UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

ALESSANDRA SENES MARINS

PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO EM TAREFAS ENVOLVENDO TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Londrina
2014

ALESSANDRA SENES MARINS

PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO EM TAREFAS ENVOLVENDO TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profª Drª. Angela Marta Pereira das Dores Savioli.

Londrina
2014

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

M339p Marins, Alessandra Senes.
Pensamento matemático avançado em tarefas envolvendo transformações lineares / Alessandra Senes Marins. – Londrina, 2014.
170 f. : il.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2014.
Inclui bibliografia.

1. Pensamento matemático – Teses. 2. Transformações (Matemática) – Teses. 3. Álgebra linear – Teses. 4. Educação matemática – Teses. I. Savioli, Angela Marta Pereira das Dores. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

ALESSANDRA SENES MARINS

PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO EM TAREFAS ENVOLVENDO TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

____
Profa. Orientadora Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
UEL – Londrina - PR

____
Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
UEL – Londrina - PR

____
Profa. Dra. Barbara Lutaif Bianchini
PUC – São Paulo - SP

Londrina, 24 de fevereiro de 2014.

Dedico este trabalho ao meu pai
Emanoel (in memoriam), que sempre
me incentivou a estudar e não
desistir dos meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo seu grande amor, zelo e cuidado, dando-me forças, disposição, sabedoria e saúde para concretizar mais um sonho.

Ao meu marido Marcelo, por estar sempre ao meu lado incentivando-me em tudo na vida acadêmica e por ser meu porto seguro.

A minha filha Manuela, por sua existência e por ser a razão do meu viver.

Aos meus pais, Emanoel (in memoriam) e Iracema, que durante minha vida sempre me incentivaram a estudar, porém, infelizmente meu pai não pôde ver o término deste trabalho.

A Angela Marta, minha orientadora, pela confiança, sugestões, dedicação, incentivos, paciência, carinho e por estar sempre disposta a me ajudar.

Às professoras, Lourdes Maria Werle de Almeida e Barbara Lutaif Bianchini, por aceitarem ser banca deste trabalho, trazendo grandes contribuições.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, os quais em suas aulas me proporcionaram aprendizados que foram úteis para a realização deste trabalho.

Aos amigos do Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático (GEPPMAT), pelas inúmeras contribuições no desenvolvimento desta pesquisa. Em especial a Laís e Daniele, que sempre estavam prontas a me ajudar.

Às colegas do mestrado, Laís Cristina, Anagela e Laís Maria, pelas contribuições e ótimos momentos que passamos juntas, em sala de aula, nas viagens a congressos, nos encontros em geral.

A minha cunhada Mariana, pelo comprometimento e disposição em realizar a revisão ortográfica deste trabalho. E ao meu irmão Emanoel Júnior, por ser um grande amigo.

Aos meus sogros, Dinorá e Juvenal, que com muito amor e carinho, sempre que preciso, cuidaram da minha filha para eu estudar.

Aos estudantes que aceitaram participar dessa pesquisa.

À UEL – Universidade Estadual de Londrina, por disponibilizar e investir no curso de mestrado.

À CAPES pelo apoio financeiro durante a realização deste estudo.

“*Ensinar não é transferir conhecimento,*
mas criar as possibilidades para a sua
própria produção ou a sua construção.”

Paulo Freire

MARINS, Alessandra Senes. **Pensamento Matemático Avançado em tarefas envolvendo Transformações Lineares**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina 2014.

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo Identificar e discutir que indícios/características de processos do Pensamento Matemático Avançado estudantes do curso de Matemática manifestam ao lidarem com tarefas referentes ao conteúdo de transformações lineares. Para isso, realizou-se um estudo a respeito do Pensamento Matemático Avançado (PMA) segundo Dreyfus (2002), Tall (1995) e Resnick (1987), a fim de obter características comuns aos autores, o qual serviu de base para análise dos registros escritos dos estudantes. Além disso, foi aplicado um instrumento contendo nove tarefas relacionadas ao conceito de transformações lineares a treze estudantes do segundo ano do curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Estadual de Londrina. A metodologia escolhida para a análise das informações foi a de Análise de conteúdo segundo Bardin (2004), a qual possibilitou a inferência de indícios/características dos processos do PMA nas resoluções dos estudantes. Da utilização dessa metodologia, emergiram agrupamentos (unidades de registro) e subagrupamentos que descrevem elementos comuns aos conceitos de transformações lineares juntamente com indícios dos processos de representação e abstração do PMA. Em um processo de desconstrução e (re)construção desses agrupamentos emergiram quatro categorias em relação aos processos de representação: simbólica, mental, visualização, mudança de representações e alternância entre elas, e modelação; e de abstração: generalização e a sintetização, manifestados nos registros escritos dos estudantes referente ao conceito de transformações lineares. Seis dos treze estudantes manifestaram os processos de representação desse tipo de pensamento, e desses, três manifestaram os processos de abstração. Dos sete processos presentes do PMA, sendo cinco de representação e dois de abstração, dois estudantes manifestaram indícios de apenas um processo, o de representação simbólica, e somente dois manifestaram características de todos os processos. As categorias confirmam que estudantes do curso de graduação podem manifestar características dos processos do PMA durante a graduação, porém, a maioria dos estudantes não evidenciaram indícios desses processos. Para os autores, esses processos não ocorrem por si mesmos e, se acontecem, não são conscientes por parte do estudante. Desse modo, é preciso que o professor propicie o desenvolvimento de atividades as quais possibilitem a sua manifestação.

Palavras-chave: Educação matemática. Pensamento matemático avançado. Transformações lineares.

MARINS, Alessandra Senes. **Advanced Mathematical Thinking in tasks involving Linear Transformations**. 2014. Thesis (MA in Teaching Science and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina 2014.

ABSTRACT

This research aims to identify and discuss what clues / characteristics of Advanced Mathematical Thinking processes the students of mathematics manifest while dealing with tasks related to the content of linear transformations. In order to achieve that, we performed a study on the Advanced Mathematical Thinking (AMT) under Dreyfus (2002), Tall (1995) and Resnick (1987), so it was possible to obtain common characteristics to those authors, which served as the basis for analysis of written records from the students. Furthermore, it was applied an instrument containing nine tasks related to the concept of linear transformation to thirteen students of second year of Bachelor of Mathematics from Universidade Estadual de Londrina. The methodology chosen for the analysis of the information was to Content Analysis Bardin (2004), which enabled the inference of evidence / characteristics of the AMT process in the students resolutions. Using this methodology, groupings emerged (log units) and sub groupings that describe common elements of the concepts of linear transformations together with evidence of representation process and abstraction of AMT. In a process of deconstruction and (re) construction of these groupings four categories emerged in relation to the representation process: symbolic, mental visualization, switching representations and translating, and modeling; and abstraction: generalization and synthesis, manifested in writing records of the students regarding the concept of linear transformations. Six of the thirteen students expressed the processes of representation of this kind of thinking, and from these, three expressed the processes of abstraction. From the seven processes inside AMT, five of representation and two of abstraction, two students showed evidence of only one case, the symbolic representation one, and only two showed characteristics of all processes. The categories confirm that undergraduate students can express characteristics of AMT processes during graduation; however, most students did not show evidence of these processes. For the authors, these processes do not occur by themselves, and if they happen, the student is not aware. Thus, it is necessary that the teacher encourages the development of activities which enable its manifestation.

Keywords: Mathematics education. Advanced mathematical Thinking. linear transformations.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino e a aprendizagem da matemática, mais especificamente da álgebra, nos diferentes níveis de escolaridade, muitas vezes, têm sido foco de estudo de pesquisadores e professores que buscam novas abordagens para a sala de aula. Outro fato, em geral, a matemática é ensinada mecanicamente, enfatizando procedimentos de memorização, de reprodução de algoritmos, sem proporcionar aos estudantes a compreensão dos significados de objetos matemáticos, como citam Fiorentini, Miguel e Miorin (1993, p.40) a respeito do ensino da álgebra,

> [...] a maioria dos professores ainda trabalha a Álgebra – de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões – tal como ocorria há várias décadas.

Para Ponte, Branco e Matos (2009), essa maneira de ensino pode se tornar incompreensível para o estudante, pois não há a valorização dos significados dos objetos matemáticos, ao contrário, valoriza-se a manipulação de símbolos, tornando a matemática um jogo de manipulação.

O ensino por meio de manipulação de símbolos e repetição de técnicas não fica restrito à Educação Básica, ultrapassa suas barreiras e se estende ao Superior. É comum no próprio curso de Matemática o ensino por meio da reprodução de procedimentos.

Durante a graduação em Licenciatura em Matemática, em algumas disciplinas, vivenciei o ensino por meio de manipulação de símbolos e repetição de técnicas, o que acarretou no não aprendizado de alguns conteúdos como o de álgebra linear. Posteriormente, ao me deparar com provas em concursos que exigiam o conhecimento dessa disciplina, verifiquei que não havia compreendido os seus objetos, pois não foi promovida uma reflexão de seus elementos durante o aprendizado.

Para Dreyfus (2002) a reflexão em relação à própria experiência matemática é um aspecto importante para o aprendizado de um conceito matemático e uma característica do Pensamento Matemático Avançado (PMA)[1].

---

[1] Utilizaremos a sigla “PMA” para referir ao Pensamento Matemático Avançado.

Para Tall (2002), existe um ciclo criativo que pode ser proporcionado aos estudantes do Ensino Superior, no qual o estudante considera o contexto de um problema em investigação que o conduz a formulação de conjecturas a fim de levá-lo ao refinamento e à prova. Porém, para o autor, o ensino da matemática na graduação, na maioria das vezes, ao invés de promover o estudante a participar desse ciclo, do processo de construção de um objeto matemático, inicia-se com a forma final da teoria deduzida, ou seja, o produto do Pensamento Matemático Avançado.

Dreyfus (2002) também afirma que os estudantes vão sendo ensinados a partir do produto da atividade de matemáticos em sua forma final ao invés de serem conduzidos a processos que levaram os matemáticos a construírem esses produtos. De acordo o autor, para um estudante atingir a compreensão de um objeto matemático não é suficiente apenas definir e exemplificar um conceito abstrato, e sim construir as propriedades de um tal conceito por meio de deduções a partir da definição (DREYFUS, 2002).

Autores como Dreyfus (2002), Tall (2002), Resnick (1987), entre outros, defendem a importância de conduzir o ensino e a aprendizagem da matemática no Ensino Superior de modo que o estudante não se limite a sequência "teorema-prova-aplicação", a fim de proporcionar ao estudante o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado.

Nesse sentido, esta pesquisa abrange algumas reflexões dos processos do Pensamento Matemático Avançado segundo caracterizações de Dreyfus (2002), Tall (1995) e Resnick (1987), tendo por objetivo:

- Identificar e discutir que indícios/características de processos do Pensamento Matemático Avançado são manifestados por estudantes do curso de Matemática da Universidade Estadual de Londrina ao lidarem com tarefas referentes ao conteúdo de transformações lineares.

E como pergunta norteadora:

- Que processos do Pensamento Matemático Avançado são manifestados nos registros escritos apresentados por estudantes do curso de Matemática ao resolverem tarefas relacionadas ao conteúdo de transformações lineares?

O instrumento da pesquisa foi aplicado no primeiro semestre de 2013 a treze estudantes do curso de bacharelado em matemática da Universidade Estadual de Londrina, sendo onze estudantes do segundo ano e dois do quarto ano. Aplicamos oito tarefas relacionadas com o conteúdo de transformações lineares, e as análises foram realizadas a luz da Análise de Conteúdo segundo Bardin (2004).

A escolha do conteúdo de transformações lineares se deu por algumas razões: *a)* é um conteúdo relevante na graduação em Matemática e tem relação com outras disciplinas do curso, como Cálculo e Análise; *b)* faz parte da disciplina de Álgebra Linear que, em geral, é ministrada no primeiro ano do Curso de Matemática e requer um formalismo por parte do estudante, o qual ele ainda não domina; *c)* alguns conceitos básicos para o aprendizado de transformações lineares estão presentes no Ensino Médio, como sistemas lineares, matrizes e determinantes; *d)* por suas aplicações na Engenharia, Agronomia, Economia, entre outros cursos; e *e)* por ser exigido em algumas provas para graduados em matemática, como prova de mestrado e concursos para ingressar na carreira de professor do nível superior.

Ao iniciarmos nosso trabalho, procuramos no portal da Capes pesquisas relacionadas ao Pensamento Matemático Avançado que tratavam a respeito do conteúdo de transformações lineares desenvolvidas recentemente. Nessa perspectiva não encontramos, mas localizamos algumas pesquisas envolvendo o Pensamento Matemático Avançado relacionado a outros conteúdos, como também com o conteúdo de transformações lineares. Descreveremos um breve resumo de algumas dessas pesquisas no capítulo da fundamentação teórica.

Esta pesquisa está estruturada em cinco capítulos. O primeiro capítulo abrange a fundamentação teórica. Nesse, inicialmente abordamos a respeito de duas pesquisas, uma relacionada ao Pensamento Matemático Avançado e a outra ao conteúdo de transformações lineares. Em seguida, destacamos a concepção[2] a respeito do Pensamento Matemático Avançado segundo Dreyfus (2002), Tall (1995) e Resnick (1987), além de uma reflexão sobre alguns possíveis pontos em comum referente às características desse tipo de pensamento em relação a Dreyfus (2002) com os outros autores, Tall (1995) e Resnick (1987).

[2] Entendemos a palavra concepção como as características adotadas pelos autores para descrever o que é o Pensamento Matemático Avançado.

No segundo capítulo descrevemos aspectos do conteúdo de transformações lineares, bem como do conteúdo de espaços vetoriais, necessários para a resolução das tarefas que foram aplicadas.

O terceiro capítulo compreende os procedimentos metodológicos adotados nesta pesquisa, a metodologia escolhida, os sujeitos da pesquisa, o instrumento e sua aplicação.

O quarto capítulo é o das análises. Neste descrevemos os passos seguidos para a sua realização, a construção dos agrupamentos, como inferimos indícios/características dos processos do Pensamento Matemático Avançado e a elaboração das categorias.

E, por fim, o quinto capítulo apresenta as considerações finais.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 ALGUMAS PESQUISAS RELACIONADAS COM O TEMA DESSE ESTUDO

Ao iniciarmos nossa pesquisa buscamos dissertações e teses no portal da Capes, bem como em outros portais de instituições de Ensino Superior, a fim de encontrarmos pesquisas relacionadas com o nosso tema, Pensamento Matemático Avançado (PMA) relacionado ao conteúdo de transformações lineares, que pudessem contribuir em nossa investigação. Nesse sentido não encontramos, mas localizamos estudos a respeito do Pensamento Matemático Avançado relacionado com outros conceitos e algumas pesquisas envolvendo o assunto de transformações lineares.

Citamos aqui alguns trabalhos que encontramos os quais fazem referência ao Pensamento Matemático Avançado: a dissertação de Santos (2011), que trabalha esse tipo de pensamento com função logarítmica utilizando o software GeoGebra para explorar suas representações; a dissertação de Elias (2012), a qual o conceito de grupos e/ou isomorfismo de grupos, investigando as dificuldades na compreensão desses conceitos; a dissertação de Bertolazi (2012) que juntamente com o conteúdo de sistemas de equações lineares busca indícios dos processos do Pensamento Matemático Avançado.

Sobre o conteúdo de transformações lineares, destacamos duas pesquisas: a dissertação de Oliveira (2002), que utiliza o conteúdo de transformações lineares para investigar a produção de significados para a noção desse assunto; e a tese de Karrer (2006), o qual trabalhou esse conteúdo articulado com a geometria a fim de fazer um estudo na perspectiva dos registros de representação semiótica.

Dentre as pesquisas mencionadas faremos um breve resumo a respeito de duas pesquisas que foram importantes para o desenvolvimento de nosso trabalho a de Bertolazi (2012) e Karrer (2006).

1.1.1 Pesquisa de Bertolazi (2012)

Consideramos a pesquisa de Bertolazi (2012) relevante para nosso estudo, pois além de utilizar Dreyfus (1991) e Resnick (1987) como autores do seu referencial teórico (autores que utilizamos), o seu instrumento de pesquisa contém atividades envolvendo o conteúdo de sistemas de equações lineares, o qual é considerado base para o estudo de transformações lineares, e porque os sujeitos de sua pesquisa foram estudantes do quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática.

O trabalho de Bertolazi (2012) tem por objetivo "[...] investigar processos do pensamento matemático avançado manifestados em registros escritos de dezessete estudantes de Licenciatura em Matemática em tarefas sobre Sistemas de Equações Lineares" (p. 15).

Para isso foi construída uma proposta de Avaliação Reflexiva a respeito do conteúdo de sistemas lineares com o intuito de buscar nos registros escritos dos estudantes relatos e indícios dos processos do Pensamento Matemático Avançado segundo Dreyfus (1991) e Resnick (1987), além de um perfil dos participantes de acordo com a concepção de matemática no sentido de Thompson (1997) e, ainda, indícios de atitudes de professor reflexivo à luz de Freire (2004, 2011).

Em suas análises em relação ao perfil dos estudantes, Bertolazzi (2012) verificou que muitos estudantes apresentaram uma visão instrumentalista da matemática; explicitaram o gosto pela matemática desde o início da sua vida escolar; demonstraram atitudes reflexivas à luz das ideias de Freire (2004, 2011); e que concebem a matemática de forma automática.

Já em relação aos seus conhecimentos a respeito do conteúdo de sistemas e equações lineares, apenas um estudante alegou não ter estudado o conteúdo na Educação Básica; grande parte dos estudantes estava insegura na resolução do instrumento; as aplicabilidades em relação ao tema praticamente são desconhecidas pela maioria dos sujeitos; e, para tais participantes, ao tratar desse conteúdo em sala de aula o professor deve ter como prioridade as relações desse assunto com outros dentro da própria matemática, bem como as suas aplicabilidades.

Os participantes da pesquisa manifestaram ao menos três processos diferentes do Pensamento Matemático Avançado em relação à representação, dentre nove que foram analisados. E, para o processo de abstração, apenas três estudantes apresentaram a capacidade de formalização, generalização e síntese. Além disso, constatou que os estudantes demonstram ser conscientes de muitas interações pertinentes ao processo de representação, mas que faltam oportunidades as quais os levem a formalizar e sintetizar diferentes aspectos de um conceito matemático.

1.1.2 Pesquisa de Karrer (2006)

Consideramos relevante a pesquisa de Karrer (2006) para o desenvolvimento dessa pesquisa, porque trata de atividades que envolvem o ensino e aprendizagem do conteúdo de transformações lineares no Ensino Superior.

O trabalho de Karrer (2006) tem como objetivo:

> [...] elaboração, aplicação e avaliação de uma abordagem de ensino do objeto matemático “transformações lineares planas”, incorporando mudanças de registros e o auxilio do *software Cabri-Géomètre*, tendo por foco as conversões envolvendo principalmente o registro gráfico (p. 7).

Karrer (2006) organizou seu trabalho em duas fases. A primeira consistiu na realização de estudos preliminares que, baseando-se na teoria dos registros de representação semiótica de Duval (1995, 2000, 2003), a autora analisou em livros de Álgebra Linear e de Computação Gráfica a exploração dos registros e conversões presentes no conteúdo de transformações lineares.

Essa análise evidenciou que essas obras referentes à Álgebra Linear dão privilégio a certos tipos de registros, como o simbólico algébrico e o numérico, em contrapartida o registro gráfico é o menos desenvolvido. Além disso, nota-se que essas referências pouco valorizam a utilização de *software* matemático e, quando existe a menção de algum, esse não é voltado para fins geométricos (KARRER, 2006).

Já na análise relativa aos livros de Computação Gráfica, segundo Karrer (2006), é fundamental o domínio do registro gráfico e matricial pelos estudantes e as conversões que partem das representações gráficas.

Ainda na primeira fase, foi aplicado a oitenta e seis estudantes da área de computação, de quatro instituições de Ensino Superior do estado de São Paulo, um questionário contendo cinco exercícios relativos a transformações lineares no plano. A investigação relativa a essa primeira fase apontou dificuldades e deficiências por parte dos estudantes no que diz respeito à exploração de diferentes registros, principalmente o registro gráfico e matricial (KARRER, 2006). Os resultados obtidos na primeira fase propiciaram o desenvolvimento de uma abordagem de ensino, que se constitui na segunda fase.

Na segunda fase foram construídas atividades de exploração de variadas representações de transformações lineares planas a partir do referencial metodológico de *Design Experiments* (COBB et al., 2003), utilizando o *software Cabri-Géomètre* e *papel&lápis.* Participaram desse experimento seis estudantes do curso de Engenharia da Computação de uma universidade privada da cidade de São Paulo e, segundo a autora, na análise das produções escritas, houve

> [...] evoluções dos sujeitos na compreensão das condições de determinação de transformações lineares e de particularidades gráficas inerentes a esta, além de um domínio mais amplo das diversas representações e suas conversões (KARRER, 2006, p. xxi).

Após o breve resumo das pesquisas de Bertolazi (2012) e Karrer (2006), seguem algumas considerações a respeito do Pensamento Matemático Avançado segundo Dreyfus (2002), Tall (1995) e Resnick (1987).

1.2 PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Neste capítulo abordaremos a respeito do Pensamento Matemático Avançado com base em três autores: Dreyfus (2002), Tall (1995) e Resnick (1987). Resnick (1987), em seu trabalho, discorre a respeito do Pensamento de Ordem Superior – *Higher Order Thinking* – não se limitando apenas a exemplos matemáticos como Dreyfus (2002) e Tall (1995). Os autores compartilham de algumas ideias para caracterização desse tipo de pensamento seguindo uma perspectiva cognitivista. Para as análises utilizaremos os processos de representação e abstração de Dreyfus (2002), com algumas nuances dos outros dois autores. Vejamos as caracterizações a respeito do Pensamento Matemático Avançado segundo cada autor.

1.2.1 Caracterizações a Respeito do PMA Segundo Resnick (1987)

Resnick (1987) nomeia o Pensamento Matemático Avançado como "Pensamento de Ordem Superior" (*Higher Order Thinking*). De acordo com a autora, listar algumas características desse tipo de pensamento é relativamente simples, porém, quando acontece isso, temos que estar cientes de que não é possível defini-lo exatamente. Algumas considerações a respeito do Pensamento de Ordem Superior de acordo com Resnick (1987) são

> - Não algoritmo. Isto é, o caminho da ação não é previsível;
> - Tende a ser. O percurso não é "visível" (mentalmente falando) de uma única posição vantajosa;
> - Frequentemente aponta soluções múltiplas, cada uma com custos e benefícios, além de soluções únicas;
> - Envolve julgamento e interpretação com nuances;
> - Envolve aplicações de múltiplos critérios, que às vezes conflitam-se entre si;
> - Envolve incerteza, nem tudo que sustenta a tarefa é conhecido;
> - Envolve a auto-regulação do processo de pensamento. Não reconhecemos um pensamento de ordem superior no indivíduo quando esse pergunta "os passos do jogo";
> - Envolve certa ordem, encontrando uma estrutura em aparente desordem;
> - Exige esforço. Há um trabalho mental considerável envolvido nas elaborações e nos julgamentos exigidos. (RESNICK, 1987, p. 3, tradução nossa[3]).

---

[3]-Higher order thinking is non algorithmic. That is, the path of action is not fully specified in advance.
- Higher order thinking tends to be complex. The total path is not "visible" (mentally speaking) from any single vantage point.
- Higher order thinking often yields multiple solutions, each with costs and benefits, rather than unique solutions.
- Higher order thinking involves nuanced judment and interpretation.
- Highter order thinking involves the application of multiple, which sometimes conflict with one another.
- Highter order thinking often involves uncertainty. Not every-thing that bears on the task at hand is known.
- Higher order thinking involves self-regulation of the thinking process. We do not reconize higher order thinking in na individual when someone else "calls the plays" at every step.
- Higher order thinking involves imposing meaning, finding, structure in apparent disorder.
- Higher order thinking is effortful. There is considerable mental work involved in the kinds of elaborations and judgments required.

Para a autora esse tipo de pensamento não é exclusivo da matemática, de modo a estar presente em outras áreas do conhecimento. Um exemplo desse pensamento apresentado pela autora é o da leitura como uma habilidade do Pensamento de Ordem Superior. Segundo Resnick (1987), a compreensão de um texto é realizada por meio de um processo, no qual o leitor utiliza de uma combinação do que está escrito com seu conhecimento prévio a respeito do assunto, juntamente com outros processos gerais: inferências, conexões, verificação e organização, entre outros.

1.1.2 Caracterizações a Respeito do PMA Segundo Tall (1995)

Tall (1995) desenvolve sua teoria a respeito do desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado. Parte da hipótese que o desenvolvimento na matemática começa a partir de "percepções de" e "ações sobre" objetos do mundo externo.

O quadro a seguir (quadro 1) exemplifica essa ideia separando três componentes da atividade humana a fim de mostrar que uma atividade matemática pode ser entendida como um objeto de percepção (entrada), passando por um processamento interno (pensamento) seguido de uma ação sobre este (saída).

Quadro 1 - Componentes da atividade humana baseado em Tall (1995)

Percepção	→	Pensamento	→	Ação
Entrada		Processamento Interno		Saída

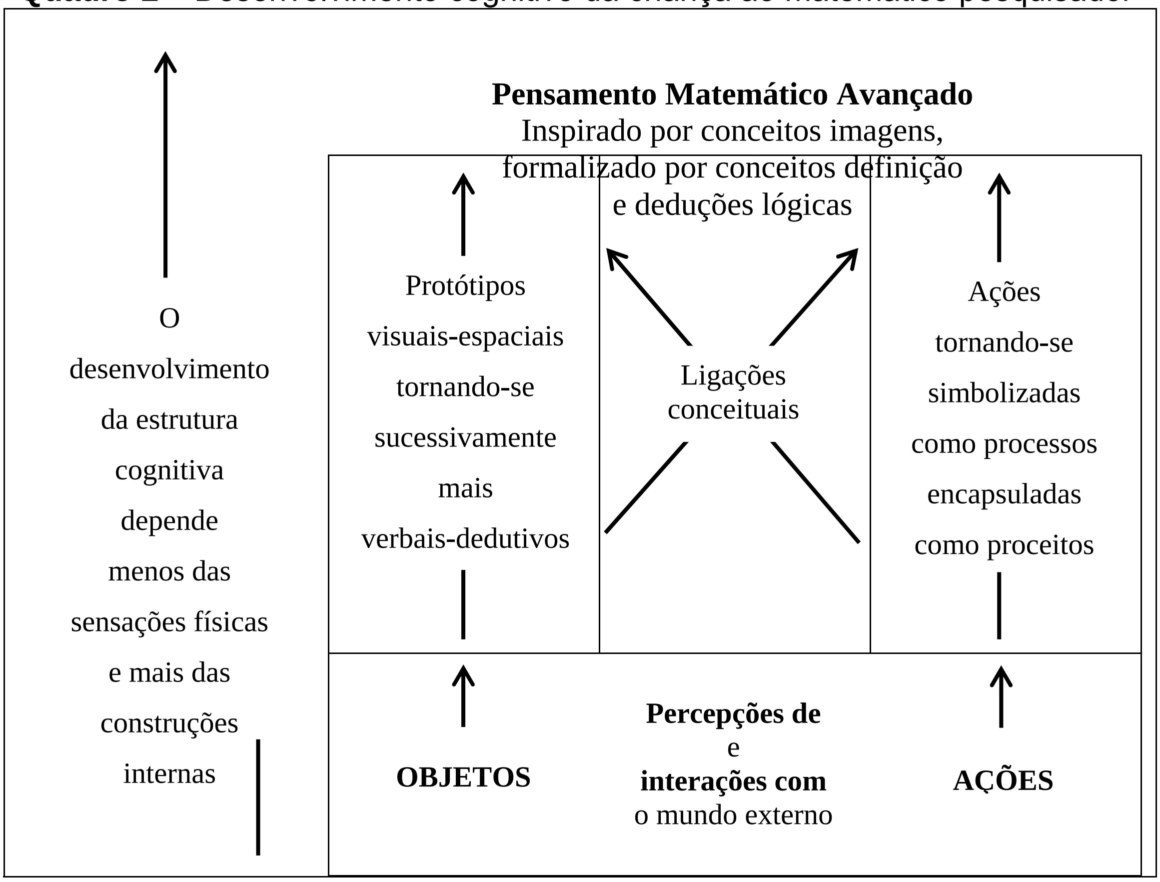
Fonte: Tall (1995, p. 1)

O autor segue a teoria de Van Hiele (1959), na qual os objetos inicialmente são percebidos como visuais-espaciais e durante o processo de análise, em que suas propriedades são testadas, são descritos verbalmente levando a classificação (primeiramente em coleções e depois em hierarquias) que relaciona o começo de uma dedução verbal relativa às propriedades e ao desenvolvimento sistemático de uma demonstração verbal.

Segundo Tall (1995), o desenvolvimento dos dois componentes "percepção de" e "ação sobre" na evolução da matemática elementar pode ocorrer ao mesmo tempo, e também independentemente, sendo um visual-espacial o qual se torna verbal e conduz à prova (demonstração) e o outro utiliza símbolos como processos para fazer operações (como contar, adicionar, multiplicar) e também como conceitos para pensar a respeito (de números, soma, produto).

Assim, o desdobramento desses dois componentes pode conduzir o indivíduo a um desenvolvimento cognitivo do pensamento elementar ao Pensamento Matemático Avançado, e serve para inspirar o pensamento criativo baseado em definições formais de objetos e provas sistemáticas (TALL, 1995). No quadro a seguir (quadro 2), podemos observar o desenvolvimento descrito pelo autor.

Quadro 2 – Desenvolvimento cognitivo da criança ao matemático pesquisador



Fonte: Tall (1995, p. 4)

Entre os dois desenvolvimentos paralelos que se relacionam com os papéis complementares de percepção (entrada) e ação (saída) está o processamento mental interno que, para Tall, é mais complexo de descrever e analisar.

De acordo com o autor, a atividade cerebral tem duas características contrastantes: é um lugar que armazena inúmeras experiências e atividades simultâneas; e a outra é que tem um pequeno foco de atenção (TALL, 1995). Além disso, para minimizar o esforço cognitivo de um indivíduo é preciso fazer duas coisas:

> - Comprimir adequadamente os conhecimentos para o pequeno foco de atenção, e
> - Construir ligações com outras informações mentais para facilitar a sua utilização (TALL, 1995, p. 3, tradução nossa[4]).

A primeira pode ser feita de várias maneiras, como utilizar imagens para obter a concentração usando palavras e símbolos para comprimir a notação de modo que essas sejam manipuláveis. Para a segunda, a construção de ligações envolve o desenvolvimento de conhecimento conceitual com variedade de "*links*", a fim de maximizar a recuperação do conceito em questão (TALL, 1995).

Os objetos visuais são percepções diretas do mundo exterior, sendo construídos a partir de nossas próprias experiências, como pensamos a respeito do mundo exterior. No desenvolvimento cognitivo, os objetos mentais podem ser construídos de várias maneiras, cada qual com seu estado. No decorrer do desenvolvimento, objetos assumem um significado abstrato (TALL, 1995).

Para o autor, os objetos mentais que são construídos a partir do processo de encapsulação do objeto, *procept*[5], tem um estado diferente. Em nossa estrutura mental, temos as estruturas de reconhecimento e, ligado a elas temos as sequências de ações mentais, as quais são acionadas para realizar esses processos a tempo. A imagem de um conceito utiliza o símbolo para ligar o processo apropriado e suas relações na estrutura cognitiva, desse modo, quando nos deparamos com um objeto, utilizamos símbolos possíveis de manipular como se fossem objetos mentais. O termo *procept* contribui na análise das dificuldades cognitivas relacionadas ao simbolismo, ele permite entender os diferentes tipos de processos de encapsulamento em contextos distintos.

De acordo com Tall (1995), quando visualizamos um objeto, nós não usamos "imagens de decisões" e sim "imagem reconhecendo instalações[6]". Em

---

[4] • compress knowledge appropriately for the small focus of attention,
• construct linkages to other mental data to make it easy to use.

[5] Para o autor esse termo representa a junção de duas palavras "process" (processo) e "concept" (conceito), que juntas dão ao termo o significado de: processo de encapsulamento, ou seja, processo de entendimento, que para um objeto pode ter mais de um "procept".

[6] Picture-recognising facilities.

nosso cérebro, temos várias estruturas que ressoam com entrada de estímulos visuais e usamos disso para construir o nosso imaginário visual-espacial.

Para Tall (1995), existe uma distinção entre a matemática elementar (incluindo a geometria) e a matemática avançada em relação aos objetos, pois no primeiro tipo de pensamento os objetos matemáticos são descritos e no segundo definidos. Em ambos os casos a linguagem é usada para formular as propriedades dos objetos, uma vez que no pensamento elementar a descrição das propriedades é realizada a partir da experiência e no outro são construídas a partir da definição. O autor parte da teoria de Brunner (1966) a respeito de representações – enativa (processo físico), icônica (visual) e simbólica (escrito) - para fazer essa distinção, acrescenta algumas representações dentro da simbólica: verbal (descrição), formal (definição) e proceptual (objeto dualidade).

De acordo com o autor, o pensamento matemático elementar é uma fase preliminar para o desenvolvimento do avançado. A mudança da fase cognitiva do pensamento elementar para o avançado pode ocorrer com a introdução do método axiomático, no qual os objetos matemáticos passam a ter um novo status cognitivo da descrição a definição, ou seja, "[...] quando na estrutura cognitiva o conceito de imagem é reformulado como definição e é usado para a construção formal de conceitos que fazem parte de um corpo sistemático do conhecimento matemático comum" (TALL, 1995, p. 1, tradução nossa[7]). Segundo o autor, esse é o lugar mais natural para traçar a linha entre o pensamento matemático elementar e o avançado. Segundo Domingos (2006, p. 5), essa transição

> [...] requer uma reconstrução cognitiva que se vê durante o início do percurso no ensino superior como uma luta com as abstracções formais como se elas dominassem a aprendizagem nesta fase inicial. É a transição da coerência da matemática elementar para a consequência da matemática avançada, baseada em entidades abstractas que o indivíduo deve construir através de deduções das definições formais.

[7] when the concept images in the cognitive structure are reformulated as concept definitions and used to construct formal concepts that are part of a systematic body of shared mathematical knowledge.

Para Tall (1995), o ensino da matemática no âmbito Superior, geralmente não cria oportunidades para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado, pois a sequência “definição-prova-teorema-ilustração” comumente é usada, dificultando muitas vezes o desenvolvimento do PMA. Para o autor promover o desenvolvimento do pensamento matemático avançado na graduação é um desafio que cabe aos professores.

1.1.3 Caracterizações a Respeito do PMA Segundo Dreyfus (2002)

Para Dreyfus (2002), a forma de ensino da matemática dos anos iniciais até o Superior, em geral, promove aos estudantes uma capacidade de executar operações matemáticas, pois está centrada na repetição de “[...] procedimentos padronizados, expressos em formalismos definidos com precisão para a obtenção de respostas de forma clara das classes delimitadas de questões de exercício” (DREYFUS, 2002, p. 28, tradução nossa)[8]. Assim, na maioria das vezes, os estudantes aprendem a matemática mecanicamente tornando-se especialistas em reproduzir técnicas para a obtenção de resultados, não compreendendo o objeto matemático em questão. Para o autor, essa maneira de ensino, na maioria das vezes, proporciona uma quantidade considerável de conhecimento matemático, mas sem a habilidade de utilizá-lo para resolver problemas desconhecidos para si mesmos.

No nível superior, geralmente, o professor ao ministrar um conteúdo apresenta aos estudantes o produto em sua forma final, ou seja, o resultado da atividade de dezenas de matemáticos - “o produto polido e acabado”, “intocável” – e que de certa forma segue uma sequência de ensino que se baseia em “teorema-prova-aplicação” (DREYFUS, 2002). Desse modo, muitas vezes impossibilita os estudantes de refletirem a respeito dos objetos envolvidos nessa sequência de ensino, e promove a visão de que a matemática é intocável, ao contrário da forma como está sendo criada,

[8] […] of standardized procedures, cast in precisely defined formalisms, for obtaining answers to clearly delimited classes of exercise questions.

> [...] por meio de tentativa e erro, por meio do parcialmente correto (e parcialmente errado), por meio de formulações intuitivas, nos quais termos e imprecisões soltas são intencionalmente introduzidos, por meio de desenhos que tentam apresentar visualmente as partes das estruturas matemáticas que está sendo pensada, por meio de mudanças dinâmicas que estão sendo feitas para esses desenhos, etc., etc. (DREYFUS, 2002, p.27, tradução nossa[9]).

Quando isso acontece, uma das consequências é dificultar o desenvolvimento de um nível de pensamento matemático avançado, pois não foi promovida aos estudantes a visão dos processos que levaram os matemáticos a criar esses produtos (DREYFUS, 2002).

Segundo Dreyfus (2002), a compreensão de um objeto matemático se dá a partir de um processo que ocorre na mente do estudante e que, geralmente, é baseado numa sequência de atividades, na qual uma variedade de processos mentais ocorrem e interagem. Esses processos não acontecem por si mesmos, e se acontecer, não são necessariamente conscientes por parte dos estudantes. De acordo com o autor, o Pensamento Matemático Avançado é um processo que "[...] consiste em uma grande variedade de interação de processos componentes" (DREYFUS, 2002, p. 30, tradução nossa[10]). Alguns desses processos são: representar, visualizar, generalizar, classificar, conjecturar, induzir, verificar, analisar, sintetizar, abstrair, provar, definir, formalizar, entre outros.

Para Dreyfus (2002) os processos envolvidos no Pensamento Matemático Avançado não são exclusivos deste tipo de pensamento, podem fazer parte do Pensamento Matemático Elementar (PME), bem como de outras áreas, como psicologia, física, artes, etc.. Desse modo, não existe uma diferença nítida dos processos envolvidos no Pensamento Matemático Avançado e no Pensamento Matemático Elementar, mas uma característica distintiva desses pensamentos, de acordo com o autor, está na complexidade dos pensamentos e em como são tratados, ou seja, como essa complexidade é gerenciada. Os processos que permitem fazer isso são o de abstração e representação, pois por meio desses

---

[9] […] but through trial and error, through partially correct (and partially wrong) statements, through intuitive formulations in which loose terms and imprecisions have intentionally been introduced, through drawings that try to visually present parts of the mathematical structures being thought about, through dynamic changes being made to these drawings, etc., etc..

[10] […] consists of a large array of interacting component processes.

processos é que "[...] pode-se mover a partir de um nível de detalhe para o outro e, assim, gerenciar a complexidade" (DREYFUS, 2002, p. 26, tradução nossa[11]).

A utilização desses processos pode estar ligada à compreensão de um objeto matemático, para isso não basta definir e exemplificar um conceito abstrato aos estudantes, e sim promover que construam

> [...] as propriedades de tal conceito por meio de deduções a partir da definição. Eles podem se envolver por meio de atividades que promovam a abstração de sua parte e tem que ser levado ao conhecimento deles o que está sendo feito, e qual é o objetivo do exercício. (DREYFUS, 2002, p. 25, tradução nossa[12]).

Para o autor, além da utilização desses processos para auxiliar no aprendizado da matemática, contribuem também para a avaliação dos estudantes pelo professor, "[...] é importante para o professor de matemática estar consciente desses processos, a fim de compreender algumas das dificuldades que seus alunos enfrentam" (DREYFUS, 2002, p. 30, tradução nossa[13]).

Na seção que segue apresentaremos e discutiremos os processos do Pensamento Matemático Avançado, elencando os processos envolvidos na representação e abstração segundo Dreyfus (2002).

1.1.3.1 Processos envolvidos no PMA

Para Dreyfus (2002) os processos do Pensamento Matemático Avançado, geralmente estão distribuídos em dois grupos, o da representação e o da abstração. Na representação se agregam os seguintes processos: a) o processo de representação, constituído pelas representações simbólicas, mentais e a partir desta última a visualização; b) a mudança de representações e alternâncias entre elas; e a c) modelação. Na abstração temos os seguintes processos: a) generalização; e b) sintetização.

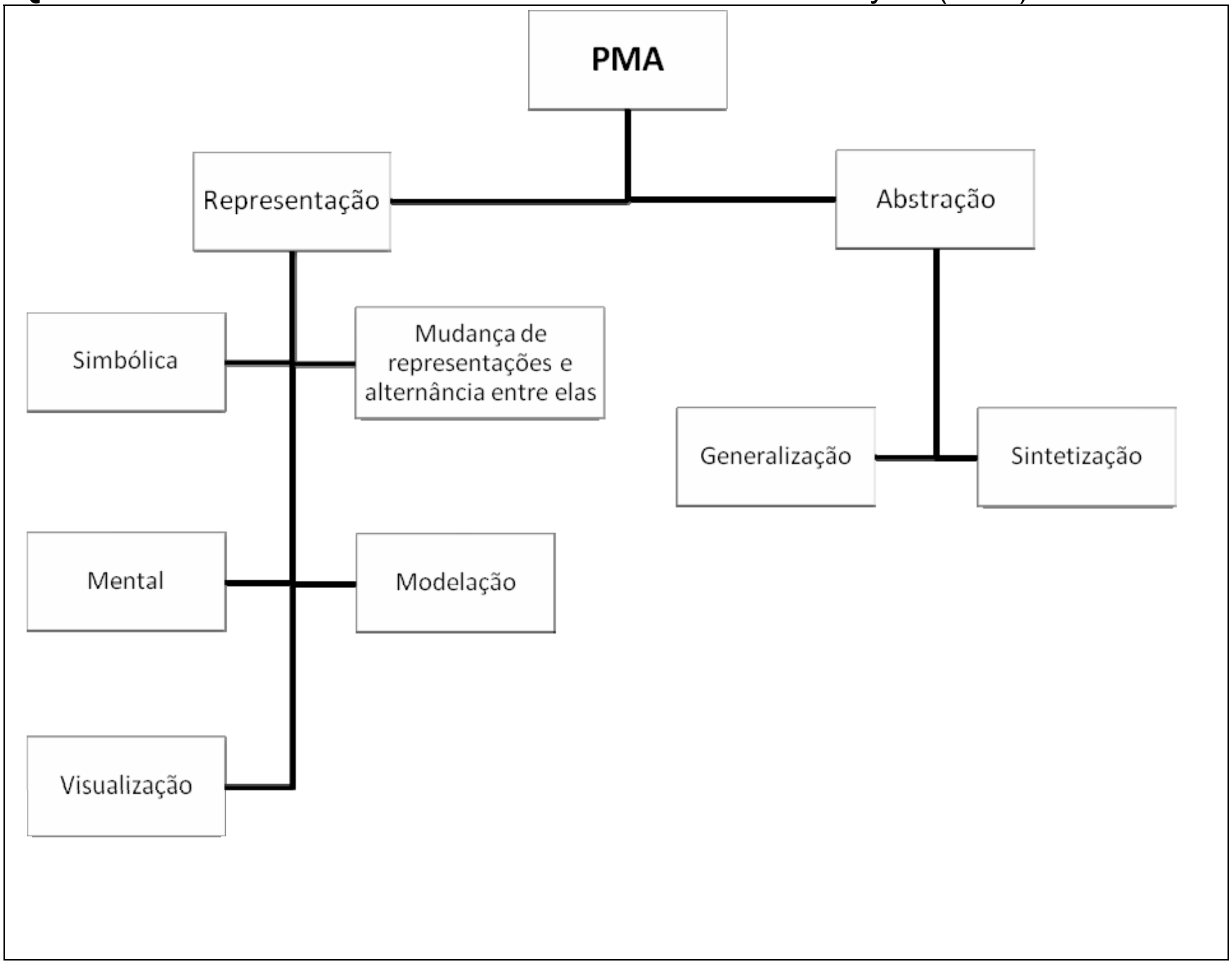
De acordo com Dreyfus (2002), não há uma hierarquia entre os processos, ou seja, não existe a necessidade de um processo ser dependente do

---

[11] […] one can move from one level of detail to another and thus manage the complexity.
[12][…] the properties of such a concept through deductions from the definition. They may involve being through activities that promote abstraction on their part and it has to be brought to their attention that this is what is being done, that this is the aim of the exercise.
[13] It is important for the teacher of mathematics to be conscious of these processes in order to comprehend some of the difficulties which their students face.

outro para acontecer. Segundo o autor os processos são complementares e, para um estudante realizar a abstração, um dos principais incentivos é a realização da generalização e da síntese. O quadro a seguir (quadro 3) mostra quais são os processos que constituem o Pensamento Matemático Avançado segundo Dreyfus (2002).

Quadro 3 – Processos envolvidos no PMA baseado em Dreyfus (2002)



Fonte: Do autor

Em seu trabalho, Dreyfus destaca alguns processos do Pensamento Matemático Avançado, os quais serão descritos nas próximas seções, como se constituem e interagem para a compreensão de um objeto ou processo matemático.

1.1.3.1.1 Representação

O processo de representação em matemática tem o papel de representar ou simbolizar um objeto ou processo em forma de símbolo, notação, ou outro, de modo que o represente em sua noção, a fim de facilitar a sua manipulação e compreensão (DREYFUS, 2002). Segundo o autor, nesse processo estão envolvidos,: a representação simbólica, a representação mental, a visualização, a mudança de representações e alternância entre elas, e a modelação.

a) O processo de representação

Para o autor, "representar um conceito significa gerar uma amostra, por exemplo, a imagem dela" (DREYFUS, 2002, p. 31, tradução nossa[14]), porém isso não é capaz de dizer se a instância gerada é simbólica ou mental e também não indica se a palavra "[...] 'gerar' significa em termos dos processos pelos quais as representações mentais vêm à existência e como eles se desenvolvem" (DREYFUS, 2002, p. 31, tradução nossa[15]). Nesse processo fazem parte a representação simbólica, a representação mental e o processo de visualização.

Representar simbolicamente geralmente tem como objetivo tornar mais simples a comunicação de um conceito, a qual é realizada por meio da escrita ou da fala (DREYFUS, 2002). Para Harel e Kaput (2002), as notações matemáticas, podem servir como símbolos que fragmentam as ideias complexas ou processos mentais, facilitando a sua compreensão e a manipulação a fim de gerar novas ideias.

Segundo Dreyfus (2002), a representação mental indica uma forma de interagir com o mundo externo a respeito dos esquemas internos ou quadros de referência formados na mente de uma pessoa. Quando pensamos ou falamos a respeito de um objeto matemático ou um processo, relacionamos eles com algo que temos em mente, ou seja, uma representação mental do objeto ou processo, por exemplo, para um estudante e/ou matemático, a representação mental de um conceito matemático indica a imagem de como ele vê esse conceito – como uma

---

[14] To represent a concept, then, means to generate an instance, specimen, example, image of it.

[15] […] "generate" means in terms of the processes by which mental representations come into existence and how they develop.

integral, a imagem que pode vir à mente é $\int dx$ – entrelaçada com algumas propriedades do conceito, ou também esta imagem pode ser nada mais que um símbolo.

Como as representações mentais são criadas na mente, um mesmo indivíduo pode gerar uma única ou várias representações para o mesmo conceito, por exemplo, para o conceito de funções ele poderá gerar gráficos, tabelas, expressões algébricas, entre outros. E ainda, mesmo pessoas chegando a definições semelhantes de um mesmo objeto matemático, possivelmente as representações mentais podem ser amplamente diferentes (DREYFUS, 2002).

Nesse sentido, a representação mental pode ser expressa em forma de símbolo. Para Kaput e Harel (2002), os símbolos matemáticos apresentam papéis diferentes à medida que incluem funcionalidades que refletem a estrutura dos objetos matemáticos, sendo alguns mais elaborados ou não, esses podem representar relações ou operações. Segundo os autores, as notações matemáticas foram criadas com intenção de expressar conteúdo da mente de um matemático, a fim de ajudar nas ações do seu pensamento e também para auxiliar na comunicação de suas concepções. E ainda, sugerem que essas notações têm uma importância maior quando regulam a reflexão das ações mentais sobre as concepções, do que simplesmente ser um símbolo para representar um objeto.

Para Dreyfus (2002), outro processo que pode vir a gerar uma representação mental é o de visualização. De acordo com o autor "[...] é um processo pelo qual as representações mentais podem vir a existir" (DREYFUS, 2002, p. 31, tradução nossa[16]). O autor comunga com a teoria de Kaput (1987) a respeito de uma descrição mais geral de como as representações mentais de conceitos matemáticos podem ser geradas, de que "[...] o ato de gerar uma representação mental, depende de sistemas de representação, ou seja, de concreto, artefatos externos, que podem ser materialmente realizados" (DREYFUS, 2002, p. 31, tradução nossa[17]).

Tomando o exemplo de funções, segundo Dreyfus (2002), os gráficos, fórmulas algébricas, diagramas de setas e tabelas de valor podem ser considerados como artefatos externos. Desse modo, um sujeito pode gerar uma ou

[16] Visualizing is one process by which mental representations can come into being.
[17] [...] the act of generating a mental representation, relies on representation systems, i.e. concrete, external artefacts, which can be materially realized.

várias representações mentais concorrentes para um mesmo conceito e, segundo o autor, para ser bem sucedido em matemática é desejável que a pessoa possua um leque de representações mentais com base nesse sistema de representação concreto, ou seja, ter ricos conceitos de representações mentais.

b) Mudança de representações e alternância entre elas

Para Dreyfus (2002), embora seja importante ter várias representações para um conceito matemático, possivelmente só sua existência não seja suficiente para a resolução de um problema. Para que isso aconteça, é desejável ter essas várias representações, saber utilizá-las em conjunto, interligadas e, sempre que necessário, mudar de uma representação para outra a fim de que seja eficiente para a resolução da próxima etapa do problema. Essas mudanças são realizadas a partir de representações existentes, ou seja, quando uma representação evoluir de um conceito matemático para outro. E ainda, segundo o autor, “[...] o processo de mudança de representações é, portanto, intimamente associado com o de representar” (DREYFUS, 2002, p. 32, tradução nossa[18]).

Tomando o exemplo anterior, de funções, no qual as representações podem ser o gráfico, a tabela, a expressão algébrica, pode-se estabelecer ligações de uma representação para outra identificando pontos da tabela no gráfico, identificando o tipo de gráfico que será construído a partir da expressão algébrica, entre outros.

Dreyfus (2002) ressalta que, para os estudantes não terem dificuldades em realizar a mudança de representações, é recomendável que o professor desde o início utilize sistematicamente várias representações e enfatize o processo de mudança entre elas.

Outro processo que está intimamente ligado à mudança de representações é a alternância entre elas. Esse processo ocorre quando o estudante consegue utilizar os processos de representação em um problema aplicado, ou seja, os conceitos matemáticos tornam-se “artefatos externos”, “concretos” para a resolução de uma aplicação da matemática.

[18] The process of switching representations is thus closely associated with that of representing.

c) Modelação

Modelar em matemática é construir uma estrutura ou teoria matemática que incorpore as características de um objeto ou situação física, esse modelo construído auxiliará no estudo do comportamento desse objeto ou situação (DREYFUS, 2002).

Bassanezi (2002) considera a modelagem matemática tanto como uma estratégia de ensino-aprendizagem como um método científico de pesquisa. Para o autor, ela usa de conceitos matemáticos como ferramentas aplicáveis a fim de resolver problemas da realidade (situação física), ou seja, “[...] a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (BASSANEZI, 2002, p. 16). Para Bean (2001, p. 53), a modelagem matemática consiste “[...] em um processo no qual as características pertinentes de um objeto ou sistema são extraídas, com ajuda de hipóteses e aproximações simplificadoras, e representadas em termos matemáticos”.

Nesse sentido, podemos considerar que a modelação é um processo, o qual tem o objetivo de construir um modelo que incorpore as características de um objeto ou situação física a fim de representá-lo matematicamente.

Para Dreyfus (2002), o processo de modelação é, de certo modo, análogo ao processo de representação, porém o de representação está em outro nível, ou seja, a modelação envolve uma situação, um objeto que é físico, a qual a partir desse construirá um modelo que é matemático o qual será representado por uma estrutura matemática, assim o modelo criado também é uma estrutura mental. Dessa forma, esses dois processos estão interligados, compartilhando de algumas propriedades,

> [...] a representação mental está relacionada com o modelo matemático como o modelo matemático está relacionado com o sistema físico. Cada um é um processo parcial do outro. Cada um reflete algumas propriedades (mas não todas) do outro. E cada um aumenta a capacidade de manipular mentalmente o sistema em consideração (DREYFUS, 2002, p. 34, tradução nossa[19]).

Desse modo, o modelo pode ser considerado como um tipo de representação da situação física, o qual possibilitará ao estudante compreender o contexto, conduzindo-o para atingir o processo de abstração.

1.1.3.1.2 Abstração

Segundo Dreyfus (2002), o processo que mais caracteriza o Pensamento Matemático Avançado é a abstração. Desenvolver a capacidade de abstrair um objeto matemático pode ser o objetivo da Educação Matemática no Ensino Superior, pois o processo de abstração está intimamente ligado com a compreensão do objeto matemático. Para o autor os processos que são pré-requisitos para a abstração, além da representação são a generalização e a sintetização que descreveremos a seguir.

a) Generalização

Para Dreyfus (2002) “generalizar é derivar ou induzir a partir de dados, a fim de identificar pontos em comum, para expandir domínios de validade” (DREYFUS, 2002, p. 35, tradução nossa[20]).

Durante esse processo o estudante pode desenvolver ações cognitivas, como analisar os significados do objeto em questão, identificar condições em comum, formular conjecturas, determinar o domínio de validade, entre outras. Todas essas ações partem de uma situação limitada, como $n = 2$, $n = 3$, e posteriormente estendendo para um caso geral n. Desse modo, ele estará

---

[19] Thus the mental representation is related to the mathematical model as the mathematical model is related to the physical system. Each is a partial rendering of the other. Each reflects some (but not all) properties of the other. And each enhances one’s capacity to mentally manipulate the system under consideration.

[20] To generalize is to derive or induce from particulars, to identify commonalities, to expand domains of validity.

procedendo, extraindo a partir de certo objeto matemático e inferindo propriedades a ele, em um caso geral.

Para Dreyfus (2002) esse processo possibilita estabelecer analogias entre casos concretos, como $n = 2$, $n = 3$, e estendê-los para o caso n em geral, que pode ser não concreto. Porém, generalizar, não requer a formação de um novo conceito ou característica que não estivesse presente para um caso limitado como $n = 2$ ou $n = 3$.

b) Sintetização

Geralmente, o ensino da matemática é realizado em etapas, os conceitos são estudados separados com o intuito de em uma etapa final entrelaçá-los, fundindo em uma única imagem. Esse processo de fusão, para Dreyfus (2002), é uma síntese. Segundo o autor, sintetizar é "[...] combinar ou compor partes de tal modo a fim de formar um todo, uma entidade" (Dreyfus, 2002, p.35, tradução nossa[21]).

Um estudante que consegue fazer as conexões de conceitos matemáticos já estudados para resolver um problema ou compreender um novo objeto matemático está fazendo uma síntese.

Fazer síntese para um professor de matemática faz parte da sua rotina de trabalho, fazendo conexões com conceitos a fim de formar o todo para facilitar o ensino para os estudantes, porém nesse processo quem faz as conexões é o professor e não os estudantes. A síntese é um processo que contribui para a compreensão do objeto matemático e as reflexões, conexões, relações realizadas pelo docente, provavelmente não serão feitas também por seus alunos e, assim, provavelmente a imagem que o estudante terá do todo não será a mesma que a de seu professor. Outro fator a considerar é que, como o professor está habituado a realizar sínteses, ele espera que seus estudantes compreendam da mesma maneira que ele, mas para atingi-la é necessário entender todas as etapas que a compõem, seus conceitos e operações (DREYFUS, 2002).

[21] […] combine or compose parts in such a way that they form a whole, an entity.

c) Abstrair

Os principais incentivos para que aconteça a abstração é a realização da generalização e da síntese. A abstração contém o potencial de generalizar e de sintetizar, é a partir desses dois processos que o objetivo de abstrair poderá ser atingido, (DREYFUS, 2002).

Para Dreyfus (2002) nem a generalização e nem a síntese demandam tanto esforço cognitivo como a abstração, naqueles dois processos há uma expansão na estrutura do conhecimento, enquanto que a abstração é suscetível de envolver uma (re)construção mental.

Além disso, na realização dos processos envolvidos na abstração o estudante não precisa renunciar a utilização do “concreto”, enquanto que ao abstrair ele tem que se concentrar nas relações entre os objetos matemáticos a fim de compreender o objeto em questão. Assim, para o autor, a natureza do processo mental de abstração é

> [...] antes de tudo um processo de construção – a construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, de propriedades e relações entre objetos matemáticos. Esse processo é dependente do isolamento de propriedades e relações apropriadas. Requer a capacidade de deslocar a atenção dos objetos próprios para a estrutura de suas propriedades e relações” (DREYFUS, 2002, p. 37, tradução nossa[22]).

E ainda, de acordo com o autor, a realização da abstração por parte de um estudante é uma atividade de construção mental que depende da atenção centrada por ele nas estruturas que formarão parte do conceito abstrato, e da atenção que afastou dos elementos irrelevantes para o contexto em questão, desse modo, deixando o processo mais simples.

---

[22] Abstracting is first and foremost a constructive process – the building of mental structures from mathematical structures, i.e. from properties of and relationships between mathematical objects. This process is dependent on the isolation of appropriate properties and relationships. It requires the ability to shift attention from the objects themselves to the structure of their properties and relationships.

1.1.3.2 Relações entre os processos de representação e abstração

Pensando em termos dos processos envolvidos na representação e na abstração, encontramos relações que estão fortemente ligadas entre eles, as quais podem promover a abstração do objeto, que é um dos objetivos principais do Pensamento Matemático Avançado.

Segundo Dreyfus (2002), representar e abstrair são processos que se complementam, mas em sentidos opostos, ou seja, a partir de várias representações um conceito pode ser abstraído, e por outro, as representações são sempre representações de um conceito abstrato. Quando se usa apenas uma representação para um conceito, o foco do estudante pode se desviar para a representação e não para o conceito abstrato, porém se são utilizadas várias representações em paralelo, provavelmente a relação com o conceito abstrato torna-se importante (DREYFUS, 2002).

Muitas vezes, um estudante, um matemático, tem a necessidade de utilizar as representações para compreender um conceito abstrato. Isso passa a ser uma necessidade cognitiva, pois a partir do momento que é usada uma representação o pensamento é reforçado, e mais reforçado quando consegue utilizar mais de uma representação em paralelo (Dreyfus, 2002). Para o autor, existe uma complementaridade também entre a matemática e os aspectos cognitivos de representação matemática de estruturas. Em ambas – representação e abstração, e representações matemáticas e mentais – podem ser objetos de uso didático nos processos de aprendizagem. De acordo com o autor, os processos são compostos de quatro fases:

> 1. Usando uma representação única,
> 2. Usar mais de uma representação em paralelo,
> 3. Fazer as ligações entre as representações paralelas,
> 4. Integração de representações e de mudança flexível entre eles. (DREYFUS, 2002, p. 39, tradução nossa[23]).

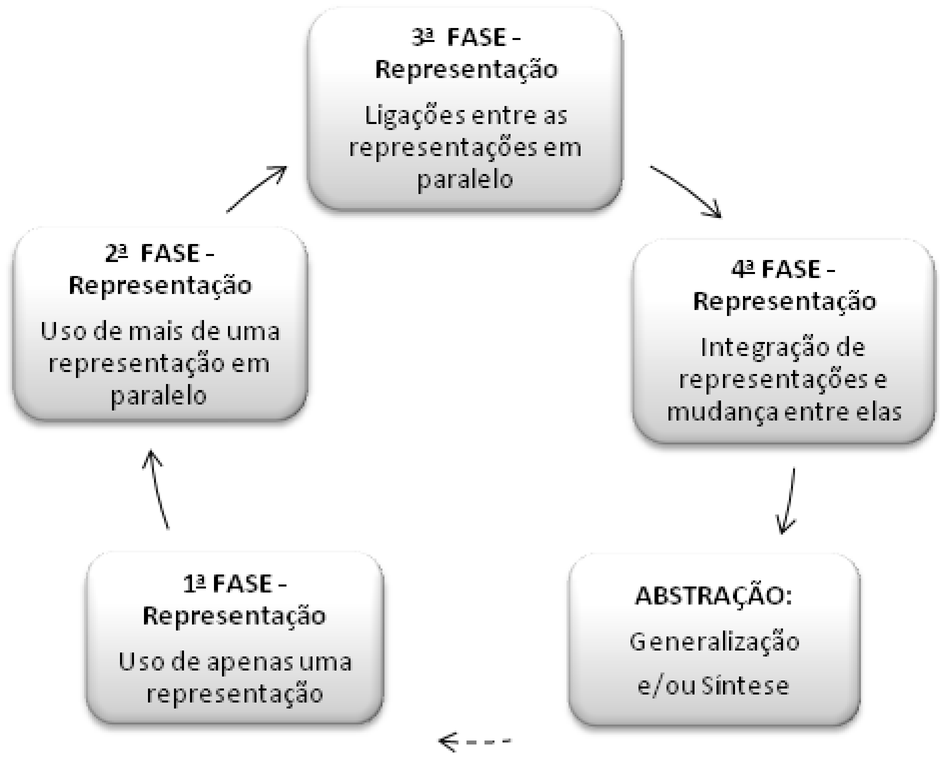
A partir do momento que os estudantes utilizam mais de uma representação em paralelo, segunda fase, estão suscetíveis a estabelecerem

[23] • Using a single representation,
• Using more than one representation in parallel,
• Making links between parallel representations,
• Integrating representations and flexible switching between them.

relações entre essas representações e que possivelmente poderão conduzi-los ao processo de transição para o conceito abstrato. Ao formarem “fortes” ligações entre essas representações, terceira fase, possibilitará que realizem a mudança entre as representações, tornando-os conscientes dos conceitos envolvidos e propensos a influenciar positivamente a abstração. E, por fim, na quarta fase, acontece um processo de integração entre as representações e a mudança flexível entre elas, assim, uma síntese será formada, sendo que as ligações, relações, as propriedades comuns permanecem para atingir a abstração do conceito, enquanto as representações retrataram o que aconteceu nesse processo e, desse modo, com a conclusão do processo é formada a noção abstrata do conceito (DREYFUS, 2002).

O quadro a seguir (quadro 4) exemplifica as fases que envolvem a representação, juntamente com o objetivo do Pensamento Matemático Avançado que é atingir a abstração do objeto ou processo matemático. A flecha em direção à direita indica que o uso das representações “fortemente” ligadas pode conduzir o indivíduo à abstração do conceito, e a flecha em direção à esquerda, que durante o processo de abstração, sempre que necessário, o sujeito busque as representações existentes a fim de fazer novas ligações para atingir a abstração. E assim, os processos do PMA ocorrem e se interagem para atingir um de seus objetivos, que é a abstração.

Quadro 4 – Da representação à abstração, baseado em Dreyfus (2002)



Fonte: Do autor

A partir dessas quatro fases o processo é concluído e o estudante passa a ter uma noção abstrata do conceito em questão. Desse modo, ao resolver um problema o qual tenha esse conceito envolvido, muitas vezes há a necessidade de rever uma ou mais representações do conceito, porém, desta vez, sabendo qual(s) representação(s) usar para a solução do problema (DREYFUS, 2002).

Segundo o autor, a parte fascinante desse processo é quando o conceito abstrato é formado de uma maneira controlada por parte do indivíduo, ou seja, "[...] a pessoa tem o controle sobre as representações que se quer usar" (DREYFUS, 2002, p. 39, tradução nossa[24]).

Para Dreyfus (2002), os processos listados em representação e abstração são os que mais caracterizam o Pensamento Matemático Avançado, contudo não únicos, são alguns dentre muitos processos existentes que poderiam ocorrer como ligações interagindo em cadeias.

[24] […] One has control over the representations one wants to use.

A partir do estudo dos processos encontrados em Dreyfus (2002), listamos características desses processos. Vejamos o quadro a seguir (quadro 5).

Quadro 5 – Características dos processos do PMA baseado em Dreyfus (2002)

<table>
<tr><td rowspan="5">REPRESENTAÇÃO</td><td rowspan="3">1ª e 2ª fases</td><td>Simbólica</td><td>Representar ou simbolizar um objeto ou processo matemático por meio de símbolo, notação ou de outra forma.</td></tr>
<tr><td>Mental</td><td>Representar como vemos a imagem de um objeto ou processo matemático entrelaçada com algumas de suas propriedades.</td></tr>
<tr><td>Visualização</td><td>É um processo pelo qual as representações mentais podem ser geradas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3ª e 4ª fases</td><td>Mudança de representações e alternância entre elas</td><td>Ter várias representações de um mesmo conceito e saber utilizá-las em conjunto, interligadas e quando necessário mudar para uma representação mais eficiente; e
Utilizar os processos de representação em um problema aplicado.</td></tr>
<tr><td>Modelação</td><td>Construir uma estrutura ou teoria matemática que incorpore as características de um objeto ou situação física. O modelo criado também é uma estrutura mental.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ABSTRAÇÃO</td><td colspan="2">Generalização</td><td>Derivar ou induzir a partir de informações para identificar pontos em comuns e expandir domínios de validade.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sintetização</td><td>Combinar ou compor partes de tal modo a fim de formar um todo, uma entidade.</td></tr>
</table>

Fonte: Do autor

1.1.4 Uma Leitura do PMA Segundo Dreyfus (2002), Resnick (1987) e Tall (1995)

Em busca de características semelhantes do Pensamento Matemático Avançado em Dreyfus (2002), Tall (1995) e Resnick (1987), fizemos uma leitura baseada no que os três autores dizem a respeito do Pensamento Matemático Avançado, e listamos alguns pontos em comum. Para isso, utilizamos como base os processos de representação e abstração de acordo com Dreyfus (2002).

Comparando os processos do Pensamento Matemático Avançado de Dreyfus (2002) com as características que Resnick (1987) aponta para o Pensamento de Ordem Superior, listamos algumas semelhanças. De acordo com a autora, o Pensamento de Ordem Superior não é algoritmo, ou seja, não existe uma sequência pré-estabelecida, da qual o professor delimite os passos e a partir disso o estudante consiga chegar à abstração do conceito envolvido.

Para Dreyfus (2002), muitas vezes em sala de aula isso acontece, pois os professores constroem sequências, sínteses, a fim de facilitar a compreensão de seus estudantes. Para o autor, apesar da intenção do professor ter sido boa, o processo de construção não foi realizado pelo estudante e, consequentemente, as possíveis reflexões e os processos de representação e de abstração não foram realizados por seus alunos, além disso, muitas vezes os processos utilizados por um indivíduo não são os mesmos usados por outro. Desse modo, vemos também que os processos do Pensamento Matemático Avançado segundo Dreyfus (2002) não podem ser considerados como um algoritmo, ou seja, suas ações não são previstas, e, portanto, o processo não é conhecido (RESNICK, 1987).

Os processos do Pensamento Matemático Avançado possibilitam ao estudante desenvolver habilidades e competências para a resolução de um problema. Quando um indivíduo estabelece várias representações a fim de abstrair um conceito, ele precisa gerenciá-las de modo que estabeleça relações "fortes" entre elas, integrando-as e, sempre que necessário, fazer a mudança entre as representações para atingir seu objetivo (DREYFUS, 2002).

O processo de gerenciamento das representações envolve a "auto-regulação" de sua aprendizagem, envolve "julgamento e interpretação com nuances", características descritas por Resnick (1987) para o Pensamento de Ordem Superior. As várias representações existentes mesmo que pareçam desconexas, tornam-se fortemente ligadas, "envolvendo um significado abrangente", resultando em uma estrutura que aparentemente estava em desordem (RESNICK, 1987). Para Dreyfus (2002) a "auto-regulação" é a parte fascinante do processo de representação do Pensamento Matemático Avançado, pois "[...] a pessoa tem o controle sobre as representações que se quer usar" (DREYFUS, 2002, p. 39, tradução nossa[25]).

E, por fim, segundo as características de Resnick (1987, p.3, tradução nossa[26]) a respeito do Pensamento de Ordem Superior, o autor afirma que esse "exige esforço. Há um trabalho mental considerável envolvido nas elaborações e nos julgamentos exigidos"; e, de acordo com Dreyfus (2002), a realização da abstração por parte de um estudante é uma atividade de construção mental a qual depende da atenção centrada por ele nas estruturas que formarão parte do conceito abstrato**.**

Para Tall (1995), o Pensamento Matemático Avançado inicia-se com o desenvolvimento do Pensamento Matemático Elementar que, em geral, depende mais das situações manipuláveis, das sensações físicas, que para se tornar avançado começa a depender menos dessas sensações e mais das construções internas. Desse modo, os objetos passam de visuais-espaciais tornando-se sucessivamente mais verbais-dedutivos.

Para o autor, um conceito ou objeto matemático utiliza de símbolos, como imagem, para ligar o processo apropriado e suas relações na estrutura cognitiva, ou seja, existe um esquema mental entrelaçado a esse símbolo que representa o objeto. Desse modo, quando nos deparamos com um objeto matemático, buscamos em nossa mente símbolos possíveis de manipular como se fossem objetos mentais, para a representação do objeto. Comparando com a caracterização de Dreyfus (2002) para o Pensamento Matemático Avançado, podemos inferir que pode ser um processo de representação mental quando utiliza de símbolos ou da visualização para gerar esquemas mentais do conceito ou objeto.

Para Tall (1995), o processamento interno é a parte complexa de descrever e analisar, pois é um lugar que armazena variadas experiências e atividades simultâneas e possui um pequeno foco de atenção. Para ele é preciso fazer duas coisas para minimizar o esforço cognitivo para a compreensão do objeto em questão: uma é "comprimir adequadamente os conhecimentos para o pequeno foco de atenção" (TALL, 1995, p. 3, tradução nossa[27]). Em Dreyfus (2002) inferimos que há pontos em comum com os processos de representação simbólica e/ou

[25] […] One has control over the representations one wants to use.
[26] Higher order thinking is effortful. There is considerable mental work involved in the kinds of elaborations and judgments required.
[27] compress knowledge appropriately for the small focus of attention

mental, para o qual o objeto ou processo matemático está sendo representado por meio de palavras e símbolos para comprimir a notação de modo que estas sejam manipuláveis; e a outra é “construir ligações com outras informações mentais para facilitar a sua utilização” (TALL, 1995, p. 3, tradução nossa[28]), a qual nos processos de Dreyfus (2002) inferimos que seriam a terceira e quarta fases das representações, “ligações entre as representações em paralelo” e a “integração e mudança entre elas”, que nos processos de representação seriam o de “mudança de representações e alternância entre elas” e o de “modelação”.

De acordo com Tall (1995), quando as ações tornam-se simbolizadas como processos, encapsuladas como proceitos, houve a mudança da fase cognitiva do Pensamento Matemático Elementar para o Avançado, pois o objeto matemático se tornou compreendido, “encapsulado”, passando a ter um novo status cognitivo: “da descrição para a definição[29]”, ou seja, houve “[...] a transição da coerência da matemática elementar para a consequência da matemática avançada, baseada em entidades abstractas que o indivíduo deve construir através de deduções das definições formais” (DOMINGOS 2006, p. 5).

Em Dreyfus (2002) inferimos que essa passagem é a abstração, ou seja, os processos do Pensamento Matemático Avançado foram utilizados com a finalidade de compreender o objeto, como um todo, para que suas relações e propriedades sejam abstraídas. Os processos que estão envolvidos nessa parte são o da generalização e da síntese.

Diante da leitura realizada com o objetivo de buscar as semelhanças entre a concepção de Dreyfus dos processos do Pensamento Matemático Avançado em relação à de Tall (1995) e Resnick (1987), construímos um quadro (quadro 6) que retrata a síntese dessas semelhanças.

[28] construct linkages to other mental data to make it easy to use.
[29] No pensamento matemático elementar as propriedades dos objetos são descritos a partir da experiência e no pensamento matemático avançado são construídas a partir da definição.

Quadro 6 – Síntese das semelhanças do PMA baseada em Dreyfus (2002), Tall (1995) e Resnick (1987).

<table>
<tr><td rowspan="5">REPRESENTAÇÃO</td><td>Simbólica</td><td colspan="2">Simbolizar um objeto ou processo matemático por meio de símbolo, notação ou de outra forma; e/ou
Manipular símbolos como se fossem objetos mentais.</td></tr>
<tr><td>Mental</td><td colspan="2">Representar como vemos um objeto ou processo matemático entrelaçado com algumas de suas propriedades;
Comprimir adequadamente os conhecimentos para o pequeno foco de atenção, para um objeto mental.</td></tr>
<tr><td>Visualização</td><td colspan="2">Utilizar uma imagem a fim de gerar uma representação mental;</td></tr>
<tr><td>Mudança de representações e alternâncias entre elas</td><td colspan="2">Ter várias representações de um mesmo conceito e saber utilizá-las em conjunto, interligadas e quando necessário mudar para uma representação mais eficiente (auto-regulação); e
Utilizar os processos de representação em um problema aplicado.</td></tr>
<tr><td>Modelação</td><td colspan="2">Construir uma estrutura ou teoria matemática que incorpore as características de um objeto ou situação física. O modelo criado também é uma estrutura mental.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ABSTRAÇÃO</td><td>Generalização</td><td>Derivar ou induzir a partir de informações para identificar pontos em comuns e expandir domínios de validade.</td><td rowspan="2">Novo status cognitivo: da descrição para a definição;
Obteve o resultado a partir de uma estrutura em desordem aparente.</td></tr>
<tr><td>Sintetização</td><td>Combinar ou compor partes de tal modo a fim de formar um todo, uma entidade.</td></tr>
</table>

Fonte: Do autor

Para análise dos indícios/características dos processos do Pensamento Matemático Avançado, manifestados nos registros escritos dos treze estudantes em relação às oito tarefas referentes ao conteúdo de transformações lineares, utilizaremos o referencial teórico adotado juntamente com o quadro 6 (p. 45), que representa uma síntese das semelhanças das características dos processos do PMA de Dreyfus (2002) em relação a Tall (1995) e Resnick (1987).

O capítulo que segue apresenta uma discussão a respeito de transformações lineares e de conceitos relativos a esse conteúdo como o de espaços vetoriais, bem como a apresentação de alguns elementos que fazem parte do conteúdo que são necessários para a resolução das tarefas utilizadas nesta pesquisa.

2 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Neste capítulo descrevemos alguns conceitos relativos aos temas de transformações lineares e espaços vetoriais. Como são muitos os objetos matemáticos que constituem esses conteúdos, houve a necessidade de fazermos escolhas quanto aos conceitos a serem mencionados e, por isso, optamos por aqueles que estão diretamente presentes nas resoluções do instrumento dessa pesquisa.

2.1 ÁLGEBRA LINEAR

A álgebra linear desempenha um papel importante no ensino da Matemática, pois suas aplicações em matemática e também em outras áreas são numerosas e variadas, por exemplo, em administração, economia, informática, engenharias, física, ecologia, genética, entre outras. Segundo Poole (2004, p. xii), a álgebra linear

> [...] conduz a muitos ramos da matemática com os quais tem ligações, incluindo álgebra abstrata, matemática discreta, cálculo, equações diferenciais, geometria, estatística, métodos numéricos, pesquisa operacional e sistemas dinâmicos. Ela expõe os estudantes a aspectos teóricos, aspectos aplicados e aspectos numéricos da matemática e tem aplicações em uma gama variada de disciplinas.

De acordo com Lima (2012), a álgebra linear é o estudo dos espaços vetoriais e das transformações lineares entre eles, porém, quando os espaços vetoriais têm dimensões finitas, a cada transformações lineares, fixada uma base, podemos associar uma única matriz, e matrizes nas formas bilineares e de formas quadráticas. Desse modo, em geral, na disciplina de álgebra linear podemos encontrar os conteúdos como de matrizes, determinantes, sistemas lineares, entre outros.

Na presente pesquisa, temos por objetivo *identificar e discutir que indícios/características de processos do Pensamento Matemático Avançado são manifestados por estudantes de Matemática da Universidade Estadual de Londrina ao lidarem com tarefas referentes ao conteúdo de transformações lineares*.

Como os sujeitos da pesquisa são estudantes do curso de bacharelado em Matemática, de certo modo, o papel da Álgebra Linear no ensino da Matemática para esses estudantes não deve ficar restrito às aplicações nas diferentes áreas do conhecimento, deve ir além, preparando o futuro bacharel para construir ligações entre aspectos teóricos, aplicados e numéricos da Matemática, como podemos observar no objetivo do curso, que é o de preparar o profissional com

> [...] uma formação matemática ampla que o instrumentalize para a inserção no mercado de trabalho, bem como para dar continuidade a seus estudos, visando uma pós-graduação em Matemática, Matemática Aplicada ou áreas afins (UEL, 2009, p. 12).

E ainda, como objetivos específicos, o currículo do curso de matemática deve oportunizar o desenvolvimento da capacidade de

> - conhecer e compreender a vasta aplicabilidade da Matemática nas diversas áreas do conhecimento, inclusive na própria Matemática, quando das interligações dos conceitos.
> - conhecer e compreender os aspectos históricos da Matemática.
> - compreender e estabelecer conceitos e argumentações matemáticas.
> - avaliar criticamente textos matemáticos, encontrar formas de expressão alternativas e desenvolver o pensamento criativo.
> - opinar sobre o valor instrumental e formativo da Matemática.
> - interpretar dados, elaborar modelos e resolver problemas, integrando os vários campos da Matemática.
> - Ingressar no mercado de trabalho ou em cursos de pós-graduação em Matemática, Matemática Aplicada e áreas afins (UEL, 2009, p. 12).

Assim, compreender os conteúdos de álgebra linear, suas aplicações em diferentes áreas do conhecimento, bem como dentro da própria matemática, faz parte do objetivo da formação de um bacharel em matemática.

Dentro dos conteúdos presentes em Álgebra Linear, descreveremos algumas considerações a respeito de espaços vetoriais e transformações lineares, pois, como uma transformação linear é uma aplicação entre espaços vetoriais, consideramos importante descrever um pouco a respeito desse conceito.

O foco da nossa investigação foi direcionado para as transformações lineares que ocorrem quando os espaços vetoriais têm dimensões finitas, que é o caso das transformações matriciais.

2.2 Espaço Vetorial

Para Lima (2012), o espaço vetorial é o terreno onde se desenvolve toda a álgebra linear. Como o conteúdo de transformações lineares é uma aplicação entre espaços vetoriais, decidimos por aplicar tarefas relativas à definição desse.

Em geral, a definição de espaço vetorial é dada de forma semelhante por livros que contemplam esse conteúdo, por esse motivo resolvemos adotar uma definição como parâmetro e escolhemos a do livro de Poole (2004, p. 388, adaptado).

> Definição: Seja V um conjunto no qual duas operações, chamadas *adição* e *multiplicação* por escalar, estão definidas. Se **u** e **v** estão em *V*, a *soma* de **u** e **v** é detonada por **u** + **v**, e se *c* é um escalar, o *múltiplo escalar* de **v** por *c* é denotado por *c***v**. Se os axiomas a seguir são verdadeiros para todos os escalares c e *d*, então *V* é chamado ***espaço vetorial*** e seus elementos são chamados ***vetores***.
>
> **1.** **u** + **v** está em *V*[30].
> **2.** **u**+ **v** = **v** + **u**
> **3.** (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**)
> **4.** Existe um elemento **0** em *V*, chamado ***vetor nulo***, tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$.
> **5.** Para cada **u** em *V*, existe um elemento $-\mathbf{u}$ em *V* tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
> **6.** *c***v** está em *V*.
> **7.** *c*(**v** + **w**) = *c***v** + *c***w**
> **8.** (*c* + *d*)**v** = *c***v** + *d***v**
> **9.** *c*(*d***u**) = (*cd*)**u**
> **10.** 1**u** = **u**

Em R^n é possível que um espaço vetorial esteja contido em outro espaço vetorial, e quando isso acontece temos a noção de subespaço, segue a definição de Poole (2004, p. 388) “Um subconjunto *W* de um espaço vetorial *V* é chamado de subespaço de *V* se *W* é um espaço vetorial com os mesmos escalares, a mesma adição e a mesma multiplicação por escalar que *V*”.

Uma maneira de verificar se *W* é um subespaço de um espaço vetorial *V*, é checar dois dos 10 axiomas de espaço vetorial, o axioma 1 e o axioma 6, ou seja, “[...] se *W* for parte de um espaço vetorial *V* conhecido, então certos

[30] Observamos que pela definição adotada, existem dez axiomas a serem verificados para que o conjunto em questão seja um espaço vetorial, porém é comum encontrar em outros livros de Álgebra Linear a definição desse conteúdo contendo apenas oito axiomas, pois os de números 1 e 6 foram explicitados na definição, que é o caso, por exemplo, de LIMA (2012).

axiomas não precisam ser verificados, pois eles são "herdados" de V" (ANTON e RORRES, 2012, p. 179).

Segundo Anton e Rorres (2012) os axiomas que não são herdados por *W* são: o axioma 1 – fechamento na adição; o axioma 4 – existência de vetor nulo em *W*; o axioma 5 – existência do oposto em *W* para cada vetor em *W*; e o axioma 6 – fechamento na multiplicação por escalar, pois pode acontecer que a soma de dois vetores em *W* ou a multiplicação de um vetor por um escalar resulte em um vetor de *V* que não esteja em *W*. Entretanto, segundo o próximo teorema, se apenas os axiomas 1 e 6 valerem em *W*, então os de números 4 e 5 como consequência valem em *W* e assim, não precisam ser verificados.

> TEOREMA: Se *W* for um conjunto de um ou mais vetores num espaço vetorial *V*, então *W* é um subespaço de *V*, se, e só se, as condições seguintes forem válidas.
> a) Se **u** e **v** forem vetores em *W*, então **u** + **v** está em *W*.
> b) Se *a* for um escalar qualquer e **u** algum vetor de *W*, então *a***u** está em *W*.

Segue a demonstração do teorema:

> Se *W* for um subespaço de *V*, então todos os axiomas de espaço vetorial são satisfeitos, inclusive os Axiomas 1 e 6, que são exatamente as condições *a)* e *b)*. Reciprocamente, suponha que valham as condições *a)* e *b)*. Como estas são os Axiomas 1 e 6 e como os Axiomas 2, 3, 7, 8, 9 e 10 são herdados de *V*, basta mostrar que os Axiomas 4 e 5 valem em *W*. Para isso, seja **u** um vetor qualquer em *W*. Da condição *b)* segue que, dado qualquer escalar *a*, o vetor *a***u** estão em *W*. Em particular, $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ estão em *W*, mostrando que os Axiomas 4 e 5 valem em *W* (ANTON e RORRES, 2012, p. 180).

2.3 Transformações Lineares

Uma transformação linear é uma aplicação de espaços vetoriais, preservando a estrutura e satisfazendo algumas condições. Vejamos a definição de Anton e Rorres (2012, p. 248),

> Se *V* e *W* forem espaços vetoriais e se *f* for uma função de domínio *V* e contradomínio *W*, dizemos que *f* é uma transformação de *V* em *W*, ou uma aplicação de *V* em *W*, que denotamos por
> $f: \mathbf{V} \rightarrow W$
> No caso especial em que *V* = *W*, também dizemos que uma transformação é um operador de V.

As transformações lineares têm seu domínio e contradomínio em espaços vetoriais e devem preservar as operações vetoriais de adição e de multiplicação por escalar. A seguir temos a definição de Poole (2004, p. 249) para transformações lineares:

> Uma transformação $T: R^n \to R^m$ é chamada de transformação linear se
> 1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ para todo **u** e **v** em R^n.
> 2. $T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$ para todo **v** em R^n e todos os escalares *c*.

A definição de uma transformação linear pode ser resumida a partir da combinação de 1. e 2., "$T: R^n \to R^m$ é uma transformação linear se $T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2)$ para todo $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ em R^n e escalares c_1, c_2".(POOLE, 2004, p. 189).

Uma decorrência da definição é que se uma transformação linear $T: R^n \to R^m$ leva o vetor nulo de R^n no vetor nulo de R^m, ou seja, se 0 pertence a R^n então a transformação T(0) = 0 e pertence a R^m. Assim, um modo de provar que a transformação não é linear é verificar se T(0) ≠ 0.

Um exemplo é a transformação $T: R^3 \to R^2$ onde $T(x, y, z) = (x + 1, y, z)$, assim

$$T(0,0,0) = (1, 0, 0)$$

que não é linear, pois, *T*(0) ≠ 0 (BOLDRINI, et al., 1980).

Para provar que é linear, o fato de T(0) = 0 não é suficiente para isso (BOLDRINI, et al., 1980). Vejamos, seja $T: R \to R$ onde $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^2$, vamos verificar se é uma transformação linear utilizando a definição,

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 = \mathbf{u}^2 + 2\mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{v}^2, \text{ e}$$

$$T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = \mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2$$

Logo, *T* não é linear, pois

$$T(u+v) \neq T(u) + T(v)$$ #

#

mas se tomarmos $u = 0$, $T(0) = 0$. Portanto, T(0) = 0, não é uma condição suficiente para dizer se a transformação é linear.

Como nesta investigação estamos lidando apenas com transformações de R^n em R^m, ilustraremos um modo do qual podem surgir essas transformações. Suponha que $f_1, f_2, \dots, f_m$ sejam funções reais de *n* variáveis,

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ w_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \qquad \vdots \\ w_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Essas *m* equações definem uma transformação de R^n em R^m, pois associam um ponto ($w_1, w_2, \dots, w_m$) único em R^m a cada ponto ($x_1, x_2, \dots, x_n$) em R^n. Podemos denotar essa transformação por *T*, onde $T: R^n \to R^m$ e

$$T: (x_1, x_2, \dots, x_n) = (w_1, w_2, \dots, w_m)$$

No caso de equações lineares, podem ser expressas na forma,

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ w_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ w_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

que, então, pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ou de maneira mais concisa

$w = Ax$

Desse modo, obtemos a transformação matricial, **w** = *A***x** ou w = $T_A(x)$, a qual sendo uma transformação que associa o vetor coluna x em R^n ao vetor coluna *w* em R^m, que denotamos $T_A: R^n \to R^m$. A transformação T_A é a multiplicação por *A*, da qual a matriz *A* é a matriz canônica. (ANTON e RORRES, 2012). O exemplo que segue é o de uma transformação matricial.

Exemplo 1 – Transformação matricial de R^4 em R^3 (ANTON; RORRES, 2012, p. 249, adaptado).

Sejam as equações

$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 \\ w_2 &= 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \\ w_3 &= 5x_1 - x_2 + 4x_3 \end{aligned}$$

as quais definem a transformação matricial $T: R^4 \to R^3$ que pode ser expressa na forma

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

a matriz canônica de *T* é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, a imagem de um ponto pode ser calculada pelas equações ou por multiplicação matricial. Vejamos, se

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\ 1,\ \ 3, 0, 2)$

então,

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Portanto, $\boldsymbol{w}_1 =\ \ 3$, $\boldsymbol{w}_2 =\ \ 5$, e $\boldsymbol{w}_3 =\ \ 2$, é a imagem do ponto $(\ 1,\ \ 3, 0, 2)$.

O teorema a seguir mostra que é possível reconhecer uma transformação dada por meio de uma matriz e que todas as transformações por meio de uma matriz são transformações lineares.

> Considere *A* como uma matriz *mxn*. Então a transformação por meio da matriz *A*, $T_A: R^n \to R^m$, definida por
> T_A ("x") = A"x (para x em " R^n)
> é uma transformação linear" (POOLE, 2004, p. 190).

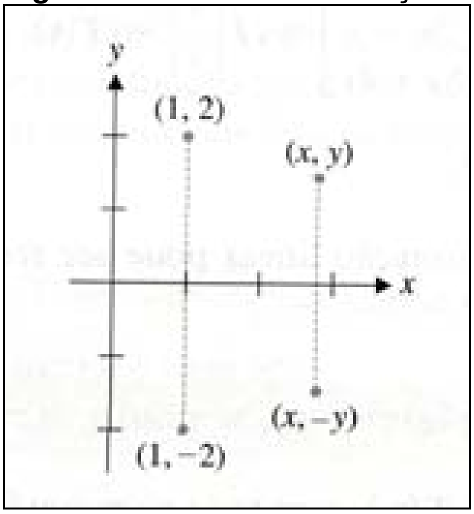
Segue a demonstração do teorema.

> Considere **u** e **v** como vetores em R^n e *c* como um escalar. Então:
> $$T_A(u + v) = A(u + v) = Au + Av = T_A(u) + T_A(v)$$
> $$T_A(cv) = A(cv) = c(Av) = cT_A(v)$$
> Por essa razão, T_A é uma transformação linear (POOLE, 2004, p. 190).

O exemplo seguinte mostra um caso referente ao teorema anterior, o qual afirma que dada uma matriz, fixada a uma base, a transformação realizada por meio dessa matriz é uma transformação linear.

Exemplo 2 – $T: R^2 \to R^2$ é a transformação que leva cada ponto ao seu simétrico em relação ao eixo s. Mostre que *T* é uma transformação linear. (POOLE, 2004, p. 190, adaptado).

Figura 1 – Simetria em relação ao eixo *x*



Fonte: Poole (2004, p. 190)

Como mostra a figura 1, vemos que *T* leva o ponto (*x*, *y*) ao ponto (*x*, - *y*). Assim, podemos usar a notação

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Essa notação nos permite observar que

$$\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto, $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, logo, *T* é uma transformação linear, pois é uma transformação por meio de uma matriz, ou seja, $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

De acordo com Poole (2004), se multiplicarmos por uma matriz quaisquer vetores da base canônica, obteremos as colunas da matriz. Vejamos,

$$\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

Esse exemplo ilustra o que o próximo teorema descreve, vejamos.

> Considere $T: R^n \rightarrow R^m$ uma transformação linear. Então, *T* é uma transformação por meio de uma matriz. Mais especificamente, $T = T_A$, em que *A* é uma matriz *mxn*.

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2) \mid \cdots \mid T(\mathbf{e}_n)]$$

[...] A matriz *A* do teorema é chamada de ***matriz canônica da transformação linear T***. (POOLE, 2004, p. 191, adaptado).

Vejamos a demonstração do teorema.

Sejam $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ os vetores da base canônica de R^n e **x** um vetor de R^n. Podemos escrever $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ (em que os x_i's são as coordenadas de **x**). Sabemos também que $T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \ldots, T(\mathbf{e}_n)$ são vetores (coluna) em R^m. Considere $A = [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2) \mid \cdots \mid T(\mathbf{e}_n)]$ uma matriz $m \times n$ que tem esses vetores como suas colunas. Então:

$$T(\mathbf{x}) = T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n)$$
$$= x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + \ldots + x_nT(\mathbf{e}_n)$$

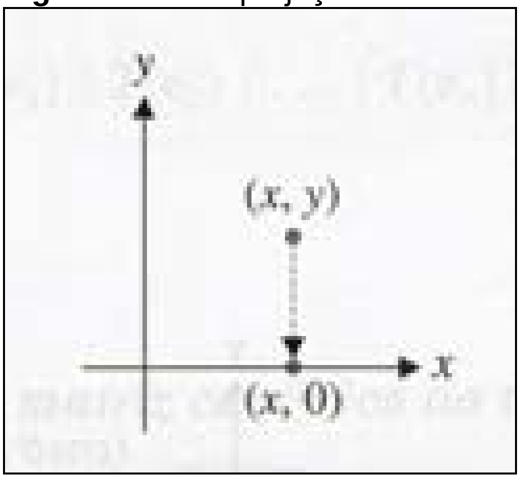
$$= [T(\mathbf{e}_1) \mid T(\mathbf{e}_2) \mid \cdots \mid T(\mathbf{e}_n)]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A\mathbf{x}$$

como queríamos (POOLE, 2004, p. 192, adaptado).

O próximo exemplo exemplifica a ideia de matriz canônica.

Exemplo 3 – Mostre que a transformação $T: R^2 \to R^2$, que projeta um ponto sobre o eixo x, é uma transformação linear e ache a matriz canônica da transformação (POOLE, 2004, p. 194, adaptado).

Figura 2 – Uma projeção



Fonte: Poole (2004, p. 194)

Pela figura 2, observamos que *T* leva o ponto (*x*, *y*) no ponto (*x*, 0). Desse modo,

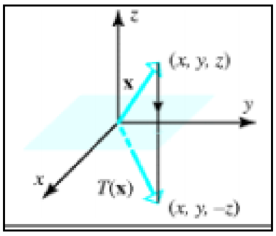
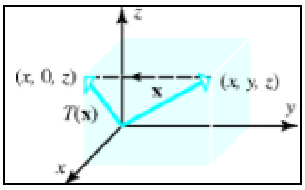
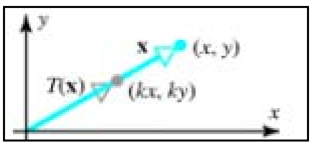
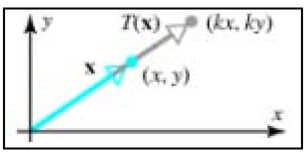
$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

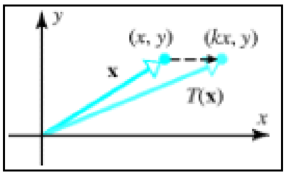
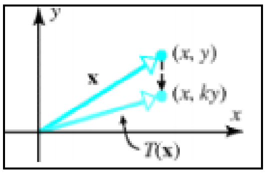
Portanto, T é uma transformação por meio de uma matriz, logo, T é uma transformação linear e a matriz canônica de T é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

E ainda, como toda transformação linear de R^n em R^m surge como uma transformação por meio de uma matriz, podemos dizer também que toda transformação por meio de uma matriz é uma transformação linear, como segue no teorema: “Toda transformação linear de R^n em R^m é uma transformação matricial e, reciprocamente, toda transformação matricial de R^n em R^m é uma transformação linear” (ANTON e RORRES, 2012, p. 270).

O quadro que segue (quadro 7), apresenta alguns exemplos de transformações lineares por meio de uma matriz e suas representações.

Quadro 7 – Alguns exemplos de transformações lineares.

Representação algébrica	**Representação gráfica**	**Representação matricial**
Reflexão no plano *xy* $T(x, y, z) = (x, y, -z)$	 **Fonte:** Anton e Rorres (2012, p. 252)	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Projeção ortogonal sobre o plano *xz* $T(x, y, z) = (x, 0, z)$	 **Fonte:** Anton e Rorres (2012, p. 253)	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Contração de fator *k* em R^2 $(0 \leq k < 1)$ $T(x, y) = (kx, ky)$	 **Fonte:** Anton e Rorres (2012, p. 256)	$\begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Dilatação de fator *k* em R^2 $(k > 1)$ $T(x, y) = (kx, ky)$	 **Fonte:** Anton e Rorres	$\begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

	(2012, p. 256)	
Expansão de R^2 na direção x de fator k ($k>1$) $T(x, y) = (kx, y)$	 **Fonte:** Anton e Rorres (2012, p. 257)	$\begin{bmatrix} kx \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Compressão de R^2 na direção y de fator k ($0 \leq k<1$) $T(x, y) = (x, ky)$	 **Fonte:** Anton e Rorres (2012, p. 256)	$\begin{bmatrix} x \\ ky \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 252–256, adaptado)

Conforme já exposto, neste capítulo abordamos alguns dos conceitos relativos a espaços vetoriais e transformações lineares que consideramos necessários para a resolução do instrumento dessa pesquisa.

No capítulo que segue, apresentaremos os procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento desse estudo. Portanto, descrevemos: a metodologia adotada, bem como a desenvolvemos; os participantes da pesquisa; o instrumento aplicado contendo nove tarefas com algumas resoluções para as mesmas; e como se deu a aplicação do instrumento.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.1 A METODOLOGIA

A presente pesquisa é de abordagem qualitativa de cunho interpretativo baseada em Bogdan e Biklen (1994). Foi escolhida essa abordagem por considerarmos adequada a aplicação de tarefas relativas ao conteúdo de transformações lineares e as características dos processos relativos ao Pensamento Matemático Avançado.

As informações foram coletadas por meio da aplicação de tarefas que contemplam o conteúdo de transformações lineares, realizadas por estudantes do curso de bacharelado em Matemática da Universidade Estadual de Londrina. Na aplicação das tarefas, seguimos um cronograma previamente elaborado que almejou atender o objetivo da pesquisa. As informações coletadas não têm o intuito de confirmar hipóteses previamente construídas, ao contrário, a análise delas foi de forma indutiva, à medida que foram recolhidas. O foco na aplicação das tarefas esteve nos sujeitos da pesquisa, tanto na realização quanto em relação aos significados que dão para o objeto de estudo, pois o objetivo foi perceber "[...] aquilo que eles experimentam, o modo como eles interpretam as suas experiências e o modo como eles próprios estruturam o mundo social em que vivem" (PSATHAS, 1973 apud BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 51).

A análise e interpretação das informações, foram realizadas à luz da Análise de Conteúdo de Bardin (2004). Segundo a autora, o campo, o funcionamento e o objetivo dessa metodologia se resumem da seguinte maneira:

> [...] um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 2004, p. 37).

As diferentes fases da Análise de Conteúdo "[...] organizam-se em torno de três polos cronológicos: 1) a pré-análise; 2) a exploração do material; 3) o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação" (BARDIN, 2004, p. 89).

A primeira fase é de organização, geralmente nela é feita "[...] a escolha dos documentos a serem submetidos à análise, a formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboração dos indicadores que fundamentam a interpretação final" (BARDIN, 2004, p. 89). Segundo a autora, esses fatores não necessariamente obedecem a uma ordem cronológica.

Na pré-análise existem algumas atividades fundamentais que, segundo Bardin (1994), são: a) leitura flutuante; b) escolha dos documentos; c) a formulação das hipóteses e dos objetivos; d) a referenciação dos índices e a elaboração de indicadores; e e) a preparação do material.

Em nossa pesquisa, essa fase de organização se deu da seguinte maneira: após uma leitura flutuante dos registros escritos obtidos a partir da aplicação do nosso instrumento, contendo oito tarefas relacionadas ao conteúdo de transformações lineares e uma a respeito do perfil dos participantes, sendo treze estudantes e nove atividades, totalizando cento e dezessete (117) atividades, decidimos analisar todas as tarefas respondidas, mesmo que estejam parcialmente respondidas.

Para realizar a análise da produção desses estudantes, fizemos uma codificação dos registros escritos, indicando cada registro com um código para não revelar as suas identidades, sendo que nas folhas de resolução das tarefas não pedimos para que se identificassem.

Nesse sentido, estabelecemos um símbolo para cada um, a letra "E", de estudante, seguida de um número, que representa a quantidade de estudantes, resultando em E1, E2, ..., E13, ou seja, E1 para o estudante um, E2 para o estudante dois, e assim por diante, até o E13. Codificamos também cada tarefa, por T1, T2, ..., T8, para as tarefas de um a oito e TP que simboliza a tarefa do perfil. Desse modo, cada registro escrito estava nomeado com o código da tarefa e do estudante, por exemplo, para o estudante um, E1, a sua primeira tarefa foi nomeada de T1-E1, tarefa um do estudante um, para a segunda, T2-E1, e assim por diante.

A partir disso com o *corpus* composto e uma primeira impressão adquirida, descrevemos a resolução de cada tarefa por estudante com intuito de encontrarmos semelhanças em seus registros escritos por tarefa, para realizar os agrupamentos e construir as análises e as categorias.

A segunda fase é a de exploração do material, na qual se dá a administração das técnicas sobre o *corpus* escolhido. Nesta, houve uma construção das unidades de registro (agrupamentos) que emergiram após as análises de cada tarefa. Elementos comuns foram agrupados e reagrupados para organizarmos em agrupamentos a fim de formar as categorias.

E o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação, a terceira fase, é na qual o pesquisador irá validar suas informações, para isso precisará utilizar de operações estatísticas e, a partir disso, propor inferências e interpretações a respeito dos objetivos previstos ou de novas descobertas (BARDIN, 2004). Os procedimentos que utilizamos nessa fase estão descritos no capítulo das análises.

Nesse sentido, desenvolvemos esta pesquisa com base na análise de conteúdo, por ser uma metodologia que permite ao pesquisador inferir conhecimentos relativos à produção das mensagens, por meio de um conjunto de técnicas de análise das comunicações.

3.2 Os Sujeitos

Os sujeitos da pesquisa foram treze estudantes do curso de bacharelado em Matemática da Universidade Estadual de Londrina. Onze dos treze estudantes estavam matriculados no segundo ano, e dois no quarto ano, pois migraram para esta disciplina por causa da mudança de currículo. Todos os participantes desta pesquisa cursaram a disciplina de Álgebra Linear, ministrada no primeiro ano do curso de Matemática, a qual contempla os conteúdos de espaços vetoriais e transformações lineares, presentes no instrumento da pesquisa.

Para a obtenção das informações, foi desenvolvido um instrumento contendo tarefas que envolviam conceitos de Espaços Vetoriais e Transformações Lineares e perguntas relativas à situação acadêmica de cada estudante, ano de ingresso, de conclusão e outras relativas à disciplina que abrange o conteúdo em questão.

O instrumento foi construído com questões de livros de álgebra linear, algumas na íntegra e outras adaptadas e, antes de sua aplicação aos sujeitos da pesquisa, foram aplicadas no grupo de estudo e pesquisa do Pensamento Matemático – GEPPMAT, com nove participantes, todos com formação em licenciatura e/ou bacharelado em matemática, coordenado pela orientadora desta pesquisa. Essa aplicação nos deu base para verificar o tempo necessário para a realização das tarefas, se alguma tarefa precisava ser modificada ou reelaborada.

Após a aplicação verificamos que o tempo de duas aulas, cem minutos, seria suficiente para resolver as tarefas e que havia a necessidade de ser construída mais uma tarefa que, no presente instrumento, é a de número quatro, e reelaborar outra, a de número seis. A tarefa quatro é uma pergunta referente à relação do conteúdo de transformações lineares com outros conteúdos da própria álgebra linear e de outras disciplinas do currículo de matemática e, a seis, correspondia a duas tarefas distintas que contemplavam o mesmo conceito, o de rotação, por este motivo tornou-se uma única tarefa com três itens, *a*, *b* e *c*, sendo que o item *c* é uma nova pergunta.

3.3 O INSTRUMENTO

Nesta seção apresentaremos o instrumento contendo oito tarefas que foram aplicadas aos estudantes, juntamente com algumas possíveis resoluções.

Tarefa 1: O que é um Espaço Vetorial? Explique[31].

Para responder a essa tarefa, escolhemos a definição de Polle (2004).

> Definição: Seja V um conjunto no qual duas operações, chamadas *adição* e *multiplicação* por escalar, estão definidas. Se **u** e **v** estão em *V*, a *soma* de **u** e **v** é detonada por **u** + **v**, e se *c* é um escalar, o *múltiplo escalar* de **v** por *c* é denotado por *c***v**. Se os axiomas a seguir são verdadeiros para todos os escalares c e *d*, então *V* é chamado ***espaço vetorial*** e seus elementos são chamados ***vetores***.
>
> **1.** **u** + **v** está em *V*.
> **2.** **u**+ **v** = **v** + **u**
> **3.** (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**)
> **4.** Existe um elemento **0** em *V*, chamado ***vetor nulo***, tal que **u** + **0** = **u**.
> **5.** Para cada **u** em *V*, existe um elemento **-u** em *V* tal que **u** + (**-u**) = **0**
> **6.** *c***v** está em *V*.
> **7.** *c*(**v** + **w**) = *c***v** + *c***w**
> **8.** (*c* + *d*)**v** = *c***v** + *d***v**
> **9.** *c*(*d***u**) = (*cd*)**u**
> **10.** 1**u** = **u** (Poole, 2004, p. 388, adaptado).

[31] O termo “explique” foi utilizado na tarefa 1, no sentido de justificar a ideia do participante da pesquisa a respeito do assunto, caso não soubesse a definição.

Tarefa 2: Nos exemplos de a) a d) é dado um conjunto de objetos junto com as operações de adição e multiplicação por escalar. Marque qual(is) do(s) conjunto(s) são espaços vetoriais, de acordo com as operações dadas. Justifique suas respostas. (ANTON, RORRES, 2012, p.178, adaptado).

a) (   ) O conjunto de todos os números reais *x* com as operações usuais de adição e multiplicação.

b) (   ) O conjunto de todos os pares de números reais da forma (*x,0*) com as operações padrão[32] de R^2.

c) (   ) O conjunto de todas as matrizes 2 x 2 da forma

$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

com a adição matricial e a multiplicação matricial por escalar.

d) (   ) O conjunto de todas as matrizes 2 x 2 da forma

$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$

com a adição matricial[33] e a multiplicação matricial por escalar.

Para a resolução dessa tarefa, apresentaremos apenas a resposta para o item *c*, pois para os outros itens podemos fazer de modo análogo. Com exceção do item *d*, todos são espaços vetoriais.

<u>Solução do item *c*:</u>

Seja *V* o conjunto de todas as matrizes 2 x 2 da forma $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$. Consideramos as operações de espaço vetorial em *V* como sendo as operações usuais de adição e multiplicação matricial por escalar, ou seja,

[32] A palavra "padrão" é tomada como sinônimo para a palavra usual nesta pesquisa. Além disso, não aconteceram questionamentos a respeito dessa palavra na aplicação do instrumento da pesquisa.
[33] A palavra adição matricial é entendida nesta pesquisa como adição de matrizes.

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & 0 \\ 0 & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & 0 \\ 0 & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix}$$

$$c\mathbf{u} = c\begin{bmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_{11} & 0 \\ 0 & cu_{22} \end{bmatrix}$$

Assim, o conjunto *V* é fechado na adição e multiplicação por escalar, pois as operações matriciais utilizadas produzem matrizes 2×2 da forma $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ como resultado. Os axiomas confirmados são os de números 1 e 6 segundo a definição de Poole (2004). Vejamos para os demais axiomas.

Axioma 2: **u** + **v** = **v** + **u**

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & 0 \\ 0 & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & 0 \\ 0 & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$$

Axioma 3: (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**)

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \left(\begin{bmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & 0 \\ 0 & v_{22} \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} w_{11} & 0 \\ 0 & w_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & 0 \\ 0 & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} & 0 \\ 0 & w_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (u_{11}+v_{11})+w_{11} & 0 \\ 0 & (u_{22}+v_{22})+w_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11}+(v_{11}+w_{11}) & 0 \\ 0 & u_{22}+(v_{22}+w_{22}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11}+w_{11} & 0 \\ 0 & v_{22}+w_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} v_{11} & 0 \\ 0 & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} & 0 \\ 0 & w_{22} \end{bmatrix}\right)$$

= **u** + (**v** + **w**)

Axioma 4: Existe um elemento **0** em *V*, chamado ***vetor nulo***, tal que **u** + **0** = **u**. Para confirmarmos esse axioma tomemos a matriz 2×2 em *V*,

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Desse modo,

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

Axioma 5: Para cada **u** em *V*, existe o elemento oposto de **u** em *V* tal que

u + (**-u**) = **0**.

Para verificarmos que o axioma 5 vale, é preciso definir o oposto de u,

$$-\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -u_{11} & 0 \\ 0 & -u_{22} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{11} & 0 \\ 0 & -u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Axioma 7: $c(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = c\mathbf{v} + c\mathbf{w}$

$$c(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = c\left(\begin{bmatrix} v_{11} & 0 \\ 0 & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} & 0 \\ 0 & w_{22} \end{bmatrix}\right)$$

$$= c\left(\begin{bmatrix} v_{11} + w_{11} & 0 \\ 0 & v_{22} + w_{22} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} c(v_{11} + w_{11}) & 0 \\ 0 & c(v_{22} + w_{22}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cv_{11} + cw_{11} & 0 \\ 0 & cv_{22} + cw_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cv_{11} & 0 \\ 0 & cv_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cw_{11} & 0 \\ 0 & cw_{22} \end{bmatrix}$$

$$= c\begin{bmatrix} v_{11} & 0 \\ 0 & v_{22} \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} w_{11} & 0 \\ 0 & w_{22} \end{bmatrix}$$

$$= c\mathbf{v} + c\mathbf{w}$$

Axioma 8: $(c + d)\mathbf{v} = c\mathbf{v} + d\mathbf{v}$

$$(c+d)\mathbf{v} = (c+d)\begin{bmatrix} v_{11} & 0 \\ 0 & v_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (c+d)v_{11} & 0 \\ 0 & (c+d)v_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cv_{11} + dv_{11} & 0 \\ 0 & cv_{22} + dv_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cv_{11} & 0 \\ 0 & cv_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dv_{11} & 0 \\ 0 & dv_{22} \end{bmatrix}$$

$$= c\begin{bmatrix} v_{11} & 0 \\ 0 & v_{22} \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} v_{11} & 0 \\ 0 & v_{22} \end{bmatrix}$$

$$= c\mathbf{v} + d\mathbf{v}$$

Axioma 9: $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$

$$c(d\mathbf{u}) = c\left(d\begin{bmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}\right)$$

$$= c\left(\begin{bmatrix} du_{11} & 0 \\ 0 & du_{22} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} [c(du]_{11}) & 0 \\ 0 & [c(du]_{22}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [(cd)u]_{11} & 0 \\ 0 & [(cd)u]_{22} \end{bmatrix}$$

$$= (cd)\begin{bmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= (cd)\mathbf{u}$$

Axioma 10: $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Vejamos,

$$1\mathbf{u} = 1\begin{bmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

Dessa maneira, o conjunto de todas as matrizes 2 x 2 da forma $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ com a adição usual de matrizes e a multiplicação matricial por escalar é um espaço vetorial.

Tarefa 3: O que é uma transformação linear? Explique[34].

Faremos a resolução dessa tarefa de duas maneiras, a primeira utilizando duas propriedades, para isso optamos pela definição de Poole (2004, p. 249):

> "Uma transformação $T: R^n \to R^m$ é chamada de transformação linear se
> 1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$ para todo **u** e **v** em R^n.
> 2. $T(cv) = cT(v)$ para todo **v** em R^n e todos os escalares *c*."

E a segunda utilizando a combinação das duas propriedades da primeira, ou seja, a definição de uma transformação linear pode ser resumida a partir da combinação de 1. e 2., "$T: R^n \to R^m$ é uma transformação linear se $T(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2)$ para todo $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ em R^n e escalares c_1, c_2".(POOLE, 2004, p. 189).

Tarefa 4: Há alguma relação entre o conteúdo de transformações lineares e os outros conteúdos da disciplina de álgebra linear, como matrizes e determinantes? Outros? E com outras disciplinas do curso de graduação em Matemática? Explique.

Conforme já mencionado, uma transformação linear é uma aplicação entre espaços vetoriais, nesse sentido, podemos ter espaços vetoriais de matrizes, de polinômios, de funções, entre outros. Desse modo, conteúdos presentes na disciplina de Álgebra Linear são utilizados em transformações lineares, bem como outros conceitos presentes em diferentes disciplinas de um curso de Matemática, como o curso de cálculo, com funções, derivadas e integrais.

[34] O termo "explique" foi utilizado na tarefa 3, no sentido de justificar a ideia do participante da pesquisa a respeito do assunto, caso não soubesse a definição.

Tarefa 5: Marque qual(is) da(s) aplicação(ões) abaixo é (são) transformação(ões) linear(es)? Justifique[35].

a) ( ) $T: R^2 \to R^2$ definida por: $T(x, y) = (-x, y)$.

b) ( ) $T: R^2 \to R^2$ definida por: $T(x, y) = (x + ky, y)$.

c) ( ) $T: R^3 \to R^3$ definida por: $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.

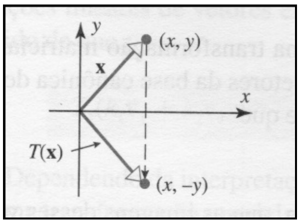
d) ( ) A rotação do R^2 no R^2.

e) ( ) A translação do R^2 no R^2.

f) ( ) O cisalhamento de R^2 de fator k na direção *x*.

g) ( ) A ilustração abaixo

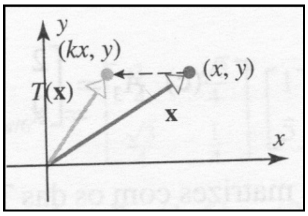
Figura 3 – Reflexão em *x*



Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 252).

h) ( ) A ilustração abaixo

Figura 4 – Compressão



Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 257).

[35] A letra "*k*" presente nesta tarefa nos itens: *b*, *f* e *h*, pertence ao Conjunto dos Números Reais e não foi definido no momento da aplicação.

Para a resolução da tarefa cinco (5), apresentamos as soluções dos itens "*a*", "*b*" e "*e*", para os dois primeiros escolhemos dois modos diferentes de resolução os quais podem ser utilizados para respostas dos outros itens. Com exceção da letra *e*, todos os outros itens são transformações lineares.

Resolução do item *a*:

Essa transformação é uma reflexão no eixo y e linear. Para a resolução desse item utilizaremos as duas propriedades da definição de transformações lineares.

Seja $T: R^2 \to R^2$ definida por: $T(x,y) = (-x,y)$, utilizando a primeira propriedade, $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$, para todo **u** e **v** em R^n, temos:

Considere

$$\mathbf{u} = (x_1, y_1) \text{ e } \mathbf{v} = (x_2, y_2)$$

Então,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = T(x_1+x_2, y_1+y_2) \\ = (-(x_1+x_2), y_1+y_2) = (-x_1+(-x_2), y_1+y_2) \\ = (-x_1,y_1)+(-x_2,y_2) = T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2) \\ = T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Para mostrar a segunda propriedade, considere $\mathbf{v} = (x,y)$ e *c* um escalar. Então,

$$T(c\mathbf{v}) = \mathrm{T}\big(c(x,y)\big) = T(cx,cy) = (-(cx),cy) = c(-x,y) = cT(x,y) = cT(\mathbf{v})$$

Desse modo, pelas duas propriedades, *T* é uma transformação linear.

Resolução do item *b*:

Essa transformação é um cisalhamento de R^2 de fator *k* na direção *x* e linear. Para a sua resolução faremos a transformação por meio de uma matriz.

Seja $T: R^2 \to R^2$ definida por: $T(x,y) = (x+ky, y)$. Temos,

$$\begin{bmatrix} x+ky \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Assim, $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, em que $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, logo *T* é uma transformação por meio de uma matriz. Portanto, *T* é linear.

<u>Resolução do item *e*:</u>

A translação não é uma transformação linear, vejamos.

Seja $T: R^2 \to R^2$ definida por: $T(x, y) = (x + a, y + b)$, temos

$$\begin{bmatrix} x + a \\ y + b \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Desse modo, $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, logo, *T* não é linear.

Tarefa 6: "Considere a transformação $T: R^2 \to R^3$, definida por

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x - y \\ 3x + 4y \end{bmatrix},$$

verifique se T é uma transformação linear"(POLLE, 2004, p. 188). Justifique.

Para verificar se *T* é uma transformação linear, considere

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Utilizando a primeira parte da definição de transformação linear temos

$$T(u + v) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \\ 3(x_1 + x_2) + 4(y_1 + y_2) \end{bmatrix}$$

$$= [\blacksquare(x_1 1 + x_1 2 @ 2x_1 1 + 2x_1 2 - y_1 1 - y_1 2 @ 3x_1 1 + 3x_1 2 + 4y_1 1 + 〖4y〗_1 2))]$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ (2x_1 - y_1) + (2x_2 - y_2) \\ (3x_1 + 4y_1) + (3x_2 + 4y_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 - y_1 \\ 3x_1 + 4y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ 2x_2 - y_2 \\ 3x_2 + 4y_2 \end{bmatrix}$$

$$= T \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

Para provar o item 2 da definição, considere $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e um escalar *c*. Então

$$T(c\mathbf{v}) = T\left(c \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} cx \\ cy \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} cx \\ 2(cx) - (cy) \\ 3(cx) + 4(cy) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cx \\ c(2x - y) \\ c(3x + 4y) \end{bmatrix}$$

$$= c \begin{bmatrix} x \\ 2x - y \\ 3x + 4y \end{bmatrix}$$

$$= cT \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

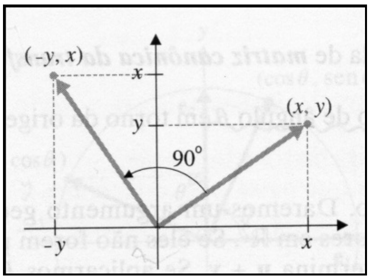
$$= cT(\mathbf{v})$$

Desse modo, *T* é linear.

Tarefa 7: “Os operadores matriciais de R^2 e R^3 que movem pontos ao longo de arcos circulares são denominados ***operadores de rotação*** ou, simplesmente, ***rotações***” (ANTON e RORRES, 2012, p. 253). As tarefas abaixo são referentes a rotações.

a) “Seja $T: R^2 \rightarrow R^2$ a transformação que faz a rotação de ângulo 90º no sentido anti-horário em relação à origem. Mosque que *T* é uma transformação linear” (POOLE, 2004, p. 191).

Figura 5 – Rotação (1)



Fonte: Poole (2004, p. 191)

b) Encontre a matriz canônica de uma rotação $T: R^2 \rightarrow R^2$ que move os pontos no sentido anti-horário em torno da origem por um ângulo θ . (ANTON e RORRES, 2012, p. 253, adaptado).

c) Utilizando o resultado do item b), faça a rotação do ponto (2, -1) de ângulo 60º em torno da origem a fim de obter o ponto que representa a imagem de (2, -1).

<u>Resolução do item a:</u>

Faremos a resolução desse item de três modos, utilizando as duas propriedades da adição e de homogeneidade da definição de transformação lineares, combinando essas duas propriedades e pela transformação por meio de uma matriz.

- Primeiramente resolveremos utilizando as duas propriedades da definição, ou seja:

(1) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$, para todo **u** e **v** em $\mathbf{R}^n$.

(2) $T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$, para todo **v** em $\mathbf{R}^n$ e todos os escalares *c* em $\mathbf{R}$.

Vejamos,

Consideremos $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, então

Por (1):

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] \\ &= T[(x_1 + x_2, y_1 + y_2)] \\ &= [-(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2)] \\ &= [-y_1 + (-y_2), x_1 + x_2] \\ &= [(-y_1, x_1) + (-y_2, x_2)] \end{aligned}$$

$= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

Considere $\mathbf{v} = (x, y)$ e *c* um escalar. Então:

Por (2):

$$\begin{aligned} T(c\mathbf{v}) &= T[c(x, y)] \\ &= T[(cx, cy)] \\ &= [-(cy), cx] \\ &= (-cy, cx) \\ &= c(-y, x) \\ &= cT(x, y) \\ &= cT(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Desse modo, *T* é uma transformação linear.

- Resolvendo pela combinação das duas propriedades, ou seja,

$T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2)$, para todo $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ em $\mathbf{R}^n$ e escalares c_1, c_2 em $\mathbf{R}$.

Vejamos,

Considere $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$, então

$$
\begin{aligned}
T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = T[c_1(x_1, y_1) + c_2(x_2, y_2)] \\
&= T[(c_1x_1, c_1y_1) + (c_2x_2, c_2y_2)] \\
&= [(c_1x_1 + c_2x_2, c_1y_1 + c_2y_2)] \\
&= [-(c_1y_1 + c_2y_2), (c_1x_1 + c_2x_2)] \\
&= [(-c_1y_1 + (-c_2y_2)), (c_1x_1 + c_2x_2)] \\
&= [(-c_1y_1, c_1x_1) + (-c_2y_2, c_2x_2)] \\
&= [c_1(-y_1, x_1) + c_2(-y_2, x_2)] \\
&= c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2)
\end{aligned}
$$

Portanto, *T* é uma transformação linear.

- Resolvendo por uma transformação por meio de uma matriz.

A transformação *T* leva o ponto (*x*, *y*) ao ponto (-*y*, *x*). Assim, temos

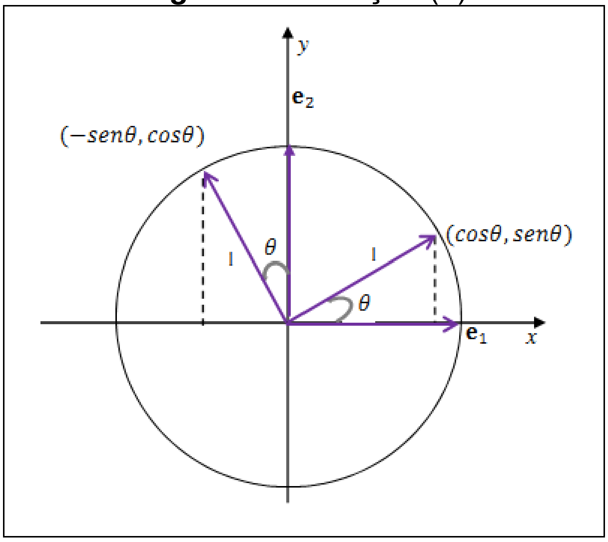
$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Desse modo, *T* é uma transformação linear por meio de uma matriz.

<u>Resolução do item b:</u>

Podemos encontrar a matriz canônica pela determinação de seu valor nos vetores de base canônica, $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$, de $\mathbf{R}^2$. Vejamos a figura (figura 6).

Figura 6 – Rotação (2)



Fonte: Do autor

Assim,

$T(\mathbf{e}_1) = T(1{,}0) = (cos\theta, sen\theta)$

$T(\mathbf{e}_2) = T(0{,}1) = (-sen\theta, cos\theta)$

De modo que a matriz canônica de *T* é

$$[T(\mathbf{e}_1)|T(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

<u>Resolução do item c:</u>

Sabendo que $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ e $sen\,60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então

$$R_{60}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

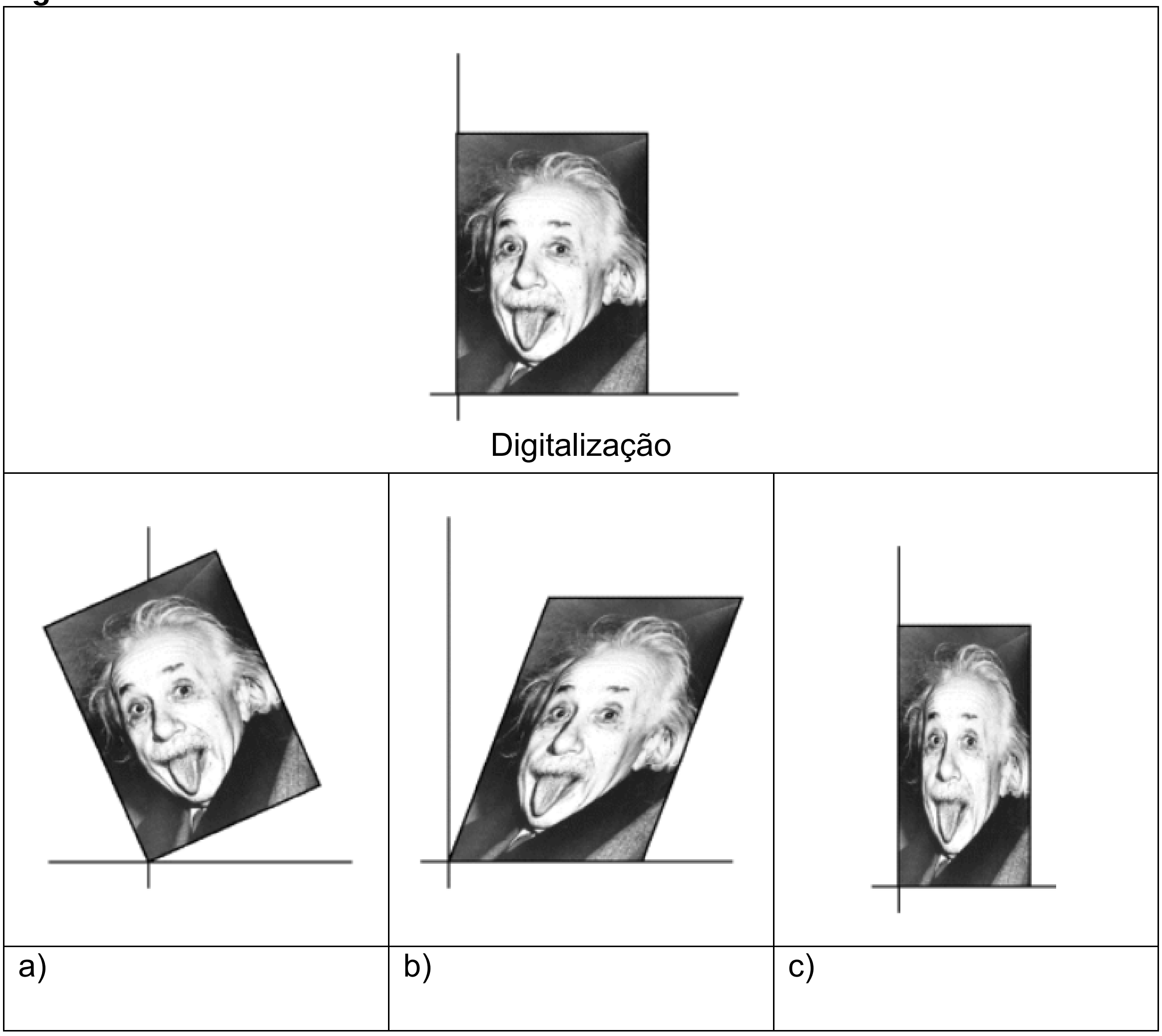
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2\sqrt{3}-1}{2} \end{bmatrix}$$

Portanto, a imagem do ponto (2, -1) obtida a partir da rotação do ângulo de 60° é o ponto $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$.

Tarefa 8: Considere a ilustração abaixo como sendo a digitalização de uma fotografia famosa de Albert Einstein, e que, a partir desta, aconteceram três modificações geradas computacionalmente, as quais são transformações matriciais de R^2. Em cada caso escreva qual foi a transformação ocorrida. Justifique.

Figura 7 – Albert Einstein



Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 274, adaptado).

Nessa tarefa, nos itens a, b e c, ocorreram efeitos de transformações matriciais sobre o quadrado unitário[36]. Muitas vezes podemos identificar o efeito de um operador matricial de R^2 no olhar. Essa foi a intenção para a tarefa oito.

No item *a*, aconteceu uma rotação anti-horária pelo um ângulo θ. O efeito realizado no item *b* foi um cisalhamento horizontal, ou seja, cisalhamento de fator $k > 0$ na direção *x*. E no item *c*, uma compressão horizontal – compressão na direção x pelo fator k $(0 < k < 1)$.

3.4 APLICAÇÃO

Procedemos a aplicação do instrumento em duas aulas seguidas, cada uma com cinquenta minutos de duração, totalizando uma hora e quarenta minutos, em dois momentos diferentes. O primeiro, no dia vinte e seis de março de dois mil e treze, para os dois estudantes do quarto ano que migraram para a disciplina de seminários, e o segundo, no dia primeiro de abril do mesmo ano, para os onze estudantes do segundo ano do curso de bacharelado em Matemática.

Nas duas aplicações direcionamos a resolução das tarefas da mesma forma. Primeiramente explicamos como seria realizada a pesquisa com os estudantes, que a aplicação do instrumento contava como atividade da disciplina de Seminários, porém não seria atribuída nota com relação ao feitio de cada tarefa. Caso não soubessem responder alguma tarefa formalmente, poderiam justificar suas ideias de outra forma ou deixar em branco.

Em seguida, explicamos aos estudantes que suas identidades seriam preservadas, cada um seria referenciado na pesquisa com um símbolo e para utilizarmos as informações coletadas seria necessário que autorizassem assinando o termo de consentimento livre e esclarecido (apêndice A). Todos os estudantes assinaram e não fizeram questionamentos quanto aos desdobramentos das informações a serem recolhidas.

Após o preenchimento do termo, entregamos a tarefa referente a uma ideia geral da vida acadêmica de cada estudante (apêndice B). Nessa, havia perguntas a respeito da idade; ano de início do curso de matemática; se faziam

[36] Na aplicação da tarefa oito explicamos aos estudantes que os vértices da digitalização da foto de Albert Einstein eram (0,0), (1,0), (0,1) e (1,1).

concomitância[37]; a série que estavam cursando em 2013; ano que cursou a disciplina de álgebra linear (que no curso de bacharelado se chama Geometria Analítica e Álgebra Linear – GAAL) e quantas vezes a fez; se existiu alguma dificuldade no aprendizado da disciplina em questão; e se alguma vez já atuou como professor (a) de matemática.

Em seguida, explicamos como seria a resolução das tarefas relativas aos conteúdos de espaços vetoriais e transformações lineares. As quatro primeiras tarefas foram aplicadas separadamente, após o término de cada uma, e as quatro seguintes todas juntas, deixando de livre escolha aos estudantes a ordem de resolução.

Decidimos aplicar desse modo, pois as quatro primeiras referem-se à ideia geral do que é um espaço vetorial e do que são transformações lineares. Como a tarefa quatro é uma pergunta a respeito da existência de uma possível relação do conteúdo de transformações lineares com outros da mesma disciplina e com outras disciplinas do curso, preferimos fazer desse modo, pois queríamos investigar o que os estudantes lembravam-se do conteúdo analisado antes de realizar as tarefas. Nas quatro seguintes, essa ordem não nos importava, pois buscamos identificar indícios/características dos processos do Pensamento Matemático Avançado e se houve contribuição na resolução de alguma tarefa para outra.

Para a análise e interpretação das tarefas, utilizamos as características dos processos do Pensamento Matemático Avançado segundo Dreyfus (2002), Tall (1995) e Resnick (1987), pois a compreensão de um objeto matemático é um processo que se dá na mente do estudante, que segundo Dreyfus (2002, p. 25, tradução nossa[38]) frequentemente é “[...] baseado em uma sequência de atividades de aprendizagem, durante a qual uma variedade de processos mentais ocorrem e interagem”.

Utilizaremos como base o quadro 6, que está localizado no capítulo da fundamentação teórica (p. 45), para inferirmos qual(is) características dos processo(s) os estudantes apresenta(m) em cada resolução, a fim de atingirmos o nosso objetivo que é *identificar e discutir que indícios/características de processos*

---

[37] São estudantes do bacharelado em matemática e tem a opção de cursar a licenciatura a partir do 2º ano do curso.

[38] […] it is based upon a long sequence of learning activities during which a great variety of mental processes occur and interact.

do Pensamento Matemático Avançado são manifestados por estudantes do curso de Matemática da Universidade Estadual de Londrina ao lidarem com tarefas referentes ao conteúdo de transformações lineares.

O capítulo que segue descreve as análises, inferências e discussões realizadas a partir dos registros escritos referente à resolução do instrumento dessa pesquisa. Para isso utilizaremos a metodologia de Análise de Conteúdo segundo Bardin (2004) juntamente com a fundamentação teórica adotada.

4 ANÁLISES

Faremos a análise dos registros escritos referentes ao questionário composto por oito tarefas relacionadas com os conteúdos de espaços vetoriais e transformações lineares, e uma do perfil dos sujeitos da pesquisa, à luz da análise de conteúdo de acordo com Bardin (2004), como descrito no capítulo três.

Escolhemos realizar a pesquisa empregando essa metodologia, pois a utilização de suas técnicas, de seus procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, permite-nos a inferência de conhecimentos referentes às condições de produção e recepção dessas mensagens (BARDIN, 2004). Desse modo, é possível chegar a um resultado mais próximo da realidade desses estudantes e atingir o nosso objetivo que é de *identificar e discutir que indícios/características de processos do Pensamento Matemático Avançado são manifestados por estudantes do curso de Matemática da Universidade Estadual de Londrina ao lidarem com tarefas referentes ao conteúdo de transformações lineares*.

4.1 ANÁLISES DAS TAREFAS

A primeira atividade analisada foi a tarefa relativa ao perfil dos estudantes. Aplicamos essa tarefa com o intuito de sabermos se todos os estudantes haviam cursado a disciplina de Álgebra Linear (apesar de estarem no segundo ano do curso e a disciplina fazer parte da grade do primeiro, pode acontecer de algum estudante ter desistido dela no ano anterior e não a ter feito), quantas vezes cursaram a disciplina, se tiveram dificuldades durante o percurso e se optaram em fazer licenciatura e bacharelado em concomitância.

As análises das tarefas relativas ao conteúdo de transformações lineares e espaços vetoriais foram feitas por tarefa, ou seja, analisando separadamente os registros escritos da tarefa um dos treze estudantes, em seguida da tarefa dois e assim por diante. Primeiramente, selecionamos todos os registros escritos, a fim de detalhar cada um, reescrevendo-os para elencar os elementos em comum com o objetivo de construir os agrupamentos (unidades de registro) de cada tarefa. Decidimos fazer isso por tema, tendo como núcleo de sentido elementos relacionados com o conteúdo de espaços vetoriais e/ou transformações lineares – podendo ser símbolos, propriedades, definições ou outros – os quais serão os nossos indicadores que fundamentarão a interpretação final, pois, de acordo com Bardin (2004, p. 99), fazer uma análise temática "[...] consiste em descobrir os <<núcleos de sentido>> que compõem a comunicação e cuja presença ou frequência de aparição podem significar alguma coisa para o objetivo analítico escolhido". Em seguida, analisamos os registros escritos com base em nosso referencial teórico e no quadro 6 (p. 45): Síntese das semelhanças de características dos processos do Pensamento Matemático Avançado baseado em Dreyfus (2002), Tall (1995) e Resnick (1987), para inferirmos a respeito das características/indícios do Pensamento Matemático Avançado manifestados em cada resolução.

4.1.1 Análise Referente ao Perfil dos Estudantes

Diante das respostas da tarefa relativa ao perfil dos estudantes (apêndice B), seguem as seguintes informações.

Dos treze estudantes, todos cursaram a disciplina de Álgebra Linear no ano anterior. Dois fazem o curso de licenciatura em concomitância com o bacharelado. Oito estudantes começaram o curso de bacharelado em Matemática no ano de 2012, dois começaram em 2011, e três nos anos de 2010, 2008 e 2007, respectivamente. A maioria cursou a disciplina de Álgebra Linear no ano de 2012, na primeira série do curso, três estudaram em anos anteriores, e apenas um aluno chegou a fazer duas vezes a disciplina. O nome da disciplina é Geometria Analítica e Álgebra Linear, que os estudantes se referem como GAAL.

Para a pergunta: "Como foi fazer a disciplina de Álgebra Linear? Teve alguma dificuldade com algum conteúdo? Explique.", três estudantes escreveram que não tiveram dificuldades no aprendizado, um deles citou que os conteúdos "não são difíceis de entender, porém são trabalhosos", e outro, "que é difícil de entender a importância da disciplina no curso de matemática". Seis estudantes disseram que a disciplina "é muito difícil e complexa", e três apontaram dificuldades em conceitos isolados, como mudança de base nos espaços vetoriais.

4.1.2 Análise da Tarefa 1

A tarefa:

O que é um Espaço Vetorial? Explique.

Dos treze registros escritos referentes a esta tarefa, apenas um estudante não respondeu, E5. Seis responderam-na utilizando a definição ou parte dela, E1, E2, E7, E8, E10 e E13, três resolveram apresentando elementos e relações pertinentes ao conceito, E4, E6 e E11, e três escreveram uma resposta subjetiva, E3, E9 e E12.

Para a construção dos agrupamentos, consideramos os treze registros escritos da tarefa 1. Desses, emergiram quatro agrupamentos: A, B, C e D, e destes, três apresentaram subagrupamentos: A1, A2, B1, B2, B3, C1 e C2. Os agrupamentos referentes a essa tarefa são excludentes, pois cada registro escrito só se encaixa em um agrupamento, sendo que isso não foi determinado *a priori*, foram feitos a partir das resoluções dos estudantes. Vejamos o quadro (quadro 8) dos agrupamentos e subagrupamento referentes a tarefa 1.

Quadro 8 – Agrupamentos e subagrupamentos da tarefa 1

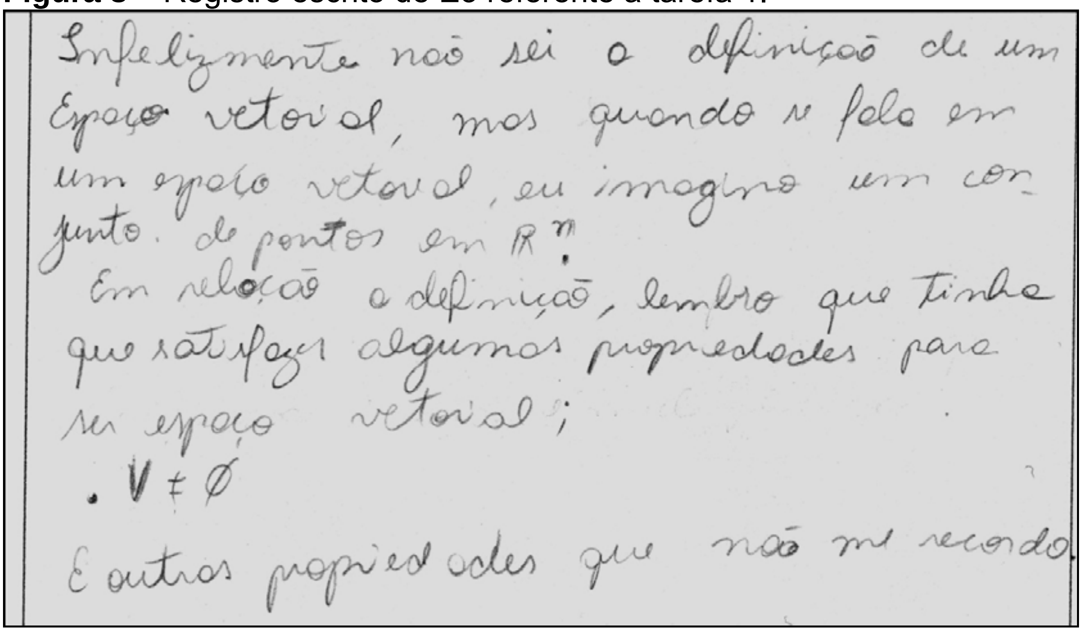
Agrupamentos	Subagrupamentos	Registros escritos
A – Apresentou uma definição completa, com todos os axiomas. Utilizou símbolos para representar vetores, escalares e conjuntos, a fim de definir o conceito.	A1 – Organizou as propriedades em dois grupos, o primeiro em relação à adição e o segundo referente às propriedades de multiplicação por escalar.	E13
	A2 – Organizou os axiomas em dois grupos, o primeiro em relação à adição simbolizando-os por S_1, S_2, S_3 e S_4 e o segundo referente operação de multiplicação por escalar, simbolizando-os por M1 e M2 os dois primeiros, e por D1 e D2 os dois últimos que referem à propriedade distributiva.	E10
B – Apresentou uma definição incompleta, faltando alguns axiomas.	B1 – Organizou as propriedades em dois grupos, o primeiro em relação à adição e o segundo a multiplicação por escalar.	E1, E8

Utilizou símbolos para representar vetores, escalares e conjuntos, a fim de definir o conceito.	B2 – Listou os axiomas começando pelas operações de adição e multiplicação por escalar e depois apresentou os outros, a partir das propriedades elencando as duas operações em conjunto quando necessário.	E7
	B3 – Escreveu que deve satisfazer as oito propriedades, e listou o nome de cinco, sendo que na propriedade comutativa da adição denotou por: u + v = v + u.	E2
C – Explicou a definição com suas palavras.	C1 – Utilizou exemplos de objetos que tem ligações com o conceito.	E4, E6, E11
	C2 – Outros	E3, E9, E12
D - Não respondeu a tarefa.		E5

Fonte: Do autor

Dos treze estudantes, apenas dois fizeram a tarefa 1 completa, que são E10 e E13, e para E7 faltou um axioma. Oito estudantes, não podemos considerar que responderam corretamente ou parcialmente a tarefa, pois desses, quatro apresentaram exemplos de objetos que tem relações com o conceito, E2, E4, E6 e E11, três responderam subjetivamente, E3, E9 e E12, e um não respondeu.

Figura 8 – Registro escrito de E3 referente à tarefa 1.

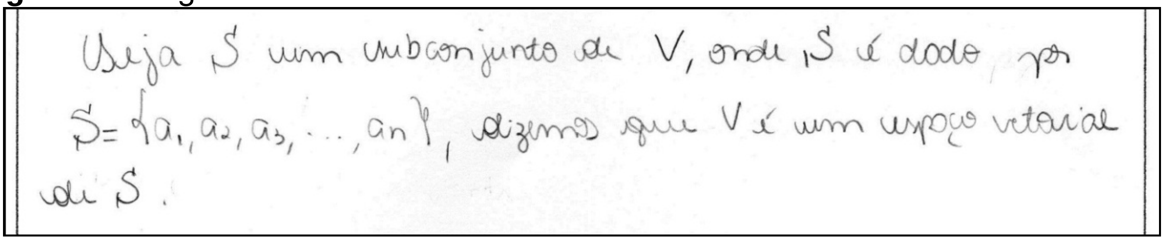

Infelizmente naõ sei o definiçaõ de um Espaço vetorial, mas quando se fala em um espaço vetorial, eu imagino um conjunto de pontos em $\mathbb{R}^n$.
Em relaçaõ a definiçaõ, lembro que tinha que satisfazer algumas propriedades para ser espaço vetorial;
. $V \neq \emptyset$
E outras propriedades que naõ me recordo.

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E3

Um exemplo de resposta subjetiva é do registro escrito do estudante E3 (figura 8), escreve que não sabe a definição, mas imagina um conjunto de pontos em R^n, e que lembra que existem algumas propriedades a serem satisfeitas.

Outro exemplo é do estudante E9 (figura 9), que relata que "*V*" é um espaço vetorial de "*S*" e que "*S*" é um subconjunto de "*V*".

Figura 9 – Registro escrito de E9 referente à tarefa 1



Seja S um subconjunto de V, onde S é dado por $S=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, dizemos que V é um espaço vetorial de S.

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E9

Como mencionado, quatro estudantes citaram exemplos de objetos que tem relações com o conceito, mas com relação a esses registros escritos, podemos afirmar que eles fazem uma menção ao conceito, lembram de algo, e por esse motivo, não inferimos características dos processos do Pensamento Matemático Avançado.

Figura 10 – Registro escrito de E2 referente à tarefa 1

> Para ser um espaço vetorial, o espaço deve satis_
> fazer as 8 propriedades de espaço vetorial
>
> ① Adição
>
> ② Elemento neutro
>
> ③ Elemento oposto
>
> ④ multiplicação por escalar
>
> ⑤ Propriedade comutativa: $u+v=v+u$
>
> ⑥ " associativa

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E2

Um exemplo é o registro do estudante E2 (figura 10). Neste registro, observamos que o estudante cita que existem oito propriedades a serem satisfeitas, porém ele nomeia algumas, não todas, coloca no mesmo patamar as operações usuais de adição, de multiplicação por escalar e algumas propriedades e não utiliza os símbolos matemáticos adequadamente.

Para inferirmos características dos processos do Pensamento Matemático Avançado, vamos considerar os registros escritos daqueles estudantes que responderam a tarefa 1, completamente ou parcialmente, apresentando objetos que tem ligações com o conceito. Desse modo, não inferimos indícios dos processos do PMA nos registros escritos de E2, E3, E4, E5,E6, E9, E11 e E12.

Dos cinco estudantes que manifestaram características de processos do Pensamento Matemático Avançado, todos manifestaram indícios do processo de representação simbólica, E1, E7, E8, E10 e E13, utilizando símbolos para representar vetores, escalares e conjuntos, manipulando-os algebricamente, pois segundo as características dos processos do PMA, representar simbolicamente um objeto é referir a ele em forma de símbolo, notação ou de outra forma. Um exemplo disso é o registro escrito de E1 (figura 11).

Figura 11 – Registro escrito de E1 referente à tarefa 1.

Espaço vetorial é um conjunto de objetos matemáticos que se comportam de acordo com algumas propriedades, sendo estas:

- assossiatva em relação a soma: $(u+v)+w = u+(v+w)$
- Existência de um elemento neutro: $u+0=u$
- Escistência de um elemento oposto: $u+(-u)=0$
-

Para todos u, v e $w \in V$, onde V é o espaço vetorial

Além disso, os elementos de V se relacionam com $\mathbb{R}$ segundo as propriedades:

- Distributiva $\alpha(v+u) = \alpha v + \alpha u$
- Elemento neutro $1.v = v$
- Elemento nulo $0.v = 0$
-

Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E1

Podemos observar que o estudante E1 não comenta que no conjunto citado as duas operações, de adição e multiplicação por escalar, estão definidas. Além disso, foram omitidos alguns axiomas:

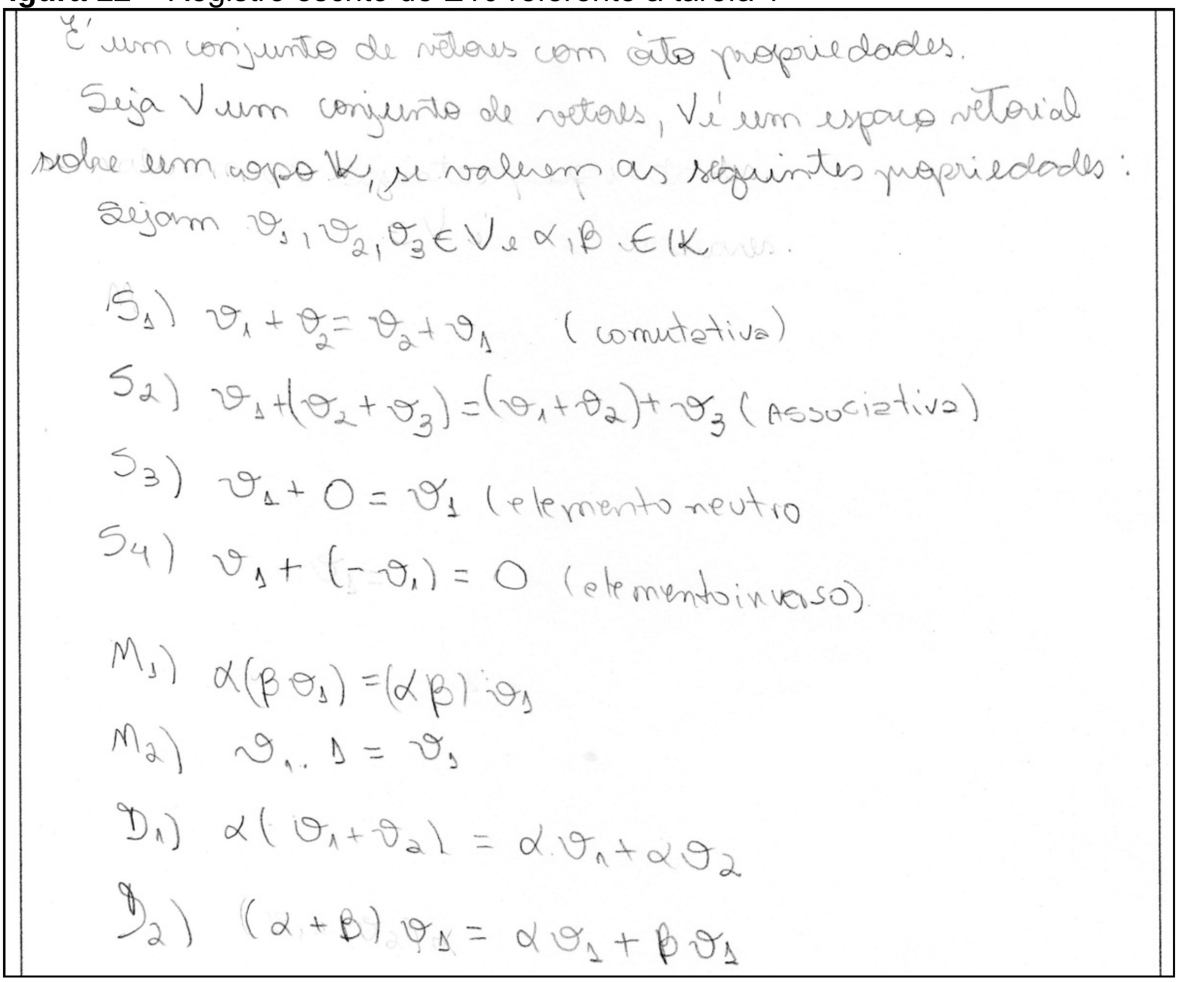
$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$; $(a+b)\mathbf{u} = a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$; e $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$.

O estudante se equivocou ao denominar o vetor nulo como sendo o elemento neutro e escrevendo: $0.\mathbf{v} = \mathbf{0}$ como parte da definição.

Mesmo E1, não definindo o conceito por completo, manifestou alguns indícios de características do Pensamento Matemático Avançado, pois apresenta símbolos para representar vetores, escalares e conjuntos, utilizando as letras para isso. Nesse registro usou as letras minúsculas **u**, **v** e **w** para vetores; as letras gregas α, e β para escalares; e as letras maiúsculas *V*, para espaço vetorial e $\mathbb{R}$ para conjunto dos números reais. Além disso, o estudante também manipula essas letras para demonstrar os axiomas com suas propriedades.

Para a representação mental, quatro estudantes manifestaram esse tipo de representação, E7, E8, E10, e E13, pois utilizando símbolos, notação ou escrevendo, inferimos que os estudantes fizeram essas notações entrelaçadas com relações segundo as propriedades de espaço vetorial, e desse modo, compreendiam as relações envolvidas. E ainda, para escrever o que é um espaço vetorial, alguns utilizaram essas representações como “artefatos externos” (DREYFUS, 2002). Como é o caso de E10 (figura 12).

Figura 12 – Registro escrito de E10 referente à tarefa 1



É um conjunto de vetores com oito propriedades.

Seja V um conjunto de vetores, V é um espaço vetorial sobre um corpo K, se valerem as seguintes propriedades:

Sejam $v_1, v_2, v_3 \in V$ e $\alpha, \beta \in K$.

S1) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ (comutativa)

S2) $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$ (Associativo)

S3) $v_1 + 0 = v_1$ (elemento neutro

S4) $v_1 + (-v_1) = 0$ (elemento inverso)

M1) $\alpha(\beta v_1) = (\alpha \beta) v_1$

M2) $v_1 . 1 = v_1$

D1) $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha . v_1 + \alpha v_2$

D2) $(\alpha + \beta) v_1 = \alpha v_1 + \beta v_1$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E10

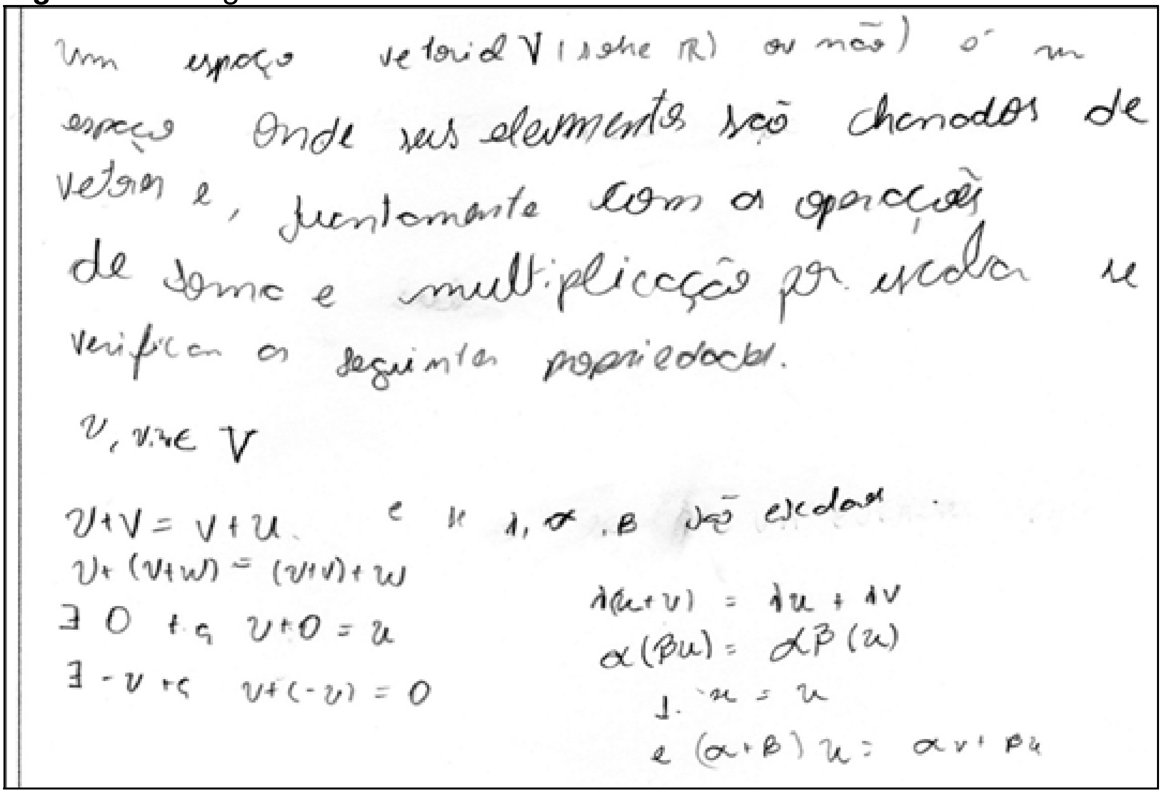
Como no registro anterior, não há menção que as duas operações, de adição e multiplicação por escalar, estão definidas no conjunto. Porém todas as oito propriedades são citadas corretamente.

Podemos verificar nesse registro escrito que o estudante apresenta cada axioma como sendo uma representação mental, pois em cada um, mostra ter conhecimentos relativos a vetores, escalares e as propriedades para formá-los, ou seja, cada axioma se torna também um objeto mental.

Para os processos de representação que são o de mudança de representações e alternância entre elas, e a modelação, inferimos que três dos oito registros escritos analisados manifestaram esses dois processos, E7, E10 e E13. Na mudança de representações e alternância entre elas, os estudantes integraram as representações e mudaram para uma mais eficiente quando foi necessário a fim de resolver e construir uma estrutura que foi proposta, a definição de Espaços Vetoriais, ou seja, a fim de resolver a tarefa utilizaram a linguagem natural, explicando o conceito, os símbolos que nesses casos são também representações mentais, e a linguagem algébrica.

Para Dreyfus (2002) o sucesso em resolver problemas acontece quando um estudante além de ter várias representações de um mesmo conceito, elas devem estar fortemente ligadas, que é o caso da resolução desses três estudantes. E podemos inferir que manifestaram características do processo de modelação, pois a partir da descrição dos axiomas, elencando-os segundo seu critério, os estudantes construíram a estrutura do conceito matemático pedido. Um exemplo de registro escrito que apresente esses dois processos é do estudante E13 (figura 13).

Figura 13 – Registro escrito de E13 referente à tarefa 1



Um espaço vetorial V (sobre ℝ) ou não) é um espaço onde seus elementos são chamados de vetores e, juntamente com as operações de soma e multiplicação por escalar se verificam as seguintes propriedades.

$u, v, w \in V$

$u + v = v + u$ e λ, α, β são escalares.

$u + (v + w) = (u + v) + w$

$\exists\ 0$ t.q. $u + 0 = u$

$\exists\ -u$ t.q. $u + (-u) = 0$

$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

$\alpha(\beta u) = \alpha\beta(u)$

$1 \cdot u = u$

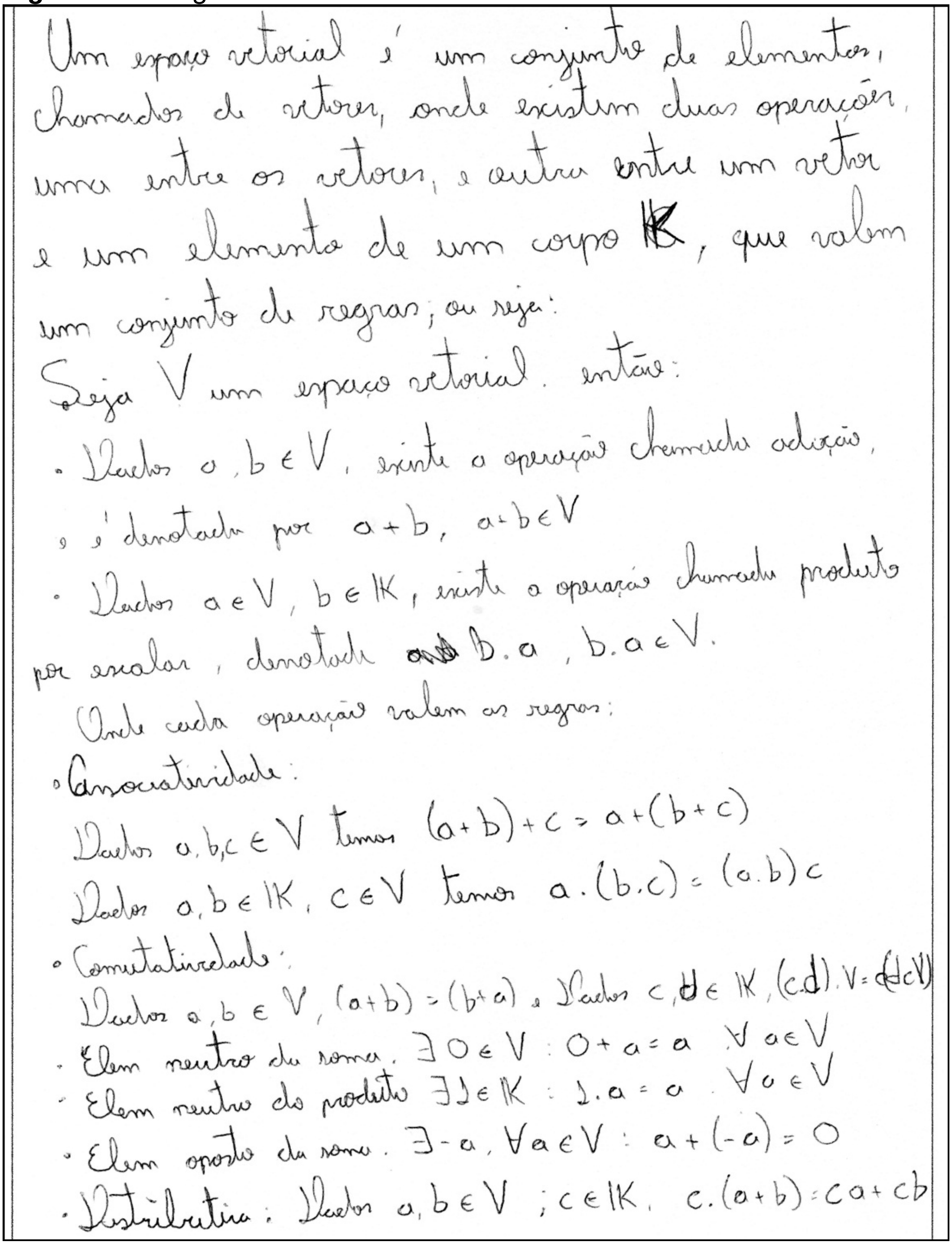
e $(\alpha + \beta)u = \alpha v + \beta u$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E13

Na produção escrita referente à tarefa 1, o estudante E13 faltou apenas comentar que o conjunto V precisa ser não vazio.

Para inferirmos se os estudantes manifestaram características do processo de abstração em seus registros escritos referente à tarefa 1, consideramos aqueles que apresentaram os processos de síntese e/ou generalização. Na resolução da tarefa 1, tivemos três estudantes que manifestaram indícios do processo síntese a respeito do conceito de Espaço Vetorial, E7, E10 e E13. O próximo registro escrito mostra um estudante que manifestou os processos de representação e de abstração, de uma maneira peculiar e por esse motivo decidimos descrever os processos manifestados por ele. Vejamos o registro escrito do Estudante sete (figura 14).

Figura 14 – Registro escrito de E7 referente à tarefa 1


Um espaço vetorial é um conjunto de elementos, chamados de vetores, onde existem duas operações, uma entre os vetores, e outra entre um vetor e um elemento de um corpo $\mathbb{K}$, que valem um conjunto de regras; ou seja:
Seja V um espaço vetorial. então:
- Dados a, b $\in$ V, existe a operação chamada adição, e é denotada por a + b, a+b $\in$ V
- Dados a $\in$ V, b $\in \mathbb{K}$, existe a operação chamada produto por escalar, denotado ~~and~~ b.a, b.a $\in$ V.

Onde cada operação valem as regras:
- Associatividade:
Dados a, b, c $\in$ V temos $(a+b)+c = a+(b+c)$
Dados a, b $\in \mathbb{K}$, c $\in$ V temos $a.(b.c) = (a.b)c$
- Comutatividade:
Dados a, b $\in$ V, $(a+b) = (b+a)$ e Dados c, d $\in \mathbb{K}$, $(c.d).V = d(cV)$
- Elem neutro da soma. $\exists\, 0 \in V : 0 + a = a \quad \forall a \in V$
- Elem neutro do produto $\exists\, 1 \in \mathbb{K} : 1.a = a \quad \forall a \in V$
- Elem oposto da soma. $\exists -a, \forall a \in V : a + (-a) = 0$
- Distributiva: Dados a, b $\in$ V; c $\in \mathbb{K}$. $c.(a+b) = ca + cb$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E7

Apesar da resolução do estudante sete não estar completa, pois falta um axioma, que na definição que optamos é o de número oito, "$(c + d)\mathbf{v} = c\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ ", e nomeou como propriedade comutativa o axioma de número nove "$c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$ ", podemos inferir que o estudante manifestou características dos processos de representação e abstração, pois, transitou por vários tipos de representações, a partir da simbólica, para mental interligando-as, a fim de formar um conceito maior, o de espaço vetorial.

Observamos que não é uma definição decorada, pois ele relacionou as propriedades: associativa, elemento neutro, oposto, com as operações de adição e multiplicação por escalar, diferentemente das definições usuais que primeiramente escrevem os axiomas da operação de adição e depois os axiomas de multiplicação com suas respectivas propriedades. Podemos dizer que utilizando as representações simbólicas o estudante gera uma representação mental, pois transitou pelo processo tornar o objeto que era visual-espacial para o visual-verbal (TALL, 1995).

Outro processo de representação manifestado foi o de modelação, pois construiu uma estrutura matemática que incorporou as características do objeto espaço vetorial. Diante disso, vemos que E7 transitou por várias representações e soube utilizá-las em conjunto, passando pelas fases de representação descritas por Dreyfus (2002). O estudante manifestou o processo de síntese, pois combinou partes, os axiomas com suas propriedades, a fim de formar um todo, uma entidade (Dreyfus 2002), ou seja, o conceito de imagem foi reformulado para definição (TALL, 1995).

Dos treze estudantes, oito não manifestaram características dos processos do Pensamento Matemático Avançado, e dos demais, todos apresentaram características de representação simbólica, quatro de representação mental, e três apresentaram características pertencentes à maioria dos processos de representação e abstração, com exceção apenas dos processos de visualização generalização. Este último não inferimos em nenhum registro escrito, porque não utilizam de imagem, utilização que é característica do processo a fim de gerar uma representação mental

O próximo quadro (quadro 9) apresenta quais foram as características do Pensamento Matemático Avançado manifestadas pelos estudantes nas resoluções da tarefa um.

Na primeira coluna o símbolo T1, representa a tarefa 1, e utilizamos as letras “R” e “A”, seguidas de números para representar os processos do Pensamento Matemático Avançado de: representação (R) e abstração (A), ou seja, R1: simbólica; R2: mental; R3: visualização; R4: mudança de representações e alternância entre elas; e R5: modelação; e A1: generalização; e A2: síntese.

Quadro 9 – Características dos processos do PMA em relação à tarefa 1

<table>
<tr><th>T1</th><th>Características evidenciadas dos processos do PMA</th><th>Registros escritos</th></tr>
<tr><td>R1</td><td>Representam simbolicamente elementos de um espaço vetorial, vetores, escalares e conjuntos, manipulando-os algebricamente.</td><td>E1, E7, E8, E10, E13</td></tr>
<tr><td>R2</td><td>Representam mentalmente o conceito de espaço vetorial, pois utilizando notações mostram compreender as relações que estão por trás disso.</td><td>E7, E8, E10, E13</td></tr>
<tr><td>R4</td><td>Utilizam mais de uma representação para o conceito, integrando-as e mudando para uma mais eficiente quando necessário.</td><td rowspan="3">E7, E10 e E13</td></tr>
<tr><td>R5</td><td>Constroem uma estrutura ou teoria que incorpore as características do objeto.</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>Combinando elementos que fazem parte de espaço vetorial, formaram partes a fim de construir o todo, o conceito.</td></tr>
</table>

Fonte: Do autor

4.1.3 Análise da Tarefa 2

A tarefa:

Nos exemplos de a) a d) é dado um conjunto de objetos junto com as operações de adição e multiplicação por escalar. Marque qual(is) do(s) conjunto(s) são espaços vetoriais, de acordo com as operações dadas. Justifique suas respostas. (ANTON, RORRES, 2012, p.178, adaptado).

a) ( ) O conjunto de todos os números reais *x* com as operações usuais de adição e multiplicação.

b) ( ) O conjunto de todos os pares de números reais da forma $(x,0)$ com as operações padrão de R^2.

c) ( ) O conjunto de todas as matrizes 2 x 2 da forma

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

com a adição matricial e a multiplicação matricial por escalar.

d) ( ) O conjunto de todas as matrizes 2 x 2 da forma $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ com a adição matricial e a multiplicação matricial por escalar.

Dos treze registros escritos referentes a esta tarefa, inferimos quatro agrupamentos: A, B, C e D, e destes, dois, A e C, apresentaram subagrupamentos: A1, A2, A3, A4, A5, C1, C2, C3 e C4. Para construirmos um quadro contendo os agrupamentos que emergiram nos quatro itens, fizemos primeiramente um quadro de agrupamentos para cada letra e a partir disso reagrupamos por semelhanças de agrupamentos, pois, em geral, a resolução dos três primeiros itens foi semelhante, justificaram por meio das propriedades, e para o quarto item justificaram com um contraexemplo.

Os agrupamentos referentes a essa tarefa são excludentes, uma vez que as resoluções por item só se encaixam em um agrupamento/subagrupamento. Esses agrupamentos e subagrupamentos emergiram a partir da análise das informações contidas nos registros escritos referentes à tarefa dois. O próximo quadro (quadro 10) descreve esses agrupamentos e subagrupamentos referentes à tarefa 2.

Quadro 10 – Agrupamentos da tarefa 2.

Agrupamentos	Subagrupamentos	Itens / registros escritos
A – Marcou o item e justificou	A1 – Escreveu que as oito propriedades de espaços vetoriais são satisfeitas por este conjunto.	a) E6, E7, E13 b) E7 c) E1, E7 d) E1
	A2 – Escreveu que as oito propriedades de espaços vetoriais são satisfeitas por este conjunto utilizando símbolos para representar os axiomas, separando por A1, A2, de adição e M1, M2 de multiplicação.	a) E8 b) E8 c) E8
	A3 – Escreveu que o conjunto da tarefa é um subespaço vetorial de R^2 ou M^2, para isso utilizou símbolos para representar, vetores, escalares e conjuntos.	b) E13 c) E13
	A4 – Demonstrou como se o conjunto fosse um subespaço do espaço vetorial R^2 ou M^2. Utilizou símbolos para representar, vetores, escalares e conjuntos.	b) E6 c) E6
	A5 – Demonstrou que cada uma das oito propriedades de espaços vetoriais são satisfeitas para este conjunto, utilizando símbolos para representar vetores, escalares, conjuntos e axiomas. Simbolizou os axiomas de adição por: S1, S2, S3 e S4, da multiplicação por M1 e M2, e da propriedade distributiva por D1 e D2.	a) E10 b) E10 c) E10
B – Marcou o item e não justificou		a) E2, E3, E4, E5, E9, E12 b) E1, E3, E9 c) E2, E3, E4, E5, E11, E12 d) E2, E3, E9, E12
C – Não Marcou, porém justificou	C1 - apresentou um contraexemplo utilizando erroneamente a propriedade comutativa na multiplicação de matrizes.	d) E8
	C2 – escreveu que 0 (zero) não pertence a este conjunto e nem a multiplicação por escalar.	d)E13
	C3 – demonstrou a partir de um contraexemplo de que a soma dos vetores não está no Espaço Vetorial M_2. Utilizou símbolos para representar conjuntos, vetores e matrizes.	d) E6, E7
	C4 - Demonstrou utilizando as propriedades: comutativa, associativa, elemento neutro e elemento oposto, e verificou que não tem o elemento oposto. Para isso usou símbolos para representar conjuntos, matrizes, vetores, elementos de uma matriz e axiomas.	d) E10
D – Não marcou e não justificou		a) E1, E11 b) E2, E4, E5, E11, E12 c) E9 d) E4, E5, E11

Fonte: Do autor

Em cada agrupamento ou subagrupamento listamos os registros escritos referentes aos estudantes em cada item na coluna: Item/registros escritos, por exemplo, o estudante E7 manifestou o subagrupamento A1 nos itens *a*, *b* e *c*, e no item *d* o subagrupamento C7.

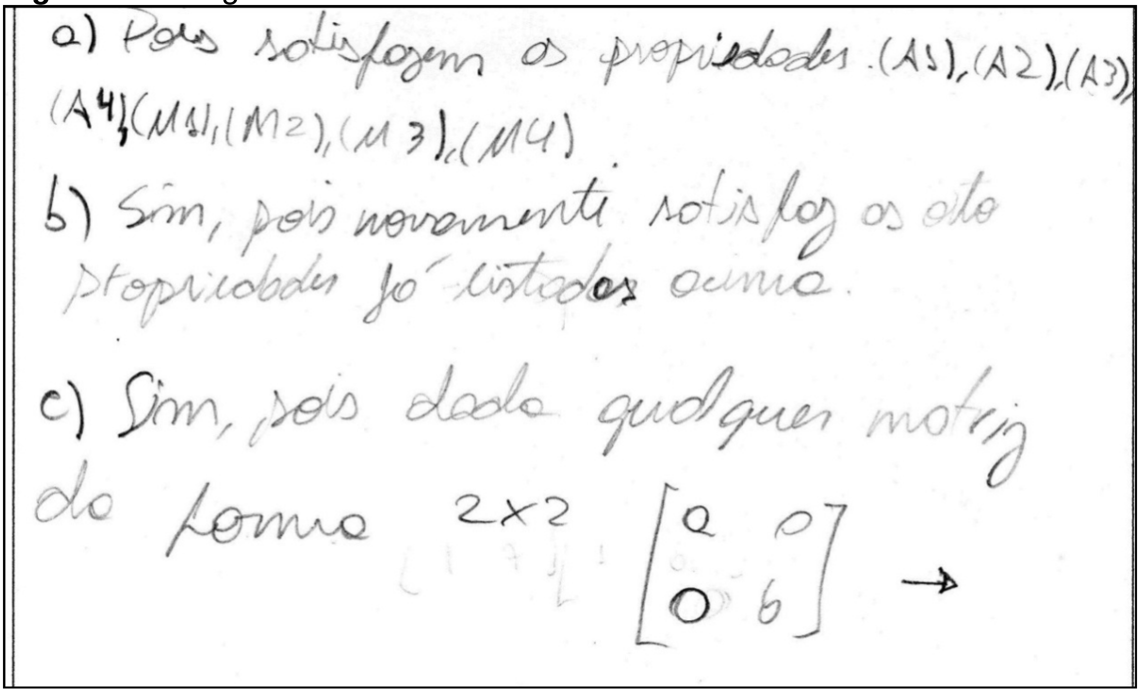
Para os três primeiros itens vemos que emergiram subagrupamentos exclusivos dos estudantes. Por exemplo, o agrupamento A, que são os dos registros escritos que assinalaram o item e o justificaram, os subagrupamentos A2, A3, A4 e A5, são exclusivos dos estudantes E8, E13, E6, E10, respectivamente. Já para o quarto item para o agrupamento C, não marcou e justificou, temos três subagrupamentos exclusivos dos estudantes, C1, C2 e C4, que são de E8, E13 e E10, respectivamente. Isso se deu, pois justificaram de maneiras semelhantes para os três primeiros itens que são espaços vetoriais, e de uma maneira diferente para o quarto item que não é espaço vetorial. Desse modo, podemos concluir que os estudantes E8, E10 e E13 souberam responder a tarefa.

Podemos afirmar que os estudantes E6 e E7, também souberam responder a tarefa, marcando corretamente os itens da tarefa, pois E6 justificou os três primeiros itens como espaços vetoriais, sendo que para o item *a*, escreveu que as propriedades são satisfeitas nele, para os itens *b* e *c*, os considerou como subespaços vetoriais e para o item *d*, deu um contraexemplo. Já E7, justificou os três primeiros itens de mesmo modo, os quais todas as propriedades são satisfeitas e para o quarto item com um contraexemplo.

Para os estudantes E1, E2, E3, E4, E5, E9, E11 e E12 inferimos que não souberam responder a tarefa, pois primeiramente não assinalaram corretamente os conjuntos que são espaços vetoriais e não justificaram suas escolhas, com exceção de E1. Já E1, justificou dizendo que os itens *c* e *d* são espaços vetoriais, pois se comportam de acordo com as oito propriedades, porém esta justificação só é aceita para o item c, já que o item d não é um espaço vetorial. Desse modo, inferimos características do Pensamento Matemático Avançado nos registros escritos de E6, E7, E8, E10 e E13.

Dos cinco estudantes, todos manifestaram os processos de representação simbólica e mental, pois utilizaram símbolos para referir a vetores, escalares, conjuntos, espaços vetoriais, e matrizes. Podemos verificar isso no registro escrito do estudante E8 (figura 15).

Figura 15 – Registro escrito de E8 referente à tarefa 2


a) Pois satisfazem as propriedades (A1), (A2), (A3), (A4), (M1), (M2), (M3), (M4)

b) Sim, pois novamenti satisfaz as oito propriedades já listadas acima.

c) Sim, pois dada qualquer matriz da forma 2x2 $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ →

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E8

O estudante separa por símbolos A1, A2, A3 e A4, os axiomas relativos à operação de adição, e por M1, M2, M3 e M4, referentes à operação de multiplicação por escalar. Com isso, podemos inferir que além de representar simbolicamente o estudante também apresenta relações por trás dos símbolos, as quais se referem aos axiomas necessários para a definição de espaço vetorial, assim apresentando indícios de alguma representação mental. Porém, o estudante não respondeu a tarefa 1 por completa, a partir disso podemos inferir que o estudante não manifesta outros processos do Pensamento Matemático Avançado em relação a essa tarefa.

Dois estudantes manifestaram o processo de mudança de representações e alternância entre elas, E6 e E10, pois representaram elementos de um espaço vetorial por meio de pares ordenados e por matrizes. Com isso, mostraram saber o momento de efetuar a mudança de uma representação para outra, a fim de se tornar a nova representação mais eficiente para a resolução da tarefa, assim, houve a auto-regulação da aprendizagem por parte do estudante, que Resnick (1987) classifica como característica do Pensamento de Ordem Superior. Vejamos o registro escrito do estudante E6 (figura 16).

Figura 16 – Registro escrito de E6 referente à tarefa 2

a) As 8 propriedades são satisfeitas por este conjunto de todos os reais x, pois já estão definidas, logo é espaço vetorial.

b) seja $u=(x_1,0)$ e $v=(x_2,0) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$u+v=(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0) \in \mathbb{R}^2$$

seja $\alpha \in \mathbb{R}$, um escalar qualquer, assim

$$\alpha u = \alpha(x_1,0) = (\alpha x_1, \alpha 0) = (\alpha x_1, 0) \in \mathbb{R}^2$$

logo o conjunto de todos os pares de nº reais da forma $(x,0)$ é um subespaço vetorial, sendo assim, ele também é um espaço vetorial

c) O processo é análogo ao b). Tome $A=\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$

$A+B=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & 0 \\ 0 & b_1+b_2 \end{bmatrix} \in M_2$ e $\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & 0 \\ 0 & \alpha b_1 \end{bmatrix} \in M_2$. Logo se é subesp. também é espaço vetorial

d) Esse espaço não é um espaço vetorial pois tome $\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & b_1 \end{bmatrix} = A$ e $B=\begin{bmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow A+B=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & 2 \\ 2 & b_1+b_2 \end{bmatrix} \notin M_2$ da forma definida. se não é subesp. então não é espaço vetorial.

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E6

Verificamos que o estudante utiliza o mesmo processo para resolver os três primeiros itens. No item *b* utiliza a representação de par ordenado, e no *c* a representação de matrizes, em ambos os casos as representações são utilizadas para provar que o conjunto é um espaço vetorial por meio das propriedades necessárias para ser um subespaço vetorial. No item *d*, utiliza a representação de matrizes como um contraexemplo para determinar que o conjunto não seja um espaço vetorial.

No processo de representação de modelação, apenas um estudante manifestou, que é o estudante E10. Esse estudante construiu uma estrutura matemática que incorporou as características (oito axiomas) para determinar se é um espaço vetorial e foi testando cada um para provar que os conjuntos são espaços ou não. Vejamos o seu registro escrito (figura 17).

Figura 17 – Registro escrito de E10 referente à tarefa 2, item *a*

a) $\mathbb{R} = \{x ; x \in \mathbb{R}\}$

Sejam $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$S_1)$ $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$

$S_2)$ $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$

$S_3)$ $x_1 + 0 = x_1$

$S_4)$ $x_1 + (-x_1) = 0$

$M_1)$ $(\alpha \beta) x_1 = \alpha(\beta x_1)$

$M_2)$ $x_1 . 1 = x_1$

$D_1)$ $\alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$

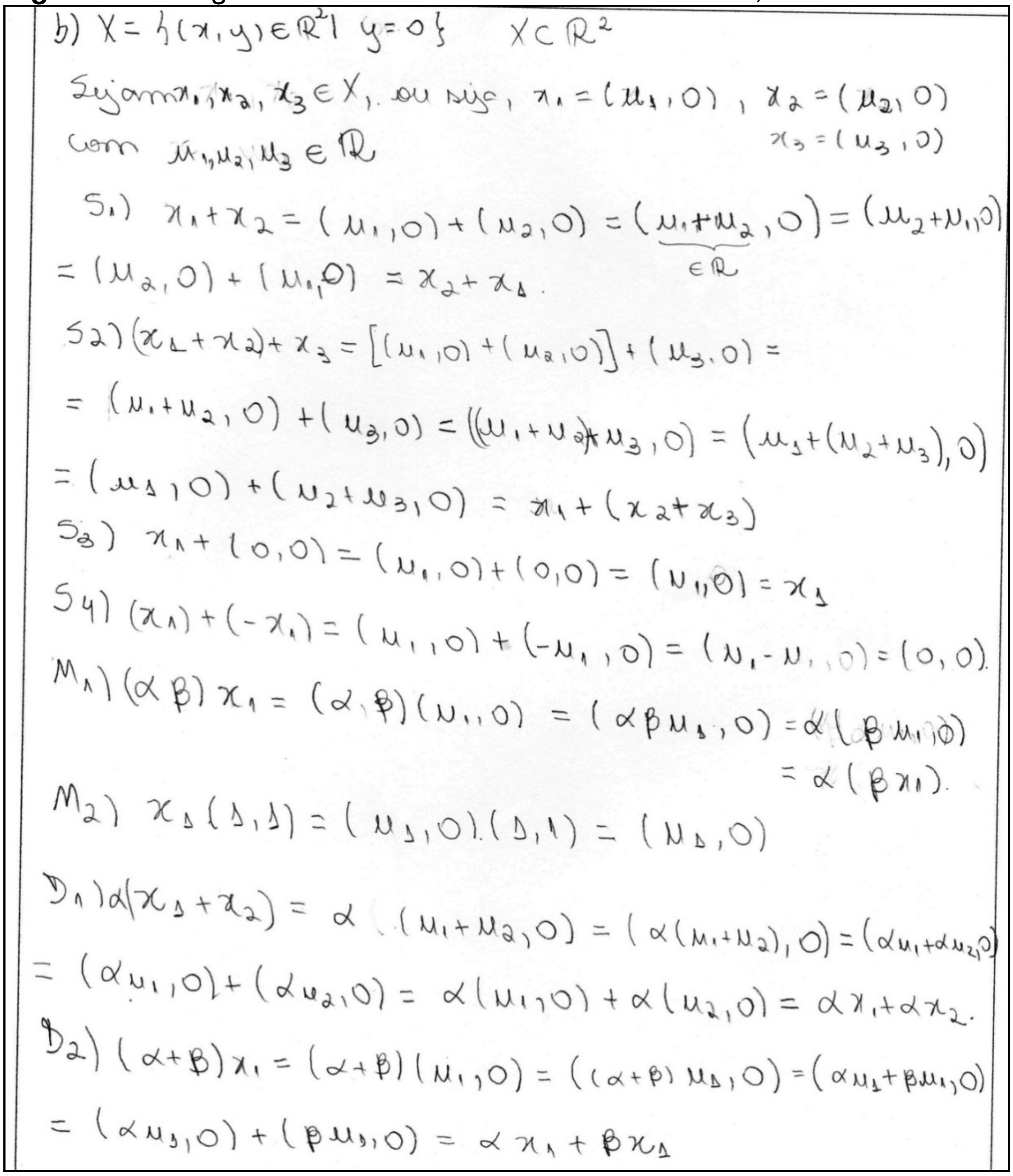
$D_2)$ $(\alpha + \beta) x_1 = \alpha x_1 + \beta x_1$

São válidos pelas operações usuais de $\mathbb{R}$. ($\mathbb{R}$ é corpo)

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E10

Podemos observar os oito axiomas separados pelas operações de adição e multiplicação por escalar, os quatro primeiros referem à adição, os quatro últimos a multiplicação por escalar. A partir dessa estrutura construída, que foi realizada primeiramente na tarefa 1, em resposta a pergunta: “o que é um espaço vetorial?”, o estudante realiza os demais itens, provando um por um e chega a resolução da tarefa, marcando os três primeiros itens. Como podemos verificar na resolução do item *b* (figura 18).

Figura 18 – Registro escrito de E10 referente à tarefa 2, item *b*



b) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ $\quad X \subset \mathbb{R}^2$

Sejam $x_1, x_2, x_3 \in X$, ou seja, $x_1 = (u_1, 0)$, $x_2 = (u_2, 0)$

com $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$ $\quad x_3 = (u_3, 0)$

S1) $x_1 + x_2 = (u_1,0) + (u_2,0) = (\underbrace{u_1+u_2}_{\in \mathbb{R}}, 0) = (u_2+u_1, 0)$

$= (u_2, 0) + (u_1, 0) = x_2 + x_1$.

S2) $(x_1+x_2)+x_3 = [(u_1,0)+(u_2,0)] + (u_3,0) =$

$= (u_1+u_2, 0) + (u_3, 0) = ((u_1+u_2)+u_3, 0) = (u_1+(u_2+u_3), 0)$

$= (u_1, 0) + (u_2+u_3, 0) = x_1 + (x_2+x_3)$

S3) $x_1 + (0,0) = (u_1,0)+(0,0) = (u_1, 0) = x_1$

S4) $(x_1) + (-x_1) = (u_1, 0) + (-u_1, 0) = (u_1 - u_1, 0) = (0,0)$.

M1) $(\alpha\beta)x_1 = (\alpha,\beta)(u_1,0) = (\alpha\beta u_1, 0) = \alpha(\beta u_1, 0)$

$= \alpha(\beta x_1)$.

M2) $x_1(1,1) = (u_1,0).(1,1) = (u_1, 0)$

D1) $\alpha(x_1+x_2) = \alpha\,(u_1+u_2, 0) = (\alpha(u_1+u_2), 0) = (\alpha u_1 + \alpha u_2, 0)$

$= (\alpha u_1, 0) + (\alpha u_2, 0) = \alpha(u_1,0) + \alpha(u_2,0) = \alpha x_1 + \alpha x_2$.

D2) $(\alpha+\beta)x_1 = (\alpha+\beta)(u_1,0) = ((\alpha+\beta)u_1, 0) = (\alpha u_1 + \beta u_1, 0)$

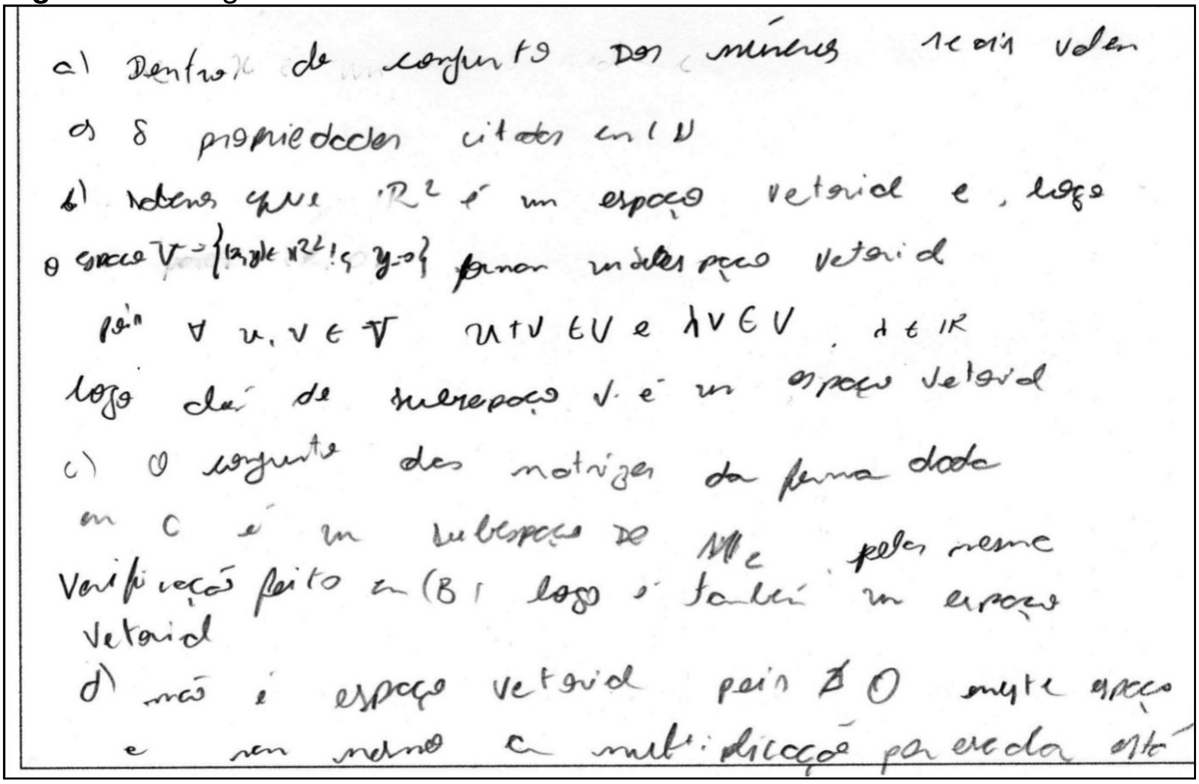
$= (\alpha u_1, 0) + (\beta u_1, 0) = \alpha x_1 + \beta x_1$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E10

Em relação aos processos de abstração, três estudantes, E7, E10 e E13, manifestaram ao menos um processo, E13 manifestou ambos e E7 e E10 manifestaram a síntese.

E13 apresentou indícios de generalização, pois utilizou o conceito de subespaço vetorial para determinar se o conjunto é um espaço vetorial. A partir de informações da tarefa: “o conjunto de todos os pares de números reais na forma (x,0) com as operações usuais de R^2”, e sabendo que R^2 é um espaço vetorial, generalizou pontos em comum para o conjunto utilizando as propriedades necessárias para determinar um subespaço vetorial, que são **u** + **v** está em V e c**v** está em *V*, e desse modo expandiu os domínios de validade, afirmando que o conjunto por ser um subespaço vetorial, consequentemente é um espaço vetorial, e dessa forma não há a necessidade de provar os oito axiomas, que já haviam sido descrito por ele na tarefa anterior. Vejamos o registro escrito do estudante E13 (figura 19).

Figura 19 – Registro escrito de E13 referente à tarefa 2

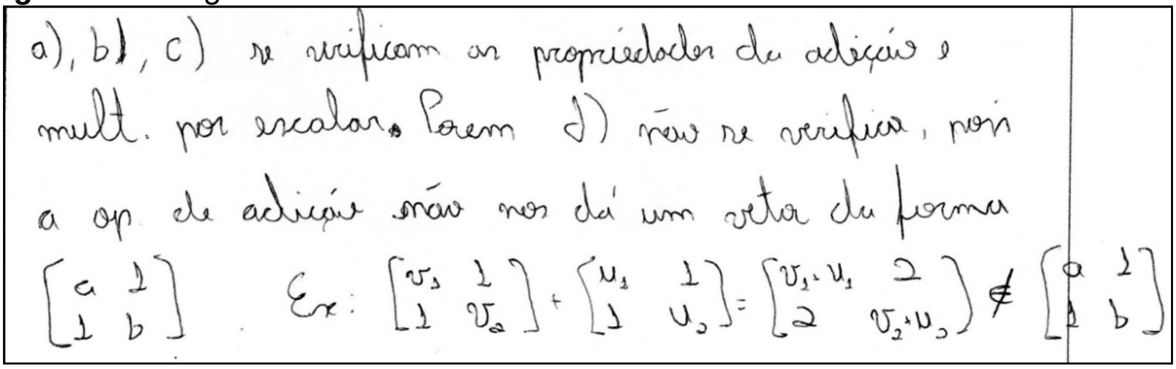


Fonte: Resolução entregue pelo estudante E13

Transcrevendo o item *b* da tarefa 2 de E13: "Sabemos que R^2 é um espaço vetorial e, logo o espaço $V = \{(x,y) \in R^2 \text{ tal que } y = 0\}$ formam um subespaço vetorial pois $\forall\, u,v \in V\ u+v \in V$ e $\lambda v \in V,\quad \lambda \in \mathbb{R}$ logo daí de um subespaço vetorial V é um espaço vetorial".

Para o processo de síntese, podemos inferir que o estudante que a partir do momento que combinou partes, utilizando as propriedades de espaço vetorial a fim de resolver a tarefa, formou o todo, manifestando o processo de síntese. Um exemplo são as resoluções do item *d*, pois utilizando os axiomas, um por um, até identificar que para uma ou mais propriedades não são válidas, como o estudante E10 realizou, ou verificando de imediato que o vetor nulo não está nesse conjunto e que a multiplicação por escalar também não, como E13 fez, ou citando um contraexemplo utilizando a soma de vetores, como realizou E7, esses três estudantes conseguiram concluir a resolução para a tarefa, combinando as propriedades de espaços vetoriais. Vejamos a resolução de E7 (figura 20).

Figura 20 – Registro escrito de E7 referente à tarefa 2



Fonte: Resolução entregue pelo estudante E7

Subtende-se que E7 soube responder a tarefa 2, apesar de não ter justificado com rigor os itens *a*, *b* e *c*, e no item *d* se equivocou ao denotar o símbolo $\notin$ (não pertence), que neste caso o símbolo correto seria o de $\neq$ (diferente), pois na tarefa 1 escreveu a definição praticamente completa de espaço vetorial, faltando apenas um axioma, o de número oito na definição adotada de Polle (2004), e além disso, identificou corretamente quais conjuntos são espaços vetoriais, e apresentou um contraexemplo para o que não é.

Podemos assim inferir que cinco dos treze estudantes analisados apresentaram características referentes aos processos do Pensamento Matemático Avançado. E que destes cinco, três manifestaram também processos de abstração que são a generalização e a sintetização, E7, E10 e E13. Já o processo de visualização nenhum dos estudantes manifestou como na tarefa anterior, pois para este é necessário que utilizem de uma imagem para que esta gere uma representação mental do conceito.

O quadro seguinte (quadro 11) apresenta as características manifestadas dos processos do Pensamento Matemático Avançado pelos estudantes nas resoluções da tarefa dois.

Quadro 11 – Características dos processos do PMA em relação à tarefa 2

T2	Características evidenciadas dos processos do PMA	Registros escritos
R1	Representam simbolicamente elementos de um espaço vetorial, vetores, escalares, conjuntos, espaços vetoriais, e matrizes, manipulando-os algebricamente.	E6, E7, E8, E10, E13
R2	Manipulando algebricamente elementos de cada um dos axiomas, a fim de provar que os conjuntos são espaços vetoriais, demonstram compreender as relações que estão por trás disso, ou seja, objeto visual-espacial se tornando visual mental.	E6, E7, E8, E10, E13
R4	Utilizam mais de uma representação para o conceito, integrando-as e mudando para uma mais eficiente quando necessário, ou seja, auto-regulação de sua aprendizagem.	E6, E10
R5	Construiu uma estrutura matemática que incorporou as características dos oito axiomas para determinar se é um conjunto é um espaço vetorial.	E10
A1	Generalizou quando utilizou as propriedades necessárias para determinar um subespaço vetorial, expandindo os domínios de validade, concluindo se o conjunto é um espaço vetorial.	E13
A2	Combinando elementos que fazem parte de espaço vetorial ou de um subespaço vetorial, formando partes a fim de construir o todo, provar se o conjunto é um espaço vetorial.	E7, E10, E13

Fonte: Do autor

4.1.4 Análise da Tarefa 3

A tarefa:

O que é uma transformação linear? Explique.

Foram analisados treze registros escritos da tarefa 3. Das resoluções emergiram quatro agrupamentos, A, B, C, e D, e seis subagrupamentos de A e C, A1, A2 e A3, e C1, C2 e C3, todos excludentes, pois não há registro escrito que se encaixe em mais de um agrupamento ou subagrupamento. Vejamos o quadro a seguir (quadro 12) que apresenta os agrupamentos e subagrupamentos da tarefa 3.

Quadro 12 – Agrupamentos e subagrupamentos da tarefa 3

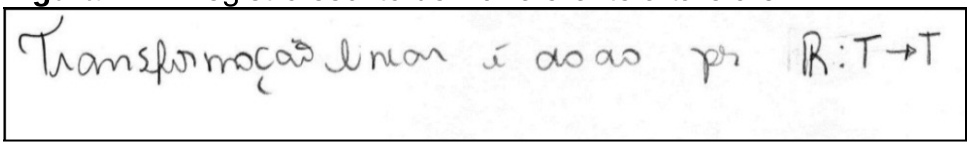
<table>
<tr><th>Agrupamentos</th><th>Subagrupamentos</th><th>Registros escritos</th></tr>
<tr><td rowspan="3">A – Apresentou a definição completa do conceito. Utilizou símbolos para representar vetores, escalares e conjuntos.</td><td>A1 – Escreveu as duas propriedades da definição de transformações lineares.</td><td>E13</td></tr>
<tr><td>A2 – Escreveu a combinação das duas propriedades da definição de transformações lineares.</td><td>E7</td></tr>
<tr><td>A3 – Escreveu as duas propriedades da definição de transformações lineares e a combinação delas.</td><td>E8</td></tr>
<tr><td colspan="2">B – Apresentou a definição incompleta do conceito. Utilizou símbolos para representar vetores, escalares e conjuntos. Escreveu as duas propriedades da definição de transformações lineares, porém faltou definir que a transformação linear ocorre entre espaços vetoriais e a escrita simbólica estava incorreta.</td><td>E10</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C – Apresentou uma resposta incompleta, justificando com suas palavras.</td><td>C1 - Escreveu uma noção do que são as duas relações.</td><td>E5, E6</td></tr>
<tr><td>C2 – Não apresentou propriedades e/ou relações para explicar o que é uma</td><td>E1, E4, E9</td></tr>
</table>

	transformação linear.	
D - Não respondeu a tarefa.		E2, E3, E11, E12

Fonte: Do autor

Dos treze estudantes, três, E7, E8 e E13, apresentaram uma resolução completa da tarefa, utilizando a definição de transformações lineares, e um estudante, E10, utilizou a definição, porém faltando alguns detalhes. Dois dos estudantes que responderam parcialmente escrevendo com suas palavras, E5 e E6, têm uma noção do que é uma transformação linear, pois citaram alguns elementos que fazem parte da definição. Quatro estudantes não responderam a tarefa, E2, E3, E11 e E12, e três, E1, E4 e E9, não apresentaram relações significativas com o conteúdo em suas respostas. Um exemplo é o registro escrito do estudante E9 (figura 21).

Figura 21 – Registro escrito de E9 referente à tarefa 3

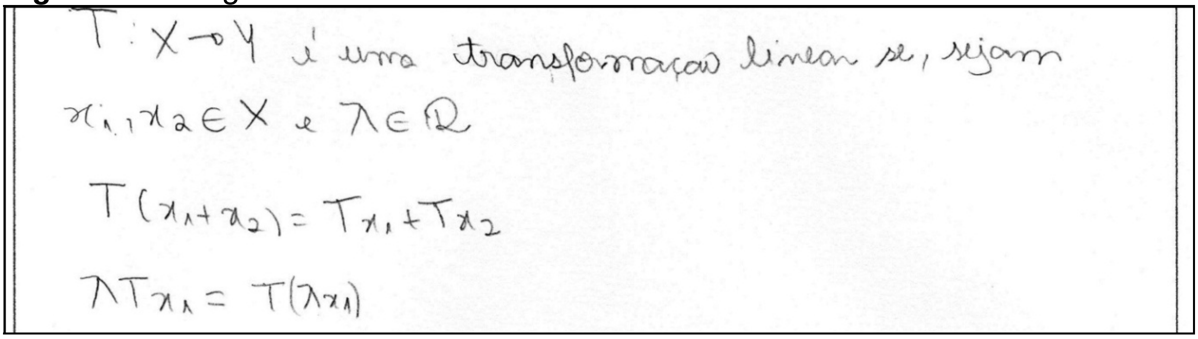


Fonte: Resolução entregue pelo estudante E9

Desse modo, dos treze estudantes, quatro apresentaram resoluções significativas para inferirmos as características dos processos do Pensamento Matemático Avançado, E7, E8, E10 e E13. Vejamos.

Os quatro estudantes apresentaram o processo de representação simbólica, pois escreveram símbolos para denotar elementos de uma transformação linear, sendo para representar vetores, escalares, espaços vetoriais, conjuntos e aplicações, como podemos verificar no registro escrito do estudante E10 (figura 22).

Figura 22 – Registro escrito de E10 referente à tarefa 3



$T: X \to Y$ é uma transformação linear se, sejam $x_1, x_2 \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2$

$\lambda T x_1 = T(\lambda x_1)$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E10

Podemos ver que o estudante utiliza letras maiúsculas: T, para representar uma transformação; X, Y e R, para simbolizar conjuntos; usa letras minúsculas com coeficientes numéricos, x_1 e x_2, representando elementos que sofrem a transformação linear, e a letra grega λ , representa um escalar. Porém E10 não define que "X" e "Y" precisam ser espaços vetoriais, além disso, faltam parênteses nas duas propriedades, ou seja, ficaria correto se escrevesse

$$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2) \text{ e } \lambda T(x_1) = T(\lambda x_1).$$

Já na resolução do estudante E7, podemos dizer que para ele os elementos que sofrem a transformação linear são vetores, as letras maiúsculas simbolizam os conjuntos de espaços vetoriais e a letra grega α é um escalar que pertence a um corpo K. Isso porque em sua resolução o estudante escreve que uma transformação linear é uma aplicação em espaços vetoriais e deixa explícita a condição necessária para isso, resumindo na combinação das duas relações em uma. Nesse caso, dizemos então que as representações simbólicas, também são representações mentais, pois estão entrelaçadas com suas propriedades a fim de compor um objeto maior que é a definição de transformações lineares. Os estudantes E7, E8, E10 e E13 apresentaram indícios do processo de representação mental. Vejamos o registro escrito de E7 (figura 23).

Figura 23 – Registro escrito de E7 referente à tarefa 3

Uma aplicação $T: V \rightarrow W$ que leva elementos de um espaço vetorial V para outro espaço vetorial W é uma transformação linear, se, e somente se, para quaisquer $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$T(\alpha u + v) = T(v) + \alpha . T(u)$$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E7

Para o processo de modelação, três estudantes, E7, E8 e E13, o manifestaram em suas resoluções referente à tarefa 3, pois construíram uma estrutura que incorpora as características de um objeto o qual nesse caso, é o de transformações lineares, ao concluírem de forma coerente a definição para transformações lineares. Vejamos o registro escrito de E13 (figura 24).

Figura 24 – Registro escrito de E13 referente à tarefa 3

uma transformação linear (ou aplicação linear) t é uma operação que conserva a reta em um espaço V. consiste em uma função aplicada em um vetor Denotada por

$t: U \rightarrow V$ onde U, V são espaços vetoriais
$u \rightarrow t(u)$ $v \in U$ e $t(u) \in V$. com as

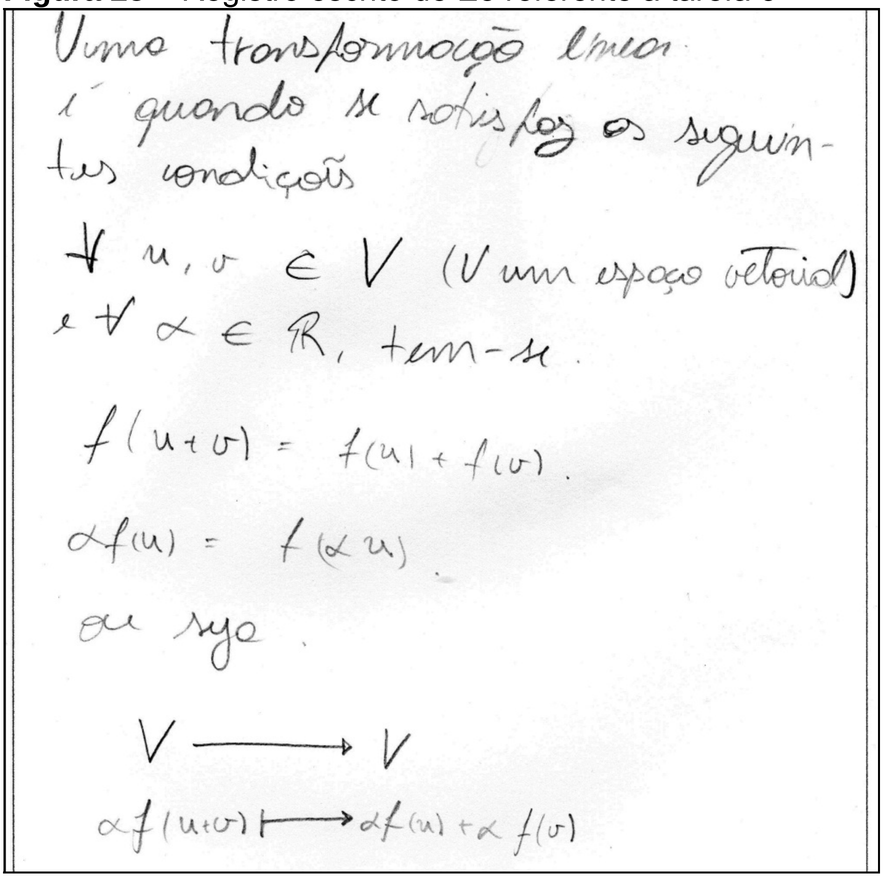
seguintes propriedades

$t(u+v) = t(u) + t(v)$ $\forall\, u, v \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$
e $\lambda t(v) = t(\lambda v)$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E13

Três estudantes manifestaram o processo de mudança de representações e alternância entre elas, E7, E8 e E13. Dois utilizaram a linguagem natural e algébrica para responder a tarefa, E7 e E13, enquanto o estudante E8 escreveu as duas condições distintas e a combinação delas para ser uma transformação linear. Ter várias representações de um mesmo conceito e saber utilizá-las em conjunto, interligadas, é um caminho que pode levar o estudante à abstração do conceito. De acordo com Dreyfus (2002), um caminho para a abstração é passar pelas fases de representação, a qual o autor separa em quatro fases, nesse caso, portanto, podemos inferir que esses estudantes passaram por elas. Vejamos a resolução do estudante E8 (figura 25).

Figura 25 – Registro escrito de E8 referente à tarefa 3



Uma transformação linear é quando se satisfaz os seguintes condições

$\forall\, u, v \in V$ (V um espaço vetorial) e $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, tem-se.

$f(u+v) = f(u) + f(v)$.

$\alpha f(u) = f(\alpha u)$.

ou seja.

$V \longrightarrow V$

$\alpha f(u+v) \longmapsto \alpha f(u) + \alpha f(v)$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E8

Nesse registro escrito podemos ver que o estudante descreve um operador linear de *V*, pois utiliza para denotar a transformação a notação $V \rightarrow V$. Não é necessário que seja dessa maneira, pois é um caso específico de transformação linear que pode ser de contração ou dilatação.

Na resolução de E8, além dos processos de representação citados, o estudante manifesta dos processos de abstração, a generalização e a sintetização. Generalizou quando, a partir das duas condições expressas para ser uma transformação linear, identificou pontos em comum e formou apenas uma condição abrangendo as duas. E sintetizou combinando as partes de tal modo que formou a definição de transformações lineares.

E8 foi o único a apresentar a generalização na resolução da tarefa três, e E7, E8, e E13 manifestaram o processo de síntese, pois conseguiram combinar partes a fim de formar um todo que é a definição de transformações lineares. Já para o processo de visualização, não o inferimos em nenhum registro escrito referente a essa tarefa. O quadro seguinte (quadro 13) apresenta quais foram as características dos processos manifestados pelos estudantes nas resoluções da tarefa três.

Quadro 13 – Características dos processos do PMA em relação à tarefa 3

T3	Características evidenciadas dos processos do PMA	Registros escritos
R1	Escrevem símbolos para denotar elementos de uma transformação linear, sendo para representar vetores, escalares, espaços vetoriais, conjuntos e aplicações.	E7, E8, E10, E13
R2	Os símbolos estão entrelaçados com suas propriedades a fim de compor um objeto maior que é a definição de transformações lineares	E7, E8, E10, E13
R4	Utilizam mais de uma representação para o conceito, integrando-as a fim de resolver a tarefa.	E7, E8, E13
R5	Construiu uma estrutura matemática que incorporou as características do objeto, que é a definição do conceito de transformações lineares.	E7, E8, E13
A1	Generalizou quando a partir das duas relações expressas para ser uma transformação linear, identificou pontos em comum, formando apenas uma.	E8
A2	Combinando elementos que fazem parte de uma transformação linear formou partes a fim de construir o todo,	E7, E8, E13

	a definição do conceito.	

Fonte: Do autor

4.1.5 Análise da Tarefa 4

A tarefa:

Há alguma relação entre o conteúdo de transformações lineares e os outros conteúdos da disciplina de álgebra linear, como matrizes e determinantes? Outros? E com outras disciplinas do curso de graduação em Matemática? Explique.

Nessa tarefa foram analisados 13 registros escritos. Como existe mais de uma pergunta na tarefa quatro, separamos em duas partes para a realização das análises. Na primeira parte, a pergunta: *há alguma relação entre o conteúdo de transformações lineares e os outros conteúdos da disciplina de álgebra linear, como matrizes e determinantes? Outros?* E na segunda: *E com outras disciplinas do curso de graduação em Matemática?* Com isso obtemos dois quadros que representam os agrupamentos e subagrupamentos referentes a cada etapa.

O quadro a seguir mostra os agrupamentos relacionados com a primeira parte. Emergiram quatro agrupamentos, A, B, C e D, e seis subagrupamentos, A1, A2, A3, B1, B2 e B3, todos excludentes, pois cada resolução da tarefa quatro se encaixa em apenas um agrupamento ou subagrupamento. Vejamos o quadro 14.

Quadro 14 – Agrupamentos e subagrupamentos da tarefa 4, primeira parte

Agrupamentos	**Subagrupamentos**	**Registros escritos**
A - Respondeu que sim e justificou apresentando um exemplo adequado com algumas relações.	A1 - Apresentou um exemplo de isomorfismo, escrevendo elementos de sua definição.	E13
	A2 - Apresentou um exemplo de uma matriz com alguns de seus elementos, utilizou símbolos para isso.	E7, E8
	A3 - Apresentou um exemplo de determinantes e alguns de seus elementos.	E10
B - Respondeu que sim e justificou apresentando um exemplo.	B1 - Citou o exemplo de matriz e determinante.	E5
	B2 - Citou o exemplo de transformações matriciais.	E6
	B3 - Citou o exemplo de vetores, matrizes e polinômios.	E1
C - Respondeu que sim, e não apresentou um exemplo.		E3, E4, E9
D - Não respondeu.		E2, E11, E12

Fonte: Do autor

O próximo quadro (quadro 15) representa os agrupamentos e subagrupamentos referentes à segunda etapa da análise da tarefa quatro. Emergiram três agrupamentos, F, G e H, e cinco subagrupamentos, F1, F2, F3, F4 e F5, todos excludentes, pois cada resolução se encaixa apenas em um agrupamento ou subagrupamento.

Quadro 15 – Agrupamentos e subagrupamentos da tarefa 4, segunda parte

Agrupamentos	**Subagrupamentos**	**Registros escritos**
F - Respondeu que o conteúdo de transformações lineares tem relação com outras disciplinas.	F1 - Citou como exemplo as disciplinas de estruturas algébricas e cálculo avançado.	E1
	F2 - Citou o exemplo do conteúdo de funções em cálculo.	E6
	F3 - Apresentou o exemplo em cálculo avançado, utilizou símbolos para isso.	E10
	F4 - Apresentou um exemplo em cálculo de funções deriváveis.	E13
	F5 - Não apresentou um exemplo.	E7, E4
G - Respondeu que não existe uma relação com outras disciplinas.		E3
H - Não soube informar.		E2, E5, E8, E9, E11, E12

Fonte: Do autor

Em relação à primeira parte da tarefa, dez estudantes de treze, responderam que existe relação entre o conteúdo de transformações lineares e outros da álgebra linear, porém nem todos justificaram a sua resposta. Podemos observar que quatro estudantes, E7, E8, E10 e E13, responderam mostrando relações do conteúdo de transformações lineares com outros da disciplina de álgebra linear, utilizando elementos que fazem parte desse conteúdo. Três estudantes, E1, E5 e E6, disseram que existe uma relação, mas não a explicaram, apenas citaram exemplos. Três responderam que sim, E3, E4 e E9, mas não justificaram suas respostas e três responderam que não, E2, E11 e E12, sem justificação também.

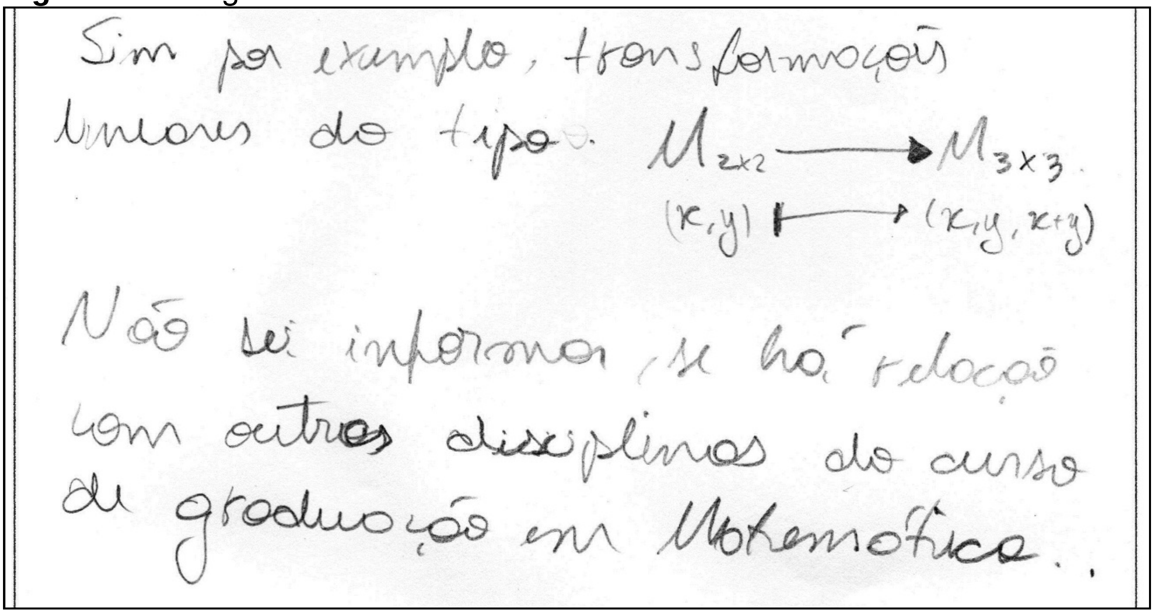
Para a segunda parte, seis estudantes disseram que o conteúdo de transformações lineares tem relação com outros de outras disciplinas do curso, sendo que quatro apresentaram um exemplo, E1, E6, E10 e E13, e dois não justificaram, E7 e E4. O estudante E3, respondeu que não existe relação e seis estudantes não responderam, E2, E5, E8, E9, E11 e E12.

Em ambas as partes da tarefa quatro, verificamos se havia indícios de características dos processos do Pensamento Matemático Avançado, as quais não analisamos separadamente, mas como um registro único de cada estudante.

Os processos evidenciados nas resoluções da tarefa quatro foram somente de representação simbólica, mental e mudanças de representações e alternância entre elas. Dos treze estudantes, seis manifestaram características dos processos do Pensamento Matemático Avançado, E1, E6, E7, E8, E10 e E13.

Para o processo de representação simbólica, quatro estudantes apresentaram-no em suas resoluções, E7, E8, E10 e E13. Utilizaram símbolos para denotar um exemplo de transformações lineares, como verifica-se no registro escrito do estudante E8 (figura 26).

Figura 26 – Registro escrito de E8 referente à tarefa 4



Sim por exemplo, transformações lineares do tipo: $M_{2x2} \longrightarrow M_{3x3}$.

$(x,y) \longmapsto (x,y,x+y)$

Não sei informar, se há relação com outras disciplinas do curso de graduação em Matemática..

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E8

O estudante utiliza símbolos para fazer referência a uma transformação linear, como citado em seu registro escrito. Neste exemplo a notação $M_{2x2} \rightarrow M_{3x3}$ e $(x,y) \rightarrow (x,y,x+y)$, significa uma transformação de R^2 em R^3. A notação adequada seria: $T: R^2 \rightarrow R^3$ e $T(x,y) = (x,y,x+y)$.

Sete estudantes manifestaram o processo de representação mental, quatro utilizando símbolos e três sem utilizar símbolos. Vejamos o registro escrito de E13 (figura 27).

Figura 27 – Registro escrito de E13 referente à tarefa 4

Sim. por exemplo, se uma transformação
$T: V \to V$
$v \mapsto T(v)$ é injetora e sobrejetora temos um
isomorfismo e então dizemos que V e V
são espaços isomorfos e, ainda, através de T
um problema com solução aparentemente difícil
em V pode ser "levado" para V e tornar-se mais
fácil de ser resolvido, e não somente nesta
parte mas, o conteúdo de transformações
lineares aparece durante grande parte da disciplina de
álgebra linear. e ainda em outras matérias
como cálculo por exemplo podemos observar que
as funções também podem ser transformações lineares
como por exemplo a derivada é uma transformação
linear no espaço das funções deriváveis. e em
várias outras disciplinas do curso de graduação em matemática

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E13

Observamos na resolução de E13 a utilização do símbolo para denotar uma transformação, mas para explicar sua relação com outros conteúdos utiliza a linguagem natural e, por meio dela, apresenta a definição de isomorfismo de uma transformação linear, ou seja, representa um objeto matemático entrelaçado com algumas de suas propriedades (Dreyfus, 2002).

Podemos inferir que o estudante tem uma noção de que o conteúdo de transformações lineares está relacionado a outros da disciplina de álgebra linear, e também está relacionado com outros conteúdos de diferentes disciplinas de um curso de matemática.

Outra forma de manifestar uma representação mental é por meio da linguagem natural, e três estudantes apresentam esse processo sem a utilização de símbolo. Utilizando a linguagem natural eles descrevem uma noção do que seja o conceito e alguns elementos que fazem parte de uma transformação linear. Um exemplo é o estudante E6 (figura 28), o qual responde que esse conteúdo tem relações com outros da disciplina de álgebra linear e cita o exemplo de matrizes, que é o caso das transformações matriciais.

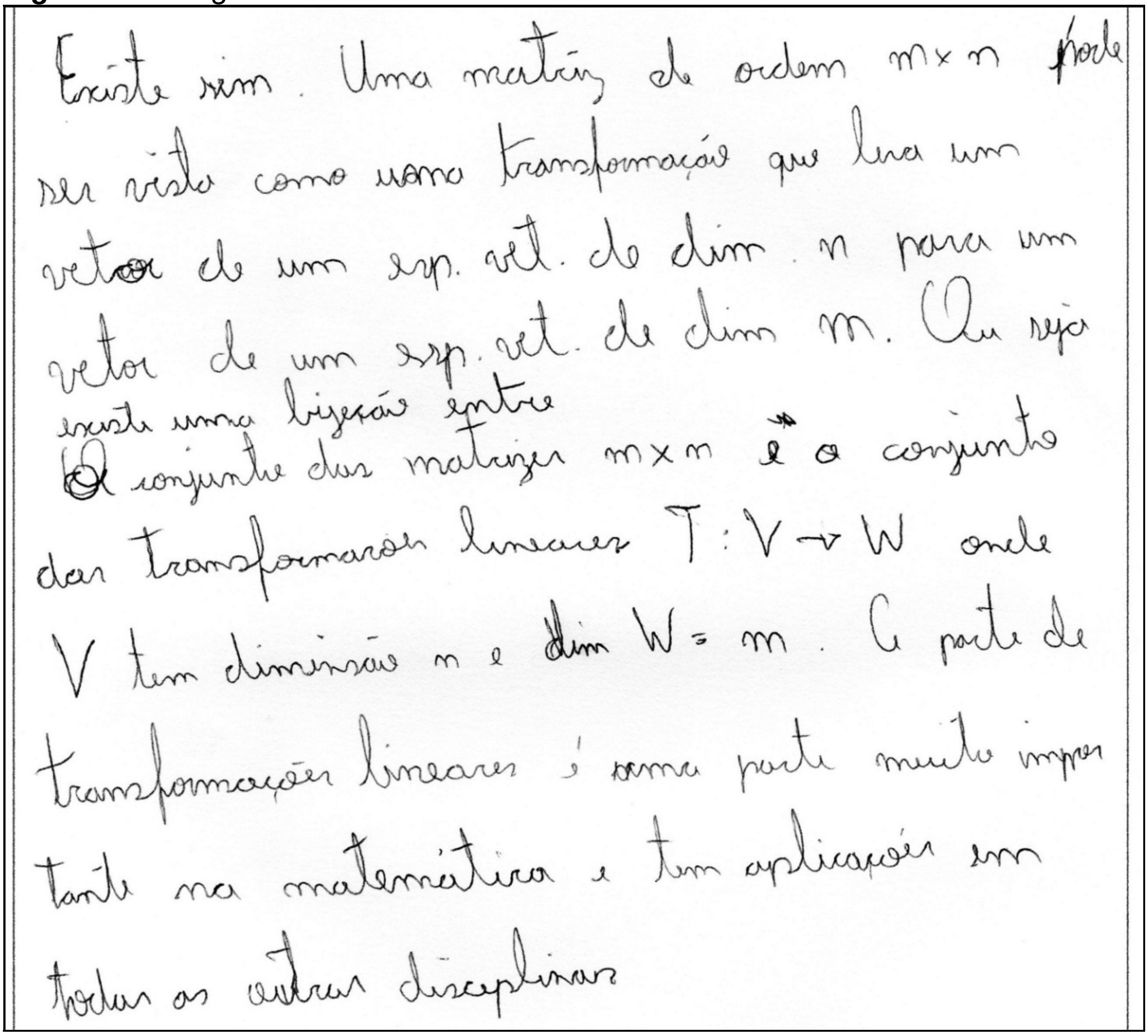
Figura 28 – Registro escrito de E6 referente à tarefa 4

Sim, pois em transformações lineares, trabalhamos
também com as matrizes, que são chamadas na maioria
das vezes de matrizes da transformação linear. Vimos
também em outras disciplinas, funções, que é um tipo
especial de transformações lineares, como em cálculo.

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E6

O estudante E7 além de manifestar a representação simbólica e mental também manifestou o processo de mudança de representações e alternância entre elas. Em seu registro escrito (figura 29) apresenta a linguagem natural e algébrica para dar um exemplo de que o conteúdo de transformações lineares tem relação com outros da álgebra linear, ou seja, tem mais de uma representação de um objeto matemático e trabalha com elas em conjunto, interligadas.

Figura 29 – Registro escrito de E7 referente à tarefa 4


Existe sim. Uma matriz de ordem m×n pode ser vista como uma transformação que leva um vetor de um esp. vet. de dim. n para um vetor de um esp. vet. de dim m. Ou seja existe uma bijeção entre o conjunto das matrizes m×n e o conjunto das transformações lineares T: V → W onde V tem dimensão n e dim W = m. A parte de transformações lineares é uma parte muito importante na matemática e tem aplicações em todas as outras disciplinas

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E7

Alguns dos processos do Pensamento Matemático Avançado não foram manifestados nos registros escritos dos estudantes na tarefa quatro, que são a visualização, a modelação, a generalização e a síntese. Conforme já mencionado seis estudantes apresentaram indícios dos processos do Pensamento Matemático Avançado em suas resoluções.

O quadro seguinte (quadro 16) apresenta quais foram as características dos processos manifestados pelos estudantes nas resoluções da tarefa quatro.

Quadro 16 – Características dos processos do PMA em relação à tarefa 4

T4	Características evidenciadas dos processos do PMA	Registros escritos
R1	Utilizam símbolos para denotar um exemplo de uma transformação linear.	E7, E8, E10, E13
R2	Utilizam símbolos ou a linguagem natural descrevem elementos, entrelaçados com algumas propriedades do conceito de uma transformação linear.	E1, E6, E7, E8, E10, E13
R4	Utiliza mais de uma representação para o conceito, linguagem natural e algébrica, integrando-as a fim de resolver a tarefa.	E7

Fonte: Do autor

4.1.6 Análise da Tarefa 5

A tarefa:

Marque qual(is) da(s) aplicação(ões) abaixo é (são) transformação(ões) linear(es)? Justifique.

a)( ) $T: R^2 \to R^2$ definida por: $T(x, y) = (-x, y)$

b)( ) $T: R^2 \to R^2$ definida por: $T(x, y) = (x + ky, y)$

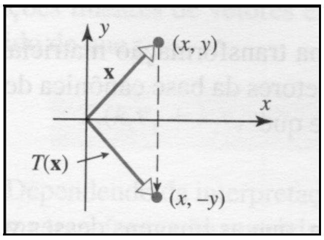
c)( ) $T: R^3 \to R^3$ definida por: $T(x, y, z) = (x, y, 0)$

d)( ) A rotação do R^2 no R^2.

e)( ) A translação do R^2 no R^2.

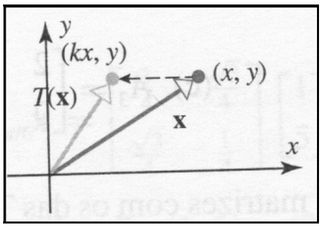
f)( ) O cisalhamento de R^2 de fator k na direção *x*.

g)( ) A ilustração abaixo



Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 252)

h)(   ) A ilustração abaixo



Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 257)

Cinco estudantes de treze justificaram suas respostas em relação à tarefa cinco, dois estudantes não responderam, e sete apenas assinalaram os itens que configuram como uma transformação linear. Dos estudantes que justificaram suas respostas, um estudante, E3, escreveu subjetivamente que todos os itens são transformações lineares, pois são rotações, translações ou cisalhamentos, porém translação não é uma transformação linear. Dois justificaram apenas alguns dos itens, E10 justificou os três primeiros itens, pelas duas propriedades, sendo que o primeiro item resolveu errado, não terminou o segundo e resolveu o terceiro; E13 justificou corretamente os itens *a*, *b*, *c* e *h*, e marcou os itens certos para transformações lineares. E6 respondeu a todos os oito itens, resolveu um item como exemplo e marcou que os outros itens, que são transformações, podem ser feitos de modo análogo. Já E7 respondeu a tarefa cinco na tarefa seis, assinalou que na tarefa cinco, os itens *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g* e *h*, os quais são transformações lineares, podem ser feitos da mesma maneira que foi realizada na tarefa seis, e na tarefa cinco apenas justificou o item "*e*" que não é uma transformação linear.

Diante das resoluções dessa tarefa, sentimos a necessidade de construir um quadro (quadro 17) que mostrasse quais itens foram marcados e justificados. Vejamos.

Quadro 17 – Itens respondidos e justificados na tarefa 5

Tarefa 5	**Marcou o item**								**Justificou o item**							
	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
E1	x		x	x	x		x	x								
E2																
E3	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
E4	x	x	x			x		x								
E5	x			x	x		x									
E6	x	x	x			x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
E7	x	x	x	x		x	x	x					x			
E8	x	x		x	x	x	x	x								
E9		x		x	x			x								
E10			x		x				x	x	x					
E11		x		x	x											
E12																
E13	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x					x

Fonte: Do autor

Desse modo os agrupamentos foram construídos a partir das resoluções dos estudantes que justificaram suas respostas, E3, E6, E7, E10 e E13, e daqueles que não justificaram suas respostas, E1, E2, E4, E5, E8, E9, E11, E12. Emergiram três agrupamentos e quatro subagrupamentos, sendo: A, B, C e A1, A2, B1 e B2, respectivamente. Todos são excludentes, pois a resolução de cada item só se encaixa em um agrupamento ou subagrupamento. Para a coluna: *registros escritos/itens*, cada item pertence apenas a um subagrupamento, por exemplo, o estudante E6 justificou todos os itens, porém seis itens *a*, *b*, *c*, *f*, *g*, e *h* se encontram no subagrupamento A2 e dois itens *d*, e *e,* encontram-se no B1. Vejamos o quadro 18.

Quadro 18 – Agrupamentos e subagrupamentos da tarefa 5

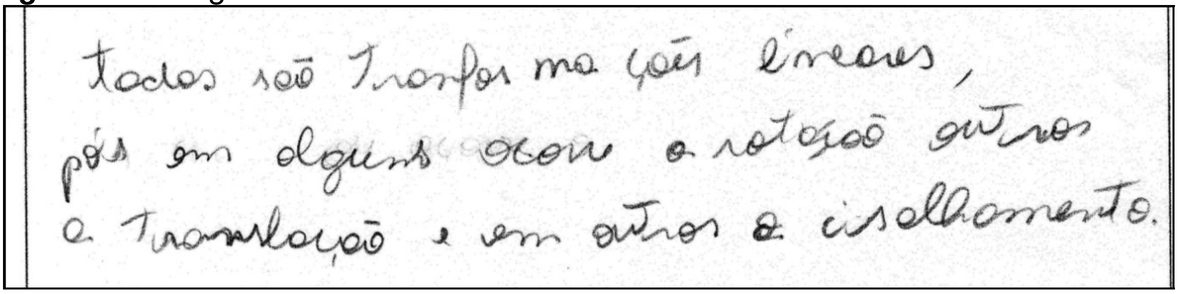
Agrupamentos	**Subagrupamentos**	**Registros escritos/ itens**
A – Justificou que são transformações lineares.	A1 - Escreveu que todas as alternativas são.	E3: todos
	A2 - Escreveu as duas propriedades para provar, utilizando símbolos para representar vetores, escalares, pares ordenados e a transformação linear.	E6: a, b, c, f, g, h E10: c E13: a, b, c, h
B – Justificou que não é uma transformação linear.	B1 – Escreveu que o processo para a obtenção da transformação não é linear para a rotação e translação em R^2.	E6: d, e
	B2 – Escreveu por meio de símbolos que a transformação do vetor nulo é diferente de zero para a translação no R^2.	E7: e
C – Não justificou		E1, E2, E4, E5, E8, E9, E11, E12

Fonte: Do autor

Para inferirmos características dos processos do Pensamento Matemático Avançado consideramos os registros escritos dos estudantes que justificaram suas respostas, pois sem justificativas não temos como inferir algo. Desse modo, como o estudante E7, o qual sinalizou na tarefa seis que os itens que são transformações lineares podem ser feitos de mesmo modo, não consideramos seu registro para análise, pois como o critério que estamos usando são as justificações de cada item e ele só justificou o item *e* nessa tarefa, consideramos apenas esse, porque são agrupamentos da tarefa 5 e não a da 6.

No registro escrito do estudante E3, não inferimos características dos processos do Pensamento Matemático Avançado, pois sua resposta foi subjetiva, e assim não revelou alguma característica. Vejamos seu registro escrito (figura 30).

Figura 30 – Registro escrito de E3 referente à tarefa 5


todos são Transformações lineares, pós em alguns ocorre a rotação outros a Translação e em outros o cisalhamento.

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E3

Os indícios de processos do Pensamento Matemático Avançado manifestados pelos estudantes na resolução da tarefa cinco foram de representação simbólica, mental, de visualização, de mudança de representações e alternância entre elas, e a síntese.

Para a representação simbólica, os estudantes E6, E7, E10 e E13 apresentam em seus registros escritos indícios desse processo, pois utilizam símbolos para representar vetores, escalares e operações relativas à prova para identificar se os itens representam uma transformação linear. Um exemplo disso é a resolução do estudante E10 (figura 31).

Figura 31 – Registro escrito de E10 referente à tarefa 5

a) $T(u_1+u_2) = T((-x_1, x_2)+(-y_1, y_2)) = T(-(x_1+y_1), x_2+y_2)$

$= (x_1+y_1, x_2+y_2) \neq (-(x_1+y_1); x_2+y_2)$ (não é)

b) $T(u_1+u_2) = T((x_1+Kx_1, x_1)+(x_2+Kx_2, x_2))$

$= T[(x_1+x_2+K(x_1+x_2), x_1+x_2)] =$

$(x_1+x_2+K(x_1+x_2)+K(x_1+x_2), x_1+x_2) =$

$= (x_1 + K(x_1+$

c) • $T(u_1+u_2) = (x_1, y_1, 0)+(x_2, y_2, 0) = (x_1+x_2, y_1+y_2, 0)$

$T(u_1+u_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, 0) = (x_1, y_1, 0)+(x_2, y_2, 0) = Tu_1+Tu_2$

• $T(\lambda u) = T(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x, \lambda y, 0) = \lambda T u$ (sim)

(Ex5)

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E10

Podemos observar que E10 apresenta uma justificativa somente para os três primeiros itens, deixando incompleta a resolução da tarefa, e, desses, apenas o item *c* consegue justificar coerentemente sua resposta. Retomando ao quadro 17, vemos que esse estudante afirma que os itens "*c*" e "*e*" são transformações lineares, justificando apenas o "*c*".

O item "*e*" não é um exemplo de uma transformação linear, pois é uma translação de R^2 no R^2, porém não foi apenas E10 que assinalou o item "*e*" como uma transformação linear, mais seis estudantes marcaram esse item: E1, E3, E5, E8, E9 e E11.

O estudante E10, não resolveu corretamente os itens a, b e c, pois assume de início que são transformações lineares, em sequência não mostra que são. O mesmo acontece com o estudante E6 (figura 32), vejamos.

Figura 32 – Registro escrito de E6 referente à tarefa 5

a) seja $u = (-x_1, y_1)$ e $v = (-x_2, y_2)$, temos

$t(u+v) = t((-x_1, y_1) + (-x_2, y_2)) = t((-x_1 - x_2, y_1 + y_2))$

$= (-x_1, y_1) + (-x_2, y_2) = t(u) + t(v)$

$t(\alpha u) = t(\alpha(-x, y)) = (-\alpha x, \alpha y) = \alpha(-x, y) = \alpha t(u)$

logo é t. linear.

b) Processo analogo ao a)

c) Processo analogo

d) Não se trata de uma transformação linear, pois seu processo e obtenção é não linear

e) Análogo ao d)

f) análogo ao a)

g) análogo ao a)

h) análogo ao a)

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E6

A partir disso, inferimos que esses estudantes apresentaram apenas indícios do processo de representação simbólica para o conceito de transformações lineares.

Nas resoluções dos estudantes E7 e E13, são manifestadas características da representação mental, pois além de utilizarem símbolos para representar vetores, escalares e operações relativas à prova para identificar se as transformações são lineares, esses trazem relações implícitas do conceito envolvidas nas operações algébricas realizadas pelos estudantes. Desse modo, podemos inferir os processos de representação simbólica e mental, pois os símbolos para Dreyfus (2002, p. 30, tradução nossa[39]) “[...] envolvem relações entre signos e significados, eles servem para fazer o conhecimento implícito de um indivíduo - o significado - explícito em termos de símbolos”. E podemos afirmar que é uma representação mental, pois existem relações ligadas ao conceito na manipulação dos símbolos. Um exemplo é o registro escrito de E7 (figura 33).

Figura 33 – Registro escrito de E7 referente à tarefa 5

a) (V) $T: R^2 \to R^2$ definida por: $T(x, y) = (-x, y)$

b) (V) $T: R^2 \to R^2$ definida por: $T(x, y) = (x + ky, y)$

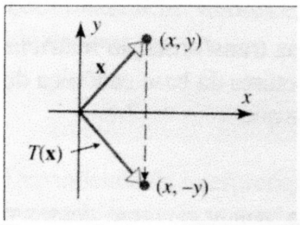
c) (V) $T: R^3 \to R^3$ definida por: $T(x, y, z) = (x, y, 0)$

d) (V) A rotação do R^2 no R^2.

e) (F) A translação do R^2 no R^2. ← $T(0) \neq 0$

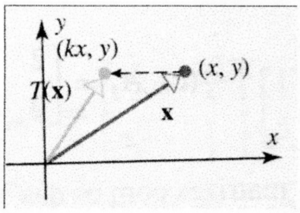
f) (V) O cisalhamento de R^2 de fator k na direção x.

g) (V) A ilustração abaixo



Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 252)

h) (V) A ilustração abaixo



Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 257)

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E7

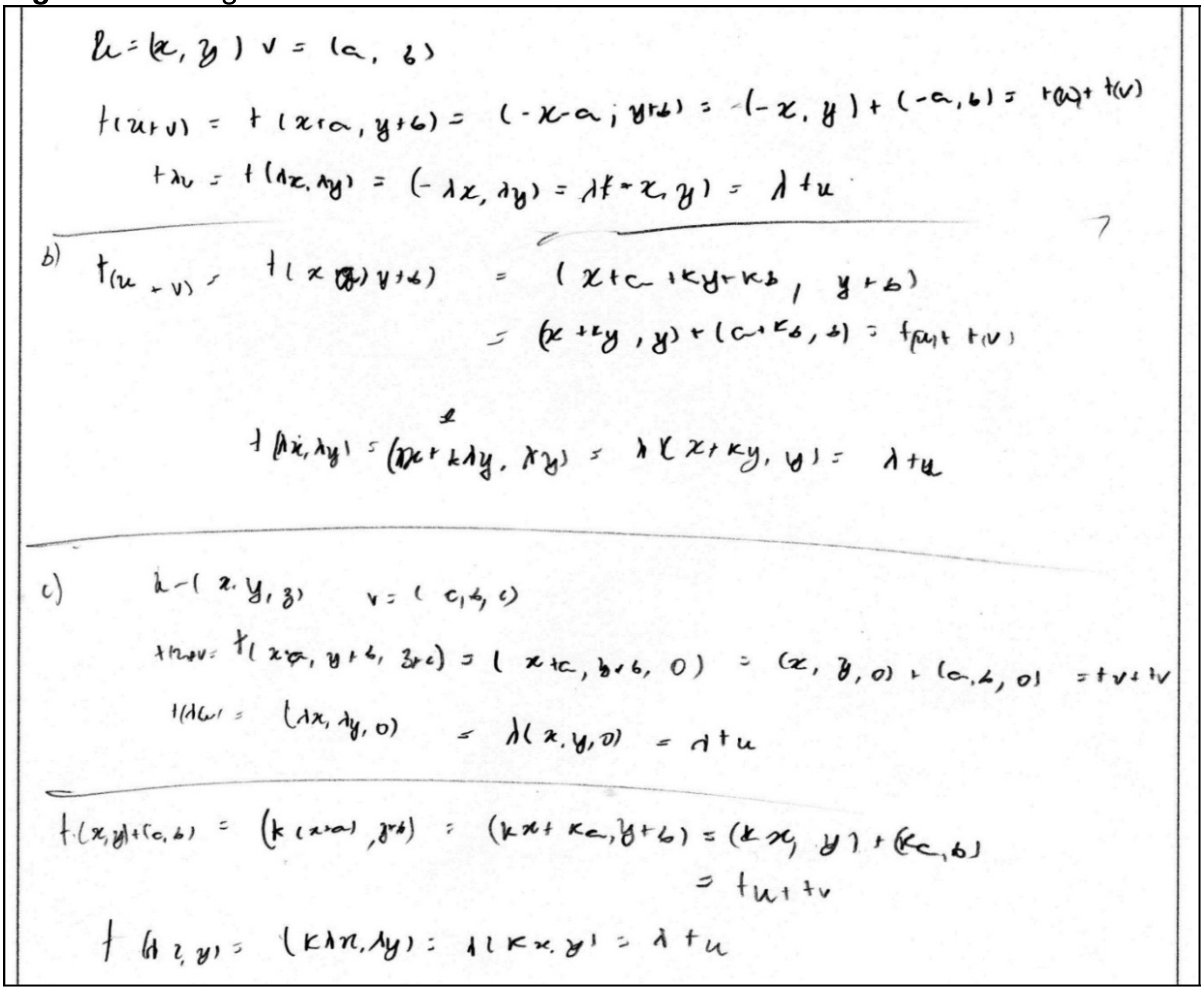
---

[39] […] symbols involve relations between signs and meanings; they serve to make a person’s implicit knowledge – the meaning – explicit in terms of symbols.

No registro escrito do E7 na resolução do item *e*, observamos que para justificar que a translação não é uma transformação linear o estudante escreve por meio de símbolos que a transformação $T(0) \neq 0$, ou seja, o estudante sabe que a translação não é uma transformação linear, pois se o vetor nulo pertence a um espaço vetorial, então $T(0) = 0$, e não diferente de zero. Nessa justificação o símbolo tem um significado em sua notação, ele se torna uma representação mental, pois existe uma relação com o conteúdo nessa notação.

O estudante E13 manifesta os processos de representação simbólica e mental já citados, pois, a partir das informações da tarefa, resolve por meio das duas propriedades, utilizando símbolos com suas relações a fim de provar que os itens *a*, *b*, *c* e *h*, são transformações lineares. Além disso, esse estudante apresenta o processo de visualização, pois a partir da imagem do item *h*, o estudante resolve corretamente utilizando os dados do gráfico, transitando pelas representações gráficas e algébricas. Por consequência, inferimos indícios do processo de mudança de representações e alternância entre elas, porque mostra saber utilizar várias representações de um mesmo conceito (DREYFUS, 2002). Outro processo a considerar na resolução de E13 é o de síntese, pois ele soube combinar relações do conteúdo a fim de formar um todo, ou seja, a demonstração correta de alguns itens. Vejamos seu registro escrito (figura 34).

Figura 34 – Registro escrito de E13 referente à tarefa 5


$u=(x, y)\ v=(a, b)$

$t(u+v) = t(x+a, y+b) = (-x-a; y+b) = (-x, y) + (-a, b) = t(u) + t(v)$

$t\lambda u = t(\lambda x, \lambda y) = (-\lambda x, \lambda y) = \lambda(-x, y) = \lambda tu$

b) $t(u+v) = t(x+a, y+b) = (x+a+ky+kb, y+b)$

$= (x+ky, y) + (a+kb, b) = t(u) + t(v)$

$t(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + k\lambda y, \lambda y) = \lambda(x+ky, y) = \lambda tu$

c) $u=(x, y, z)\quad v=(a, b, c)$

$t(u+v) = t(x+a, y+b, z+c) = (x+a, y+b, 0) = (x, y, 0) + (a, b, 0) = tu + tv$

$t(\lambda u) = (\lambda x, \lambda y, 0) = \lambda(x, y, 0) = \lambda tu$

$t((x, y)+(a, b)) = (k(x+a), y+b) = (kx+ka, y+b) = (kx, y) + (ka, b)$

$= tu + tv$

$t(\lambda x, \lambda y) = (k\lambda x, \lambda y) = \lambda(kx, y) = \lambda tu$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E13

Como já mencionado, quatro estudantes apresentaram características de alguns processos do Pensamento Matemático Avançado na resolução dessa tarefa. Dois manifestaram apenas a representação simbólica, E6 e E10; E7 além da representação simbólica apresentou também a mental; e E13 manifestou indícios dos processos de representação simbólica, mental, visualização, mudança de representações e alternância entre elas, e a síntese.

O quadro a seguir (quadro 19) mostra quais foram as características dos processos do Pensamento Matemático Avançado manifestados nas resoluções da tarefa cinco.

Quadro 19 – Características dos processos do PMA em relação à tarefa 5

T5	Características evidenciadas dos processos do PMA	Registros escritos
R1	Utilizam símbolos para representar vetores, escalares, e operações relativas à prova para identificar se os itens representam uma transformação linear.	E6, E7, E10, E13
R2	Os símbolos trazem relações implícitas do conceito envolvidas nas operações algébricas realizadas pelos estudantes.	E7, E13
R3	A imagem gera uma representação mental, pois a partir de informações do gráfico o estudante resolve a tarefa.	E13
R4	Utiliza mais de uma representação para o conceito, gráfica e algébrica, integrando-as a fim de resolver a tarefa.	E13
A2	Combinando elementos que fazem parte de uma transformação linear formou partes a fim de construir o todo, determinar se a transformação é linear.	E13

Fonte: Do autor

4.1.7 Análise da Tarefa 6

A tarefa:

“Considere a transformação $T: R^2 \to R^3$, definida por

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x - y \\ 3x + 4y \end{bmatrix},$$

verifique se T é uma transformação linear”(POLLE, 2004, p. 188). Justifique.

O próximo quadro (quadro 20) apresenta os agrupamentos que emergiram da resolução da tarefa seis. Para a sua construção consideramos os registros escritos dos estudantes que responderam a tarefa, os quais foram E1, E4, E6, E7, E8, E10 e E13 (sete registros escritos), independente se conseguiram obter a resposta correta ou não, e daqueles que não responderam E2, E3, E5, E9, E11 e E12. Construímos quatro agrupamentos, A, B, C e D e três subagrupamentos, A1, A2 e A3, todos excludentes, pois cada resolução só se encaixa em um agrupamento ou subagrupamento.

Quadro 20 – Agrupamentos e subagrupamentos da tarefa 6

Agrupamentos	**Subagrupamentos**	**Registros escritos**
A – Apresentou uma resolução correta para a tarefa utilizando relações do conceito.	A1 – Resolveu pelo conceito de transformação por meio de uma matriz e determinou que é uma transformação linear, utilizou símbolos para realizar as operações algébricas.	E1
	A2 – Resolveu pelas duas relações da definição de transformações lineares, utilizou símbolos para realizar as operações algébricas.	E6, E10, E13
	A3 – Resolveu pela combinação das duas relações da definição de transformações lineares, utilizou símbolos para realizar as operações algébricas.	E7
B – Apresentou uma resolução parcial, utilizando as duas relações da definição de transformações lineares, usou símbolos para realizar as operações algébricas.		E8
C – Não apresentou uma resolução correta para tarefa, explicou com suas palavras apresentando uma resposta subjetiva.		E4
D – Não respondeu a tarefa.		E2, E3, E5, E9, E11, E12

Fonte: Do autor

Para a construção desses agrupamentos, consideramos as resoluções daqueles estudantes que conseguiram determinar que a transformação é linear, E1, E6, E7, E10 e E13, que é o agrupamento A, o agrupamento B é do estudante E8 que não terminou a resolução, o C é do estudante E4 o qual respondeu que a transformação é linear, mas não apresentou uma resposta consistente para determinar isso, e também não manifestou alguma característica do Pensamento Matemático Avançado em sua resolução, e o D, daqueles que não responderam a tarefa. Vejamos o registro de E4 (figura 35), que respondeu a tarefa e não apresentou indícios dos processos do Pensamento Matemático Avançado.

Figura 35 – Registro escrito de E4 referente à tarefa 6

T é uma transformação linear pois as duas matrizes estão relacionadas, embora estejam em bases diferentes.

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E4

Desse modo, inferimos características dos processos do Pensamento Matemático Avançado nas resoluções dos estudantes E1, E6, E7, E8, E10 e E13, pois manifestaram algumas dessas características. As características manifestadas na resolução da tarefa seis foram de representação simbólica, mental, mudança de representações e alternância entre elas, e a síntese.

Todos os seis estudantes manifestaram as características do processo de representação simbólica, E1, E6, E7, E8, E10 e E13, porque utilizaram símbolos para responder a tarefa, manipulando-os como se fossem objetos mentais (TALL, 1995). Podemos verificar no registro de E10 (figura 36), o qual utilizando símbolos pode representar a transformação de R^2 em R^3 manipulou-os algebricamente a fim de resolver a tarefa.

Figura 36 – Registro escrito de E10 referente à tarefa 6

$u_1 = (x_1, y_1)$
$u_2 = (x_2, y_2)$

$$T(u_1+u_2) = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ 2(x_1+x_2)-(y_1+y_2) \\ 3(x_1+x_2)+4(y_1+y_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1-y_1 \\ 3x_1+4y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ 2x_2-y_2 \\ 3x_2+4y_2 \end{bmatrix} = Tu_1+Tu_2$$

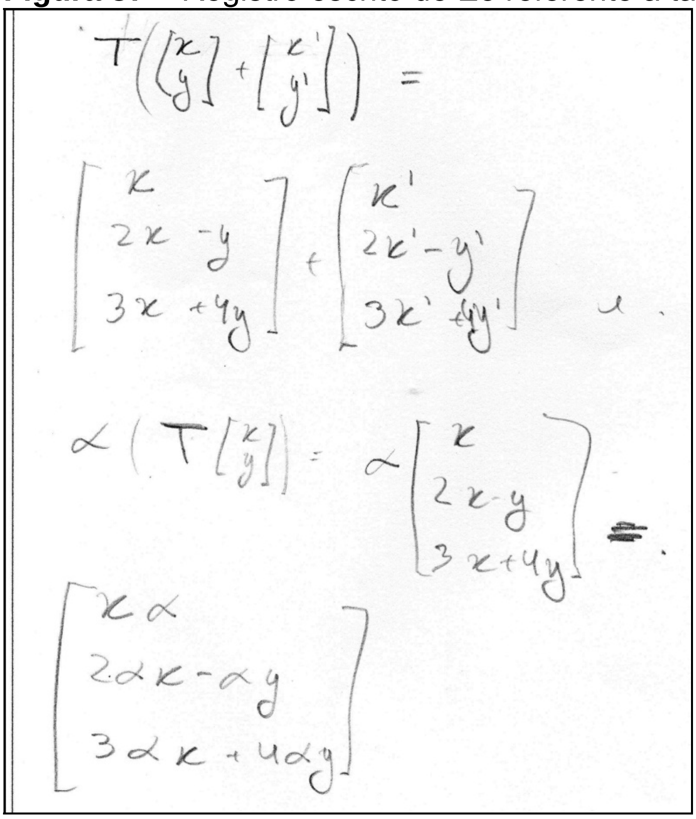
$$T(\lambda u_1) = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ 2\lambda x_1-\lambda y_1 \\ 3\lambda x_1+4\lambda y_1 \end{bmatrix} = \lambda T u_1$$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E10

Nesse registro, vemos alguns erros de notação, como a falta de parênteses na soma das transformações: $T(u_1) + T(u_2)$; na multiplicação pela constante: $\lambda T(u_1)$; e a falta do isolamento da constante antes de determinar que $\lambda T(u_1)$, que seria $\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 - y_1 \\ 3x_1 + 4y_1 \end{bmatrix}$. Porém, isso não impossibilitou o estudante a apresentar indícios de processos do Pensamento Matemático Avançado.

O registro escrito do E8 (figura 37) apresenta a representação simbólica, porém ele não faz a manipulação dos símbolos para obter a resposta da tarefa. Desse modo, para o estudante E8, não podemos inferir que manifestou características do processo de representação mental. Além disso, o estudante não explicita de qual conjunto os vetores e escalares fazem parte.

Figura 37 – Registro escrito de E8 referente à tarefa 6



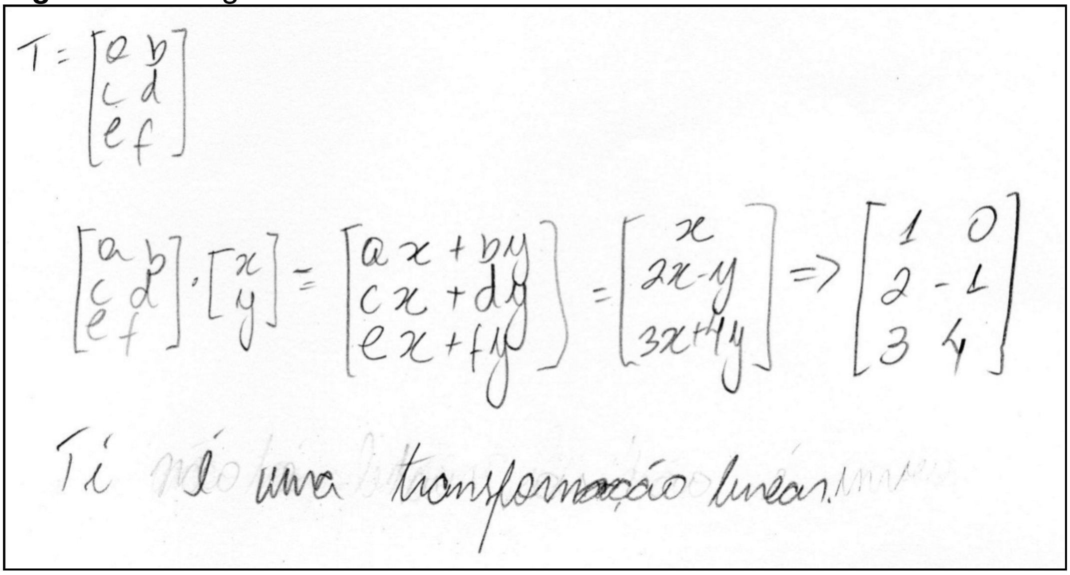
Fonte: Resolução entregue pelo estudante E8

Inferimos características dos processos de representação mental para cinco estudantes, E1, E6, E7, E10 e E13, pois além de usar os símbolos para denotar, vetores, escalares, matrizes, pares ordenados, também utilizaram esses para determinar se a transformação $T: R^2 \to R^3$, definida por

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x - y \\ 3x + 4y \end{bmatrix}$$

é linear. Desse modo, existe esquema mental, quadros de referência, um significado associado às relações do conceito de transformações lineares. Vejamos o registro escrito do estudante E1 (figura 38).

Figura 38 – Registro escrito de E1 referente à tarefa 6



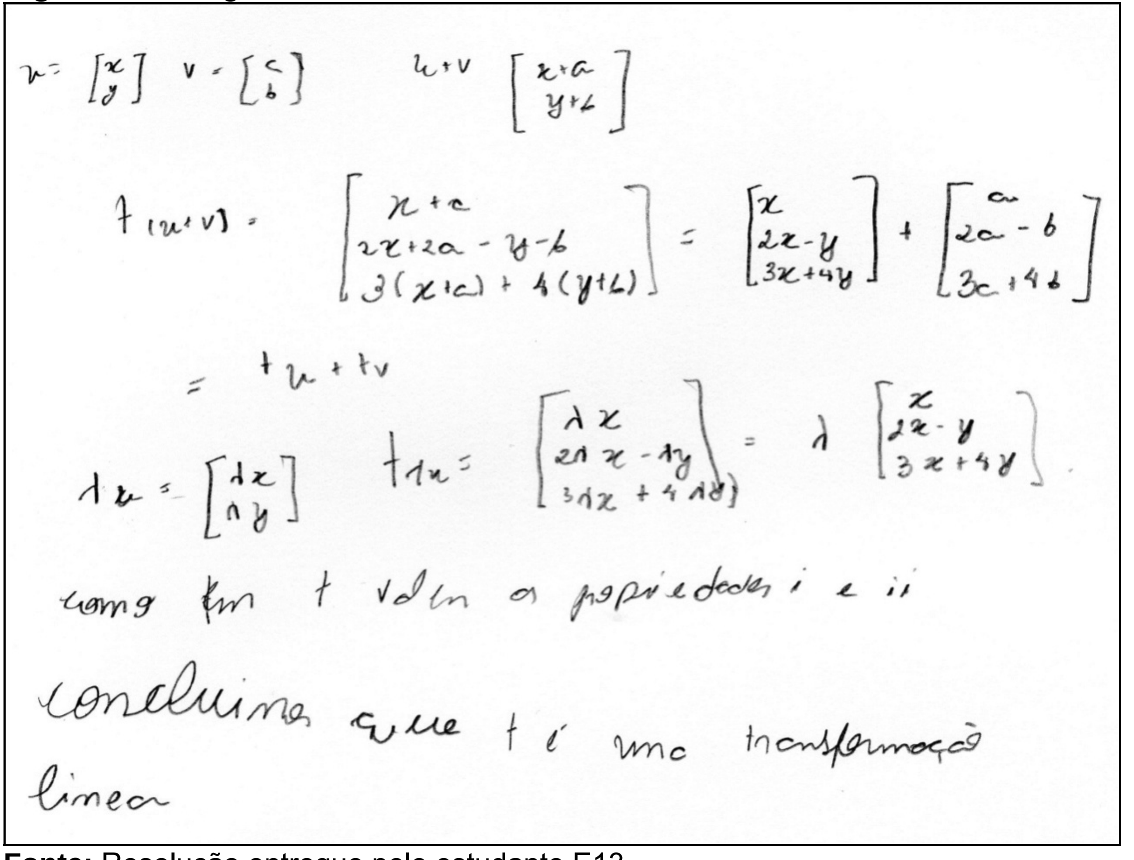
Fonte: Resolução entregue pelo estudante E1

E1 foi o único a resolver a tarefa utilizando a transformação por meio de uma matriz. De certo modo, em seus esquemas mentais, ele lembrou que se acontecer uma transformação por meio de uma matriz de ordem $m \times n$ definida por $T_A(x) = Ax$ (para **x** em $\mathbf{R}^n$), é uma transformação linear. Vejamos.

Em sua notação contém alguns erros, porém observamos que ele fez a multiplicação da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ pelos vetores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ igualando a transformação $\begin{bmatrix} x \\ 2x - y \\ 3x + 4y \end{bmatrix}$ e obtendo a matriz ***A*** que é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, ou seja, $T_A(x) = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Desse modo, resolvendo o problema.

Outro exemplo de representação mental é do estudante E13 (figura 39).

Figura 39 – Registro escrito de E13 referente à tarefa 6



Fonte: Resolução entregue pelo estudante E13

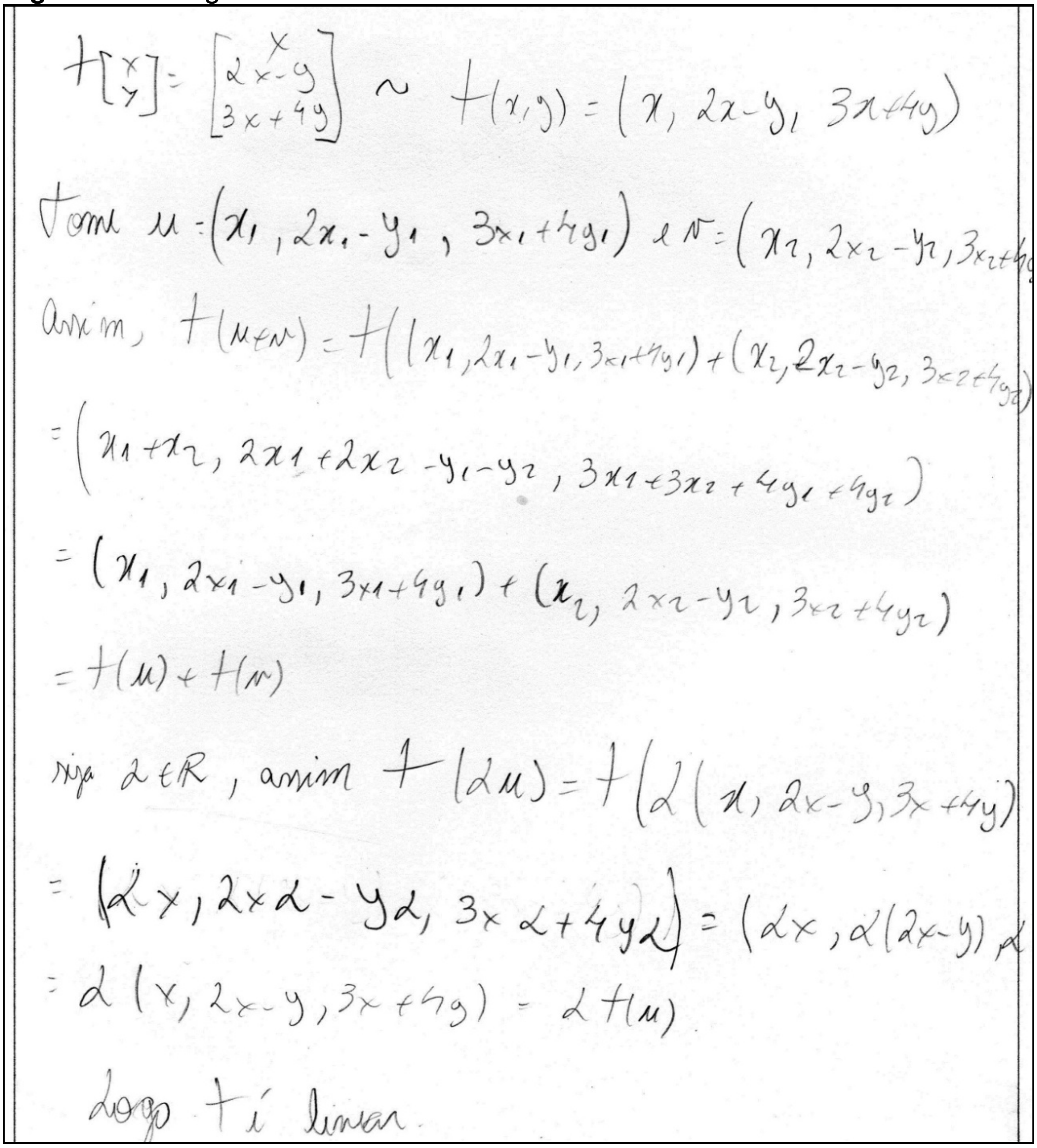
Essa resolução apresenta alguns erros de notações, como a falta de parênteses na soma das transformações: $T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$, e na multiplicação por escalar: $T(\lambda\mathbf{u})$, mas isso não impossibilita o estudante de apresentar características de alguns dos processos do Pensamento Matemático Avançado.

No processo de representação, mudança de representações e alternância entre elas, quatro estudantes manifestaram características desse processo, os quais foram E6, E7, E10 e E13. Apresentaram notações diferentes para a transformação, em pares ordenados e em matrizes.

O registro escrito do estudante E6 deixa claro essa mudança de representações, ele escreve um símbolo de equivalência para dizer que a transformação na notação de matriz é equivalente a notação em pares ordenados, para dizer qual é o modo por qual ele irá resolver a tarefa. Além disso, podemos observar que o estudante utiliza a letra grega α, para explicitar que o escalar pertence ao conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$.

Apesar do estudante fazer algumas confusões quanto à resolução da tarefa, pois assume de início a transformação como linear, podemos inferir que esse sabe utilizar algumas representações para a transformação em questão. Vejamos seu registro escrito (figura 40).

Figura 40 – Registro escrito de E6 referente à tarefa 6



$t\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\2x-y\\3x+4y\end{bmatrix} \sim t(x,y) = (x, 2x-y, 3x+4y)$

Tome $u = (x_1, 2x_1-y_1, 3x_1+4y_1)$ e $v = (x_2, 2x_2-y_2, 3x_2+4y_2$

Assim, $t(u+v) = t((x_1, 2x_1-y_1, 3x_1+4y_1)+(x_2, 2x_2-y_2, 3x_2+4y_2))$

$= (x_1+x_2, 2x_1+2x_2-y_1-y_2, 3x_1+3x_2+4y_1+4y_2)$

$= (x_1, 2x_1-y_1, 3x_1+4y_1)+(x_2, 2x_2-y_2, 3x_2+4y_2)$

$= t(u)+t(v)$

seja $\alpha \in R$, assim $t(\alpha u) = t(\alpha(x, 2x-y, 3x+4y))$

$= (\alpha x, 2x\alpha - y\alpha, 3x\alpha+4y\alpha) = (\alpha x, \alpha(2x-y), \alpha$

$= \alpha(x, 2x-y, 3x+4y) = \alpha t(u)$

Logo t é linear.

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E6

Outro exemplo de registro escrito que inferimos esse processo foi do estudante E7 (figura 41). Ele não faz como E6 denotando a mudança de representações, porque em sua resolução faz a escolha de trocar a notação de pares ordenados para a de matrizes, porém resolve deixar da mesma forma, já que para resolver a tarefa as duas notações são eficientes, ou seja, elas têm ligações com o conceito.

Figura 41 – Registro escrito de E7 referente à tarefa 6

Vamos fazer a verificação usual.

Temos, $a, b \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, com

$a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$. Observe que

$$a + \alpha b = (a_1, a_2) + \alpha(b_1, b_2) = (a_1, a_2) + (\alpha b_1, \alpha b_2) =$$
$$= (a_1 + \alpha b_1, a_2 + \alpha b_2)$$

Temos $T(a + \alpha b) =$

$$= (a_1 + \alpha b_1, 2(a_1 + \alpha b_1) - (a_2 - \alpha b_2), 3(a_1 + \alpha b_1) + 4(a_2 + \alpha b_2))$$
$$= (a_1, 2a_1 - a_2, 3a_1 + 4a_2) + (\alpha b_1, 2\alpha b_1 - \alpha b_2, 3\alpha b_1 + 4\alpha b_2) =$$
$$= (a_1, 2a_1 - a_2, 3a_1 + 4a_2) + \alpha(b_1, 2b_1 - b_2, 3b_1 + 4b_2) =$$
$$= T(a) + \alpha T(b).$$

Obs: os item a), b), c), d), f), g), h) do ex. 5 podem ser verificados analogamente

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E7

Outro processo que foi manifestado na resolução dessa tarefa foi o de sintetização. Inferimos que os estudantes que apresentaram esse processo foram aqueles que conseguiram resolver a tarefa, pois de certo modo conseguiram combinar partes, as relações, a fim de formar um todo que é a resolução do problema.

Os estudantes que manifestaram foram E7, E10 e E13, porque, conforme dito acima, resolveram por meio das duas propriedades de transformações lineares, ou da combinação delas.

Os processos manifestados na resolução dessa tarefa foram de representação simbólica, mental, mudança de representações e alternância entre elas, e a síntese. Três estudantes apresentaram um processo de abstração, a síntese, E7, E10 e E13. Não encontramos características relacionadas aos outros processos nos registros escritos relativos a essa tarefa. A partir disso, construímos um quadro (quadro 21) que apresenta as características dos processos manifestados nas resoluções da tarefa seis.

Quadro 21 – Características dos processos do PMA em relação à tarefa a 6

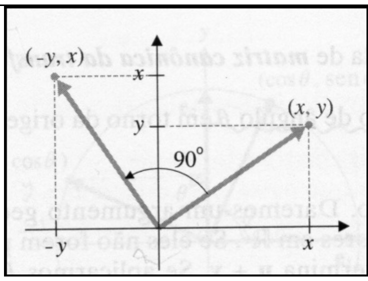
T6	**Características evidenciadas dos processos do PMA**	**Registros escritos**
R1	Escrevem símbolos para denotar elementos de uma transformação linear, sendo para representar vetores, escalares, espaços vetoriais, conjuntos e aplicações.	E1, E6, E7, E8, E10, E13
R2	Os símbolos estão entrelaçados com suas propriedades a fim de compor um objeto maior, a verificação se a transformação é linear.	E1, E6, E7, E10, E13
R4	Utilizam mais de uma representação para o conceito, integrando-as a fim de resolver a tarefa.	E6, E7, E10, E13
A2	Combinando elementos que fazem parte de uma transformação linear formou partes a fim de construir o todo, a verificação se a transformação é linear.	E6, E7, E10, E13

Fonte: Do autor

4.1.8 Análise da Tarefa 7

A tarefa:

“Os operadores matriciais de R^2 e R^3 que movem pontos ao longo de arcos circulares são denominados ***operadores de rotação*** ou, simplesmente, ***rotações***” (ANTON e RORRES, 2012, p. 253). As tarefas abaixo são referentes a rotações.
a) “Seja $T: R^2 \rightarrow R^2$ a transformação que faz a rotação de ângulo 90º no sentido anti-horário em relação à origem. Mosque que *T* é uma transformação linear” (POOLE, 2004, p. 191).

	 **Fonte:** Poole (2004, p. 191)
b)	Encontre a matriz canônica de uma rotação $T: R^2 \rightarrow R^2$ que move os pontos no sentido anti-horário em torno da origem por um ângulo θ . (ANTON e RORRES, 2012, p. 253, adaptado).
c)	Utilizando o resultado do item b), faça a rotação do ponto (2, -1) de ângulo 60º em torno da origem a fim de obter o ponto que representa a imagem de (2, -1).

Cinco dos treze estudantes, E5, E6, E7, E10 e E13, responderam parte da tarefa sete, E6, E7 e E13, responderam-na completamente, e os estudantes E5 e E10 resolveram apenas o item *a*.

Como os modos de resolução dos três itens são diferentes, na construção dos agrupamentos em relação à tarefa sete, emergiram três quadros com agrupamentos e subagrupamentos, sendo um para cada item, todos excludentes, pois cada resolução só se encaixa em um agrupamento ou subagrupamento.

Para o item *a*, emergiram quatro agrupamentos, A, B, C, D e dois subagrupamentos A1 e A2. Vejamos o quadro (quadro 22) dos agrupamentos e subagrupamentos da tarefa 7, item *a*.

Quadro 22 – Agrupamentos e subagrupamentos da tarefa 7, item *a*

Agrupamentos	**Subagrupamentos**	**Registros escritos**
A – Apresentou uma resposta correta para o item, mas omitiu algumas etapas. Definiu vetores, escalares e a transformação, utilizou símbolos para representar vetores, escalares, pontos, pares ordenados, e a transformação, e manipulou algebricamente esses símbolos.	A1 – Resolveu utilizando as duas propriedades da definição.	E10, E13
	A2 – Resolveu utilizando a combinação das duas propriedades da definição.	E7
B – Apresentou uma resposta incoerente para o item, assumindo de início que a rotação é uma transformação linear, desse modo, não provando o item. Resolveu utilizando as duas propriedades da definição, utilizou símbolos para representar, vetores, escalares, pontos, pares ordenados, e a transformação, e manipulou algebricamente esses símbolos.		E6
C – Apresentou uma resposta subjetiva.		E5
D – Não respondeu ao item.		E1, E2, E3, E4, E8, E9, E11, E12

Fonte: Do autor

Para o item *b*, emergiram três agrupamentos, F, G e H, e dois subagrupamentos F1 e F2. Vejamos o quadro (quadro 23) referente ao item *b*.

Quadro 23 – Agrupamentos e subagrupamentos da tarefa 7, item *b*

Agrupamentos	Subagrupamentos	Registros escritos
F – Apresentou a matriz canônica correta.	F1 – Utilizou símbolos para escrever a matriz.	E13
	F2 – Utilizou símbolos para definir o ângulo, a transformação, a rotação, e escrever a matriz.	E7
G – Apresentou a matriz canônica incorreta, utilizando símbolos para definir o ângulo, a transformação, a rotação, e escrever a matriz.		E6
H – Não respondeu ao item.		E1, E2, E3, E4, E5, E8, E9, E10, E11, E12

Fonte: Do autor

Para o item *c*, emergiram dois agrupamentos, I e J, e dois subagrupamentos I1 e I2. Vejamos o quadro (quadro 24) referente ao item *c*.

Quadro 24 – Agrupamentos e subagrupamentos da tarefa 7, item *c*

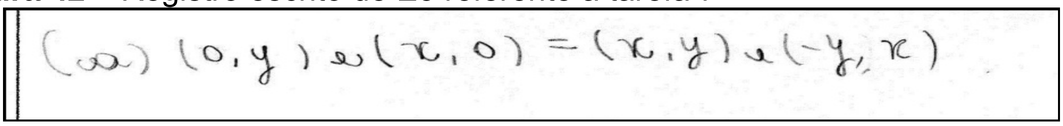
Agrupamentos	Subagrupamentos	Registros escritos
I – Fez a rotação de 60º em torno da origem no ponto (-2,1).	I1 – Utilizando o modelo correto obtendo a imagem correta da transformação.	E7, E13
	I2 – Utilizando o modelo incorreto obtendo a imagem incorreta da transformação.	E6
H – Não respondeu ao item.		E1, E2, E3, E4, E5, E8, E9, E10, E11, E12

Fonte: Do autor

Para inferimos características dos processos do Pensamento Matemático Avançado consideramos os registros escritos dos estudantes que responderam algo na tarefa.

Dos cinco estudantes que responderam a tarefa sete, quatro manifestaram indícios de características do Pensamento Matemático Avançado, E6, E7, E10 e E13. Apenas o estudante E5 não apresentou características, pois apresentou uma resposta subjetiva. Vejamos seu registro escrito (figura 42).

Figura 42 – Registro escrito de E5 referente à tarefa 7

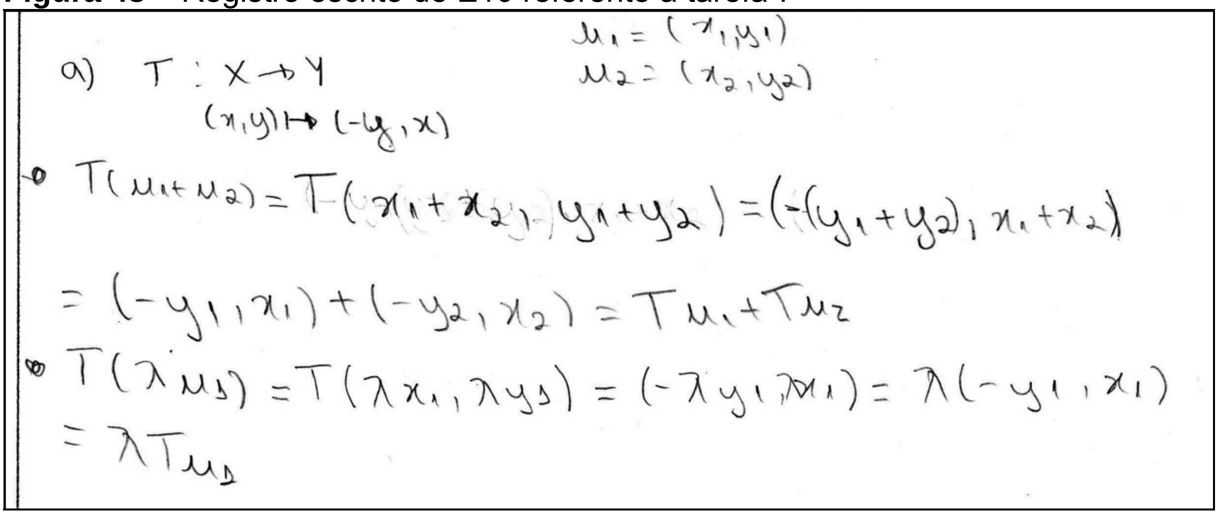


(a) $(0,y)$ e $(x,0) = (x,y)$ e $(-y,x)$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E5

Existem indícios de características dos processos de representação que foram comuns aos quatro estudantes, a representação simbólica e mental. Nos quatro registros são apresentados símbolos para representar vetores, escalares, pontos, pares ordenados e a transformação linear, juntamente com a manipulação algébrica desses símbolos para a resolução da tarefa, ou de partes da tarefa. Então, além da representação simbólica houve também a representação mental, pois em cada símbolo há um significado associado, existem esquemas internos relacionados com o conceito. Vejamos um exemplo disso na resolução de E10 (figura 43).

Figura 43 – Registro escrito de E10 referente à tarefa 7



a) $T: X \to Y$ $\quad u_1 = (x_1, y_1)$

$(x,y) \mapsto (-y,x)$ $\quad u_2 = (x_2, y_2)$

$\bullet\ T(u_1+u_2) = T(x_1+x_2, y_1+y_2) = (-(y_1+y_2), x_1+x_2)$

$= (-y_1, x_1) + (-y_2, x_2) = Tu_1 + Tu_2$

$\bullet\ T(\lambda u_1) = T(\lambda x_1, \lambda y_1) = (-\lambda y_1, \lambda x_1) = \lambda(-y_1, x_1)$

$= \lambda T u_1$

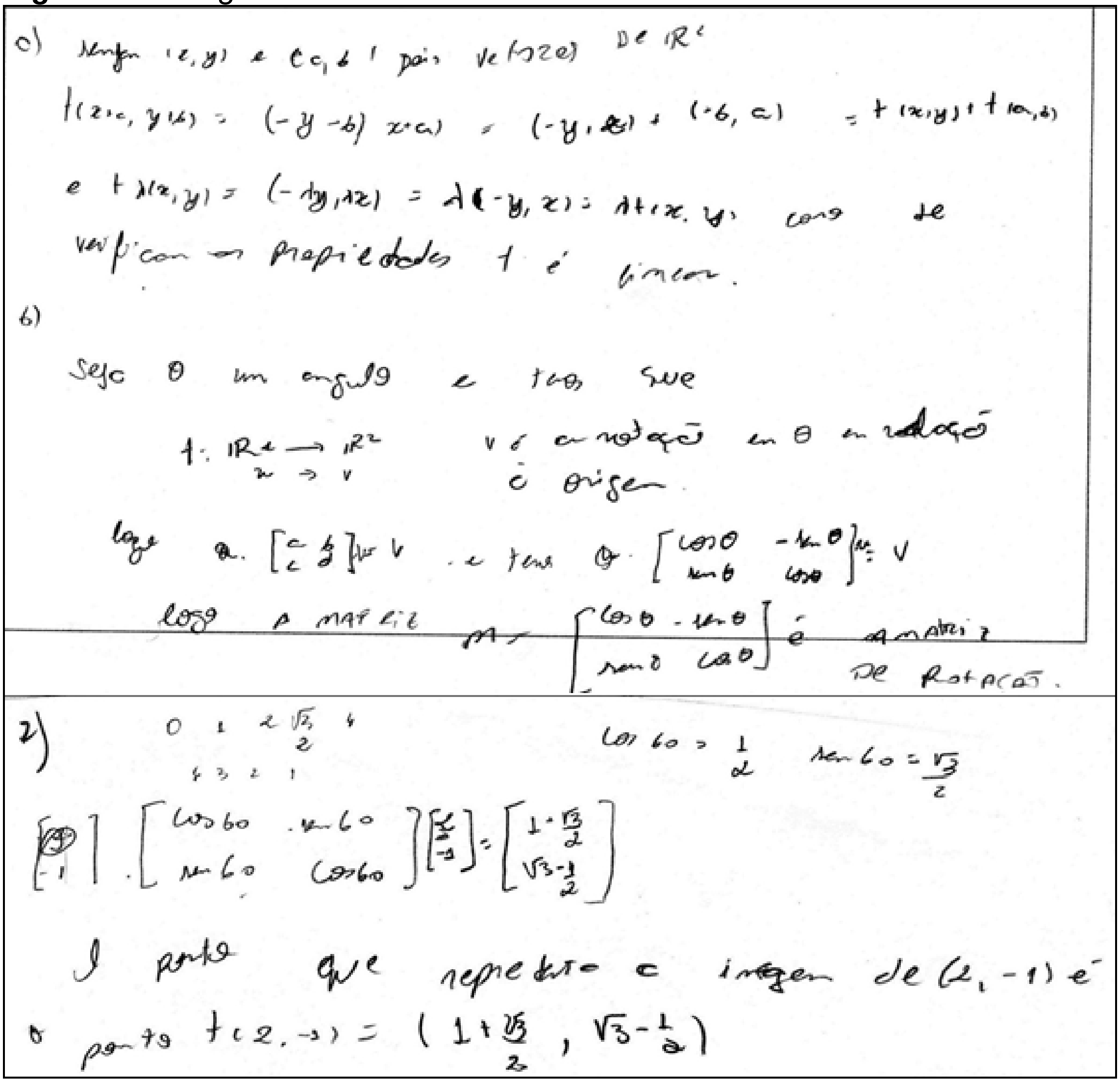
Fonte: Resolução entregue pelo estudante E10

Esse estudante resolveu apenas o item *a*, mas em sua resolução define a transformação *T* de X em Y, os vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, e manipula algebricamente os símbolos associados à transformação, mostrando que *T* é uma transformação linear utilizando as duas propriedades da definição do conceito. Porém, em sua notação não coloca os parênteses em $T(\mathbf{u}_1)+T(\mathbf{u}_2)$ e $\lambda T(\mathbf{u}_1)$. Esse erro foi comum por parte de E10 nas outras tarefas relativas a transformações lineares.

Consideramos que os estudantes que conseguiram resolver corretamente os itens *a* e/ou *b*, de certo modo, apresentaram indícios de características do processo de visualização, pois utilizaram corretamente as informações da imagem a fim de gerar uma representação mental, ou seja, “a visualização é um processo pelo qual as representações mentais podem ser geradas” (DREYFUS, 2002, p. 31, tradução nossa[40]). Três estudantes manifestaram características desse processo, E7, E10 e E13. Podemos inferir o processo de visualização no registro escrito do estudante E13 (figura 44), pois consegue resolver a tarefa a partir dos dados expressos no gráfico.

[40] Visualizing is one process by which mental representations can come into being.

Figura 44 – Registro escrito de E13 referente à tarefa 7



c) Sejam (x, y) e (a, b) pares vetores de $\mathbb{R}^2$

$T(x+a, y+b) = (-y-b, x+a) = (-y, x) + (-b, a) = T(x,y) + T(a,b)$

e $T\lambda(x,y) = (-\lambda y, \lambda x) = \lambda(-y, x) = \lambda T(x,y)$ como se verificam as propriedades T é linear.

b)

Seja θ um angulo e temos que

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $u \to v$ — v é a rotação em θ em relação à origem.

logo a. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} u = v$ e temos $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} u = v$

logo a matriz $M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ é a matriz de rotação.

2) $\cos 60 = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\operatorname{sen} 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 60 & -\operatorname{sen} 60 \\ \operatorname{sen} 60 & \cos 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

O ponto que representa a imagem de (2, -1) é o ponto $T(2,-1) = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E13

O estudante E13 realizou alguns erros de notação em relação à tarefa 7 no item *a*. Primeiramente não definiu os pares ordenados (x, y) e (a, b), como sendo parte dos vetores **u** e **v**, ou seja, $\mathbf{u} = (x, y)$ e $\mathbf{v} = (a, b)$, desse modo, omitiu algumas etapas. A transformação completa seria:

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T[(x, y) + (a, b)],$$

$$= T[(x + a, y + b)]$$

$$= [\ (y + b) + (x + a)]$$

$$= [-y + (-b), x + a]$$

$$- [(-y_1, x) + (-b, a)]$$

$$= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

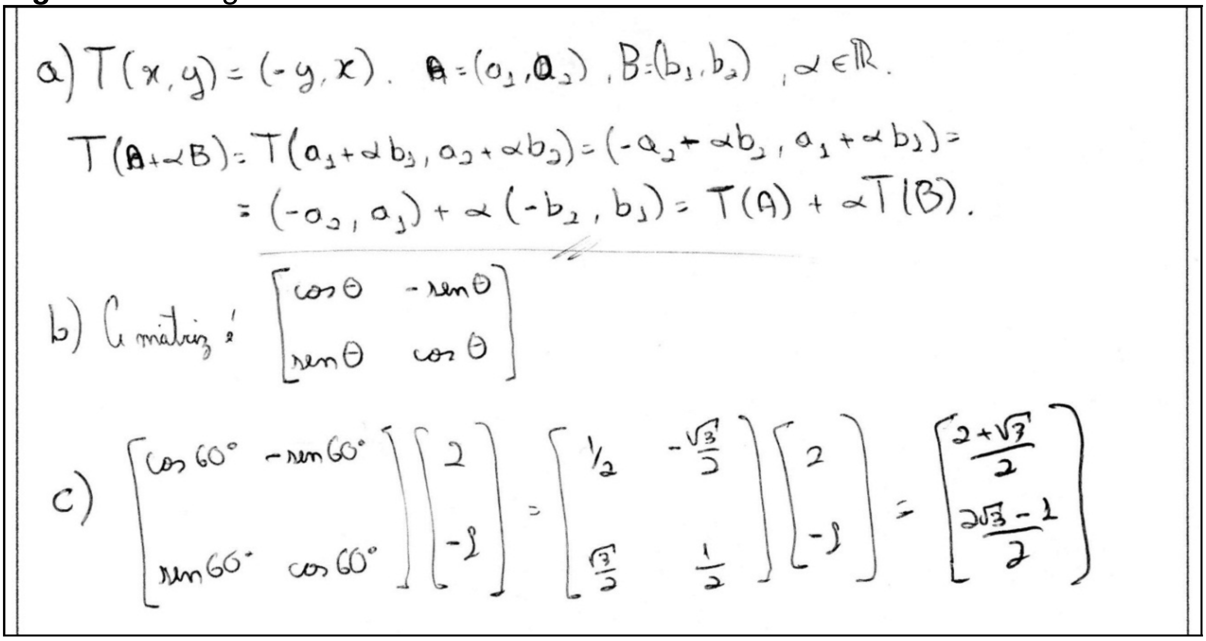
Mesmo omitindo algumas etapas, o estudante manifesta indícios dos processos do Pensamento Matemático Avançado, como a representação simbólica, mental, e a visualização, além disso, outros dois processos de representação a considerar no registro de E13 são os de mudança de representações e alternância entre elas e a modelação.

Para o processo de mudança de representações e alternância entre elas o estudante utiliza mais de uma representação para a resolução da tarefa, podemos inferir que usa os dados da representação gráfica, como citado acima, para a resolução do item *a*, utiliza pares ordenados e, para a resolução do item *b* e *c*, utiliza uma matriz. Desse modo, inferimos que sabe utilizar mais de uma representação em paralelo, faz ligações entre essas representações, integrando-as para resolver a tarefa em si, e utiliza a representação de forma mais eficiente, para resolver os itens separadamente, passando pelas quatro fases da representação à abstração de Dreyfus (2002). Os estudantes E6, E7, E13 também manifestam características desse processo.

Já para o processo de modelação que, segundo Dreyfus (2002), é manifestado quando se constrói uma estrutura ou teoria matemática que incorpore as características de um objeto ou situação física, consideramos para quem resolveu corretamente o item *b*, pois determinou a matriz canônica da rotação e a partir dessa podemos encontrar a imagem de pontos distintos em ângulos distintos. O estudante E13 encontrou a matriz canônica para a rotação, então inferimos que esse estudante apresentou características do processo de modelação e, além dele, o estudante E7 também apresentou corretamente a matriz canônica.

Inferimos indícios do processo de generalização, quando os estudantes generalizaram resolvendo o item *b*, generalizando uma matriz como um modelo para determinar a rotação de um ângulo em um ponto, como já mencionado. Desse modo, a partir de informações derivaram ou induziram a fim de identificar pontos em comum e expandir seus domínios de validade (DREYFUS, 2002). Os estudantes que apresentaram características desse processo foram E7 e E13. Vejamos o registro escrito de E7 (figura 45).

Figura 45 – Registro escrito de E7 referente à tarefa 7



a) $T(x,y) = (-y, x)$. $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$T(A+\alpha B) = T(a_1+\alpha b_1, a_2+\alpha b_2) = (-a_2+\alpha b_2, a_1+\alpha b_1) =$

$= (-a_2, a_1) + \alpha(-b_2, b_1) = T(A) + \alpha T(B)$.

b) A matriz é: $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \cos 60° & -\text{sen}\,60° \\ \text{sen}\,60° & \cos 60° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2\sqrt{3}-1}{2} \end{bmatrix}$

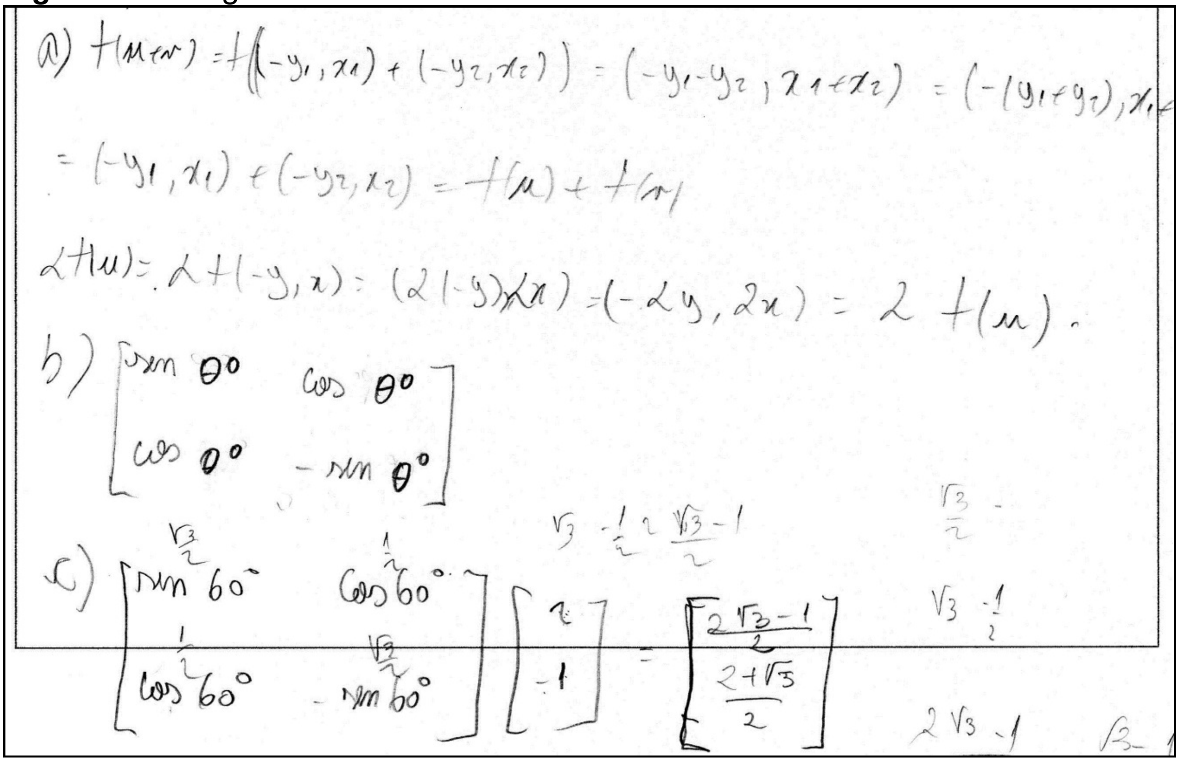
Fonte: Resolução entregue pelo estudante E7

O estudante determina a matriz canônica da rotação no item *b*, e a partir dessa resolve o item *c*, obtendo a imagem dos pontos (-2,1) na rotação de 60º.

Para a resolução do item *c*, era necessário que o estudante soubesse como realizar a transformação do ponto pela matriz canônica, a qual é realizada pela transformação por meio de uma matriz, ou seja, revelando que, além de mostrar que uma transformação é linear utilizando as propriedades do conceito, ele sabe resolver um problema aplicado utilizando outra relação de transformações lineares que é a transformação por meio de uma matriz. A partir disso, inferimos que o estudante E13, apresenta indícios do processo de síntese, pois soube combinar ou compor partes a fim de formar o todo, que é o mesmo caso de E7.

Podemos ressaltar no registro escrito do estudante E6, que ele determina a matriz canônica para rotação erroneamente, trocando as linhas da matriz. Mas na resolução do item c, utiliza de modo correto a matriz, demonstrando, nesse caso, que sabe realizar uma transformação por meio de uma matriz. Vejamos seu registro escrito (figura 46).

Figura 46 – Registro escrito de E6 referente à tarefa 7



Fonte: Resolução entregue pelo estudante E6

Nos registros escritos dos estudantes que apresentaram resolução para algum(s) itens ou todos da tarefa sete, inferimos indícios de características de todos os processos do Pensamento Matemático Avançado em dois registros, dos estudantes E7 e E13, e E10 e E6, os quais manifestaram indícios de características de alguns dos processos de representação. Vejamos o quadro (quadro 25) que apresenta as características dos processos manifestados pelos estudantes nas resoluções da tarefa sete.

Quadro 25 – Características dos processos do PMA em relação à tarefa 7

T7	**Características evidenciadas dos processos do PMA**	**Registros escritos**
R1	Escrevem símbolos para denotar elementos de uma transformação linear, sendo para representar vetores, escalares, espaços vetoriais, conjuntos e aplicações.	E6, E7, E10, E13
R2	Os símbolos estão entrelaçados com suas propriedades, ou seja, representam esquemas internos.	

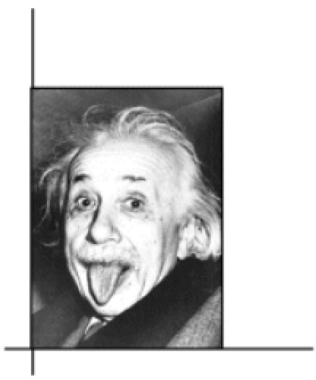
R3	Utilizam informações da imagem a fim de gerar uma representação mental.	E7, E10, E13
R4	Utilizam mais de uma representação em paralelo, fazem ligações entre essas representações, integrando-as e, quando necessário, mudando para uma representação mais eficiente.	E6, E7, E13
R5	Construiu uma estrutura matemática que incorporou as características do objeto, a matriz canônica para a rotação.	E7, E13
A1	Generalizou quando a partir das informações construiu a matriz canônica da rotação e expandiu os domínios de validade.	E6, E7, E13
A2	Combinou partes de tal modo a fim de formar o todo.	E7, E13

Fonte: Do autor

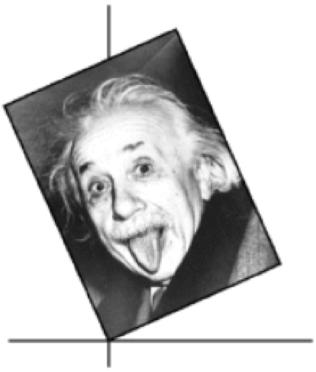
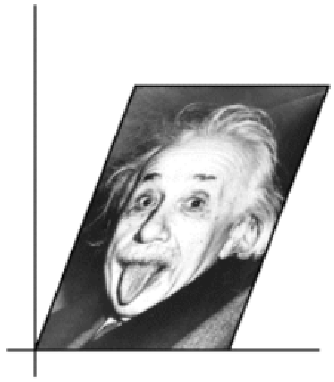
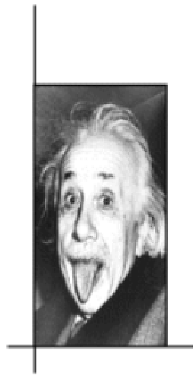
4.1.9 Análise da Tarefa 8

A tarefa:

Considere a ilustração abaixo como sendo a digitalização de uma fotografia famosa de Albert Einstein, e que, a partir desta, aconteceram três modificações geradas computacionalmente, as quais são transformações matriciais de R^2. Em cada caso escreva qual foi a transformação ocorrida. Justifique.



Digitalização

		
a)	b)	c)

Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 274, adaptado).

Dos treze estudantes que participaram da pesquisa, três não responderam a nenhum dos itens dessa tarefa, E2, E5 e E9. Dos dez estudantes que responderam a tarefa, três responderam um ou dois itens sem justificar: E4 que respondeu *a* e *b*; E11 que fez o item *a*; e E12 que respondeu o item *b*. Os demais sete estudantes, responderam aos três itens, porém apenas dois justificaram suas respostas, E6 que justificou o item c, e E13 que justificou os três itens.

Os agrupamentos construídos emergiram a partir das informações contidas na resolução de cada estudante, não foram construídos *a priori*. Para formá-los, consideramos os registros escritos dos estudantes que responderam a tarefa apresentando justificativas, com aqueles que apenas nominaram cada transformação, e daqueles que não responderam a tarefa. Como a tarefa possui três itens, letras *a*, *b*, e *c*, foram realizados três quadros cada um com os agrupamentos referentes a cada letra. Todos os agrupamentos referentes a essa tarefa são excludentes, pois a resolução de cada item só se encaixa em um agrupamento.

Para o primeiro quadro (quadro 26) que condiz às resoluções de treze estudantes referentes ao item *a*, emergiram quatro agrupamentos, A, B, C e D.

Quadro 26 – Agrupamentos da tarefa 8, item *a*

Agrupamentos	Registros escritos
A – Escreveu rotação.	E1, E3, E6, E7, E8, E10, E11
B – Escreveu rotação e justificou que a imagem gira em um ângulo em torno da origem e não da sua forma.	E13
C – Escreveu translação.	E4
D – Não respondeu ao item.	E2, E5, E9, E12

Fonte: Do autor

O próximo quadro (quadro 27) apresenta agrupamentos que emergiram das resoluções da tarefa 8, item *b*. Nesse, emergiram seis agrupamentos, F, G, H, I, J e K.

Quadro 27 – Agrupamentos da tarefa 8, item *b*

Agrupamentos	Registros escritos
F – Escreveu cisalhamento.	E4, E6, E7, E8
G – Escreveu cisalhamento em *x*.	E12
H – Escreveu cisalhamento e justificou que a imagem muda o local onde está e também muda o seu tamanho, obtendo um cisalhamento da forma (x+ky, y), por isso à medida que y aumenta, aumenta-se também a coordenada x.	E13
I – Escreveu translação.	E1, E3
J – Escreveu homotetia.	E10
K – Não respondeu o item.	E2, E5, E9, E11

Fonte: Do autor

Para o terceiro quadro (quadro 28) que representa os agrupamentos da tarefa oito, item *c*, dos registros escritos de sete estudantes, emergiram seis agrupamentos, L, M, N, O, P e Q.

Quadro 28 – Agrupamentos da tarefa 8, item *c*

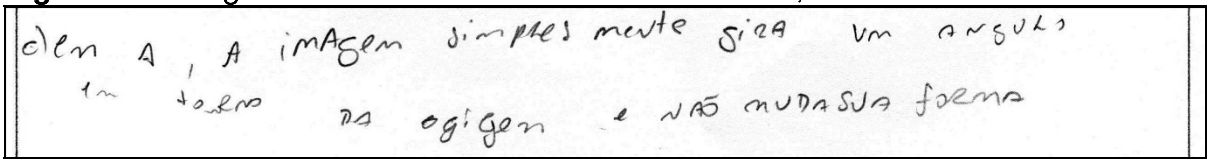
Agrupamentos	**Registros escritos**
L – Escreveu cisalhamento.	E1, E3
M – Escreveu homotetia.	E7, E10
N – Escreveu translação.	E8
O – Escreveu que multiplica as coordenadas pela constante.	E6
P – Escreveu cisalhamento e justificou que é em y, da forma (x, ky), temos um alongamento em y.	E13
Q – Não respondeu o item.	E2, E4, E5, E9, E11, E12

Fonte: Do autor

Para a tarefa oito: item *a*, nove estudantes responderam. Oito escreveram que a transformação é uma rotação, sendo que um, E13, justificou sua resposta, e E4 escreveu que é uma translação.

Ao escrever a palavra rotação, a qual é a resposta correta e foi dada pela maioria dos estudantes, podemos inferir que a partir da imagem esses estudantes puderam gerar uma representação mental, sendo que podemos considerar a imagem como sendo um artefato externo que, segundo Dreyfus (2002), é uma característica do processo de visualização. Então, inferimos que esses estudantes manifestaram indícios dos processos de representação mental e de visualização, os quais foram E1, E3, E6, E7, E8, E10, E11 e E13, para esse item. O estudante E13 justificou sua resposta e podemos ver o que a rotação representa para ele na transformação (figura 47).

Figura 47 – Registro escrito de E13 referente à tarefa 8, item *a*


alem A, A imagem simplesmente gira um angulo em torno da origem e não muda sua forma

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E13

Analisando as resoluções das tarefas anteriores as quais remetem ao tema rotação, tarefas 5 e 7, podemos inferir que o estudante E13 sabe o que é uma rotação, conhecendo seus elementos como a matriz canônica de rotação, além de demonstrar, utilizando a definição, que é uma transformação linear.

Como E13, o estudante E7 mostra conhecer alguns elementos de uma rotação em seus registros escritos, pois na tarefa cinco assinala corretamente que a rotação é uma transformação linear, porém não a justifica, e faz corretamente a tarefa sete, e também escreve a matriz canônica.

O estudante E6, afirma que a rotação é uma transformação linear nas tarefas cinco e sete, porém não manipula corretamente os elementos desse conceito ao utilizar as propriedades da definição.

Já o estudante E10, na tarefa cinco, escreveu que a transformação

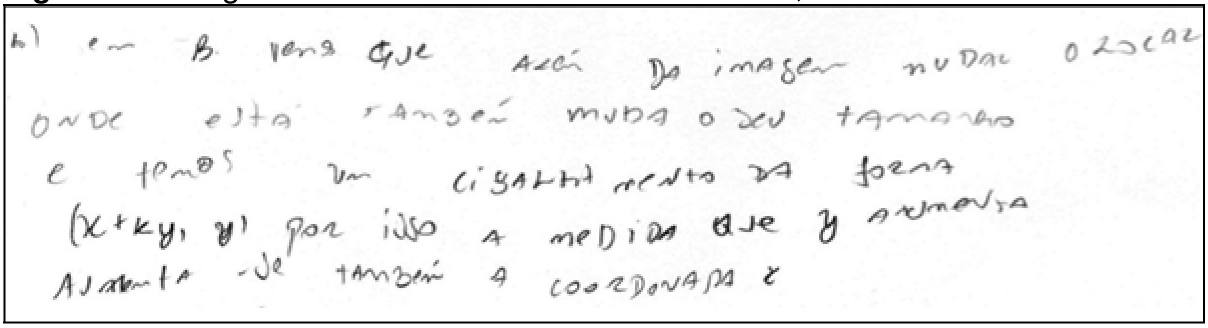
$T: R^2 \to R^2$ definida por: $T(x,y) = (-x,y)$,

não é linear, pois provou errado a definição desse conceito, mas na tarefa sete, a mesma transformação mostrou que é linear a partir da definição. Isso mostra uma confusão quanto ao conhecimento de elementos que fazem parte de uma rotação.

Quanto aos outros estudantes que responderam com a palavra rotação, não responderam as tarefas anteriores que dizem respeito a esse tema.

Para o item *b*, nove estudantes responderam a esse item, dois escreveram translação, E1 e E3, e um escreveu homotetia, E10. Seis estudantes mencionaram que a transformação que a imagem representa é um cisalhamento, desses, quatro escreveram apenas a palavra cisalhamento, E4, E6, E7, E8. O estudante E12, escreveu cisalhamento em *x*, e o estudante E13, justificou "[...] que além da imagem mudar o local onde está também muda o seu tamanho e temos um cisalhamento da forma (*x*+*ky*, *y*) por isso à medida que *y* aumenta, aumenta-se também a coordenada *x*". Vejamos o seu registro escrito (figura 48) referente ao item *b*.

Figura 48 – Registro escrito de E13 referente à tarefa 8, item *b*


b) em B vemos que além da imagem mudar o escalar onde esta também muda o seu tamanho e temos um cisalhamento da forma $(x+ky, y)$ por isso a medida que y aumenta aumenta-se também a coordenada x

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E13

Como no item anterior, podemos considerar que aqueles estudantes que responderam que é um cisalhamento, E4, E6, E7, E8, E12 e E13, apresentam indícios do processo de visualização e representação mental, referente à transformação de cisalhamento. Porém, dois estudantes mostraram que é um cisalhamento na direção de *x*, E12 e E13, além disso, E13 escreve a relação correta para esse cisalhamento, $(x+ky,\ y)$. Do modo como escreve inferimos que E13 manifesta em sua resolução indícios de outros processos do Pensamento Matemático Avançado.

O estudante E13 manifesta a representação simbólica, pois apresenta símbolos para representar a transformação, além disso, esses símbolos estão entrelaçados com algumas propriedades do conceito. Apresenta o processo de mudança de representação e alternância entre elas, pois demonstra representações distintas para o mesmo conceito, inferimos isso, porque explica na linguagem natural a transformação a partir de uma imagem disposta em uma representação gráfica, e utiliza a representação algébrica, quando escreve a transformação em pares ordenados.

Também constrói um modelo com a notação da transformação, explicando em sua escrita, "[...] à medida que *y* aumenta, aumenta-se também a coordenada *x*", ou seja, *x* e *y* são variáveis e, desse modo, ajusta-se a qualquer valor, tornando-se um modelo para a transformação em questão. Entrelaçado com o processo de modelação, podemos inferir o processo de generalização por ser uma expressão que representa a forma geral do cisalhamento de R^2 de fator *k* na direção *x*, e, por fim, manifesta o processo de síntese, pois forma um todo, combinando as partes.

Na tarefa cinco, dois itens, b e f, são cisalhamentos de R^2 de fator *k* na direção *x*, os estudantes que escreveram que a figura do item b é um cisalhamento e também marcaram os itens b e f na tarefa cinco, foram E6, E7 e E13. O estudante E6, ao provar que os itens são transformações lineares, comete alguns erros algébricos, não justificando corretamente a transformação linear. E os estudantes E7 e E13 não justificam os itens na tarefa cinco. Porém, pela análise realizada, inferimos que esses estudantes conhecem a notação de cisalhamento, $T:R^2 \to R^2$ definida por: $T(x,y) = (x + ky, y)$, e também a sua forma gráfica.

Para o item *c*, nenhum dos sete estudantes que responderam corretamente ao item, ou seja, escrever que é uma compressão. O estudante E6 escreveu que é a transformação que multiplica as coordenadas pela constante, contudo, nesse caso, é apenas uma coordenada que está sendo multiplicada pela constante. O estudante E13 escreveu que é um cisalhamento justificando que é da forma (*x, ky*) e tem um alongamento em y, porém é uma compressão em *x*. Dois escreveram também que é um cisalhamento, E1 e E3, mas sem justificar, E7 e E10 escreveram que é uma homotetia, e E8 escreveu que é uma translação.

Desse modo, como não houve respostas coerentes com o item *c*, não inferimos características dos processos do Pensamento Matemático Avançado para esse item.

Oito estudantes apresentaram indícios dos processos do Pensamento Matemático Avançado nos registros escritos da tarefa oito, sendo que sete manifestaram apenas os processos de representação mental e de visualização, E1, E3, E6, E7, E8, E10, E11, e um, E13, manifestou indícios de todos os processos.

O próximo quadro (quadro 29) apresenta as características dos processos do Pensamento Matemático Avançado manifestados pelos estudantes nas resoluções da tarefa oito.

Quadro 29 – Características dos processos do PMA em relação à tarefa 8

T8	Características evidenciadas dos processos do PMA	Registros escritos
R1	Escrevem símbolos para denotar elementos de uma transformação linear.	E13
R2	As notações, sejam simbólicas ou a linguagem natural, estão entrelaçadas com algumas propriedades em relação ao conceito, representando esquemas internos.	E1, E3, E6, E7, E8, E10, E11, E13
R3	Utilizam informações da imagem a fim de gerar uma representação mental.	E1, E3, E6, E7, E8, E10, E11, E13
R4	Utilizam mais de uma representação em paralelo, fazem ligações entre essas representações, integrando-as, e, quando necessário, mudando para uma representação mais eficiente.	E13
R5	Construiu uma estrutura matemática que incorporou as características do objeto, o cisalhamento de R^2 de fator *k* na direção *x*.	E13
A1	Generalizou quando a partir das informações construiu a forma geral do cisalhamento de R^2 de fator *k* na direção *x*.	E13
A2	Sintetizou quando combinou partes de tal modo a fim de formar o todo.	E13

Fonte: Do autor

4.2 CATEGORIAS

A categorização é a última fase da análise do conteúdo, a qual reúne um grupo de elementos comuns descritos previamente nas unidades de registro denominados nessa pesquisa como agrupamentos, os quais passaram por um processo de diferenciação, seguido de um reagrupamento realizado por analogia (BARDIN, 2004). O critério estabelecido para realizar a categorização foi semântico, utilizando categorias temáticas relacionadas com as características dos processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados nas resoluções das tarefas referentes aos conceitos de espaços vetoriais e transformações lineares.

Os agrupamentos descritos na seção anterior serviram-nos como base para a construção de cada quadro que representa as características dos processos do Pensamento Matemático Avançado manifestados pelos estudantes nas resoluções de cada tarefa, descrito no final das análises de cada uma. De modo que relacionamos o núcleo de sentido – elementos relacionados com o conteúdo de espaços vetoriais e/ou transformações lineares – com as características dos processos do Pensamento Matemático Avançado descrito no quadro seis, a fim de fazer uma fusão com os elementos comuns.

Para isso, seguimos as duas etapas da categorização: o inventário e a classificação. A etapa de inventário é a qual nos possibilita isolar os elementos; e a de classificação a de "[...] repartir os elementos, e portanto procurar ou impor uma certa organização às mensagens" (BARDIN, 2004, p. 112).

Realizamos as duas etapas após as análises dos registros escritos dos treze estudantes, pois percebemos a necessidade de investigar quais processos do Pensamento Matemático Avançado foram manifestados em cada tarefa, desse modo, isolamos esses elementos. Essa investigação resultou no próximo quadro (quadro 30).

Quadro 30 – Síntese dos processos do PMA presentes nas oito tarefas

Tn	Características manifestadas dos processos do PMA	Tarefas
R1	Escrevem símbolos para denotar elementos do objeto matemático, manipulando-os algebricamente.	T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7, T8.
R2	As notações, sejam simbólicas ou na linguagem natural, estão entrelaçadas com algumas propriedades em relação ao conceito, representando esquemas internos.	T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7, T8.
R3	Utilizam informações da imagem a fim de gerar uma representação mental.	T5, T7, T8.
R4	Utilizam mais de uma representação em paralelo, fazem ligações entre essas representações, integrando-as e, quando necessário, mudando para uma representação mais eficiente.	T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7, T8.
R5	Constroem uma estrutura ou teoria, um modelo, que incorpore as características do objeto.	T1, T2, T3, T7, T8.
A1	Generalizam quando, a partir das informações, identificam pontos em comum, a fim de expandir os domínios de validade.	T2, T3, T7, T8.
A2	Combinam partes de tal modo a fim de formar o todo.	T1, T2, T3, T5, T6, T7, T8.

Fonte: Do autor

Como podemos observar, nem todos os processos do Pensamento Matemático Avançado foram manifestados pelos estudantes nas oito tarefas. As únicas tarefas em que obtivemos indícios de todos os processos foram as de números sete e oito (T7 e T8).

O processo de visualização foi o menos manifestado, apenas nas tarefas cinco, sete e oito (T5, T7 e T8). Já os processos que estiveram presentes em todas as tarefas foram os de representação simbólica, mental e de mudança de representações e alternância entre elas (R1, R2 e R4).

A partir da construção desse quadro, tivemos o interesse de saber quais foram os processos do Pensamento Matemático manifestados individualmente pelos estudantes em cada tarefa, para isso construímos outro quadro (quadro 31).

Quadro 31 – Síntese dos processos do PMA manifestados pelos estudantes

	TAREFAS							
	T1	**T2**	**T3**	**T4**	**T5**	**T6**	**T7**	**T8**
E1	R1			R2		R1, R2,		R2, R3
E2								
E3								R2, R3
E4								
E5								
E6		R1, R2, R4		R2	R1	R1, R2, R4	R1, R2, R4	R2, R3
E7	R1, R2, R4, R5, A2	R1, R2, A2	R1, R2, R4, R5, A2	R1, R2, R4	R1, R2	R1, R2, R4, A2	R1, R2, R3, R4, R5, A1, A2	R2, R3
E8	R1, R2	R1, R2	R1, R2, R4, R5, A1, A2	R1, R2		R1		R2, R3
E9								
E10	R1, R2, R4, R5, A2	R1, R2, R4, R5, A2	R1, R2	R1, R2	R1	R1, R2, R4, A2	R1, R2, R3	R2, R3
E11								R2, R3
E12								
E13	R1, R2, R4, R5, A2	R1, R2, A1, A2	R1, R2, R4, R5, A2	R1, R2	R1, R2, R3, R4, A2	R1, R2, R4, A2	R1, R2, R3, R4, R5, A1, A2	R1, R2, R3, R4, R5, A1, A2

Fonte: Do autor

Podemos observar no quadro 31 que a maioria dos processos do Pensamento Matemático Avançado que foram manifestados nas resoluções dos estudantes foram os de representação, principalmente o de representação simbólica e mental. Apenas quatro estudantes, E7, E8, E10 e E13, manifestaram os processos de abstração: generalização ou síntese, além dos de representação.

O estudante E10 apresentou características apenas da sintetização nas duas tarefas relacionadas ao conceito de espaço vetorial e na tarefa seis que é para verificar se a transformação $T: R^2 \to R^3$ de uma matriz é linear.

E8 manifestou indícios dos dois processos de abstração na tarefa três, a qual trata da definição de transformações lineares.

E7 manifestou tanto a generalização como a sintetização em seus registros escritos, o primeiro processo de abstração manifestou apenas em uma tarefa, a de número sete, e para o segundo processo só não apresentou características nas tarefas quatro, cinco e oito.

O estudante E13 manifestou indícios dos dois processos de abstração nas tarefas de números dois, sete e oito, enquanto nas tarefas de números um, três, cinco e seis, manifestou apenas a sintetização. A tarefa quatro foi a única em que E13 não manifestou processo algum de abstração.

Os estudantes que apresentaram em suas resoluções apenas os processos de representação foram: E1, E3, E6 e E11.

Os estudantes E3 e E11 manifestaram apenas os processos de representação mental e visualização em um item da tarefa oito.

O estudante E1 manifestou os processos de representação simbólica, mental e de visualização.

E o estudante E6 manifestou os processos de representação simbólica, mental, visualização e mudança de representações e alternância entre elas.

Cinco estudantes não manifestaram processos do Pensamento Matemático Avançado, E2, E4, E5, E9 e E12.

Além da visão dos processos que os estudantes manifestaram em cada tarefa (quadro 31), juntamente com os agrupamentos e subagrupamentos de cada tarefa, possibilitou-nos inferir alguns conceitos de espaços vetoriais e transformações lineares que cada um apresentou. Desse modo, classificamos esses elementos e repartimo-los a fim de impor certa organização com relação ao

Pensamento Matemático Avançado e os conceitos em questão. Os estudantes que inferimos foram: E1, E3, E6, E7, E8, E10, E11 e E13.

Estudante E1:

Para o conceito de espaços vetoriais, inferimos que E1 tem uma noção da definição, pois cita que são necessárias oito propriedades para ser um espaço vetorial e dessas apresenta algumas, porém há uma confusão de alguns de seus elementos. Já para o conceito de transformações lineares, não apresenta a definição, mas consegue resolver parcialmente a tarefa seis utilizando a transformação por meio de uma matriz. E, na tarefa oito, identifica por meio da imagem a rotação.

Estudantes E3 e E11

Os estudantes E3 e E11, na tarefa oito identificam a partir da imagem a rotação.

Estudante E6

E6 tem uma noção da definição de espaço vetorial, pois escreve que são necessárias serem satisfeitas oito propriedades e cita as duas operações de adição e multiplicação, porém não escreve "multiplicação por escalar". Assinala corretamente quais conjuntos são espaços vetoriais na tarefa dois e utiliza o conceito de subespaço vetorial para justificar suas repostas.

A respeito de transformações lineares, o estudante cita elementos desse conceito, contudo não apresenta suas duas propriedades. Em outras tarefas, mostra conhecer incompletamente essas propriedades ao resolver parcialmente algumas transformações, mesmo assim confunde alguns de seus elementos.

Estudante E8

Como E6, o estudante E8 tem uma noção da definição de espaço vetorial, pois escreve que são necessárias serem satisfeitas oito propriedades e cita as duas operações de adição e multiplicação, porém não escreve “multiplicação por escalar”. Assinala corretamente quais conjuntos são espaços vetoriais na tarefa dois, e utiliza o conceito de subespaço vetorial para justificar suas repostas.

Em relação a transformações lineares, o estudante apresentou duas maneiras de definir o conceito, utilizando as duas propriedades separadamente, como a definição da combinação dessas propriedades. Contudo, não resolveu nenhuma tarefa para determinar se alguma transformação é linear.

Estudante E10

E10 conhece a definição de espaço vetorial e identifica corretamente quais conjuntos são espaços vetoriais na tarefa dois utilizando a definição. Para o conceito de transformações lineares, o estudante apresenta a definição utilizando as duas propriedades, porém omite alguns detalhes em sua notação. Na tarefa cinco não determina corretamente quais aplicações são lineares, porém nas tarefas seis e sete, consegue determinar que as transformações são lineares utilizando a definição e com maneiras diferentes de representar a transformação.

Estudantes E7 e E13

Tanto para E7, quanto para E13, podemos inferir que ambos têm um conhecimento relativo aos conceitos de espaços vetoriais e transformações lineares, pois escrevem suas definições e a partir dessas resolvem as tarefas propostas.

Inferimos que alguns estudantes não apresentaram elementos relacionados com os conceitos de espaços vetoriais e/ou transformações lineares, porque não responderem as tarefas ou por apresentar alguma resposta subjetiva que não evidenciasse alguma relação significativa com os objetos matemático em questão, como já mencionado nas análises de cada tarefa.

A partir dessa descrição, reagrupamos as informações a fim de formar as categorias.

Desse modo, atingimos um objetivo da categorização que é de “[...] fornecer, por condensação, uma representação simplificada dos dados brutos” (BARDIN, 2004, p. 112-113), ou seja, os dados brutos se tornaram organizados.

Vejamos as quatro categorias que emergiram do processo de análise de conteúdo (quadro 32):

Quadro 32 – Categorias em relação aos processos do PMA manifestados pelos estudantes

Estudante(s)	CATEGORIAS
E1 e E6	**1.** Utilizam de símbolos para representar alguns elementos da definição de espaços vetoriais. Manipulam algebricamente, em partes, elementos de transformações lineares.
E8	**2.** Utiliza de símbolos para representar alguns elementos da definição de espaços vetoriais. Escreve a definição de transformações lineares, utilizando mais de uma representação em paralelo.
E10	**3.** Apresenta a definição de espaços vetoriais e transformações lineares, utilizando símbolos e manipulando-os algebricamente. Constrói um modelo para a definição de espaços vetoriais incorporando os oito axiomas. Utiliza mais de uma representação em paralelo para transformações lineares, combinando partes a fim de formar o todo.
E7 e E13	**4.** Apresentam as definições de espaços vetoriais e transformações lineares, utilizando símbolos para representar seus elementos, manipulando-os algebricamente. Essas notações mostram ter relações com os conceitos. Utilizam mais de uma representação em paralelo, fazendo ligações entre essas representações, integrando-as, e sempre que necessário mudando para uma representação mais eficiente. Constroem uma estrutura ou teoria, um modelo que incorpore as características do objeto. Generalizam quando, a partir das informações, identificam pontos em comum a fim de expandir os domínios de validade. Combinam partes de tal modo a fim de formar o todo.

Fonte: Do autor

Cada categoria tem uma relação com algum(s) processo(s) do Pensamento Matemático Avançado. A categoria 1 condiz ao processo de representação simbólica (R1). A categoria 2, com os processos de representação simbólica, mental e mudança de representações e alternância entre elas (R1, R2 e R4). A categoria 3, além dos processos da categoria 2, entra também a sintetização (R1, R2, R4 e A2). E por fim, a categoria 4 abrange todos os processos do PMA (R1, R2, R3, R4, R5, A1, e A2). Vejamos o quadro (quadro 33) com os processos do PMA.

Quadro 33 – Síntese das características dos processos do PMA

PROCESSOS DO PMA		DESCRIÇÃO
REPRESENTAÇÃO	**R1: Simbólica**	Escrevem símbolos para denotar elementos do objeto matemático, manipulando-os algebricamente.
	R2: Mental	As notações, sejam simbólicas ou na linguagem natural, estão entrelaçadas com algumas propriedades em relação ao conceito, representando esquemas internos.
	R3: Visualização	Utilizam informações da imagem a fim de gerar uma representação mental.
	R4: Mudança de representações e alternância entre elas	Utilizam mais de uma representação em paralelo, fazem ligações entre essas representações, integrando-as, e quando necessário mudando para uma representação mais eficiente.
	R5: Modelação	Constroem uma estrutura ou teoria, um modelo, que incorpore as características do objeto.
ABSTRAÇÃO	**A1: Generalização**	Generalizam quando a partir das informações identificam pontos em comum, a fim de expandir os domínios de validade.
	A2: Sintetização	Combinam partes de tal modo a fim de formar o todo.

Fonte: Do autor

Os processos que inferimos nas categorias, são resultados da análise como um todo, ou seja, se algum estudante manifestou um dos processos apenas em um item ou tarefa, pode ser que não consideramos o mesmo processo manifestado no todo.

Um exemplo é dos estudantes E3 e E11, observamos em suas resoluções nas análises das tarefas, que manifestaram indícios dos processos de representação mental e de visualização apenas na tarefa oito, pois escreveram a palavra rotação na imagem que representa isso. Apesar de terem escrito a transformação correta, não podemos inferir que apresentaram indícios desses processos em todas as tarefas. Desse modo, não apresentaram características do PMA nas categorias.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos essa pesquisa com o objetivo de identificar e discutir que indícios/características dos processos do Pensamento Matemático Avançado são manifestados por estudantes do curso de Matemática da Universidade Estadual de Londrina ao lidarem com tarefas referentes ao conteúdo de transformações lineares. Para isso, usamos como pergunta norteadora: quais processos do Pensamento Matemático Avançado são manifestados nos registros escritos apresentados por estudantes do curso de Matemática ao resolverem tarefas relacionadas ao conteúdo de Transformações Lineares?

Para atingirmos nosso objetivo fizemos um estudo a respeito do Pensamento Matemático Avançado utilizando a concepção de Dreyfus (2002), Tall (1995) e Resnick (1987). Adotamos como base os processos de representação e abstração descritos por Dreyfus (2002) e fizemos uma comparação com os outros dois autores a fim de encontrarmos elementos comuns.

Como resultado, elencamos características comuns aos três autores a respeito do PMA, as quais foram sintetizadas no quadro 6 (p. 45), no capítulo 1 de fundamentação teórica. Esse quadro nos serviu de base para analisarmos as características dos processos do PMA presentes nos registros escritos dos participantes desta pesquisa.

Além disso, utilizamos o método de Análise do Conteúdo segundo Bardin (2004), a fim de direcionar-nos no percurso das análises das informações obtidas no instrumento aplicado aos estudantes, constituído de nove tarefas, uma em relação ao perfil dos estudantes e oito relacionadas aos conceitos de transformações lineares se espaço vetoriais.

Desse modo, num processo de desconstrução e (re)construção, elaboramos agrupamentos e subagrupamentos referentes aos registros escritos de cada estudante, os quais nos possibilitaram fazer inferências em relação às características dos processos do Pensamento Matemático Avançado e a composição das categorias.

A partir disso, em um movimento interpretativo dos registros escritos dos estudantes em relação às oito tarefas referentes aos conceitos de espaços vetoriais e transformações lineares, emergiram quatro categorias constituídas pelas características dos processos do Pensamento Matemático Avançado manifestadas pelos estudantes.

As categorias emergiram a partir das características dos processos do PMA apresentadas pelos estudantes em relação ao instrumento todo, ou seja, o que buscamos foram indícios dos mesmos processos de representação e/ou abstração, relacionados aos temas de espaços vetoriais e/ou transformações lineares.

Diante disso, evidenciamos a manifestação de todos os processos do Pensamento Matemático Avançado, de acordo com o quadro 6 (p. 45), nas resoluções do instrumento da pesquisa. Seis estudantes manifestaram características dos processos do PMA na resolução da maioria das tarefas, os quais foram: E1, E6, E7, E8 E10 e E13.

Em relação às características dos processos de representação, compreendemos que foram manifestadas na resolução de todas as tarefas, pois ao utilizarem símbolos ou linguagem natural, possibilitaram-nos inferir a respeito de características das representações simbólicas e mentais.

Em alguns registros escritos, os estudantes apresentaram características do processo de mudança de representações e alternância entre elas, ou seja, transitaram por mais de uma representação para os objetos matemáticos em questão. Para Dreyfus (2002), a utilização de mais de uma representação está ligada ao processo de aprendizagem, de modo que há uma necessidade cognitiva em questão, ou seja, o pensamento "[...] é reforçado quando os estudantes de matemática são capazes de colocar-se mentalmente em uma representação particular, por exemplo, uma visual. É ainda mais aumentada, quando eles são capazes de utilizar várias representações em paralelo" (DREYFUS, 2002, p. 39, tradução nossa[41]).

Os estudantes E7, E10 e E13, manifestaram o processo de modelação, construindo um modelo matemático para um objeto. Para Dreyfus (2002) esse modelo pode ser usado para o estudo do comportamento do objeto, e foi o que esses estudantes fizeram, utilizando descrição do conceito matemático, a definição de espaços vetoriais e transformações lineares para a resolução das outras tarefas.

[41] […] is enhanced if they are able to place themselves mentally in a particular representation, e.g. a visual one. It is even more enhanced, when they are able to use several representations in parallel.

Dos seis estudantes, três, E1, E6 e E8, apresentaram características apenas dos processos de representação, dois manifestando somente a representação simbólica e o outro os processos de representação simbólica, mental e mudança de representações e alternância entre elas.

Para os processos de abstração, somente três estudantes manifestaram características relativas aos dois processos que são a generalização e a síntese, englobando todo o instrumento. Segundo Dreyfus (2002), tanto a generalização quanto a síntese são incentivos para abstrair um objeto matemático. Nesse sentido, os estudantes manifestaram o processo de generalização quando, a partir de informações encontraram pontos em comum escrevendo uma expressão geral para o objeto em questão. E de síntese, quando combinaram elementos a respeito do objeto a fim de formar o todo, resolvendo a tarefa.

Dos processos de abstração, E10 manifestou apenas a síntese e E7 e E13 além da síntese manifestaram características de generalização.

Apenas dois estudantes, E7 e E13, apresentaram características de todos os processos do PMA na resolução do instrumento todo. Apresentando vários dos processos de representação e/ou abstração em cada tarefa, e na tarefa sete, manifestando todos, além disso, E13 manifestou todos na tarefa oito também.

Não podemos inferir se os três estudantes que manifestaram os processos de abstração do Pensamento Matemático Avançado compreendem o objeto transformações lineares, pois existem outros elementos que fazem parte desse conteúdo que não foram contemplados nesta pesquisa. Tomando como base que a compreensão para Dreyfus (2002) pode ser atingida por meio de uma sequência de atividades, na qual processos mentais ocorrem e interagem, podemos inferir que, em partes, esses estudantes compreenderam elementos relativos a esse conceito, como a própria definição, pois manifestaram os processos do PMA em atividades referentes ao objeto matemático em questão.

As categorias confirmam que os estudantes podem manifestar características dos processos do Pensamento Matemático Avançado em relação a esses conceitos durante a graduação. Porém, sete estudantes não apresentaram características desses processos na resolução do instrumento, porque não responderam as tarefas e/ou escreveram respostas subjetivas que não mostrassem algum conhecimento do assunto. Isso é preocupante, pois todos haviam cursado a disciplina de Álgebra Linear no ano anterior.

Percebemos nos registros escritos da maioria desses estudantes, dificuldades com as notações para os conceitos, assim como a manipulação dessas notações. Entendemos que, a Álgebra Linear, em geral, é uma disciplina do primeiro ano do curso de Matemática, e exige um formalismo por parte dos estudantes, com o qual eles não estão acostumados. E esse é um dos motivos pelo qual, existe a necessidade dos professores oportunizarem momentos de reflexão em relação aos objetos dessa disciplina, pois apenas definir e exemplificar conceitos/objetos matemáticos abstratos promovendo a repetição de procedimentos e técnicas não são suficientes para a compreensão.

Conforme já mencionado, o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado pode contribuir para momentos de reflexão desses estudantes, a fim de que compreendam os conceitos matemáticos em questão e seus objetos envolvidos. Diante dos resultados dessa pesquisa, percebemos que conduzir os estudantes ao desenvolvimento dos processos do PMA durante o ensino e aprendizagem do conteúdo de transformações lineares pode levá-los a abstração desse objeto, ou seja, a sua compreensão.

Além disso, deixar claro aos estudantes quais são esses possíveis processos que estão acontecendo em sua aprendizagem e podem potencializar a aprendizagem, pois, para Dreyfus (2002), os processos do Pensamento Matemático Avançado não acontecem por si mesmos e, se acontecem, não são necessariamente conscientes por parte dos estudantes.

De acordo com Dreyfus (2002), um dos objetivos do professor de matemática do Ensino Superior é de tornar os estudantes conscientes dos processos envolvidos no Pensamento Matemático Avançado e suas interações, pois, desse modo, é possível potencializar o pensamento matemático do estudante próximo ao de um matemático. Portanto, promover conscientemente o desenvolvimento desse tipo de pensamento nos estudantes, possibilita o caminho à abstração do objeto matemático em questão.

Nesse sentido, percebemos que existem dificuldades por parte dos estudantes quanto à compreensão dos objetos matemáticos de um conceito abstrato como transformações lineares. Por esse motivo, há necessidade de que o professor do Ensino Superior possibilite aos seus alunos meios para suprirem essas dificuldades, busquem “novas” formas/metodologias de ensino e aprendizagem além da tradicional, que é definir e exemplificar o objeto, para que esses conceitos abstratos sejam realmente compreendidos.

Diante do exposto, como continuidade desse trabalho, poderia ser construída uma possível proposta de abordagem do ensino e a aprendizagem do conteúdo transformações lineares, objetivando o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 3. Ed. Lisboa: Edições 70, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BEAN, D. **O que é modelagem matemática?** São Paulo: SBEM, ano 8. n. 9, 2001.

BERTOLAZI, K. S. **Conhecimentos e Compreensões revelados por estudantes de Licenciatura em Matemática sobre Sistemas de Equações Lineares**. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2012.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação: uma** introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994.

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

DREYFUS, T.. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. Kluwer Academic Publishers, 2002.

DOMINGOS, A. Teorias cognitivas e aprendizagem de conceitos matemáticos avançados. In: **XVII Seminário de Investigação em Educação Matemática**, Setúbal, 2006.

ELIAS, H. R. **Difiuldades de Estudantes de Licenciatura em Matemática na compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos**. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2012.

FIORENTINI, D.; MIGUEL, A.; MIORIN, M. **Contribuição para um Repensar...** a Educação Algébrica Elementar. Pro-Posições.v.4, n.1 [10], p. 78-91, 1993.

HAREL, Guershon; KAPUT, James. **The Role of Conceptual Entities and their symbols in buildingAdvancedMathematicalConcepts.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. Kluwer Academic Publishers, 2002.

KARRER, M. **Um estudo sobre as Transformaçoes Lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica**. 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2006.

LIMA, E. **Álgebra linear**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

LIMA, E. **Geometria analítica e álgebra linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

OLIVEIRA, V. C. A. de. **Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em álgebra linear**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro. 2002.

PONTE, J. P. da; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico.** Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC, 2009.

POOLE, D. **Álgebra Linear**. SãoPaulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

RESNICK, L. B. **Education and learning to think**. Washington: National Academy Press, 1987.

SANTOS, A. T. C. dos. **O Ensino da Função Logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do *software* GeoGebra**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2011.

TALL, D. **Cognitive Growth In Elementary and Advanced Mathematical Thinking.** Proceedings of 19th international conference for the psychology of mathematics education, 1995, v. 1.

TALL, D. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA. Resolução CEPE 0230/2009. **Reformula o Projeto Pedagógico do Curso de Matemática – Habilitação:** Licenciatura, a ser implantado a partir do ano letivo de 2010. Londrina, 2009. Disponível em: <http://www.uel.br/prograd/docs_prograd/resolucoes/2009/resolucao_229_09.pdf>. Acesso em 01 out. 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Termo de Consentimento livre e esclarecido

Eu, ..., portador(a) do R.G. .... e CPF..., autorizo Alessandra Senes Marins, estudante de mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL, com a orientação da Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli, a utilizar em partes ou integralmente, os meus registros escritos que constam no instrumento aplicado (atividades desenvolvidas em sala de aula que possibilitem o registro escrito dos estudantes), podendo divulgá-los em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que seja citado(a) apenas como participante da pesquisa, garantido o anonimato no relato da pesquisa.

Declaro ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Londrina, .../........./.........

ASS.:____

APÊNDICE B

Estudante nº _______

Idade: ___________

Cursa: (   ) Bacharelado e/ou (   ) Licenciatura

Ano que começou a graduação: ____________

Provável ano de conclusão: ____________

Que ano/série de matemática está cursando em 2013: ______________

Ano que cursou a disciplina de Álgebra Linear: ______________

Quantas vezes fez esta disciplina: _____________

Como foi fazer a disciplina de Álgebra Linear? Teve alguma dificuldade com algum conteúdo? Explique.

Você trabalha ou já trabalhou como professor de matemática?

(   ) Sim   (   ) Não

Caso a resposta seja afirmativa, marque o(s) segmento(s) em que atuou destacando a série e o ano letivo.

Segmento		Série	Ano
( )	Ensino Fundamental I - 1º ao 5º anos		
( )	Ensino Fundamental II – 6º ao 9º anos		
( )	Ensino Médio – 1º ao 3º anos		
( )	Curso pré-vestibular		
( )	Ensino Superior (no lugar de série colocar a disciplina).		

Observação: