professores de matemática voluntários de seis coortes[26] em cinco universidades em três estados australianos." "Em particular, um item consistindo de vários subitens foi baseado em um exemplo de modelagem sobre os lucros de uma sorveteria e a solução de tarefa sugerida de um estudante do 8º ano, Leo. Este foi o item que é a base para as respostas analisadas neste capítulo". "Há quatro sorveterias na cidade de Leo, Springfield. Leo está de pé em frente à sua sorveteria favorita, "Sorrento", como faz frequentemente no verão. Uma colher de sorvete custa 60c. Ele se pergunta quanto dinheiro o proprietário da sorveteria ganha com a venda de sorvetes em um domingo quente de verão. [...] Para resolver o problema, Leo faz o seguinte: No dia seguinte, ele pergunta a seus três melhores amigos quantas colheres de sorvete eles compraram no último domingo e recebe as seguintes respostas: Marcus: 3 colheres, Peter: 5 colheres, Tom: 4 colheres. Leo calcula em média (3 + 4 + 5) ÷ 3 = 4 colheres por dia. Ele multiplica o resultado pelo número de cidadãos em Springfield (30.000) e divide o resultado por 4, porque há quatro sorveterias em Springfield. Assim, 30 mil colheres de sorvete são vendidas na sorveteria Sorrento por dia. Renda: 30.000 * $ 0,60 = $ 18.000. O que você pensa sobre isso?"
Asserção Articulada da US	*A atividade é apresentada no artigo no contexto de um estudo internacional de futuros professores de matemática. Uma atividade de modelagem analisar a afinidade, dos sujeitos de pesquisa, em relação ao uso de atividades de modelagem. A atividade direcionada aos professores diz a respeito do lucro de uma sorveteria no verão. A resolução de um aluno também foi dada aos professores, nela o aluno realiza a coleta de dados entrevistando três amigos e por meio de alguns cálculos apresenta uma possível renda da sorveteria, com base na descrição da resolução do aluno os professores deveriam escrever o que pensam sobre a atividade da sorveteria.*

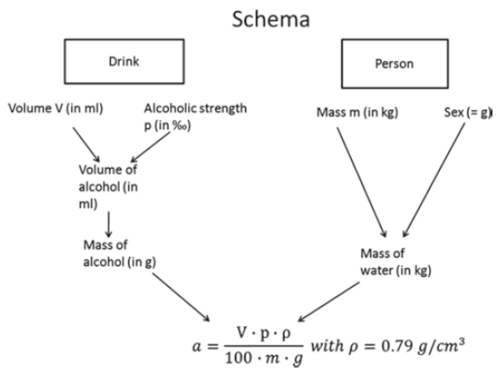
Fonte: as autoras

A atividade destacada pela unidade US1.2.29.14 do Quadro 21 aborda uma situação-problema a respeito do lucro de uma sorveteria em um dia de verão. Sabe-se que a situação sucede de um acontecimento real, porém os autores não comentam se os dados utilizados para a resolução do aluno são reais ou fictícios. A resolução da situação-problema é apresentada no artigo, porém nada pode-se dizer a respeito da validação dos resultados.

[26] Enquanto conjunto ou série, a noção de coorte é usada em demografia, em epidemiologia e na educação. Uma coorte é um conjunto de pessoas que partilham um mesmo evento (acontecimento) dentro de um certo período de tempo (HOUAISS, 2009).

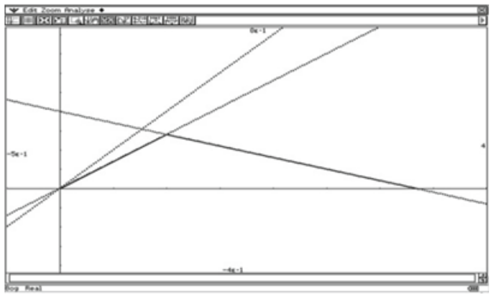
Quadro 22 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.32.14

<table>
<tr><td colspan="2">Título: Modelling Considering the Influence of Technology</td></tr>
<tr><th>Código da US</th><th>US1.2.32.14</th></tr>
<tr><td>Unidade de Significado (US)</td><td>
“No gráfico ao lado você pode ver a sequência cronológica da concentração de álcool no sangue (em %) após o consumo de uma determinada abundância de cerveja com 5% ou alternativamente 3%. Descreva o progresso em suas próprias palavras. Você consegue encontrar semelhanças? De que maneira eles são diferentes?
Ao discutir este exemplo com os alunos, várias questões diferentes podem surgir. Eles podem ser tomados como ponto de partida para modelar atividades em sala de aula. Algumas questões que podem ser interessantes para os alunos são:


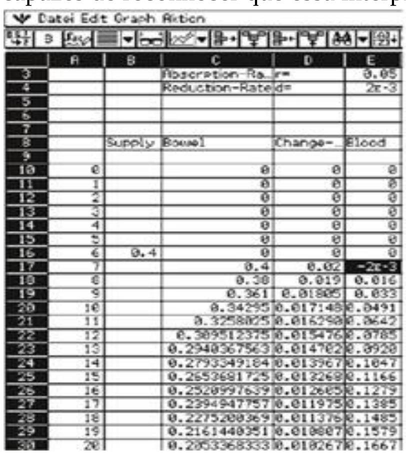
• Aprendemos que a redução de álcool no sangue ocorre a uma taxa constante: em cada hora, a mesma quantidade de álcool é reduzida! Isso está certo?
• No caso da mesma quantidade de álcool no sangue, a redução de 5% de cerveja é mais rápida do que com a cerveja de 3%. Por quê?
• O gráfico mostra que se você consumir álcool uma vez, nunca desaparecerá do sangue. Isso está certo? Isso leva à pergunta: como a degradação e a absorção do álcool ocorrem na vida real? Ao procurar por uma resposta, muitos resultados diferentes e inconsistentes podem ser encontrados - especialmente usando a internet. Uma resposta definitiva não pode ser dada. Mais algumas questões, que são de relevância matemática, podem ajudar a encontrar uma resposta possível e são o ponto de partida para esta abordagem de modelagem:
• Alguém está bebendo meio litro de cerveja. Quanto de álcool permanece no sangue desta pessoa depois de 2 h?
• Alguém causou um acidente. Duas horas depois, o motorista deve entregar uma amostra de sangue. O teste de álcool produziu um nível de álcool no sangue de 0,7. Qual era a concentração de álcool no sangue quando o acidente aconteceu?
Um primeiro cálculo aproximado pode ser feito pela fórmula Widmark (Widmark 1932). A concentração de álcool depende apenas da pessoa (bebendo) e da própria bebida alcoólica. Os parâmetros que são incluídos são a quantidade de bebidas alcoólicas consumidas e o teor alcoólico, bem como a massa da pessoa que bebe álcool e o sexo. A idade ou a altura não é considerada, como na fórmula de Watson (Watson et al. 1980). Seguindo o esquema, as primeiras considerações são possíveis. Pense em um homem (g = 0.7) com uma massa de 63 kg, bebendo meio litro de cerveja (p = 4.5%). Tomando esta fórmula, você encontrará que esta pessoa tem uma quantidade teórica de um nível de álcool de 0.4 no sangue. Agora é possível pensar na redução do álcool. Algumas suposições feitas são:


• A redução constante de álcool por hora (é um valor empírico de 0,1 nível de álcool/$h \leq d \leq$ 0,2 nível de álcool/h dependendo do sexo, constituição etc.)
• $b(t)$ como modelo linear para a concentração de álcool após t horas ($b(t) = a - d.t \Rightarrow b\,(t) = 0{,}4 - 0{,}12t$).
No entanto, usando essas suposições, pode-se ver que essas ideias podem ser simples, mas não são muito realistas. Na realidade, o processo é mais complexo porque o álcool consumido não vai desaparecer no sangue de repente; é principalmente absorvido pelo trato gastrointestinal e a absorção e redução do álcool são dois procedimentos sobrepostos. Então, temos que pensar em usar outra abordagem.
Considerar como mostrar esses dois procedimentos leva a dois modelos diferentes. O primeiro descreve a situação como um possível ponto de partida para o problema; o segundo leva a algumas soluções interessantes.
</td></tr>
</table>

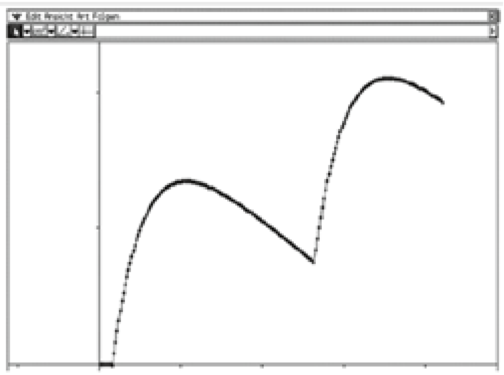
Primeiro Modelo - Abordagem Linear



O tempo até que todo o álcool é desvanecido no sangue é um valor empírico bem conhecido - dura cerca de 60 min. Sabendo desse valor, é possível fazer uma suposição, que deve ajudar a encontrar um modelo linear apropriado. Deve ser que, na mesma unidade de tempo, a mesma quantidade de álcool seja absorvida. Portanto, o seguinte modelo linear é construído: Para a redução de álcool, a função linear conhecida $b(t) = 0{,}4 - 0{,}12.t$ pode ser encontrada. A absorção do álcool pode ser mostrada através de $a.(t) = 0{,}4.t$. Mas o álcool já está reduzido após 1 h, então obtemos a seguinte função (linear) para a absorção real $a(t) = 0.28.t$. Observando os gráficos dessas funções é possível ver que, embora o progresso seja semelhante ao mostrado no exemplo do livro escolar, a curva não se encaixa de maneira alguma. Então, outro modelo tem que ser encontrado. A tecnologia nesta parte do exemplo é usada apenas para validar os resultados. Os objetos matemáticos, isto é, as funções lineares, são exibidos e comparando esses gráficos com o gráfico do exemplo, todos são capazes de reconhecer que essa interpretação não é possível. A ajuda tecnológica permite que os estudantes reconheçam eficientemente que o modelo escolhido não é apropriado.



	A	B	C	D	E
3			Absorption-Ra…	r=	0.05
4			Reduction-Rate	d=	2E-3
5					
6					
7					
8		Supply	Bowel	Change-…	Blood
9					
10	0		0	0	0
11	1		0	0	0
12	2		0	0	0
13	3		0	0	0
14	4		0	0	0
15	5		0	0	0
16	6	0.4	0	0	0
17	7		0.4	0.02	-2E-3
18	8		0.38	0.019	0.016
19	9		0.361	0.01805	0.033
20	10		0.34295	0.017148	0.0491
21	11		0.3258025	0.016290	0.0642
22	12		0.309512375	0.015476	0.0785
23	13		0.2940367563	0.014702	0.0920
24	14		0.2793349184	0.013967	0.1047
25	15		0.2653681725	0.013268	0.1166
26	16		0.2520997639	0.012605	0.1279
27	17		0.2394947757	0.011975	0.1385
28	18		0.2275200369	0.011376	0.1485
29	19		0.2161440351	0.010807	0.1579
30	20		0.2053368333	0.010267	0.1667



Segundo Modelo - Abordagem Semi-Linear

A absorção de álcool no sangue é realizada por um processo de difusão. Isso significa que uma porção fixa r, que pode ser encontrada no trato gastrointestinal, é absorvida pelo corpo. Nem toda a quantidade de álcool é absorvida em 1 h,

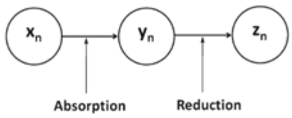
mas quase tudo isso, digamos, cerca de 95% (porque $0{,}95 \approx 1 - 0{,}95^{60}$, ou seja, cerca de $5\%/min$). Portanto, o fator r é igual a 0,05. Agora, um modelo discreto com os parâmetros x_n (quantidade de álcool no trato gastrointestinal após n minutos), y_n (quantidade de álcool no sangue após n minutos) e z_n (álcool reduzido após n minutos) com os valores iniciais $x_0 = a$ e $y_0 = z_0 = 0$ pode ser construído. Pensando no processo, a absorção e a redução poderiam ser mostradas como

As seguintes equações mostram os resultados:

$$x_{n+1} = x_n - 0.05x_n = 0.95x_n$$

$$y_{n+1} = y_n + 0.05x_n - 0.002$$

$$z_{n+1} = z_n + 0.002$$



É válido que

$$x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} = x_n + y_n + z_n = \cdots = a \ \forall n \in N.$$

Reconhecendo x_n como uma sequência geométrica e z_n como uma sequência aritmética, a solução possível $y_n = a.(1 - 0.95^n) - 0.002n$ pode ser encontrada. Usando a tecnologia, esse modelo pode ser simulado de muitas maneiras diferentes.

O papel da tecnologia nessa parte é multifacetado. É usado para validar, interpretar e experimentar.

Asserção Articulada da US	*Está situação-problema advém de um contexto do mundo real, em que o percentual de álcool no sangue pode ser estudado. Alguns problemas decorrentes podem aparecer como por exemplo a absorção de álcool pelo sangue, quanto tempo o álcool fica na corrente sanguínea, o uso do teste do bafômetro, dentre outras possibilidades. O autor propõe um modo de trabalhar esta atividade em sala de aula, apresentando uma análise sobre alguns modelos e também fazendo o uso de recursos tecnológicos para resolver a situação-problema. Foram tratados modelos matemáticos algébricos que envolvem funções lineares, equações com variáveis discretas, sequências geométricas e aritméticas.*

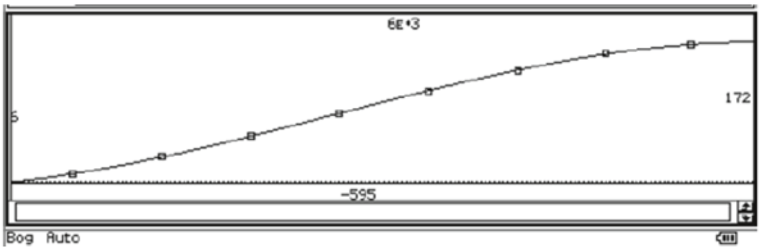
Fonte: as autoras

A Unidade de Significado US1.2.32.14 destaca uma abordagem que pode ser feita por meio da modelagem ao utilizar um exemplo retirado de um livro didático (Quadro 22). A situação-problema trata de um contexto real, o nível de concentração de álcool no sangue. Para estudar este fenômeno o autor apresenta diversos modos de como isto pode ser feito, bem como as contribuições que podem ser incrementadas a este estudo. A unidade revela como podemos questionar e interpretar modelos matemáticos diante de uma situação proposta. Neste caso, em particular, o estudo foi guiado por questionamentos como: a taxa de redução do álcool no sangue é constante? Ao ingerirmos a mesma quantidade de uma bebida com percentual alcoólico diferente a absorção é mais rápida ou mais lenta? Ao consumirmos uma bebida alcoólica uma vez, o álcool nunca desaparecerá do sangue? Como ocorre a degradação e a absorção do álcool em nosso corpo? Se alguém bebe meio litro de cerveja, quanto de álcool permanece no sangue desta pessoa depois de 2 horas? No caso de um acidente causado por embriaguez, cujo o infrator, após duas horas, entrega uma amostra de sangue para realizar um teste de concentração de álcool no sangue e o resultado é de 0,7, qual era a concentração de álcool no sangue quando o acidente aconteceu? Para o autor estes questionamentos são o ponto de partida para realizar uma modelagem matemática. Para o problema proposto o autor apresenta três possíveis resoluções. O primeiro modelo matemático é conhecido na literatura como modelo de Widmark, porém há modelos matemáticos que podem melhor representar o fenômeno, sendo que dois modelos matemáticos foram deduzidos para resolução do problema, uma função linear e um modelo com variáveis. O autor ainda apresenta contribuições da tecnologia, cujo papel consistiu em validar, interpretar e experimentar.

Quadro 23 - Descrição da Unidade de Significado US2.2.32.14

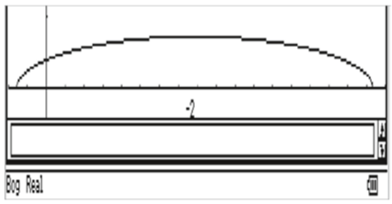
<table>
<tr><td colspan="2">Título: Modelling Considering the Influence of Technology</td></tr>
<tr><td>Código da US</td><td>US2.2.32.14</td></tr>
<tr><td>Unidade de Significado (US)</td><td>Que tipo de forma se ajusta aos seguintes dados?
<table>
<tr><td>Nível da vareta do óleo em cm</td><td>20</td><td>40</td><td>60</td><td>80</td><td>100</td><td>120</td><td>140</td><td>159</td></tr>
<tr><td>Volume do tanque em litros</td><td>355</td><td>983</td><td>1747</td><td>2574</td><td>3398</td><td>4158</td><td>4776</td><td>5105</td></tr>
</table>
Existem duas maneiras adequadas para lidar com esse problema. Você pode pensar em formas adequadas de tanques existentes na realidade ou você pode resolver o problema usando o teorema</td></tr>
</table>

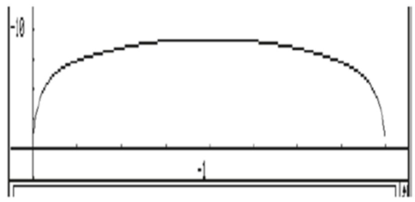
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
fundamental do cálculo. Primeiro, é útil dar uma olhada no gráfico da tabela fornecida. Quando você discute os dados, uma regressão cúbica parece ser adequada:



Para esta tarefa, o uso de uma planilha com capacidade CAS é muito útil. Se você conhece a função, que descreve a borda de uma rotação de uma forma simétrica, você obtém o volume por $V(h) = \pi.\int_0^h f(x)^2 dx$ essa fórmula pode ser usada também em sentido inverso, o que significa que você usa o teorema fundamental ao contrário $f(h) = \sqrt{\frac{V\prime(h)}{\pi}}$ Como vimos antes, você pode fazer uma regressão cúbica para obter a função V (h). O gráfico

mostra que a solução não corresponde à realidade. Deve ser zero para x = 0 e x = 159. Portanto, temos que fazer uma nova tentativa com o problema. Nós temos que insistir que a função $V(h)$ tem que ajustar os dados e $V(0) = V'(0) = 0$. Será mostrado pela solução que você não tem que exigir $V(159) = V'(159) = 0$. Isso é atendido pela simetria dos dados. Colocamos $V(x) = x^2(ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h)$ e o resto do trabalho pode ser feito pela ClassPad. Olhando os gráficos você pode ver que isso corresponde à realidade.



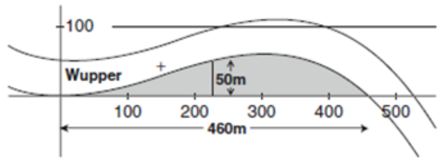
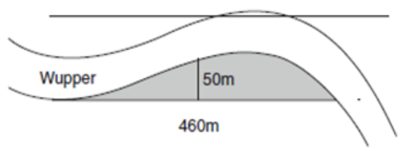
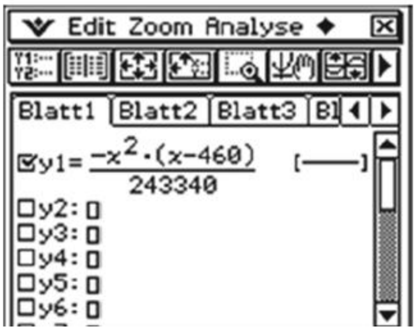
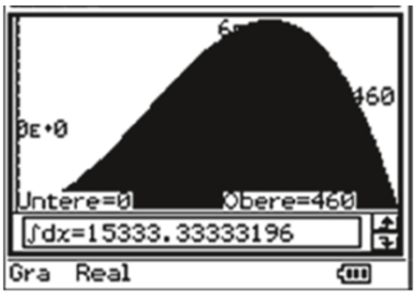


</td>
</tr>
<tr>
<td>Asserção Articulada da US</td>
<td>Nesta situação-problema o objetivo é modelar um conjunto de dados, encontrando o melhor ajuste. Para resolver este problema o autor utilizou o conjunto de dados para uma construção gráfica utilizando a função CAS (Computer Algebra Systems), bem como explicitou que o problema pode ser resolvido por meio do teorema fundamental do cálculo.</td>
</tr>
</table>

Fonte: as autoras

No Quadro 23 a Unidade de Significado US2.2.32.14 manifesta-se uma atividade com referência na realidade. A atividade dispõe de um conjunto de dados referente a altura no nível de óleo de um carro e o tamanho do tanque que armazena o óleo. O problema consiste em encontrar um modelo matemático que melhor ajusta o conjunto de dados fornecidos. O autor apresenta como está atividade aliada ao uso da tecnologia digital pode ser resolvida. A resolução e validação foram realizadas por meio do uso de um software, uma função relacionando o volume do tanque e a altura do nível de óleo foi ajustada e registros gráficos foram apresentados.

Quadro 24 - Descrição da Unidade de Significado US3.2.32.14

Título: Modelling Considering the Influence of Technology	
Código da US	**US3.2.32.14**
Unidade de Significado (US)	Tarefas com o CAS são mais estruturadas em aberto. Um clube de canoagem gostaria de adquirir uma propriedade para uma nova casa do clube com um local de desembarque no rio Wupper. O proprietário anterior […] oferece essa propriedade… a um preço de 12 euros por m². [...] a) Explique que a função f (x) = ax² (x - 460) descreve a orla no sistema de coordenadas fornecido. Calcule a variável *a*. (resultado: $a = -\frac{1}{243340}$) b) Calcule o preço para a parcela de terra.  Um clube de canoagem gostaria de adquirir uma propriedade para uma nova casa do clube com um local de desembarque no rio Wupper. O proprietário anterior […] oferece essa propriedade… a um preço de 12 euros por m².  a) Determine uma função, que descreva a orla no sistema de coordenadas apropriado e calcule o preço.
	Uma solução numérica:   Assim, a tarefa é mais aberta e os alunos precisam dar mais passos no ciclo de modelagem.
Asserção Articulada da US	*Nesta situação-problema o objetivo é modelar um conjunto de dados, encontrando o melhor ajuste. Para resolver este problema o autor utilizou o conjunto de dados para uma construção gráfica, bem como explicitou que o problema pode ser resolvido por meio do teorema fundamental do cálculo.*

Fonte: as autoras

O Quadro 24 aborda atividades estruturadas para o uso de tecnologia que são destacadas na unidade US3.2.32.14. Nesta atividade não há indícios a respeito da veracidade dos dados, se estes são reais ou fictícios, o contexto envolve a compra de uma área para um clube de canoagem. Por meio do uso de um *software* com capacidade CAS, a situação-problema um modelo matemático pode ser ajustado e uma resolução numérica foi apresentada. O autor considera que atividades usando o CAS são mais abertas e aponta neste tipo de atividade os alunos necessitam transitar nas fases do ciclo de modelagem.

Quadro 25 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.57.14

<table>
<tr><td colspan="2">Título: Authentic Modelling Problems in Mathematics Education</td></tr>
<tr><td>Código da US</td><td>US1.2.57.14</td></tr>
<tr><td>Unidade de Significado (US)</td><td>

“O exemplo de modelagem foi proposto aos estudantes na semana de modelagem realizada em março de 2009: Como a disseminação de uma doença sexualmente transmissível com joaninhas pode ser prevista em relação ao desenvolvimento da própria população? O problema lida com a reprodução de joaninhas que são afetadas por doenças sexualmente transmissíveis. Devido à promiscuidade, grande parte da população de joaninhas é afetada por doenças sexualmente transmissíveis causadas por acarinos (ácaros). Apesar dessas doenças, o tamanho da população permaneceu o mesmo ao longo de vários anos. A tarefa dos estudantes era examinar as declarações sobre o desenvolvimento a longo prazo da população de joaninhas e descobrir se as joaninhas poderiam estar em risco de extinção.”

“Os alunos começaram a pesquisar na biblioteca e na *internet* para encontrar mais informações sobre essa espécie de joaninha e, principalmente, sobre seu comportamento reprodutivo. Para entender todas essas informações (por exemplo, sobre o tempo até a maturidade sexual e o período de incubação da doença sexualmente transmissível, mas também informações climáticas como o perfil de temperatura porque o comportamento reprodutivo das joaninhas depende da temperatura), os alunos plotaram os dados em um gráfico”.

Em suma, os estudantes examinaram os três fatores que eles assumiram que influenciam a derivada do tamanho da população: • tamanho da população; • infestação • atividade reprodutiva. Os alunos usaram a suposição de que todos os fatores dependerem apenas do tempo. Posteriormente, identificaram os fatores que têm que aumentar ou diminuir para resultar em um aumento de $p'(t)$ (os alunos chamaram isso de “ascensão da população”) ou em uma diminuição de $p'(t)$ (os alunos chamaram isso de “Desagregação da população”). Os alunos apresentaram os resultados no esquema a seguir sobre a conexão dos valores:

<table>
<tr><th>p´(t)</th><th>b(t)</th><th>r(t)</th><th>p(t)</th></tr>
<tr><td>↗</td><td>↘</td><td>↗</td><td>↗</td></tr>
<tr><td>↘</td><td>↗</td><td>↘</td><td>↘</td></tr>
</table>

Uma seta para cima representa um aumento e uma seta para baixo representa uma diminuição do respectivo valor.

Pode-se reconhecer que apenas a infestação $b(t)$ se desenvolve contrariamente aos outros valores. Para equilibrar isso e incluir todos os valores em uma equação, os alunos examinaram o valor $(1 - b(t))$ em vez de $b(t)$, que se desenvolve como os outros valores. Assim, esta nova equação resultou como hipótese: $p'(t) = r(t)(1 - b(t))p(t)$

Na etapa seguinte, os alunos acrescentaram uma taxa de mortalidade independente do tempo m aos fatores existentes, transformando o resultado na seguinte equação: $p'(t) = r(t)(1 - b(t))p(t) - m.p(t)$

Eles multiplicaram a equação anterior com $(1 - m)$ para ajustar também o novo fator aos existentes, assim como fizeram com a infestação. Isso resultou em: $p'(t) = r(t)(1 - b(t))p(t).(1 - m)$

Os alunos expandiram essa fórmula com $(1 - m)$. E eles chamaram o primeiro adendo do lado direito da equação expandida "nascimento", o segundo adendo "morte" para diferenciar entre as diferentes causas que influenciam o desenvolvimento da população (neste caso, a derivada do tamanho da população). Isso resultou na seguinte equação

$$p'(t) = \underbrace{r(t)\big(1-b(t)\big)p(t)}_{birth} - \underbrace{m\cdot r(t)\big(1-b(t)\big)p(t)}_{death}$$

Após cruzar algumas informações de pesquisas com um fator que poderia ser incluído no modelo os alunos chama de X a taxa de natalidade ficando com a equação:

$$p'(t) = X\cdot r(t)\big(1-b(t)\big)p(t) - m\cdot p(t)$$

Utilizando alguns valores encontrados em pesquisas os alunos tinham que resolver a equação diferencial e usaram um modelo discreto com uma fórmula recursiva em vez de um modelo estável. A decisão não foi, portanto, baseada em considerações sobre o conteúdo, mas sim em considerações sobre os métodos matemáticos disponíveis que lhes permitiu trabalhar em um modelo discreto relacionado, por recursividade encontraram a fórmula:

</td></tr>
</table>

	$$p(m+1)= X\cdot r(m)(1-b(m))p(m)-m\cdot p(m)+p(m)$$ Com essa fórmula, os alunos calcularam o desenvolvimento da população de joaninhas ao longo de um ano, de acordo com seu modelo. Ao finalizar o modelo os alunos pensaram em modificações mesmo antes de valida-lo. Mesmo que essas modificações sejam compreensíveis, a validação do modelo está ausente e isso pode indicar que o modelo desenvolvido é arbitrário para os alunos, desde que eles cheguem a um modelo, portanto, a insistência didática na validação de soluções deve ser levada em consideração como foco ao ensinar modelagem matemática.
Asserção Articulada da US	*A atividade de modelagem matemática envolve um estudo sobre uma ameaça biológica que ocorre com joaninhas, a disseminação de uma doença sexualmente transmissível entre estes insetos. A atividade foi proposta para estudantes em uma semana de modelagem. Para estudar tal acontecimento a atividade propõe entender como a disseminação da DST em joaninhas pode ser prevista em relação ao desenvolvimento de sua própria população. Assim, para a resolução desta atividade os alunos realizaram pesquisas a respeito das joaninhas encontrando informações biológicas e matemáticas sobre a população destas. O modelo matemático encontrado pelos alunos considerou a população, taxas de mortalidade, natalidade e população infestada. Primeiramente uma equação diferencial e depois optaram por resolvê-la numericamente por meio de um modelo discreto com uma fórmula recursiva, assim os alunos puderam calcular o desenvolvimento da população de joaninhas ao longo de um ano, de acordo com seu modelo. Os autores chamam atenção para a finalização da atividade, em que os alunos consideram quais modificações poderiam ser incrementadas no modelo, como por exemplo a temperatura. Além disso, o modelo matemático encontrado não foi validado, sendo que os autores apontam que a insistência didática na validação de soluções deve ser levada em consideração como foco ao ensinar modelagem matemática.*

Fonte: as autoras

Já o Quadro 25 aborda a Unidade de Significado US1.2.57.14 que destaca o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática em uma semana de modelagem. O problema foi proposto pelos professores aos estudantes. Para apresentarem uma possível resolução os estudantes fizeram pesquisas em livros na biblioteca, bem como em *sites* da *internet*. Desta forma, os estudantes encontraram diversas informações por exemplo, sobre a maturidade sexual, o período de incubação da doença sexualmente transmissível e sobre possíveis alterações no comportamento reprodutivo sob a influência da temperatura. Analisando os dados por meio da construção de gráficos, os estudantes elaboraram um modelo matemático, uma equação diferencial que considera o tamanho da população, a infestação e a atividade reprodutiva. Para resolver a equação diferencial os alunos usaram um modelo discreto usando recursividade chegaram a uma equação e puderam calcular o desenvolvimento da população de joaninhas ao longo de um ano. Os estudantes não realizaram uma validação para o modelo e resultado encontrado, eles focaram em refletir sobre modificações para aprimorar o modelo matemático por eles elaborado.

Quadro 26 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.58.14

Título: Using Modelling Experiences to Develop Japanese Senior High School Students' Awareness of the Interrelations Between Mathematics and Science

Código da US	**US1.2.58.14**

Unidade de Significado (US)

"Esta abordagem conseguiu aumentar uma classe de conhecimento dos alunos do 12º ano sobre as leis com a simulação de movimentos planetários e a criação conjunta de um "modelo de desenvolvimento matemático".

"Um exemplo dessa modelagem é o material didático usando a "Lei de Kepler" e a lei da gravitação universal, que será explicada na próxima seção. Este exemplo não é apenas para promover a modelagem. Queremos recomendar a prova da órbita elíptica do planeta como material matemático com pontos de vista físicos, porque a essência da ciência moderna está ligada à ciência kepleriana e newtoniana. [...] Primeiro de tudo, os alunos irão praticar usando os dados observacionais de Mercúrio. Isso será chamado de modelo elementar para entender a Lei de Kepler (Tabela 58.1, Figura 58.4).

Table. 58.1 The observational data of mercury (cf Kyoto Chigaku Kyoiku Kenkyukai 1993)

Year	Eastern max. angle (E)		Western max. angle (W)	
1990	April 14	20*	February 1	25*
	August 12	27*	May 31	25*
	December 6	21*	September 24	18*
1991	March 27	27*	January 14	24*
	July 25	27*	May 13	26
	November 19	22*	September 8	18*
			December 28	22
1992	March 10	18*	April 23	27*
	July 6	26*	August 21	19*
	November 1	24*	December 9	21*

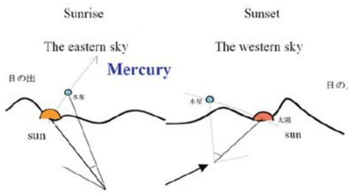


Fig. 58.4 The maximum angle (cf Kawasaki 2007)

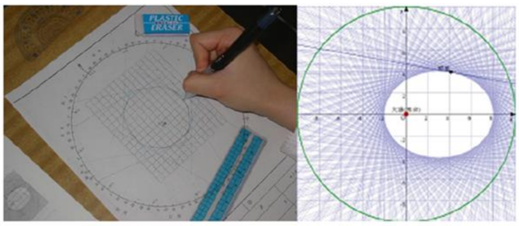


Fig. 58.5 Drawing in mercury orbit using tangential lines: (*right*) elementary model, (*left*) premodel (cf Kawasaki 2007)

A órbita elíptica de Mercúrio aparece como o envelope das linhas tangenciais, "1ª Lei de Kepler" (Fig. 58.5).

E, quando a duração dos períodos observacionais é igual, as áreas setoriais causadas pelo segmento que liga o sol a Mercúrio são iguais, "Segunda Lei de Kepler". Normalmente, apenas esse modelo deve ser satisfatório e, como resultado, achamos que os alunos confirmarão a imagem da Lei de Kepler. [...] mostramos a eles uma simulação de dois movimentos planetários (Fig. 58.6), e os fizemos julgar o que estava correto.

Esse modelo elementar não é suficiente para o conhecimento dos alunos amadurecer, mas é um bom resultado como modelo. Em breve, eles exigirão um novo modelo. Por isso, chamamos de pré-modelo que se prepara para um novo modelo. É necessário introduzir a equação diferencial.

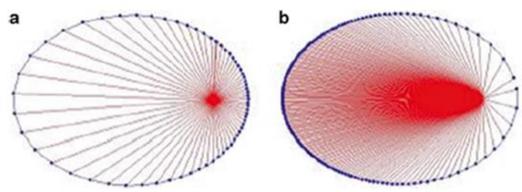
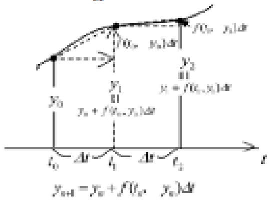


Fig. 58.6 (a) Uniform motion (b) Planetary motion (cf Kawasaki 2007)

Fig. 58.7 Euler method



A equação das Leis de Kepler pela Lei de Newton é uma equação diferencial linear de segunda ordem com constante escalar. Isso é muito difícil e os alunos não conseguem encontrar o novo modelo apenas com suas próprias investigações. [...] o primeiro autor tentou ajudar os alunos a entender, usando o método de análise de valores numéricos por meio de programação de computadores. [...] realização das Leis de Kepler e da Lei de Newton desenhando a curva da solução usando o método de Euler (Fig. 58.7).

A curva da solução pelo método de Euler tem a característica de que o erro aumenta quando o valor da entrada aumenta, e os gráficos se separam (Fig. 58.8).

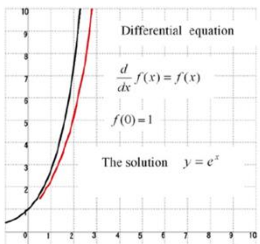
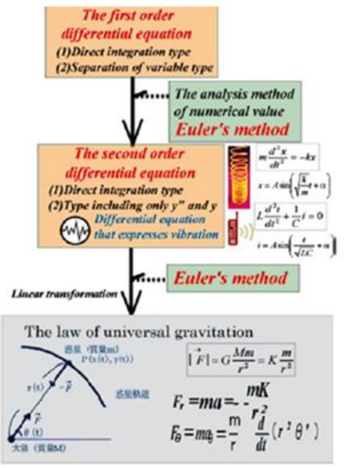


Fig. 58.8 By Euler method

<table>
<tr>
<td></td>
<td>A Figura 58.9 é o diagrama do sistema mostrando como as equações diferenciais são introduzidas. Uma característica disso é o tratamento do movimento harmônico simples na física do ensino médio pela equação diferencial. Esta equação diferencial de segunda ordem refere-se à lei da gravitação universal.
Outro conteúdo matemático necessário inclui coordenadas polares e transformações lineares (ver Fig. 58.10).


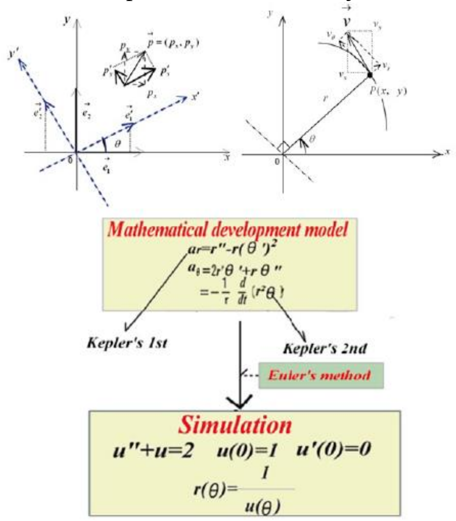
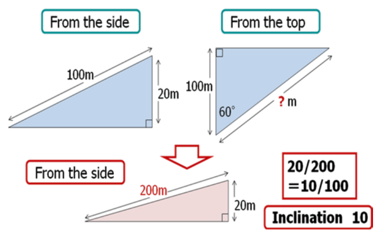
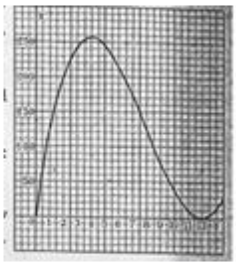


Fig. 58.9 System diagram to introduce differential equations (Kawasaki 2007) Fig. 58.10 Transform of coordinates and mathematical development model (Kawasaki 2007)</td>
</tr>
<tr>
<td>Asserção Articulada da US</td>
<td>A atividade foi desenvolvida com alunos do 12º ano em uma escola do Japão. A atividade de modelagem sobre movimento planetário foi proposta pelo professor. Os professores desenvolveram um material didático usando a Lei de Kepler, com o objetivo de recomendar a prova da orbita elíptica de um planeta como material matemático aliado a física. O modelo matemático desenvolvido com os alunos necessitou, além do uso das leis da física, o uso de trigonometria, introdução a equação diferencial, além de métodos numéricos para resolução da equação usando o computador, o uso de coordenadas polares e transformações lineares e equação polar da elipse. Os alunos desenvolveram o modelo matemático usando os dados do planeta mercúrio. Ao final do desenvolvimento foi solicitado, pelos professores, que os alunos respondessem a um questionário para avaliar o desenvolvimento da atividade, os alunos entenderam bem o histórico de matemática da Lei de Kepler, porém não podiam interpretar os novos conceitos matemáticos introduzidos.</td>
</tr>
</table>

Fonte: as autoras

Na Unidade de Significado US1.2.58.14 do Quadro 26 destaca-se uma atividade desenvolvida com o 12º ano em uma escola no Japão. Esta atividade consiste em estudar a simulação de movimentos planetárias. A atividade de modelagem é o material didático usando a “Lei de Kepler” e a lei da gravitação universal, como os alunos tiveram de ser introduzidos a conteúdos que não haviam tido contato anteriormente. O ponto principal da atividade era provar a órbita elíptica de um planeta e para praticar os alunos utilizaram os dados do planeta mercúrio. Como modelo matemático, foi determinada uma equação diferencial linear de segunda ordem com constante escalar, sendo necessária a intervenção do professor usando o método de análise de valores numéricos por meio de programação de computadores, para o desenvolvimento do modelo matemático, foi necessário ainda, o uso de coordenadas polares e transformações lineares e equação polar da elipse. Para finalizar a atividade, foi solicitado que os alunos respondessem a um questionário sobre o uso do material didático “Lei de Kepler”, sendo que os alunos comentaram a dificuldade em entender os conceitos matemáticos novos que foram introduzidos durante o desenvolvimento da atividade.

Quadro 27 - Descrição das Unidades de Significado US1.2.64.14

Título: Making Connections Between Modelling and Constructing Mathematics Knowledge: An Historical Perspective	
Código da US	**US1.2.64.14**
Unidade de Significado (US)	A situação do mundo real é usada para expandir o número de conceitos, como definir a regra da multiplicação de números negativos. Vamos considerar como determinar o código (mais ou menos) se você multiplicar um número positivo ou negativo por um número negativo. Há uma inclinação na direção leste-oeste. Quando vamos para leste, a altura é acrescida em "0,2 m" por "1 m". Se formos a leste "x m" na direção horizontal, a altura é acrescida "(0.2 × x) m". No próximo exemplo, há um declive diferente quando vamos para leste, a altura é aumentada "-0.2 m" por "1 m". Se formos a leste "x m" na direção horizontal, a altura é aumentada "(-0,2 x x) m". Gostaríamos de calcular a altura aumentada pela fórmula anterior quando a distância horizontal, x, é um número negativo. Como podemos definir a regra de multiplicação, ou seja, número negativo vezes número negativo? O problema de confeccionar uma caixa de prisma quadrada cortando os quadrados do mesmo tamanho das quatro bordas do quadrado é tratado 3 vezes.  Um quadrado em que o comprimento de um lado é de 10 cm. Confeccionando uma caixa de prismas cortando o mesmo tamanho de quadrados nos quatro cantos dela, faça uma tabela sobre a relação entre o lado de cada quadrado  cortado e o volume. Descubra o comprimento de um lado de cada quadrado quando o volume é 50 cm^2 e 70 cm^2. Um quadrado em que o comprimento de um lado é de 60 cm. Eu farei uma caixa de prisma cortando o mesmo tamanho de quadrados nos quatro cantos dela. Qual é o comprimento lateral de cada quadrado cortado para que o volume se torne o máximo? De um quadrado em que o comprimento de um lado é de 24 cm. Eu farei um de prisma ou esse volume se tornará 1L cortando o mesmo tamanho de quadrados nos quatro cantos dele.  Quando o comprimento de um lado é x cm, a fórmula é $(24-2x)^2$ e a equação é $x(24-2x)^2 = 1000$; $x(12-x)^2 = 250$. Quando nós fixamos $y = x(1-x)^2$, o gráfico dessa função é mostrado como a figura a seguir. Por gráfico, podemos encontrar (ou descobrimos) que os dois valores requeridos de x são 3 <x <4 e 4 <x <5. Vamos examinar o valor de x que é próximo de 3. Podemos expandir a função com (x-3), a função se torna a seguinte: $y = 243 + 27(x-3) - 15(x-3)^2 + (x-3)^3$ A equação é expressa como: $27(x-3) - 15(x-3)^2 + (x-3)^3 = 7$. Desconsiderando $(x-3)^2, (x-3)^3$, $27(x-3) = 7$. Resulta x=3.26. a fase de matematização deve ser alterada de acordo com a matemática (dos alunos), conhecimento e habilidade, tratando as mesmas situações problemáticas repetidamente. Vamos criar métodos para medir a altura de uma montanha usando o ângulo entre uma linha do meu olho até o topo, a montanha e uma linha horizontal, e o ângulo entre uma linha do meu olho e a sombra do topo de uma montanha. Eu estou de pé no chão e olhando para o topo da torre e uma sombra dele na lagoa. Há um ângulo de 30 graus entre uma linha a partir do topo da torre e uma linha horizontal, e há um ângulo de 40 graus entre uma linha do meu olho até a sombra da parte superior do cabo na ponta e uma linha horizontal. A altura da localização do meu olho da superfície da água é de 3m. Encontre a altura do cabo a partir da superfície da água, construindo a figura geométrica.

	É impossível medir a distância diretamente da ilha até o outro lado do mar, apesar de desejarmos conhecê-la. Do outro lado do rio, podemos ver tanto o portal à distância do santuário xintoísta quanto a torre de fogo. Vamos considerar métodos para medir a distância entre eles, mantendo-se longe deles. Existem dois casos gerais quando medimos de acordo com os objetivos. O primeiro caso é medir com precisão e o outro é medir imediatamente. Por exemplo, quando gostaríamos de saber o tempo levado até aqui para o fio de alta voltagem na frente ou se é possível medir a distância a olho primeiro, calcule o tempo. Assim, é necessário para nós fazer um dispositivo e entrar em prática. Em outras ocasiões, os escritores de livros didáticos usam uma sequência de questões do mundo real usando tipos de ideias científicas relacionadas ou similares. Por exemplo, uma subunidade denominada "Linhas de contorno" está localizada na unidade "Gráfico e fórmula" na 7ª série. Em um problema, baseado em linhas de inclinação, o conceito de cosseno é introduzido e aplicado da seguinte maneira: Quando subimos 100 m na encosta, a altura é acrescida em 20 m. [Problema] Se escalarmos em um ângulo de 60 ° com a linha reta, criamos uma inclinação diferente (mais fácil) o caminho não é reto, mas é uma sucessão de ziguezagues.) (Fig. 64.11 inferior). Qual é a nova inclinação nesta escalada? ”(Veja a Fig. 64.12 para solução).
Asserção Articulada da US	*O artigo apresenta várias situações-problema presentes em livros didáticos do Japão. As situaões-problema envolvendo situação real como uma maneira de trabalhar conceitos matemáticos. No caso da confecção de um prisma, a situação já apresenta um modelo matemático e envolve um problema de otimização.*

Fonte: as autoras

No Quadro 27, a Unidade de Significado US1.2.64.14 destaca exemplos de situações-problema retiradas de livros didáticos que podem ser trabalhadas como atividades de modelagem matemática. O cálculo de distância, altura, ângulos, bem como a otimização de espaço são conceitos presentes nas situações. As situações abordam ilustrações com formas geométricas, bem como ilustrações de contextos fictícios como no exemplo da montanha e da encosta. Os autores não apresentam como essas atividades poderiam ser inseridas em sala de aula, bem como o desenvolvimento destas como modelagem matemática. Nada se diz sobre os modelos matemáticos, interpretação e validação dos dados.

Quadro 28 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.66.14

Título: Making Connections Between Modelling and Constructing Mathematics Knowledge: An Historical Perspective	
Código da US	**US1.2.66.14**
Unidade de Significado (US)	Em alinhamento com os objetivos do plano de estudos, os critérios de avaliação, como aqueles para uma tarefa baseada em populações de coalas na Austrália, usando informações do site da Australian Koala Foundation (https://www.savethekoala.com/) (ver Fig. 66.1) são desenvolvidos pelos professores nas escolas. Para avaliar os esforços de modelagem dos alunos, os seguintes critérios foram usados como base para a concessão de crédito: • Adequação da interpretação dos dados • Razoabilidade das suposições • Qualidade do modelo matemático para mudanças populacionais • Justificativa de escolha de valores para parâmetros do modelo • Discussão dos pontos fortes e fracos do modelo • Avaliação do modelo e das mudanças recomendadas para manter uma população adequada

	As páginas anexas (dados das páginas do Koala Facts do Centro de Mídia da Fundação Koala, na Austrália, e um artigo de jornal de Harbutt, 2004) fornecem informações sobre as populações de coalas na Austrália. Desenvolva um modelo matemático baseado nas matrizes de Leslie para representar as mudanças populacionais da população de coalas. Escolha uma região em que a população possa estar aumentando, investigue o crescimento em pelo menos 10 anos e depois use isso para discutir maneiras de manter uma população que o ambiente possa sustentar. Fig. 66.1 Koala task
Asserção Articulada da US	*Os autores apresentam uma tarefa de modelagem matemática que pode ser implementada em avaliações no ensino médio. A tarefa de modelagem matemática envolve um contexto real, a respeito da população de Coalas na Austrália.*

Fonte: as autoras

A Unidade de Significado US1.2.66.14 do Quadro 28 diz a respeito de uma atividade de modelagem matemática proposta pelo professor. Levando em conta a população de coalas na Austrália, os alunos deveriam investigar o crescimento da população considerando o tempo de dez anos, além de discutir maneiras para sustentáveis para que essa população esteja em equilíbrio. No texto da atividade, foram fornecidos dados coletados de uma instituição da Austrália. O modelo matemático que os alunos deveriam desenvolver tinha de ser baseado nas matrizes de Leslie para representar as mudanças populacionais de coalas. Durante o desenvolvimento desta atividade os alunos foram avaliados em relação a interpretação dos dados, sensatez das suposições, qualidade do modelo matemático, discussão dos pontos fortes e fracos do modelo e avaliação do modelo e das mudanças recomendadas para o equilíbrio da população. Os autores não apresentam no artigo as construções dos alunos durante o desenvolvimento da atividade.

Quadro 29 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.2.15

Título: Community: An ICTMA Journey—The Ken Houston Inaugural Lecture	
Código da US	**US1.2.2.15**
Unidade de Significado (US)	O exemplo foi destilado de um problema discutido em seu endereço e publicado na fonte dada. Está incluído aqui como representante da abordagem de modelagem que caracterizou o domínio da comunidade ICTMA. A análise do professor Geoffrey Taylor sobre o teste da bomba atômica de 1945 no Novo México, em que ele estimou a energia liberada na explosão, seguiu a publicação em Revista Life em 1947, de fotos da onda de explosão em expansão. A análise não exige mais do que a matemática escolar avançada, mas se baseia na capacidade de formular um problema matemático a partir de uma situação da vida real.
Asserção Articulada da US	*A atividade é um exemplo apresentado por Pedley (2005) em um fórum de discussão sobre modelagem matemática. Essa atividade inclui uma abordagem de modelagem que caracterizou o domínio da comunidade ICTMA.* *A situação-problema é real, que versa sobre uma estimativa da energia liberada em uma explosão da bomba atômica realizada em 1945 no Novo México. A análise dessa situação-problema se baseia na formação de um problema matemático a partir de uma situação real.*

Fonte: as autoras

A Unidade de Significado US1.2.2.15, apresenta uma situação-problema real a respeito da análise do professor Geoffrey Taylor sobre o teste da bomba atômica no ano de 1945 no Novo México (Quadro 29). Neste teste estimou-se a energia liberada na explosão seguindo uma publicação da revista Life em 1947 com fotos da onda de explosão em expansão. O autor considera que a análise desta situação não exige mais do que a matemática escolar avançada, e salienta a capacidade de formular um problema matemático a partir de uma situação da vida real. Uma possível implementação desta atividade em sala de aula, bem como o desenvolvimento do modelo matemático e uma interpretação da situação não são abordados no texto.

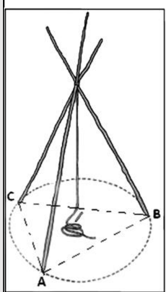
Quadro 30 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.3.15

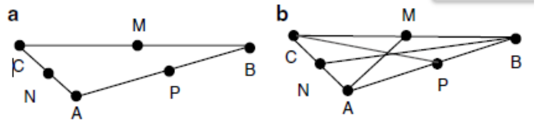
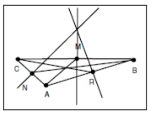
Título: Modelling from the Perspective of Commognition – An Emerging Framework	
Código da US	**US1.2.3.15**
Unidade de Significado (US)	Os estudantes participaram de um estudo com o objetivo de investigar o uso potencial de problemas realistas de Fermi para introduzir a noção de modelagem matemática no nível secundário (ensino médio). A tarefa de modelagem, The Snow Clearance Problem é sobre a liberação de neve de um campo de futebol, um problema motivado em conexão com o 2010 jogo de futebol de abertura na Suécia, quando um clube de futebol local teve que pedir a sua apoiantes para ajudar a limpar toda a neve do campo de futebol para que o jogo de abertura para acontecer. Se a neve for escavada em duas pilhas nos dois respectivos lados mais curtos do campo, quão grandes serão as pilhas? O que seria cada pilha pesa? Suas estimativas baseiam-se na experiência pessoal de Viktor em ter visitado um campo de futebol que era mais longo do que a pista de corrida de 100 m situada ao lado do campo. Eles calcularam o volume total de neve em 1.200 m3 (600 m3 em cada extremidade do campo de futebol) e expressaram surpresa por não ser uma grande quantia.
Asserção Articulada da US	*A atividade foi desenvolvida com alunos do ensino médio e envolve o uso de problemas realistas de Fermi. Os problemas propostos são abertos e envolvem a promoção de discussões com conexões no mundo real. O modelo matemático expressa uma equação para calcular o volume da pilha de neve, considerando a pilha como meio cilindro. Para responder o problema, os alunos formularam diferentes conjecturas baseadas em experiências pessoas em dados da Matemática Física e Química.*

Fonte: as autoras

Já no Quadro 30, a Unidade de Significado US1.2.3.15 destaca uma atividade desenvolvida com alunos do ensino médio. Nesta unidade a atividade “limpeza da neve” é caracterizada pelo autor como um problema de Fermi. O problema sobre a liberação de neve de um campo de futebol foi inspirado em um jogo de futebol ocorrido em 2010 na Suécia, em que um clube de futebol local teve que pedir ajuda à torcida para limpar toda a neve do campo para que o jogo de abertura pudesse acontecer. O problema consiste em saber qual o tamanho das pilhas de neve e quanto elas pesam. Para resolver este problema, os alunos tiveram de realizar diversas estimativas que foram baseadas em suas experiências pessoais. Os alunos calcularam o volume de neve e utilizaram algumas formas geométricas para encontrar o peso das pilhas de neve. A unidade destaca que os alunos discutiram os resultados encontrados, bem como a existente de discursos com base em conhecimentos matemáticos, físicos e químicos.

Quadro 31 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.6.15

Título: Methodology for Ethnomathematics	
Código da US	**US1.2.6.15**
Unidade de Significado (US)	A atividade de demarcação examinou o método de cubação de terras, que é uma prática matemática tradicional aplicada pelos participantes desse movimento. O uso da prática de cubação da terra como proposta pedagógica para a elaboração de atividades de ensino e aprendizagem da matemática mostra a importância da contextualização de problemas no ambiente de aprendizagem da etnomodelagem por meio da elaboração de etnomodelos. Um desses problemas indica que é necessário calcular a área de terra, que tem um formato quadrilateral que mede 114 metros x 152 metros x 90 metros x 124 metros ” O conhecimento matemático dos sem-terra pode ser representado por um modelo que transforma a forma do terreno em um retângulo de 138 m × 102 m com uma área de 14.076 m. O modelo dessa prática matemática pode ser explicado pelo seguinte etnomodelo: • Transforme a forma do quadrilátero irregular em um retângulo cuja área pode ser facilmente determinada através da aplicação da fórmula A = b • h. • Determine as dimensões do retângulo calculando a média dos dois lados opostos do quadrilátero irregular. • Para determinar a área deste quadrilátero irregular, é necessário determinar a área do retângulo. $Base = \frac{152+124}{2} = 138 \text{ m}$ $Height = \frac{114+90}{2} = 102 \text{ m}$ $A = b \cdot h$ $A = 138 \bullet 102$ $A = 14{,}076 \text{ m}^2$ D'Ambrosio (2002) observou um exemplo de etnomatemática que nos oferece uma metodologia de modelagem matemática, com um grupo de professores brasileiros que estudou a produção de vinho. A motivação era encontrar o volume de barris de vinho e aplicar as técnicas aprendidas pelos ancestrais dos produtores de vinho que vieram para o sul do Brasil como imigrantes italianos no início do século XX. Para construir um barril de vinho de madeira com volume pré-estabelecido, é necessário que os produtores de vinho cortem as tiras de madeira para se encaixarem perfeitamente. A palavra tipi da língua Sioux refere-se a uma habitação cônica comum entre os povos da pradaria da América do Norte. A geometria espacial é inerente à forma da tipi que foi usada para simbolizar o universo em que as pessoas viviam. As pessoas nômades da pradaria observaram que a fundação tripodal parecia estar perfeitamente adaptada ao ambiente hostil em que viviam.  A matematização nos ajuda a explicar por que um tripé é mais estável que um quadripodal ou estrutura de quatro patas. Imagine três pontos, A, B e C, que não são colineares. Há um número infinito de planos que passam pelos pontos A e B que contêm linha AB. Apenas um desses planos também passa pelo ponto C. Três pontos determinam um plano se, e somente se, eles não forem colineares. Em termos de geometria, isso pode ser explicado usando o postulado plano, que afirma que através de três não-colineares, existe exatamente um plano. A base formada pelo tripé é ΔABC, na qual os pontos médios de cada um dos lados são os pontos M, N e P (Fig. 6.6a). A este respeito, é possível conectar o ponto médio de cada lado oposto de ΔABC a cada um dos seus vértices, que formam os segmentos de linha AM, BN e CP. Esses segmentos de linha formam três medianas que se cruzam em apenas um ponto chamado centróide, que é o ponto de equilíbrio ou centro de gravidade de ΔABC (Fig. 6.6b).

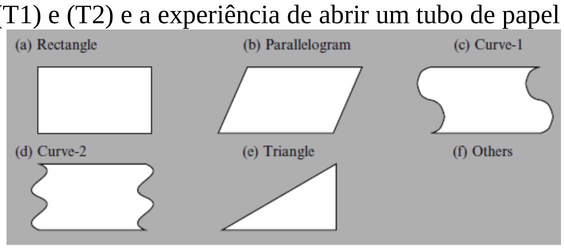
	 **Fig. 6.6** (**a**) The tripod base of the Tipi. (**b**) The three medians of ΔABC **Fig. 6.7** The circumcentre of ΔABC  É possível usar conceitos geométricos para determinar como os Tipi determinam o centro da base circular do Tipi. Usando o triângulo formado pelo tripé, é possível traçar cada um dos lados do triângulo usando linhas que passam perpendicularmente através dos pontos médios de cada um dos seus lados. Usando o triângulo formado pelo tripé, é possível traçar cada um dos lados do triângulo usando linhas que passam perpendicularmente através dos pontos médios de cada um dos seus lados. Pode ser mostrado que estas linhas são bissectrizes perpendiculares. Essas bissectrizes são interceptadas no mesmo ponto, que é uma distância igual dos vértices do triângulo. Este ponto é chamado de circunferência.
Asserção Articulada da US	*Apresentam uma proposta de atividade de etnomodelagem e mostra o seu desenvolvimento. A Atividade baseia-se em uma situação real, prática de cubação de terra de um movimento de agricultores no Brasil. Os autores denominam o modelo matemático como etnomodelo. O etnomodelo é para o problema considerado é explicitado por meio da transformação de figuras geométricas, com áreas equivalentes, e de uma fórmula algébrica para calcular a área de terra, que tem um formato quadrilateral. O artigo apresenta ainda um outro procedimento da prática matemática dos sem-terra que pode ser explicado por outro etnomodelo, envolvendo uma construção geométrica que consiste em transformar uma figura geométrica em outra figura e o lado desta nova figura é calculado adicionando as dimensões da figura anterior e dividindo pelo número de lados da figura anterior.* *Os modelos matemáticos são considerados eficientes se apresentam um resultado aproximado para o problema, de modo que satisfaça as necessidades da prática matemática do grupo cultural específico.* *A construção do modelo matemático baseia-se em conhecimentos matemáticos para fornecer uma explicação para o problema em estudo. Por fim, a resposta para o problema envolve uma análise dos modelos matemático em relação a situação-problema, as técnicas, costumes, crenças, hábitos da cultura em que a situação é baseada.*

Fonte: as autoras

Na Unidade de Significado US1.2.6.15 destaca-se a atividade “modelagem do Tipi” considerada uma atividade de etnomodelagem, cuja construção de um abrigo natural do tipo Tipi é estudada (Quadro 31). Ao estudar a construção desse abrigo matematicamente é possível explicar por que um tripé é mais estável que um quadripodal ou estrutura de quatro patas. Todos os conceitos geométricos utilizados para o estudo foram explicitados pelos autores. É característico das atividades abordar as construções matemáticas: escolar e a convencionada naquela determinada cultura. Após modelar a construção por meio da matemática escolar, as ideias matemáticas que estavam implícitas no conhecimento matemático do povo Sioux foram apresentadas. E diante da exposição dos dois conhecimentos, os autores concluem que a compreensão Sioux da força da construção tripodal é um conhecimento geral e universal válido compatível com a matemática ocidental conhecimento.

Os Quadros 32 à 35 contém Unidades de Significado referente o capítulo 7 do ICTMA 15 e dizem respeito ao desenvolvimento das mesmas atividades de modelagem matemática.

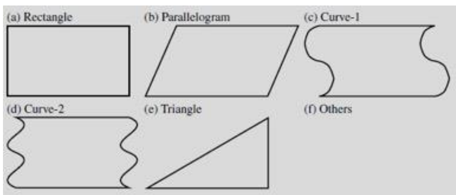
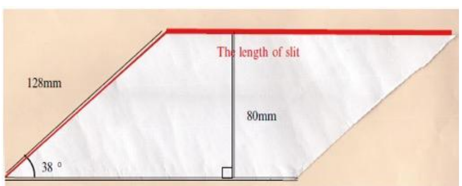
Quadro 32 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.7.15

Título: Dual Modelling Cycle Framework for Responding to the Diversities of Modellers	
Código da US	**US1.2.7.15**
Unidade de Significado (US)	Mostramos três tipos de ciclos de modelagem baseados em a estrutura do ciclo de modelagem dual através do exemplo de um ciclo de modelagem baseado em uma tarefa de tanque de óleo, e outro ciclo de modelagem baseado na tarefa papel higiênico tubular. Gostaríamos de medir o comprimento de um corrimão em espiral de um tanque de óleo pesado. No entanto, está fora dos limites exceto para as pessoas envolvidas com o controle de segurança do tanque de óleo. Portanto, não podemos medir com uma fita métrica diretamente. Descobrimos os tamanhos do diâmetro (9.766 m) na parte inferior e a altura (10.772 m) do tanque de óleo, falando com as pessoas em questão. Com base nesses dados, decidimos encontrar o comprimento do corrimão em espiral do tanque de óleo. Explicamos o uso de um tubo de papel higiênico como modelo semelhante para um corrimão em espiral do tanque de óleo. Alguns modeladores podem abordar a questão como a nova tarefa localizada na modelagem ciclo de um tubo de papel higiênico: "Quanto tempo dura uma espiral de um tubo de papel higiênico?" (T1) Você já abriu um tubo de papel higiênico? (Sim ou não) (T2) Que tipo de forma você acha que irá formar quando o tubo de papel higiênico for aberto? ao longo de sua fenda? Por favor, selecione as seguintes formas e escreva também sobre o motivo para esta seleção. Houve algumas respostas para o (a) retângulo para a questão (T2), embora o desenvolvimento de um cilindro seja aprendido na matemática escolar. Não houve relação característica entre as respostas às questões (T1) e (T2) e a experiência de abrir um tubo de papel higiênico.  Para resolver a Tarefa do Tanque de Petróleo, uma vantagem de usar um tubo de papel higiênico semelhante ao tanque de óleo é que podemos cortá-lo e abri-lo facilmente. Depois de abri-lo, os modeladores têm que medir dados para o paralelogramo resultante. Assim, os modeladores decidiram sobre as variáveis necessárias para resolver a tarefa do tanque de óleo. Existem dois casos para decidir entre uma base do paralelogramo a partir do tubo de papel higiênico aberto. Podemos medir o comprimento da fenda como 183 mm diretamente. O ângulo θ é necessário para explorar o seguinte relacionamento: sinθ=80128=0.625. A partir desse valor, o ângulo θ é de quase 38 °. Como alternativa, podemos medir esse ângulo usando um transferidor diretamente. Além disso, o comprimento do diâmetro na parte inferior de um tubo de papel higiênico é 41 mm e a altura do tubo é de 112 mm. Houve algumas respostas para o (a) retângulo para a questão (T2), embora o desenvolvimento de um cilindro seja aprendido na matemática escolar. Não houve relação característica entre as respostas às questões (T1) e (T2) e a experiência de abrir um tubo de papel higiênico.
Asserção Articulada da US	*Os autores apresentam uma atividade que envolve duas tarefas de modelagem matemática, em que uma tarefa decorre da outra, com situações semelhantes. O primeiro problema apresentado envolve uma situação real (medir o comprimento de um corrimão em espiral de um tanque de óleo pesado) em que os dados foram apresentados de acordo com a demanda dos modeladores durante a resolução do problema. A segunda situação (tubo de papel higiênico) envolveu a construção de*

	um modelo matemático feito a partir de relações entre construções geométricas e uma função trigonométrica. A resolução dessa segunda tarefa possibilitou a obtenção de dados, inviáveis de serem obtidos na primeira tarefa. Por meio desses novos dados foi possível responder o problema da primeira tarefa (tanque de óleo).

Fonte: as autoras.

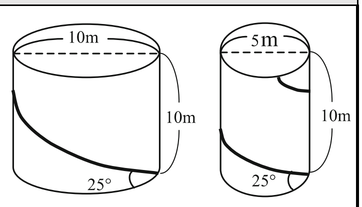
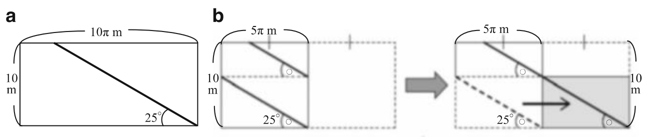
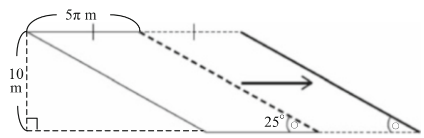
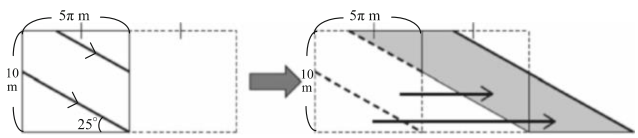
Quadro 33 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.17.15

Título: Evidence of a Dual Modelling Cycle: Through a Teaching Practice Example for Pre-service Teachers	
Código da US	**US1.2.17.15**
Unidade de Significado (US)	Realizamos duas aulas com professores de pré-serviço (N = 66) que eram alunos de graduação, estudantes universitários se preparando para ser professores de matemática. A tarefa do tanque de óleo é uma tarefa de modelagem inicial e fornecemos ao modelador a seguinte segunda tarefa, a Tarefa Tubo Papel Higiênico, para explorar o comprimento de um corrimão espiral de um tanque de óleo. Nós gostaríamos de medir o comprimento de um corrimão espiral de um tanque de óleo pesado. No entanto, está fora dos limites, exceto para pessoas interessadas no controlo de segurança do tanque de óleo. Portanto, não podemos medir com uma fita métrica diretamente. Descobrimos os tamanhos do diâmetro (9.766 m) na parte inferior e na altura (10.772 m) de um tanque de óleo falando com as pessoas em causa. Com base nestes dados, decidimos encontrar o comprimento do corrimão espiral do tanque de óleo.  (O1) Que tipo de métodos você usa para responder? (O2) Vamos realmente responder. Tarefa de tubo de papel higiênico (T1) Você já abriu um tubo de papel higiênico? (Sim ou não) (T2) Que tipo de forma você acha que vai se formar quando o tubo de papel higiênico é aberto ao longo de sua fenda? Por favor, selecione as seguintes formas e escreva também sobre o motivo dessa seleção. Em primeiro lugar, os estudantes universitários resolveram o problema (O1) da Tarefa do Tanque de Petróleo. Nesta prática de ensino, os alunos foram convidados a prenuncia a sua própria solução, e o professor perguntou: "Existem coisas semelhantes a um corrimão em espiral do tanque de óleo? ”O professor pretendia que os alunos implementassem uma transição do ciclo de modelagem de um tanque de óleo. Depois disso, o professor forneceu um tubo de papel higiênico para cada aluno. Em segundo lugar, os alunos abordaram os problemas (T1) e (T2) da tarefa do tubo de papel higiênico.  Em seguida, os alunos abriram o tubo de papel higiênico ao longo de sua fenda. A forma do tubo de papel higiênico aberto é um paralelogramo e é fácil de medir os comprimentos (a fenda é de 183 mm) e os ângulos. Em terceiro lugar, os alunos abordaram o problema (O1) novamente e o problema (O2) do Tarefa do tanque de óleo com base nesses dados de um tubo de papel higiênico (Fig. 17.2). [...]os dados necessários para explorar o comprimento de um corrimão em espiral de uma inclinação 26 ° e altura do solo ao corrimão em espiral (1.050 m), além dos dados iniciais (diâmetro do tanque é 9.766 m na parte inferior e a altura é 10.772 m) que é dado na declaração da tarefa. A duração da projeção no terreno desde o início até ao fim do corrimão em espiral é  

	$$\frac{10,772-1,050}{\tan 26^{\circ}}=\frac{9,722}{0.4877}=19,934.39 \text{ mm.}$$ Assim, o comprimento de um corrimão espiral $$\frac{10,772-1,050}{\sin 26^{\circ}}=\frac{9,722}{0.4384}=22,176.09 \text{ mm.}$$ O comprimento real determinado usando uma fita métrica foi de 19,4 m. (19 400 mm).
Asserção Articulada da US	*A atividade descrita foi desenvolvida com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática. Inicialmente, os autores apresentaram uma primeira tarefa de modelagem matemática e posteriormente uma segunda tarefa. A primeira tarefa de modelagem matemática (Tanque de óleo) envolve uma situação real e o problema proposto tem como objetivo calcular a medida do comprimento de corrimão espiral do tanque. Para responder o problema, os autores apresentam uma segunda tarefa, que possibilita desenvolver um modelo imaginário para a primeira tarefa, por meio de um modelo matemático. Para construir o modelo matemático, os alunos fizeram construções geométricas e relações trigonométricas. A partir do modelo matemático produzido na segunda atividade, os alunos produziram uma resposta para a primeira atividade.*

Fonte: as autoras

Quadro 34 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.15.16

Título: How Do Students Share and Refine Models Through Dual Modelling Teaching: The Case of Students Who Do Not Solve Independently	
Código da US	**US1.2.15.16**
Unidade de Significado (US)	Tarefa do tanque de óleo (tarefa inicial) Existem vários tipos de tanques de óleo. Suas alturas são iguais, mas seus comprimentos de diâmetros são diferentes. Os comprimentos dos corrimões em espiral são iguais ou não? Como condições, os ângulos para subir os corrimões em espiral são todos iguais. Tarefa de tubo de papel higiênico (tarefa semelhante) É impossível abrir um tanque de óleo ao longo do corrimão espiral real. Em vez disso, podemos pegar um tubo de papel higiênico com formato semelhante a um tanque de óleo, que deve ser aberto ao longo de sua fenda. Considere o que seria a forma de um tubo de papel higiênico aberto. Fig. 15.2 3D models of oil tanks   Fig. 15.3 The rectangle model: (a) original models, (b) half circumference models Fig. 15.4 The parallelogram model   Fig. 15.5 Relationship between the rectangle model and the parallelogram model O material de ensino consiste em uma tarefa de tanque de óleo [tarefa OT] (tarefa inicial) e uma tarefa de tubo de papel higiênico [tarefa TP] (tarefa semelhante). No primeiro ciclo de modelagem da tarefa OT, os autores montaram modelos 3D de tanques de óleo, como na Fig. 15.2. Um dos modelos 2D de tanques de óleo é um modelo de retângulo (Fig. 15.3). Neste caso, as espirais de ambos os tanques são as mesmas usando ideias matemáticas de transformação equivalente e translação de espiral. No segundo ciclo de modelagem da tarefa TP, percebemos que os modelos 2D de tanques de óleo não são apenas modelos retangulares, mas também modelos de paralelogramo (Fig. 15.4). No caso de um modelo de paralelogramo, as espirais de ambos os tanques são as mesmas, o que é suportado pela ideia matemática de tradução do lado oblíquo.

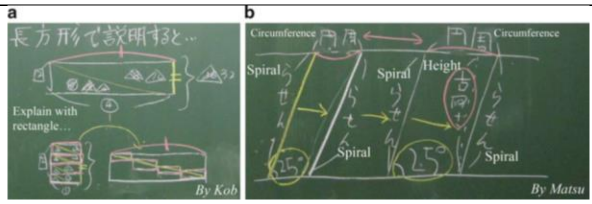


Fig. 15.6 (a) The rectangle models (b) The parallelogram models

Através da discussão com os estudantes, eles desenharam modelos retangulares 2D de tanques de óleo para resolver a tarefa do AT. No entanto, eles não poderiam resolvê-lo porque um tanque de óleo é grande demais para abrir diretamente. Assim, o professor forneceu tubos de papel higiênico como formas semelhantes ao tanque de óleo e fez modelos de paralelogramo 2D na tarefa TP. No final da segunda lição, eles abordaram a tarefa do TO novamente, com muito se referindo à tarefa do TP.

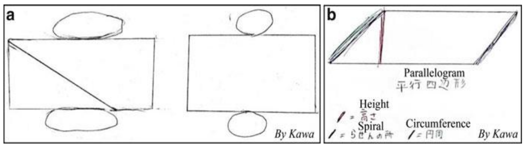


Fig. 15.7 (a) The rectangle models (b) The parallelogram model

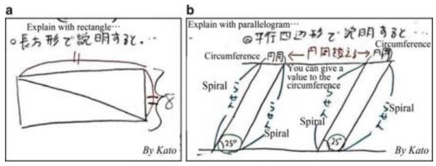


Fig. 15.10 (a) The unaccepted rectangle model (b) The accepted parallelogram model

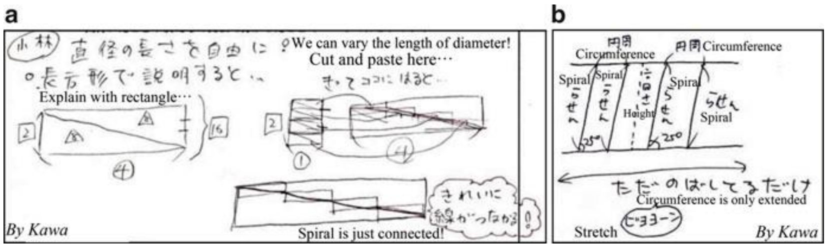


Fig. 15.8 (a) The accepted rectangle model (b) The accepted parallelogram model

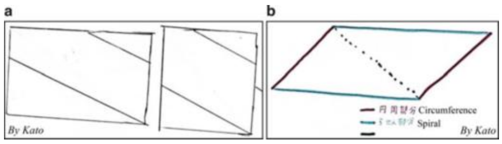
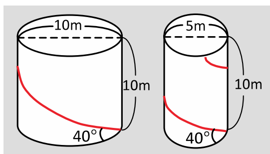


Fig. 15.9 (a) The rectangle models (b) The parallelogram model

Asserção Articulada da US	*A situação-problema envolve uma situação real, em que o problema visa determinar o comprimento de um corrimão de um tanque de óleo. Para isso o professor trabalhou com uma situação que apresenta um modelo similar a primeira situação. A construção do modelo matemático para a segunda situação envolve construções geométricas. Como resposta, os alunos generalizaram o modelo matemático para a primeira situação-problema.*

Fonte: as autoras

Quadro 35 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.34.17

Título: The Dual Modelling Cycle Framework: Report on an Australian Study	
Código da US	**US1.2.34.17**
Unidade de Significado (US)	23 alunos de uma turma do ano 6 em uma escola primária australiana engajados com duas tarefas de modelagem As tarefas foram projetadas para auxiliar no desenvolvimento do entendimento do estudante sobre a estrutura geométrica de uma hélice comum na parte externa de um cilindro.  Tarefa do tanque de óleo (TASK1) Existem vários tipos de tanques de óleo. Suas alturas são iguais, mas seus comprimentos de diâmetros são diferentes. O comprimento das escadas em espiral nesses tanques de óleo é igual ou não? Como o ângulo da escada em espiral subiu para 40 para cada um.

	Tarefa de tubo de papel higiênico (TASK2) É impossível abrir ao longo da escada em espiral real do tanque de óleo. Podemos usar um tubo de papel higiênico como uma forma semelhante a um tanque de óleo, pois ele pode ser aberto ao longo de sua fenda para mostrar a forma 2D. Considere qual seria a forma de um tubo de papel higiênico aberto entre o modelo de paralelogramo e o modelo retangular. Foi mostrada uma imagem dos tanques de óleo onde os tanques tinham diâmetros diferentes e uma escada em espiral do chão ao topo. A fotografia incluiu vários caminhões de bombeiros com bombeiros e engenheiros em discussão ao pé dos tanques de óleo. O contexto foi apresentado como os bombeiros precisando saber qual escada em espiral os levaria ao topo primeiro, já que precisavam escalar o topo de um dos tanques o mais rápido possível para resfriá-los, porque corriam o risco de explodir. Ficou claro para todos que havia vários tipos de tanques de óleo com suas alturas iguais, mas seus diâmetros diferentes. Os estudantes foram perguntados: “Os comprimentos das escadas em espiral nesses tanques de óleo são os mesmos ou não?” Foi explicado que o ângulo das escadas em espiral ao redor de cada tanque subiu a 40 °. A tarefa 1 na Fig. 34.2.2 foi então apresentada e os participantes foram convidados a produzir desenhos 2D do modelo 3D. Após essa modelagem, a Tarefa 2, a Tarefa Tubular do Papel Higiênico, foi introduzida. O objetivo dessa tarefa era modelar o tanque de óleo, mas esse modelo permitiu que o tubo de papel higiênico fosse cortado ao longo da fenda para auxiliar na identificação de um segundo modelo 2D. Após essa tarefa, os alunos foram convidados a considerar novamente a Tarefa 1.  Como resultado do engajamento dos alunos com ambas as tarefas, eles desenvolveram uma compreensão matemática mais esclarecida de uma hélice comum do lado de fora de um cilindro do que teriam fazendo apenas uma das duas tarefas. Essa abordagem para promover a alternância entre a Tarefa 1 e a Tarefa 2 permitiu que os alunos resolvessem a Tarefa 1, a Tarefa do Tanque de Petróleo.
Asserção Articulada da US	*Os alunos construiram modelos geométricos para visualizar a planificação de um tanque de óleo de formato cilindrico, sendo que isto foi necessário para solucionar a situação que lhes foi proposta.*

Fonte: as autoras

Nos Quadros 32, 33, e 35, as unidades US1.2.7.15, US1.2.17.15 e US1.2.34.17 apresentam o que os autores denominam de atividade de modelagem dual. Esta atividade envolve duas tarefas de modelagem matemática, em que uma tarefa auxilia no desenvolvimento da outra, sendo em ambas trabalhadas situações semelhantes. Na atividade descrita o problema advindo de uma situação real implica em medir o comprimento de um corrimão em espiral de um tanque de óleo com forma semelhante à de um silo de armazenagem. Os dados foram fornecidos aos alunos conforme a atividade se sucedia, e para auxiliar na tarefa de modelagem do tanque de óleo foi apresentada a outra situação: modelagem do tubo de papel higiênico. A resolução da segunda situação-problema dá suporte aos alunos para voltar a primeira situação-problema e resolvê-la. Os autores apresentam o desenvolvimento da situação-problema do tudo de papel higiênico. Para a construção de um modelo matemático os alunos fizeram relações entre construções geométricas e uma função trigonométrica. A resolução dessa segunda atividade possibilitou a obtenção de dados, que eram em um primeiro instante inviáveis de serem obtidos na primeira situação-problema, a partir das relações estabelecidas entre as situações foi possível resolver a situação-problema do tanque de óleo. A validação e intepretação dos resultados não foram abordadas no texto. A unidade US1.2.17.15 apresenta um o desenvolvimento da atividade por professores em pré-serviço (professores em curso de formação inicial para o exercício da docência.

A Unidade de Significado US 1.2.34.17 é destaca o desenvolvimento da atividade com 23 alunos de uma turma do ano 6 em uma escola primária australiana engajados na tarefa de planificação de um tanque de óleo de formato cilíndrico feita a partir da tarefa de planificação de um tubo de papel higiênico. As tarefas foram colocadas a partir da argumentação acerca da necessidade de que bombeiros chegassem ao topo de um tanque de óleo, sendo que duas eram as possibilidades – a partir de uma fotografia era possível identificar dois tanques tinham diâmetros diferentes e uma escada em espiral do chão ao topo e os bombeiros discutindo qual escada em espiral os levaria ao topo primeiro, já que precisavam escalar o topo de um dos tanques o mais rápido possível para resfriá-los, porque corriam o risco de explodir. A primeira tarefa indicava a realização de desenhos 2D do modelo 3D. Já a segunda tarefa estava associada a planificação do tubo de papel higiênico. Após essa tarefa, os alunos foram convidados a considerar novamente a Tarefa 1. Os resultados indicam como a segunda tarefa auxiliou na compreensão dos elementos da primeira tarefa, associada à realidade.

Quadro 36 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.9.15

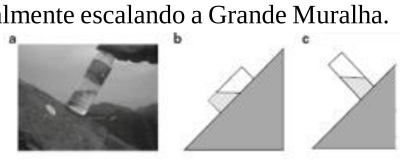
<table>
<tr><td colspan="2">Título: Strässer’s Didactic Tetrahedron as a Basis for Theorising Mathematical Modelling Activity Within Social Contexts</td></tr>
<tr><td>Código da US</td><td>US1.2.9.15</td></tr>
<tr><td>Unidade de Significado (US)</td><td>
[...] a professora trabalhou com uma turma do 11º ano (nível secundário) uma unidade de trabalho que envolveu os alunos no estudo de uma gama de funções matemáticas. Como parte desta unidade, o professor desafiou os estudantes a usarem funções cúbicas, exponenciais e de poder para modelar dados autênticos relacionados à vida.
[...] os alunos foram convidados a trabalhar no problema de flor de algas. Espera-se que os estudantes construam um modelo matemático para esses dados inspecionando um gráfico de dispersão; cujas características foram então usadas para determinar a forma geral da função que melhor ajustaria os dados.
<table>
<tr><td>Time in hours</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Rate of CO_2 production</td><td>0</td><td>–0.042</td><td>–0.044</td><td>–0.041</td><td>–0.039</td><td>–0.038</td><td>–0.035</td><td>–0.03</td><td>–0.026</td><td>–0.023</td></tr>
<tr><td>Time in hours</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td></tr>
<tr><td>Rate of CO_2 production</td><td>–0.02</td><td>–0.008</td><td>0</td><td>0.054</td><td>0.045</td><td>0.04</td><td>0.035</td><td>0.03</td><td>0.027</td><td>0.023</td></tr>
<tr><td>Time in hours</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Rate of CO_2 production</td><td>0.02</td><td>0.015</td><td>0.012</td><td>0.005</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
O CSIRO tem monitorado a taxa na qual o dióxido de carbono é produzido em uma seção do rio Darling. Durante um período de 20 dias, eles registraram a taxa de produção de CO 2 no rio. A concentração de CO 2 [CO 2] da água é preocupante porque um excesso diferença entre o [CO 2] à noite e o [CO 2] usado durante o dia através da fotossíntese pode resultar em blooms de algas que, em seguida, resulta em oxigênio privação e morte da população animal resultante e da luz solar privação que leva à morte da planta e à morte subsequente dessa seção do rio.
Existe motivo para preocupação dos pesquisadores do CSIRO?
Identifique quaisquer suposições e as limitações do seu modelo matemático.
Os alunos eventualmente identificaram o problema com sua abordagem e perceberam pressuposto inicial, ou seja, o melhor modelo para todo o conjunto de dados era uma função
</td></tr>
</table>

	exponencial, estava com defeito. Eventualmente, eles perceberam que era melhor modelar os dados com dois funções separadas.
Asserção Articulada da US	*A atividade foi desenvolvida em uma turma do nível secundário (ensino médio), em que a professora desafiou os estudantes a usar diversas funções para modelar dados autênticos relacionados à vida. O objetivo com a atividades é a determinação de uma função que melhor ajustaria os dados. As técnicas para analisar um ajuste de curvas para um conjunto de dados já foram apresentadas aos alunos antes da atividade.* *Um quadro contendo informações, dados e problema sobre a situação-problema foi apresentado pela professora inicialmente. O problema proposto é real e envolve uma análise do comportamento dos dados com base em um modelo matemático e uma análise do modelo, no sentido de ser adequado ou não para a situação-problema. Para construir o modelo matemático, os alunos utilizaram um software CAS (Computer Algebra Systems), ajustando uma função exponencial para um conjunto de dados. Após utilizar uma técnica para determinar se a função exponencial era uma função apropriada, os alunos contataram que a melhor opção é modelar a situação com uma função definida em dois intervalos.*

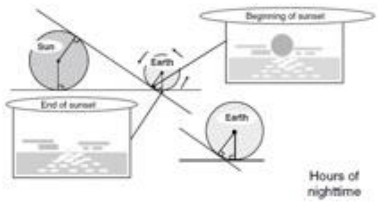
Fonte: as autoras

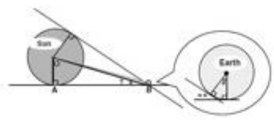
A Unidade de Significado US1.2.9.15 do Quadro 36 destaca uma atividade proposta pelo professor a alunos do ensino médio. A atividade sobre proliferação de algas em um rio vem de uma situação real, cujos dados fornecidos aos alunos são de uma fonte confiável. Um órgão nacional monitora a taxa de dióxido de carbono produzida em uma parte de um rio. A concentração de dióxido de carbono pode resultar na proliferação de algas que impedem a oxigenação para os outros seres vivos que lá habitam levando-os a morte. Neste sentido, por meio de uma tabela com dados referentes a um período de vinte dias foi fornecido aos alunos e eles deveriam construir um modelo matemático para tais dados juntamente com o uso de um gráfico, analisando se o modelo determinado foi o que melhor se ajusta aos dados. Para construir o modelo matemático, os alunos utilizaram um software com capacidade CAS (Computer Algebra Systems), ajustando uma função exponencial para um conjunto de dados. Após utilizar uma técnica para determinar se a função exponencial era uma função apropriada, os alunos contataram que a melhor opção é modelar a situação com uma função definida em dois intervalos.

Quadro 37 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.22.15

Título: Pedagogical Reflections on the Role of Modelling in Mathematics Instruction	
Código da US	**US1.2.22.15**
Unidade de Significado (US)	A questão "quão íngreme é?" É derivada se estivéssemos realmente escalando a Grande Muralha. Quantos graus deste ângulo de inclinação é o declive mais inclinado? Ao tratar um problema desse tipo, é importante que o professor deixe os alunos suporem a resposta. Por exemplo, o professor pede que os alunos selecionem as seguintes alternativas deste ângulo de inclinação: (1) 25°, (2) 35°, ou (3) 45°.  "Suponhamos que estivéssemos lá no verão. Então nós temos uma garrafa plástica de água e caneta. Existe algum método para medir o ângulo de inclinação? A resposta é representada na figura a. É uma maneira de apresentar a figura geométrica exatamente como mostrado na figura

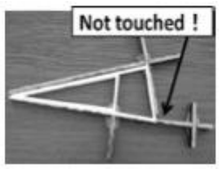
b, c se os alunos não têm ideia de como medir a inclinação do ângulo. Os alunos podem entender que esse problema matemático pode surgir em uma situação do mundo real. Ao perguntar “Qual ângulo é o ângulo de inclinação?”, os alunos têm chance de resolver o problema. Para os alunos, a configuração na figura b suporta descoberta do ângulo de inclinação. Outra configuração, mostrada na figura c, é um pouco mais difícil de trabalhar.





Há o grande e muito antigo Berliner Dom na Alemanha. Depois de olhar para o interior desta cúpula, há uma loja de suvenirs na saída do local. Três tamanhos de crucifixos são vendidos. São estes três semelhantes matematicamente? É também um método para o professor motivar os alunos a formarem suas conjecturas sobre se esses três crucifixos são semelhantes ou não. Por suposição, esse problema pode ser aceito como um problema dos próprios alunos: “Como podemos julgar isso em uma loja de suvenirs? Não tenho medida nem transferidor. Existe algum método bom?” É necessário formular o problema. Aqui, o endereçamento do triângulo retângulo é efetivo. A questão formulada é “A relação de dois triângulos retângulos é semelhante?”





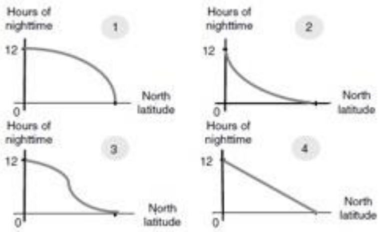
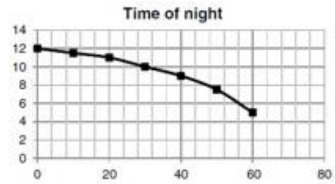
Existem vários métodos. A comparação direta de dois ângulos de inclinação é um. Outra é usar três crucifixos para julgar a similaridade de dois deles. O maior e o do meio são semelhantes se o ponto for tocado. Neste caso, não é tocado, então esses dois triângulos não são semelhantes. Além disso, devemos dedicar atenção às suposições implícitas de dois métodos. Devemos verificar duas suposições: que o crucifixo é linearmente simétrico e outro pequeno triângulo retângulo ainda não foi considerado.

O Cabo da Roca se localiza na parte ocidental de Portugal. Que pôr do sol maravilhoso! No entanto, porque me tornei descuidado, senti falta do pôr do sol desde o começo. Infelizmente, o sol quase se pôs. “Quanto tempo leva desde o início do pôr do sol até o final do pôr do sol? Qual você acha que está correto entre as seguintes alternativas: 2, 4, 8 ou 16 minutos?” É difícil imaginar a relação entre o sol e a terra. Um globo é útil para entender a relação entre eles. Podemos manipular e observar a relação posicional entre eles. O professor pode perguntar “Qual é a situação no modelo concreto em relação ao início e ao fim do pôr do sol?” Quando visto de cima, podemos averiguar a relação posicional entre eles.

A localização do final do pôr do sol é fácil de determinar. Ao perguntar por que isso acontece, a linha tangente a dois círculos é eliciada. Então, o professor pode perguntar sobre a localização do início do pôr do sol. Da mesma forma, outra linha, que é tangente a dois círculos, é eliciada. Para calcular o tempo do pôr do sol, é necessário determinar o ângulo central que compreende dois pontos tangentes. Portanto, considerando a distância entre o sol e a terra como OB, torna-se possível resolver o triângulo retângulo OAB.

A hora do pôr do sol é calculada como 24 (horas) × 60 (min) × 2θ / 360°. O raio do sol é de 700.000 km e a distância entre o sol e a terra é de 150.000.000 km. A razão entre o raio do sol (OA) e a distância entre eles (AB) é de 7: 1.500. Usando o método de redução - construindo um triângulo retângulo do qual dois comprimentos são 1,75 e 37,5 cm - produz um triângulo retângulo muito fino. Alguém o medirá em torno de 1°, outros em torno de 0,5°. A hora do pôr do sol é de 4 min no caso de 0,5° e 8 min no caso de 1°.

Outro exemplo é a situação derivada de uma viagem ao norte da Europa no verão, para Bergen, na Noruega. “A latitude norte de Bergen é de 60°. Últimas 9 horas, passado 10 horas, ainda não está escuro. Antes das 11 horas, está ficando escuro. Por que o período noturno (pôr-do-sol e nascer do sol) é tão curto?” O objetivo de resolver esse problema é entender qual parte em um

	globo é noite e qual quantidade corresponde a tempo noturno. A estrutura necessária é extraída da manipulação ou observação usando o modelo concreto. Considerar casos especiais, como países próximos ao equador, é eficaz para a estimativa. Nos países próximos ao equador, podemos perceber, observando o globo, que o dia e a noite são iguais: 12 horas. E quanto aos países de alta latitude? Usando algumas ferramentas adicionais, podemos perceber que a noite em altas latitudes é menor do que a do dia. A noite diminui à medida que a latitude aumenta. Como o tempo noturno diminui com a latitude? Podemos desenhar um gráfico para o qual o eixo x é a latitude norte e o eixo y é horas de noite? Dos quatro gráficos a seguir, qual gráfico está correto?  Também é possível obter dados sobre o "ângulo da noite" usando um globo e desenhar o gráfico. 
Asserção Articulada da US	*São apresentadas três situaões-problema em que o uso de materiais manipulaveis para a a resolucação são comuns à resolução. A primeira situação-problema surge de uma situação do mundo real, que visa estudar a inclinação de uma montanha. Para responder o problema matemático, alguns estudos empíricos com materiais manipuláveis são feitos (utilizando uma garrafa plástica com água e uma caneta). A resolução envolve um modelo geométrico que expressa uma relação entre ângulos correspondentes. Após encontrar a resposta matemática (para o problema matemático), os alunos analisam a solução encontrada do ponto de vista da situação-problema real, respondendo o problema escrito no contexto da situação-problema. A segunda situação-problema, que também parte de uma situação do mundo real, diz respeito ao tamanho de crucifixos que são vendidos como lembracinhas em local turístico na Alemanha. Para resolver esta situação-problema foi utilizado a comparação entre crucifixos de tamanhos diferentes e também a semelhança entre triângulos. A última situaçõa-problema apresentada corresponde a duração do pôr do sol. Por meio desta situação real, foi possível utilizando um globo terrestre e elaborando alguns gráficos encontrar a angulação entre o Sol e a Terra, bem como a duração do pôr do sol, dos dias e das noites de diferentes locais do mundo. Nestas atividade, a validação do modelo matemático é feito contrastando-se com a situação do mundo real e analisando as limitações do modelo.*

Fonte: as autoras

Já o Quadro 37 destaca a Unidade de Significado US1.2.22.15 que contempla atividades de modelagem cujos problema do mundo real necessitam da construção e uso de materiais manipuláveis para que sejam resolvidas. Nesta configuração de atividade os alunos tiveram de construir e usar materiais manipuláveis em seus estudos empíricos e para a construção de seus modelos matemáticos, que podem ser consideradas construções geométricas, por exemplo um globo terrestre para cálculo da duração do pôr do sol. Para que os alunos validassem seus modelos foi realizado uma comparação entre a situação do mundo real e as limitações encontradas diante do modelo formulado.

Quadro 38 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.24.15

Título: Inducting Year 6 Students into "A Culture of Mathematising as a Practice"	
Código da US	**US1.2.24.15**
Unidade de Significado (US)	Este estudo está situado dentro do Projeto de Ensino e Aprendizagem de Matemática (CTLM) com foco em pesquisa e desenvolvimento profissional. Três turmas de 6 anos, uma de cada três escolas envolvidos no CTLM, participaram. A primeira tarefa intitulada Letras, visou familiarizar primeiro os alunos com exemplos de letras de madeira. Essas letras são usadas frequentemente nas portas dos quartos das pessoas. Um dono de uma loja de brinquedos pede ajuda para determinar quantos de cada letra ele deve incluir em uma encomenda de 400 letras. Além disso, os alunos foram convidados a explicar sua solução na forma de uma carta com detalhes suficientes para que o dono da loja de brinquedos possa aplicar sua estratégia de solução para um número diferente de letras [...] as letras poderiam ser usadas, por exemplo, como um único nome inicial ou completo. Por contraste, hipóteses simplificadoras poderiam ter sido tomadas e os solucionadores de tarefas assumiram, por exemplo, que todos os compradores das letras de madeira estavam comprando apenas uma única inicial (isto é, J para Jill). Na Tarefa de Numerais de Latão, a colocação das letras de latão era uma consideração possível (alguns locais podem ter a caixa de correio e o prédio numerados). A proporção de imóveis ou apartamentos (e se números ou letras foram usados) foi um fator chave, assim como a extensão variável das ruas na área local ou Ballarat (embora os estudantes do subúrbio de Melbourne fossem mais propensos a usar o conhecimento local onde isso foi considerado).
Asserção Articulada da US	*Foram desenvolvidas duas atividades com três turmas com alunos de 6 anos de idade em três escolas envolvidas no projeto CTLM (Projeto de Ensino e Aprendizagem de Matemática). O objetivo da atividade foi familiarizar os alunos com o contexto da atividade. A resposta para o problema envolveu a escrita de uma carta contendo diferentes possibilidades de combinar uma quantidade determinada de letras desejadas. A partir de requisitos e hipóteses simplificadoras específicas, foram feitas quatros abordagens para responder o problema, utilizando o conceito de proporcionalidade e análise dos dados. Na segunda atividade, os alunos já familiarizados com o contexto, tinham que responder um problema que envolve uma narrativa de uma situação real. O problema proposto objetivo encontrar a quantidade de cada numeral um estoque deve conter de modo atender a demanda. Considerando que os alunos já tinham desenvolvido uma atividade com contexto similar, a análise do problema foi mais complexa.*

Fonte: as autoras

Por meio da Unidade de Significado US1.2.24.15 é possível destacar atividades cuja configuração envolve explicitar a solução da situação-problema por meio de uma explicação por escrito (Quadro 38). Nas atividades trabalhadas, os alunos tiveram de escrever cartas a comerciantes explicando como resolveram a situação-problema. Os autores não apresentam ilustrações ou excertos das cartas, no entanto evidenciam que para a resolução dos problemas os alunos utilizaram probabilidade.

Quadro 39 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.30.15

Título: The Role of Textbooks in Developing a Socio-critical Perspective on Mathematical Modelling in Secondary Classrooms	
Código da US	**US1.2.30.15**
Unidade de Significado (US)	Uma análise foi realizada para ver que papel as tarefas dos livros didáticos do 11º e 12º ano poderiam desempenhar no desenvolvimento de uma perspectiva sócio-crítica de modelagem matemática. Investigação de Interesse Simples (MIC - Mathematics in Context)

	Jenny ganhou US $ 2.000,00 em suas férias. Ela quer guardar o dinheiro para um feriado daqui a um ano. Sua irmã mais velha Alice está começando uma nova carreira em uma empresa de advogados e precisa de roupas novas. Jenny concorda em emprestar os $ 2000,00 para Alice, desde que Alice possa devolver o dinheiro para ela assim que possível como um montante fixo, e pagar seu interesse de 1% ao mês flat (simples interesse). Mathematics Quest (MQ) and Essential Mathematical Methods (EM) Havia menos nos outros textos (MQ12, EM) e estes eram frequentemente influenciados pelo formato das tarefas dos exames de alto risco realizados no final do ano 12. Este último eram, na melhor das hipóteses, “fingir” contextos genuínos (Altura da Maré) ou julgados pelos planejado (peso). Altura da Maré (EM Yr 11, p. 487) Sugere-se que a altura h (t) metros da maré acima do nível médio do mar em 1 Janeiro no Warnung é dado aproximadamente pela regra $h(t) = 4\sin(\frac{\pi}{6}.t)$ onde t é o número de horas após a meia-noite. (a) Desenhe o gráfico de y = h (t) para $0 \leq t \leq 24$. (b) Quando a maré estava alta? (c) Qual foi a altura da maré alta? (d) Qual foi a altura da maré às 8 da manhã? (e) Um barco só pode cruzar a barra do porto quando a maré estiver pelo menos 1 m acima nível médio do mar. Quando o barco poderia cruzar o bar do porto em 1º de janeiro? Peso (MQ12, pág. 26) O peso de uma pessoa t meses após o início de um programa de ginásio é dado por a função: $W(t) = \frac{t^2}{2} - 3t + 80$, onde $t \in [0,8]$ e W está em quilogramas. Encontrar: a) O peso mínimo da pessoa b) o peso máximo da pessoa.
Asserção Articulada da US	*Por meio de exemplos de atividades retiradas de livros de modelagem matemática, os autores argumentam que tais atividades não são de modelagem matemática por conter apenas contextos ficticios e não contextos reais.*

Fonte: as autoras

O Quadro 39 contempla a descrição da Unidade de Significado US1.2.30.15 que esboça uma análise realizada com tarefas disponíveis em livros didáticos do 11º e 12º específicos de modelagem matemática. As tarefas, todas contextualizadas abordam, de acordo com os autores, falsos exemplos de atividades de modelagem matemática. Os exemplos de atividades dizem respeito aos contextos de Juros Simples, à Altura da Maré, acerca do Peso de um sujeito. Todos os exemplos são colocados como fingindo contextos genuínos, mas não se atendo de fato às especificidades e aos dados de tais contextos.

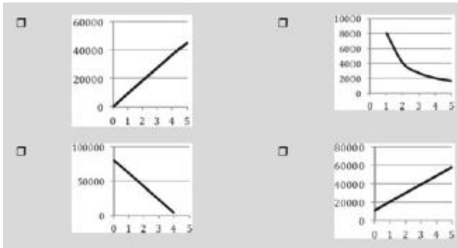
Quadro 40 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.32.15

Título: How Students Connect Descriptions of Real-World Situations to Mathematical Models in Different Representational Modes	
Código da US	**US1.2.32.15**
Unidade de Significado (US)	Sessenta e quatro alunos do primeiro ano de Ciências da Educação da Universidade de Leuven foram confrontados com um teste escrito de múltipla escolha composto por 12 descrições de situações realísticas que eles tiveram que conectar a um modelo matemático adequado. Para cada situação, o modelo apropriado era linear (isto é, da forma y = ax) ou “quase” linear: linear inversa (y = a / x), afinidade com declive positivo (y = ax + b com a> 0 e b ≠ 0), ou declive

<table>
<tr>
<td></td>
<td>negativo (y = ax + b com a <0 e b ≠ 0). Estes modelos foram dados em forma gráfica, tabular ou de fórmula (cada representação foi fornecida em um terço dos casos).
[...] As situações foram escolhidas para que houvesse um ajuste forte e claro com os modelos fornecidos, embora tenhamos consciência de que os modelos nunca se ajustam perfeitamente a uma situação realista.

Exemplo 1 (Situação Linear Inversa / Fórmulas alternativas)
Durante a guerra, a manteiga foi racionada. A cada semana, a manteiga era entregue e razoavelmente distribuída entre as pessoas. Qual fórmula representa adequadamente a relação entre o número de pessoas que querem manteiga e a quantidade de manteiga que todo mundo recebe?
❐ $y=150x$
❐ $y=150/x$
❐ $y=150x+30$
❐ $y=-150x+30$

Exemplo 2 (Situação Linear / Tabelas alternativas)
Jennifer compra carne picada no açougue. Qual tabela representa corretamente a relação entre a quantidade de carne picada que Jennifer compra e o preço que ela tem que pagar?
<table>
<tr><th>❐</th><th>x</th><th>y</th><th>❐</th><th>x</th><th>y</th><th>❐</th><th>x</th><th>y</th><th>❐</th><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td></td><td>0</td><td>8</td><td></td><td>0</td><td>0</td><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td>0</td><td>8</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>−4</td><td></td><td>1</td><td>12</td><td></td><td>1</td><td>12</td><td></td><td>1</td><td>20</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>−16</td><td></td><td>2</td><td>24</td><td></td><td>2</td><td>6</td><td></td><td>2</td><td>32</td></tr>
<tr><td></td><td>3</td><td>−28</td><td></td><td>3</td><td>36</td><td></td><td>3</td><td>4</td><td></td><td>3</td><td>44</td></tr>
<tr><td></td><td>4</td><td>−40</td><td></td><td>4</td><td>48</td><td></td><td>4</td><td>3</td><td></td><td>4</td><td>56</td></tr>
</table>

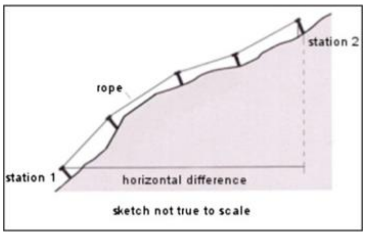
Exemplo 3 (Situação Afetiva com Inclinação Negativa / Gráficos Alternativos)
Uma preocupação química tem uma grande cisterna com cloridrato. Esta manhã começaram a bombear com um ritmo constante todo o clorídrico desta cisterna. Qual gráfico representa adequadamente a relação entre o tempo decorrido e a quantidade de cloridrato que ainda está na cisterna?

</td>
</tr>
<tr>
<td>Asserção Articulada da US</td>
<td>As atividades desenvolvidas com sessenta e quatro alunos do primeiro ano do curso universitário Ciências da Educação. Foram entregues aos alunos um teste escrito de múltipla escolha composto de situações realísticas, cujo objetivo era relacionar com o modelo matemático adequado. Para cada situação o modelo matemático era linear ou quase linear. Três exemplos foram inseridos como atividades de modelagem matemática, com o propósito de relacionar a situação com o modelo matemático linear adequado, na forma algébrica, na forma tabular e na forma gráfica.</td>
</tr>
</table>

Fonte: as autoras

Já no Quadro 40, a Unidade de Significado US1.2.32.15 destaca uma configuração de atividade de modelagem matemática denominada modelagem inversa. Neste tipo de configuração, os modelos matemáticos que correspondem à situações-problema são apresentados em alternativas de múltipla escolha, sendo que os alunos devem analisar o contexto da situação e conecta-las com o modelo matemático que melhor a ajusta. Os autores apresentam exemplos de atividades de modelagem inversa, em que os contextos abordam situações lineares e inversamente lineares de modo que os modelos são explicitados como funções lineares ou funções inversas, tabelas e gráficos.

Quadro 41 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.40.15

<table>
<tr><td colspan="2">Título: Formative Assessment in Everyday Teaching of Mathematical Modelling: Implementation of Written and Oral Feedback to Competency-Oriented Tasks</td></tr>
<tr><td>Código da US</td><td>US1.2.40.15</td></tr>
</table>

Unidade de Significado (US)	Ao todo 39 classes, no 9º ano de 23 escolas no estado de Hessen (Alemanha) com 978 estudantes secundários participaram deste estudo. O cabo do teleférico Ristis deve ser substituído. 1 m do cabo custa 8 €. Quanto custará aproximadamente o novo cabeamento? Anote seu processo de solução.  Nome: Teleférico "Ristis" Estação 1: 1.600 m acima do nível do mar Estação 2: 1,897 m acima do nível do mar Diferença horizontal: 869 m Capacidade de carga: 132 × 3 pessoas Capacidade de transporte: 1.200 pessoas por hora  Velocidade: 1,5 m / s Tempo de viagem: 10 min Em 1º de maio pessoas em Bad Dinkelsdorf dança em torno do chamado “Maibaum”. Isto é, uma árvore que tem uma altura de 8 m. Enquanto dançava, as pessoas seguram fitas em suas mãos. Essas fitas medem 15 m. Quão longe do "Maibaum" estão as pessoas no começo da dança? 
Asserção Articulada da US	*Neste artigo duas situações-problema são apresentadas. Ambas as sitações advêm do mundo real. A primeira consiste em analisar uma obra de substituição de cabeamento de um teleférico. Nesta situação, algumas informações foram dadas aos alunos que encontraram o custo para o troca do cabo. A segunda situação aborda uma dança típica em volta de um mastro guiada por fitas coloridas, em que o problema consiste em determinar a que distância as pessoas estão do mastro no início da dança. Para ambas as situações apresentadas os alunos utilizaram conceitos de geometria e as resolveram por meio do uso do Teorema de Pitágoras.*

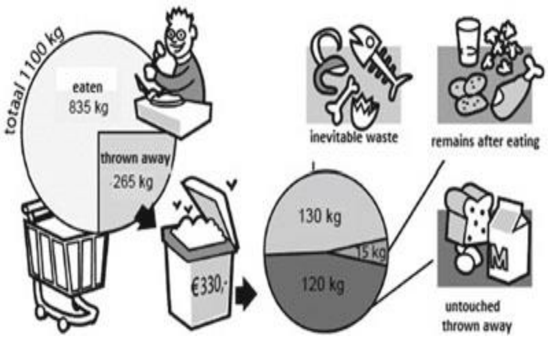
Fonte: as autoras

Por sua vez, na Unidade de Significado US1.2.40.15 do Quadro 41, manifesta-se atividades de modelagem matemática que foram implementadas em turmas do nono ano. As situações-problema foram propostas pelos professores, juntamente com algumas informações no texto da atividade. Os alunos ainda pesquisaram alguns dados necessários para a resolução e em ambas as atividades utilizaram o Teorema de Pitágoras como modelo matemático que resolve as situações. Sobre a validação dos resultados, os autores abordam no texto que a solução foi corrigida pelos professores e que houve um *feedback* por escrito e individual para os alunos.

Quadro 42 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.41.15

Título: Assessment of Modelling in Mathematics Examination Papers: Ready-Made Models and Reproductive Mathematising	
Código da US	**US1.2.41.15**
Unidade de Significado (US)	O estudo consiste em exames matemáticos para os seguintes níveis: vocacional (exame no final da grade 10), geral (exame no final da grade 11) e pré-universitário (exame no final da grade 12).

(i) Calcule o preço médio em Euro de um Kg de comida jogado fora.



(ii) Na Holanda existe aproximadamente 16 milhões de habitantes. Em média uma casa familiar consiste em 2.4 pessoas. Calcule a quantidade total de dinheiro em Euro da comida jogada fora na Holanda em 1 ano.

Veja a Tarefa de Resíduos de Alimentos: os diagramas oferecem informações que precisam ser transformadas em respostas numéricas. Essas respostas não resolvem o problema do desperdício de alimentos, embora possam ajudar a entender a imensidão do desperdício de alimentos.

Velocidade do vento e altitude

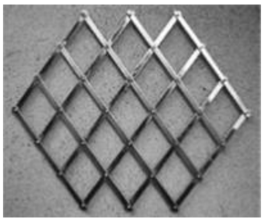
Em Vlaardingen (uma pequena cidade holandesa) em um determinado dia a velocidade do vento foi medida em diferentes altitudes. As medições mostram aproximadamente uma relação linear entre a velocidade do vento W em m/s e altitude h em m, quando a altitude é entre 10 e 80 m (ver Tabela). A fórmula $W = a.h + b$ dá essa relação linear.

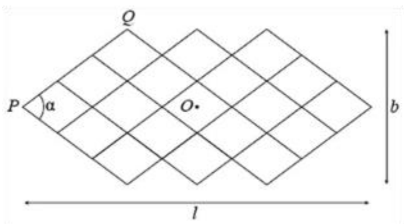
h	10	20	30	40	50	60	70	80
W	1,2	1,6	2,1	2,5	3,0	3,4	3,9	4,3

Calcule a e b com a ajuda da tabela. Arredonde a e b para dois decimais.

Trivet

Um determinado trivet consiste em barras que podem se articular. Este trivet tem 19 losangos iguais. Veja a foto.





Em um modelo matemático para este trivet, ignoramos a espessura das barras. Nós indicamos o ponto de articulação mais à esquerda com P, o ponto médio do meio losango com O. O ângulo interno em P é α (em radianos), veja o diagrama. O ângulo interno em P é α (em radianos), veja o diagrama. Nós escolhemos o comprimento 1 para o lado de um losango. Comprimento l e largura w do modelo são funções de α, em que $0 \leq \alpha \leq \pi$. Temos $l = 10\ cos(½\ \alpha)$ and $w = 6\ sin(½\ \alpha)$.

Mostre que a fórmula para l e w está correta.

Asserção Articulada da US

As situações-problema apresentam imagens e informações que precisam ser traduzidas em uma resposta numérica. Nesse caso o objetivo dos problemas não são encontrar uma solução para a situação-problema real, mas permitir entender os fenômenos que são estudados. Na segunda situação, para responder o problema, não é necessário que o aluno entenda a situação, mas sim o comportamento dos dados numéricos. A matematização da atividade é considerada mecanicista, e o objetivo é calcular os parâmetros de um modelo matemático. Por fim, a terceira situação-problema é descrita por imagens, contendo um modelo matemático pronto. O objetivo do problema é reproduzir o modelo matemático para a situação real, constituindo a matematização reprodutiva. O problema proposto limita a variedade de respostas, mas os alunos podem adotar diferentes estratégias para encontrar a resposta correta.

Fonte: as autoras

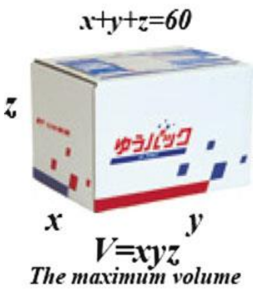
A Unidade de Significado US1.2.41.15 destaca atividades de modelagem matemática que foram propostas pelo professor e que continham imagens e algumas informações para que o fenômeno do mundo real pudesse ser estudado e analisado (Quadro 42).

Os autores consideram que o objetivo dos problemas abordados não são somente encontrar uma solução para a situação-problema e sim entender os fenômenos, bem como o comportamento dos dados fornecidos. Não houve descrição a respeito da validação dos resultados e finalização das atividades.

Quadro 43 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.46.15

<table>
<tr><td colspan="2">Título: A Study of the Effectiveness of Mathematical Modelling of Home Delivery Packaging on Year 12 Students’ Function Education</td></tr>
<tr><td>Código da US</td><td>US1.2.46.15</td></tr>
<tr><td>Unidade de Significado (US)</td><td>

[...] os exemplos foram apresentados a alunos de do 12º ano que pretendem cursar os departamentos de ciências e engenharia após o ensino médio.

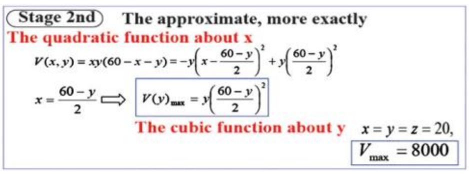


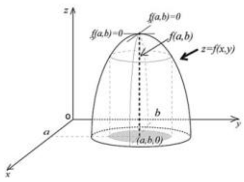
“Você seleciona uma caixa de tamanho 60. Para enviar o maior número de mercadorias possível, que formato de caixa deve ser preparado?” Muitos alunos decidirão que a resposta é encontrar o volume máximo da caixa.
Eles farão facilmente a equação matemática (V = xyz, x + y + z = 60,0 < x, y, z < 60),
e eles notarão que V é uma função de duas variáveis (V = xyz, x + y + z = 60,0 < x, y, z < 60).

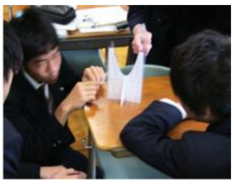
<table>
<tr><th>Size</th><th>Total (length+breadth+height)</th><th>Charge</th></tr>
<tr><td>60</td><td>Under 60 cm</td><td>¥600</td></tr>
<tr><td>80</td><td>60–80 cm</td><td>¥800</td></tr>
<tr><td>100</td><td>80–100 cm</td><td>¥1,000</td></tr>
<tr><td>120</td><td>100–120 cm</td><td>¥1,200</td></tr>
<tr><td>140</td><td>120–140 cm</td><td>¥1,400</td></tr>
<tr><td>160</td><td>140–160 cm</td><td>¥1,600</td></tr>
<tr><td>170</td><td>160–170 cm</td><td>¥1,700</td></tr>
</table>

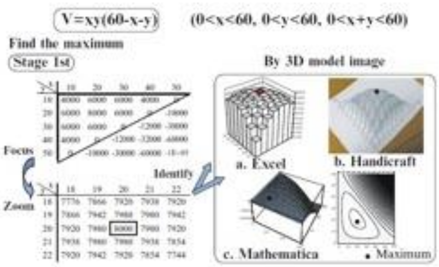
Os alunos restringem o alcance de x e y para que o valor máximo de volume possa entrar em foco. Eles verificam melhorando a precisão do valor do volume, mesmo que seja um pouco. Em seguida, eles fazem um modelo tridimensional para observar a imagem das mudanças em torno do valor máximo. Eles também usam software matemático.

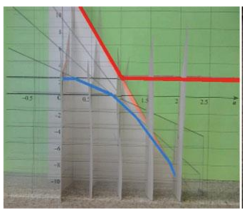
Os alunos encontraram o valor máximo do volume da caixa que se torna 8.000 cm3 no cubo (x = y = z = 20). No entanto, alguns alunos não concordam com o resultado. Isso ocorre porque esse valor é um valor aproximado calculado pelo computador.

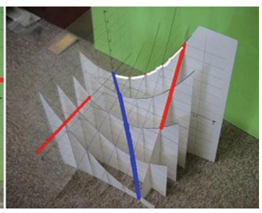












Aqui, mesmo se o modelo for elementar, ele é considerado como um modelo de desenvolvimento matemático e é a razão pela qual essa modelagem foi aprimorada por meio de novos conteúdos matemáticos (ou seja, diferenciais parciais).

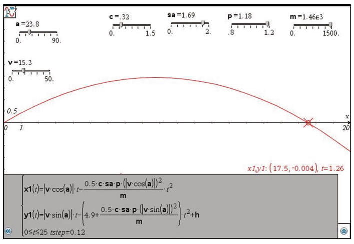
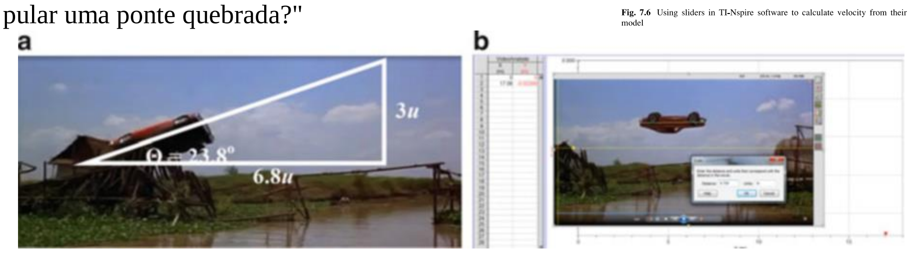
</td></tr>
<tr><td>Asserção Articulada da US</td><td>A atividade de modelagem matemática foi desenvolvida com alunos do ensino médio, que pretendem cursar os departamentos de ciência e engenharia. A situação-problema envolve um problema de otimização de uma situação real. O desenvolvimento da atividade envolve a construção de um modelo tridimensional, utilizando matérias manipuláveis e o uso de um software matemático. Após encontrarem a resposta para o problema, os alunos não satisfeitos com a solução, construíram um outro modelo matemático, utilizando procedimentos e conceitos</td></tr>
</table>

	matemáticos já estudados que poderiam servir de suporte ao professor para inserir modelos com equações diferenciais no curso superior.

Fonte: as autoras

A partir de um problema do mundo real e por meio do desenvolvimento de um modelo tridimensional o Quadro 43 destaca a Unidade de Significado US1.2.46.15 que aborda uma atividade de modelagem matemática que consiste na otimização do volume de embalagem. Deste modo por meio do uso de materiais manipuláveis a embalagem foi construída e serviu para a coleta de dados. Além dos conceitos e procedimentos matemáticos utilizados pelos alunos para a resolução da situação-problema um software também foi usado para a obtenção do modelo matemático. Os resultados foram discutidos e analisados em relação a situação real.

Quadro 44 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.7.16

Título: Facilitating Mathematisation in Modelling by Beginning Modellers in Secondary School	
Código da US	**US1.2.7.16**
Unidade de Significado (US)	Os membros do grupo estavam interessados em investigar “a viabilidade de acrobacias de Hollywood e se é possível realizar essas cenas na realidade” [Questionário, Vídeo Dia 2]. Um truque que eles escolheram para modelar foi “uma cena de um filme, O Homem da Pistola de Ouro, e [eles estavam] olhando para a cena do carro em que o carro decolou da ponte, gira 360º antes de aterrissar na outra metade da ponte” [Becky, Video Day 2]. Os alunos visitaram o parque temático Dreamworld no início da semana para coletar e analisar dados de vários brinquedos usando ferramentas tecnológicas, como acelerômetros 3D e softwares de interface do mundo real, como o Logger Pro [M6, M7]. Todos os três tinham algum conhecimento dessas ferramentas e suas possibilidades, mas apenas Tim era especialista em sua aplicação, pois Becky e Colin não os tinham usado antes deste evento. A questão que o grupo apresentava era: "Qual é a velocidade de um carro necessária para pular uma ponte quebrada?"   **Fig. 7.6** Using sliders in TI-Nspire software to calculate velocity from their final parametric model  **Fig. 7.4** Using Logger Pro software on DVD image to (**a**) calculate angle of launch and (**b**) find length of gap Modelagem do projeto frontal do carro para a área de referência A na equação. Como acreditamos que a modelagem é aprimorada para os modeladores iniciantes em um TRTLE, escolhemos um exemplo de modelagem aberta com o uso de tecnologias digitais para auxiliar no desenvolvimento do modelo matemático.

Asserção Articulada da US	*A situação-problema envolve uma simulação de uma cena de um filme realizada numa situação real. O encaminhamento utilizado pelo professor seguiu um quadro com questões apoiadoras ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Para desenvolver a atividades, houve visitas em um parque temático e uso de softwares tecnológicos. O grupo fez uso de conceitos da física relacionados ao movimento de projeteis para construir seu modelo de movimento do carro saltando. Para modelar a situação os alunos utilizaram as equações paramétricas do movimento retilíneo uniforme obtidas com o uso de software digital.*

Fonte: as autoras

O Quadro 44 aborda a Unidade de Significado US1.2.7.16 que evidencia uma atividade de modelagem matemática em que o fenômeno a ser modelado partiu do interesse dos alunos ao assistir um salto realizado por um carro na cena de um filme. Os alunos ficaram responsáveis por formular o problema, coletar os dados necessários e resolver a situação e para isso o professor forneceu um quadro de apoio para o desenvolvimento da atividade. Os alunos utilizaram conceitos da física relacionados ao lançamento de projeteis, bem como ferramentas tecnológicas que auxiliaram na coleta de dados e na construção da simulação do salto. Como os alunos consideravam ter domínio das ferramentas digitais utilizadas as discussões e análise dos resultados foram baseadas nos modelos encontrados por meio do uso *software*.

Quadro 45 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.8.16

Título: Authenticity in Extra-curricular Mathematics Activities: Researching Authenticity as a Social Construct	
Código da US	**US1.2.8.16**
Unidade de Significado (US)	As atividades faziam parte de uma excursão escolar pela matemática. Na excursão Railway Timetable Dynamics os alunos são apresentados a um problema da Teoria dos Grafos matemáticos. Em 2007, um novo cronograma ferroviário foi introduzido pela Companhia Nacional Ferroviária Holandesa (Nederlandse Spoorwegen, NS), com base em pesquisas sobre os engarrafamentos no cronograma realizadas pelo Prof Alexander Schrijvers e sua equipe. A pesquisa foi realizada em nome do NS. Na excursão, os alunos se reúnem com um gerente de NS por meio de videoconferência ao vivo. Eles começam a formular suposições que precisam ser incluídas no modelo, como as limitações causadas por trens mais rápidos que não param em todas as estações, o tempo máximo de espera por um trem (por exemplo, se um trem espera por 20 min em uma plataforma isso causará insatisfação dos passageiros), o tempo de trânsito para os passageiros e a distância de trens de partida e chegada. Após o almoço, os alunos usaram o software de modelagem para construir seu próprio horário. Este software foi criado especialmente para a excursão e simula o software que os matemáticos usavam originalmente. É explicado aos alunos que a construção de software fazia parte do trabalho dos matemáticos quando trabalhavam nos gargalos do calendário da NS.
Asserção Articulada da US	*A atividade apresentada faz parte de uma excursão realizada com alunos de escolas secundárias. A atividade é descrita segundo o que a autora considera como aspectos autênticos. Inicialmente, os alunos são familiarizados com o contexto da atividade e a situação-problema proposta. O problema faz parte de uma situação real presente em uma prática profissional e que é estudada por especialistas. No encaminhamento da atividade, os símbolos e técnicas matemáticos utilizados na prática dos especialistas são apresentados pelo professor. Em seguida, os alunos formulam suposições para incluir no modelo matemático já utilizado. Por meio de um software, os alunos apresentam uma solução para o problema proposto. Os resultados obtidos pelos alunos são validados por meio da certificação de pesquisadores e especialistas da área profissional e científica em que o problema se aplica.*

Fonte: as autoras

A Unidade de Significado US1.2.8.16 do Quadro 45 destaca uma atividade de modelagem matemática proposta pelo professor. Para o desenvolvimento da atividade os alunos realizaram uma excursão até uma companhia ferroviária. A familiarização com o contexto foi realizada por meio de funcionários da companhia e os dados foram fornecidos também foram fornecidos pela mesma. O problema a ser resolvido era a respeito de engarrafamentos no cronograma dos trens. Para a resolver o problema proposto os alunos usaram um *software*, criado especialmente para a excursão, que simulava funcionamento do *software* utilizado pelos matemáticos quando resolveram o problema original. Para validação dos resultados obtidos pelos alunos foi realizada uma certificação dos especialistas da área profissional e científica.

Quadro 46 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.13.16

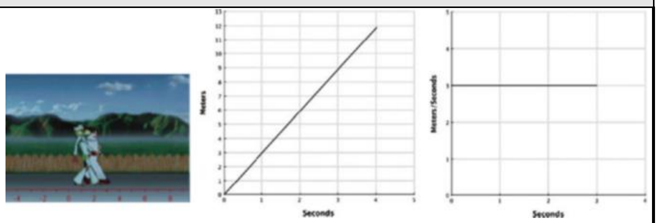
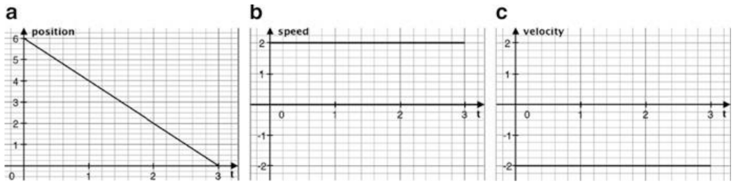
Título: Problem Solving Methods for Mathematical Modelling	
Código da US	**US1.2.13.16**
Unidade de Significado (US)	Em um estudo qualitativo, três pares de estudantes alemães em cada uma das séries 4 e 6 (10 e 12 anos), em Grundschule (ensino primário) e Realschule (ensino secundário). A primeira tarefa (Teeth Brushing Task) tinha como objetivo obter uma compreensão do método, pedindo aos alunos que organizassem as etapas descritas na ordem causal correta. Esta tarefa foi dada de forma idêntica a todos os alunos participantes.  Tarefa de escovação de dentes Pia está tentando responder a seguinte pergunta: Quanta água eu poderia economizar em um ano enquanto escovo meus dentes? Para encontrar uma resposta, Pia passou por várias etapas: • Eu deveria medir o montante e adicioná-lo. • Cinco copos de água fluíram pela torneira. Cinco xícaras são cerca de 1 litro. Lá são 365 dias em um ano, de modo que faz 365 l. • Quando escovo os dentes, preciso de água para lavar a boca. Mas se eu deixar o correr água enquanto eu estou escovando, estou perdendo água. Quanta água corre através da torneira ao longo de um ano inteiro? • 365 l é igual a 36 baldes de água doce que podem ser salvos em um ano. Isso parece certo, porque ao longo de um ano a torneira terá foi executado por muitos minutos no total. • Assim, durante um ano inteiro, consegui economizar 365 l de água fresca ao girar a torneira enquanto escovo. Coloque os passos da solução de Pia na ordem correta. Rotule cada passo com o nome que melhor se encaixa: entendendo o problema, escolhendo uma abordagem, executando, explicando os resultados, checando. Use este método para responder à seguinte pergunta: quanto fluido eu bebo em uma semana? Compreensão: Quanto você bebe em uma semana? Escolha: Eu bebo cerca de 2 litros todos os dias, então eu calcularia 2 L · 7. Executando: 2 L · 71⁄414 L Explicação: Toda semana eu bebo cerca de 14 L, e a cada dia cerca de 2 L. Verificação: Isso é igual a 9 · 1,5 litros e uma garrafa de 0,5 l. Os alunos da escola primária receberam uma fotografia de um aluno da idade deles, ao lado de um grande chinelo, e pediram para determinar a altura de uma pessoa (fictícia) a quem o flip-flop poderia se encaixar. Tarefa flip-flop

	Determine a altura de uma pessoa (fictícia) a quem o flip-flop pode se encaixar.
Asserção Articulada da US	*As atividades foram desenvolvidas com três pares de estudantes alemães em cada uma das 4ª séries e 6ª séries e no ensino secundário. O objetivo com o desenvolvimento das atividades era obter uma compreensão de um método de resolução de problemas. As situações-problema envolviam situações do cotidiano dos estudantes. Os problemas podem ser entendidos como problemas de estimativa. No primeiro problema questiona-se a quantidade de água que poderia ser economizada em um ano e para responder o problema, os alunos formularam hipóteses baseadas em experiências pessoais. No segundo problema proposto deve-se calcular a altura de uma pessoa (fictícia) para com base em um chinelo gigante.*

Fonte: as autoras

A Unidade de Significado US1.2.13.16 evidencia duas atividades de modelagem matemática cujos contextos são reais (Quadro 46). A primeira atividade versa sobre a economia de água em situações diárias como ao escovar os dentes. Os alunos utilizaram conhecimento pessoais para fazer estimativas e responder a situação-problema. Em um segundo momento foi abordada uma situação a respeito da altura de uma pessoa para calçar um chinelo gigante. Para resolver esta situação-problema estimativas foram realizadas a partir de uma fotografia de criança ao lado do chinelo gigante que foi fornecida na atividade. A criança na fotografia possuía idade semelhante à dos alunos. Os autores não descrevem mais detalhes a respeito do desenvolvimento das atividades.

Quadro 47 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.24.16

Título: Moving Beyond a Single Modelling Activity	
Código da US	**US1.2.24.16**
Unidade de Significado (US)	Ilustramos o padrão de variação de contraste na atividade de exploração do modelo nas sequências de desenvolvimento do modelo centradas na taxa média de variação. Nós projetamos uma atividade com foco na diferença entre os conceitos de velocidade e aceleração.  **Fig. 24.3** The coordination of simulated motion, position and velocity graphs (Kaput & Roschelle 1996)  **Fig. 24.2** Related position (**a**), speed (**b**), and velocity graph (**c**) Dado o gráfico de posição na Figura 24.2a, os alunos são solicitados a construir tanto o gráfico de velocidade quanto o gráfico de aceleração, começando assim a separar as diferenças estruturais e semelhanças entre velocidade (Fig. 24.2b) e velocidade (Fig. 24.2c)). A relação entre velocidade e aceleração pode então ser mais explorada usando situações descritas por gráficos de posição linear por partes mais complexos. Na sequência de desenvolvimento do modelo focada na taxa média de variação, um objeto pretendido de aprendizagem é para os alunos coordenarem e compreenderem a relação entre o

	movimento animado de um personagem em movimento, seu gráfico de posição e seu gráfico de velocidade
Asserção Articulada da US	*Foram desenvolvidas duas atividades de modelagem matemática com base na sequência de desenvolvimento de modelos centrado no conteúdo de taxa média de variação. A primeira atividade, atividade de exploração de modelos, tem como propósito explorar as diferenças estruturais e semelhanças entre o gráfico da velocidade e da aceleração. Dado o gráfico de posição, os alunos construiram gráficos de aceleração quanto gráficos de velocidade, começando a separar as diferenças estruturais e semelhantes entre aceleração e velocidade. A segunda atividade, atividade de aplicação de modelos, têm como objetivo a aplicação dos modelos em novos contextos. Nessa segunda atividade, foi apresentado uma situação simulada do movimento animado de um personagem. Os alunos foram solicitados para estabelecer relações entre o movimento animado do personagem, seu gráfico de posição, seu gráfico de velocidade e aceleração.*

Fonte: as autoras

No Quadro 47, a Unidade de Significado US1.2.24.16 indica duas atividades de modelagem matemática foram destacadas. Os autores consideram as atividades como sequência de desenvolvimento de modelos em que o conteúdo objetivado foi a taxa de variação média. A primeira atividade, considerada como uma atividade de exploração de modelos, teve como propósito explorar as diferenças estruturais e semelhanças entre o gráfico da velocidade e da aceleração por meio de um gráfico fornecido na atividade. A segunda atividade, caracterizada como atividade de aplicação de modelos, propiciou a aplicação dos modelos em novos contextos, sendo apresentada uma situação que simulava o movimento animado de um personagem. Desta forma os alunos tiveram que estabelecer relações entre o movimento animado do personagem, com gráficos que representavam a posição, velocidade e aceleração no movimento do personagem. A validação dos resultados não foi descrita no artigo pelos autores.

Quadro 48 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.28.16

Título: Modelling, Education, and the Epistemic Fallacy	
Código da US	**US1.2.28.16**
Unidade de Significado (US)	O exemplo a seguir, argumenta-se, preenche os requisitos básicos para um problema autêntico e também fornece um foco para discutir questões subsequentes relevantes para a interface de modelagem da educação. Previsão de População População australiana para o topo 23 milhões de hoje (Atualizado 23 de abril de 2013, 10:55 AEST) A população da Austrália chegará a cerca de 23 milhões de pessoas em algum momento hoje à noite, e os demógrafos dizem que estão no caminho certo para atingir 40 milhões até meados do século. O Departamento Australiano de Estatísticas diz que a projeção é baseada na estimativa populacional do ano passado e leva em conta fatores como a taxa de natalidade do país, taxa de mortalidade e migração internacional. Os números do ABS mostram que cerca de 180.000 pessoas se mudam para a Austrália a cada ano.

	Estima-se que com um nascimento a cada 1 min e 44 s, um novo migrante chegando a cada 2 min e 19 se uma morte a cada 3 min e 32 s, a marca de 23 milhões será atingida logo após as 22h (AEST). Isso significa que nossa população aumenta em uma pessoa a cada minuto e 23 s. Fonte: <http://www.radioaustralia.net.au/international/2013-04-23/australian-population-to-top-23-million-tonight/1120164>. Investigue a alegação de que "os demógrafos dizem que (a população) está no caminho certo para atingir 40 milhões até o meio do século". Quais são algumas implicações sociais? Suponha, como sugere a reportagem, que os valores dados de nascimento, morte e taxas de imigração se apliquem no futuro. Deixe P_0 = população inicial (em 2013); Seja P_n = população no ano n Deixe $r = (b - d)$ = taxa de crescimento natural; Deixe I = ingestão líquida anual de imigração Resolução 1 $P_0 = 23\,000\,000;\ b = 0{,}0132;$ $d = 0{,}00647;\ r = 0{,}000673; I = 227\,032$ $P_1 = P_0 + r\,P_0 + I = P_0(1 + r) + I = P_0 R + I$ (onde $R = 1 + r$) $P_2 = P_1 R + I$ numa planilha copie e arraste $P_{40} = 40\,459\,252$ Resolução 2 $P_n = P_0\, R^n + I\,(R^{n-1} + \ldots R^2 + R + 1)$ $P_n = P_0\, R^n + I\,(R^n - 1)/(R - 1);$ $P40 = 40\,459\,252$ Resolução 3 $\frac{dP}{dt} = Pr + I$ $P(t) = P_0 e^{rt} + I(e^{rt} - 1)/r$ onde $P_0; P_{40} = 40\,526\,191$ Uma previsão de cerca de 40 milhões em 40 anos parece razoável! Avaliação: Se uma população tem uma expectativa média de vida de L, em média, uma fração de 1 / L da população morre a cada ano. Usando os números fornecidos acima, então, uma estimativa do tempo de vida médio =1/0.00647=154.6 (anos)! Portanto, embora o dado número possa se aplicar em um período de 24 horas (como aqui), ou mesmo em curtos períodos de tempo, não é uma base para previsões robustas de população. Refinamento para estimar a taxa de mortalidade, precisamos pesquisar dados estatísticos robustos, como a expectativa de vida de 81,5 anos. Para esta expectativa de vida a taxa média de mortalidade a longo prazo=1/81.5=0.0122699 $anos^{-1}$ e ao longo do tempo, o valor atual deve estabilizar para valor consistente com isso. Observamos também que a taxa líquida é cotada em cerca de 180.000 por ano, em vez do valor mais alto derivado dos dados durante a noite. Usando a taxa revisada de mortalidade e os números de imigração: $P_{40} = 31{,}200{,}000$ (aproximadamente) uma previsão substancialmente diferente. Pontos de Discussão Há implicações de projeções populacionais para a provisão futura de empregos, moradia, saúde, educação e a lista continua. Os demógrafos estão errados? Os dados são robustos? A mídia foi criativa com fatos? Estas são todas questões levantadas para discussão pelos resultados da modelagem.
Asserção Articulada da US	*A situação-problema envolve uma situação real e o problema pode ser entendido como um problema de previsão. O modelo matemático construída parte de uma suposição baseada em informações da situação-problema: os valores dados de nascimento, morte e taxas de imigração se aplicam no futuro. O modelo matemático é construído por meio de uma abordagem contínua e discreta, utilizando Equações Diferenciais Ordinárias e progressão geométrica. Em seguida é feito uma avaliação dos resultados matemáticos e um refinamento do modelo, acrescentando uma nova informação. Por fim, são levantados tópicos de discussão, por meio de questionamentos sobre as implicações do modelo matemático para a situação-problema real e sobre o desenvolvimento da atividade em si.*

Fonte: as autoras

A Unidade de Significado US1.2.28.16 do Quadro 48 destaca uma atividade de modelagem matemática cuja situação real tem como fenômeno a ser estudado o crescimento da população australiana. A atividade proposta pelo professor partiu de uma notícia divulgada pela mídia australiana a respeito de uma previsão para o número de habitantes. Os autores apresentam modelos matemáticos que podem ser elaborados por meio de suposições baseadas nas informações contidas na notícia: os valores a respeito de taxas de nascimento, morte e imigração. Os modelos matemáticos envolvem uma abordagem com variáveis discreta e contínua, a utilização de Equações Diferenciais Ordinárias e progressão geométrica. Os resultados foram analisados e foi necessário um refinamento nos modelos, sendo necessário o acréscimo de uma nova informação. Alguns tópicos foram levantados para uma discussão de encerramento, por meio de questionamentos sobre as implicações do modelo matemático para a situação-problema real, bem como um olhar para o próprio desenvolvimento da atividade.

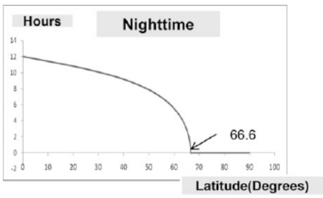
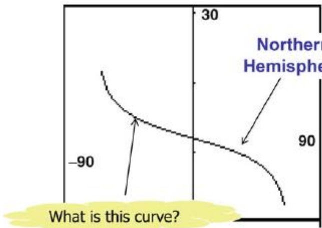
Quadro 49 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.32.16

Título: Social-critical Dimension of Mathematical Modelling	
Código da US	**US1.2.32.16**
Unidade de Significado (US)	Tarefa de Poluentes do Rio Uma empresa descarrega seu efluente em um rio localizado perto de suas instalações. Estas águas contêm produtos químicos dissolvidos, substâncias que podem afetar o ambiente em que o rio corre. Como podemos determinar a concentração de poluentes nesse rio? Como você pode ter certeza de que a concentração de poluentes no rio está abaixo do limite padrão permitido por lei? Para refletir criticamente sobre essas suposições, é importante discutir se a velocidade média do rio é constante, ou o que acontece na eventualidade quando não há mudança sazonal no nível da água, ou se a taxa de vazão é constante, a concentração de poluentes no rio é constante, o poluente e a água são completamente miscíveis, independentemente da mudança sazonal de temperatura, não há precipitação durante o período de coleta de dados, o poluente e a mistura de água completamente, o poluente não solidificar nos sedimentos do rio, as partículas sólidas são depositadas nos sedimentos do rio, o poluente é volátil porque pode ser reduzido a gás ou vapor a temperaturas ambientes, o poluente é quimicamente reativo, e a forma do leito do rio é desigual. Também é necessário determinar quais são as principais questões que afetam a concentração final de poluentes no rio, bem como a taxa de fluxo de poluentes em suas águas. Esta atividade ajuda os alunos a refletir sobre os aspectos matemáticos envolvidos neste problema, permitindo-lhes compreender este fenômeno para que possam resolver criticamente esta situação, transformando-a no bem-estar dos membros de sua comunidade.
Asserção Articulada da US	*Na atividade descrita, o professor apresenta uma situação-problema baseada em um problema real, sendo que os alunos ficaram responsáveis por coletar os dados e investigar o problema. No desenvolvimento da atividade, são consideradas alguns pressupostos, com o objetivo de simplificar e resolver o modelo matemático. Na elaboração de pressupostos, há o desenvolvimento de uma reflexão crítica sobre os dados coletados, levando-se em consideração os principais aspectos que influenciam no fenômeno estudado. O objetivo com a atividade está aliado com uma perspectiva sócio crítica, que visa auxiliar os alunos a refletir sobre os aspectos matemáticos envolvidos na situação, e compreender o fenômeno a partir de uma reflexão crítica sobre a situação.*

Fonte: as autoras

A Unidade de Significado US1.2.32.16 destaca uma atividade de modelagem matemática cujo tema é recorrente e relevante, a poluição ambiental (Quadro 49). A situação-problema proposta permite aos alunos refletirem a respeito da concentração de poluentes em um rio. Para resolver o problema algumas suposições foram discutidas, por exemplo, velocidade média do rio, mudança no nível da água, taxa de vazão, a concentração de poluentes no rio, mudança de temperatura, precipitação durante o período de coleta de dados, dente outras. Evidencia-se também que o objetivo da atividade proposta era o de possibilitar aos alunos uma reflexão sobre os aspectos matemáticos envolvidos no problema, de modo a compreender o fenômeno para que fosse possível resolver a situação-problema, além de refletirem a respeito da qualidade de vida dos membros da comunidade.

Quadro 50 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.41.16

Título: Evidence of Reformulation of Situation Models: Modelling Test Before and After a Modelling Class for Lower Secondary School Students	
Código da US	**US1.2.41.16**
Unidade de Significado (US)	Para ilustrar este ponto, vamos olhar para o modelo matemático de quantificar as horas da noite (Ikeda 2013). Embora a fórmula matemática tenha sido criada e descrita no hemisfério norte, como mostra a Fig. 29.1, se considerarmos um cenário mais geral, podemos perguntar como seria a situação no hemisfério sul. Então, se rolarmos ao longo do gráfico da fórmula criada, notamos que a função também é expressa em termos de valores negativos, como mostrado na Fig. 29.2. Os valores negativos para as latitudes podem ser considerados para representar e quantificar as horas da noite no hemisfério sul, estendendo assim a aplicabilidade da fórmula original. **Fig. 29.1** Night time in the northern hemisphere  **Fig. 29.2** Night time in both hemispheres 
Asserção Articulada da US	*A atividade comtempla o estudo de um fenômeno real, a duração da noite. O problema proposto, foi retirado da literatura e envolve quantificar as horas da noite no hemisfério norte, porém os autores apontam que para um cenário mais geral pode-se qustionar como seria a situação para o hemisfério sul. Uma análise do modelo matemático é realizada, visando apresentar que as latitudes negativas podem ser utilizadas para quantificar as horas da noite no hemisfério sul.*

Fonte: as autoras

O Quadro 50 e o 51 dizem respeito à mesma atividade de modelagem matemática, porém publicadas em edições diferentes do ICTMA.

Quadro 51 - Descrição da Unidade de Significado US 1.2.33.17

Título: Modelling as Interactive Translations Among Plural Worlds: Experimental Teaching Using the Night-Time Problem	
Código da US	**US 1.2.33.17**
Unidade de	Lições experimentais com o Problema da Noite para os estudantes japoneses do 10º ano foram realizadas durante um período de 100 minutos, usando uma investigação estruturada.

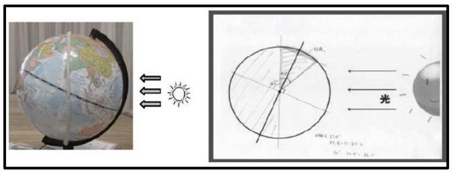
Significado (US)

Em nossa abordagem concreta, propomos introduzir os alunos japoneses do 10º ano ao Problema da Noite (Ikeda 2013), no qual a noite y (horas) na latitude x (° N) pode ser estimada e investigada pela observação no mundo real, e, em seguida, usando um globo, desenhando / medindo figuras geométricas, construindo uma fórmula e criando um gráfico envolvendo x e y.

No primeiro caso, os alunos se deparam com a pergunta simples: por que o dia na latitude norte mais alta se torna tão próximo do solstício de verão? Ou, inversamente, por que a duração da noite de verão diminui à medida que a latitude norte aumenta?

Em nosso exemplo concreto, os estudantes analisarão três casos específicos, a saber, a duração da noite na latitude 66.6 ° N (latitude do sol da meia noite), na latitude 0 ° (equador) e na latitude 33.3 ° N (metade no meio) tudo ao mesmo tempo, perto do meio do verão.

[...] com o objetivo de transferir o modelo de uma figura de visão lateral para uma baseada em um círculo visto do Polo Norte, tendo em conta a inclinação do eixo da Terra como 23,4 °.



Na Fig. 33.1 (esquerda), P é latitude norte θ, ∠QOR = 23,4 ° por causa do meio do verão e ∠ORP = ∠R. Considerando o círculo de modo que PR se torne o raio como mostrado na Fig. 33.1 (direita), o tempo noturno é formulado como 2 / 15·β (= 24 × 2β / 360) onde cos β é RQ / RS = RQ / PR. A propósito, como tan θ é RO / PR e tan 23.4 ° é RQ / RO da Fig. 33.1 (esquerda), a seguinte relação é derivada.

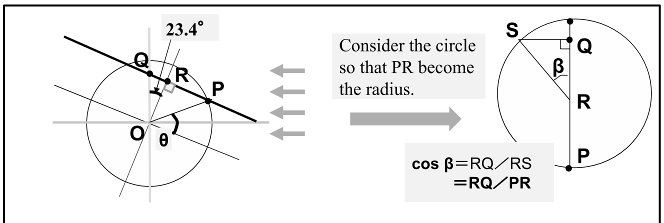


Fig. 33.1 Formulation of the night-time function

$$\cos\beta = \frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{PR}} = \frac{\mathrm{RO}}{\mathrm{PR}}\cdot\frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{RO}} = \tan\theta\cdot\tan(23.4) \; ; \quad y = \frac{2}{15}\cos^{-1}\left\{\tan(23.4)\cdot\tan x\right\}$$

Portanto, o período noturno y (horas) é formulado usando latitude norte x (°) como segue:

[...] seu gráfico fornece uma correlação simultânea ao Problema da Noite nas latitudes meridionais, bem como a compreensão de que uma diferença de um grau na latitude em países de alta latitude como a Noruega e a Suécia tem maior impacto nas horas noturnas do que em países de baixa latitude, como o Japão.

A aula experimental, baseada no Problema da Noite, ocorreu por 100 minutos e consistiu nas três fases seguintes (P1, P2, P3).
P1: Compreender as razões subjacentes ao fenómeno do sol da meia-noite e compará-lo com o período noturno a 33.3 °N, a meio entre 0 ° N e 66.6 ° N. (A latitude 33.3 ° N na verdade corresponde à da cidade de Kochi no Japão e 66.6 ° N é próxima da cidade de Bergen na Noruega, que será apresentada mais adiante no estudo). Sentimentos simples sobre o mundo real e insights derivados da manipulação do globo. Espera-se que sejam derivados dos alunos.
P2: Considerar como verificar as previsões propostas pelos alunos. Uma investigação, desenhando / medindo um modelo geométrico ou verificando o tempo real noturno na latitude de 33,3 ° N no Japão, é esperada para ser realizada pelos estudantes.
P3: Examinar e construir o modelo geométrico adicional refletindo o resultado de P2.

As quatro perguntas seguintes foram apresentadas aos alunos pelo professor, a fim de analisar suas traduções interativas entre quatro mundos:
Q1 apresentado durante P1: Quantas horas de tempo nocturno calcula a latitude 33.3 ° N?
Q2 posou antes de P2: Como você poderia checar sua estimativa do período noturno na latitude 33,3 ° N?
Q3 posou antes de P3: Se o resultado esperado foi incompatível com o resultado de outro mundo, qual poderia ser o motivo?
Q4 posou após P3: Quais outros problemas você quer considerar em seguida?

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
O ensinamento real ocorreu de acordo com as três partes seguintes:(1) apresentando a situação geradora deste problema do mundo real e explicação sobre o motivo do sol da meia-noite; (2) considerando a noite de latitude 33.3 ° N e (3) reconsidere. - Efetuar quaisquer incompatibilidades entre os resultados, desenhando/medindo a figura da vista lateral e a duração real da noite de 33.3 ° N.

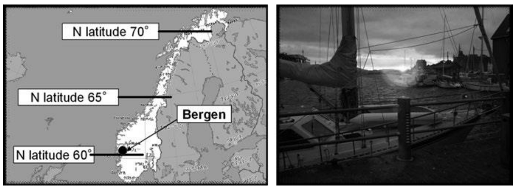


Fig. 33.2 Bergen City in Norway (at 10:41) on 19 June

A seguinte situação utilizando várias fotos (Fig. 33.2) foi apresentada aos alunos na introdução: Fomos para a cidade de Bergen no norte da Europa no meio do verão. A cidade de Bergen está localizada na latitude 60 ° N na Noruega, como mostra a Fig. 33.2 (esquerda). Chegamos tarde da noite de 19 de junho e tivemos um jantar às 21:30. Depois do jantar, saímos do restaurante e ficamos surpresos ao ver que o sol ainda não havia se posto, como mostra a Fig. 33.2 (direita). A hora do meu relógio tinha passado das 10:30 da noite. Por que o dia é tão longo aqui em Bergen? No Japão, é escuro como breu às 22:30. Eu ouvi de alguém sobre o Sol da Meia-noite em latitudes mais altas do norte. Mas eu não entendo porque.

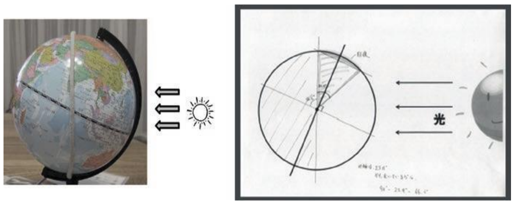


Fig. 33.3 Explanation of midnight sun by a student

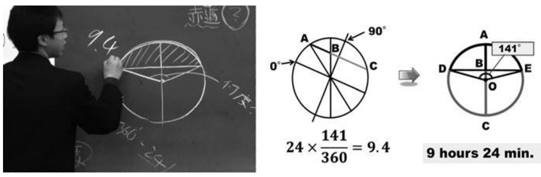


Fig. 33.4 A student considers the circle viewed from the North Pole

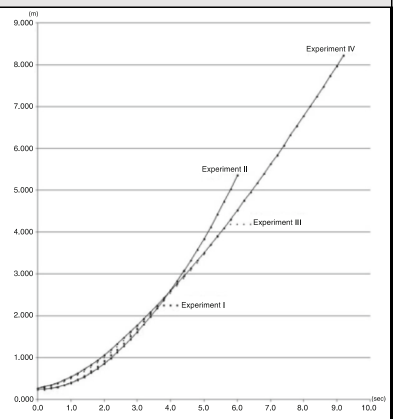
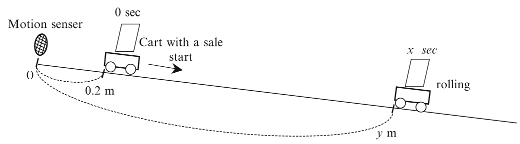
Por fim, a professora perguntou a um aluno que reconsiderou o problema vendo um círculo do Pólo Norte para explicar o motivo da incompatibilidade. Este estudante explicou que a relação entre a duração da noite e a duração da noite e diurna é diferente da relação entre o ângulo noturno e o ângulo de 1 dia (360 °), como mostra a Fig. 33.4 (esquerda). Este estudante desenhou um círculo de centro O com diâmetro AC na visão lateral da Terra e mediu ∠DOE (141 °) de tempo noturno (Fig. 33.4 à direita). Isto suportou uma resposta de 9 h 24 min. A maioria dos estudantes parecia entender por que havia a incompatibilidade e a necessidade de mudar o modelo da figura da visão lateral.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Asserção Articulada da US</td>
<td>
A noite y (horas) na latitude x (ºN) pode ser estimada e investigada pela observação no mundo real, e usando um globo, desenhando/medindo figuras geométricas, construindo uma fórmula e criando um gráfico envolvendo x e y.
É necessário desenvolver e familiarizar-se com um modelo funcional usando trigonometria. Este é o mundo operacional simbólico que nos permite considerar o fenômeno algebricamente.
O tempo noturno y (horas) é formulado usando latitude norte x como segue

$$y = \frac{2}{15}\cos^{-1}\{\tan(23{,}4) . \tan x\}$$
</td>
</tr>
</table>

Fonte: as autoras.

As Unidades de Significado US 1.2.41.16 e US1.2.33.17 retratam uma pesquisa com modelagem matemática e aplicações realizada especificamente no ambiente escolar por meio de aulas experimentais associadas à duração da noite. A experimentação foi feita por meio da observação no mundo real, e, em seguida, usando um globo terrestre, o desenho e as medições de figuras geométricas. As questões *por que o dia na latitude norte mais alta se torna tão próximo do solstício de verão? Ou, inversamente, por que a duração da noite de verão diminui à medida que a latitude norte aumenta?* foram o ponto de partida para o estudo de um exemplo concreto com a duração da noite na latitude 66.6 ° N (latitude do sol da meia noite), na latitude 0 ° (equador) e na latitude 33.3 ° N (metade no meio) tudo ao mesmo tempo, perto do meio do verão. A partir de uma suposição sobre a inclinação da terra o uso da trigonometria possibilitou a obtenção de um modelo geométrico e de um modelo trigonométrico. O papel do professor como questionador durante a atividade é enfatizado na atividade de modo a auxiliar os alunos no desenvolvimento dos modelos matemáticos. A partir dos experimentos um problema foi proposto pelo professor a fim de que os alunos explicassem a duração da noite no Japão, especificamente o fenômeno denominado *Sol da Meia Noite* em latitudes mais altas do norte do Japão. A explicação foi feita pelos estudantes usando o círculo do Pólo Norte para explicar o motivo da incompatibilidade, que a relação entre a duração da noite e a duração da noite e diurna é diferente da relação entre o ângulo noturno e o ângulo de 1 dia.

Quadro 52 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.49.16

Título: A Mathematical Modelling Challenge Program for J.H.S. Students in Japan	
Código da US	**US1.2.49.16**
Unidade de Significado (US)	O programa de desafio foi realizado para os alunos do nono ano do ensino fundamental no sábado, 16 de fevereiro de 2013, na Universidade de Educação de Kyoto. Oito estudantes de duas escolas em Kyoto participaram do programa de desafio. Experimento A Primeiramente, tratamos uma aproximação de função quadrática em relação ao fenômeno de um PAScar descendo a encosta naturalmente. A inclinação da enconsta é de cerca de 1.81. Os alunos foram solicitados a examinar a relação entre o tempo (x segundo) e a distância (y metro) quando um PAScar descia a encosta. No experimento I, eles mediram a mudança no tempo e na distância quando o carro rolou por uma distância de 2 m. Os alunos extraíram o gráfico dos dados e matematizaram o gráfico. Os alunos foram obrigados a responder o seguinte problema: Tarefa PAScar A Quando o carrinho desce a encosta na mesma condição, como você prevê os seguintes itens (i) a distância que o carrinho percorre em 5 s (ii) o tempo que leva para o carrinho rolar 6 m? No experimento II, depois que os alunos fizeram uma previsão matemática, eles realizaram um experimento de medição no qual o carrinho rola 6 m. Eles confirmaram o tamanho do erro e a precisão da previsão. A Figura 49.1 mostra os gráficos do experimento I e II.  **Fig. 49.1** The graph of experiments I, II, III and IV  **Fig. 49.2** The diagram of experiments III and IV Experimento B Em segundo lugar, nós podemos experimentar as relações de tempo (x segundo) e distância (y metro) quando o PAScar com um quadrado de 25 cm por 25 cm desce por um declive. No experimento III, os alunos mediram o tempo e a distância enquanto o carrinho descia para uma distância de 4 m. Os alunos extraíram o gráfico dos dados novamente e matematizaram o gráfico. Os alunos foram obrigados a responder o seguinte problema: Tarefa PAScar B

	Quando o carrinho cai nas mesmas condições, como você prevê os seguintes itens (i) a distância que o carrinho percorre em 7 s (ii) o tempo que leva para o carrinho rolar 8 m? No segundo curso, em primeiro lugar os alunos estudaram como resolver a seguinte Tarefa de Geração de Eletricidade em Casa referente à geração doméstica de eletricidade a partir da luz do sol por cerca de duas horas da manhã. Tarefa de Geração de Eletricidade em Casa Na casa de Giraud, o consumo médio mensal de eletricidade é de 500 kWh, e a conta mensal de eletricidade é de 12.000 ienes. O consumo de eletricidade durante o dia é entre 20% e 30% do total. Sua família falou sobre economia de energia e fez um plano para anexar 24 peças de painéis solares de 190 W com uma produção de 4,56 kW este mês por um custo de dois milhões de ienes para equipamentos. No caso da família Giraud, os subsídios do estado, da prefeitura e da cidade chegam a 400.000 ienes. A companhia de energia elétrica compra o excesso de eletricidade gerada durante o dia por 42 ienes por 1 kWh por enquanto. Não há carregador de bateria. Quanto à soma total (incluindo o custo do equipamento) da conta de eletricidade, como você acha que isso vai mudar? 1. Nos dois casos seguintes, desenhe gráficos para a conta de eletricidade y e n após x meses e compare os dois gráficos: (a) quando não fixam os painéis solares (b) quando fixam os painéis solares. 2. Quantos meses após a instalação dos painéis solares a soma total da conta de eletricidade será menor do que antes da instalação? Em segundo lugar, à tarde os alunos trabalharam em grupos nos seguintes Problemas A, B, C de renda e gastos da empresa de energia elétrica sequencialmente. Finanças da Companhia de Energia Elétrica Situação real: A empresa de energia elétrica K gera 150 bilhões de kWh de eletricidade por ano. 30% disso é gerado pela geração de energia fotovoltaica e comprado pela empresa de energia elétrica K por 42 ienes por 1 kWh. 70% é gerado através da geração de energia térmica com um custo de combustível de 7,4 ienes por 1 kWh. Além disso, custa 1,2 mil milhões de ienes por ano para outras despesas (despesas de pessoal, custo de equipamento, etc.). Por outro lado, eles vendem 40% da geração anual para 20 ienes / kWh para as famílias em geral e vendem os 60% restantes para 12 ienes / kWh para as empresas. Problema A: Quando há uma mudança na renda: 1. Quanto é a liquidação anual de receitas e despesas das contas? 2. Se mudarmos apenas a taxa geral de venda para x e n / kWh e a liquidação de contas for de 100 milhões de ienes, qual será a função? 3. Se mudarmos apenas a taxa de venda das empresas para x ienes / kWh e a liquidação de contas for de 100 milhões de ienes, qual será a função? 4. A empresa K aumenta o preço para x ienes / kWh para famílias em geral e a taxa de venda para y ien / kWh para empresas, e espera que as contas anuais sejam zero. Qual é a equação? Que tipo de aumento de preço você sugeriria? Problema B: Quando há uma mudança nas despesas: 1. Quando os outros gastos forem reduzidos pela metade, que porcentagem de geração de energia fotovoltaica será necessária para se livrar do déficit? 2. Quando as outras despesas são reduzidas em 25%, qual o preço de compra da geração de energia fotovoltaica seria cancelar o déficit? 3. Deixe os outros gastos serem reduzidos em x% e a porcentagem de geração de energia fotovoltaica em%. Qual é a equação para cancelar o déficit? Problema C: Quando mudamos as condições da renda e das despesas, sugerir o seu plano para quebrar mesmo
Asserção Articulada da US	*As atividades foram desenvolvidas com alunos do nono do Ensino Fundamental em um programa de desafio. Uma atividade foi desenvolvida com base em experimentos empíricos realizados com carrinhos de brinquedo (PAScar), sendo que o problema a ser resolvido consistia em fazer previsões da velocidade e tempo ao levar em cosideração os percursos realizados pelos carrinhos. O modelo matemático foi construído utilizando os dados coletados durante os experimentos, o conjunto de dados foi utilizado para um ajuste de curvas. Um segundo experimento foi realizado, mas com o objetivo de validar os resultados obtidos. Outra atividade de modelagem também foi abordada no artigo, cujo tema foi a geração de eletricidade. Num primeiro momento tratou-se da geração de eletricidade em casa, em que um contexto e os dados foram fornecidos. O problema apresentado envolve orientações de estratégia de resolução*

	matemática em relação a situação-problema. Em um segundo momento, os alunos trabalharam com as finanças de uma companhia de energia elétrica. A situação-problema envolvia uma situação real com dados reais.

Fonte: as autoras

A Unidade de Significado US1.2.49.16 do Quadro 52 apresenta atividades de modelagem matemática desenvolvidas no contexto de um programa de desafio para o nono ano do ensino fundamental. Uma atividade de modelagem matemática foi desenvolvida por meio de um experimento empírico realizado com carrinhos de brinquedo (PAScar), cujo percurso do carrinho ao longo do tempo foi analisado. Para a obtenção de um modelo matemático referente a situação, os alunos fizeram um ajuste de curvas utilizando os dados coletados durante a execução do experimento. Os resultados foram validados por meio de um segundo experimento realizado. Outra atividade de modelagem matemática desenvolvida discutia em um primeiro momento a geração de eletricidade em casa e em um segundo momento uma análise das finanças de uma companhia de energia elétrica. Detalhes sobre a resolução desta atividade não foram evidenciados nos textos.

Quadro 53 - Descrição da Unidade de Significado US 1.2.50.16

Título: Modelling the Wall: The Mathematics of the Curves on the Wall of Colégio Arquidiocesano in Ouro Preto	
Código da US	**US 1.2.50.16**
Unidade de Significado (US)	Esse contexto nos permitiu desenvolver modelos relacionados as curvas ao longo de uma parede de uma escola e para verificar se as formas dessas curvas foram relacionadas a curvas exponenciais, parabólicas ou catenárias. As curvas na parede fornecem uma visão interessante sobre a matemática de um recurso arquitetônico. A Figura mostra as curvas na parede do Colégio Arquidiocesano. 
Asserção Articulada da US	*A situação-problema envolve uma situação real, cujo problema é analisar a curva que mais adequada para representar a construção arquitetônica. Trata-se de uma situação que envolve o contexto cultural de uma determinada região. A partir de uma fotografia de um muro com curvas, o modelador da atividade procurou analisar qual curva era a mais adequada para representar a construção arquitetônica, uma parábola* ($y = x^2$)*, o gráfico de uma função cosseno hiperbólica* ($y = cosh(x)$) *e catenária* $\left(y = \frac{cosh(x)-1}{cosh(1)-1}\right)$.

Fonte: as autoras

No âmbito da etnomodelagem, o Quadro 53 contempla a descrição da Unidade de Significado US 1.2.50.16 que aborda o desenvolvimento de modelos matemáticos a partir das curvas ao longo de uma parede de uma escola na região histórica de Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil. Curvas como exponenciais, parabólicas ou catenárias foram estudadas e puderam fornecer uma visão sobre a matemática de um recurso arquitetônico na parede de um Colégio Arquidiocesano. A ênfase na situação cultural de uma região por meio da matemática e do uso de modelagem matemáticos é abordada e o ajuste de curvas como recuso da modelagem matemática indicado, bem como a análise de modelos matemáticos.

Quadro 54 - Descrição da Unidade de Significado US 1.2.7.17

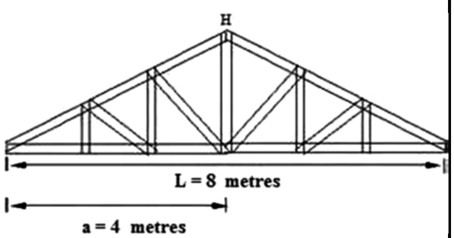
Título: The Primacy of 'Noticing': A Key to Successful Modelling	
Código da US	**US 1.2.7.17**
Unidade de Significado (US)	A partir do trabalho dos alunos em um evento extracurricular, identificamos atividades globais e específicas que denotam um caráter estratégico e explicativo, que evidenciam aspectos antecipatórios da atividade mental dos alunos durante a modelagem. O cenário da pesquisa foi um desafio de modelagem de dois dias patrocinado anualmente pelo AB Paterson College, Queensland, Austrália. O evento contou com alunos dos anos finais do nível secundário, sendo formado por grupos de 20 alunos orientados por um especialista em modelagem. Cinco equipes de quatro alunos, de escolas do Sudeste de Queensland e de Cingapura. Inicialmente foi utilizada uma tarefa de modelagem introdutória, *carro aéreo*, baseada em um relatório de jornal de Shamroth Reiff. **Carro aéreo** De acordo com o *New Hampshire Sunday News de* 7 de maio de 2000, dois moradores que estavam dormindo no Domingo de Páscoa de 2000 tiveram a fuga mais feliz. Um carro bateu no teto do quarto no andar de cima e aterrissou no quarto. O carro estava sendo conduzido por uma jovem mulher pela Hampstead Road às 03h35min quando saiu da estrada e passou por uma propriedade vizinha antes de se erguer a uma inclinação de 20%, e 'viajar' no ar. O carro voou sobre três carros estacionados viajando a uma distância horizontal de 48,62 m antes de bater no telhado. O ponto de impacto no telhado foi cerca de 30 cm menor do que o ponto de decolagem, pois a casa estava em nível menor do que o chão. A equipe foi convidada a nomear um porta-voz para apresentar sua solução a todo o grupo. Ele começou por salientar que seu grupo havia assumido que o motorista não tinha acelerado após sair da estrada, pois isso afetaria sua conclusão (*GNe*). Ele também esboçou a interpretação de seu grupo da situação, explicando que pretendiam usar a teoria sobre um projétil em movimento e modelar a trajetória do carro no ar por meio de uma parábola. No entanto, esta não era a trajetória 'real', o que significaria que o carro estava viajando com velocidade reduzida se comparado ao percurso na estrada (*SNe*). Ele acrescentou a trajetória 'real' para essa velocidade explicando que, se encontrassem a velocidade para seu modelo simples estava acima ou perto do limite de velocidade, não haveria necessidade de refinar sua abordagem para modelar o caminho real do carro, já que eles já seriam capazes de responder à pergunta. Ela seria considerada em alta velocidade (*SNs)*. Após a primeira tarefa: As equipes, então, independentemente começaram a formular problemas após um *brainstorming* feito pelas equipes de professores acerca de possíveis situações de interesse. A equipe de ouro estava interessada na noção de "riqueza" apresentada por um estudante australiano que estava considerando a modelagem econômica como sua futura carreira. Suas ideias iniciais para uma situação para modelar incluíram mudanças ao longo do tempo em (a) riqueza na porcentagem de uma população e (b) diferentes áreas do mundo e (c) o poder de compra de uma população que poderia ser considerada rica. Esta discussão conduziu a questões iniciais: quão rica pode uma pessoa ou país específico pode ser? Quais são as condições ideais para aumentar a riqueza? A equipe utilizou uma pesquisa na Internet sobre a distribuição de renda nos países do G20. A equipe finalmente decidiu estudar a distribuição de renda na Austrália e na Índia com a questão norteadora: *quão rico você consegue?* Escolher uma situação para modelagem requer reflexões proativas iniciadas pelo grupo sobre situações potenciais, de forma que o grupo se convença de que a situação escolhida pode gerar

	um problema que pode ser modelado matematicamente no tempo, dada a experiência dos seus membros. Mas é necessário sugerir possíveis situações que são de interesse. *Quais variáveis existem?* O produto interno bruto (PIB) per capita; Taxa de consumo de chocolate; Obesidade proporção. *Quais dados precisamos?* PIB per capita de países selecionados. A proporção de pessoas obesas nos países selecionados. A quantidade de chocolate consumida por país durante um determinado ano. *De que matemática precisamos?* Usamos tabelas e gráficos para representar os dados que encontramos. Visualmente do gráfico, encontramos o melhor ajuste linha de tendência e obter a equação do mesmo. Em seguida, usamos os dados para gerar uma regressão com base na linha e produzir uma equação para modelar os dados. Usando a equação, podemos prever a quantidade de consumo de chocolate, em seguida, compará-lo com mais dados para testar e refinar nosso modelo. (*GNs*) *Sabemos como resolver esse modelo matemático?* Sim. Para descobrir se existe uma relação entre o PIB per capita e a quantidade de choco-consumidos tardiamente, substituímos o PIB per capita pela equação que encontramos no gráfico (Consumo de chocolate x o PIB per capita) e comparar o resultado com os dados reais. Repetimos isso com o gráfico da proporção de pessoas obesas em um país x o consumo de chocolate para encontrar a relação entre essas duas variáveis. (*GNs*) *O que essa saída significa matematicamente? No contexto real?* Se os resultados calculados estiverem próximos dos dados reais dos países, isso provaria que é de fato uma relação entre a quantidade de chocolate consumida, o PIB per capita e a proporção de pessoas obesas em um país. (*GNe*). As justificativas dos casos escolhidos para elaboração indicam que os alunos identificaram uma questão que consideram significativa. As intenções de modelagem são relevantes para satisfazer o interesse (equipe de ouro) e curiosidade (equipe de prata). De uma perspectiva matemática ética, ambas as equipes acrescentaram um segundo critério para a colocar a pergunta: A matemática envolvida precisava ser complexa (equipe Gold), e a questão tinha que ser 'capaz de ser modelada usando a modelagem matemática '(equipe de prata) (dados do questionário). As hipóteses iniciais (Fig. 7.5) de ambas as equipas envolvidas apenas *específicos estratégica Notando* (*SN s*). Eles contêm elementos antecipatórios que incluem simplificações básicas para modelar a criação (por exemplo, a terceira suposição para Silver). Na implementação da proposta, decisões pragmáticas foram tomadas quando limites de ferramentas tecnológicas, ou dados insuficientes, foram realizados. A atividade metacognitiva direciona a implementação global da modelagem e os impactos sobre como uma formulação específica e s matematização permanecem relevantes (ou não) para a tarefa atribuída a ele.
Asserção Articulada da US	*Duas atividades cuja situação inicial se baseia no interesse dos alunos e em duas reportagens de jornal foram desenvolvidas em um projeto extraclasse. O projeto foi desenvolvido com alunos da Educação Secundária e orientados por um professor. A primeira atividade foi colocada pelo professor, como uma atividade introdutória, e as demais foram eleitas e desenvolvidas pelos alunos. Considera-se importante para o encaminhamento das atividades que os professores deem sugestões de temas aos alunos. Na resolução das atividades os professores auxiliam o encaminhamento quando questionam os alunos sobre: Quais variáveis existem? Quais dados precisamos? De que matemática precisamos? Sabemos como resolver esse modelo matemático? O que essa saída significa matematicamente? No contexto real? A comunicação da atividade foi realizada por um porta-voz. A atividade metacognitiva direciona a implementação global da modelagem e os impactos sobre como uma formulação específica e s matematização permanecem relevantes (ou não) para a tarefa atribuída a ele. Tendo identificado separadamente o movimento do projétil como um modelo apropriado, a maioria das equipes começou a resolução sem considerar qualquer correção para resistência do ar (para um objeto tão grande).* $S_y = u_y t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \mathrm{S_x = u_x t}$ $S_x = u_x t$

Fonte: as autoras

Já a Unidade de Significado US 1.2.7.17 do Quadro 54 aborda duas atividades de modelagem matemática com ênfase no potencial da atividade metacognitiva para o sucesso em modelagem matemática. A situação inicial das atividades adveio do interesse dos alunos e em duas reportagens de jornal foram desenvolvidas em um projeto extraclasse com alunos da Educação Secundária e orientados por um professor. A primeira atividade foi colocada pelo professor, como uma atividade introdutória, e as demais foram eleitas e desenvolvidas pelos alunos. A atividade metacognitiva direciona a implementação global da modelagem e os impactos sobre como uma formulação específica e a matematização permanecem relevantes (ou não) para a tarefa atribuída a ele. A pesquisa foi desenvolvida em um desafio de modelagem de dois dias patrocinado por uma agência local da Austrália. O evento contou com alunos dos anos finais do nível secundário, sendo formado por grupos de 20 alunos orientados por um especialista em modelagem, sendo as atividades desenvolvidas por cinco equipes de quatro alunos. O desenvolvimento da primeira atividade *Carro aéreo* possibilitou a formulação de problemas de maneira independente, servindo como um estopim metacognitivo para os alunos. Que a partir daí desenvolveram atividades de acordo com seu interesse, como por exemplo a noção de riqueza no mundo e como aumentar a riqueza de determinada população, ou ainda, o produto interno bruto (PIB) per capita; a taxa de consumo de chocolate; e o tema obesidade. A atividade metacognitiva durante o desenvolvimento das atividades foi analisada e o resultado indicou que tal atividades parece direcionar a implementação global da modelagem e os impactos sobre como uma formulação específica e a matematização permanecem relevantes (ou não) para as tarefas.

Quadro 55 - Descrição da Unidade de Significado US 1.2.13.17

Título: Ethnomodelling as the Mathematization of Cultural Practices	
Código da US	**US 1.2.13.17**
Unidade de Significado (US)	As informações de um grupo cultural contratante de telhados podem descrever facilmente as práticas da construção de uma empena de telhado, que é o tipo mais comumente usado de construção de telhados inclinados. Depois de escolher o tipo de telha, como telhas vermelhas ou telhas para iniciar a construção do telhado, é necessário que as coberturas sejam calculadas por meio dos declives das vigas que formam os triângulos na empena. Em geral, o "teto é constituído pela composição de planos inclinados. O telhado do plestão é o que tem apenas dois planos inclinados. É chamado o telhado de duas águas". Contratantes de telhados usam triângulos porque são estáveis e rígidos e têm imobilidade. Portanto, o principal objetivo do telhado é fornecer proteção  contra os ventos, pois eles devem ser fortes o suficiente para resistir a ventos fortes, a umidade, a neve e ao gelo. A Figura 13.1 mostra o esquema de um frontão usado nas construções de telhados brasileiras.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

De acordo com este procedimento, para cada metro (100 cm) que corre horizontalmente, há um aumento vertical de 30 cm. Assim, se o comprimento da empena for L = 8 m, os empreiteiros de telhados realizam o cálculo da porcentagem usando a = 4 m, que é a metade dessa medida. Então, eles multiplicam esse resultado pela porcentagem da inclinação do telhado. Por exemplo, 30% de 4 m corresponde à altura de 1,20 m.

Um dos nove grupos de estudantes decidiu trabalhar com relações trigonométricas envolvidas na construção da empena do telhado em uma casa a partir dos pontos de vista dos capatazes.

De acordo com as informações obtidas pelos construtores, os alunos deste grupo determinaram que o acabamento da telha romana (um dos diferentes tipos de telhas no Brasil) é de 40%, o que significa que, para cada metro (100 cm) usados horizontalmente, há um aumento vertical de 40 cm. Assim, eles aplicaram o método usado pelos trabalhadores para determinar a altura do telhado. Por exemplo, se o comprimento de uma casa for 10 m, eles dividirão o comprimento por 2 e multiplicaram o resultado pela porcentagem do caimento da telha romana. A Figura 13.2 mostra o procedimento dos construtores que foi usado pelos alunos. Posteriormente, os alunos deste grupo perceberam a relação entre o conhecimento matemático dos trabalhadores com o método acadêmico para determinar a altura do teto aplicando o conhecimento trigonométrico associado à definição de tangente (Fig. 13.3).

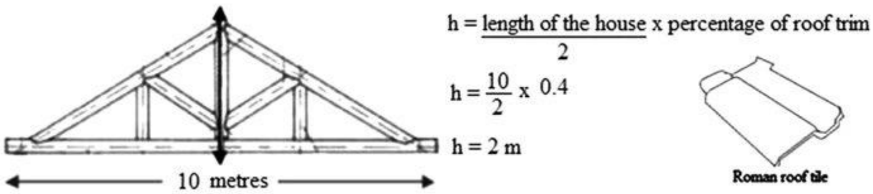


Fig. 13.2 Procedimento dos construtores usados pelos estudantes.

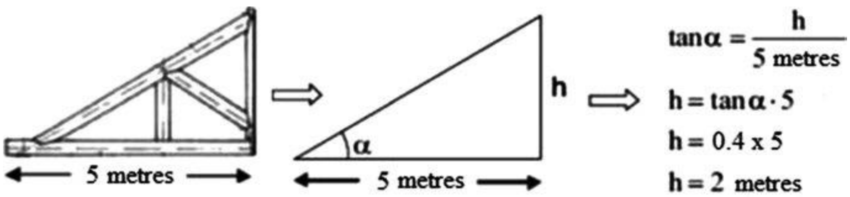


Fig. 13.3 Procedimento acadêmico usado pelos alunos

[...]um dos alunos deste grupo afirmou: “Consegui perceber a relação entre o conhecimento matemático utilizado por esses profissionais com matemática aplicada nas escolas ”

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Asserção Articulada da US

</td>
<td>

Duas configurações da atividade de modelagem matemática são colocadas. Uma relacionada a pratica dos construtores de telhados e outra relacionada ao trabalho pedagógico com conhecimentos escolares em contraste com a prática dos construtores.

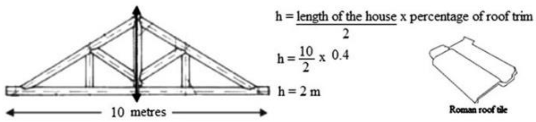
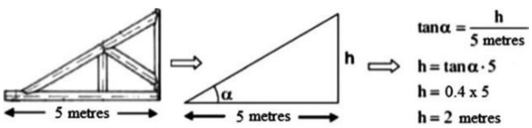


Fig. 13.2 *Procedimento dos construtores usados pelos estudantes.*



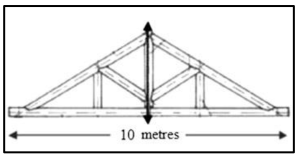
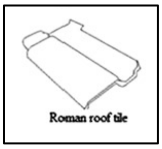


Fig. 13.3 *Procedimento acadêmico usado pelos alunos.*

A estrutura da atividade segue o dilema de que os fenômenos matemáticos só podem ser plenamente compreendidos dentro do contexto cultural em que foram desenvolvidos, por meio de dados reais e de hipóteses associadas ao contexto cultural dos dados e do fenômeno

</td>
</tr>
</table>

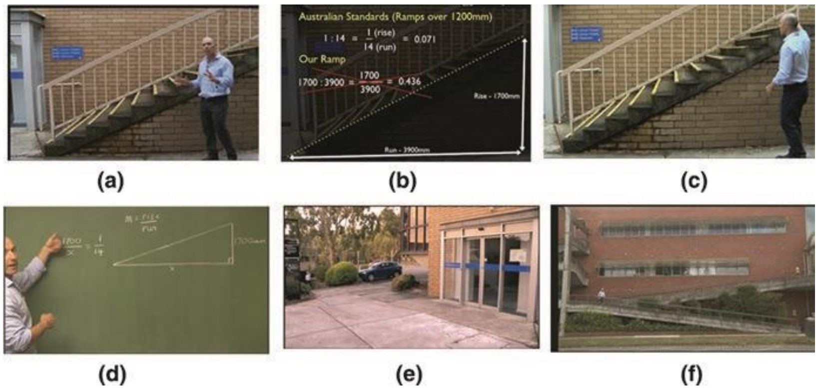
	investigado. *Procedimentos dos homens (pedreiros) usados pelos alunos* $H = \frac{altura\ da\ casa}{2}.porcentagem\ de\ inclinação\ da\ telha$ *Procedimento acadêmico usado pelos alunos* $tan \propto = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$ 

Fonte: as autoras

A Unidade de Significado US 1.2.13.17 aborda outro exemplar do uso da etnomodelagem como um meio para a matematização de práticas culturais usadas na sociedade como, por exemplo, a construção de talhados no Brasil (Quadro 55). A descrição aborda como se dá a construção dos telhados da maioria das casas brasileiras, bem como a matematização possível na construção destes telhados, sua forma e finalidade. A Unidade de Significado aborda o trabalho escolar com essa temática e traz o uso de modelos matemáticos advindos da trigonometria para analisar a construção da empena do telhado em uma casa a partir dos pontos de vista dos empreiteiros. Nessa atividade os alunos entrevistaram profissionais que constroem os telhados para coletar dados e informações que possibilitaram a análise matemática. Os procedimentos dos profissionais e dos estudantes são então comparados para buscar aproximações e a importância de um e do outro na sociedade. De modo geral, a estrutura da atividade segue o dilema de que os fenômenos matemáticos só podem ser plenamente compreendidos dentro do contexto cultural em que foram desenvolvidos, por meio de dados reais e de hipóteses associadas ao contexto cultural dos dados e do fenômeno investigado.

Quadro 56 - Descrição da Unidade de Significado US 1.2.14.17

Título: Enabling Anticipation Through Visualisation in Mathematising Real-World Problems in a Flipped Classroom	
Código da US	**US 1.2.14.17**
Unidade de Significado (US)	Poderia uma sala de aula invertida fornecer a situação ideal para exacerbar as restrições percebidas na modelagem ou aplicações na escola secundária através do uso criterioso de videoclipes (por exemplo, para a construção de rampas para cadeiras de rodas em uma sala de aula para atender aos padrões de código de construção) e o fomento intencional das habilidades de pensamento crítico associadas à modelagem? Como exemplo deste último, o professor pode planejar incluir no vídeo a exposição deliberada de ações para ajudar os estudantes na matematização de uma situação problema do mundo real. Dois estudos de sala de aula invertidos até o momento envolveram atividades de modelagem, um curso de equações diferenciais introdutórias em uma faculdade de artes liberais (Yong et al. 2015) e um curso de métodos numéricos em um curso de graduação em engenharia (Bishop 2013).

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


Capturas de tela (a) - (f) do vídeo.
Um dos exemplos práticos do uso do vídeo desta implementação de sala de aula invertida dizia respeito ao design de rampas de acesso para edifícios. A intenção de Ned em fazer o vídeo era "representar um problema que seria confrontado com frequência na construção e no design e em mostrar como a matemática é uma parte importante do processo de solução de problemas". O conceito matemático aplicado era gradiente, e o aspecto de resolução de problemas era “pensar em utilizar efetivamente o espaço”. Os alunos receberam dois vídeos caseiros sobre o tema gradiente: um vídeo instrutivo ensinando as habilidades envolvidas na descoberta do gradiente e um relacionado à necessidade de rampas paralelas em um espaço limitado para atender às regulamentações do edifício.
A partir de uma perspectiva de modelagem, o vídeo da rampa dispara perguntas que os espectadores podem colocar, como: É possível estabelecer rampas paralelas nesse espaço? Se não, que outras soluções se aplicariam? Se a intenção é estimular a antecipação quando matematizando os alunos na resolução posterior de problemas do mundo real, então, no contexto particular, o modelador poderia perguntar: Se eu usar esse modelo, ele fará o trabalho? Já foi usado antes? Como? Onde posso descobrir?
Por questionamentos como esse, ao recordar imagens dessa experiência vicária prévia com o vídeo da rampa, o modelador poderia desenvolver um senso de direção para a modelagem aplicada em uma situação diferente. Para que a tarefa envolva modelagem, não é apenas ver se a conversão de escadas existentes para uma rampa está em conformidade (Fig. 14.1a, b) ou calcular o comprimento de uma rampa que obedece (Fig. 14.1d), mas também trazendo restrições da situação, tais como alturas que não podem ser variadas (Fig. 14.1c), pontos de acesso e largura disponível (Fig. 14.1e), de modo que uma rampa possa ser construída de forma realista para membros da comunidade incapazes de andar pelas escadas. Isso pode significar pensar lateralmente, como o uso de rampas paralelas (Fig. 14.1f), se o espaço permitir.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Asserção Articulada da US</td>
<td>A configuração das atividades de modelagem matemática dos alunos é colocada a partir do uso de videoclipes sobre a situação real e as possibilidades de matematização da situação real. O vídeo sobre a construção de uma rampa pode disparar perguntas que os espectadores podem colocar: É possível estabelecer rampas paralelas nesse espaço? Se não, que outras soluções se aplicariam? Se eu usar esse modelo, ele fará o trabalho? Já foi usado antes? Como? Onde posso descobrir? O modelador poderia desenvolver um senso de direção para a modelagem de uma situação diferente, gerando uma nova configuração para o uso da matemática nas situações reais. A configuração da atividade de modelagem matemática neste caso não se dá vendo se a conversão de escadas existentes para uma rampa está em conformidade ou no cálculo do comprimento de uma rampa, mas também por meio das restrições da situação, tais como alturas que não podem ser variadas, pontos de acesso e largura disponível, de modo que uma rampa possa ser construída de forma realista para membros da comunidade incapazes de andar pelas escadas.</td>
</tr>
</table>

Fonte: as autoras

O Quadro 56 retrata a Unidade de Significado US 1.2.14.17 que aborda o uso da visualização para a matematização de situações reais a partir da abordagem de videoclipes em sala de aula. A pesquisa aborda a metodologia da sala de aula invertida e busca usar essa abordagem metodológica para potencializar o uso de modelagem matemática e aplicações no ambiente escolar. A partir de uma perspectiva de modelagem, um vídeo sobre a importância das rampas de acessibilidade auxilia os alunos na matematização de problemas do mundo real, como nas tarefas de modelagem, ver se a conversão de escadas existentes para uma rampa está em conformidade, ou calcular o comprimento de uma rampa que obedece, bem como as restrições da situação, tais como alturas que não podem ser variadas, pontos de acesso e largura disponível, de modo que uma rampa possa ser construída de forma realista para membros da comunidade incapazes de andar pelas escadas. Para tanto é enfatizado que o modelador poderia desenvolver um senso de direção para a modelagem de uma situação diferente, gerando uma nova configuração para o uso da matemática nas situações reais.

Quadro 57 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.18.17

Título: Context and Understanding: The Case of Linear Models	
Código da US	**US1.2.18.17**
Unidade de Significado (US)	Os alunos trabalharam na tarefa em duplas por duas aulas consecutivas no primeiro dia e, em uma terceira tarefa, dois dias depois (total de 150 min), quando os pares desenvolveram a atividade em grupos de quatro. Havia cinco versões paralelas diferentes da tarefa, envolvendo o custo de administrar clínicas de saúde em pequenas aldeias ou o custo de instalar poços seguros de água potável. As tarefas foram projetadas pelo professor de sala de aula, Peter, com a intenção de que o contexto da tarefa fosse importante e interessante. As diferentes versões permitiram que os pares de alunos que trabalhavam em isolamento relativo de outros com a mesma versão da tarefa para as duas primeiras lições colaborassem com aqueles que trabalhavam na mesma versão. A implementação da tarefa ocorreu quando a escola tinha uma semana focada na "divulgação de sala de aula", como parte da qual a escola doou dinheiro para clínicas no exterior. Além disso, o contexto era pessoal para Peter, pois ele já havia trabalhado na África como geólogo antes de sua carreira docente. Na seção intermediária da tarefa, os estudantes receberam modelos lineares de custos em duas clínicas de saúde diferentes (ou poços de água). Eles então geraram uma tabela de custos para cada um, examinaram a tabela para determinar onde os custos eram aproximadamente os mesmos e geraram uma tabela adicional "ampliando" com suas calculadoras para determinar com mais precisão onde os custos eram equivalentes. Em seguida veio a questão de maior interesse aqui. Os estudantes foram solicitados a responder para cada clínica de saúde: Qual é o custo para o tratamento de cada paciente? Na Tarefa do Poço de Água, a pergunta paralela foi: Qual é o custo para cada metro de profundidade do poço? Ao responder a essas duas perguntas, os alunos precisam matematizar o contexto. A questão levantada pela tarefa exigia que os alunos reconhecessem primeiro que o custo por paciente adicional é a taxa de variação do modelo de custo linear. Em situações como essa, em que os alunos se envolvem com o contexto, sua compreensão matemática se torna aparente (para si mesmos ou para um professor ou pesquisador) Meg escreveu: "para cada paciente adicional, custa US $ 19,75, porque é o gradiente e isso significa que a taxa aumenta". Kate também deixou claro seu método - ela calculou y (2) - y (1) e escreveu “cada paciente adicional custou US $ 17,50”. Quando Kit e Rani alcançaram a questão 7a (Qual é o custo para cada metro de profundidade de poço em Gondar?), ambos leram a pergunta, Kit então olhou para o modelo que eles receberam por bons custos em Gondar: CUSTO = 250 + 17,50 * metros perfurado. Usando sua calculadora,

	ela encontrou 250 + 17,5 × 1 = 267,50. A interpretação inicial de Kit foi encontrar o custo de perfuração de 1 m. Ela gravou US \$ 267,50 e depois percebeu que Rani havia registrado US \$ 42,50 [i.e. (10)/10].
Asserção Articulada da US	*Fala que com o objetivo de investigar taxa de variação o professor encaminhou duas situações problemas que levariam os alunos a investigar o mesmo problema matematicamente.* *As atividades de modelagem matemática são delineadas para contemplar o conteúdo matemático em questão, e os modelos matemáticos são disponíveis pelo professor para que os alunos consigam aplica-los às situações que estão modelando.* *Na finalidade de determinar o custo de cada paciente de um hospital pequeno, Kate propõe o modelo matemático:* *C=17.50n+390*

Fonte: as autoras

A Unidade de Significado US 1.2.18.17 aborda o uso de modelos lineares no ambiente escolar para potencializar tarefa de modelagem matemática (Quadro 57). Duas tarefas específicas servem como exemplares e foram desenvolvidas em duplas por duas aulas consecutivas no primeiro dia e, em uma terceira tarefa, dois dias depois (total de 150 min). Primeiramente cinco versões paralelas envolvendo o custo de administrar clínicas de saúde em pequenas aldeias ou o custo de instalar poços seguros de água potável foram disponibilizadas. E na sequência outra atividade foi trabalhada pelos alunos, porém intermediando as duas atividades, modelos lineares foram propostos para que os alunos conseguissem desenvolver suas habilidades com o conceito matemático e o entendimento do contexto no qual estão inseridos tais modelos.

Quadro 58 - Descrição da Unidade de Significado US 1.2.20.17

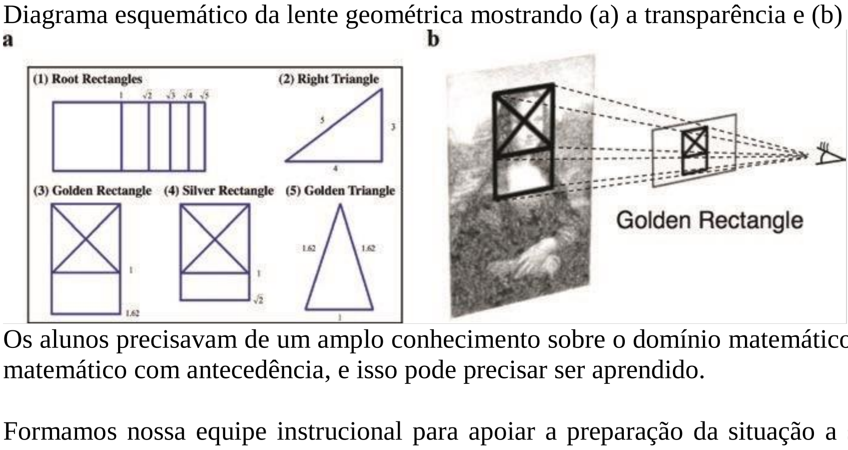
Título: How Students Connect Mathematical Models to Descriptions of Real-World Situations	
Código da US	**US 1.2.20.17**
Unidade de Significado (US)	Oitenta alunos do 11º ano foram divididos aleatoriamente em dois subgrupos de igual tamanho, um primeiro recebendo uma tarefa de modelagem e, na sequência, uma tarefa de modelagem inversa. O outro subgrupo recebeu as duas tarefas na ordem inversa. Uma atividade inversa de modelagem é a reformulação de um determinado modelo matemático em uma situação do mundo real. Chamamos essa atividade de “modelagem inversa”, e o objetivo do presente estudo foi testar os potenciais efeitos benéficos de tal “modelagem inversa” na modelagem (em seu sentido restrito, a formulação de uma situação do mundo real em um modelo matemática). A parte de modelagem consistiu em oito itens em que uma situação do mundo real foi descrita em palavras e os participantes tiveram que conectá-los com um modelo apropriado que poderia ser proporcional (ie da forma y = ax), com inclinação positiva (y = ax + b com a> 0), com inclinação negativa (y = ax + b com a <0) ou inverso proporcional (y = a / x). Cada modelo foi apropriado para dois dos oito itens ou situações indicadas. Exemplo de item da parte de modelagem (situação proporcional inversa) Para um evento de arrecadação de fundos, um comitê de ação quer descascar um recipiente cheio de batatas. Este trabalho levará várias horas. Qual fórmula denota apropriadamente a relação entre o número de membros da comissão que colaboram e o tempo necessário para terminar este trabalho?

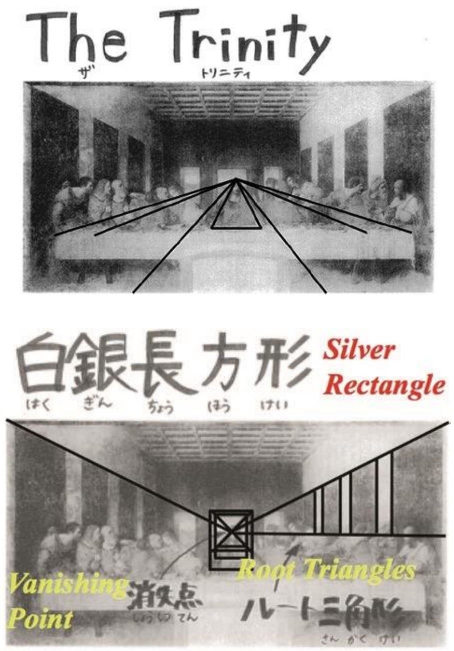
	- $y = ax$ - $y = ax + b$, $a > 0$ - $y = ax + b$, $a < 0$ - $y = a / x$ A parte de “modelagem inversa” também consistia em oito itens, mas os participantes agora tinham que conectar um dos quatro tipos de modelos com uma descrição em palavras de uma situação do mundo real para a qual esse modelo era apropriado. Item de exemplo da parte “modelagem inversa” Escolha qual das seguintes descrições se ajusta melhor à fórmula $y = ax + b$, $a < 0$. - Uma empresa de táxi cobra por uma noite de viagem uma taxa fixa no momento da partida e um valor por cada quilômetro percorrido. A fórmula denota apropriadamente a relação entre o preço total do passeio noturno e o número de quilômetros percorridos. - Um grupo de amigos participa de um jogo de azar. Quando eles ganham algum dinheiro, eles serão divididos igualmente entre os amigos. A fórmula denota corretamente a relação entre o número de amigos e a quantia de dinheiro que cada pessoa receberá. - Jenifer compra carne picada no açougue. A fórmula denota corretamente a relação entre a quantidade de carne picada que Jennifer compra e o preço que ela tem que pagar. - Thom tem uma assinatura de celular, mas usa cartões recarregáveis pré-pagos. Por minuto falou a soma carregada diminui por um valor fixo. A fórmula denota corretamente a relação entre o número de minutos falados e a soma restante no cartão.
Asserção Articulada da US	*A configuração de modelagem matemática parte de um problema colocado pelo professor, com contexto simulado. O professor tem como objetivo utilizar modelos lineares para as situações de modelagem. É colocada no artigo a configuração de uma atividade de modelagem matemática inversa, em que fórmulas são dadas para que os alunos escolham situações nas quais elas poderiam ser aplicadas.* *A parte de modelagem consistia em oito itens nos quais uma situação do mundo real era descrita em palavras e os participantes tinham que conectá-los com um modelo apropriado que poderia ser proporcional (da forma $y=ax$), afim com inclinação positiva ($y=ax+b$ com $a>0$), afim com inclinação negativa ($y=ax+b$ com $a<0$) ou proporcionalmente inversa ($y=a/x$). Cada modelo foi apropriado para dois dos oito itens ou situações indicadas.* *Dada a natureza dicotômica da variável dependente (isto é, uma determinada alternativa é escolhida ou não), uma regressão logística, modelando a probabilidade de uma resposta correta, dependendo do tipo de modelo (proporcional, proporcionalmente inversa ou afim com inclinação positiva ou negativa) e a condição (primeira modelagem e modelagem inversa ou vice-versa), é apropriada.*

Fonte: as autoras

Já a Unidade de Significado US 1.2.20.17 do Quadro 58 descreve a pesquisa sobre como os estudantes fazem relações entre modelos matemáticos com descrições de situações do mundo real. Uma pesquisa com oitenta alunos do 11º ano é descrita nesta unidade. Dois grupos foram divididos aleatoriamente sendo que um recebeu uma tarefa de modelagem e, na sequência, uma tarefa de modelagem inversa e o outro grupo recebeu as tarefas na ordem inversa. A modelagem matemática inversa envolve a reformulação de um determinado modelo matemático em uma situação do mundo real e é uma das proposições do artigo descrito nessa Unidade de Significado. Com o objetivo de testar os potenciais efeitos benéficos de tal “modelagem inversa” na modelagem (em seu sentido restrito, a formulação de uma situação do mundo real em um modelo matemática) as tarefas foram desenvolvidas e os resultados analisados. Especificamente a tarefa de modelagem matemática tinha oito itens de descrição de uma situação do mundo real para que os alunos conectassem a modelos proporcionais e inversamente proporcionais, já a tarefa de modelagem inversa consistia em oito itens, mas os participantes agora tinham que conectar um dos quatro tipos de modelos com uma descrição de uma situação do mundo real para a qual esse modelo era apropriado. Os benefícios do uso da modelagem matemática inversa em consonância com as atividades de modelagem matemática são descritos na medida em que os alunos identificam situações nas quais os modelos matemáticos podem ser utilizados e vice-versa.

Quadro 59 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.27.17

Título: Case Study of Pre-service Teacher Education for Mathematical Modelling and Applications Connecting Paintings with Mathematics	
Código da US	**US1.2.27.17**
Unidade de Significado (US)	Realizamos um programa de formação inicial de professores em modelagem matemática e aplicações para estudantes de pós-graduação interessados em educação matemática ou que gostariam de se tornar professores de matemática. Formamos uma equipe de dois professores universitários, um professor consultor do centro de educação geral da prefeitura de Tokushima, um especialista e alguns funcionários do museu. As quatro pinturas que os estudantes graduados abordaram foram a Escola de Atenas, pintada por Rafael Santi, a Anunciação, a Última Ceia e a Mona Lisa, todas pintadas por Leonardo da Vinci. Perto do final do programa, uma visita guiada de aproximadamente 1 hora "Art Meets Mathematics!" foi realizada duas vezes no museu pelos grupos de estudantes. No início do programa, fornecemos aos alunos uma tarefa de aplicação para encontrar figuras geométricas que possam estar escondidas atrás das pinturas, usando uma lente geométrica de mão. Mesmo que os alunos obtenham algumas respostas matemáticas, eles não têm chance de validá-las diretamente. Isso porque eles não podem perguntar aos pintores do Renascimento sobre suas soluções e pouco é documentado. Nossa hipótese é que os estudantes criticariam e validariam seus modelos matemáticos por si mesmos usando algum conhecimento interdisciplinar ou extra matemático, como fatos históricos, artes, a história do cristianismo ou culturas. Pensamos que essa tarefa levaria a uma experiência de modelagem independente. Diagrama esquemático da lente geométrica mostrando (a) a transparência e (b) a lente em uso  Os alunos precisavam de um amplo conhecimento sobre o domínio matemático e domínio extra matemático com antecedência, e isso pode precisar ser aprendido. Formamos nossa equipe instrucional para apoiar a preparação da situação a ser modelada no início deste programa para os alunos e para facilitar a atividade de modelagem e aplicação dos alunos, conforme mencionado acima. Nos concentramos na demonstração dos alunos relacionada à Última Ceia. Os alunos explicaram a situação dessa pintura em relação à consolação dos apóstolos quando ouviram Jesus dizer: "Um de vocês vai me trair". Eles explicaram que essa pintura é desenhada em uma perspectiva de um ponto. Em seguida, eles pediram ao público para encontrar figuras geométricas na Última Ceia

	usando a lente geométrica. Eles, então, ilustraram um retângulo de prata, um ponto de fuga e triângulos de raiz com as cópias desta pintura e pediram ao público para encontrar uma figura geométrica em torno de Jesus na pintura. Alguns membros da audiência responderam: "É um triângulo equilátero". Os alunos aceitaram sua resposta e confirmaram com uma ferramenta de ensino em forma de triângulo equilateral perto de Jesus na pintura. Em seguida, eles explicaram sua exploração da razão pela qual Jesus foi desenhado em um triângulo equilátero. Em primeiro lugar, os estudantes notaram o fato histórico de que Leonard da Vinci pintou apenas objetos visíveis e, portanto, não quis pintar um halo. Eles introduziram essa noção usando a Santa Mãe da Caverna no mesmo salão de exposições do museu. Em segundo lugar, eles explicaram sua suposição de que Leonardo da Vinci tentou expressar santidade com um triângulo equilátero para Jesus e o significado da Trindade. Finalmente, os alunos explicaram que o olho de Judas e o templo certo de Jesus e uma placa entre eles faziam os 3, 4 e 5 lados de um triângulo retângulo.  Retângulo de prata (Figs. 27.2 e 27.3 são imagens copiadas do caderno de rascunhos que os alunos usaram para a sua demonstração. Nós enfatizamos linhas e figuras).
Asserção Articulada da US	*A atividade consistiu na análise de figuras geométricas que compõe obras de arte do artista Leonardo Da Vinci. Por meio de duas visitas ao museu, usando uma lente geométrica de mão os estudantes foram solicitados a investigar os modelos matemáticos geométricos nas obras de arte. A atividade foi guiada por uma equipe de professores e pesquisadores que em conjunto auxiliaram os alunos na investigação. A atividade de modelagem matemática sem parâmetros para a validação dos modelos matemáticos obtidos, no caso as figuras algébricas, que os alunos inferiram terem sido utilizadas por Leonardo Da Vinci, visou a independência dos alunos e a busca por meios de validação dos modelos obtidos.*

Fonte: as autoras

Por sua vez, a Unidade de Significado US1.2.27.17 do Quadro 59 indica uma pesquisa na formação inicial de professores em modelagem matemática e aplicações em um curso de pós-graduação. A formação foi indicada para interessados e futuros professores de matemática. O trabalho se constituiu por meio da formação de grupos contendo professores universitários, professores da prefeitura, especialistas e funcionários de um museu. Os grupos em conjunto analisaram pinturas de um museu em Tokushima. Como tarefa de modelagem matemática os participantes procuraram identificar figuras geométricas nas pinturas, usando uma lente geométrica de mão. Tais figuras foram consideradas modelos matemáticos que, devido a impossibilidade de contato com os pintores, foram validadas pelos próprios alunos a partir de conhecimentos interdisciplinares e extra-matemáticos. Modelos matemáticos geométricos, como triângulos equiláteros foram analisados com vistas aos motivos, por exemplo, pelo qual Leonardo Da Vinci pintou Jesus Cristo no quadro *A última ceia* em um triângulo equilátero, os alunos também tentaram explicar a suposição de que Leonardo da Vinci tentou expressar santidade com um triângulo equilátero para Jesus e o significado da Trindade.

Quadro 60 - Descrição da Unidade de Significado US 1.2.31.17

Título: Mathematical Modelling as a Professional Activity: Lessons for the Classroom	
Código da US	**US 1.2.31.17**
Unidade de Significado (US)	Modelagem matemática no "ambiente escolar" e modelagem matemática como uma "tarefa profissional" no local de trabalho. As questões discutidas dizem respeito a objetivos; tecnologia; divisão do trabalho, comunicação e colaboração; construção de modelos, incluindo a aplicação e adaptação de modelos pré-definidos; projetos; e riscos envolvidos no uso dos modelos. Uma atividade extracurricular é apresentada por Vos (2015), com o objetivo de trazer conhecimentos aos alunos a partir da modelagem como prática profissional. Alunos da escola secundária superior visitaram o Parque da Ciência da Universidade de Amsterdã, onde tiveram a oportunidade de conhecer um gerente que trabalhava para a National Dutch Railway Company por meio de uma videoconferência ao vivo. Um segundo exemplo de uma atividade de simulação é encontrado no estudo de Edwards e Morton (1987) de uma reunião de diretoria entre um painel de gerenciamento e uma equipe de modelagem. Os alunos da equipe de modelagem haviam trabalhado em um projeto por algum tempo (um período inteiro ou uma semana) e era esperado que apresentassem suas descobertas, com a sugestão de que precisavam de mais dinheiro para continuar suas pesquisas. Se os estudantes receberiam algum dinheiro dependia do resultado da reunião. Para reduzir a distância entre a educação e a prática no local de trabalho e tornar a atividade de simulação mais autêntica, foram convidados especialistas não matemáticos. Na modelagem como atividade profissional, os modelos são desenvolvidos para servir de base para a tomada de decisão. Um exemplo poderia ser convidar um político local com o seguinte problema (dentro de um contexto sueco): Lobos "O objetivo de longo prazo da política de predadores na Suécia é alcançar e preservar uma população saudável de lobos, ursos, lobos e águias-douradas" (p. 14). "O objetivo é criar um bom equilíbrio entre a população de predadores e o impacto que causa nos negócios, interesses públicos e individuais" (p. 16) (Ministério Sueco do Meio Ambiente 2012/2013; SOU 2012/2013: 191, minha tradução). Quantos lobos deveríamos ter na Suécia?
Asserção Articulada da US	*O autor traz três exemplos de atividades de modelagem matemática advindas de ambientes profissionais. Aborda-se a situação inicial das atividades e os possíveis caminhos de resolução em contextos educacionais.*

Fonte: as autoras

A Unidade de Significado US1.2.31.17 do Quadro 60 relata uma pesquisa que abordam a modelagem matemática em dois ambientes e com finalidades diferentes. Os objetivos, diferentes usos da tecnologia, a divisão do trabalho, os processos de comunicação e colaboração, bem como a construção de modelos, incluindo a aplicação e adaptação de modelos pré-definidos são discutidos tanto para a modelagem matemática no ambiente escolar quando para a modelagem matemática como uma tarefa profissional. Para fomentar a discussão são abordados projetos e riscos envolvidos no uso de modelagem matemáticos a partir de uma atividade de modelagem matemática advinda de uma prática profissional. O diálogo da modelagem escolar com a modelagem profissional foi possibilitado quando alunos da escola secundária superior visitaram o Parque da Ciência da Universidade de Amsterdã, onde tiveram a oportunidade de conhecer um gerente que trabalhava para a National Dutch Railway

Company por meio de uma videoconferência ao vivo. Outro exemplo abordado diz respeito a uma atividade de simulação realizado por alunos e por uma empresa de gerenciamento. Como resultados indica-se que na modelagem como atividade profissional é necessário que os modelos sejam desenvolvidos para servir de base para a tomada de decisão em empresas e atividades comerciais e sociais.

Quadro 61 - Descrição da Unidade de Significado US 1.2.40.17

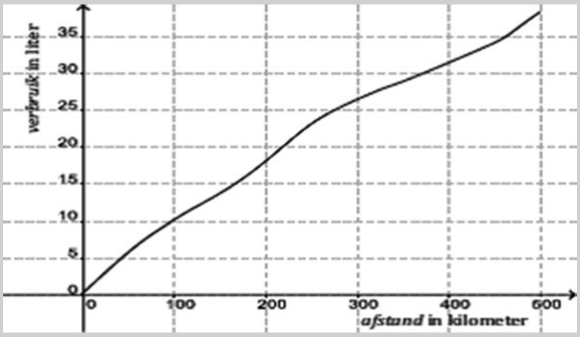
<table>
<tr><td colspan="2">Título: Long-Term Development of How Students Interpret a Model: Complementarity of Contexts and Mathematics</td></tr>
<tr><td>Código da US</td><td>US 1.2.40.17</td></tr>
<tr><td>Unidade de Significado (US)</td><td>
Adaptamos uma tarefa de Kaiser-Messmer (1986), que é definida no contexto de carros, consumo de gasolina e distância percorrida. Central é uma função V (a) para o volume de gasolina (em litros) que depende da distância percorrida a (em km). A palavra para distância em holandês é conhecida; portanto, a é usado para essa variável. A tarefa é rica em recursos: existem diferentes representações matemáticas (gráfico, tabela), e os alunos podem abordar diferentes aspectos da derivada: a taxa média de mudança em um intervalo (com dados da tabela), a taxa de mudança em um ponto, uma tangente, inclinação, limites e assim por diante. Além disso, os estudantes podem raciocinar sobre o contexto da vida real: o consumo médio de gasolina a uma distância de A partir disso, o mínimo resultante do problema de localização da instalação gera min X ∈ h quilômetros.

Petrol

In a car, a measuring system was installed, which measures the petrol consumption of the car every 10 km. During a trip of 500 km, the measurements were written down. In the table, you see some of the measurements during this trip. The travelled distance is *a* (in km) and the petrol consumption is *V* (in litres).

a (km)	10	20	30	50	100	200	300	400	500
V (litres)	1.3	2.7	4.0	6.4	10.3	18.3	26.6	31.2	39.7

The measurement points were plotted into a graph by drawing a smooth line through the points.



What is the meaning of $\frac{V(a+h)-V(a)}{h}$ in this situation? (*h* is a value, which you can choose.)

A tarefa tem vários recursos específicos. (1) A função V (a) não é dada como uma fórmula com a variável a, a partir da qual o volume V pode ser calculado. (2) A tarefa é sobre interpretação e não sobre atividades matemáticas padrão, como calcular ou resolver. (3) Pode-se dar uma interpretação do quociente da diferença sem conhecimento da derivada. (4) O contexto da tarefa pode ser considerado realista (reconhecível, possivelmente existente na vida real), mas inautêntico (não há evidência de um carro realmente existente com esse sistema de medição). (5) A fórmula (um quociente de diferença) tem h como variável adicional (ou parâmetro) para V e a; portanto, três símbolos precisam ser considerados, enquanto a tabela e o gráfico sugerem apenas duas dimensões.

Apresentamos quatro estudantes e suas abordagens para a Tarefa Petrolífera nas três entrevistas subsequentes.
Nós interpretamos as declarações de Nico em todas as entrevistas como sendo ligadas à realidade, porque ele falava principalmente em termos de consumo e distâncias. Nós interpretamos sua explicação na Entrevista 3 como sendo ligada à realidade e bastante clara e correta.
</td></tr>
</table>

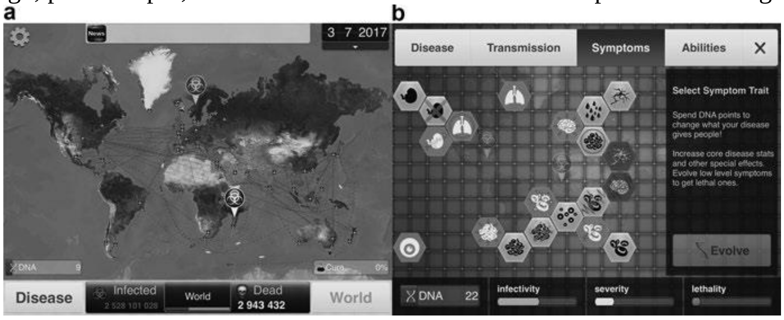
	Em todas as entrevistas, Elly interpretou a notação V (a + h) como multiplicação Va + Vh. Nem uma vez ela relacionou a fórmula a uma taxa de mudança, nem a um consumo médio de gasolina. Em todas as entrevistas, nós a consideramos como matemática limitada, imprecisa e imprecisa. Em todas as entrevistas, a abordagem de Bob para a tarefa estava ligada à realidade, pois ele usava termos como consumo médio por quilômetro e litros por quilômetro. A partir da primeira entrevista, ele interpretou a fórmula como uma diferença de consumo entre dois pontos e, a partir da segunda entrevista, essa diferença foi dividida pela distância. Na Entrevista 3, ele relacionou a fórmula aos limites, que interpretamos como - de certa forma - integradores. Na Entrevista 3, Dorien disse pela primeira vez que a fórmula é sobre limites e que ela é um pouco alérgica a eles. Ela os aprendeu antes de fazer o derivado. Ela explicou que a fórmula é Δy / Δx. Ela também explicou como um derivado, que pode calcular quantos litros são usados por quilômetro. É “uma espécie de velocidade de consumo de gasolina, na verdade, em litros por quilômetro”. Ela também conectou a fórmula a gradientes e explicou o processo de limitação: “Se você pegar h menor e menor, então h se torna quase zero. Isso é chamado de limite e se tornou mais preciso. Eu sei exatamente que estava nessa página, foi o primeiro parágrafo ”.
Asserção Articulada da US	*De modo geral, a atividade de modelagem matemática foi proposta com a finalidade de analisar o modelo matemático:* $\frac{V(a+h)-V(a)}{h}$ *e tecer considerações acerca da relação entre o consumo de combustível de um veículo e a taxa de variação da velocidade com conhecimentos matemáticos de funções, limite, derivada e continuidade.*

Fonte: as autoras

A Unidade de Significado US1.2.40.17 relata uma pesquisa desenvolvida no ambiente escolar a partir de uma tarefa de modelagem matemática adaptada acerca do consumo de combustível de um carro e sua relação com a velocidade do carro em movimento (Quadro 61). A tarefa foi escolhida pela possibilidade de uso de diferentes representações matemáticas e da abordagem dos conceitos de derivada de uma função, limite, continuidade e inclinação da reta tangente. Quatro estudantes resolveram a tarefa e entrevistas com eles realizadas são abordadas no artigo indicando a relação da tarefa com a realidade e com os conceitos de cálculo diferencial e integral.

Quadro 62 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.43.17

Título: Initial Results of an Intervention Using a Mobile Game App to Simulate a Pandemic Outbreak	
Código da US	**US1.2.43.17**
Unidade de Significado (US)	O objetivo de ambos os jogos, Plague and Infection, é criar e manipular um vírus e tentar transformá-lo em uma pandemia. Em última análise, o objetivo dos jogos é eliminar a população mundial da forma mais rápida e eficaz possível. Os dois jogos são para todos os efeitos práticos idênticos em design, função, controles e interface do jogo, por isso ilustramos o uso do Plague. Ao iniciar um novo jogo, é preciso selecionar um tipo de peste e o nível de dificuldade para jogar o jogo e nomear o vírUS A simulação do jogo começa quando um jogador coloca um paciente infectado zero no país onde ocorrerá o surto. A barra de tarefas na parte inferior da tela da Fig. 43.1a fornece ao jogador estatísticas como quantas pessoas estão infectadas e o número afetado a qualquer momento. Há também um banner de notícias e um calendário no topo da tela na Fig. 43.1a, possibilitando o rastreamento do tempo e das datas decorridas. Além disso, há informações que informam ao jogador sobre o progresso de uma cura que está sendo desenvolvida, bem como o número de pontos de DNA coletados. Os

	pontos de DNA, essencialmente, formam a moeda do jogo, que é reunida de diferentes maneiras durante o jogo, por exemplo, tocando os símbolos circulares no mapa-múndi da Fig. 43.1a. a b  **Fig. 43.1** Screen shots: (**a**) the *World tab*, (**b**) the *Disease tab* for evolving the disease Na parte inferior da tela, o jogador também pode acessar as guias Doença e Mundo. Na aba Disease, veja a Fig. 43.1b, pontos de DNA podem ser usados para alterar e manipular o vírUS As circunstâncias podem ser alteradas e evoluídas, como a transmissão do vírus, os sintomas induzidos e a resistência aos tratamentos medicamentosos. As alterações afetam a infectividade, gravidade e letalidade do vírUS O jogador tem que desenvolver uma estratégia para tornar o vírus difundido e alterá-lo, a fim de torná-lo o mais letal possível para ganhar o jogo (ou seja, acabar com toda a vida humana em todo o mundo). A aba Mundo dá informações ao jogador sobre como o vírus está se espalhando e como a cura que está sendo desenvolvida progride e os dados sobre o número de pessoas infectadas e doentes. As instruções também incluíram fatos históricos sobre pandemias para definir a cena, mas os principais imperativos para estruturar a atividade, por exemplo, jogam o jogo no nível mais fácil; tome pontos de dados em termos de número de infectados e mortos no mundo a cada duas semanas; registre os dados em uma planilha do Excel, jogue até ganhar ou perder; e desenhe um gráfico de como o número de infectados e mortos evoluiu à medida que o jogo progrediu. Além disso, as instruções continham 11 tarefas para os alunos investigarem e encaminharem. Exemplos de tarefas dos alunos foram: Desenhe um esboço do gráfico do número de mortos e infectados e descreva a propagação da peste. O número de infectados está diminuindo e, em caso afirmativo, por quê? Existem conexões entre os gráficos? Descreva a propagação da peste durante o mês 0–6 e 7–12. Quando é o maior risco de se infectar? Também foram fornecidas instruções para auxiliar os alunos com pouca experiência no uso do Excel para explorar um conjunto de dados com o modo de usá-lo para criar tabelas e gráficos.
Asserção Articulada da US	*A partir de um jogo sobre simulação de pandemias uma atividade de modelagem matemática é direcionada aos alunos. O jogo é utilizado como influenciador e gerador do tema da atividade que se configura a partir dos dados expressos no jogo, das informações histórias entregues pelo professor e das instruções de como proceder na atividade.*

Fonte: as autoras

No âmbito das tecnologias digitais da informação e da comunicação o Quadro 62 indica a Unidade de Significado US 1.2.43.17 que aborda as possibilidades de um jogo de simulação de pandemias para o trabalho com atividades de modelagem matemática em sala de aula. O jogo é utilizado como influenciador e gerador do tema da atividade que se configura a partir dos dados expressos no jogo, das informações histórias entregues pelo professor e das instruções de como proceder na atividade. Nos jogos Plague (Praga) e Infection (Infecção) os alunos precisam eliminar a população mundial da forma mais rápida e eficaz possível a partir do ponto inicial que considera um paciente infectado zero no país onde ocorrerá o surto. Há estatísticas de acordo com o desenvolvimento do jogo, bem como pontos, datas e locais do mapa mundi infectados e sem infecção. De modo geral o jogador (neste caso, os alunos) tem que desenvolver uma estratégia para tornar o vírus difundido e alterá-lo, a fim de torná-lo o mais letal possível para ganhar o jogo (ou seja, acabar com toda a vida humana em todo o mundo). Em sala de aula, foca-se na importância de abordar o jogo a partir de instruções e tarefas para que os alunos desenvolvam atividades que usem de conceitos matemáticos enquanto obtêm desempenho no jogo. A descrição dessa Unidade de Significado indica que 11 tarefas, como por exemplo, desenhar um esboço do gráfico do número de mortos e infectados e descreva a propagação da peste.

Quadro 63 - Descrição da Unidade de Significado US 1.2.44.17

Título: Modelling and Simulation with the Help of Digital Tools	
Código da US	**US 1.2.44.17**
Unidade de Significado (US)	Com a ajuda do software de geometria dinâmica, a situação do mundo real pode ser traduzida em um modelo geométrico. Para o caso de um helicóptero e três locais de acidente, podemos recorrer a objetos geométricos conhecidos. É possível reduzir os processos esquemáticos, especialmente em conjunto com sistemas de álgebra computacional (CAS), como visto no próximo exemplo. Tarefa Pirata Em uma nevoenta manhã de novembro, um barco de patrulha zarpa do porto seguro para rastrear piratas. As condições para isso são muito ruins, porque a visibilidade estimada é de apenas cerca de 500 m. No entanto, o comandante ordena que o barco chegue ao nordeste. O barco sai do porto às 7 horas da manhã. Ao mesmo tempo, um navio pirata com uma altura do mastro de cerca de 45 m zarpa em direção ao sudeste. Tem uma velocidade de cerca de 10 nós. Como o barco de patrulha está deixando o porto, o navio pirata está localizado a 7 km ao norte do porto e 2 km a leste do porto. O barco de patrulha faz aproximadamente 15 nós e é uma vez e meia mais rápido que o navio pirata. O navio pirata será visto? Esta tarefa pode ser resolvida de diferentes maneiras. Nesse caso, os benefícios adicionais do uso de ferramentas digitais são aparentes. Por exemplo, a tarefa pode ser tratada com a ajuda de um software de geometria dinâmica, uma planilha ou um sistema de álgebra computacional.
Asserção Articulada da US	*Os autores por meio de vários exemplos em que ferramentas digitais são tuilizadas abordam uma tarefa de modelagem que pode ser resolvida de diferentes maneiras e na qual os beneficios do uso de ferramentas digitais são aparentes, pelo uso de software de geometria dinâmica, planilha eletrônica ou sistema de álgebra computacional.*

Fonte: as autoras

Também a Unidade de Significado US1.2.44.17 do Quadro 63 indica mais um exemplar do uso de tecnologias digitais em sala de aula como meio para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Nesta unidade são abordados vários exemplos em que as tecnologias digitais são utilizadas como meios e ferramentas para a proposta de tarefas de modelagem matemática. A ênfase também é colocada nos benefícios do uso de ferramentas digitais, especificamente de *software* de geometria dinâmica, planilha eletrônica ou sistema de álgebra computacional. O *software* de geometria dinâmica é visto como uma possibilidade de tradução do mundo real para um modelo geométrico. Sistemas de álgebra computacional são abordados para o desenvolvimento de tarefas como a tarefa do Pirata que situa o contexto de uma navegação e a possibilidade de ver um navio em velocidade a partir de um ponto específico.

Quadro 64 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.48.17

Título: Mathematical Modelling in a Long-Distance Teacher Education in Brazil: Democratizing Mathematics	
Código da US	**US1.2.48.17**
Unidade de Significado (US)	Uma semana é dedicada a trazer consenso com os alunos e gerar uma série de temas, e para fazer uso desta circunstância histórica particular, o instrutor consultou os tutores e alunos, e juntos eles concordaram que o transporte seria o tema. Oito polos participaram do seminário Aulas de modelagem matemática foram transmitidas através de videoconferências. As aulas foram organizadas e as atividades e projetos foram postados na plataforma Moodle. Foram realizados fóruns de discussão para preparar os alunos para desenvolver o processo de modelagem. Ao final do seminário de 16 semanas, quatro encontros síncronos foram desenvolvidos para discutir a elaboração de modelos matemáticos por cada grupo de alunos. $\mathrm{TP} = \frac{\mathrm{PCI} \times 0.07}{48}$ $\mathrm{TP} = \text{ticket } \mathit{mathrmprice}$, $\mathrm{PCI} = \text{per capita } \mathit{mathrmincome}$ Um grupo de um dos polos, com alunos de cinco cidades diferentes, resolveu problematizar a situação do transporte coletivo nesses locais. Para tanto, colocaram a seguinte questão de pesquisa: Qual o preço justo de uma passagem de ônibus considerando a renda per capita da população de cada cidade? Portanto, durante o desenvolvimento do processo de modelagem, esse grupo de estudantes entrevistou pessoas em cada cidade para obter informações sobre o percentual de seu salário no transporte público e sobre os serviços prestados pelas empresas de ônibus, como atrasos, problemas mecânicos. e viagens de longa data. Eles também entrevistaram funcionários públicos para obter informações sobre a renda per capita, bem como a porcentagem da população de cada cidade que utiliza o transporte público. $\mathrm{TP} = \frac{1{,}830.60 \times 0.07}{48} = 2.67$ [...] Os alunos iniciaram o processo de matematização descobrindo que as pessoas gastavam, aproximadamente, 7% da renda per capita de cada cidade em transporte público. Eles também conseguiram determinar que, aproximadamente, 30% da população utilizava o transporte público. Nesse contexto, a fim de elaborar o modelo matemático que representava essa situação-problema, os alunos também consideraram que as pessoas, no Brasil, podem usar o transporte público 2 (duas) vezes ao dia (ir ao trabalho e voltar para casa) e 24 dias por mês, considerando apenas os dias úteis de segunda a sexta-feira. Esse grupo de estudantes aplicou esse modelo matemático para entender o transporte público em uma das cidades desse polo em que o bilhete de ônibus custava R $ 2,50. Os ônibus estavam disponíveis das 5:00 às 23:00, com alta frequência no horário, exceto nos finais de semana e feriados; no entanto, os clientes reclamaram que havia um longo tempo de viagem de um ponto de ônibus para outro. A renda per capita dessa cidade era de 2,70 salários mínimos, que naquela época era de R $ 678,00; assim, os alunos determinaram que 2,70 × 678,00 = 1830,60. Os alunos deste grupo concluíram que as passagens dos bilhetes de ônibus eram compatíveis com a renda per capita da cidade; no entanto, o serviço de transporte prestado à população precisava de melhorias. O transporte público é necessário, mas essa necessidade não gera a imposição de tarifas excessivas, que são desproporcionais ao serviço prestado à população da cidade. Ao final do processo de modelagem, cada grupo de alunos filmou a apresentação de seu projeto e o postou no YouTube com o link para que todos pudessem ver na plataforma Moodle.

Asserção Articulada da US	*A atividade de modelagem matemática foi desenvolvida por meio de ambiente virtual a distância, assumindo uma configuração diferente das salas de aula regulares. Os estudantes consideraram que as pessoas, no Brasil, usam o transporte público duas vezes ao dia e 24 dias por mês. Com base nisso eles formularam o seguinte modelo matemático. TP=(PCI.0,07)/48. Sendo TP o preço do ticket e PCI a renda per capita.*

Fonte: as autoras

O Quadro 64 indica a Unidade de Significado US1.2.48.17 que aborda o ambiente escolar, porém por meio do uso da Educação a Distância. A descrição da Unidade de Significado aborda um exemplar de como o ambiente virtual pode potencializar as discussões e o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em grupo e à distância. No exemplar indicado na atividade uma semana inicial foi dedicada para gerar uma série de temas, na qual o tema transporte foi escolhido. Oito polos da Educação a Distância participaram do seminário e da pesquisa e as aulas de modelagem matemática foram transmitidas através de videoconferências, disponibilizados via plataforma Moodle. Ao término de 16 semanas, quatro encontros síncronos foram desenvolvidos para discutir a elaboração de modelos matemáticos por cada grupo de alunos. A descrição da Unidade de Significado indicado uma das atividades desenvolvidas em um dos polos EAD, em particular como se deram as discussões entre os alunos do grupo e o processo de matematização.

Quadro 65 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.50.17

Título: Assessing Mathematizing Competences Through Multiple-Choice Tasks: Using Students’ Response Processes to Investigate Task Validity	
Código da US	**US 1.2.50.17**
Unidade de Significado (US)	Relatamos tarefas de múltipla escolha para avaliar as competências de matemática dos alunos da 9ª série. O formato de uma tarefa MMC é caracterizado por duas "camadas". [...] Na primeira camada, a tarefa MMC contém um problema de modelagem holística. [...] A segunda camada da tarefa MMC contém: (1) instruções para enfocar e refletir metacognitivamente sobre o problema de modelagem, (2) uma pergunta atomística para pedir aos alunos uma competência de matematização específica e (3) várias alternativas. Formato de tarefa MMC Considere o problema abaixo (leia bem!). Problema de modelagem = situação de problema + questão holística - Pense em você e em como você pode resolver esse problema. Pergunta atômica pedindo uma competência específica de matematização (A) Alternativa 1 (B) Alternativa 2 (C) Alternativa 3etc. Nós projetamos seis tarefas MMC. Para o problema de modelagem na primeira camada, usamos os problemas do PISA para matemática, porque esses são problemas com origem no mundo real e foram projetados para corresponder aos alunos de 15 anos de idade (OECD 2014). Os três problemas do PISA foram: Rock Concert, Pizzas e Distance, e cada um foi usado para desenvolver duas tarefas do MMC. As alternativas de múltipla escolha foram desenvolvidas com base nas respostas dos alunos de um estudo empírico, no qual alunos da 9ª série foram observados enquanto trabalhavam nesses três problemas do PISA (Djepaxhija et al. 2015). As competências

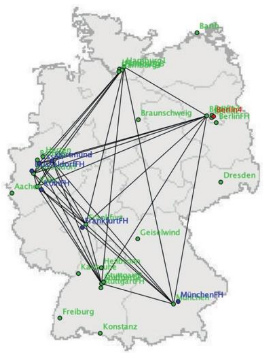
	de matematização abordadas pelas seis tarefas MMC resultantes foram: assunção de suposições (duas tarefas MMC), perguntas esclarecedoras (uma tarefa MMC), atribuição de variáveis, parâmetros e constantes (duas tarefas MMC) e formulação de tarefas matemáticas. instruções (uma tarefa MMC). Duas tarefas do MMC são exibidas neste capítulo. O MMC-task Rock Concert visa avaliar a competência dos alunos na atribuição de variáveis, parâmetros e constantes. O MMC-tarefa Pizzas visa avaliar a competência dos alunos na formulação matematicamente de um modelo que se encaixa no problema (encontrar as relações entre as variáveis, parâmetros e constantes e, em seguida, expressá-lo através de uma declaração matemática). Devido à intensidade do trabalho na entrevista (os alunos tinham que resolver as tarefas juntos e relatar retrospectivamente), só poderíamos administrar três tarefas por par de alunos. Portanto, distribuímos as seis tarefas em dois conjuntos. Cada conjunto incluiu três problemas diferentes do PISA e abordou três diferentes competências de matematização. Cada conjunto foi feito por quatro alunos. Concerto de rock Considere o problema abaixo (leia bem!). Para um concerto de rock, um campo retangular de tamanho 100 m por 50 m foi reservado para o público. O show estava completamente esgotado e o campo estava cheio com todos os fãs em pé. Qual é o número total de pessoas que assistem ao concerto? Pense em você e em como você pode resolver esse problema. Escolha duas informações que você precisa para responder ao problema. (A) Haverá 12 estrelas do rock se apresentando. (B) O tamanho do campo é de 5000 metros quadrados. (C) O preço do bilhete é de 1000 TODOS. (D) A densidade dos ventiladores no campo é de quatro pessoas por metro quadrado. (E) A idade média dos fãs é de 30 anos. Pizzas Considere o problema abaixo (leia bem!). Uma pizzaria serve duas pizzas redondas da mesma espessura em diferentes tamanhos. O menor tem um diâmetro de 30 cm e custa 300 TODOS. O maior tem um diâmetro de 40 cm e custa 400 ALL. Qual pizza é melhor valor para o dinheiro? Pense em você e em como você pode resolver esse problema. Qual das seguintes opções você escolheria para responder ao problema? (A) Eu compararia os preços das pizzas. Então eu escolheria a pizza que tem o preço mais barato. (B) Eu compararia os diâmetros das pizzas. Então eu escolheria a pizza que tem o diâmetro maior. (C) Eu iria dividir os diâmetros das pimentas pelos preços. Então eu escolheria a pizza que me dá mais por menos dinheiro. (D) Eu calcularia a área de pizza em massa. Eu dividiria as áreas das pimentas por seus preços. Então eu escolheria a pizza que me dá mais por menos dinheiro. (E) Eu calcularia o volume de ambas as pizzas. Eu dividiria os volumes das pizzas pelos seus preços. Então eu escolheria a pizza que me dá mais por menos dinheiro.
Asserção Articulada da US	*O uso de problemas de multipla escolha é feito para abordar características de problemas advindos de testes padronizados como o PISA que podem remeter à tarefas de modelagem matemática cujo foco está no desenvolvimento de competências de matemática. Os problemas Concerto de Rock e Pizza são considerados problemas de modelagem holística abordados em sala de aula por meio de instruções para enfocar e refletir metacognitivamente sobre o problema de modelagem, e de uma pergunta atomística para pedir aos alunos uma competência de matematização específica por meio de alternativas de múltipla escolha. As atividades de modelagem matemática abordadas visam avaliar a competência dos alunos na atribuição de variáveis, parâmetros e constantes, na formulação matemática de um modelo que se encaixa no problema por meio da análise de relações entre as variáveis, parâmetros e constantes, bem como da dedução de modelos matemáticos.*

Fonte: as autoras

Já o Quadro 65 aborda a Unidade de Significado US1.2.50.17 que descreve uma pesquisa em torno da temática avaliação em modelagem matemática. Com o foco na avaliação de competências de matemática de alunos da nona série problemas de múltipla escola são abordados como possíveis tarefas de modelagem matemática. O uso de problemas de múltipla escolha é feito para abordar características de problemas advindos de testes padronizados como o PISA que podem remeter à tarefas de modelagem matemática cujo foco está no desenvolvimento de competências de matemática. Dois problemas em particular são considerados como modelagem matemática holística *Concerto de Rock* e *Pizza* por meio de instruções em que os alunos são encorajados a refletir metacognitivamente sobre o problema de modelagem, e de uma pergunta atomística para pedir aos alunos uma competência de matematização específica por meio de alternativas de múltipla escolha. As competências de matemática específicas estão associadas à identificação e atribuição de variáveis, parâmetros e constantes, na formulação matemática de um modelo que se encaixa no problema por meio da análise de relações entre as variáveis, parâmetros e constantes, bem como da dedução de modelos matemáticos. A descrição da unidade aborda seis tarefas para o primeiro problema de modelagem matemática, devido à origem destes problemas, do PISA, serem do mundo real e projetados para a faixa etária específica sob análise. Cada um dos problemas foi utilizado para investigar competências especificas de matemática. Por exemplo atarefa Pizzas visava avaliar a competência dos alunos na formulação matematicamente de um modelo que se encaixa no problema (encontrar as relações entre as variáveis, parâmetros e constantes e, em seguida, expressá-lo através de uma declaração matemática), e cada conjunto incluiu três problemas diferentes do PISA e abordou três diferentes competências de matematização.

Quadro 66 - Descrição da Unidade de Significado US1.2.51.17

Título: How to Build a Hydrogen Refuelling Station Infrastructure in Germany: An Interdisciplinary Project Approach for Mathematics Classrooms	
Código da US	**US1.2.51.17**
Unidade de Significado (US)	Nos concentramos em modelar um roteiro para estações de reabastecimento de hidrogênio que podem diferir em condições (custos, demanda de energia, etc.), precisão do modelo e variedade de ferramentas (matemáticas) que os estudantes escolhem. Usamos o hidrogênio, que é um tema atual na política europeia, em nosso estudo como uma questão de discussão (matemática) e modelagem com os alunos em um contexto interdisciplinar. A redução das emissões de dióxido de carbono através de energias alternativas é um tópico corrente na política energética europeia, que pode ser encontrada na página da Comissão Europeia. Primeiramente, o hidrogênio como fonte de energia neutra de dióxido de carbono é, entre outras coisas, uma fonte de esperança neste contexto, porque o hidrogênio pode ser produzido a partir de várias fontes de energia (sol e energia eólica, petróleo, gás natural, etc.). Enquanto isso, muitas empresas estão trazendo seus carros a hidrogênio para produção em massa, e os números iniciais de vendas (início de 2015) testemunham o interesse potencial dos grandes clientes (cf. Frankfurter Allgemeine 2015). Os carros de hidrogênio não só têm um alcance maior do que os carros elétricos tradicionais, mas também podem ser reabastecidos em poucos minutos. No entanto, a conversão para hidrogênio também requer uma mudança na infra-estrutura da estação de abastecimento, e deve-se considerar como seria a rede de estações de reabastecimento

	de hidrogênio, que é econômica em toda a Alemanha e para as empresas, para que o fim o cliente não é dissuadido de comprar devido à falta de estações de reabastecimento como ocorreu durante a introdução de e-carros. Abaixo, essa rede de estações de reabastecimento é modelada e a implementação é introduzida como parte dos dias de modelagem. A seguinte tarefa foi emitida: O que é uma rede ideal de estações de reabastecimento de hidrogênio para a Alemanha? Um carro movido a hidrogênio aciona seu motor elétrico com hidrogênio, razão pela qual apenas o vapor d'água é produzido. O hidrogênio é, portanto, uma fonte de energia com 0% de emissão de CO_2 e é altamente interessante do ponto de vista político na Alemanha, com referência à prometida transição energética. Uma rede nacional de estações de reabastecimento é necessária para o fornecimento de hidrogênio (no momento, existem mais de dez estações de reabastecimento piloto na Alemanha).  Fig. 51.2 Pre-existing locations, locations under construction and new locations O proprietário do veículo A mora nas proximidades da cidade alemã B, que também pode estar localizada na área em torno da Alemanha. Ele pode dirigir, no máximo, 400 km com seu carro a hidrogênio totalmente abastecido e gostaria de alcançar o maior número possível de cidades na Alemanha. Neste contexto, o proprietário do veículo A toma sempre as vias de ligação mais rápidas, ou seja, as autoestradas. O proprietário A dirige-se para a primeira grande cidade, que já está a 150 km de distância nas rodovias federais, e só pode reabastecer nas rotas de conexão entre as cidades. Do ponto de vista de um novo operador de estação de reabastecimento de hidrogênio, é desejável alcançar o maior número possível de clientes. Isso significa localizar-se nas proximidades das grandes cidades, se possível recorrendo à infraestrutura de parada para descanso existente para reduzir custos, e fornecer uma rede abrangente de estações de abastecimento com um número mínimo de estações de reabastecimento. [...] temos duas ou mais cidades de onde queremos chegar a uma estação de reabastecimento o mais rápido possível. A distância euclidiana entre uma cidade e uma localização arbitrária pode ser calculada $l_2\left(S_{xm}, X\right) = \sqrt{\left(a_{11} - x_{11}\right)^2 + \left(a_{12} - x_{12}\right)^2}$. Para a determinação geométrica de uma localização ideal entre duas cidades, a solução é obtida construindo a rota $$M\left(\frac{a_{11} + a_{21}}{2}, \frac{a_{12} + a_{22}}{2}\right)$$ [...] as separações euclidianas das cidades e as possíveis localizações são calculadas: l_2 (S_{x2}, X_1) ≈159 km e l_2 (S_{x3}, X_1) ≈175 km. Assim, a distância euclidiana máxima para a localização de Bayreuth e Hof é $$g\left(X_1\right) := \max l_2\left(S_{xm}, X_1\right) = \max\left\{65.5; 159; 175\right\} = 175 \text{ km}$$ $$g\left(X_2\right) := \max l_2\left(S_{xm}, X_2\right) = \max\left\{97.2; 114; 130.5\right\} = 130.5 \text{ km}$$ A partir disso, o mínimo resultante do problema de localização da instalação gera minX ∈ $_C g(X) := \{175; 130.5\} = 130.5 \text{ km} = l_2(S_{x3}, X_2)$ A localização ideal seria, portanto, Hof com uma distância euclidiana máxima de 130,5.
Asserção Articulada da US	*Os autores se concentram na explicação de uma atividade de modelagem matemática com dados reais referente a modelagem de um roteiro para estações de reabastecimento de hidrogênio que podem diferir em condições (custos, demanda de energia, etc.). A partir de dados coletados com referência na realidade foi investigado por meio da dedução de modelos matemáticos o que seria uma rede ideal de estações de reabastecimento de hidrogênio para a Alemanha, tomando como ponto de partida – suposição – a situação dos carros movidos a hidrogênio.*

Fonte: as autoras

Por fim, a Unidade de Significado US1.2.51.17 do Quadro 66 destaca uma atividade desenvolvida em dias de modelagem promovidos em escolas do ensino médio na Alemanha. Esta atividade foi proposta pelo professor aos estudantes, sendo que o problema do mundo, a construção de estações de reabastecimento de hidrogênio é um tópico recorrente na política europeia. O problema aborda encontrar a localização ideal para uma estação de reabastecimento de hidrogênio, para isso os professores forneceram algumas informações e dados reais que foram necessários para a resolução do problema. Desta forma, os estudantes elaboraram um modelo matemático que denominaram de função localização-instalação, que busca um local que minimize a distância entre as cidades, resultando na localização ideal. Para validação dos resultados a partir de coordenadas geométricas foi realizada uma comparação por meio do uso do *Google Maps* com possíveis localizações existentes na realidade.

Diante do processo de Análise Ideográfica e das descrições das Unidades de Significado destacadas apresentamos as convergências manifestadas entre as individualidades do fenômeno que constituíram os Núcleos de Ideias a respeito do aspecto de configuração de uma atividade de modelagem matemática nos capítulos analisados.

3.4 ANÁLISE NOMOTÉTICA: A CONSTITUIÇÃO DOS NÚCLEOS DE IDEIAS REFERENTES AO SEGUNDO ASPECTO

As sessenta e seis unidades de análise nos conduziu a identificação de onze Núcleos de Ideias com relação à configuração de uma atividade de modelagem matemática.

3.4.1. ***Sobre o Núcleo de Ideias: atividades com problemas fuzzy, problemas de Fermi ou problemas de estimativa***

Este Núcleo de Ideias foi constituído por dez Unidades de Significado que, de modo geral, apresentam atividades de modelagem matemática cujas situações-problema caracterizam-se como problemas de estimativa. A Unidade de Significado US1.2.23.13 aborda um problema *fuzzy*, em que a subjetividade da situação está inerente a estimativas, suposições e simplificações realizadas pelos alunos. Nestas situações abarcam um grau de incerteza nas resoluções que podem ser entendidas como aproximadas e envolvem adivinhações, contagem, medição, bem como de resoluções recentes. Outras atividades evidenciadas neste núcleo, foram destacadas pelas unidades US1.2.52.13 e US1.2.3.15, cujas situações-problema são caracterizadas pelos autores como problemas de Fermi, em que perguntas abertas encaminham o desenvolvimento da atividade, sendo que informações necessárias para a resolução não são dadas no texto que acompanha o problema. Nas Unidades de Significado US1.2.33.13, US1.2.36.13, US1.2.3.14, US1.2.15.14, US1.2.18.14 e US1.2.2.15, US1.2.13.16, foram evidenciadas atividades cujos problemas de estimativa possuem mais informações do que somente uma pergunta. Os textos que compõem as atividades trazem alguns dados, e é necessário que estimativas sejam feitas para que sejam resolvidas. As unidades destacam problemas que exigem estimar, por exemplo, o melhor ângulo para se dar um chute ao gol, a que distância estamos do horizonte, a que distância estava um navio quando avistou um farol pela primeira vez, quão grande são pessoas para calçarem sapatos e chinelos gigantes, quanto de energia uma explosão atômica é capaz de liberar e quanto de água poderia ser economizada ao escovar os dentes. Nestas unidades as atividades destacadas apresentam informações com alguns dados, porém a procura por novas informações e a subjetividade em estimar valores foram relevantes para o desenvolvimento das atividades. As unidades que compõem este Núcleo de Ideias destacam que a validação dos resultados realizada pelos alunos foi realizada com vistas a análise da matemática utilizada para modelar a situação e no uso de conhecimentos extra-matemático dos alunos.

3.4.2. *Sobre o Núcleo de Ideias: atividades cujos problemas são realizados de modo consecutivo*

Este Núcleo de Ideias reúne seis Unidades de Significado que evidenciam um tipo de configuração em que mais de uma atividade é trabalhada consecutivamente. Nas Unidades de Significado US1.2.7.15, US1.2.17.15, US1.2.15.16 e US1.2.34.17, por exemplo, duas atividades são realizadas sendo que primeiramente uma atividade mais complexa é dada e para que esta seja resolvida, outra atividade similar é introduzida de modo que a resolução tem como objetivo auxiliar e facilitar a resolução da primeira atividade. Este núcleo, também é composto por diferentes atividades de modelagem que são trabalhadas consecutivamente cujo objetivo do professor pode ser a exploração e a aplicação de modelos matemáticos como destacam as unidades US1.2.24.16 e US1.2.18.17. Na primeira diversas situações-problema são trabalhadas de modo a explorar as semelhanças e diferenças estruturais de um conceito matemático, ou para a aplicação de modelos em novos contextos. Na última a mesma matemática é utilizada em contextos diferentes um sobre o qual seria o custo para o tratamento de cada paciente em uma clínica e outro sobre o custo para cada metro de profundidade de um poço a ser construído.

3.4.3. *Sobre o Núcleo de Ideias: atividades que envolvem o desenvolvimento de materiais ou experimentos para a resolução*

Este Núcleo de Ideias se manifestou da convergência de dez Unidades de Significado que destacam a construção de materiais ou experimentos usados como recurso para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Na Unidade de Significado US1.2.49.16 destaca-se o desenvolvimento de experimentos com carrinhos de brinquedo para calcular o tempo que estes levam para percorrer alguns percursos, sendo que os dados para a resolução do problema foram coletados a partir dos experimentos. Nas Unidades de Significado US1.2.7.15, US1.2.17.15, US1.2.15.16 e US1.2.34.17, para possibilitar a exemplificação da planificação de um tanque de óleo, tubos de papel higiênico foram utilizados para entender a situação-problema e também auxiliaram na construção do modelo matemático. Já na Unidade de Significado US1.2.46.15 é destacada a construção e o uso de embalagens para resolução de problemas de otimização do volume de caixas de papelão. De modo análogo na unidade US1.2.64.14, também é abordado a confecção de uma caixa, de modo a analisar a relação entre o lado e o volume. As unidades US1.2.22.15 e US1.2.33.17 apresentam a construção e o uso de um globo terrestre para a resolução de atividades cujas situações-problema envolvem altitude, latitude e comparações angulares entre a Terra e o Sol. Por fim a unidade US1.2.27.17 apresenta o uso de quadros, mais especificamente de obras de arte de um museu em que são utilizadas para um estudo de conceitos geométricos. Nas atividades manifestadas neste Núcleo de Ideias predomina-se o uso de conceitos da Geometria para a construção dos modelos matemáticos.

3.4.4. *Sobre o Núcleo de Ideias: atividades de modelagem matemática a partir de problemas contextualizados*

Este Núcleo de Ideias se constitui a partir da convergência de sete Unidades de Significado, as quais destacam atividades de modelagem matemática cujas situações, ainda que reais, carregam algumas características fictícias. É comum as atividades apresentadas nessas unidades o uso de um texto criado para contextualizar o tema a ser investigado, os textos aproximam-se de histórias que criam uma roupagem à situação real abordada, além disso em alguns casos os dados são inventados. Por exemplo, as unidades US2.2.3.14 e US1.2.11.16 evidenciam uma atividade de modelagem, cuja situação-problema engloba um tema comum em nosso cotidiano, o abastecimento de um veículo, a situação-problema apresenta duas cidades em que o valor pago pelo combustível são diferentes, neste sentido é questionado se compensa deslocar-se até o local em que o preço cobrado é inferior. Para isso, a atividade apresenta um texto, cujos personagens e dados a respeito da distância entre os locais e o preço a ser pago pelo combustível são fictícios. O mesmo ocorre para a atividade evidenciada nas Unidades de Significado US1.2.6.14, US1.2.29.14 e US1.2.20.14, em que as situações-problema tratam respectivamente sobre o preço de flores e o quanto uma sorveteria lucra em um dia de verão e a superlotação de uma represa de criação de trutas. Nas atividades destacadas pelas unidades US3.2.3.14 e US1.2.40.15, um contexto também descreve a situação-problema, porém não há informações a respeito da veracidade dos dados. Na unidade US3.2.3.14, um contexto é formulado para dizer a respeito do uso de uma cesta de resgate de um veículo do corpo de bombeiros e na unidade US1.2.40.15 duas atividades são abordadas, uma a respeito da troca de cabeamento de um teleférico, e a outra sobre uma dança que ocorre em volta de um mastro usando fitas, em ambas as atividades, os dados são apresentados por meio de histórias que contextualizam a situação real.

3.4.5. *Sobre o Núcleo de Ideias: comunicação literária por meio da modelagem matemática*

Este Núcleo de Ideias se manifestou a partir das convergências de três Unidades de Significado. Nesta configuração de atividade, os alunos são solicitados a produzir um texto (redação, carta, entre outros) que explicite como a atividade foi desenvolvida, explicando como ocorreu o processo de resolução de modo que outro (leitor) seja capaz de compreender como o problema foi solucionado. As Unidades de Significado US1.2.20.14 e US2.2.20.14 foram extraídas do mesmo capítulo, embora as situações-problema sejam diferentes, a produção de uma carta foi solicitada para cada uma das atividades. Na primeira atividade, os alunos tinham de redigir uma carta ao gerente de um estabelecimento de criação de peixes, na carta os alunos tinham de fazer uma recomendação a respeito de uma estratégia de controle para a superpopulação na criação de trutas, além da carta os alunos também tiverem que elaborar uma apresentação em *slides* com a continuação de um projeto de intervenção para manutenção do controle da população de trutas. Já na segunda atividade, os alunos também tiveram que produzir um texto e uma apresentação em *slides* a respeito de um projeto de intervenção a respeito da extinção da população de ornitorrincos na Austrália. Na Unidade de Significado US1.2.24.15 a situação-problema destacada aborda uma encomenda de letras de madeira realizada em uma loja. A situação-problema questiona o quanto deve haver de cada letra numa grande encomenda. Os alunos foram convidados a explicar suas soluções na forma de uma carta com detalhes suficientes de modo a ajudar o dono da loja a aplicar a estratégia utilizada pelos alunos quando uma encomenda com quantidades diferentes lhe for solicitado.

As Unidades de Significado deste núcleo destacam que este tipo de configuração pode proporcionar aos alunos examinar os resultados matemáticos obtidos para resolução da situação-problema.

3.4.6. *Sobre o Núcleo de Ideias: tecnologias digitais em atividades de modelagem matemática*

Neste Núcleo de Ideias alocam-se oito Unidades de Significado que destacam atividades de modelagem matemática em que a tecnologia digital foi fundamental para o seu desenvolvimento. Por meio da tecnologia digital foi possível realizar a investigação de fenômenos. Ferramentas digitais foram utilizadas na formulação do problema como é o caso da unidade US1.2.7.16 e US1.2.14.17, em que os problemas tiveram origem a partir de vídeos. Na unidade US1.2.7.16, toda a coleta dos dados foi realizada a partir do uso de ferramentas digitais, bem como na resolução do problema. Na Unidade de Significado US1.2.42.17, a atividade de modelagem matemática se desdobra a partir de jogos que simulam um vírus em uma pandemia, nesta atividade o aluno assume o papel de jogador e modelador ao mesmo tempo. Já na Unidade de Significado US1.2.44.17, com a ajuda de um *software* de geometria dinâmica a situação do mundo real pôde ser traduzida em um modelo geométrico, a situação-problema envolvia um caso em que há um helicóptero de resgate e três locais de acidentes. Na Unidade de Significado US1.2.51.17, destaca-se uma atividade a respeito do local de construção de uma estação de reabastecimento, para o desenvolvimento desta atividade os alunos contaram o uso da ferramenta *Google Maps* que foi relevante na validação dos resultados. Já na Unidade de Significado US1.2.8.16 foi destacada a criação de um *software*, realizada especialmente, para que os alunos o utilizassem durante a resolução de um problema sobre o congestionamento de trens. Outras unidades que também constituem este núcleo, a US1.2.32.14, US2.2.32.14 e a US3.2.32.14 destacaram o uso de uma ferramenta digital específica denominada CAS (Computer Algebra System) que foi utilizado para experimentar os dados, validar e interpretar os resultados de situações-problema sobre a concentração de álcool do sangue. De modo geral as atividades inseridas neste Núcleo de Ideias mostram a tecnologia digital como sendo fundamental para o desencadeamento das atividades.

3.4.7. *Sobre o Núcleo de Ideias: problemas a partir de aspectos culturais da sociedade*

Este núcleo advém da convergência de duas Unidades de Significado que explicitam a interlocução entre a matemática escolar e a matemática utilizada por determinadas culturas ou fora da escola, como a matemática utilizada pelos índios para resolverem problemas do seu dia a dia ou como a matemática que um servente de obra utiliza para resolver um problema em uma construção civil. Estes dois problemas são abordados nas unidades US1.2.6.25 e US1.2.13.17. Na primeira unidade destacam-se alguns exemplos deste tipo de configuração de atividade. O primeiro exemplo trata da matemática utilizada por participantes do Movimento dos Trabalhadores Rurais Sem Terra (MST) para a demarcação de terra, denominado de método de cubação das parcelas, os autores apresentam o conhecimento matemático dos sem-terra aos alunos, que também resolvem o problema de demarcação de terras usando a matemática escolar. No segundo exemplo destacado nesta unidade é abordado a construção de um abrigo natural denominado "tipi" comum entre povos nômades da América do Norte, nesta atividade é possível explicar por que um tripé é mais estável que um quadripodal (estruturas de quatro pés), de modo análogo ao primeiro exemplo é apresentado como os povos da pradaria da América do Norte usaram a matemática nesta construção. Na Unidade de Significado US1.2.13.17 é explicitado um problema a respeito da construção de um telhado e como os serventes de obra calculam os declives das vigas dos telhados. Os alunos utilizando a matemática escolar trabalharam com relações trigonométricas envolvidas na construção do telhado a partir de informações obtidas por meio de dois serventes de obra. Nestas atividades a resolução do problema envolveu a análise dos modelos matemáticos em relação à situação real, envolvendo as técnicas, os costumes, os hábitos da cultura em que a situação foi baseada.

3.4.8. *Sobre o Núcleo de Ideias: problemas de testes ou problemas com questões de múltipla escolha*

A manifestação deste Núcleo de Ideias ocorreu por meio da convergência de quatro Unidades de Significado que destacam atividades de modelagem matemática utilizadas em testes ou exames. Nesta configuração de atividade também se encontram atividades em que há o uso de questões de múltipla escolha, sendo que a partir da situação-problema proposta os alunos devem resolvê-la e selecionar uma opção como resposta. Nestas questões de múltipla escolha no local das opções (alternativas) estão os modelos matemáticos, sendo um deles o que melhor se adequa à situação-problema investigada. Nas Unidades de Significado US1.2.32.15, US1.2.10.17 e US1.2.50.17, exemplos de questões de múltipla escolha que eram parte de um teste com doze questões foram destacados. Cada questão aborda uma situação em que os contextos são reais e possuía alternativas de respostas, sendo uma única opção correta. Tais alternativas podem conter o modelo matemático que melhor se ajusta à situação ou algum resultado quantitativo relativo à situação-problema. Na unidade US1.2.41.15, destacam-se exemplos de atividades de modelagem matemática que são propostas em exames seja em nível vocacional, geral ou pré-universitário. De modo geral as situações-problema apresentam informações, juntamente com dados que são necessários para a resolução, ou já apresentam a forma do modelo matemático, cabendo aos alunos determinar os valores de parâmetros, como em uma função polinomial de primeiro grau, determinar os valores dos coeficientes angular e linear. Os autores apontam que esta configuração de atividade pode limitar a variedade de respostas, embora os alunos ainda possam adotar diferentes estratégias para resolver a situação-problema.

3.4.9. *Sobre o Núcleo de Ideias: argumentação crítica em atividades de modelagem matemática*

Com um viés crítico, as duas Unidades de Significado que constituem este núcleo destacam situações-problema que têm como objetivo proporcionar aos alunos um ambiente de discussão e argumentação crítica a respeito do problema formulado ou proposto. Na Unidade de Significado US1.2.32.16 as implicações a respeito da poluição de rios são abordadas, de modo a auxiliar os alunos a refletir sobre os aspectos matemáticos envolvidos no problema e compreender o fenômeno a partir de uma reflexão crítica possibilitando transformar o bem-estar dos membros da comunidade ao qual estão envolvidos. Já na Unidade de Significado US1.2.48.17 a situação-problema investigada se desencadeou a partir de um aumento nos preços das passagens de ônibus do transporte público. O preço justo a ser pago foi o foco das discussões. Os estudantes entrevistaram pessoas em suas cidades que usam o transporte público para se locomover, bem como funcionários públicos para obter informações para resolver o problema. Após a resolução do problema, os alunos elaboraram um vídeo que foi compartilhado em uma plataforma de vídeos conhecida como *YouTube*, mostrando como o transporte público é precário e se o preço cobrado nas passagens é justo em relação ao serviço oferecido.

3.4.10. *Sobre o Núcleo de Ideias: problemas de previsão ou descrição de fenômenos*

A partir da convergência de doze Unidades de Significado, que destacam atividades de modelagem matemática cujo objetivo é descrever ou fazer previsões de um determinado fenômeno. A unidade US1.2.11.13 destaca uma atividade de modelagem cujo objetivo está em descrever por meio de um modelo matemático o ganho de massa ao seguir uma dieta com comidas *fastfood* e ter um estilo de vida sedentário. A Unidade de Significado US1.2.58.14 apresenta uma atividade cujo problema envolve descrever o movimento orbital de um planeta, os dados observacionais de Mercúrio foram utilizados na elaboração do modelo matemático. Na unidade US1.2.32.14 destaca-se uma atividade de modelagem cuja situação-problema investiga a absorção de álcool pelo organismo. O modelo matemático descreve a concentração de álcool no sangue no decorrer do tempo.

Algumas situações destacadas investigaram o comportamento de populações. Na Unidade de Significado US2.2.11.13 destaca-se uma situação-problema a respeito da introdução de uma praga (sapos) em plantações na Austrália. A praga primeiramente foi introduzida para controle ambiental, porém a reprodução acelerada tomou uma proporção incontrolável. Os alunos buscam investigar qual seria a taxa de abate necessária para que haja um equilíbrio e para que a população de sapos seja estável. Já na unidade US1.2.20.14 a atividade de modelagem destacada tem como situação-problema prever qual será a população de ornitorrincos, que é uma espécie de mamífero em extinção. A situação-problema também solicita ao aluno prever quando a população de ornitorrincos retornará ao seu valor inicial. Na unidade US1.2.57.14 a situação-problema a ser investigada é a respeito de como a disseminação de uma doença sexualmente transmissível em joaninhas pode ser prevista em relação ao desenvolvimento da própria população. A US1.2.66.14 destaca uma atividade cuja situação-problema consiste em desenvolver um modelo matemático para representar as mudanças na população de coalas, de modo a investigar o crescimento em pelo menos dez anos e discutindo maneiras de manter uma população estável ao ambiente. Por fim a US1.2.28.16 também destaca uma atividade a respeito da previsão de população. A partir de uma reportagem sobre a população australiana, os alunos tiveram de investigar a alegação feita por demógrafos de que a população atingirá os 40 milhões de habitantes até o meio do século.

Em investigações que evolvem a poluição em rios a unidade US1.2.9.15 apresenta uma atividade em que os alunos ficaram responsáveis por elaborar um modelo matemático que descrevesse a concentração de dióxido de carbono produzido pela proliferação de algas em um rio ao longo do tempo. E a unidade US1.2.32.16 destaca uma situação em que os alunos devem determinar a concentração de poluentes em um rio.

Sobre a análise de trajetórias podemos destacar a unidade US1.2.49.16 que apresenta duas situações, na primeira o objetivo foi de elaborar um modelo matemático que descrevesse a distância percorrida ao longo do tempo por um carrinho de brinquedo em um percurso. Na segunda, gastos e renda de uma companhia de energia elétrica foram previstos, os professores direcionaram algumas perguntas para esta investigação. E por fim a unidade US1.2.7.17 em que a atividade destacada foi inspirada em uma reportagem sobre um acidente envolvendo um carro em alta velocidade. Os alunos desenvolveram um modelo matemático que capaz de descrever a trajetória do veículo e validar se o carro estava no limite ou acima da velocidade permitida naquela via.

3.4.11. *Sobre o Núcleo de Ideias: obtenção de modelos com ajuste de curva*

Este Núcleo de Ideias manifestou-se a partir da convergência de seis Unidades de Significado. Na Unidade de Significado US1.2.32.14 destaca-se um problema a respeito da concentração de álcool no sangue. Por meio da observação de gráficos foi possível determinar um modelo matemático que melhor se ajustou aos dados. Os alunos também utilizaram tabelas para análise do comportamento dos dados, de modo a expressar alguma tendência que corresponde ao comportamento do fenômeno real. Na Unidade de Significado US2.2.32.14 a atividade sobre o nível de óleo em um tanque de carro é abordada, sendo que uma tabela com dados do nível da vareta de óleo e o volume do tanque foram fornecidos. A situação-problema perguntava que tipo de forma se ajustava melhor aos dados. As unidades US3.2.32.14 e US1.2.41.15 também destacam atividades em que os alunos são solicitados as encontrar variáveis para uma função já fornecida. Na primeira, após determinar os valores das variáveis foi possível responder a situação-problema que envolvia a compra de um terreno. Na segunda, uma função linear que determina a velocidade do vento em diferentes altitudes foi fornecida aos alunos juntamente com uma tabela, sendo que os valores dos coeficientes angulares e lineares deveriam ser expressos pelos alunos. O uso de *software* para determinar funções, parâmetros, realizar análise gráfica e resoluções numéricas também foi utilizado nesta configuração de atividade. De modo análogo na unidade US1.2.9.15 a atividade proposta fornecia uma tabela com dados a serem ajustados. A situação-problema tratava a respeito da produção de dióxido de carbono em um rio. Por fim na Unidade de Significado US1.2.50.16, destaca uma atividade cujo problema é analisar qual curva (parábola, hipérbole ou catenária) poderia melhor se ajustar a algumas curvas encontradas em construções arquitetônicas em uma região histórica. Nestas atividades o ajuste de curvas foi indicado como um recurso da modelagem matemática.

Em síntese, a Análise Nomotética indicou os 11 (onze) Núcleos de Ideias dispostos no Quadro 67 de modo a destacar o segundo aspecto investigado na pesquisa para detalhar o que se entende em modelagem matemática a partir dos livros do ICTMA, ou seja, a configuração de atividades de modelagem matemática nos textos investigados.

Neste contexto, o foco do aspecto analisado incidiu nos elementos que constituem uma atividade de modelagem matemática nos textos analisados, considerando o entendimento de modelagem matemática vinculado à configuração da atividade de modelagem matemática.

Quadro 67 – Constituição dos Núcleos de Ideias a respeito da configuração de uma atividade de modelagem matemática

Núcleos de Ideias	Unidades de Significado	Descrição
Atividades com problemas *fuzzy*, problemas de Fermi ou problemas de estimativa	US1.2.23.13; US1.2.33.13; US1.2.36.13; US1.2.3.14; US1.2.15.14; US1.2.18.14; US1.2.52.13; US1.2.2.15; US1.2.3.15; US1.2.13.16	As atividades descritas neste núcleo podem ser aliadas a uma configuração cujo objetivo relaciona-se com a resolução de problemas de estimativa, em geral, os alunos utilizam conhecimentos pessoais para fazer suposições, construir seus modelos e resolver a situação-problema.
Atividades cujos problemas são realizados de modo consecutivo	US1.2.7.15; US1.2.17.15; US1.2.15.16; US1.2.24.16; US1.2.18.17; US1.2.34.17	Esta configuração de atividade consiste na resolução consecutiva de duas ou mais situações-problema.
Atividades cujo problema envolve o desenvolvimento ou o uso de materiais para a resolução ou execução de experimentos	US1.2.64.14; US1.2.7.15; US1.2.17.15; US1.2.22.15; US1.2.46.15; US1.2.15.16; US1.2.33.17; US1.2.34.17; US1.2.27.17; US1.2.49.16	Esta configuração de atividade de modelagem é caracterizada pela construção ou uso de materiais que fazem parte do desenvolvimento da situação-problema, como protótipos, execução de experimentos, construção de recipientes, uso de embalagens, dentre outros.
Atividades de modelagem matemática a partir de problemas contextualizados	US2.2.3.14; US3.2.3.14; US1.2.6.14; US1.2.20.14; US1.2.29.14; US1.2.30.15; US1.2.40.15; US1.2.11.16	Nesta configuração de atividade de modelagem matemática concentram-se as atividades que os problemas do mundo real são utilizados como um contexto. Há um enredo que apresenta o problema, juntamente com dados a serem utilizados para a resolução, no entanto nem sempre os dados são reais.
Comunicação literária por meio da modelagem matemática	US1.2.20.14; US2.2.20.14; US1.2.24.15	Nestas atividades de modelagem os alunos devem produzir um texto com o objetivo de esclarecer como realizaram suas resoluções para o problema proposto. Estas produções textuais devem explicar a alguém como a solução foi construída.
Tecnologias digitais em atividades de modelagem matemática	US1.2.32.14; US2.2.32.14; US3.2.32.14; US1.2.7.16; US1.2.14.17; US1.2.43.17; US1.2.44.17; US1.2.51.17	Nesta configuração de atividade a tecnologia digital tem papel fundamental no desenvolvimento da situação-problema, coleta de dados e na resolução e validação dos resultados.
Atividades que envolvem interlocuções entre a matemática escolar e a matemática utilizada por determinadas culturas	US1.2.6.15; US1.2.13.17	Neste Núcleo de Ideias concentram-se Unidades de Significado cujas atividades envolvem investigar problemas de modo a promover uma interlocução entre a matemática que determinado povo utiliza

		para resolvê-lo e a matemática escolar.
Problemas de testes ou problemas com questões de múltipla escolha	US1.2.32.15; US1.2.41.15; US1.2.20.17; US2.50.17	Neste Núcleo de Ideias constitui-se de Unidades de Significado cujas atividades de modelagem foram propostas em testes, exames ou o problema fornecia opções de múltipla escolhe em que os alunos deviam marcar qual o modelo matemático correspondia à resolução do problema.
Argumentação crítica em atividades de modelagem matemática	US1.2.32.16; US1.2.48.17	Nesta configuração de atividade de modelagem destacam-se Unidades de Significado que revelam a preocupação com a implicação de determinados problemas presentes na sociedade, há toda uma discussão crítica a respeito do problema e em como a resolução do mesmo pode afetar uma comunidade.
Problemas de previsão ou descrição de fenômenos	US1.2.11.13; US2.2.11.13; US1.2.20.14; US1.2.32.14; US1.2.57.14; US1.2.58.14; US1.2.66.14; US1.2.9.15; US1.2.28.16; US1.2.32.16; US1.2.49.16; US1.2.7.27;	Este Núcleo de Ideias foi constituído a partir da convergência de Unidades de Significado que destacam atividades de modelagem cujo objetivo compreende prever ou descrever os fenômenos reais investigados.
Obtenção de modelos com ajuste de curva	US1.2.32.14; US2.2.32.14; US3.2.32.14; US1.2.9.15; US1.2.41.15; US1.2.50.16	Neste Núcleo de Ideias concentram-se Unidades de Significado em que a atividade de modelagem matemática envolvia a obtenção de um modelo por meio do ajuste de curvas.

Fonte: as autoras

A partir dos entendimentos de modelagem matemática que emergiram da Análise Ideográfica e da convergência possível pela Análise Nomotética, partimos para o diálogo do visto sobre o fenômeno, no uso dos Núcleos de Ideias emergentes dos dois aspectos analisados nessa pesquisa, com a literatura acerca de Modelagem Matemática na Educação Matemática. Neste movimento, nossa atitude fenomenológica se coloca como um direcionamento para vislumbrar a emergência da compreensão sobre o fenômeno “o que se entende por modelagem matemática”.

4. METATEXTO: EVIDENCIANDO A COMPREENSÃO DO QUE SE ENTENDE POR MODELAGEM MATEMÁTICA A PARTIR DOS LIVROS DO ICTMA

Por meio de uma atitude fenomenológica dirigimos nosso olhar à busca do que se entende por modelagem matemática a partir dos trabalhos publicados nos livros ICTMA nas edições de 2010 a 2017. Os critérios para seleção dos dados possibilitaram o recorte de 57 textos (capítulos dos livros do ICTMA) que contemplam, em sequência, o termo *modelagem* no título ou no resumo do texto, autores que publicaram em pelo menos três edições diferentes do ICTMA e, por último, a descrição de uma atividade de modelagem matemática. Dois aspectos nortearam a investigação no que tange à interrogação da pesquisa em cada um dos textos selecionados, *as ideias do texto relativas ao que é ou o que caracteriza a modelagem matemática*, e a *configuração de uma atividade de modelagem matemática nos capítulos analisados*.

Para detalhar a compreensão da interrogação de pesquisa, traçamos neste metatexto um panorama do entendimento de modelagem matemática dos livros ICTMA juntamente com aspectos da literatura da área de Modelagem Matemática na Educação Matemática, evidenciando convergências, semelhanças e especificidades da modelagem matemática de acordo com as análises, ideográfica e nomotética, realizadas.

Utilizando os pressupostos da Análise Ideográfica e da Análise Nomotética descritos em Bicudo (2011), foram destacadas 57 Unidades de Significado para o primeiro aspecto referente as ideias dos textos no que tange ao entendimento de modelagem matemática veiculado. A Análise Nomotética possibilitou a convergência dessas 57 Unidades de Significado em seis Núcleos de Ideias: *modelagem matemática como processo para resolver problemas*; *modelagem matemática a partir da finalidade de seu uso em sala de aula; modelagem matemática associada ao desenvolvimento de competências*; *autenticidade nas atividades de modelagem matemática*; *Modelagem matemática sob a perspectiva sócio-crítica*; *Modelagem matemática como prática educativa*.

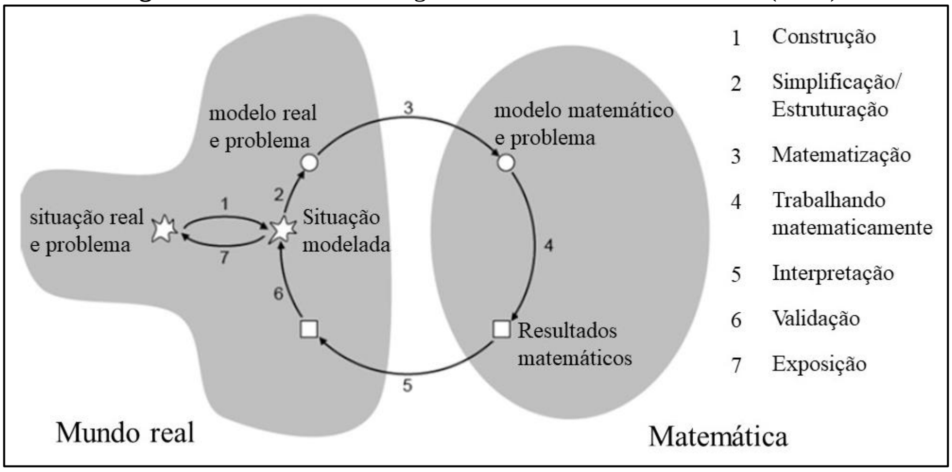
Como processo para resolver problemas, vinte e uma Unidades de Significado detalharam relações entre a realidade e a matemática, por meio da matematização, construção do modelo, resolução do problema, interpretação e validação. Nesse Núcleo de Ideias foi evidenciado o uso de ciclos de modelagem matemática como instrumentos para guiar os alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática (FERRI, 2006; MAAß, 2006; BLUM; LEIß, 2007, entre outros).

Representações do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática são comuns na literatura, isto se dá por conta de cada representação conter aspectos que estão envolvidos com o entendimento e com a configuração da atividade de modelagem matemática particular ao professor ou modelador. As representações são alvo de pesquisas e também são convencionalmente conhecidas como ciclos de modelagem matemática (PERRENET; ZWANEVELD, 2012).

Por meio dos ciclos de modelagem, podemos ter um vislumbre das fases e dos procedimentos percorridos durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática e, na maioria dos casos, uma forma de justificar a dinamicidade e a não linearidade ao estar engajado em uma atividade dessa natureza (DOERR; ÄRLEBÄCK; MISFELDT, 2017).

Segundo Blum e Leiß (2007) em uma atividade de modelagem matemática os alunos podem percorrer um processo de sete etapas ao resolverem uma situação do mundo real. E esta representação pode ser abordada por meio do ciclo de modelagem matemática conforme indica a Figura 4.

Figura 4 – Ciclo de modelagem matemática de Blum e Leiß (2007)



Fonte: adaptado de Blum e Leiß (2007, p. 225).

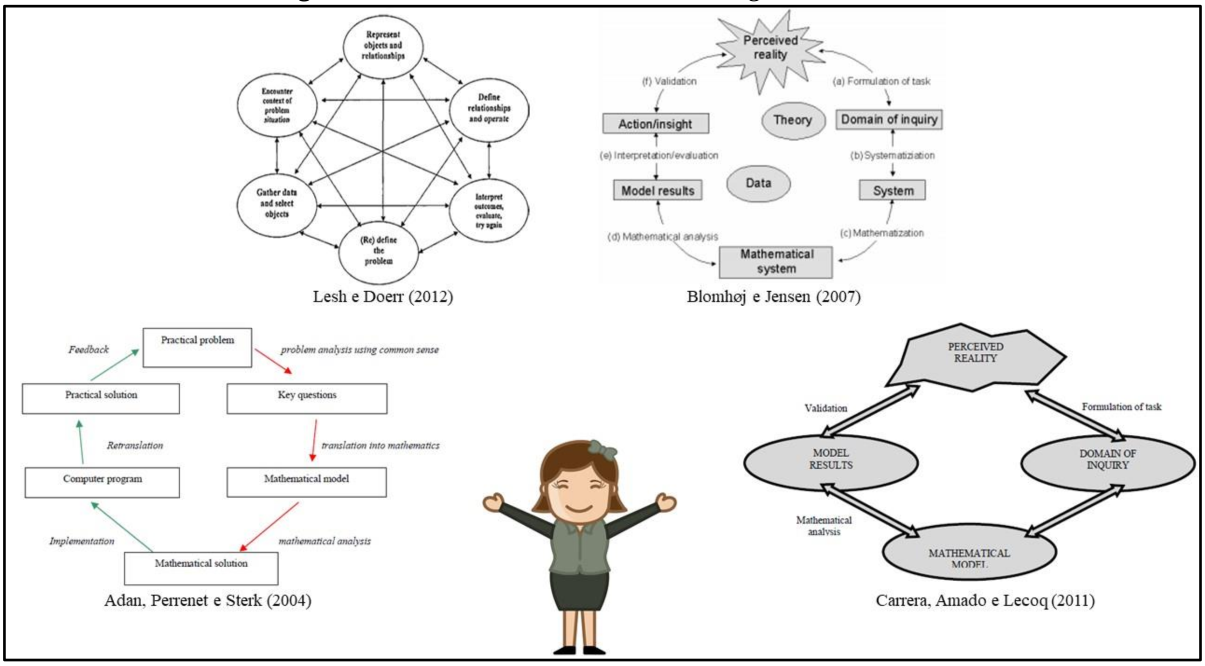
A respeito das etapas deste ciclo, Blum e Leiß (2007) comentam que primeiramente o aluno deve ler o texto da tarefa, sendo que a situação-problema deve ser entendida, deve ser construído o que os autores chamam de situação modelada. Em seguida a situação pode ser simplificada, estruturada levando a um modelo real da situação. A matematização traduz o modelo real em um modelo matemático. Esse resultado deve ser interpretado no mundo real como o resultado real, por fim o próximo passo e não menos importante, é a validação desse resultado.

Na literatura há variações deste ciclo de modelagem proposto por Blum e Leiß (2007), em que elementos considerados relevantes para outros pesquisadores são inseridos. “Existem algumas semelhanças notáveis entre muitas dessas representações cíclicas, mesmo quando as palavras específicas escolhidas para descrever os subprocessos de modelagem diferem” (DOERR; ÄRLEBÄCK; MISFELDT, 2017, p. 74).

Embora essas diversas representações possam conter descrições diferentes, de modo geral, todas as representações apreendem algum senso de que um modelo matemático pode ser uma versão simplificada de algum aspecto do mundo real que é formalizado em matemática com o propósito de resolver uma situação-problema do mundo real (DOERR; ÄRLEBÄCK; MISFELDT, 2017).

Portanto, as representações são utilizadas conforme diferentes objetivos, e a literatura contempla uma gama de ciclos, conforme ilustra a Figura 5.

Figura 5 – Diversidade de ciclos de Modelagem Matemática.



Fonte: os autores.

A Figura 5 contém quatro exemplos de ciclos de modelagem matemática veiculados na literatura sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática e visa exemplificar a variedade disponível aos professores e modeladores. O uso de um ciclo de modelagem matemática ou de outro dependerá do entendimento que se tem de modelagem matemática, bem como dos objetivos. Às vezes, como nas Unidades de Significado deste Núcleo de Ideias, o ciclo de modelagem matemática é usado como um guia para aprender modelagem matemática.

O entendimento de modelagem matemática tendo como ponto de partida uma situação real, predomina nos Núcleos de Ideias, no entanto, situações fictícias entraram no primeiro Núcleo de Ideias, o que amplia o entendimento de problema real para, por exemplo, o uso de problemas de palavras, como destacado na Unidade de Significado US1.1.6.14 que usa um 'exercício' matemático, revestido de informações contextuais como uma atividade de modelagem matemática.

Para Galbraith (2012) o uso de problemas de palavras pode provocar uma suspensão da criação de sentido por parte dos alunos ao trabalharem neste tipo de problema, visto que são produzidas "aberrações" que os alunos não contemplariam em suas vidas fora da sala de aula. Os alunos ignoram os fatores contextuais e aplicam ações baseadas em suas percepções do que é matemática, como sendo algo desconectado da realidade. Para o autor os "problemas de palavras mais realistas nos livros didáticos não direcionam as questões culturais que o aprendizado com livros didáticos nessa área reforça" (GALBRAITH, 2012, p. 7).

Neste sentido, de acordo com English, Ärlebäck e Mousoulides (2016), quando falamos a respeito de modelos e Modelagem Matemática, as diferenciações na literatura incluem:

> [...] referência à resolução de problemas de palavras, realização de simulações matemáticas, geração de representações de situações-problema (incluindo a construção de explicações de fenômenos naturais), criação de representações cognitivas e solução de um problema particular, e envolver-se em um processo bidirecional de tradução entre uma situação do mundo real e matemática (ENGLISH; ÄRLEBÄCK; MOUSOULIDES, 2016, p.383, tradução nossa).

No entanto, entender que uma atividade de modelagem matemática pode ser desenvolvida a partir de um problema de palavras é algo criticado na literatura, principalmente quando a pesquisa aponta para o uso de dados reais e aspectos autênticos em sala de aula. Vos (2015) tece críticas aos problemas de palavras, enfatizando que em situações de modelagem matemática é importante tratar da autenticidade dos fatos, aspecto este que é abordado no Núcleo de Ideias *autenticidade nas atividades de modelagem matemática*.

O segundo Núcleo de Ideias *modelagem matemática a partir da finalidade de seu uso em sala de aula* aborda a modelagem matemática como objetivo para aprender fazer modelagem matemática ou como aprender matemática por meio de atividades de modelagem matemática. Tal entendimento é expresso na literatura por meio dos gêneros de modelagem matemática expressos em Galbraith (2012), os quais reúnem, para este autor, as perspectivas de modelagem matemática evidenciadas em Kaiser e Sriraman (2006) e mais tarde retomadas e ampliadas por Blum (2015).

De acordo com Kaiser e Sriraman (2006) até aquele período cinco perspectivas eram evidenciadas no que tange à modelagem matemática, seguidas de uma meta-perspectiva: realística ou aplicada; contextual; educacional – diferenciada em didática e conceitual; sócio-critica; epistemológica ou teórica; meta-perspectiva cognitiva.

Em 2015, Werner Blum ampliou o quadro de perspectivas de modelagem matemática e comenta que a Modelagem Matemática pode ser vista por meio de diferentes perspectivas, e pode ser conceitualizada por meio de um par (objetivo | exemplos adequados), sendo possível distinguir seis perspectivas (BLUM, 2015) - Quadro 68.

Quadro 68 – Perspectivas de Modelagem Matemática

• (pragmática-autêntica) → “modelagem aplicada” (Burghes, Haines, Kaiser e outros; particularmente enraizado na tradição anglo-saxônica).
• (formativa - cognitivamente rica) → “modelagem educacional” (Burkhardt / Swan, Blomhøj e outros).
• (cultural com uma intenção emancipatória - autêntica) → “modelagem sócio-crítica” (Keitel / Jablonka, Skovsmose, Julie, Barbosa e outros).
• (cultural sobre matemática - epistemologicamente rica) → “modelagem epistemológica” (D'Ambrósio, Garcia, Bosch e outros; mais enraizados na tradição românica).
• (psicológica com intenção de marketing - motivação) → “modelagem pedagógica” (de longe o aspecto mais importante na escola).
• (psicologicamente - rica em matemática) → “modelagem conceitual” (Freudenthal, de Lange, Gravemeijer e outros)

Fonte: Blum (2015, p. 82, tradução nossa).

As diferentes perspectivas, abordadas no Quadro 68, sinalizam a diversidade de entendimentos a respeito da Modelagem Matemática, bem como os diferentes fins ao utilizá-la na Educação Matemática. As perspectivas de modelagem matemática de Blum (2015) podem ser consideradas atuais para fomentar a discussão em torno do que se entende por modelagem matemática, e neste sentido serão retomadas neste metatexto quando tecemos considerações acerca dos Núcleos de Ideias emergentes do segundo aspecto, a respeito da configuração de atividades de modelagem matemática nos textos do ICTMA.

Considerada como uma atividade para o desenvolvimento da autonomia do sujeito, na perspectiva do trabalho com tarefas abertas, em grupo e com pouco apoio do professor, o entendimento de modelagem matemática como uma competência contempla o terceiro Núcleo de Ideias do primeiro aspecto. Neste contexto, a modelagem matemática é uma competência matemática na Educação Matemática, ou seja, uma capacidade de identificar questões, variáveis, relações ou suposições relevantes em uma situação do mundo real, bem como traduzi-las em matemática, interpretar e analisar a solução para a situação dada, analisando e comparando modelos.

Neste contexto, modelagem matemática como competência matemática viabiliza a proposição e formulação de situações-problema. Para Pollak (2012) o coração da modelagem matemática está na formulação de problema e a experiência em matemática.

A consideração de modelagem matemática como uma atividade que parte de uma situação real e conserva aspectos autênticos toma lugar quando pesquisadores trazem para a sala de aula problemas originários da indústria ou da ciência, com a finalidade de aproximar o trabalho dos alunos do trabalho de um matemático aplicado. Na literatura, discussões a respeito de uma definição para autenticidade e estudos acerca de quão autênticas são as atividades de modelagem matemática são veiculados por diferentes pesquisadores (LESH; LAMON, 1992; KRAMARSKI; MEVARECH; ARAMI, 2002; VOS, 2011a; GALBRAITH, 2007; PALM, 2007; KAISER; SCHWARZ, 2010).

Alinhadas à concepção de autenticidade por meio de aspectos que aproximam a prática dos alunos da prática dos especialistas estão as ideias de Niss (1992) e mais tarde de Vos (2011b). Para Niss (1992) em uma autêntica situação extra-matemática é possível encontrar uma prática existente fora da matemática que trata de fenômenos ou problemas que são próprios dessa área e atestada por especialistas. Já para Vos (2011b, p. 718) autenticidade é um construto social mais amplo, que engloba também origens matemáticas para situações autênticas sob o argumento de que a certificação da situação autêntica pode ser oferecida por outros especialistas conhecedores do problema em questão. Uma situação pode também, nessa perspectiva, conter aspectos autênticos, mas não ser completamente autêntica.

Dois pontos de vista evidenciados no Núcleo de Ideias *Autenticidade nas atividades de modelagem matemática*, um relacionado à perspectiva realística em que a autenticidade da modelagem matemática refere-se aos problemas aplicados na indústria ou na ciência, o segundo, por sua vez, aponta a autenticidade como associada a uma atividade de modelagem matemática em que a situação-problema advém de um contexto de fora da escola, ou seja, de contextos da realidade e da cotidianidade da vida dos alunos. A discussão emergente neste caso está associada aos modelos matemáticos utilizados por especialistas que trabalham na área de aplicação da situação-problema. É importante destacar que o entendimento de modelagem matemática veiculado traz consigo uma ampla gama de discussões que muitas vezes não são favoráveis à inclusão de situações autênticas no ambiente da sala de aula, por exemplo, Vos (2015) afirma que se as situações exploradas com os alunos fossem totalmente autênticas, os professores estariam trabalhando com a formação de cientistas e erros deveriam ser considerados graves, visto que um erro na solução de algum problema poderia causar graves acidentes.

A perspectiva de modelagem indicada por Kaiser e Sriraman (2006) e disseminada por Barbosa (2001, 2006) e, mais tarde, por Araújo (2009, p. 11), denominada sócio-crítica pode ser encadeada com o Núcleo de Ideias *Modelagem Matemática sob uma perspectiva sócio-crítica*. Este entendimento de modelagem matemática coloca o trabalho dos alunos com um problema ou situação escolhida por eles que, reunidos em grupo, se engajam em discussões críticas e reflexivas.

Este entendimento, no Brasil veiculado a partir do termo modelagem matemática como um ambiente de aprendizagem (BARBOSA, 2007), emerge nesse Núcleo de Ideias para colaborar com a organização de uma imagem da matemática considerada adequada em situações de ensino e uso na sociedade, isto é, do seu papel na sociedade, como evidenciado pelas Unidades de Significado US1.1.30.15, US1.1.32.16, US1.1.49.16 e US1.1.48.17. Este entendimento de modelagem matemática destaca a função crítica e social que a modelagem matemática pode exercer na formação dos alunos em espaços formais e não formais de aprendizagem.

Por fim, o último Núcleo de Ideias diz respeito à *Modelagem matemática como prática educativa* e tal Núcleo de Ideias engloba entre questões de contextos de aprendizagem, aspectos da perspectiva cognitiva de modelagem matemática, o papel da metacognição e da comunicação no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

O termo *práticas educativas* foi escolhido para nomear este núcleo, pois remete à contextos específicos em que a aprendizagem está em evidência, bem como situações em que pode ser mobilizada e aspectos importantes na análise de tal tópico. A perspectiva cognitiva emerge em alguns destes trabalhos, evidenciando os processos cognitivos que ocorrem durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, processos de abstração e generalização.

O foco no contexto escolar, traz à tona o aspecto interdisciplinar que combina aspectos sociais e individuais do pensamento e da aprendizagem por meio da comunicação e cognição (commognition) (SFARD, 2008). Fatores contextuais, ações didáticas e pedagógicas, a complexidade do sistema escolar e as diferenças entre a modelagem matemática profissional e a modelagem matemática escolar. Neste Núcleo de Ideias também se enquadra na perspectiva advinda do Brasil que combina modelagem matemática com etnomatemática, *etnomodelagem*. O entendimento de modelagem matemática como uma ação pedagógica que envolve o encadeamento da perspectiva cultural com análise de modelos matemáticos.

O uso dos ciclos de modelagem matemática já destacados no primeiro Núcleo de Ideias é usado nas práticas de sala de aula, no entanto, aqui os autores o utilizam como um recurso para a aprendizagem, não só da modelagem matemática, mas também de conceitos matemáticos, de situações e contextos importantes na sala de aula, a partir de atividades de modelagem matemática. Denominado de ciclo de modelagem dual e destacado pelas Unidades de Significado US1.1.15.16, US1.1.7.15 e US1.1.17.15 coloca em evidência o papel de duas atividades de modelagem matemática, em que a progressão de um sujeito do ciclo da primeira atividade ao ciclo da segunda atividade se dá a partir do compartilhamento de vários modelos, sendo que um auxilia no entendimento e no uso do outro e vice-versa. Ainda no âmbito da aprendizagem, sequências de desenvolvimento de modelos são indicadas.

Os modelos matemáticos evidenciados em atividades de modelagem matemática nos livros do ICTMA, podem ser modelos convencionados para determinadas situações, modelos algébricos com variáveis discretas, modelos algébricos com variáveis continuas, modelos geométricos e modelos aritméticos. Evidencia-se neste contexto, um modelo matemático como a solução para a atividade de modelagem matemática, ou como o ponto de partida para dar uma resposta à situação-problema proposta nas atividades.

Segundo Bassanezi (2002) para cada tipo de contexto, de fenômeno ou de situação estudada na atividade de modelagem matemática as especificidades dos modelos matemáticos assumem características relacionadas à matemática ou à situação, tanto no caso da modelagem dual como no uso das sequências de atividades, os modelos matemáticos carregam em si a importância de solucionar a atividade ou servir a propósitos de aprendizagem em seu uso.

A pluralidade de ideias veiculadas nos textos do ICTMA, indicam que as pesquisas em modelagem matemática veiculam o entendimento de que atividades de modelagem matemática partem de situações reais. Seja preservando aspectos autênticos das situações que são investigadas nas atividades, seja por meio da elaboração de contextos que detalham uma situação-problema baseada em fatos reais. De modo geral, atividades de modelagem matemática são usadas para resolver problemas, como indicado no primeiro Núcleo de Ideias ou para fomentar a formação dos sujeitos, em matemática e em assuntos sociais, políticos e culturais, como indicado no Núcleo de Ideias associado à perspectiva sócio-crítica da modelagem matemática.

A *Modelagem matemática a partir da finalidade de seu uso em sala de aula*, associada ao desenvolvimento de competências, os benefícios e as limitações da consideração de autenticidade nas atividades de modelagem matemática, bem como o entendimento de

Modelagem matemática como prática educativa indicam perspectivas de modelagem matemática que fornecem subsídios para pesquisadores e professores investigarem como usar atividades de modelagem matemática em sala de aula, seus benefícios, contribuições e limitações.

O segundo aspecto investigado que auxilia no detalhamento do entendimento de modelagem matemática nestas publicações diz respeito à configuração de atividades de modelagem matemática presentes nos textos analisados. Dessa análise, sessenta Unidades de Significado possibilitaram a emergência de onze Núcleos de Ideias: *atividades com problemas fuzzy, problemas de fermi ou problemas de estimativa; atividades cujos problemas são realizados de modo consecutivo; atividades cujo problema envolve o desenvolvimento ou o uso de materiais para a resolução ou execução de experimentos; atividades de modelagem matemática a partir de problemas contextualizados; comunicação literária por meio da modelagem matemática; tecnologias digitais em atividades de modelagem matemática; atividades que envolvem interlocuções entre a matemática escolar e a matemática utilizada por determinadas culturas; problemas de testes ou problemas com questões de múltipla escolha; argumentação crítica em atividades de modelagem matemática; problemas de previsão ou descrição de fenômenos; obtenção de modelos com ajuste de curva*.

Por meio da manifestação dos Núcleos de Ideias foi possível evidenciar as especificidades quanto ao local de origem em que as atividades foram desenvolvidas, o objetivo da proposição da atividade de modelagem matemática, sua formulação e direcionamento, bem como especificidades dos dados e da origem da situação-problema investigada, dos modelos matemáticos e da realização de procedimentos de validação.

A Modelagem Matemática na Educação Matemática, mesmo tendo em seu escopo investigativo discussões relacionadas à origem da modelagem matemática profissional, têm como foco características que convergem para o entendimento de modelagem matemática com foco na educação escolar. O vínculo com ações pedagógicas e educativas e tendo como foco a inserção de atividades de modelagem matemática no contexto escolar emerge na discussão que considera, também, as diferentes nuances envolvidas na prática de modelagem matemática, o papel e a investigação de aspectos da perspectiva cognitiva, da comunicação e de contextos associados à modelagem matemática.

Detalhar a caracterização de atividades de modelagem matemática nos textos do ICTMA pode auxiliar no que se entende por modelagem matemática nessa amostra, visto que para falar de modelagem matemática é necessário recorrer às atividades de modelagem matemática que constituem o modelar. Como um guia para o entendimento, nos deparamos nesta pesquisa com onze Núcleos de Ideias emergentes que dizem respeito à configuração das atividades: seus objetivos, propósitos em sala de aula, aspectos e uso de modelos matemáticos, bem como à ocorrência de comunicação e validação das atividades.

Das diferentes configurações que as atividades de modelagem matemática podem ocorrer, emergem as características dos modelos matemáticos usados nas atividades de modelagem matemática, também, enfoca-se os tipos de problemas que são tratados por meio de atividades de modelagem matemática e como é feita a comunicação dos resultados obtidos nas atividades de modelagem matemática.

Do primeiro ao décimo primeiro Núcleos de Ideias as configurações das atividades de modelagem matemática destacam que, as atividades de modelagem matemática contém situações-problema que envolvem a: 1) a resolução de problemas de estimativa; 2) a resolução consecutiva de duas ou mais situações-problema; 3) a construção ou uso de materiais como protótipos, experimentos, construção de recipientes, uso de embalagens, dentre outros; 4) problemas do mundo real utilizados como um contexto, porém nem sempre com dados reais; 5) a produção literária para comunicar a resolução da situação-problema inicial; 6) o papel das tecnologias digitais para o desenvolvimento das atividades; 7) a interlocução da matemática com aspectos culturais; 8) a modelagem proposta em testes e exames para a aprendizagem de matemática ou de modelagem matemática; 9) a discussão crítica e a preocupação com a implicação de problemas da sociedade; 10) a previsão de problemáticas associadas à fenômenos; 11) obtenção de modelos por ajuste de curvas.

Entendemos que as configurações das atividades de modelagem matemática colaboram para detalhar a interrogação de pesquisa acerca do que se entende por modelagem matemática nos livros do ICTMA. Neste contexto, as Unidades de Significado convergiram para onze núcleos que, de modo geral, colocam em evidência aspectos em comum das atividades de modelagem matemática descritas nos 57 textos analisados.

No primeiro Núcleo de Ideias *atividades com problemas fuzzy, problemas de fermi ou problemas de estimativa*, as nove Unidades de Significado apresentam especificidades que dizem respeito a problemas com origem em situações reais, muitas vezes do cotidiano dos sujeitos envolvidos com a atividade. Das nove Unidades de Significado deste núcleo, oito delas (US1.2.23.13, US1.2.52.13, US1.2.3.15, US1.2.33.13, US1.2.36.13, US1.2.3.14, US1.2.15.14, US1.2.13.16) podem ser associadas à perspectiva formativa de modelagem matemática destacada por Blum (2015), tendo como objetivo o desenvolvimento cognitivo dos modeladores por meio da *modelagem educacional*. As atividades descritas nestas unidades, apresentam portanto, fins didáticos ou conceituais e a análise do primeiro aspecto de cada um dos textos que deram origem à Unidade de Significado indicou quatro entendimentos de modelagem matemática em que problemas fuzzy ou envolvendo estimativas são usados em atividades de modelagem matemática relacionadas à perspectiva formativa indicada por Blum (2015): *modelagem matemática como processo para resolver problemas* (US1.2.23.13, US1.2.52.13, US1.2.33.13, US1.2.15.14); *modelagem como prática educativa* (US1.2.3.15, US1.2.36.13, US1.2.3.14); *modelagem matemática associada ao desenvolvimento de competências* (US1.2.13.16).

A configuração dessas atividades de modelagem matemática com fins educacionais são, de modo geral, desenvolvidas no âmbito da sala de aula da Educação Básica, Ensino Fundamental e Ensino Médio. De modo geral, as atividades são apresentadas aos alunos contendo uma situação-problema com alguns dados e o pedido de que os alunos, a partir das informações dadas pelos professores, façam suposições para resolver o problema proposto.

Em alguns casos, os professores indicam durante o desenvolvimento das atividades, os procedimentos que os alunos devem usar para resolver o problema. Por exemplo, a Unidade de Significado US1.2.23.13 evidenciou uma experiência com alunos do Ensino Médio resolvendo problemas abertos e fuzzy com referência na realidade e para tanto o professor havia entregue a eles a fotografia de uma casa com a questão “Quanto custará rebocar esta casa?”, bem como a fotografia de um congestionamento de carros acompanhada da questão “Quantas pessoas estão presas em um engarrafamento de 180 km de extensão?”. Já a Unidade de Significado US1.2.33.13 descreve uma atividade de modelagem matemática em que os alunos devem indicar a melhor posição para marcar um gol. No entanto, seguido do contexto e do problema a investigar, o professor dá também orientações de como os alunos devem resolver o problema, como: *investigue se a posição do local para o chute ao gol muda conforme você se aproxima ou se distancia do poste mais próximo. O que a relação entre a posição do local para o chute ao gol e a distância da linha lateral do próximo poste revelam?* (Quadro 9, p. 53).

O endereçamento dos procedimentos de resolução também pode ser visto na Unidade de Significado US1.2.52.13, que aborda usos de problemas de Fermi na introdução de atividades de modelagem matemática para estudantes suecos do Ensino Médio, nessa atividade, em particular, instruções específicas foram colocadas: “Sua tarefa é escrever respostas curtas a essas perguntas, incluindo as suposições nas quais você baseia seu raciocínio, para dar à equipe no balcão de informações. Quanto tempo leva o elevador turístico chegar até o observatório do último andar? Se alguém decidir andar pelas escadas, quanto tempo levará?” (Quadro 12, p. 57).

A Unidade de Significado US1.2.13.16 já encaixada no primeiro aspecto no Núcleo de Ideias *modelagem matemática associada ao desenvolvimento de competências* apresenta uma atividade de modelagem matemática que se configura, de acordo com os autores da atividade, como uma tarefa de modelagem matemática com fins educacionais para o ensino primário e secundário, respectivamente no Brasil aos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Nessa atividade, a análise da competência matemática, associada à proposição de soluções à situação-problema de escovação de dentes, ou de quantos litros de água uma pessoa bebe em uma semana, ou, ainda, em que sujeito um grande chinelo pode servir, é feita por meio de um método de organização das etapas de uma atividade.

Semelhante à atividade de modelagem matemática sobre o chinelo gigante, descrita na Unidade de Significado US1.2.13.16 (ICTMA 16), a unidade US1.2.3.14 (ICTMA 14), aborda uma atividade de modelagem matemática com dados retirados do *Guinness Book of Records*, acerca do problema dos “Sapatos do Gigante”. Diferem em si, no entanto, o problema dos chinelos é proposto como um contexto fictício, enquanto os sapatos do gigante estão expostos em um museu e já foram certificados pelo *Guinneess*.

Também tem espaço no primeiro Núcleo de Ideias do segundo aspecto investigado o relato de experiências com professores, como no caso da unidade US1.2.36.13 em que professores alemães experientes foram observados enquanto lidavam com tarefas de modelagem na 8ª-10ª série (14 a 16 anos de idade) no âmbito do projeto COM e do projeto DISUM. Mesmo com foco na formação dos professores, a Unidade de Significado descreve o trabalho dos professores da investigação com alunos de 14 a 16 anos de idade, o que nos permite alinhá-la com a perspectiva formativa de Blum (2015). A atividade de modelagem matemática descrita nessa Unidade de Significado é sobre uma situação-problema acerca do farol *Roter Sand*, considerado marco histórico da Engenharia Civil Alemã. Para resolver o problema, os alunos destes professores utilizaram um modelo matemático da situação real, considerando o raio estimado do planeta terra e a altura do farol. As estimativas realizadas na atividade são colocadas em discussão quando os professores questionam se é razoável realizar as suposições que foram necessárias, como o fato do uso de um raio aproximado do planeta terra e de um triângulo retângulo para determinar a altura do farol. Tal entendimento de modelagem matemática foi destacado no primeiro aspecto investigado do processo analítico em *modelagem como prática educativa*, pois denota uma ação pedagógica no contexto escolar e endereça a importância da comunicação dos alunos acerca dos resultados obtidos na atividade, bem como da análise interpretativa dos resultados obtidos com vistas à situação real.

Ainda neste primeiro núcleo acerca da configuração das atividades de modelagem matemática, uma única Unidade de Significado US1.2.2.15, difere das demais, pois indica o uso de problemas de estimativa para modelar um problema, não especificamente no ambiente escolar e com fins educacionais. A atividade trata de um exemplo real, discutido e publicado na Revista Life em 1947, acerca da análise do professor Geoffrey Taylor sobre o teste da bomba atômica de 1945 no Novo México. A publicação continha a estimativa de energia liberada na explosão, bem como fotos da onda de explosão em expansão. Essa atividade de modelagem matemática é colocada no texto analisado como indicando o tipo de problema que caracterizou as especificidades do domínio da comunidade ICTMA. A ênfase da atividade de modelagem matemática descrita é colocada na capacidade de formular um problema matemático a partir de uma situação da vida real e por preservar a situação-problema real, os dados reais e a origem extra-matemática do problema, se encontra no Núcleo de Ideias *Autenticidade nas atividades de modelagem matemática* do aspecto um investigado nessa dissertação, tal entendimento pode ser atrelado à perspectiva de modelagem pragmática-autêntica de Blum (2015), também reconhecida como modelagem aplicada.

No âmbito formativo, vinculado à modelagem educacional algumas Unidades de Significado colocam a ênfase da atividade de modelagem matemática na discussão inicial acerca da situação-problema, sem apresentar os modelos matemáticos utilizados ou desenvolvidos pelos alunos, como por exemplo a Unidades de Significado US1.2.23.13 em que os autores informam apenas que no "processamento dos dados" os alunos descreveram os cálculos das estimativas para o valor necessário para rebocar uma casa e sobre o tráfego de uma via por meio de valores reais; ou, ainda, como as Unidades de Significado US1.2.33.13 e US1.2.15.14 que não apresentam um modelo matemático e as discussões dos alunos acerca do uso dos modelos.

Por vezes, resultados matemáticos do escopo do Ensino Fundamental e Médio são enunciados pelos textos como sendo ferramentas que fundamentam o trabalho matemático dos alunos na solução dos problemas. Entre eles estão a Unidade de Significado US1.2.3.15 em que os alunos utilizam do conceito de volume para calcular o volume total de neve de um campo de futebol, e a unidade US1.2.3.14 em que os alunos fundamentam sua resposta matemática utilizando o Teorema de Pitágoras.

Detalham a investigação matemática as Unidades de Significado US1.2.52.13 e US1.2.36.13. No âmbito dos problemas de estimativa a unidade US1.2.52.13 indica que os modelos matemáticos dos alunos consistiram do uso de equações advindas da Física, como a velocidade média $V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$, em que V_m é a velocidade, ΔS a distância percorrida e, Δt a variação do tempo decorrido para investigar quanto tempo se leva para subir até o último andar de um prédio usando o elevador ou as escadas. Já na unidade US1.2.36.13 os autores indicam que a matematização conduz os alunos a um modelo matemático da situação trabalhada por meio do uso de um triângulo retângulo e da adaptação de conceitos matemáticos como raio e altura à paisagem do farol que se deseja determinar a altura.

Na Unidade de Significado US1.2.2.15 que relacionamos à perspectiva pragmática de Blum (2015), os autores não focam a discussão em um modelo matemático, mas na formulação de problemas e em sua importância nas atividades de modelagem matemática. Vale dizer que para os autores do texto, a análise da situação-problema formulada, a respeito da liberação de energia de uma bomba atômica, exigiria apenas que modelos tivessem ferramentas da matemática escolar avançada.

No segundo Núcleo de Ideias *atividades cujos problemas são realizados de modo consecutivo* seis Unidades de Significado abordam a importância da resolução consecutiva de duas ou mais situações-problema. Dois entendimentos de modelagem matemática emergem neste Núcleo de Ideias que consideram este tipo de configuração de atividades de modelagem matemática: *modelagem matemática como processo para resolver problemas* (US1.2.7.15, US1.2.18.17, US1.2.34.17); *Modelagem matemática como prática educativa* (US1.2.17.15, US1.2.15.16, US1.2.24.16). De modo geral, as Unidades de Significado deste Núcleo de Ideias estão relacionadas à perspectiva de modelagem formativa, com fins educacionais, como descrita por Blum (2015).

As atividades descritas nas unidades deste Núcleo de Ideias carregavam consigo objetivos educacionais, mesmo quando a atividade de modelagem matemática colocava o foco na resolução de um problema sem especificar um nível de escolaridade. Como é o caso da Unidade de Significado US1.2.7.15 que orienta o uso de três ciclos de modelagem matemática baseados nas experiências com o ciclo de modelagem matemática dual. A dualidade aqui ocorre por meio da apresentação de duas atividades que se complementam, a atividade do tanque de óleo, e uma atividade similar baseada na planificação de um tubo de papel higiênico, considerado como um material semelhante ao corrimão em espiral do tanque de óleo.

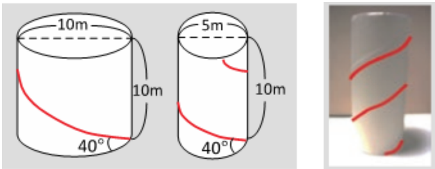
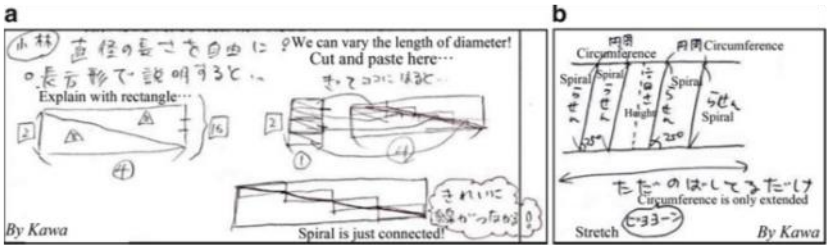
Do ponto de vista da modelagem educacional, já especificando níveis de escolaridade e trazendo experiências desenvolvidas com alunos e professores em formação inicial para docência, o mesmo contexto do tanque de óleo e do tubo de papel higiênico foi descrito nas atividades de modelagem matemática das Unidades de Significado US1.2.17.15 e US1.2.34.17.

Para alunos do sexto ano de uma escola primária (US1.2.34.17), além de usarem a tarefa do tanque de óleo e do tubo de papel higiênico, foi inserido um contexto real referente a uma operação realizada pelos bombeiros em um caso de aquecimento do tanque de óleo. Nesta situação, para resfriá-lo seria necessário um acesso imediato por meio da escada (corrimão) em espiral em volta dos tanques. A situação-problema discute qual escada em espiral levaria os bombeiros mais rápido ao topo. Já para alunos da licenciatura (US1.2.17.15) a atividade do tanque de óleo e do papel higiênico foi explorada por meio da questão “Existem coisas semelhantes a um corrimão em espiral do tanque de óleo?” Em ambas as Unidades de Significado os professores tinham um objetivo em comum de que os alunos investigassem se os comprimentos das escadas em espiral nesses tanques de óleo eram os mesmos ao comparar tanques de mesma altura, mas com diâmetros diferentes.

Porém as unidades encontram-se alocadas em entendimentos diferentes, visto que o objetivo da atividade na unidade US1.2.34.17 era o de modelar um tanque de óleo, sendo que instruções foram lançadas para o desenvolvimento da atividade em sala de aula. Já a unidade US1.2.17.15 destaca que a atividade foi implementada como uma prática de ensino com vistas a explorar o comprimento de um corrimão espiral de um tanque de óleo, apresentando as ferramentas matemáticas utilizadas pelos alunos que fundamentaram a construção do modelo matemático.

Nesta configuração de atividades de modelagem matemática, os modelos matemáticos têm um importante papel, visto que por meio dos modelos matemáticos usados em uma das atividades (a do tubo de papel higiênico) é possível resolver a atividade do tanque de óleo. A atividade do tubo de papel higiênico visa investigar as relações entre o diâmetro e a fenda em espiral que ao ser descolada possibilita planificar o cilindro, para que ao retomar a atividade do tanque de óleo seja possível usar os modelos matemáticos do tubo de papel higiênico na resolução da situação-problema do tanque de óleo, conforme indicado no Quadro 69.

Quadro 69 – Modelos matemáticos das atividades do tanque de óleo e do tubo de papel higiênico

Os alunos abriram o tudo de papel higiênico ao logo da fenda e identificaram que a forma é um paralelogramo, deste modo fizera medições de comprimento da fenda e dos ângulos.	US1.2.17.15  $\frac{10,772-1,050}{\tan 26^{\circ}}=\frac{9,722}{0.4877}=19,934.39\text{ mm.}$
Para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental anos iniciais. Foi mostrada uma fotografia dos tanques de óleo. Os alunos produziram desenhos em 2D e em 3D.	US1.2.34.17 
Duas planificações do tubo de papel higiênico são apresentadas: usando o retângulo como modelo matemático e usando o paralelogramo como modelo matemático.	US1.2.15.16  **Fig. 15.8** (**a**) The accepted rectangle model (**b**) The accepted parallelogram model

Fonte: as autoras

O procedimento de planificação do tubo de papel higiênico permitiu aos alunos visualizar um exemplar de como seria o tanque de óleo planificado, visto que este evento não é possível de ser reproduzido na vida real. Por meio da construção dos modelos 2D e 3D os alunos também usaram trigonometria para encontrar o comprimento da fenda e depois o comprimento real da escada em espiral.

As unidades US1.2.7.15, US1.2.15.16, US1.2.24.16 e US1.2.18.17 não especificaram o local em que as atividades foram desenvolvidas. A unidade US1.2.18.17 cita apenas que a implementação da atividade ocorreu em uma semana, na qual a escola focava a “divulgação de sala de aula” de uma doação da escola para clínicas no exterior. Neste contexto, as atividades de modelagem trabalhadas envolviam investigar o custo de cada paciente para as clínicas e custo da construção de poços artesianos. Nestas atividades os alunos utilizaram conceitos de função para obtenção do modelo matemático.

Ganha espaço entre as atividades, o que é conhecido na literatura por sequência de desenvolvimento de modelos (ÄRLEBÄCK; DOERR, 2018, LESH; DOERR, 2003), sendo que há uma variedade de tipos de atividades que compõem uma sequência de desenvolvimento de modelos: atividades eliciadoras de modelos (MEAs), atividades de exploração de modelos (MXAs) e atividades de adaptação de modelos (MAAs). No caso da unidade US1.2.24.16, a sequência de desenvolvimento de modelos explorou a diferença entre os conceitos de velocidade e aceleração por meio da taxa de variação média. Ainda que, para nós este tipo de configuração de atividade possa estar interligada à perspectiva de modelagem formativa de acordo com Blum (2015), a unidade US1.1.24.16 que trata do entendimento dos autores do capítulo revela que as sequências de desenvolvimento de modelos estão situadas dentro de uma perspectiva contextual de modelagem conforme Kaiser e Sriraman (2006), pois os alunos são confrontados com atividades em que precisam desenvolver a matemática para compreender situações significativas.

O núcleo três diz respeito aos textos que abordam a descrição de atividades cujo problema envolve o desenvolvimento ou o uso de materiais para a resolução ou execução de experimentos (US1.2.64.14; US1.2.7.15; US1.2.17.15; US1.2.22.15; US1.2.46.15; US1.2.15.16; US1.2.33.17; US1.2.34.17; US1.2.27.17; US1.2.49.16). A análise do primeiro aspecto referente ao que os autores destes textos entendem por modelagem matemática evidenciou cinco entendimentos de modelagem matemática: *modelagem como processo para resolver problemas* (US1.2.64.14; US1.2.7.15; US1.2.33.17; US1.2.34.17; US1.2.27.17); *Modelagem matemática como prática educativa* (US1.2.17.15; US1.2.15.16); *Autenticidade nas atividades de modelagem matemática* (US1.2.46.15); *Modelagem Matemática a partir da finalidade de seu uso em sala de aula* (US1.2.22.15); *Modelagem Matemática sob a perspectiva sócio-crítica* (US1.2.49.16).

De modo geral, as atividades de modelagem matemática que se configuram por meio da construção ou uso de materiais, como protótipos, execução de experimentos, construção de recipientes, uso de embalagens, entre outros, nestes textos, têm o foco em experiências realizadas ou voltadas para contextos educacionais indicando a perspectiva de modelagem matemática educacional que de acordo com Blum (2015) tem como objetivo o desenvolvimento cognitivo dos sujeitos modeladores.

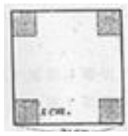
Ao relacionarmos as atividades cujo problema envolve o desenvolvimento ou o uso de materiais para a resolução ou execução de experimentos com o entendimento de modelagem como processo para resolver problemas as unidades US1.2.64.14, US1.2.7.15, US1.2.33.17, US1.2.34.17 e US1.2.27.17 foram evidenciadas. Estas unidades apresentam atividades de modelagem matemática em que houve o desenvolvimento ou uso de materiais para a resolução da atividade que se dá por meio de um processo que envolve uma gama de procedimentos, fases e técnicas.

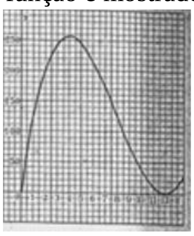
Em alguns países em que a modelagem matemática foi inserida no currículo escolar pesquisadores lançaram um olhar analítico sob os livros didáticos e materiais pedagógicos utilizados em sala de aula. Como é o caso da unidade US1.2.64.14, que apresenta possíveis situações retiradas de livros didáticos que podem desencadear numa atividade de modelagem matemática. A situação-problema envolve definir a regra da multiplicação de números negativos, por meio de um exemplo em que uma pessoa se desloca para leste ou para oeste. Outro exemplo também citado foi um problema de obtenção do volume máximo de um prisma. Por fim, foi citado o exemplo que aborda a criação de métodos para medir a altura de uma montanha por meio de cálculos com ângulos.

Ainda que os autores sinalizem que estas situações podem ser trabalhadas como atividades de modelagem matemática, eles apresentam a resolução para apenas um dos três exemplos citados, o problema de obtenção do volume máximo de um prisma, em que para obter o modelo matemático algébrico partiu-se da representação planificada de um prisma, em que dos cantos foram recortados quadrados de mesmo tamanho. A representação gráfica também foi utilizada para obtenção do modelo matemático, conforme o Quadro 1.

Quadro 70 – Modelo matemático apresentado para a obtenção do volume máximo de um prisma

De um quadrado em que o comprimento de um lado é de 24 cm. Eu farei um de prisma ou esse volume se tornará 1L cortando o mesmo tamanho de quadrados nos quatro cantos dele. Quando o comprimento de um lado é x cm, a fórmula é $(24-2x)^2$ e a equação é $x(24-2x)^2 = 1000$; $x(12-x)^2 = 250$. Quando nós fixamos $y = x(1-x)^2$, o gráfico dessa função é mostrado como a figura a seguir.





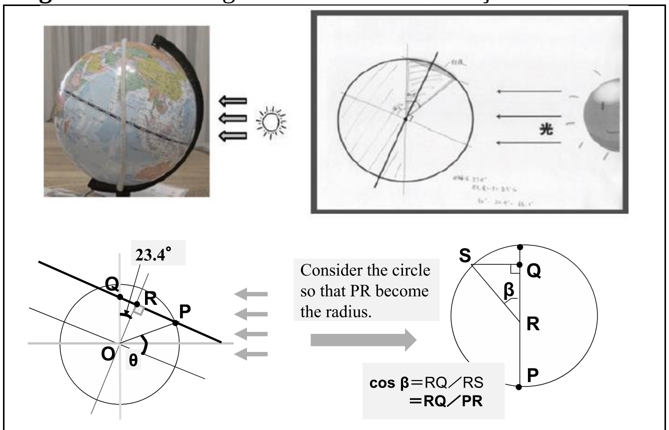
Pelo gráfico, podemos encontrar que os dois valores requeridos de x são 3 <x <4 e 4 <x <5. Vamos examinar o valor de x que é próximo de 3. Podemos expandir a função com (x-3), a função se torna a seguinte: $y = 243 + 27(x-3) - 15(x-3)^2 + (x-3)^3$. A equação é expressa como: $27(x-3) - 15(x-3)^2 + (x-3)^3 = 7$. Desconsiderando $(x-3)^2, (x-3)^3$, $27(x-3) = 7$. Resulta x=3.26.

Fonte: as autoras

Assim como em outras situações podemos perceber que instruções são dadas para que o problema seja resolvido, isto também foi evidenciado no exemplo da situação sobre medir a altura da montanha, em que instruções são dadas a respeito de quais ângulos deveriam ser utilizados “usando o ângulo entre uma linha do meu olho até o topo, a montanha e uma linha horizontal, e o ângulo entre uma linha do meu olho e a sombra do topo de uma montanha” (Quadro 27, p. 73). A unidade destaca, também, uma colocação dos autores em relação a fase de matematização que para eles “deve ser alterada de acordo com a matemática (dos alunos), conhecimento e habilidade, tratando as mesmas situações problemáticas repetidamente" (Quadro 27, p. 74).

A unidade US1.2.33.17 destaca a realização de uma atividade a respeito do fenômeno sol da meia noite, que foi desenvolvida com alunos do Ensino Médio do Japão. Uma estrutura foi utilizada pelo professor e perguntas foram direcionadas aos alunos de modo a instruí-los: "por que o dia na latitude norte mais alta se torna tão próximo do solstício de verão? Ou, inversamente, por que a duração da noite de verão diminui à medida que a latitude norte aumenta?" Os alunos partiram de observações do mundo real, e também usaram um globo terrestre como material para a obtenção de dados e consequentemente do modelo matemático, por meio de uma função trigonométrica, como apresenta a Figura 6.

Figura 6 – Uso do globo terrestre na resolução da atividade



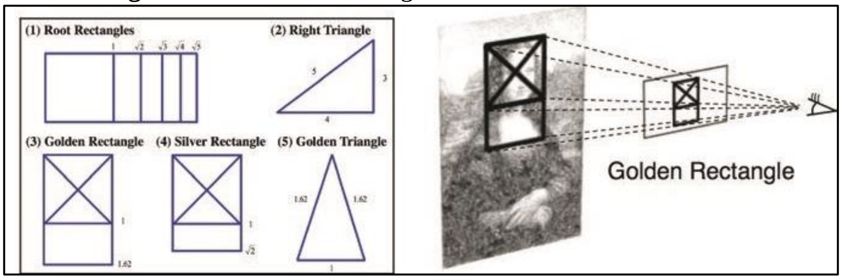
O tempo noturno y (horas) é formulado usando latitude norte x como segue $y = \frac{2}{15}\cos^{-1}\{\tan(23{,}4).\tan x\}$

Fonte: as autoras

O modelo matemático algébrico indica a noite y (horas) na latitude x (ºN) que pôde ser estimada e investigada pela observação no mundo real, usando o globo terrestre, desenhando e medindo as figuras geométricas, obtendo um modelo algébrico por meio da função e construindo um gráfico envolvendo as variáveis x e y. No capítulo 33 do ICTMA 17, texto em foi destacada esta atividade, os autores consideram que diversos modelos foram elaborados e que os alunos ao realizarem este processo não apenas transitaram entre o mundo real e o mundo matemático, e neste sentido interpretam a modelagem como uma perspectiva de tradução interativa entre mundos plurais (IKEDA; STEPHENS, 2017).

Na unidade US1.2.27.17, os autores entendem que "a modelagem matemática e as aplicações enfocam a resolução de problemas que conecta a matemática com o domínio extra-matemático" (Quadro 4, p. 42). Neste sentido, a atividade que está situada na configuração de atividades cujo problema envolve o desenvolvimento ou o uso de materiais para a resolução ou execução de experimentos, tem como objetivo que os alunos conectem as pinturas ao domínio matemático, ou seja, um processo de tradução do mundo real para o mundo matemático. Neste sentido, Pollak (1979) considera que os professores devem estar familiarizados com o conhecimento do mundo real, contextos de modelagem e com a compreensão pedagógica. Os futuros professores visitaram o local de exposição, bem como foram apresentados aos funcionários do museu que abriga as obras de arte selecionadas para o desenvolvimento da atividade, quatro obras de Leonardo da Vinci. Para resolver a atividade de modelagem matemática os alunos construíram um modelo chamado de lente geométrica, usada para identificar formas geométricas nas pinturas, como na Figura 7.

Figura 7 - modelo da lente geométrica e como foi utilizada



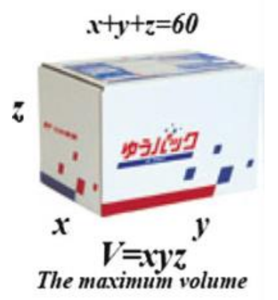
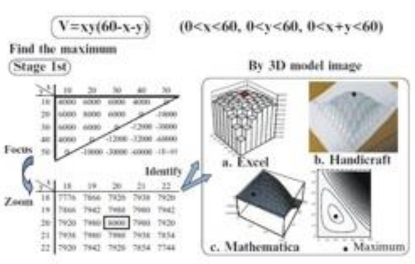
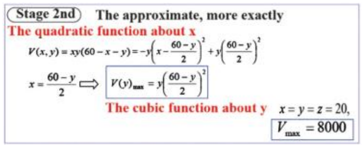
Fonte: as autoras

A lente geométrica construída pelos alunos colaborou na resolução da atividade e na elaboração dos modelos matemáticos geométricos. Além disso houve ênfase na etapa de validação, pois os modelos matemáticos foram analisados por meio do conhecimento extra-matemático. A atividade desenvolvida foi utilizada para a explicação do ciclo e dos subprocessos da modelagem matemática de acordo com Niss (2015).

Ao realizarmos a análise fenomenológica, uma Unidade de Significado pode ser alocada em mais de Núcleo de Ideias. Neste sentido, algumas atividades de modelagem matemática destacadas por meio das Unidades de Significado encaixam-se em mais de um tipo de configuração de atividade. Como as atividades de modelagem dual (US1.2.7.15, US1.2.34.17) que fazem parte do núcleo de configuração de atividades cujos problemas são realizados de modo consecutivo, em que se explora o desenvolvimento de duas atividades. Bem como, podem ser parte da configuração de atividades cujo problema envolve o desenvolvimento ou o uso de materiais para a resolução ou execução de experimentos, uma vez que, o tubo de papel higiênico pode ser entendido como um material manipulável utilizado para a resolução do problema.

A *Autenticidade nas atividades de modelagem matemática* também pôde ser evidenciada na configuração de atividades que fazem o uso ou a construção de materiais, ou experimento. Como a unidade US1.2.46.15, em que um problema autêntico a respeito do tamanho e volume das caixas usadas para envio de mercadorias por meio do serviço de correspondência foi apresentado aos alunos do Ensino Médio. A caixa real foi utilizada na coleta de dados e diferentes modelos matemáticos foram construídos para a obtenção do valor de volume máximo da caixa, por meio do uso de *softwares*, conforme a Figura 8.

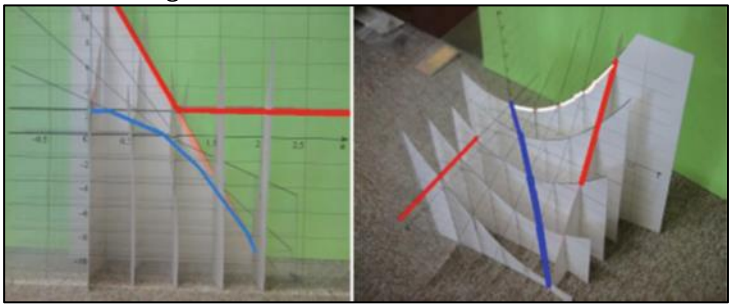
Figura 8 - Modelo matemático e resolução da atividade sobre volume máximo de uma caixa

<table>
<tr><th>V = xyz, x + y + z = 60,0 < x, y, z < 60</th><th>Dados e modelo 3D</th><th>Volume máximo</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: as autoras

Além do uso de *softwares* para resolver o problema, os alunos também construíram modelos 3D usando cartolina, como exemplifica a Figura 9.

Figura 9 - Modelo 3D feito com cartolina

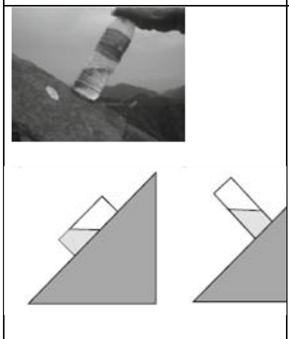
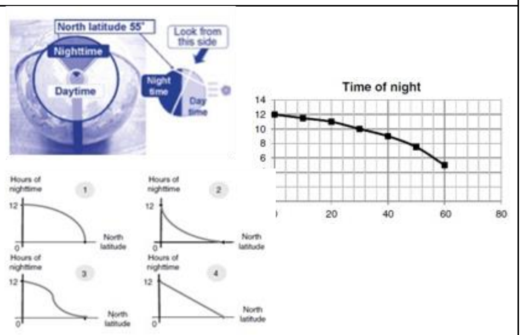


Fonte: as autoras

Os autores mencionam que os alunos ao usarem o modelo 3D que eles mesmos construíram puderam observar e entender conceitos a respeito do modelo algébrico e das relações entre as variáveis utilizadas na função obtida que dá o valor do volume máximo da caixa. Neste contexto, esta atividade, ainda que, atrelada a perspectiva educacional, aproxima-se também da perspectiva da modelagem aplicada (BLUM, 2015), visto que esta atividade de modelagem matemática pode possibilitar entender e dominar uma situação do mundo real.

Já a unidade US1.2.22.15, em que os autores do capítulo caracterizam a *modelagem matemática a partir da finalidade de seu uso em sala de aula*, o que se assemelha ao que Galbraith (2012) considera sobre modelagem matemática como conteúdo e a modelagem matemática como veículo, três atividades são descritas com o intuito de exemplificar tal diferenciação. As atividades descritas também usam materiais concretos em seu desenvolvimento, conforme o Quadro 71.

Quadro 71 - Materiais concretos nas atividades de modelagem matemática da unidade US1.2.22.

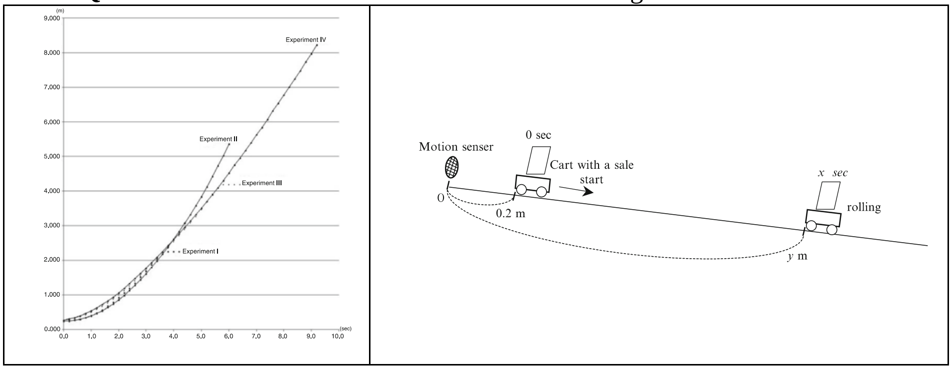
Quão íngreme é a Grande Muralha?	São estes três semelhantes matematicamente?	Como o tempo noturno diminui com a latitude?
		

Fonte: as autoras

As atividades de modelagem do Quadro 71 além utilizaram materiais como garrafa pet, crucifixos de madeira e um globo terrestre, todos os materiais foram úteis para a resolução das atividades. Os autores consideram que a atividade sobre o quão íngreme é a Grande Muralha se aproxima de uma modelagem como conteúdo, em que o “professor deve criar métodos para deixar que os alunos construam o desejo de resolver o problema” (IKEDA, 2013, p. 259). As outras atividades o objetivo é o de ensinar matemática usando modelagem matemática, visto que os alunos se fundamentaram em conceitos relacionados a semelhança de triângulos na atividade do crucifixo e utilizaram conceitos trigonométricos que até então eram desconhecidos para a construção de um modelo matemático para a atividade da duração da noite.

Atividades de modelagem matemática também são realizadas em eventos extraclasse, como descrito pela unidade US1.2.49.16 em que um programa de desafio foi realizado com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Nesta atividade experimentos foram realizados de modo a investigar o movimento de um carro ao longo do tempo e em percursos diferentes. No local do carro real foi utilizado um carrinho de brinquedo. Os dados foram coletados por meio do desenvolvimento e observação dos experimentos (Quadro 72).

Quadro 72 - Atividade destacada na Unidade de Significado US1.2.49.16



Fonte: as autoras

Os alunos construíram um gráfico que auxiliou na análise dos percursos realizados nos experimentos - da distância em relação ao tempo.

Por sua vez o quarto núcleo do segundo aspecto se refere à configuração de *atividades de modelagem matemática a partir de problemas contextualizados* e se concentram em as atividades em que os problemas do mundo real são utilizados em um contexto que não necessariamente preservam aspectos reais da situação original. Neste sentido, há uma narrativa inicial, baseada em uma situação real, em que um problema e um conjunto de dados são apresentados, cabendo aos modeladores a solução do problema. As Unidades de Significado deste Núcleo de Ideias contemplam atividades que estão apoiadas em cinco entendimentos de modelagem matemática (de acordo com a análise do primeiro aspecto dessa dissertação): *Modelagem matemática associada ao desenvolvimento de competências* (US1.2.29.14; US1.2.40.15; US1.2.11.16); *Modelagem matemática como prática educativa* (US2.2.3.14; US3.2.3.14); *Modelagem matemática como processo para resolver problemas* (US1.2.6.14); *Modelagem matemática sob a perspectiva sócio-crítica* (US1.2.30.15); *Modelagem matemática a partir da finalidade de seu uso em sala de aula* (US1.2.20.14).

No que tange ao desenvolvimento de competências, as três Unidades de Significado descrevem atividades que configuraram no âmbito da formação de professores. Professores que cursavam formação inicial (US1.2.29.14), que trabalhavam com a implementação de respostas orais e *feedbacks* a alunos do Ensino Médio na Alemanha (US1.2.40.15) e que se especializam para lecionar por meio da modelagem matemática (US1.2.11.16). Neste sentido, a formação inicial de professres busca, também, dar suporte ao professor para realizar a avaliação em modelagem matemática (BESSER; BLUM; LEIß, 2015). Assim, avaliar a capacidade de um determinado sujeito em realizar uma atividade de modelagem matemática, está atrelado à competência de modelagem matemática (BLOMHØJ; JENSEN, 2007; MAAß, 2006; KAISER, 2007). No entanto, o uso de atividades de modelagem matemática pode contribuir para o desenvolvimento da competência em Matemática que segundo Niss e Højgaard (2011, p. 49) pode ser entendida como “conhecimento, compreensão e a capacidade de opinar sobre a Matemática e seu uso em contextos onde ela desempenha ou por desempenhar papel relevante” e para avaliar os alunos os professores também precisam desenvolver competências por meio da formação inicial e continuada (BESSER; BLUM; LEIß, 2015).

Neste contexto as situações-problema das atividades trabalhadas são delineadas de acordo com as especificidades dos contextos em que estes professores trabalhavam. Na Unidade de Significado US1.2.29.14 destaca-se a atividade de modelagem sobre os lucros de uma sorveteria, cuja solução foi proposta por um aluno do oitavo ano da Educação Básica (Quadro 73).

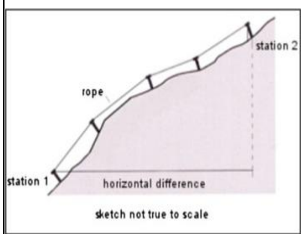
Quadro 73 - Atividade descrita na Unidade de Significado US1.2.29.14

Situação-problema	**Solução proposta pelo aluno**
Há quatro sorveterias na cidade de Leo, Springfield. Leo está de pé em frente à sua sorveteria favorita, “Sorrento”, como faz frequentemente no verão. Uma colher de sorvete custa 60c. Ele se pergunta quanto dinheiro o proprietário da sorveteria ganha com a venda de sorvetes em um domingo quente de verão	No dia seguinte, ele pergunta a seus três melhores amigos quantas colheres de sorvete eles compraram no último domingo e recebe as seguintes respostas: Marcus: 3, Peter: 5, Tom: 4. Leo calcula em média (3 + 4 + 5) ÷ 3 = 4 colheres por dia. Ele multiplica o resultado pelo número de cidadãos em Springfield (30.000) e divide o resultado por 4, porque há quatro sorveterias em Springfield. Assim, 30 mil colheres de sorvete são vendidas na sorveteria Sorrento por dia. Renda: 30.000 * $ 0,60 = $ 18.000.

Fonte: as autoras

Já a Unidade de Significado US1.2.40.15 compreende a implementação de respostas à 39 turmas do 9º ano de 23 escolas do ensino médio no estado de Hessen (Alemanha) com 978 estudantes secundários. As duas atividades do Quadro 74 são citadas e sua solução foi realizada pelos alunos, principalmente por meio do uso de conceitos de geometria do Teorema de Pitágoras.

Quadro 74 – Atividades descritas na Unidade de Significado US1.2.40.15

Atividade 1: Teleférico "Ristis"	Dança em torno do chamado “Maibaum”.
 O cabo do teleférico Ristis deve ser substituído. 1 m do cabo custa 8 €. Quanto custará aproximadamente o novo cabeamento?	Em 1º de maio pessoas em Bad Dinkelsdorf dança em torno do chamado “Maibaum”. Isto é, uma árvore que tem uma altura de 8 m. Enquanto dançava, as pessoas seguram fitas em suas mãos. Essas fitas medem 15 m. Quão longe do "Maibaum" estão as pessoas no começo da dança? 

Fonte: as autoras

Os textos que originaram as Unidades de Significado US1.2.11.16 (ICTMA16) e US2.2.3.14 (ICTMA14) contemplam a mesma situação-problema, no entanto com objetivos e entendimentos diferentes. Enquanto a Unidade de Significado US1.2.11.16 está atrelada ao entendimento de modelagem matemática associado à competência dos professores em dar *feedback* aos alunos no que tange à atividade de modelagem matemática da situação fictícia sobre o cálculo da distância entre as cidades, o valor do combustível e quantos quilometros o carro percorre com um litro de combustível; na Unidade de Significado US2.2.3.14 o entendimento de *Modelagem matemática como prática educativa* predomina.

As Unidades de Significado US2.2.3.14 e US3.2.3.14 abordam, de modo geral, aspectos empíricos do ensino e da aprendizagem de modelagem matemática com estudantes de 14 a 16 anos de idade que desenvolveram a atividade do Quadro 75.

Quadro 75 - Atividades das unidades US2.2.3.14 e US3.2.3.14

Situação-problema	**Matematização**
A Sra. Stone mora em Trier, a 20 km da fronteira de Luxemburgo. Para encher o seu VW Golf, dirige-se para Luxemburgo, onde imediatamente atrás da fronteira há um posto de gasolina. Lá ela precisa pagar 1,10 euros por litro de gasolina enquanto em Trier tem que pagar 1,35 euros. Vale a pena a Sra. Stone dirigir para Luxemburgo? Justifique sua resposta. US2.2.3.14	[...] interpretada no mundo real como resultados reais, terminando em uma recomendação para a Sra. Stone sobre o que fazer. [...] levar em consideração mais fatores, como o tempo ou a poluição do ar. US2.2.3.14
Em 2004, o Corpo de Bombeiros de Munique adquiriu um novo veículo de escada aérea. Com isso, pode-se economizar mais de uma montada no final da cesta de pessoas de alta altitude. O carro de bombeiros deve estar a uma distância mínima de 12 m da casa em chamas. De qual altura máxima a brigada de incêndio de Munique pode resgatar pessoas com este motor? US3.2.3.14	

Fonte: os autores

Note que os problemas abordados no Quadro 75 contém contextos que, inicialmente, parecem reais, no entanto não contemplam informações específicas que comprovem sua veracidade, são histórias contadas com base na realidade para contextualizar os alunos e os envolverem em atividades que usem de conceitos matemáticos.

Já o entendimento de *modelagem matemática como processo para resolver problemas* na Unidade de Significado US1.2.6.14, indica, explicitamente, a abordagem de problemas de palavras para o trabalho com a matemática em níveis iniciais de escolaridade, os quais estão dispostos no Quadro 76.

Quadro 76 - Exemplos de atividades de modelagem considerados problemas de palavras

Johan e Herman compraram algumas rosas. Todas as rosas são caras, mas Johan comprou menos rosas. Johan comprou 4 rosas enquanto Herman comprou 20 rosas. Quando você sabe que Johan teve que pagar 16 euros, quanto Herman teve que pagar?	Ellen e Kim estão correndo ao redor de uma pista. Eles correm igualmente rápido, mas Kim começou mais cedo. Quando Ellen corre 5 voltas, Kim corre 15 voltas. Quando Ellen fez 30 voltas, quantas voltas Kim correu?	Jan e Tom estão plantando tulipas. Eles usam o mesmo tipo de bulbos de tulipa, mas Jan planta menos tulipas. Jan planta 6 tulipas enquanto Tom planta 18 tulipas. Quando você sabe que as tulipas de Jan florescem depois de 24 semanas, quanto tempo levará as tulipas de Tom para florescerem?

Fonte: as autoras

O uso de problemas de palavra como atividade de modelagem matemática, tem sido abordado em pesquisas, e o foco está em torna-los mais realistas, proporcionando aos alunos a possibilidade de levar em conta os contextos dos problemas, de modo que a situação real exista fora do contexto da ecola (BONOTTO, 2010; VERSCHAFFEL et al., 2010).

O início das atividades de modelagem matemática por meio de problemas contextualizados é fonte de crítica da Unidade de Significado US1.2.30.15 e desperta discussões críticas e reflexivas. Sob o entendimento de *Modelagem matemática sob a perspectiva sócio-crítica*, esta Unidade de Significado aborda uma pesquisa com problemas advindos de livros didáticos das escolas secundárias e que, de acordo com a literatura são denominados de "tarefas" de modelagem matemática. A descrição dessa Unidade de Significado contempla que atividades só por terem uma roupagem contextual, não se caracterizam como de modelagem matemática, pois contém contextos fictícios e dados simulados (exemplos dessas "falsas" atividades de modelagem matemática são dispostas no Quadro 77.

Quadro 77 - Atividades da Unidade de Significado US1.2.30.15

Investigação de Interesse Simples	**Altura da Maré**	**Peso**
Jenny ganhou US $ 2.000,00 em suas férias. Ela quer guardar o dinheiro para um feriado daqui a um ano. Sua irmã mais velha Alice está começando uma nova carreira em uma empresa de advogados e precisa de roupas novas. Jenny concorda em emprestar os $ 2000,00 para Alice, desde que Alice possa devolver o dinheiro para ela assim que possível como um montante fixo, e pagar seu interesse de 1% ao mês flat (simples interesse).	Sugere-se que a altura h (t) metros da maré acima do nível médio do mar em 1 Janeiro no Warnung é dado aproximadamente pela regra $h(t) = 4\sin(\frac{\pi}{6}.t)$ onde t é o número de horas após a meia-noite. (a) Desenhe o gráfico de y = h (t) para 0 ≤ t ≤ 24. (b) Quando a maré estava alta? (c) Qual foi a altura da maré alta? (d) Qual foi a altura da maré às 8 da manhã? (e) Um barco só pode cruzar a barra do porto quando a maré estiver pelo menos 1 m acima nível médio do mar. Quando o barco poderia cruzar o bar do porto em 1º de janeiro?	O peso de uma pessoa t meses após o início de um programa de ginásio é dado por a função: $W(t) = \frac{t^2}{2} - 3t + 80$, onde $t \in [0,8]$ e W está em quilogramas. Encontrar: a) O peso mínimo da pessoa b) o peso máximo da pessoa.

Fonte: as autoras

Embora para alguns pesquisadores as atividades citadas possam ser consideradas como tarefas de modelagem matemática, com características de problemas de palavra ou problemas realísticos, os autores do texto a que esta Unidade de Significado se refere não aceitam que estas atividades possam ser consideradas atividades de modelagem matemática, visto que ao seguirem uma perspectiva sócio-critica de modelagem matemática fazem o uso de exemplos autênticos, em que "o papel da matemática e suas relações com o mundo real devem se tornar mais conscientes" (BLUM, 2015, p. 82).

Por fim, a configuração de atividades de modelagem matemática partindo de situações contextualizadas também é foco da Unidade de Significado US1.2.20.14, advinda de um texto em que os autores caracterizam a *modelagem matemática a partir da finalidade de seu uso em sala de aula*. Para tanto apresentam uma atividade de modelagem matemática desenvolvida com uma turma que em um primeiro instante cursava o 9º ano e um segundo momento em que eles estavam no 11º ano. A tarefa diz respeito à recomendação dos alunos para um gerente de um pesqueiro sobre quatro estratégias agrícolas: 1: Não faça nada para perturbar o controle populacional normal dos peixes no lago. A pesca no lago deve ser feita com base na captura e liberação; 2: Pesca permitida. A captura total permitida para todas as licenças de pesca é de 1800 peixes por ano; 3: Um empreiteiro licenciado para remover até 2500 peixes a cada temporada; 4: Permita que a população de peixes atinja 25.000 peixes, em seguida, emitir e monitorar licenças de pesca amadora que manteriam o estoque de peixes nesse nível.

O quinto Núcleo de Ideias do segundo aspecto foi sistematizado contendo as Unidades de Significado que de algum modo abordam *comunicação literária por meio da modelagem matemática*, ou seja, atividades cuja comunicação se dá por meio de produções textuais acerca das soluções obtidas. Dois entendimentos de modelagem matemática estão vinculados aos textos de origem das Unidades de Significado: *Modelagem Matemática a partir da finalidade de seu uso em sala de aula* (US1.2.20.14; US2.2.20.14); *Modelagem Matemática como processo para resolver problemas* (US1.2.24.15).

A comunicação literária que configura o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática aparecem em diferentes momentos das atividades. Na Unidade de Significado US1.2.20.14 os alunos tinham que escrever uma carta ao gerente da pescaria recomendando uma das quatro estratégias agrícolas propostas (mesma atividade disposta também no núcleo quatro, referente aos problemas contextualizados) conforme o Quadro 78.

Quadro 78 - Atividade descrita na Unidade de Significado US1.2.20.14

Fazenda de trutas de Tommy Tinn (Tarefa do 9º ano)

Um lago no Parque Nacional de Lilydale foi abastecido com aproximadamente 10000 trutas. Em lagos similares, quando deixados para fatores naturais, os números de trutas aumentam em média 20% ao ano. Para que a pesca permaneça viável, é necessário que haja pelo menos 750 peixes no lago. A superpopulação pode causar uma drástica mortandade de peixes, onde até 95% da população de peixes pode morrer. Supõe-se que a capacidade de carga do lago seja aproximadamente 5 vezes a capacidade atual de 10000 peixes. Considere as 4 estratégias e faça uma recomendação.

1: Não faça nada para perturbar o controle populacional normal dos peixes no lago. A pesca no lago deve ser feita com base na captura e liberação.

2: Pesca permitida. A captura total permitida para todas as licenças de pesca é de 1800 peixes por ano.

3: Um empreiteiro licenciado para remover até 2500 peixes a cada temporada.

4: Permita que a população de peixes atinja 25.000 peixes, em seguida, emitir e monitorar licenças de pesca amadora que manteriam o estoque de peixes nesse nível".

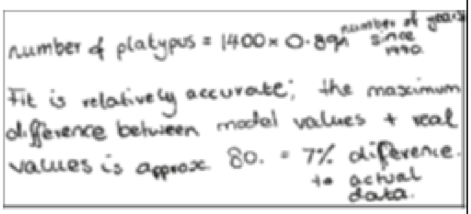
Fonte: as autoras

Já a Unidade de Significado US2.2.20.14 provém do mesmo texto da unidade anterior, no entanto aborda outra atividade de modelagem matemática em que a comunicação literária se dá em outro momento da atividade de modelagem matemática. Nesta atividade, os alunos tinham que examinar os resultados de uma análise matemática dos dados e fazer recomendações sobre a continuação de um projeto de intervenção na forma de uma apresentação em PowerPoint.

Quadro 79 - Atividade destacada da Unidade de Significado US2.2.20.14

Ornitorrinco em perigo (tarefa do 11º ano)

O ornitorrinco é uma espécie em extinção que pode se tornar extinta a menos que seja tomada ação para salvá-lo. Uma pesquisa anual realizada em um parque nacional próximo mostrou uma diminuição alarmante no número de ornitorrinco ao longo dos anos 1993-1998. Dois conjuntos de dados representando uma população de ornitorrincos antes e depois de um projeto de intervenção foram apresentados. [...] Encontre um modelo para representar o número de ornitorrinco ao longo do tempo para os dois conjuntos de dados. As perguntas então consideradas incluíam: A intervenção melhorou a situação, qual era a população prevista para daqui uma década, e quando a população retornará ao valor inicial?



Fonte: as autoras

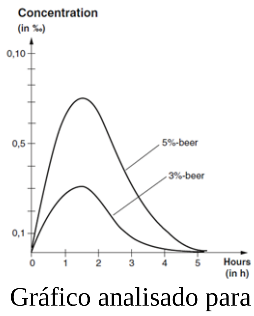
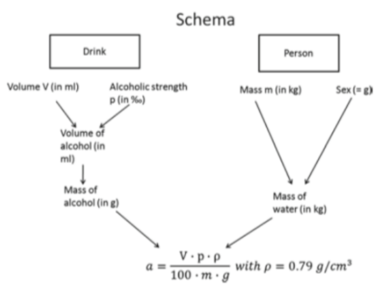
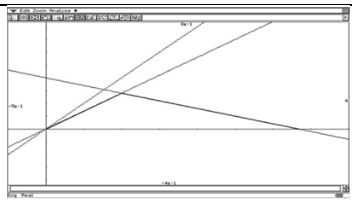
Esta configuração de atividade de modelgem matemática (Quadro 79), em que há uma produção textual em que os alunos discorrem suas resoluções, explicando-as para uma pessoa a qual o texto é endereçado, também pode alinhar-se com uma perspectiva sócio-crítica, de modo que os alunos tecem recomendações a respeito de intervenções que podem ser realizadas num contexto real.

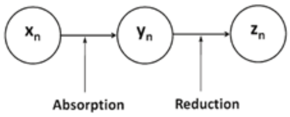
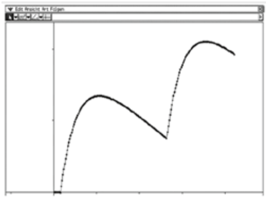
A última Unidade de Significado deste núcleo, US1.2.24.15, descreve uma atividade de modelagem matemática que provém de um Projeto de Ensino e Aprendizagem de Matemática (CTLM) com foco em pesquisa e desenvolvimento profissional. Três escolas dos anos iniciais e três turmas com alunos na faixa etária de seis anos participaram do desenvolvimento das atividades. Nestas, portanto, os alunos foram familiarizados com exemplos de letras de madeira. Os alunos tinham que resolver uma tarefa de modelagem e expor sua solução na forma de uma carta com detalhes suficientes para que os envolvidos conseguissem usar a solução obtida por eles.

O núcleo que abrange as atividades que se configuram pelo uso das *tecnologias digitais em atividades de modelagem matemática* está permeado de três entendimentos de modelagem matemática: *modelagem matemática como processo para resolver problemas* (US1.2.32.14; US2.2.32.14; US3.2.32.14; US1.2.14.17; US1.2.43.17; US1.2.51.17); *Modelagem matemática como prática educativa* (US1.2.7.16); *modelagem matemática associada ao desenvolvimento de competências* (US1.2.44.17). A configuração dessas atividades de modelagem matemática tem a especificidade de abordar as tecnologias digitais com especial papel na formulação e no desenvolvimento da situação-problema, coleta de dados e na resolução e validação dos resultados.

Partindo do entendimento de que as atividades de modelagem matemática são desenvolvidas para resolver problemas advindos de situações da realidade. As Unidades de Significado US1.2.32.14 aborda o uso de tecnologias digitais em atividades de modelagem matemática formuladas a partir de exemplares e situações contidas em livros didáticos. As tecnologias digitais são utilizadas, por exemplo, como recurso para análise da situação-problema do nível de concentração de álcool no sangue. O autor aborda que a análise de um gráfico, acompanhada de questões pode auxiliar os alunos na elaboração ou no estudo da fórmula de Widmark, e dois modelos são possíveis de dedução para auxiliar na resposta do problema, o modelo linear e o modelo semi-linear – as tecnologias atuam também em seu uso mais comum, para validar, interpretar e experimentar (O Quadro 80 aborda os resultados obtidos pelos autores e já destacados na Unidade de Significado US1.2.32.14).

Quadro 80 - Atividade destacada na Unidade de Significado US1.2.32.14

 Gráfico analisado para entender a situação-problema	 Esquema e Fórmula de Widmark que responde a situação-problema	 Modelo linear Redução de álcool b(t)=0,4-0,12.t. Absorção do álcool a.(t) = 0,4.t. Mas o álcool já está reduzido após 1 h, então absorção real a(t)=0.28.t.

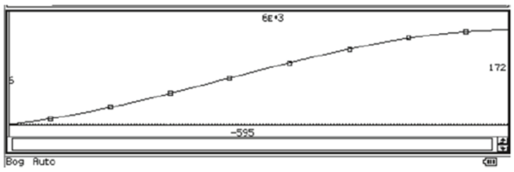
Modelo Semi-Linear		
 Resultados: $x_{n+1} = x_n - 0.05x_n = 0.95x_n$ $y_{n+1} = y_n + 0.05x_n - 0.002$ $z_{n+1} = z_n + 0.002$ É válido que $x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} = x_n + y_n + z_n = \cdots = a \ \forall n \in N$. Reconhecendo x_n como uma sequência geométrica e z_n como uma sequência aritmética, a solução possível é $y_n = a.(1 - 0.95^n) - 0.002n$	 Simulações do modelo Semi-Linear	 Validação gráfica do modelo Semi-Linear.

Fonte: as autoras

Ainda no que tange à influência do uso das tecnologias digitais, o mesmo texto do ICTMA 14, na Unidade de Significado US2.2.32.14 aborda a atividade de modelagem matemática em que a partir de um conjunto de dados é possível ajustar encontrar um modelo matemático referente a altura no nível de óleo de um carro e o tamanho do tanque que armazena o óleo. Especificamente, esta atividade apresenta uma configuração delineada na situação-problema para o uso de *software* de ajuste de curvas, por meio do uso de planilhas CAS que proporcionam regressões algébricas à conjuntos de dados. Neste contexto, os modelos matemáticos devem ser revisados face à situação original e por meio da análise gráfica é possível verificar se é necessário ou não um novo ajuste de curvas. Para além dos usos do software indicados no Quadro 81, os autores enfatizam a correspondência dos modelos obtidos com a realidade por meio da validação gráfica em comparação com os dados reais disponíveis na tabela inicial.

Quadro 81 - Atividade destacada na unidade de singifncado US2.2.32.14

Nível do óleo	20	40	60	80	100	120	140	159
Volume tanque	355	983	1747	2574	3398	4158	4776	5105



Curva no *software* CAS

$V(h) = \pi.\int_0^h f(x)^2 dx$ e Teorema fundamental do cálculo

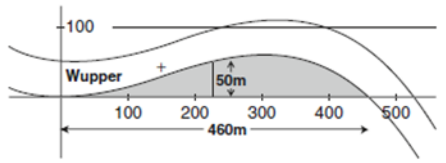
$f(h) = \sqrt{\frac{V\prime(h)}{\pi}}$

Uso da Regressão no *Software*
$V(x) = x^2(ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h)$

Fonte: as autoras

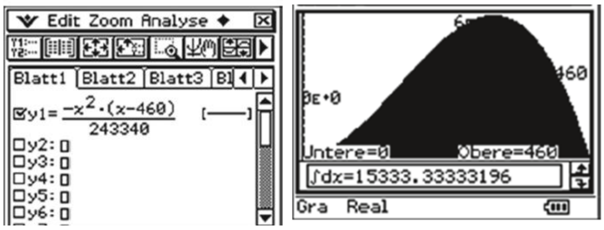
Ainda para abordagem de sistemas computacionais de álgebra (software CAS), a Unidade de Significado US3.2.32.14 indica a pluralidade de usos desse software em mais uma atividade de modelagem matemática (Quadro 82) a respeito da aquisição de uma propriedade de campo em um clube. Nessa atividade, no entanto, o objetivo de ajustar e analisar um modelo matemático algébrico é contemplado a partir de instruções que norteiam o trabalho dos modeladores e a situação-problema é colocada pelos autores como mais aberta, proporcionando aos modeladores percorrer mais fases do ciclo de modelagem matemática.

Quadro 82 - Atividade destacada na Unidade de Significado US3.2.32.14



a) Explique que a função f(x)=ax²(x-460) descreve a orla no sistema de coordenadas fornecido. Calcule a variável *a*.
b) Calcule o preço para a parcela de terra.

Solução numérica



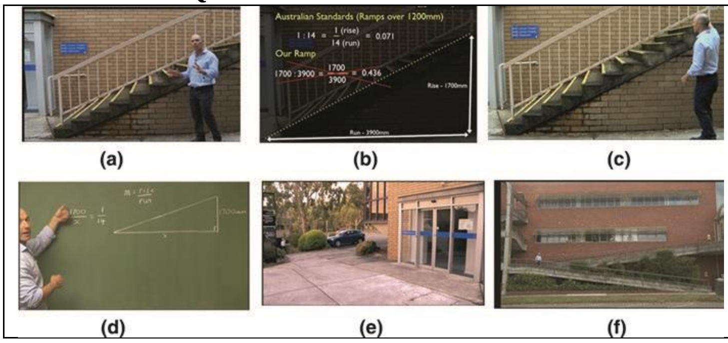
Fonte: as autoras

A inserção das tecnologias digitais na modelagem matemática, não tem apenas o papel de facilitar a obtenção de modelos na fase de matematização, seu uso tem relevância nas diversas etapas de resolução de uma atividade de modelagem (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016). Além disso, "a mídia computacional também tem sido descrita como um novo "universo" para a atividade matemática, um novo tipo de realidade matemática" (DOERR; ÄRLEBÄCK; MISFELDT, 2017, p. 79).

Outro uso potencial das tecnologias digitais é abordado pela Unidade de Significado US1.2.14.17 que trás para as aulas de matemática do ensino médio o uso de vídeos digitais para auxiliar na formulação de hipóteses e conjecturas acerca de uma situação-problema da realidade dos alunos. A configuração dessa atividade, no entanto, não aborda apenas o uso dos vídeos e o potencial das tecnologias digitais, mas acontece em uma aula em que a abordagem metodológica da sala de aula invertida é usada, ou seja, inicialmente os alunos estudam o conteúdo em casa e na sala de aula dúvidas, discussões e resoluções são possíveis com maior abrangência dos objetivos educacionais em questão (STILLMAN, 2017). A situação-problema trabalhada nessa atividade de modelagem matemática e os vídeos indicados pelo professor dizem respeito à construção de rampas para cadeiras de rodas em uma escola, bem como os padrões de construções.

Os vídeos diziam respeito ao design de rampas de acesso para edifícios e aos conceitos matemáticos necessários no planejamento e construção das rampas. Por exemplo, em um dos vídeos o conceito matemático aplicado de *gradiente* e a otimização do espaço era o foco. Já em outro, perguntas eram colocadas para que os alunos pensassem e dessem início ao trabalho matemático (Quadro 83).

Quadro 83 -Atividade destacada na Unidade de Significado US1.2.14.17

	É possível estabelecer rampas paralelas nesse espaço? Se não, que outras soluções se aplicariam? Se eu usar esse modelo, ele fará o trabalho? Já foi usado antes? Como? Onde posso descobrir?

Fonte: as autoras

O recurso de vídeos é comum em práticas de sala de aula invertida, pois o aluno pode pausar e retomar os vídeos por diversas vezes, caso tenha dúvidas ou queira relembrar algo. Neste sentido, Stillman (2017), considera que deve haver mais pesquisas a respeito do modelo de sala de aula invertida como um meio para impulsionar mais tempo na sala de aula para envolver-se com experiências com atividade de modelagem matemática.

Já a Unidade de Significado US1.2.43.17 aborda o uso de jogos como potenciais geradores de atividades de modelagem matemática em sala de aula. O tema da atividade se configura a partir dos dados do jogo e das informações entregues pelo professor. Com a finalidade de eliminar a população mundial, os alunos jogam Plague (Praga) e Infection (Infecção) por meio da formulação de uma estratégia para tornar um vírus difundido e alterá-lo, a fim de torná-lo o mais letal possível. O foco no âmbito educacional é o ponto de partida dessa configuração de atividade por meio de jogos digitais, visto que instruções e tarefas disponibilizadas pelo professor são fundamentais para que os alunos desenvolvam as atividades por meio de conceitos matemáticos enquanto avançam no jogo.

O Quadro 84 aborda a interface do jogo e algumas das instruções disponibilizadas pelo professor.

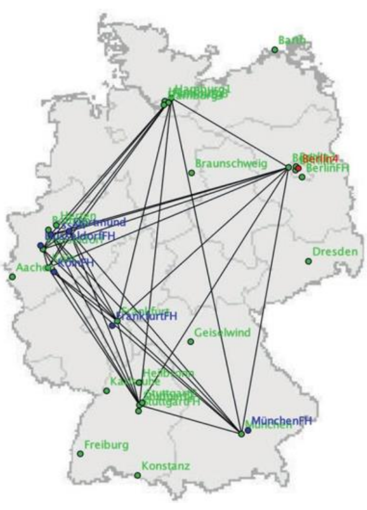
Quadro 84 - Atividade destaca na Unidade de Significado US1.2.43.17

 **Fig. 43.1** Screen shots: (**a**) the *World tab*, (**b**) the *Disease tab* for evolving the disease Interface do jogo	Desenhe um esboço do gráfico do número de mortos e infectados e descreva a propagação da peste. O número de infectados está diminuindo e, em caso afirmativo, por quê? Existem conexões entre os gráficos? Descreva a propagação da peste durante o mês 0–6 e 7–12. Quando é o maior risco de se infectar? Foram fornecidas instruções para auxiliar os alunos no uso do Excel.

Fonte: as autoras

No texto de origem da unidade US1.2.43.17, os autores consideram que a simulação do vírus pode ser interpretada como um problema de modelagem autêntico e que engajar os alunos na resolução de problemas deste tipo requer que eles reflitam e discutam diferentes estratégias e soluções (FREJD; ÄRLEBÄCK, 2017). O uso de aplicativos disponíveis na internet, como o *Google Maps* auxilia o trabalho em aulas de matemática quando a interdisciplinaridade é o foco no âmbito do Ensino Médio. Para elaborar um roteiro para estações de reabastecimento de hidrogênio. Informações e dados reais são preservados na situação-problema descrita na unidade US1.2.51.17, necessários para a resolução do problema e uma imagem de satélite serve de suporte para o desenvolvimento de um modelo matemático que minimiza a distância entre as cidades, resultando na localização ideal para o posto de reabastecimento de hidrogênio (Quadro 85).

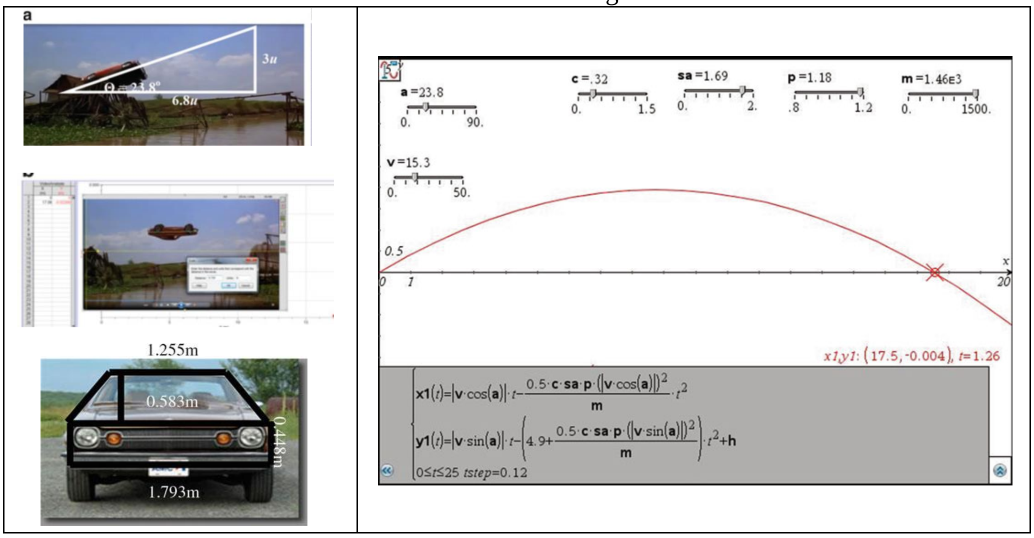
Quadro 85 - modelo matemático utilizado na atividade destacada na Unidade de Significado US1.2.51.17

 **Fig. 51.2** Pre-existing locations, locations under construction and new locations	A distância euclidiana entre uma cidade e uma localização arbitrária $l_2(S_{xm}, X) = \sqrt{(a_{11} - x_{11})^2 + (a_{12} - x_{12})^2}$ Para a determinação geométrica de uma localização ideal entre duas cidades $M\left(\frac{a_{11} + a_{21}}{2}, \frac{a_{12} + a_{22}}{2}\right)$ [...] as separações euclidianas das cidades e as possíveis localizações são calculadas: l2 (Sx2, X1) ≈159 km e l2 (Sx3, X1) ≈175 km. Assim, a distância euclidiana máxima para a localização de Bayreuth e Hof é $g(X_1) := \max l_2(S_{xm}, X_1) = \max\{65.5; 159; 175\} = 175$ km $g(X_2) := \max l_2(S_{xm}, X_2) = \max\{97.2; 114; 130.5\} = 130.5$ km A partir disso, o mínimo resultante do problema de localização da instalação gera minX ∈ ${}_C g(X) := \{175; 130.5\} = 130.5$ km $= l_2(S_{x3}, X_2)$

Fonte: as autoras

Enfatizando o entendimento de *Modelagem matemática como prática educativa*, a Unidade de Significado US1.2.7.16 aborda uma atividade de modelagem matemática com o objetivo de facilitar a matematização no ensino secundário. A tecnologia digital foi especialmente utilizada para desencadear a atividade, que surgiu do interesso dos alunos ao assistir em um filme um salto realizado por um carro. A partir do filme, os alunos formularam o problema, coletaram os dados necessários e resolveram a situação. A obtenção de modelos matemáticos e a análise dos dados e dos resultados também foram feitas mediadas pelo uso de *software* digital (O Quadro 86 apresenta uma síntese da análise realizada no carro e do uso da ferramenta digital para obtenção de um modelo matemático).

Quadro 86 - Obtenção do modelo matemático e análise dos dados e resultados na atividade destaca na Unidade de Significado US1.2.7.16



Fonte: as autoras

As tecnologias digitais também têm seu papel quando o objetivo dos autores está na associação da modelagem matemática com o desenvolvimento de competências nos alunos. A Unidade de Significado US1.2.44.17 aborda vários exemplos em que as tecnologias digitais são utilizadas como meios e ferramentas para a proposta de tarefas de modelagem matemática, colocando ênfase especial em *software* de geometria dinâmica, planilha eletrônica ou sistema de álgebra computacional. Os exemplos, no entanto, não vêm acompanhados do desenvolvimento de modelos matemáticos, apenas indicam como os softwares poderiam ser utilizados “com a ajuda do *software* de geometria dinâmica, a situação do mundo real pode ser traduzida em um modelo geométrico”, ou ainda, “Para o caso de um helicóptero e três locais de acidente, podemos recorrer a objetos geométricos conhecidos” (trechos disponíveis na unidade US1.2.44.17).

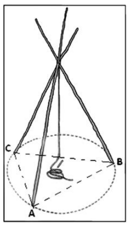
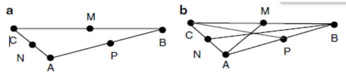
Duas Unidades de Significado, em particular, caracterizam *atividades que envolvem interlocuções entre a matemática escolar e a matemática utilizada por determinadas culturas* (US1.2.6.15; US1.2.13.17) e ambas estão associadas ao entendimento de *Modelagem matemática como prática educativa*. De modo geral, as atividades deste núcleo envolvem a investigação de situações-problema que possibilitam a promoção da interlocução entre a matemática que determinado povo utiliza para resolver um problema e a matemática escolar.

Estas atividades são exemplos de etnomodelagem que "é o processo de elaboração de problemas e questões que crescem a partir de situações reais, que formam uma imagem ou sentido de uma versão idealizada do *mathema*" (ROSA; OREY, 2013, p. 79). A palavra "mathema" vem do grego e significa explicar, conhecer, entender. Os autores inspirados por Ubiratan D'Ambrosio, comunicam que ao analisar a realidade como um todo, a etnomodelagem "permite que os envolvidos no processo de modelagem estudem sistemas de realidade nos quais haja um esforço igual para criar um entendimento para todos os componentes do sistema, bem como as inter-relações entre eles" (ROSA; OREY, 2013, p. 79).

O uso da matemática em diferentes culturas é abordado na Unidade de Significado US1.2.6.15 que aborda uma atividade de etnomodelagem com o foco na construção de um abrigo natural do tipo Tipi é estuda. Atividades de etnomodelagem se configuram pela abordagem de construções matemáticas escolares e específicas de determinada cultura, bem como na interlocução dos dois usos distintos da matemática. No caso da atividade em questão conhecimentos matemáticos do povo Sioux foram explorados por meio do método de cubação da terra. A atividade é colocada como uma proposta pedagógica para a elaboração de atividades de ensino e aprendizagem da matemática e enfatiza a importância da contextualização por meio da elaboração de etnomodelos. O Quadro 87 aborda especificidades da atividade descrita na Unidade de Significado.

Quadro 87 - Atividade destacada da Unidade de Significado US1.2.6.15

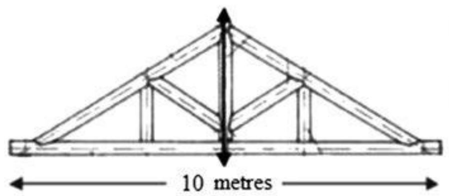
[...] é necessário calcular a área de terra, que tem um formato quadrilateral que mede 114 metros x 152 metros x 90 metros x 124 metros	A geometria espacial é inerente à forma da tipi que foi usada para simbolizar o universo em que as pessoas viviam.
[...] retângulo de 138 m × 102 m com uma área de 14.076 m *Conhecimento dos sem-terra*	A matematização nos ajuda a explicar por que um tripé é mais estável que um quadripodal ou estrutura de quatro patas.
etnomodelo: • Transforme a forma do quadrilátero irregular em um retângulo cuja área pode ser facilmente determinada através da aplicação da fórmula A=bxh.	A base formada pelo tripé é ΔABC, na qual os pontos médios de cada um dos lados são os pontos M, N e P (Fig. 6.6a). A este respeito, é possível conectar o ponto médio de cada lado oposto de ΔABC a cada um dos seus vértices, que formam os segmentos de linha AM, BN e CP. Esses segmentos de linha formam três medianas que se

• Determine as dimensões do retângulo calculando a média dos dois lados opostos do quadrilátero irregular. • Para determinar a área deste quadrilátero irregular, é necessário determinar a área do retângulo. $Base = \frac{152+124}{2} = 138\ m$ $\quad A = b \cdot h$ $A = 138 \bullet 102$ $Height = \frac{114+90}{2} = 102\ m$ $\quad A = 14{,}076\ m^2$	cruzam em apenas um ponto chamado centróide, que é o ponto de equilíbrio ou centro de gravidade de ΔABC 

Fonte: as autoras

A Unidade de Significado US1.2.13.17 também aborda uma atividade de modelagem matemática que se configura com o objetivo de enfatizar a relação entre o conhecimento matemático utilizado por profissionais que fazem uso não convencional da matemática com os conhecimentos matemáticos escolares. Neste texto, a atividade direcionada tem como tema a construção de telhados e como os serventes de obra efetuam o cálculo dos declives das vigas dos telhados. Na matemática escolar relações trigonométricas são exploradas, enquanto que os conhecimentos matemáticos do grupo cultural contratante de telhados são descritos por meio do cálculo dos declives das vigas que formam os triângulos na empena. Um dos nove grupos de estudantes decidiu trabalhar com relações trigonométricas envolvidas na construção da empena do telhado em uma casa a partir dos pontos de vista dos capatazes.

Quadro 88 - Procedimentos utilizados na resolução da atividade destacada na unidade US1.2.13.17

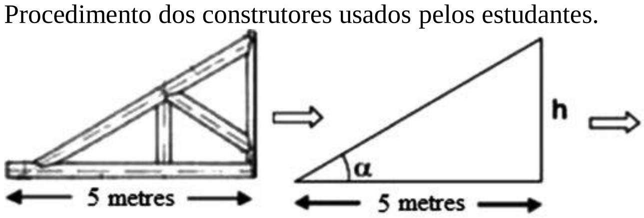


$$h = \frac{\text{length of the house}}{2} \text{ x percentage of roof trim}$$

$$h = \frac{10}{2} \text{ x } 0.4$$

$$h = 2\ m$$

Procedimento dos construtores usados pelos estudantes.



$$\tan\alpha = \frac{h}{5 \text{ metres}}$$

$$h = \tan\alpha \cdot 5$$

$$h = 0.4 \text{ x } 5$$

$$h = 2 \text{ metres}$$

Procedimento acadêmico usado pelos alunos

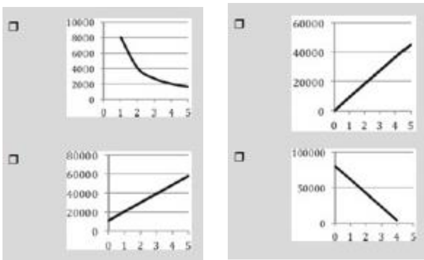
Fonte: as autoras

Em sala de aula, os alunos têm o contato com os construtores de telhado que lhes passam informações sobre suas práticas diárias para aplicar o método usado pelos por eles e determinar a altura do telhado. Na sequência, o professor ensina aos alunos a relação entre o conhecimento matemático dos profissionais com o método acadêmico para determinar a altura do teto aplicando o conhecimento trigonométrico associado à definição de tangente, conforme indicado no Quadro 88. Para Blum (2015, p. 82) estes exemplos de etnomodelagem tem um objetivo cultural, uma vez que "mostram aos alunos o quão fortemente a matemática molda o mundo" e atrelado à perspectiva de modelagem epistemológica.

Os *Problemas de testes ou problemas com questões de múltipla escolha* foram abordados em quatro Unidades de Significado, cujas atividades de modelagem foram propostas em testes, exames ou em que o problema fornecia opções de múltipla escolha para os alunos assinalarem o modelo matemático que correspondia à resolução do problema. Essas atividades estão descritas em textos que partilham de diferentes entendimentos do que vem a ser modelagem matemática: *Modelagem Matemática como processo para resolver problemas* (US1.2.32.15); *Autenticidade nas atividades de modelagem matemática* (US1.2.41.15; US1.2.20.17); *Modelagem Matemática associada ao desenvolvimento de competências* (US2.50.17).

Os problemas de múltipla escolha da Unidade de Significado US1.2.32.15 se colocam como exemplos de como os alunos podem conectar descrições de situações do mundo real com diferentes representações de modelos (Quadro 89). Cada um dos exemplos contém um problema de múltipla escolha que foi proposto a sessenta e quatro alunos do primeiro ano de Ciências da Educação da Universidade de Leuven, o teste completo era composto por 12 descrições de situações para as quais os alunos tinham que conectar a um modelo matemático adequado.

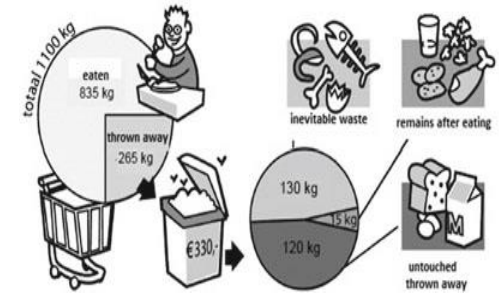
Quadro 89 - Atividade destacada na Unidade de Significado US1.2.32.15

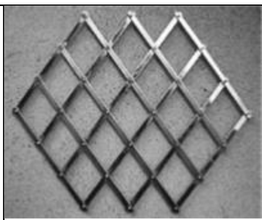
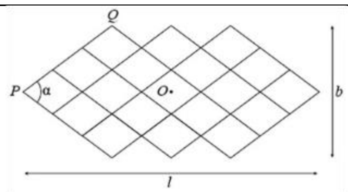
<table>
<tr><th>Exemplo 1</th><th>Exemplo 2</th><th>Exemplo 3</th></tr>
<tr>
<td>Durante a guerra, a manteiga foi racionada. A cada semana, a manteiga era entregue e razoavelmente distribuída entre as pessoas. Qual fórmula representa adequadamente a relação entre o número de pessoas que querem manteiga e a quantidade de manteiga que todo mundo recebe?
❐ $y=150x$
❐ $y=150/x$
❐ $y=150x+30$
❐ $y=-150x+30$</td>
<td>Jennifer compra carne picada no açougue. Qual tabela representa corretamente a relação entre a quantidade de carne picada que Jennifer compra e o preço que ela tem que pagar?
<table>
<tr><th>❐</th><th>x</th><th>y</th><th>❐</th><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td></td><td>0</td><td>8</td><td></td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>–4</td><td></td><td>1</td><td>12</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>–16</td><td></td><td>2</td><td>24</td></tr>
<tr><td></td><td>3</td><td>–28</td><td></td><td>3</td><td>36</td></tr>
<tr><td></td><td>4</td><td>–40</td><td></td><td>4</td><td>48</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th>❐</th><th>x</th><th>y</th><th>❐</th><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td>0</td><td>8</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>12</td><td></td><td>1</td><td>20</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>6</td><td></td><td>2</td><td>32</td></tr>
<tr><td></td><td>3</td><td>4</td><td></td><td>3</td><td>44</td></tr>
<tr><td></td><td>4</td><td>3</td><td></td><td>4</td><td>56</td></tr>
</table></td>
<td>Uma preocupação química tem uma grande cisterna com cloridrato. Esta manhã começaram a bombear com um ritmo constante todo o clorídrico desta cisterna. Qual gráfico representa adequadamente a relação entre o tempo decorrido e a quantidade de cloridrato que ainda está na cisterna?

</td>
</tr>
</table>

Fonte: as autoras

Já as Unidades de Significados US1.2.41.15 e US1.2.20.17 estão associadas à atividades cujos autores partilham do entendimento de modelagem matemática associada à autenticidade. A unidade US1.2.41.15 aborda as questões de múltipla escolha em testes avaliativos (exames matemáticos para os níveis: vocacional (exame no final da grade 10), geral (exame no final da grade 11) e pré-universitário (exame no final da grade 12), as questões são colocadas como uma oportunidade para os alunos entenderem os fenômenos e o comportamento dos dados fornecidos na situação inicial. Três são as tarefas dispostas na Unidade de Significado e denominadas de modelagem matemática (Quadro 90).

Quadro 90 - Atividade destacada da unidade US1.2.41.15

<table>
<tr>
<td>


(iii) Calcule o preço médio em Euro de um Kg de comida jogado fora.
(iv) Na Holanda existe aproximadamente 16 milhões de habitantes. Em média uma casa familiar consiste em 2.4 pessoas. Calcule a quantidade total de dinheiro em Euro da comida jogada fora na Holanda em 1 ano.
Veja a a : os diagramas oferecem informações que precisam ser transformadas em respostas numéricas. Essas respostas não resolvem o problema do desperdício de alimentos, embora possam ajudar a entender a imensidão do desperdício de alimentos.
</td>
<td>



Velocidade do vento e altitude
Em Vlaardingen (uma pequena cidade holandesa) em um determinado dia a velocidade do vento foi medida em diferentes altitudes. As medições mostram aproximadamente uma relação linear entre a velocidade do vento W em m/s e altitude h em m, quando a altitude é entre 10 e 80 m (ver Tabela). A fórmula $W = a.h + b$ dá essa relação linear.

Calcule a e b com a ajuda da tabela. Arredonde a e b para dois decimais.
<table>
<tr><td>h</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td><td>60</td><td>70</td><td>80</td></tr>
<tr><td>W</td><td>1,2</td><td>1,6</td><td>2,1</td><td>2,5</td><td>3,0</td><td>3,4</td><td>3,9</td><td>4,3</td></tr>
</table>
Trivet
Um determinado trivet consiste em barras que podem se articular. Este trivet tem 19 losangos iguais. Veja a foto.
[...]

Comprimento l e largura w do modelo são funções de α, em que $0 \leq \alpha \leq \pi$. Temos $l = 10\, cos(½\, \alpha)$ and $w = 6\, sin(½\, \alpha)$. Mostre que a fórmula para l e w está correta.
</td>
</tr>
</table>

Fonte: as autoras

A respeito deste tipo de configuração de atividade, em que modelos matemáticos já são apresentados aos alunos juntamente com a situação-problema Vos (2013, p. 485) menciona que

> Quando uma situação de problema é oferecida junto com um modelo matemático pronto, a estruturação, simplificação e matematização são ignoradas no ciclo de modelagem. A mensagem de tais tarefas é que a criação de um modelo matemático não é um objetivo de aprendizado. Uma vantagem deste formato é que todos os alunos

> partem da mesma fórmula; se eles criassem seu próprio modelo matemático e continuassem a trabalhar com ele, as atividades de modelagem subsequentes podem ter uma demanda matemática diferente entre os alunos, devido às diferentes complexidades dos modelos matemáticos criados. A presença de um modelo pronto aumenta a confiabilidade da tarefa. Uma desvantagem é que os alunos não são proprietários do modelo e não podem demonstrar competências como simplificação e estruturação.

Ainda neste núcleo, a Unidade de Significado US1.2.20.17 está associada a uma atividade desenvolvida por oitenta alunos do 11º ano. Os alunos, separados em dois grupos desenvolvera duas atividades, uma denominada de modelagem (Quadro 91 - Atividade destcada na Unidade de Significado US1.2.20.17 coluna 1) e outra de modelagem inversa (Quadro 91 - Atividade destcada na Unidade de Significado US1.2.20.17 coluna 2).

Quadro 91 – Atividade destcada na Unidade de Significado US1.2.20.17

Modelagem	**Modelagem Inversa**
Para um evento de arrecadação de fundos, um comitê de ação quer descascar um recipiente cheio de batatas. Este trabalho levará várias horas. Qual fórmula denota apropriadamente a relação entre o número de membros da comissão que colaboram e o tempo necessário para terminar este trabalho? - y = ax - y = ax + b, a> 0 - y = ax + b, a <0 - y = a / x	Escolha qual das seguintes descrições se ajusta melhor à fórmula y = ax + b, a <0. - Uma empresa de táxi cobra por uma noite de viagem uma taxa fixa no momento da partida e um valor por cada quilômetro percorrido. A fórmula denota apropriadamente a relação entre o preço total do passeio noturno e o número de quilômetros percorridos. - Um grupo de amigos participa de um jogo de azar. Quando eles ganham algum dinheiro, eles serão divididos igualmente entre os amigos. A fórmula denota corretamente a relação entre o número de amigos e a quantia de dinheiro que cada pessoa receberá. - Jenifer compra carne picada no açougue. A fórmula denota corretamente a relação entre a quantidade de carne picada que Jennifer compra e o preço que ela tem que pagar. - Thom tem uma assinatura de celular, mas usa cartões recarregáveis pré-pagos. Por minuto falou a soma carregada diminui por um valor fixo. A fórmula denota corretamente a relação entre o número de minutos falados e a soma restante no cartão.

Fonte: as autoras

No Quadro 91 há um exemplo de cada uma das atividades, no entanto oito eram os itens das atividades de modelagem, cujas situações do mundo real descritas deveriam ser conectadas à modelos matemáticos que poderiam ser: proporcional (da forma y=ax), afim com inclinação positiva (y=ax+b com a>0), afim com inclinação negativa (y=ax+b com a<0) ou proporcionalmente inversa (y=a/x). Estes exemplos de atividades recebem o nome de modelagem inversa, cujo objetivo é a formulação de uma situação do mundo real para um modelo matemático já fornecido (BOCK; VERACX; VAN DOOREN, 2017).

Considerando a *modelagem matemática associada ao desenvolvimento de competências*, a Unidade de Significado US1.2.50.17 retrata três atividades de modelagem matemática para abordar características de problemas advindos de testes padronizados como o

PISA indicados para o nono ano do Ensino Fundamental. Tais atividades são colocadas como potenciais tarefas de modelagem matemática cujo foco está no desenvolvimento de competências de matemática. O Quadro 92, aborda os problemas: Concerto de Rock e Pizza.

Quadro 92 - Atividades destacadas na Unidade de Significado US1.2.50.17

Concerto de rock	**Pizzas**
Considere o problema abaixo (leia bem!). Para um concerto de rock, um campo retangular de tamanho 100 m por 50 m foi reservado para o público. O show estava completamente esgotado e o campo estava cheio com todos os fãs em pé. Qual é o número total de pessoas que assistem ao concerto? Pense em você e em como você pode resolver esse problema. Escolha duas informações que você precisa para responder ao problema. (A) Haverá 12 estrelas do rock se apresentando. (B) O tamanho do campo é de 5000 metros quadrados. (C) O preço do bilhete é de 1000 TODOS. (D) A densidade dos ventiladores no campo é de quatro pessoas por metro quadrado. (E) A idade média dos fãs é de 30 anos.	Considere o problema abaixo (leia bem!). Uma pizzaria serve duas pizzas redondas da mesma espessura em diferentes tamanhos. O menor tem um diâmetro de 30 cm e custa 300 TODOS. O maior tem um diâmetro de 40 cm e custa 400 ALL. Qual pizza é melhor valor para o dinheiro? Pense em você e em como você pode resolver esse problema. Qual das seguintes opções você escolheria para responder ao problema? (A) Eu compararia os preços das pizzas. Então eu escolheria a pizza que tem o preço mais barato. (B) Eu compararia os diâmetros das pizzas. Então eu escolheria a pizza que tem o diâmetro maior. (C) Eu iria dividir os diâmetros das pimentas pelos preços. Então eu escolheria a pizza que me dá mais por menos dinheiro. (D) Eu calcularia a área de pizza em massa. Eu dividiria as áreas das pimentas por seus preços. Então eu escolheria a pizza que me dá mais por menos dinheiro. (E) Eu calcularia o volume de ambas as pizzas. Eu dividiria os volumes das pizzas pelos seus preços. Então eu escolheria a pizza que me dá mais por menos dinheiro.

Fonte: as autoras

Os problemas do Quadro 92 são considerados problemas de modelagem que, segundo os autores, auxiliam na reflexão metacognitiva dos alunos. De modo geral, essas tarefas de modelagem matemática se configuram de acordo com o formato (Quadro 93):

Quadro 93 - Formato das atividades da Unidade de Significado US1.2.50.17

Considere o problema abaixo (leia bem!). Problema de modelagem = situação-problema + questão holística - Pense em você e em como você pode resolver esse problema. Pergunta atômica pedindo uma competência específica de matematização (A) Alternativa 1 (B) Alternativa 2 (C) Alternativa 3etc.

Fonte: as autoras

Este formato de atividade de modelagem é o idealizado pelos autores do texto, no qual a unidade US1.2.50.17 foi destacada, visando competências de modelagem específicas dos alunos.

Pautados na perspectiva sócio-crítica para a modelagem matemática as Unidades de Significado US1.2.32.16 e US1.2.48.17 constituem o Núcleo de Ideias

Argumentação crítica em atividades de modelagem matemática, cuja configuração de atividades de modelagem matemática destacam-se por revelar a preocupação com a implicação dos problemas da sociedade, bem como a implicação do uso de modelos matemáticos na sociedade.

As atividades deste Núcleo de Ideias configuram-se a partir do objetivo de proporcionar aos alunos um ambiente de discussão e argumentação crítica a respeito do problema formulado ou proposto. A Unidade de Significado US1.2.32.16 trata de uma atividade com temática acerca das implicações a respeito da poluição de rios (Quadro 94), enquanto que a Unidade de Significado US1.2.48.17 aborda a problemática do transporte público no Brasil (Quadro 95).

Quadro 94 - Atividade destaca na Unidade de Significado US1.2.32.16

Tarefa de Poluentes do Rio
Uma empresa descarrega seu efluente em um rio localizado perto de suas instalações. Estas águas contêm produtos químicos dissolvidos, substâncias que podem afetar o ambiente em que o rio corre. Como podemos determinar a concentração de poluentes nesse rio? Como você pode ter certeza de que a concentração de poluentes no rio está abaixo do limite padrão permitido por lei?

Fonte: as autoras

As sugestões de discussão crítica a partir da temática inicial de poluentes do rio são descritas na US1.2.32.16 como por meio da importância da elaboração de suposições: *se a velocidade média do rio é constante, ou o que acontece na eventualidade quando não há mudança sazonal no nível da água, ou se a taxa de vazão é constante, a concentração de poluentes no rio é constante, o poluente e a água são completamente miscíveis, independentemente da mudança sazonal de temperatura, não há precipitação durante o período de coleta de dados, o poluente e a mistura de água completamente, o poluente não solidificar nos sedimentos do rio, as partículas sólidas são depositadas nos sedimentos do rio, o poluente é volátil porque pode ser reduzido a gás ou vapor a temperaturas ambientes, o poluente é quimicamente reativo, e a forma do leito do rio é desigual*.

De acordo com os autores do texto analisado, quando se evidenciam as suposições acerca dos elementos que colaboram para a disseminação de poluentes no rio os professores estão auxiliando no engajamento de processos reflexivos que permeiam a compreensão do fenômeno investigado e auxilia os modeladores a agir criticamente na sociedade, colaborando para o bem-estar dos membros da comunidade.

Já a Unidade de Significado US1.2.48.17 indica uma prática educativa sob a perspectiva sócio-crítica em um ambiente virtual à distância (constituído de oito polos de um curso EAD). A atividade de modelagem matemática referente o transporte público se configurou a partir do interesse dos próprios modeladores que a partir de um trabalho inicial, de uma semana, analisaram uma série de temas.

A partir da semana inicial, os alunos contaram com videoconferências sobre modelagem matemática e projetos de modelagem matemática em plataforma da *web* (Moodle). Uma das atividades geradas pelos alunos é sistematizada no Quadro 95.

Quadro 95 - Atividade destacada na unidade significado US1.2.48.17

Situção-problema	
Qual o preço justo de uma passagem de ônibus considerando a renda per capita da população de cada cidade?	
Dados	
entrevistou pessoas em cada cidade para obter informações sobre o percentual de seu salário no transporte público e sobre os serviços prestados pelas empresas de ônibus, como atrasos, problemas mecânicos e viagens de longa data. Eles também entrevistaram funcionários públicos para obter informações sobre a renda per capita, bem como a porcentagem da população de cada cidade que utiliza o transporte público.	
Matematização	
[...] as pessoas gastavam, aproximadamente, 7% da renda per capita de cada cidade em transporte público. [...] aproximadamente, 30% da população utilizava o transporte público. [...] as pessoas, no Brasil, podem usar o transporte público 2 (duas) vezes ao dia (ir ao trabalho e voltar para casa) e 24 dias por mês, considerando apenas os dias úteis [...] A renda per capita dessa cidade era de 2,70 salários mínimos, que naquela época era de R $ 678,00; assim, os alunos determinaram que 2,70 × 678,00 = 1830,60.	$\mathrm{TP} = \frac{\mathrm{PCI} \times 0.07}{48}$ $\mathrm{TP} = \mathrm{ticket}\ mathrmprice$ $\mathrm{PCI} = \mathrm{per\ capita}\ mathrmincome$ $\mathrm{TP} = \frac{1,830.60 \times 0.07}{48} = 2.67$
Resposta e Finalização	
[...] as passagens dos bilhetes de ônibus eram compatíveis com a renda per capita da cidade; no entanto, o serviço de transporte prestado à população precisava de melhorias. O transporte público é necessário, mas essa necessidade não gera a imposição de tarifas excessivas, que são desproporcionais ao serviço prestado à população da cidade.	

Fonte: as autoras

De acordo com a descrição da Unidade de Significado US1.2.48.17, as discussões crítico-reflexivas se embasaram no preço justo a ser pago pela tarifa de ônibus, e as ferramentas computacionais foram importantes para disseminar as discussões e comunicar os resultados obtidos, visto que a conclusão da atividade de modelagem matemática contou com a elaboração de um vídeo compartilhado na plataforma de vídeos YouTube, que enfatizava a precariedade do transporte público e se o preço cobrado nas passagens é justo em relação ao serviço oferecido.

O décimo Núcleo de Ideias se refere à configuração de atividades de modelagem matemática quando entram em cena *Problemas de previsão ou descrição de* *fenômenos*. De modo geral, as atividades de modelagem matemática deste núcleo tem por objetivo prever ou descrever os fenômenos reais investigados.

Os ciclos de modelagem matemática presentes na literatura de modelagem matemática apresentam, seja na matematização, seja na resolução das atividades de modelagem matemática, a importância dos modelos matemáticos para a resolução de situações-problema (DOERR; ÄRLEBÄCK; MISFELDT, 2017, PERRENET; WANEVELD, 2012).

Cinco entendimentos de modelagem matemática permeiam os textos que abordam tais atividades: *Modelagem matemática sob a perspectiva sócio-crítica* (US1.2.32.16; US1.2.49.16); *modelagem matemática como processo para resolver problemas* (US1.2.11.13; US2.2.11.13; US1.2.32.14; US1.2.28.16; US1.2.7.17); *Modelagem matemática como prática educativa / modelagem matemática como processo para resolver problemas* (US1.2.58.14); *Modelagem matemática como prática educativa* (US1.2.9.15); *modelagem matemática a partir da finalidade de seu uso em sala de aula* (US1.2.20.14); *Autenticidade nas atividades de modelagem matemática* (US1.2.57.14). Neste núcleo insere-se também a Unidade de Significado US1.2.66.14 em que os autores do texto não apresentam um entendimento de modelagem matemática.

Ainda que vinculadas à entendimentos diferentes de modelagem matemática, as atividades cuja, configuração envolve problemas de previsão ou descrição de fenômenos, têm espaço na literatura. Doerr e English (2003), por exemplo, argumentam sobre as possibilidades que os modelos matemáticos fornecem aos modeladores de descrever, explicar ou predizer o comportamento de fenômenos. Neste mesmo sentido Sousa, Tortola e Silva (2015) analisam os diferentes usos feitos dos modelos matemáticos em atividades de modelagem matemática, e destacam que entre eles os mais comuns são para descrição e previsão de fenômenos, foco da configuração de atividades deste Núcleo de Ideias.

As Unidades de Significado deste núcleo contem exemplares de atividades de modelagem matemática cuja ênfase está na previsão ou descrição de fenômenos.

No âmbito da perspectiva sócio-crítica, a Unidade de Significado US1.2.32.16, referente aos poluentes de um rio, já abordada no nono Núcleo de Ideias, é abordada novamente, pois visa descrever o comportamento da poluição no rio e por meio dessa descrição, discussões e reflexões podem auxiliar os alunos em aspectos preditivos acerca do futuro do rio e de como a sociedade pode agir para minimizar a poluição.

Já a Unidade de Significado US1.2.49.16 descreve atividades de modelagem matemática desenvolvidas em um programa de desafio para o nono ano do Ensino Fundamental no Japão. Dentre as atividades os problemas envolviam: fazer previsões da velocidade e tempo ao levar em consideração os percursos realizados por um carrinho de corrida em um experimento; fazer a previsão da geração de energia de uma residência; prever as finanças de uma companhia de energia elétrica. A primeira atividade já foi abordada no Núcleo de Ideias acerca da utilização de materiais e experimentos em atividades de modelagem matemática (Quadro 72). Já a segunda e a terceira atividade dessa unidade sobre a geração de energia elétrica e as finanças de uma companhia de energia elétrica são contempladas no Quadro 96.

Quadro 96 - Atividade destacada na Unidade de Significado US1.2.49.16

Tarefa de Geração de Eletricidade em Casa	**Finanças da Companhia de Energia Elétrica**
Na casa de Giraud, o consumo médio mensal de eletricidade é de 500 kWh, e a conta mensal de eletricidade é de 12.000 ienes. O consumo de eletricidade durante o dia é entre 20% e 30% do total. Sua família falou sobre economia de energia e fez um plano para anexar 24 peças de painéis solares de 190 W com uma produção de 4,56 kW este mês por um custo de dois milhões de ienes para equipamentos. No caso da família Giraud, os subsídios do estado, da prefeitura e da cidade chegam a 400.000 ienes. A companhia de energia elétrica compra o excesso de eletricidade gerada durante o dia por 42 ienes por 1 kWh por enquanto. Não há carregador de bateria. Quanto à soma total (incluindo o custo do equipamento) da conta de eletricidade, como você acha que isso vai mudar? 1. Nos dois casos seguintes, desenhe gráficos para a conta de eletricidade y e n após x meses e compare os dois gráficos: (a) quando não fixam os painéis solares (b) quando fixam os painéis solares. 2. Quantos meses após a instalação dos painéis solares a soma total da conta de eletricidade será menor do que antes da instalação?	A empresa de energia elétrica K gera 150 bilhões de kWh de eletricidade por ano. 30% disso é gerado pela geração de energia fotovoltaica e comprado pela empresa de energia elétrica K por 42 ienes por 1 kWh. 70% é gerado através da geração de energia térmica com um custo de combustível de 7,4 ienes por 1 kWh. Além disso, custa 1,2 mil milhões de ienes por ano para outras despesas (despesas de pessoal, custo de equipamento, etc.). Por outro lado, eles vendem 40% da geração anual para 20 ienes / kWh para as famílias em geral e vendem os 60% restantes para 12 ienes / kWh para as empresas. Problema A: Quando há uma mudança na renda: 1. Quanto é a liquidação anual de receitas e despesas das contas? 2. Se mudarmos apenas a taxa geral de venda para x e n / kWh e a liquidação de contas for de 100 milhões de ienes, qual será a função? 3. Se mudarmos apenas a taxa de venda das empresas para x ienes / kWh e a liquidação de contas for de 100 milhões de ienes, qual será a função? 4. A empresa K aumenta o preço para x ienes / kWh para famílias em geral e a taxa de venda para y ien / kWh para empresas, e espera que as contas anuais sejam zero. Qual é a equação? Que tipo de aumento de preço você sugeriria? Problema B: Quando há uma mudança nas despesas: 1. Quando os outros gastos forem reduzidos pela metade, que porcentagem de geração de energia fotovoltaica será necessária para se livrar do déficit? 2. Quando as outras despesas são reduzidas em 25%, qual o preço de compra da geração de energia fotovoltaica seria cancelar o déficit? 3. Deixe os outros gastos serem reduzidos em x% e a porcentagem de geração de energia fotovoltaica em%. Qual é a equação para cancelar o déficit? Problema C: Quando mudamos as condições da renda e das despesas, sugerir o seu plano para a empresa.

Fonte: as autoras

No que se refere ao entendimento de *modelagem matemática como processo para resolver problemas*, a Unidade de Significado US1.2.11.13 diz respeito a uma situação que envolve a obtenção e validação de um modelo matemático que descreve o ganho de peso de uma pessoa sedentária que segue uma dieta a base de alimentos *fastfood* e refrigerante (Quadro 97).

Quadro 97 - Atividade destacada na Unidade de Significado US1.2.11.13

Situação inicial e problema

Super Size Me: A Dieta do Palhaço (Filme de Morgan Spurlock)

O problema da obesidade/ dieta/ exercício é uma questão muito divulgada em vários países. Em alguns lugares, foi promulgada legislação que é dirigida, entre outras coisas, aos tipos de alimentos disponíveis em lojas especializadas, e à quantidade de horário de exercícios para estudantes em uma base diáriaou semanal. Em seu filme/ documentário, Spurlock descreveu seu experimento de comer fast food.

Regras do experimento:

Por 30 dias consecutivos, Morgan Spurlock comeu três refeições, consistindo apenas de alimentos e bebidas do McDonalds (aproximadamente 5000 calorias por dia).

- Deve escolher o tamanho "Super Size" de sua comida sempre que lhe for oferecido.
- Ele comeu tudo no menu McDonalds pelo menos uma vez.
- O exercício diário foi limitado ao de um trabalhador de escritório americano.

Consequência: o Spurlock passou de 84 para 95,5 kg - houve outros efeitos, como um nível de colesterol perigosamente alto.

Problema de modelagem aberta: Construa e teste um modelo para descrever o projeto de Morgan Spurlock de ganho de peso.

Matematização e resolução

Como resolução assumindo a ingestão média diária de alimentos *(I)* = 5000 calorias (aproximadamente), deixe w_n peso depois do dia n − o peso original de Spurlock w_0 = 84 (kg)

peso $_{\text{hoje}}$ = peso $_{\text{ontem}}$ + (consumo de energia $_{\text{hoje}}$ − energia usada $_{\text{hoje}}$)/7800

Assim,

$w_n = w_{n-1}$ + [ingestão calórica (dia n) − calorias utilizadas (dia n)]/7800

$w_1 = w_0 + (I - 24 \times 1 \times w_0) / 7800 = I / 7800 + (1 - 24/7800)\, w_0$ como o estilo de vida é sedentário.

Consequentemente,

$w_1 = aI + bw_0$

onde a = 1/7800 = 0,000128 e b = (1–24 / 7800) = 0,997.

similarmente

$w_2 = aI + bw_1 \cdots w_{30} = aI + bw_{29}$

Uma solução usando planilha no computador obtém um valor final de 95,15 kg.

Solução da Série Geométrica:

$w_2 = aI + bw_1 = aI\,(1 + b) + b^2 w_0$ leva a: $w_{30} = aI\,(1 + b + b^{2} + \cdots + b^{29}) + b^{30}\, w_0$

Assim, $w_{30} = aI\,(1-b^{30}) / (1-b) + b^{30}\, w_0$ = 95,15 (aprox.) – respeitavelmente perto do valor real

Indicação de atividade posterior

Ben pesa 72 kg e tem um nível de atividade ativo. Para diversão e exercício adicional, ele anda de skate uma hora por dia, normalmente ingere alimentos que mantém seu peso em 72 kg. Algumas lojas de *fastfood* abriram perto de sua casa, e agora depois de andar de skate Ben tem uma rotina diária em que ele come um cheeseburger e bebe uma coca-cola de 375 ml. O resto de sua dieta continua o mesmo. Qual o efeito desse hábito no peso de Ben depois de dois meses?

Fonte: as autoras

No Quadro 97 a partir de um texto inicial os autores indicam um procedimento matemático para o cálculo da ingestão de calorias, que também pode ser feito utilizado ferramentas digitais como planilhas eletrônicas, as quais auxiliam na previsão do aumento de peso considerando a ingestão diária de 5000 calorias. Mesmo a modelagem matemática sendo entendida como um processo para resolver problemas é notável o potencial para as discussões críticas em torno dos hábitos sedentários de sujeitos que se alimentam em *fastfood* diariamente.

Ainda no contexto de modelagem matemática para resolver problemas, a Unidade de Significado US2.2.11.13 descreve uma atividade de modelagem matemática que tem como foco a introdução de sapos em plantações na Austrália, inicialmente para controle ambiental, porém tornando-se uma praga como passar do tempo, o desequilíbrio da população gerou uma investigação sobre qual seria a taxa de abate necessária para retornar ao equilíbrio. Considerando informações disponíveis na internet, como *a taxa de crescimento de sapos-cururu é constante*; *de 25% ao ano*; e a população inicial de sapos em 1935 como de 3102, o modelo matemático do Quadro 98 foi obtido.

Quadro 98 - Modelo matemático destacado da Unidade de Significado US2.2.11.13

População (ano) = $3102. (1,25)^{n}$ Taxa de abate: Pela taxa de crescimento de acordo com a *Wikipedia*; 25% a cada ano $(1 - h\ ) \times 1,25 =\ 1$ $1 - h = 1\ /\ 1,25\ ;\ h = 1 - (1\ /\ 1,25) = 0,2$

Fonte: as autoras

A partir da análise matemática sobre a taxa de abate disponível no Quadro 98 foi possível inferir que todo ano 20% da população de sapos precisa ser exterminada para que a população se mantenha controlável e estável, visto que uma taxa de 25% de crescimento conduziria a uma população de sapos de quase 19 bilhões em 2005, ou mais de 2400 sapos para cada quilômetro quadrado na Austrália.

No que tange a resolução de problemas e à previsão e descrição de fenômenos, a Unidade de Significado US1.2.32.14 se enquadra neste Núcleo de Ideias, mas também já foi abordada no Núcleo de Ideias referente o uso das tecnologias digitais (Quadro 80). Essa associação enfatiza o potencial das tecnologias digitais como recurso para aprimorar processos de cálculo em que é necessário a realização de descrições e previsões contendo diferentes dados.

Neste caso, o fenômeno descrito diz respeito à sequência cronológica da concentração de álcool no sangue (em %) após o consumo de uma determinada abundância de cerveja com 5% ou alternativamente 3% e a partir da análise gráfica os alunos deveriam descrever o progresso com suas palavras, obter semelhanças e diferenças e modelos para determinar a concentração do álcool no sangue em qualquer instante de tempo. As tecnologias digitais auxiliaram na obtenção de ajustes de curvas e soluções numéricas a longo prazo.

A previsão populacional é foco da Unidade de Significado US1.2.28.16 que a partir de uma notícia divulgada pela mídia australiana cujo texto apresenta a modelagem matemática como uma alternativa para a solução de problemas do mundo real e coloca ênfase especial na modelagem do ponto de vista educacional.

Os modelos matemáticos durante a atividade descrita na unidade são elaborados por meio de suposições acerca de taxas de nascimento, morte e imigração (Quadro 99).

Quadro 99 – Atividade de modelagem matemática destacada da Unidade de Significado US1.2.28.16

Problema a investigar	
Investigue a alegação de que "os demógrafos dizem que (a população) está no caminho certo para atingir 40 milhões até o meio do século". Quais são algumas implicações sociais?	
Suposições	
Suponha, como sugere a reportagem, que os valores dados de nascimento, morte e taxas de imigração se apliquem no futuro. Deixe $P_0 =$ população inicial (em 2013); Seja $P_n =$ população no ano n Deixe $r = (b - d) =$ taxa de crescimento natural; Deixe $I =$ ingestão líquida anual de imigração	
Resolução 1	**Resolução 2**
$P_0 = 23\ 000\ 000;\ b = 0{,}0132;$ $d = 0{,}00647;\ r = 0{,}000673; I = 227\ 032$ $P_1 = P_0 + r\,P_0 + I = P_0(1 + r) + I = P_0 R + I$ (onde $R = 1 + r$) $P_2 = P_1 R + I$ numa planilha copie e arraste $P_{40} = 40\ 459\ 252$	$P_n = P_0\,R^n + I\,(R^{n-1} + \ldots R^2 + R + 1)$ $P_n = P_0\,R^n + I\,(R^n - 1)/(R - 1);$ $P40 = 40\ 459\ 252$ **Resolução 3** $\frac{dP}{dt} = Pr + I$ $P(t) = P_0 e^{rt} + I(e^{rt} - 1)/r$ onde $P_0; P_{40} = 40\ 526\ 191$
Avaliação	
Se uma população tem uma expectativa média de vida de L, em média, uma fração de 1 / L da população morre a cada ano. Usando os números fornecidos acima, então, uma estimativa do tempo de vida médio =1/0.00647=154.6 (anos)! Portanto, embora o dado número possa se aplicar em um período de 24 horas (como aqui), ou mesmo em curtos períodos de tempo, não é uma base para previsões robustas de população. Refinamento para estimar a taxa de mortalidade, precisamos pesquisar dados estatísticos robustos, como a expectativa de vida de 81,5 anos. Para esta expectativa de vida a taxa média de mortalidade a longo prazo=1/81.5=0.0122699 $anos^{-1}$ e ao longo do tempo, o valor atual deve estabilizar para valor consistente com isso. Observamos também que a taxa líquida é cotada em cerca de 180.000 por ano, em vez do valor mais alto derivado dos dados durante a noite. Usando a taxa revisada de mortalidade e os números de imigração: $P_{40} = 31{,}200{,}000$ (aproximadamente) uma previsão substancialmente diferente.	

Fonte: as autoras

No Quadro 99 é possível identificar que os modelos matemáticos são desenvolvidos por meio de uma abordagem com variáveis discreta e contínua, por meio da utilização de Equações Diferenciais Ordinárias e progressão geométrica. E para discutir o potencial preditivo dos modelos, os autores indicam que os professores fomentem a discussão por meio dos pontos: *Há implicações de projeções populacionais para a provisão futura de empregos, moradia, saúde, educação e a lista continua? Os demógrafos estão errados? Os dados são robustos? A mídia foi criativa com fatos?*.

Ainda no entendimento de *modelagem matemática como processo para resolver problemas* emerge a configuração da atividade US1.2.7.17 que descreve a trajetória de um veículo a fim de validar se o carro estava acima da velocidade permitida em uma via. A atividade e as indicações para o trabalho com modelagem matemática em sala de aula são advindos de um projeto desenvolvido com alunos da Educação Secundária e orientados por um professor. A atividade do Quadro 100, referente o carro aéreo, foi colocada pelo professor, como uma atividade de modelagem matemática introdutória.

Quadro 100 – Situação-problema destacada da Unidade de Significado US1.2.7.17

Carro aéreo
De acordo com o New Hampshire Sunday News de 7 de maio de 2000, dois moradores que estavam dormindo no Domingo de Páscoa de 2000 tiveram a fuga mais feliz. Um carro bateu no teto do quarto no andar de cima e aterrissou no quarto. O carro estava sendo conduzido por uma jovem mulher pela Hampstead Road às 03h35min quando saiu da estrada e passou por uma propriedade vizinha antes de se erguer a uma inclinação de 20%, e 'viajar' no ar. O carro voou sobre três carros estacionados viajando a uma distância horizontal de 48,62 m antes de bater no telhado. O ponto de impacto no telhado foi cerca de 30 cm menor do que o ponto de decolagem, pois a casa estava em nível menor do que o chão.
Tendo identificado separadamente o movimento do projétil como um modelo apropriado, a maioria das equipes começou a resolução sem considerar qualquer correção para resistência do ar (para um objeto tão grande). $S_y = u_y t + \frac{1}{2} a t^2 \quad S_x = u_x t$ $S_x = u_x t$

Fonte: as autoras

A atividade do Quadro 100 foi desenvolvida por um grupo de vinte alunos em um desafio de modelagem matemática de dois dias patrocinado por uma agência local da Austrália. Foi a partir do desenvolvimento dessa primeira atividade que os alunos avançaram, segundo os autores, metacognitivamente, para a formulação de problemas de maneira independente, com os temas: como aumentar a riqueza de determinada população; o produto interno bruto (PIB) per capita; a taxa de consumo de chocolate; obesidade. Ainda, nessa Unidade de Significado US1.2.7.17 a configuração das atividades de modelagem matemática e como os professores podem encaminha-las em sala de aula é descrita por meio de um roteiro (Quadro 101).

Quadro 101 – Roteiro para uma atividade de modelagem matemática - US1.2.7.17

Roteiro indicado na US1.2.7.17
Escolher uma situação para modelagem requer reflexões proativas iniciadas pelo grupo sobre situações potenciais, de forma que o grupo se convença de que a situação escolhida pode gerar um problema que pode ser modelado matematicamente no tempo, dada a experiência dos seus membros. Mas é necessário sugerir possíveis situações que são de interesse.   *Quais variáveis existem?*   O produto interno bruto (PIB) per capita; Taxa de consumo de chocolate; Obesidade proporção.   *Quais dados precisamos?*

PIB per capita de países selecionados. A proporção de pessoas obesas nos países selecionados. A quantidade de chocolate consumida por país durante um determinado ano.

De que matemática precisamos?

Usamos tabelas e gráficos para representar os dados que encontramos. Visualmente do gráfico, encontramos o melhor ajuste linha de tendência e obter a equação do mesmo. Em seguida, usamos os dados para gerar uma regressão com base na linha e produzir uma equação para modelar os dados. Usando a equação, podemos prever a quantidade de consumo de chocolate, em seguida, compará-lo com mais dados para testar e refinar nosso modelo.

Sabemos como resolver esse modelo matemático?

Sim. Para descobrir se existe uma relação entre o PIB per capita e a quantidade de choco-consumidos tardiamente, substituímos o PIB per capita pela equação que encontramos no gráfico (Consumo de chocolate x o PIB per capita) e comparar o resultado com os dados reais. Repetimos isso com o gráfico da proporção de pessoas obesas em um país x o consumo de chocolate para encontrar a relação entre essas duas variáveis.

O que essa saída significa matematicamente? No contexto real?

Se os resultados calculados estiverem próximos dos dados reais dos países, isso provaria que é de fato uma relação entre a quantidade de chocolate consumida, o PIB per capita e a proporção de pessoas obesas em um país.

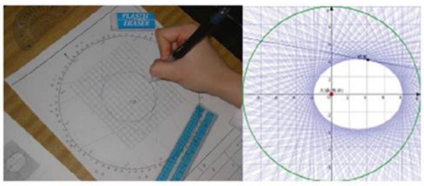
Fonte: as autoras

O roteiro (Quadro 101) apresenta questões que auxiliaram os alunos na tomada de decisão ao lidarem com formulação do problema. Algumas pesquisas propõe roteiros com o indicado no texto analisado como um gatilho para antecipar e auxiliar no trabalho metacognitivo dos alunos (NISS, 2010; STILLMAN; BROWN; GEIGER, 2015). Essas estruturas são abordadas por professores com base nos ciclos de modelagem matemática e são compostas de questões para direcionar as ações dos alunos, de modo que pouco a pouco eles desenvolvem a autonomia no uso da modelagem matemática.

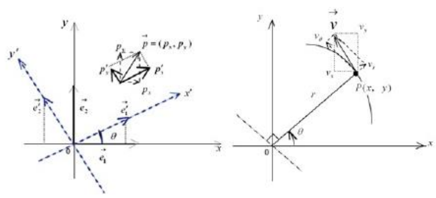
O entendimento de *Modelagem matemática como prática educativa* é mobilizado no texto de origem da Unidade de Significado US1.2.58.14 cuja atividade tem por objetivo a descrição do movimento orbital do planeta Mercúrio. Desenvolvida com alunos do 12º ano em uma escola do Japão, a atividade de modelagem foi proposta pelo professor para o trabalho com a Lei de Kepler (Quadro 102).

Quadro 102 – Registros da matematização da atividade de modelagem matemática - US1.2.58.14

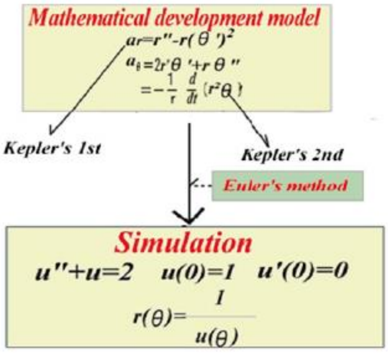
Atividade sobre o movimento orbital do Planeta Mercúrio



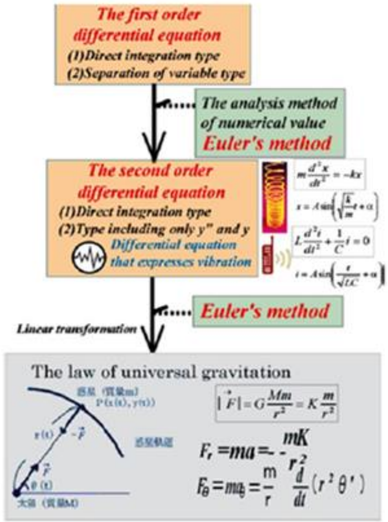
Reproduzindo o movimento orbital do planeta



Transformando as coordenadas



Desenvolvimento do modelo matemático.



Introdução das EDOs.

Fonte: as autoras

Os modelos matemáticos dos alunos disponíveis no Quadro 102 correspondem ao uso das leis da física, de trigonometria, equações diferenciais e métodos numéricos para resolução da equações por meio de ferramentas computacionais. Essa atividade com o objetivo de descrever um fenômeno auxilia na introdução de conceitos matemáticos e no trabalho com a interdisciplinaridade com conceitos da Física. A finalização da atividade implicou na resposta de um questionário sobre o uso do material didático “Lei de Kepler” e na abordagem das dificuldades encontradas pelos alunos no desenvolvimento da atividade. A atividade tinha como objetivo introduzir novos conceitos matemáticos aos alunos e alavancar a o entendimento dos alunos a respeito das Leis de Kepler, o que pode ser um exemplo de modelagem conceitual, em que se usa exemplos “matematicamente ricos que servem para tornar tópicos matemáticos mais compreensíveis” (BLUM, 2015, p. 82).

A configuração de modelagem matemática do ponto de vista educacional, também é foco da Unidade de Significado US1.2.9.15 em que o objetivo educacional se pauta na teorização de atividades de modelagem matemática em sala de aula, em particular com ênfase em contextos sociais. No texto selecionado a atividade de modelagem matemática foi desenvolvida por uma turma do uma turma do 11º ano (nível secundário) em que o professor lançou o desafio aos estudantes de fazer uso de funções cúbicas e exponenciais para modelar problemas da vida. Neste contexto, está descrita a atividade de modelagem matemática sobre a proliferação de algas em um rio (Quadro 103).

Quadro 103 – Situação-problema da atividade de modelagem matemática - US1.2.9.15

O CSIRO tem monitorado a taxa na qual o dióxido de carbono é produzido em uma seção do rio Darling. Durante um período de 20 dias, eles registraram a taxa de produção de CO 2 no rio. A concentração de CO 2 [CO 2] da água é preocupante porque um excesso diferença entre o [CO 2] à noite e o [CO 2] usado durante o dia através da fotossíntese pode resultar em blooms de algas que, em seguida, resulta em oxigênio privação e morte da população animal resultante e da luz solar privação que leva à morte da planta e à morte subsequente dessa seção do rio. Existe motivo para preocupação dos pesquisadores do CSIRO? Identifique quaisquer suposições e as limitações do seu modelo matemático.

Time in hours	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rate of CO_2 production	0	–0.042	–0.044	–0.041	–0.039	–0.038	–0.035	–0.03	–0.026	–0.023
Time in hours	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Rate of CO_2 production	–0.02	–0.008	0	0.054	0.045	0.04	0.035	0.03	0.027	0.023
Time in hours	20	21	22	23	24					
Rate of CO_2 production	0.02	0.015	0.012	0.005	0					

Fonte: as autoras

Os professores envolvidos no projeto esperavam, de acordo com o Unidade de Significado, que os alunos construíssem um modelo matemático, os dados tabulados, juntamente com um gráfico, para analisar se o modelo obtido era adequado à descrição do fenômeno. Após utilizar uma técnica para determinar se a função exponencial era uma função apropriada, os alunos constataram que a melhor opção é modelar a situação com uma função definida em dois intervalos.

O uso da modelagem matemática em sala de aula é disseminado, ainda, pela Unidade de Significado US1.2.20.14 (já abordada no Núcleo de Ideias referente a comunicação literária) e com aspectos autênticos na Unidade de Significado US1.2.57.14.

A atividade de modelagem matemática configurada na unidade US1.2.57.14 diz respeito a como a disseminação de uma doença sexualmente transmissível em joaninhas pode ser prevista em relação ao desenvolvimento da própria população (Quadro 104). De modo geral, nessa atividade de modelagem matemática os alunos precisavam investigar as declarações sobre o desenvolvimento a longo prazo da população de joaninhas e descobrir se as joaninhas estavam em risco de extinção.

Quadro 104 - Atividade de modelagem matemática - US1.2.57.14

três fatores [...] influenciam a derivada do tamanho da população:
• tamanho da população; • infestação • atividade reprodutiva.

suposição de que todos os fatores dependerem apenas do tempo.
[...] identificaram os fatores que têm que aumentar ou diminuir para resultar em um aumento de $p'(t)$ (os alunos chamaram isso de "ascensão da população") ou em uma diminuição de $p'(t)$ (os alunos chamaram isso de "Desagregação da população").

$p'(t)$	$b(t)$	$r(t)$	$p(t)$
↗	↘	↗	↗
↘	↗	↘	↘

Para equilibrar isso e incluir todos os valores em uma equação, os alunos examinaram o valor $(1 - b(t))$ em vez de $b(t)$, que se desenvolve como os outros valores.
[...] hipótese: $p'(t) = r(t)(1 - b(t))p(t)$
[...] acrescentaram uma taxa de mortalidade independente do tempo m aos fatores existentes

$$p'(t) = r(t)(1 - b(t))p(t) - m.p(t)$$

Eles multiplicaram a equação anterior com $(1 - m)$ para ajustar também o novo fator aos existentes, assim como fizeram com a infestação.

$$p'(t) = r(t)(1 - b(t))p(t).(1 - m)$$

[...] o primeiro adendo do lado direito da equação expandida "nascimento", o segundo adendo "morte" [...]

$$p'(t) = \underbrace{r(t)\big(1 - b(t)\big)p(t)}_{birth} - \underbrace{m \cdot r(t)\big(1 - b(t)\big)p(t)}_{death}$$

[...] X a taxa de natalidade ficando com a equação:

$$p'(t) = X \cdot r(t)\big(1 - b(t)\big)p(t) - m \cdot p(t)$$

[...] usaram um modelo discreto com uma fórmula recursiva em vez de um modelo estável.

$$p\big(m+1\big) = X \cdot r(m)\big(1 - b(m)\big)p(m) - m \cdot p(m) + p(m)$$

Com essa fórmula, os alunos calcularam o desenvolvimento da população de joaninhas ao longo de um ano, de acordo com seu modelo.

Fonte: as autoras

De posse dos resultados matemáticos do Quadro 104, os estudantes não validaram o modelo matemático e os resultados, mas concentraram seu foco em refletir sobre modificações para aprimorar o modelo matemático por eles elaborado.

Por fim, uma Unidade de Significado advinda de um texto sem um entendimento explicito de modelagem matemática US1.2.66.14 aborda indicações de como o professor pode avaliar o encaminhamento de uma atividade de modelagem matemática acerca da população de coalas na Austrália (Quadro 105).

Quadro 105 – Instruções da atividade de modelagem matemática - US1.2.66.14

Situação-problema proposta pelos professores
As páginas anexas (dados das páginas do Koala Facts do Centro de Mídia da Fundação Koala, na Austrália, e um artigo de jornal de Harbutt, 2004) fornecem informações sobre as populações de coalas na Austrália. Desenvolva um modelo matemático baseado nas matrizes de Leslie para representar as mudanças populacionais da população de coalas. Escolha uma região em que a população possa estar aumentando, investigue o crescimento em pelo menos 10 anos e depois use isso para discutir maneiras de manter uma população que o ambiente possa sustentar.
Critérios para avaliar a atividade de modelagem matemática dos alunos
• Adequação da interpretação dos dados • Razoabilidade das suposições • Qualidade do modelo matemático para mudanças populacionais • Justificativa de escolha de valores para parâmetros do modelo • Discussão dos pontos fortes e fracos do modelo • Avaliação do modelo e das mudanças recomendadas para manter uma população adequada

Fonte: as autoras

Os autores não apresentam no artigo as construções dos alunos durante o desenvolvimento da atividade. Mas indicam que a atividade de modelagem matemática foi proposta pelo professor a alunos da Educação Básica e que os professores podem realizar a avaliação da atividade realizada pelos alunos com base nos critérios elencados no Quadro 105.

Por fim, o décimo primeiro núcleo referente a configuração das atividades de modelagem matemática está associado às atividades cujo foco recai na *obtenção de modelos com ajuste de curva*. Três entendimentos de modelagem matemática são contemplados nos textos de origem das Unidades de Significado: *modelagem matemática como processo para resolver problemas* (US1.2.32.14; US2.32.14; US3.32.14; US1.2.50.16); *Modelagem matemática como prática educativa* (US1.2.9.15); *Autenticidade nas atividades de modelagem matemática* (US1.2.41.15).

O recurso ao ajuste de curvas em modelagem matemática é comum, principalmente quando considera-se a abrangência e o uso computacional para modelar problemas da realidades. De acordo com Bassanezi (2002; 2011) um ajuste de curvas é também denominado de regressão e é tido em matemática como um recurso formal para expressar uma tendência ou relação entre uma variável dependente e uma variável indendente, no caso de uma função de uma variável real por exemplo. A partir de um conjunto de dados observados e tabulados é possível ajustar uma curva, por meio de uma relação matemática, ao conjunto de dados, usando métodos matemáticos do Ensino Superior ou da Educação Básica.

No livro de Almeida, Silva e Vertuan (2012) há diferentes exemplos de ajustes de curvas estudadas no Ensino Médio brasileiro, enquando que em Bassanezi (2002) métodos e técnicas, como por exemplo o método dos mínimos quadrados, estão disponíveis para ajustes lineares, quadráticos e exponenciais.

O autor Galbraith (2012) ao tecer reflexões sobre os gêneros de modelagem matemática a partir da literatura presente até a data da investigação, aponta que modelagem como ajuste de curvas é um dos entendimentos disseminados na literatura, em particular, quando o objetivo é o uso da modelagem como veículo, ou seja, com o intuito de ensinar matemática por meio do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Um dos perigos apontados por este autor está na realização do ajuste de curvas como modelagem matemática de um fenômeno ou problema, sem a interpretação correta entre os dados do problema e o domínio e a imagem da função ajustada, por exemplo.

As atividades citadas neste Núcleo de Ideias são exemplos do uso deste recurso em modelagem matemática. Por exemplo, entre os autores que entendem a modelagem matemática como um processo para resolver problemas, estão os textos que deram origem às Unidades de Significado US1.2.32.14, US2.2.32.14 e a US3.2.32.14. Essas já foram abordadas no Núcleo de Ideias referente a configuração de atividades de modelagem matemática por meio de tecnologias digitais e utilizam o recurso ao ajuste de curvas para auxiliar na resolução das situações-problema sobre o nível de álcool no sangue. Por sua vez, a Unidade de Significado

US1.2.50.16 descreve uma atividade de modelagem matemática com foco específico na análise de curvas que melhor se ajustam às construções arquitetônicas em uma região histórica (Quadro 106).

Quadro 106 – Situação e modelos ajustados da atividade de modelagem matemática - US1.2.50.16

Situação

[...] desenvolver modelos relacionados as curvas ao longo de uma parede de uma escola e para verificar se as formas dessas curvas foram relacionadas a curvas exponenciais, parabólicas ou catenárias.
[...] A Figura mostra as curvas na parede do Colégio Arquidiocesano.

Modelos ajustados

uma parábola ($y = x^2$)
o gráfico de uma função cosseno hiperbólica ($y = \cosh(x)$)
catenária $\left(y = \frac{\cosh(x)-1}{\cosh(1)-1}\right)$.

Fonte: as autoras

O entendimento de *Modelagem matemática como prática educativa* é disseminado no texto da Unidade de Significado US1.2.9.15 também já presente neste texto no Núcleo de Ideias anterior, que aborda o problema da proliferação de algas em um rio. O ajuste de curvas foi utilizado nessa atividade como um recurso e não como o fim da atividade de modelagem matemática, como indicado na atividade descrita na Unidade de Significado US1.2.50.16.

A Unidade de Significado, US1.2.41.15, também abordada no Núcleo de Ideias referente problemas ou teste com questões de múltipla escolha, usa do recurso ao ajuste de curvas quando aborda o problema da velocidade do vento (Quadro 107).

Quadro 107 – Situação-problema da atividade de modelagem matemática - US1.2.41.15

Velocidade do vento e altitude

Em Vlaardingen (uma pequena cidade holandesa) em um determinado dia a velocidade do vento foi medida em diferentes altitudes. As medições mostram aproximadamente uma relação linear entre a velocidade do vento W em m/s e altitude h em m, quando a altitude é entre 10 e 80 m (ver Tabela). A fórmula $W = a.h + b$ dá essa relação linear.

h	10	20	30	40	50	60	70	80
W	1,2	1,6	2,1	2,5	3,0	3,4	3,9	4,3

Calcule *a* e *b* com a ajuda da tabela. Arredonde *a* e *b* para dois decimais.

Fonte: as autoras

O ajuste neste caso não é independente, visto que é guiado pelas instruções contidas na atividade de modelagem matemática: *A fórmula W=a.h+b dá essa relação linear;* restando aos alunos o uso de métodos de ajuste lineares para a obtenção dos parâmetros a e b. Mesmo os autores não tendo indicado no texto o procedimento para ajuste da função linear, é possível inferir que pelo nível de escolaridade os alunos utilizassem procedimentos como ajuste via sistema linear, usando dois pontos observados na tabela, ou ainda recorressem ao *software excel, geogebra* ou *calc* para realizar o ajuste por meio da ferramenta digital, escolhendo a linha de tendência linear.

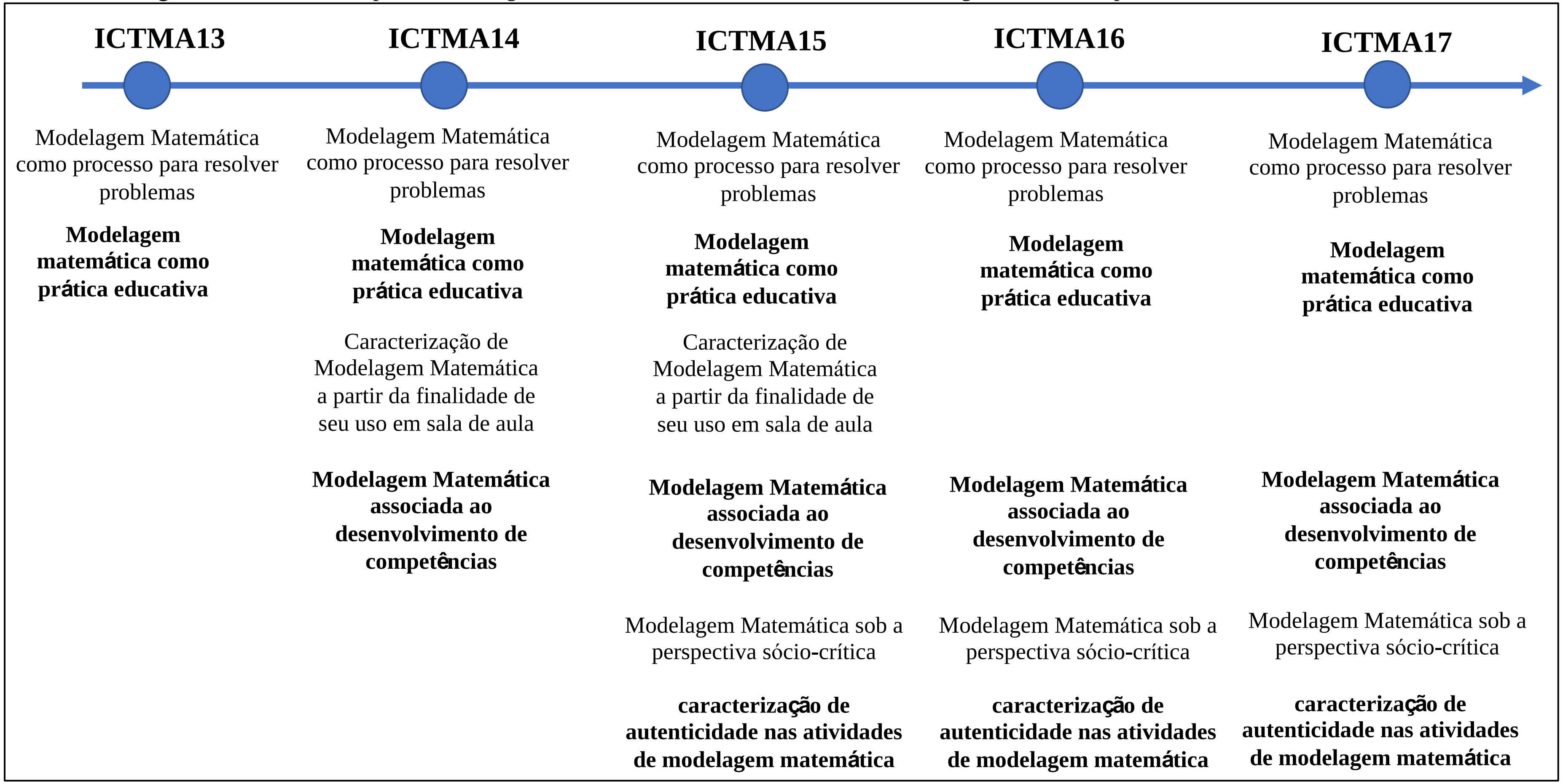
Este metatexto teve por objetivo retomar a emergência dos Núcleos de Ideias com aspectos referente o entendimento de modelagem matemática contido nos textos investigados e a configuração das atividades de modelagem matemática descritas nos textos. A retomada foi feita evidenciando informações da literatura da área de Modelagem Matemática na Educação Matemática que dão subsídios para o processo analítico da interrogação de pesquisa, ou seja, o que se entende por modelagem matemática a partir das publicações do ICTMA.

A Figura 10 aborda uma linha do tempo, considerando o recorte feito por essa pesquisa, do ICTMA 13 ao ICTMA 17 e a emergência do entendimento de modelagem matemática a partir da primeira publicação.

De modo geral, o entendimento de modelagem matemática é composto por uma rede de significados onde se destacam seis Núcleos de Ideias: *Modelagem matemática como processo para resolver problemas; Modelagem matemática a partir da finalidade de seu uso em sala de aula; Modelagem matemática associada ao desenvolvimento de competências; Autenticidade nas atividades de modelagem matemática; Modelagem matemática sob a perspectiva sócio-crítica; Modelagem matemática como prática educativa*.

Estes Núcleos de Ideias esboçam *faces* do fenômeno investigado sob diferentes óticas, que fundamentadas em teorias ou em práticas de sala de aula colaboram com o desenvolvimento da Modelagem Matemática na Educação Matemática.

Figura 10 – Linha do tempo com a emergência e continuadade do entendimento de modelagem matemática presente nos ICTMA13 a ICTMA17



Fonte: as autoras

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com Almeida (2018), a Modelagem Matemática é um dos tópicos da Educação Matemática que tem sido discutido e propagado mais intensamente durante as últimas décadas. No Brasil, por exemplo, a Modelagem Matemática teve seus primeiros passos ao final da década de 1970, com algumas características herdadas da Matemática Aplicada. O uso da Matemática para estudar, entender e avaliar criticamente os resultados obtidos de problemas e fenômenos do mundo sob um olhar do ensino e da aprendizagem de Matemática esboçavam o desenvolvimento de uma prática de Modelagem Matemática (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2015).

O avanço da Modelagem Matemática na educação brasileira, teve participação ativa de professores que contribuíram para a disseminação e desenvolvimento desta área, agregando novos pesquisadores, bem como ampliando horizontes para os estudos em Modelagem Matemática (SOUZA; ALMEIDA; KLÜBER, 2018).

No cenário internacional, a Modelagem Matemática ganhou espaço na década de 1960. Considerado precursor da Modelagem Matemática, Pollak (1979) dialoga a respeito dos significados da Matemática Aplicada, bem como apresenta as implicações educacionais das aplicações na matemática, considerando valioso os alunos vivenciarem experiências de Modelagem Matemática.

Neste contexto, os integrantes da comunidade internacional movimentavam professores, escolas e universidades com o intuito de levar a Modelagem Matemática para a sala de aula, buscavam por mudanças no currículo, com ênfase em modificar o ensino de matemática. Oficinas passaram a ser realizadas em diferentes países da Europa, eram em sua maioria, ofertadas aos professores do Ensino Médio e Superior. Para reportar estas atividades, alguns pesquisadores da área de Modelagem Matemática tiveram a iniciativa de publicar artigos e livros que tinham como tema a resolução de problemas reais com a matemática, ao passo que, nestas publicações também foram contempladas notas de ensino e possíveis soluções para os problemas (HOUSTON, GALBRAITH, KAISER, 2013) . Estas iniciativas deram início ao desenvolvimento da produção de pesquisas, bem como a publicação de estudos.

Para Sriraman e Nardi (2013, p.310) “o desenvolvimento da teoria é absolutamente essencial para que avanços significativos sejam feitos no pensamento das comunidades (ou dos indivíduos dentro delas)”. Ao encontro deste argumento Jablonka, Wagner, Walshaw (2013), consideram que a diversidade das abordagens teóricas pode ser um indicativo da maturidade de uma área.

Diante destes avanços e com o intuito de saber *o que se entende por modelagem matemática*, realizamos uma pesquisa tomando como norte uma atitude fenomenológica para a partir dos trabalhos publicados nos livros ICTMA nas edições de 2010 a 2017 detalhar uma compreensão da interrogação de pesquisa. Dois aspectos foram selecionados para realização do processo analítico: as ideias dos textos relativas ao que é ou o que caracteriza a modelagem matemática, e a configuração de uma atividade de modelagem matemática nos capítulos analisados.

Cinquenta e sete textos (capítulos dos livros ICTMA) da última década foram selecionados a partir da seleção subsequente dos critérios: os textos contemplam o termo *modelagem* no título ou no resumo do texto, os autores que publicaram em pelo menos três edições diferentes do ICTMA e, por último, apresentam e descrevem uma atividade de modelagem matemática. Por fim, tendo efetuado as análises *ideográfica* (identificação e descrição das Unidades de Significado nos textos para cada um dos aspectos analíticos) e *nomotética* (convergência das Unidades de Significado em Núcleos de Ideias), elaboramos um *metatexto* vislumbrando apresentar o que se entende por modelagem matemática dos ICTMAs no período de 2007 a 2017.

O metatexto, contido no capítulo quatro, foi elaborado de modo a dialogar a emergência dos Núcleos de Ideias com aspectos da literatura da área de Modelagem Matemática na Educação Matemática. Por meio de convergências, semelhanças e especificidades da modelagem matemática indicamos o que se entende por modelagem matemática a partir dos livros do ICTMA.

5.1 SÍNTESE DE UMA RESPOSTA PARA A INTERROGAÇÃO DE PESQUISA: O QUE SE ENTENDE POR MODELAGEM MATEMÁTICA NOS LIVROS ICTMA

Quando dirigimos nossa atenção ao entendimento de modelagem matemática seis Núcleos de Ideias emergiram: *modelagem matemática como processo para resolver problemas*; *modelagem matemática a partir da finalidade de seu uso em sala de aula;* *modelagem matemática associada ao desenvolvimento de competências*; *autenticidade nas atividades de modelagem matemática*; *Modelagem matemática sob a perspectiva sócio-crítica*; *Modelagem matemática como prática educativa*.

Entendemos que, quando o foco da pesquisa se dá no entendimento de modelagem matemática há uma relação deste com a configuração de atividades de modelagem matemática e, neste sentido, emergiram dos textos investigados onze configurações de atividades de modelagem matemática que possibilitaram ampliar a compreensão de tais entendimentos, por meio dos objetivos com as atividades, dos contextos e da forma como tais atividades são apresentadas ou modeladas: *atividades com problemas fuzzy, problemas de fermi ou problemas de estimativa; atividades cujos problemas são realizados de modo consecutivo; atividades cujo problema envolve o desenvolvimento ou o uso de materiais para a resolução ou execução de experimentos; atividades de modelagem matemática a partir de problemas contextualizados; comunicação literária por meio da modelagem matemática; tecnologias digitais em atividades de modelagem matemática; atividades que envolvem interlocuções entre a matemática escolar e a matemática utilizada por determinadas culturas; problemas de testes ou problemas com questões de múltipla escolha; argumentação crítica em atividades de modelagem matemática; problemas de previsão ou descrição de fenômenos; obtenção de modelos com ajuste de curva*.

Disseminado nos textos do ICTMA o Núcleo de Ideias *modelagem matemática como processo para resolver problemas* é o mais evidenciado no decorrer do tempo, sendo partilhado pelos autores de diferentes textos na última década e tendo ocorrido em trinta Unidades de Significado acerca da configuração de atividades de modelagem matemática, em sua maioria voltada à modelagem educacional, nomeada por Blum (2015) com objetivos formativos e com ênfase em aspectos cognitivos. Também em evidência nas publicações do ICTMA está o entendimento de *Modelagem matemática como prática educativa*, vinculado a aspectos formativos e evidenciando práticas de sala de aula com atividades de modelagem matemática de diferentes configurações.

A *modelagem matemática a partir da finalidade de seu uso em sala de aula* emerge na configuração de atividades com objetivos específicos. No entanto, aparece apenas nos ICTMA 14 e ICTMA 15, o que indica que tal caracterização, no decorrer do tempo, pode ter sido aprimorada ou refletida nos entendimentos de modelagem matemática como um processo para resolver problemas, como prática educativa, ou ainda com o foco mais específicos, como os entendimentos que seguem.

O entendimento de modelagem matemática associado ao desenvolvimento de competências, nessa amostra de dados, se evidenciou na configuração de seis atividades de modelagem matemática, do ICTMA 14 ao ICTMA 17. Com o mesmo número de aparições está a autenticidade nas atividades de modelagem matemática.

Por fim, as discussões e reflexões pretendidas pela perspectiva sócio crítica, mesmo tendo tal entendimento explícito em apenas dois textos da amostra pesquisada aparece também como subobjetivo em seis Unidades de Significado que tratam da configuração das atividades de modelagem matemática, nos ICTMA15, ICTMA16 e ICTMA17.

De modo geral, as diferentes faces da modelagem matemática nas edições dos livros ICTMA revelam entendimentos específicos que destacados em seis Núcleos de Ideias, possibilitam dissertar sobre o entendimento de modelagem matemática como uma rede de elementos composta por termos como *resolver problemas*, *uso em sala de aula; desenvolvimento de competências; autenticidade; perspectiva sócio-crítica; prática educativa*. Estes termos fazem sentido quando a investigação alinhava as características da configuração de atividades de modelagem matemática. Dos onze Núcleos de Ideias, problemas de diferentes natureza (*problemas fuzzy*, *problemas de fermi* ou *problemas de estimativa*, *problemas contextualizados, testes ou problemas com questões de múltipla escolha*, *problemas de previsão ou descrição*), são solucionados por meio do uso de diferentes materiais (*problemas são realizados de modo consecutivo*, *materiais para a resolução ou execução de experimentos*), procedimentos (*matemática utilizada por determinadas culturas*, *ajuste de curva*) e recursos (*tecnologias digitais*), sendo ponto importante nessa configuração a comunicação da atividade, dos resultados obtidos e da interpretação destes resultados frente às situações estudadas (*comunicação literária*, *argumentação crítica*).

Estes Núcleos de Ideias esboçam *faces* do fenômeno investigado sob diferentes óticas, que fundamentadas em teorias ou em práticas de sala de aula colaboram com o desenvolvimento da Modelagem Matemática na Educação Matemática.

5.2 LIMITAÇÕES, PERSPECTIVAS FUTURAS E POSSÍVEIS CONTRIBUIÇÕES PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Diante do fim, olhamos para trás com o objetivo de rever os procedimentos tomados, o que foi possível no detalhamento da interrogação de pesquisa e o que limitou a compreensão apresentada nas análises ideográfica, nomotética e na dissertação do metatexto.

Como limitações indicamos que a quantidade de informações pode ter impossibilitado a profundidade da compreensão apresentada nessa dissertação, bem como a língua original dos textos selecionados e, por vezes, a falta de fluência da pesquisadora com a língua inglesa. Inicialmente havia a intenção de entrar em contato com os pesquisadores que mais apareciam nos textos do ICTMA escolhidos para análise, mas devido ao curto tempo disponível para a pesquisa de mestrado, este projeto teve de ser suspenso ou prorrogado para pesquisas futuras.

Entre a pesquisa feita e as que vislumbramos no decorrer da análise dos dados indicamos como uma possível continuidade para a pesquisa sobre o que se entende por modelagem matemática nas publicações do ICTMA:

- O contato direto com os pesquisadores dos textos, com a finalidade de expandir e validar o entendimento de modelagem matemática nessa pesquisa sistematizados.
- Uma pesquisa específica acerca do que se entende por modelo matemático em atividades de modelagem matemática e qual sua função em uma atividade de modelagem matemática a partir de uma análise fenomenológica.

De modo geral, não temos a pretensão de fechar a compreensão acerca do que se entende por modelagem matemática, mas expandir a literatura da área proporcionando lançar um olhar sobre o que os autores mencionam sobre modelagem matemática e como a usam em suas diferentes práticas, análise essa possível por meio das publicações disponíveis e nessa dissertação analisadas. Neste contexto, nossa pesquisa se insere na Educação Matemática, fomentando a teoria de modelagem matemática para aqueles que desejam nortear suas práticas e pesquisas, focando que o entendimento de modelagem matemática está atrelado ao uso das atividades de modelagem matemática, em particular, quando o foco está no ensino e aprendizagem, da matemática ou da modelagem matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik - **ZDM**, v. 50, p. 19-30, 2018.

ALMEIDA, L. W.; SILVA. K. P.; VERTUAN, R. E. **A modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012, p. 1-154.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Discussões sobre 'como fazer' Modelagem na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. de L.; BISOGNIN, E. (Org.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**. 1ed. Londrina: EDUEL - Editora da Universidade Estadual de Londrina, 2011, v. 1, p. 19-44.

ÄRLEBÄCK, J.; FREJD, P. Modelling from the perspective of commognition-An emerging framework. In: STILLMAN, G. A.; KAISER, G.; BLUM, W.; BROWN, J. P. (Eds.). **Teaching mathematical modelling**: Connecting to research and practice. New York: Springer, 2013, p.47-56.

ÄRLEBÄCK, J. B.; DOERR, H. M. Moving beyond a single modelling activity. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BEIMBEGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education and Practice**, p. 293-303, 2015. New York: Springer

ÄRLEBÄCK, J. B.; DOERR, H. M. Students' interpretations and reasoning about phenomena with negative rates of change throughout a model development sequence. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik - **ZDM**. v. 50, p. 187-200, 2018.

ARAÚJO, J. L. Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. **Alexandria**. v.2, n.2, p. 55-68, 2009.

ARAÚJO, J. L. Brazilian research on modelling in mathematics education. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik - **ZDM**, v. 42, p. 337-348, 2010.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática e os professores: a questão da formação. **Bolema**, Rio Claro, n. 15, p. 5-23, 2001.

BARBOSA, J. C. MATHEMATICAL MODELLING IN CLASSROOM: A SOCIO-CRITICAL AND DISCURSIVE PERSPECTIVE. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik - **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 293-301, 2006.

BARBOSA, J. C.; SANTOS, A. dos S. Modelagem Matemática, perspectivas e discussões. In: ENCONTRO NACIONAL DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007. **Anais...** Belo Horizonte: SBEM, 2007.

BARROS, N. M. da C. **A compreensão de matemática em um ambiente online de formação de professores**. 2013. 315 f. Tese (Doutorado) Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência. Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho", Faculdade de Ciências de Bauru. Bauru, São Paulo, SP, 2013.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**. Editora Contexto, São Paulo, 2002, p. 1-386.

BESSER, M.; BLUM, W.; & LEIß, D. How to support teachers to give feedback to modelling tasks effectively? results from a teacher-training-study in the Co²CA project. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer, Cham, 2015, p. 151-160.

BICUDO, M. A. V. Filosofia da Educação Matemática segundo uma perspectiva fenomenológica. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Filosofia da Educação Matemática**: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. 1ª Edição. São Paulo: Editora UNESP, 2010, p. 23-47.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2011, p. 5-150.

BIEMBENGUT, M. S. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria**. Blumenau, v. 2, n. 2, p.7-32, 2009.

BOCK, D.; VERACX, N.; VAN DOOREN, W. How Students Connect Mathematical Models to Descriptions of Real-World Situations. In: STILLMAN, G., BLUM, W., KAISER, G. (Eds.). **Mathematical Modelling and Applications**: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer, Cham, 2017, p. 233-242.

BONOTTO, C. Realistic Mathematical Modeling and Problem Posing. In: KAISER G.; LESH, R.; GALBRAITH, P.; HAINES, C.; HURFORD, A. (Eds.). **Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies**: ICTMA 13. Springer Science+Business Media, LLC 2010, p. 399-408.

BLOMHØJ, M.; JENSEN, T. H. What's all the fuss about competencies? In: BLUM, W. et al. (Eds.). **Modelling and Applications in Mathematics Education**. New York: Springer, 2007, p. 45-56.

BLUM, W.; LEIß, D. How do students' and teachers deal with modelling problems? In: HAINES, C.; GALBRAITH, P.; BLUM, W.; KHAN, S. (Eds.). **Mathematical Modelling**: Education, Engineering and Economics Chichester: Horwood, 2007, p. 222-231.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education**: Intellectual and Attitudinal Changes. New York: Springer, p. 73–96, 2015.

BLUM, W.; FERRI, R. B. Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v.1, p. 45–58, 2009.

BRITO, D. dos S. **Aprender Geometria em Práticas de Modelagem Matemática**: Uma Compreensão Fenomenológica. 2018. 205 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2018.

BROWN, J.; EDWARDS, I. Modelling tasks: insights into mathematical understanding. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B.; STILLMAN, G. (Org.). **Trends in teaching and learning of mathematical modeling**. New York: Springer, 2011. p.187-197.

CERBONE, D. R. **Fenomenologia**. Trad. Cesar Souza. Petrópolis: Vozes, 2013. 292p.

DOERR, H. M.; ENGLISH. L. D. A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 34, n. 2, p. 110-136, 2003.

DOERR, H. M.; ÄRLEBÄCK, J. B.; MISFELDT, M. Representations of Modelling in Mathematics Education. In: STILLMAN, G., BLUM, W., KAISER, G. (Eds.). **Mathematical Modelling and Applications**: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer, Cham, 2017, p.71-81.

ENGLISH, L. D.; ÄRLEBÄCK, J. B.; MOUSOULIDES, N.; Reflections on Progress in Mathematical Modelling Research. In: GUTIÉRREZ, Á.; LEDER, G. C.; BOERO, P. (Eds.). **The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education**. Sense Publishers, Rotterdam, 2016, p. 383-413.

FERRI, R. B. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik - **ZDM**. v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.

FREJD, P.; ÄRLEBÄCK, J. B. Initial Results of an Intervention Using a Mobile Game App to Simulate a Pandemic Outbreak. In: STILLMAN, G., BLUM, W., KAISER, G. (Eds.). **Mathematical Modelling and Applications**: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer, Cham, 2017, p. 517-528.

GALBRAITH, P. Models of Modelling: genres, purposes or perspectives. In: **Journal of Mathematical Modelling and Applications**. v, 1, n. 5, 3-16, 2012.

GALBRAITH, P. Authenticity and goals: Overview. In: BLUM, W.; GALBRAITH, P.; HENN, W.; NISS, M. (Eds.). **Modelling and applications in mathematics education**: The 14th ICMI study. New York: Springer. 2007. p. 181-184.

GARNICA, A. V. M. Algumas notas sobre pesquisa qualitativa e fenomenologia. **Interface** – Comunicação, Saúde e Educação, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 109-122, 1997.

GEIGER V.; FREJD, P. A Reflection on Mathematical Modelling and Applications as a Field of Research: Theoretical Orientation and Diversity. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer, Cham, 2015, p. 161-171.

GIORGI, A. Sobre o método fenomenológico utilizado como modo de pesquisa qualitativa nas ciências humanas: teoria, prática e avaliação. In: POUPART, J.; DESLAURIES, J-P.; GROULX, L-H.; LAPERRIÈRE, A.; MAYER, R.; PIRES, A. **A pesquisa qualitativa**: enfoques epistemológicos e metodológicos. Trad. Ana Cristina Nasser, v. 2, 4 ed. 2014. p. 386-409.

GREEFRATH, G.; VORHÖLTER, K. Teaching and learning mathematical modelling: Approaches and developments from German speaking countries. **ICME-13 topical survey**. Cham: Springer, 2016.

HOUAISS. Dicionário Eletrônico Houaiss da Língua Portuguesa [2009] CD-ROM.

HOUSTON, K.; GALBRAITH, P.; KAISER, G. **The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications**: The First Twenty-five years, 2013. Disponível em:< http://www.icmihistory.unito.it/ictma.php>. Acesso em: 22 Ago. 2018.

IKEDA, T. Pedagogical Reflections on the Role of Modelling in Mathematics Instruction. In: STILLMAN, G. A.; KAISER, G.; BLUM, W.; BROWN, J. P. (Eds.). **Teaching Mathematical Modelling**: Connecting to Research and Practice. Springer, 2013, p. 255-276.

IKEDA, T.; STEPHENS, M. Modelling as Interactive Translations Among Plural Worlds: Experimental Teaching Using the Night-Time Problem. In: STILLMAN, G., BLUM, W., KAISER, G. (Eds.). **Mathematical Modelling and Applications**: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer, Cham, 2017, p. 399-410.

JABLONKA, E.; WAGNER, D.; WALSHAW, M. Theories for studying social, political and cultural dimensions of mathematics education. In: CLEMENTS, M. A.; BISHOP, A. J.; KEITEL, C.; KILPATRICK, J.; LEUNG, F. K. S. (Eds.). **Third International Handbook of Mathematics Education**. Springer Science+Business Media B.V., 2013, p. 41-67.

KAISER, G., & SCHWARZ, B. Authentic modelling problems in mathematics education – Examples and experiences. **Journal für Mathematik-Didaktik**, v. 31, p. 51-76, 2010.

KAISER, G. Modelling and modelling competencies in school. In: HAINES, C.; GALBRAITH, P.; BLUM, W.; KHAN, S. (eds) **Mathematical Modelling (ICTMA 12)**: Education, Engineering and Economics. Inglaterra: Horwood Publishing Limited, 2007. p. 110-119.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik - **ZDM**. v. 38, n.3, p. 302-310, 2006.

KLÜBER, T. E. **Uma metacompreensão da modelagem matemática na educação matemática**. 2012. 396 f. Tese (doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. Florianópolis, SC, 2012.

KRAMARSKI, B., MEVARECH, Z. R., & ARAMI, V. The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. **Educational Studies in Mathematics**, vol. 49, 2002. p. 225–250.

LESH, R., & LAMON, S. **Assessment of authentic performance in school mathematics**. Washington: American Association for the Advancement of Science. 1992.

LESH, R.; DOERR, H. M. **Beyond constructivism: Models and modeling perspectiveson mathematics teaching, learning, and problem solving**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. 2003.

MAAβ, K. What are modelling competences? Zentralblatt für Didaktik der Mathematik - **ZDM**. v. 38, n. 2, 2006.

MARTINS, S. R. **Formação continuada de professores em modelagem matemática na educação matemática**: o sentido que os participantes atribuem ao grupo. 2016. 139 f. Dissertação (Mestrado) Programa de Pós-Graduação em Ensino – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu, PR, 2016.

MEYER, J. F. C. de A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. 3º Edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013, p.1-142

MOREIRA, V. Possíveis Contribuições de Husserl e Heidegger para a clínica fenomenológica. **Psicologia em Estudo**, Maringá, v. 15, n. 4, p. 723-731, 2010.

MORENO, A. R. Descrição fenomenológica e descrição gramatical – ideias para uma pragmática filosófica. **Revista olhar**. v. 4, n. 7, p. 93-139, jul-dez, 2003.

MUTTI, G. S. L. **Práticas pedagógicas de professores da educação básica num contexto de formação continuada em modelagem matemática na educação matemática**. 2016. 236 f. Dissertação (Mestrado) Programa de Pós-Graduação em Ensino – Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Foz do Iguaçu, PR, 2016.

MUTTI, G. S. L.; KLÜBER, T. E. Práticas pedagógicas de professores da Educação Básica num contexto de formação continuada em modelagem matemática na Educação Matemática. In: **Anais...** Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 7., Foz do Iguaçu, v. 1, p. 1-13, 2018.

NISS, M. **Applications and modelling in school mathematics** – Directions for future development. Roskilde: IMFUFA Roskilde Universitetscenter, 1992.

NISS, M. Modeling a crucial aspect of students' mathematical modeling. In: LESH, R.; GALBRAITH, P.; HAINES, C. R.; HURFORD, A. (Eds.). Modelling students' mathematical competencies. New York: Springer, 2010, p. 43-59.

NISS, M.; HØJGAARD, T. **Competencies and Mathematical Learning**. English edition, 2011.

NISS, M. Prescriptive modelling – Challenges and opportunities. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer, Cham, 2015, p. 67-80.

NOVAK, J. D.; GOWIN, D. B. **Aprender a aprender**. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 1999.

OLIVEIRA, W. P. **Modelagem matemática nas licenciaturas em matemática das universidades estaduais do Paraná**. 2016. 155 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de concentração: Sociedade, Estado e Educação, Linha de Pesquisa: Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, PR, 2016.

PALM, T. Features and impact of the authenticity of applied mathematical school tasks. In: BLUM, W.; GALBRAITH, P.; HENN, H-W.; MOGENS, N. (Eds.). **Modelling and applications in mathematics education**. New York: Springer. 2007. p. 201–208.

PALMER, R. E. **Hermenêutica**. trad. Maria Luísa Ribeiro Ferreira. Lisboa: Edições 70, 1996. (Coleção o Saber da Filosofia).

PERRENET, J. C., & ZWANEVELD, B. The many faces of the mathematical modeling cycle. **Journal of Mathematical Modelling and Application,** v.1, n. 6, p. 3-21, 2012.

POLLAK, H. O. What is mathematical modeling? In: **Mathematical Modeling Handbook**. Bedfort: COMAP, 2012. Disponível em <www.comap.com>.

POLLAK, H. The Interaction between Mathematics and Other School Subjects. In: UNESCO (Ed.). **New Trends in Mathematics Teaching IV**. Paris, 1979, 232-248.

ROSA, M.; OREY, D. C. Ethnomodelling as a Methodology for Ethnomathematics. In: STILLMAN, G. A.; KAISER, G.; BLUM, W.; BROWN, J. P. (Eds.). **Teaching Mathematical Modelling**: Connecting to Research and Practice. Springer, 2013, p. 77-87.

SAEKI, A.; MATSUZAKI, A. Dual modelling cycle framework for responding to the diversities of modellers. In: STILLMAN, G. A.; KAISER, G.; BLUM, W.; BROWN, J. P. (Eds.). **Teaching Mathematical Modelling**: Connecting to Research and Practice, p. 89–99, 2013. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

SFARD, A. **Thinking as communicating**: Human development, the growth of discourses and mathematizing. New York: Cambridge University, 2008. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511499944 >.

SILVEIRA, E. **Modelagem Matemática em Educação no Brasil**: entendendo o universo de teses e dissertações. 2007. 197 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2007.

SOKOLOWSKI, R. **Introdução à Fenomenologia**. Tradução Alfredo de Oliveira Moares. 4ª Edição. São Paulo: Edições Loyola, 2014, p.7-247.

SOUSA, B. N. P. A.; TORTOLA, E.; SILVA, C. MODELOS MATEMÁTICOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA TERAPIA FILOSÓFICA. In: **Anais...** Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 7., Foz do Iguaçu, v. 1, p. 1-13, 2018.

SOUZA, E. G.; ALMEIDA, L. M. W.; KLÜBER, T. E. Research on Mathematical Modelling in Mathematics Education in Brazil: Overview and Considerations. In: RIBEIRO, A. J.; HEALY, L.; BORBA, R. E. de S. R.; FERNANDES, S. H. A. A. (Eds.). **Mathematics Education in Brazil**. Panorama of Current Research, 2018, p. 211-228.

SRIRAMAN, B.; NARDI, E. Theories in mathematics education: Some developments and ways forward. In: CLEMENTS, M. A. et al. (Eds.) **Third international handbook of mathematics education**. New York: Springer, 2013, p. 303-325.

STILLMAN, G. A.; BROWN, J.; GEIGER, V. Facilitanting Mathematisation in Molelling by Beginning Modellers in Secundary School. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice -** Cultural, Social and Cognitive Influences. Suíça: Springer, 2015, p. 93-104.

STILLMAN, G. A. Enabling Anticipation Through Visualisation in Mathematising Real-World Problems in a Flipped Classroom. In: STILLMAN, G., BLUM, W., KAISER, G. (Eds.). **Mathematical Modelling and Applications**: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer, Cham, 2017, p. 163-174.

TORTOLA, E.; SILVA, H. C.; ALMEIDA, L. M. W. Um olhar sobre os Trabalhos do IV EPMEM à luz das perspectivas de Kaiser e Sriraman para a Modelagem Matemática. In: **11 Encontro Paranaense de Educação Matemática**, Apucarana, PR: SBEM, 2011.

VENTURIN, J. A. **A educação matemática no Brasil da perspectiva do discurso de pesquisadores**. 2015. 541 f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, São Paulo, Rio Claro, 2015.

VERSCHAFFEL, L.; GREE, B.; CORTE, E. **Making Sense of Word Problems, Heereweg, The Netherlands**: Swets & Zeitilinger, 2000. 218 p.

VERSCHAFFEL, L. et al. Reconceptualising Word Problems as Exercises in Mathematical Modelling. In: **Journal für Mathematik-Didaktik**. v.31, n. 1, 2010, p. 9-29.

VOS, P. Authenticity in Extra-curricular Mathematics Activities: Researching Authenticity as a Social Construct. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice -** Cultural, Social and Cognitive Influences. Suíça: Springer, 2015. p. 105-113.

VOS, P. Assessment of Modelling in Mathematics Examination Papers: Ready-Made Models and Reproductive Mathematising. In: STILLMAN, G. A.; KAISER, G.; BLUM, W.; BROWN, J. P. (Eds.). **Teaching Mathematical Modelling**: Connecting to Research and Practice. Springer, 2013, p. 479-488.

VOS, P. Theoretical and Curricular Reflections on Mathematical Modelling – Overview. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, B. R.; STILLMAN, G. (Eds.). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling**: ICTMA 14. Holanda: Springer. 2011a. p. 665-668.

VOS, P. What Is 'Authentic' in the Teaching and Learning of Mathematical Modelling? In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, B. R.; STILLMAN, G. (Eds.). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling**: ICTMA 14. Holanda: Springer. 2011b. p. 713-722.

ZASLAVSKY, A. Ação pedagógica, ação comunicativa e didática. **Conjectura**: Filos. Educ., Caxias do Sul, v. 22, n. 1, p. 69-81, 2017.