Universidade Estadual de Londrina

JOÃO HENRIQUE LORIN

RELAÇÕES ENTRE TEOREMAS-EM-AÇÃO E OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS DO CONCEITO DE INFINITO

LONDRINA
2018

JOÃO HENRIQUE LORIN

RELAÇÕES ENTRE TEOREMAS-EM-AÇÃO E OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS DO CONCEITO DE INFINITO

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Irinéa de Lourdes Batista.

LONDRINA
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Lorin, João Henrique.

RELAÇÕES ENTRE TEOREMAS-EM-AÇÃO E OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS DO CONCEITO DE INFINITO / João Henrique Lorin. - Londrina, 2018.

181 f. : il.

Orientador: Irinéa de Lourdes Batista.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2018.

Inclui bibliografia.

1. infinito - Tese. 2. infinito atual - Tese. 3. obstáculos epistemológicos - Tese. 4. teoremas-em-ação - Tese. I. Batista, Irinéa de Lourdes. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

JOÃO HENRIQUE LORIN

RELAÇÕES ENTRE TEOREMAS-EM-AÇÃO E OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS DO CONCEITO DE INFINITO

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina.

COMISSÃO EXAMINADORA

____
Prof.ª Dr.ª Irinéa de Lourdes Batista
Universidade Estadual de Londrina

____
Prof.ª Dr.ª Veridiana Rezende
Universidade Estadual do Paraná – Campo Mourão

____
Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul – Campo Grande

____
Prof.ª Dr.ª Eliane Maria de Oliveira Aramam
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Cornélio Procópio

____
Prof.ª Dr.ª Ângela Marta Pereira Das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 02 de abril de 2018.

Dedico este trabalho a toda minha família, em especial a meus pais, Maria Aparecida Lorin e João Lorin, e para minha adorável Brenda Romanoski que esteve presente num dos momentos mais importantes da minha vida.

Também dedico a você, que, por motivos fortuitos ou intencionais, está diante deste texto, e espero, com isso, provocar-lhe reflexões…

AGRADECIMENTOS

Ao grupo Ifhiecem que me acolheu desde 2012.

A minha orientadora e professora Irinéa que soube de maneira brilhante fazer com que eu pudesse organizar minhas ideias nesta tese.

A Fundação Araucária, pelo apoio financeiro.

Aos funcionários da secretaria do CCE-UEL que sempre me atenderam com destreza e simpatia.

Ao colegiado de matemática da Unespar - Campo Mourão, pelas licenças concedidas. Aos professores Talita, Fábio, Luciano, Veridiana, Valter, Jair e Wesley que para além de colegas de trabalho, somos amigos desde 1999 quando entramos na graduação.

Aos meus pais e irmãos, que sempre estiveram ao meu lado, e que tenho muito orgulho de tê-los em minha vida.

Aos meus cunhados e sobrinhos.

Aos meus tios Antônio Urbano da Silva (tio Tonho) e Antônio Urbano da Silva (tio Quim) e a toda minha família.

A todos aqueles que contribuíram para minha formação, em especial, as professoras: Isaura (pré-escola), Lourdes (1ª série), Marisa (2ª série), Sílvia (3ª série) e Maria Antônia (4ª série).

A minha namorada, Brenda Romanoski, pela paciência e dedicação e carinho, principalmente nesses últimos meses que antecederam minha defesa.

"É a curiosidade – em todo caso, a única espécie de curiosidade que vale a pena ser praticada com um pouco de obstinação: não aquela que procura assimilar o que convém conhecer, mas a que permite separar-se de si mesmo. De que valeria a obstinação do saber se ele assegurasse apenas a aquisição dos conhecimentos e não, de certa maneira, e tanto quanto possível, o descaminho daquele que conhece?"

(Nietzsche)

LORIN. João Henrique. **RELAÇÕES ENTRE TEOREMAS-EM-AÇÃO E OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS DO CONCEITO DE INFINITO.** 2018. 181 fls. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina.

RESUMO

Partindo do pressuposto que o conceito de infinito possui obstáculos, tanto no decorrer da história quanto no ambiente escolar, nossa hipótese de pesquisa é: será que é possível relacionar obstáculos epistemológicos com conhecimentos mobilizados por alunos em situações que envolvam o conceito de infinito? Esta pesquisa, portanto, tem por objetivo investigar a relação entre obstáculos epistemológicos (OE), identificados no decorrer da história da conceitualização do infinito enquanto objeto (infinito atual), e os conhecimentos mobilizados por 3 (três) acadêmicos do último ano de licenciatura em Matemática e 1 (um) egresso, em situações relacionadas a este conceito. Para alcançar esse objetivo foi necessário realizar as seguintes etapas: identificar OE no decorrer da história no que se refere ao conceito de infinito; criar situações de ensino que problematize esses OE; identificar possíveis teoremas-em-ação falsos (TAF) mobilizados pelos acadêmicos mediante as situações criadas, e, por fim, estabelecer relação entre os OE e os TAF, mobilizados pelos alunos. A coleta de dados se deu por meio de uma entrevista semiestruturada, composta de atividades que consideraram pressupostos da teorização dos campos conceituais de Vergnaud e da teorização das situações didáticas de Brousseau. Para a obtenção e análise dos fragmentos das respostas dos alunos, utilizamos como suporte teórico-metodológico a análise de conteúdo de Bardin. Como resultado, concluímos que a investigação dos OE do conceito de infinito no decorrer da história da matemática contribuiu para que elaborássemos situações de ensino no sentido de Vergnaud, de modo que criássemos um ambiente favorável ao aparecimento dos TAF mobilizados pelos sujeitos da pesquisa. Os conhecimentos mobilizados pelos alunos que foram caracterizados como TAF puderam, em parte, serem desmobilizados. Além disso, essa desmobilização pode ser facilitada quando se usa argumentos baseados nos constructos teóricos da história da matemática, e que foram desenvolvidos para superar tais OE. Deste modo, validamos nossa hipótese de pesquisa na medida em que ficaram estabelecidas relações entre os OE do conceito de infinito e os TAF mobilizados nos sujeitos da pesquisa.

Palavras-chave: infinito, infinito atual, obstáculos epistemológicos, teoremas-em-ação.

LORIN. João Henrique. **RELATIONS BETWEEN THEORIES-IN-ACTION AND EPISTEMOLOGICAL OBSTACLES OF THE INFINITE CONCEPT.** 2018. 181 fls. Thesis (Doctorate in Science Teaching and Mathematical Education) – States University of Londrina.

ABSTRACT

Starting from the assumption that the concept of infinity has obstacles both in the course of history and in the school environment, our research hypothesis is: can it possible to relate epistemological obstacles with knowledge mobilized by students in situations that involve the concept of infinity? This research, therefore, aimed to investigate the relationship between epistemological obstacles (OE), identified in the course of the history of the conception of the infinite as object (actual infinite), and the knowledge mobilized by 3 (three) students of the last year of licentiate in Mathematics and 1 (one) egress, in situations related to this concept. In order to achieve this goal, it was necessary to perform the following steps: identify OE throughout history with regard to the concept of infinity; create teaching situations that problematize these OE; to identify possible false theorems-in-action (TAF) mobilized by the academics through the situations created, and, finally, to establish a relationship between the OE and the TAF, mobilized by the students. The data collection took place through a semistructured interview, composed of activities that considered assumptions of the theorizing of the conceptual fields of Vergnaud and theorization of the didactic situations of Brousseau. In order to obtain and analyze the fragments of the students' answers, we used as theoretical and methodological support the content analysis of Bardin. As a result, we conclude that the OE research of the concept of infinity in the course of the history of mathematics contributed to the development of teaching situations in the sense of Vergnaud, so that we create an environment favorable to the appearance of TAF mobilized by the research subjects. The knowledge mobilized by the students that were characterized as TAF could, in part, be demobilized. Moreover, such demobilization can be facilitated by using arguments based on the theoretical constructs of the history of mathematics, which have been developed to overcome such OE. In this way, we validate our research hypothesis insofar as relations were established between the OE of the concept of infinity and the TAF mobilized in the subjects of the research.

Keywords: infinite, actual infinite, epistemological obstacles, false theorems-in-action.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IFHIECEM	- Investigações em História e Filosofia da Ciência, e Educação em Ciência e Matemática.
HC	- Hipótese do Contínuo.
OE	- Obstáculos Epistemológicos
TCC	- Teoria dos Campos Conceituais.
TAF	- Teoremas-em-ação falsos.
TSD	- Teoria das situações didáticas
HM	- História da Matemática.
UC	- Unidade Temática de Contexto.
UR	- Unidade de Registro.

Sumário

INTRODUÇÃO

O espaço, a fronteira final...

Esta pesquisa apresenta possíveis obstáculos epistemológicos e conhecimentos falsos, mobilizados pelos investigados, referentes ao conceito de infinito, mais especificamente o de *infinito atual*. Em âmbito geral, a pesquisa se insere em uma discussão que relaciona resultados de estudos histórico-epistemológicos com a psicologia e o ensino.

O interesse pelo tema começou a surgir, ainda que timidamente, durante a pesquisa de mestrado, quando, diante do estudo da constituição do paradigma pitagórico[1], apareceram discussões acerca do infinito. Esse interesse intensificou-se quando percebemos que, na matemática, são usados conceitos distintos de infinito e que essa diferenciação nem sempre é discutida na formação inicial dos professores de matemática.

Além disso, a afinidade com as discussões a respeito de história e filosofia da ciência aprofundaram-se com o ingresso, em 2012, no grupo Investigações em História e Filosofia da Ciência, e Educação em Ciência e Matemática (IFHIECEM). De princípio, com base em literaturas que fizeram parte da nossa vida acadêmica, sabíamos de dificuldades enfrentadas no entendimento do conceito de infinito, tanto no decorrer da história da matemática, quanto em situações de ensino e aprendizagem. A partir de 2014, com o ingresso no programa de doutorado, surgiram as primeiras conjecturas da pesquisa, como, por exemplo, a possibilidade de relacionar obstáculos epistemológicos (OE) da teoria de Brousseau com invariantes operatórios da teoria de Vergnaud.

Uma frase que pode ter permeado o imaginário de muitos adultos de hoje desde a sua infância foi: *O espaço, a fronteira final! Estas são as viagens da nave estelar Enterprise...* Esse monólogo introdutório da série de tevê americana Star Trek pode causar o seguinte pensamento indutivo e ingênuo - Se o espaço é a fronteira final e o espaço é infinito, então a fronteira não tem final?

---

[1] Termo utilizado por este autor que pode ser visto na dissertação de mestrado: Uma Revolução

Essa dúvida é causada, principalmente, pela relação de identificação entre o infinito e o ilimitado, isto é, se algo tem limite, logo, não é infinito. Entretanto, quando estudamos conteúdos de matemática que se relacionam com processos infinitos, percebemos que, em alguns casos, essa identificação não está adequada.

Inicialmente, podemos conjecturar que a falta de diferenciação entre os tipos de infinitos na matemática está no cerne dessa inadequação. No consenso científico vigente, o conceito de infinito na matemática é definido por *infinito potencial* e *infinito atual*. Segundo Waldegg (1996), o primeiro (*infinito potencial*) está associado à ausência de limites ou fronteiras de um processo sem fim, o devir; já o segundo (*infinito atual*), à ideia de totalidade, de completude.

> [...] la primera está asociada a la ausencia de límites o de fronteras, a la falta de conclusión o de término de um proceso que se repite o que progresa indefinidamente. Bajo esta significación, el infinito es, literalmente, lo que no tiene fin, lo que siempre (infinito temporal) se puede continuar. A este tipo de infinito lo llamamos infinito potencial [...] En la segunda connotación, el infinito está asociado a la idea de totalidad, de completez y de unidad. Un proceso (potencialmente infinito en sus orígenes) se considera ahora acabado y los límites, alcanzados. Esta es la forma en la que el matemático piensa hoy en el conjunto de todos los números, sin que tenga la necesidad de nombrar o pensar cada uno de ellos, individualmente. Este infinito se llama infinito actual [...][2] (WALDEGG, 1996, p. 107-108).

Na comunidade matemática a discussão a respeito da natureza do infinito não é nova, é possível encontrar o interesse em discussões a respeito do infinito desde as civilizações antigas, como na Egípcia e na Babilônica.

> Ao longo do tempo o conceito de infinito foi alvo de uma discussão ardente. Desde a Grécia clássica que se tenta definir tal conceito. Demócrito, Zenão, Aristóteles, Arquimedes, Galilei, Bolzano, Dedekind, Cantor, Weierstrass, Poincaré, Hilbert, Borel, Russel, Robinson... são apenas alguns dos matemáticos que se dedicaram a este assunto (SAMPAIO, 2016, p.1).

Entretanto foi no final do século XIX e início do século XX que ficou explicitada uma das maiores crises nos fundamentos da matemática e que atingiu as

[2] [...] O primeiro está associado à ausência de limites ou fronteiras, à falta de conclusão ou término de um processo que se repete ou progride indefinidamente. Sob essa significação, o infinito é, literalmente, o que não tem fim, o que sempre (infinito temporário) pode ser continuado. Este tipo de infinito que denominamos de infinito potencial [...] Na segunda conotação, o infinito é associado com a ideia de totalidade, de completude e unidade. Um processo (potencialmente infinito nas origens) agora é considerado terminado e os limites, alcançados. Essa é a maneira pela qual um matemático pensa hoje acerca do conjunto de todos os números, sem ter a necessidade de nomear ou pensar cada um deles individualmente. Este infinito é denominado de infinito atual [...] (TRADUÇÃO NOSSA).

bases de todas as áreas desse conhecimento. Em 1925, David Hilbert, em uma palestra intitulada “Sobre o Infinito[3]”, dizia que a natureza do infinito precisava ser elucidada, já que os matemáticos e filósofos da época buscavam um consenso acerca da natureza da verdade matemática. David Hilbert afirmava que só era possível trilharmos os caminhos da verdade matemática se fôssemos capazes de desvendarmos a natureza do Infinito. Esse caminho, para Hilbert, se passava pela concepção de infinito completado:

> Will man in Kürze die neue Auffassung des Unendlichen, der Cantor Eingang verschafft hat, charakterisieren, so könnte man wohl sagen: in der Analysis haben wir es nur mit dem Unendlichkleinen und dem Unendlichengrobem als Limesbegriff, als etwas Werdendem, Entstehendem, Erzeugtem, d. h., wie man sagt, mit dem *potentiellen Unendlichen* zu tun. Aber das eigentlich Unendliche selbst ist dies nicht. Dieses haben wir z. B., wenn wir die Gesamtheit der Zahlen 1, 2, 3, 4,… selbst als eine fertige Einheit betrachten oder die Punkte einer Strecke als eine Gesamtheit von Digen ansehen, die fertig vorliegt. Diese Art des Unendlichen wird als *aktual unendlich* bezeichnet[4] (HILBERT, 1926, p. 167).

Apesar do longo período de discussões a respeito do *infinito potencial* e *infinito atual* na comunidade matemática, essa diferenciação pode passar despercebida na formação inicial de futuros professores de matemática, resultando num tratamento não apropriado ao conceito de infinito no ensino básico e no superior.

> [...] no existe en los programas escolares – desde la escuela elemental hasta el fin de los estudios secundários – ningún capítulo dedicado al tratamiento del infinito que prepare la unificación de ideas y operaciones, y la confrontación de aspectos intuitivos y formales. Continuamente se evitan situaciones que consideren como actual lo no-acabado o como terminada una operación que progresa al infinito. No existe, en suma, una preparación cognitiva para interiorizar el infinito actual[5] (WALDEGG, 1996, p. 108).

---

[3] Conferência proferida em 4 de junho de 1925 num congresso da Sociedade Matemática da Westfalia, em Münster, em homenagem a Karl Weierstrass. Traduzido por W.A.Carnielli a partir do original alemão publicado em *Mathematische Annallen* (Berlim) v. 95 (1926), pp. 161-190.

[4] Alguém que desejasse caracterizar brevemente a nova concepção do infinito que Cantor introduziu, poderia afirmar que em análise lidamos com o infinitamente grande e o infinitamente pequeno somente como conceitos-limite, como algo a acontecer ou vir a ser, isto é, como infinito potencial. Mas este não é o verdadeiro infinito. Encontramos o verdadeiro infinito somente quando consideramos a totalidade dos números 1, 2, 3, 4, ... como uma unidade completa, ou quando tomamos os pontos de um intervalo como uma totalidade que existe, de uma só vez. Este tipo de infinito é conhecido como infinito atual ou completado (TRADUZIDO POR W.A.CARNIELLI).

[5] [...] não existe nos programas escolares - desde a escola primária até o final dos estudos secundários - nenhum capítulo dedicado ao tratamento do infinito que prepara a unificação de ideias e operações e o confronto de aspectos intuitivos e formais. Continuamente se evitam situações que considerem como atual o inacabado ou como terminada uma operação que progride para o infinito.

Waldegg (1996) chamou a atenção para a falta de um tratamento adequado acerca do conceito de infinito em programas escolares, correspondentes ao ensino básico. Em geral, evita-se uma abordagem que considera o infinito como um objeto acabado. Essa inadequação na educação básica a respeito do conceito de infinito pode dificultar ainda mais o seu entendimento, considerado um dos mais complexos e um dos obstáculos a ser superado no ensino de matemática.

No ensino superior, o conceito de infinito também permeia a estrutura curricular, pois, segundo Mena-Lorca (2015), o infinito possui uma abordagem complexa e indispensável para alguns tópicos da matemática.

> El infinito es una noción compleja de abordar en distintos niveles escolares y que aparece en el aprendizaje de ciertos tópicos matemáticos indispensables tales como, entre otros, límites, series, axioma del supremo, procesos recursivos, conjuntos infinitos y acotados[6] (MENA-LORCA *et al*, 2015, p. 332).

Autores como Moreno e Waldegg (1991) analisam as diferentes etapas da evolução conceitual de *infinito atual* ou *infinito real*. Jahnke (2001) também se imbricou na epistemologia da matemática para tentar elucidar como se constituíram os conceitos de infinito. Waldegg (1996) mostra que a identificação de OE, no decorrer da história, ajuda na compreensão da natureza do conceito e no seu domínio didático. Amadei (2005) apresenta relações entre o processo epistemológico e histórico na construção do conceito de infinito com o processo de aprendizagem deste conceito.

Em sua tese *O Infinito e as Metáforas no Ensino de Cálculo,* Mometti (2007) defende, dentre outras ideias, que as metáforas e montagens conceituais, juntamente com a história e a epistemologia do conceito de infinito, podem facilitar a aprendizagem do aluno na diferenciação dos conceitos de infinito. Sampaio (2006) e (2009) apresenta concepções de infinito de alunos do ensino secundário em uma cidade de Portugal.

Sierpinska (1985) apresentou uma investigação a respeito da noção de limite num estudo de casos (04 investigados), e ainda, listou uma série de

---

Não existe, em suma, uma preparação cognitiva para internalizar o infinito atual (TRADUÇÃO NOSSA).

[6] O infinito é uma noção complexa para abordar em diferentes níveis escolares e aparece na aprendizagem de certos tópicos matemáticos essenciais, como, entre outros, limites, séries, axioma do supremo, processos recursivos, conjuntos infinitos e limitados (TRADUÇÃO NOSSA).

obstáculos relativos a essa noção, sendo que o primeiro dessa lista foi denominado de *horror ao infinito*. D'amore *et al* (2004), em seu artigo *Il 'senso dell'infinito',* apresentam pesquisas com alunos em diferentes níveis de escolaridade, entre esses, o nível superior. D'amore *et al* (2004) identificaram, por exemplo, que menos de 35% dos alunos investigados no ensino superior acreditavam na afirmação de que há mais números reais entre 0 e 1, do que todo o conjunto dos números racionais.

No âmbito do conhecimento do professor de matemática, existem pesquisas que exibem percepções de professores de matemática a respeito dos conceitos de infinito. Maria *et al* (2009) apresentam a percepção de professores do ensino fundamental acerca da noção de infinito, nos dois aspectos do conceito, isto é, como um processo ou como um objeto. Silvia Sbaragli (2006) relata como equívocos nas explicações dos professores podem provocar obstáculos didáticos[7], que, juntamente com os OE, dificultam a compreensão desse conceito nos alunos.

Considerando as pesquisas supracitadas, há evidências de que os OE, identificados na história da matemática, podem se manifestar também como obstáculos na aprendizagem.

Partindo do pressuposto que o conceito de infinito possui obstáculos, tanto no decorrer da história quanto no ambiente escolar, nossa hipótese de pesquisa é: será que é possível relacionar obstáculos epistemológicos com conhecimentos mobilizados por alunos em situações que envolvam o conceito de infinito? Esta pesquisa, portanto, tem por objetivo investigar a relação entre obstáculos epistemológicos[8], identificados no decorrer da história da conceitualização do infinito enquanto objeto (*infinito atual*), e os conhecimentos mobilizados por acadêmicos de licenciatura em Matemática em situações relacionadas a este conceito.

Para que se tornasse possível alcançar o objetivo proposto, foi necessário realizar as seguintes etapas: identificar OE no decorrer da história no que se refere ao conceito de infinito; criar situações de ensino que problematize esses OE; identificar possíveis teoremas-em-ação mobilizados pelos acadêmicos mediante

---

[7] Obstáculos que possuem origem na ação didática, e que serão definidos no capítulo I.
[8] Neste trabalho adotamos a conceitualização de obstáculo epistemológico, proposta por Gaston Bachelard em 1938, que será abordada em seção específica.

as situações criadas, e, por fim, estabelecer relação entre os OE e os teoremas-em-ação, mobilizados pelos alunos.

Desse modo, o *corpus* desta tese se constitui pela presente *Introdução,* seis capítulos, começando pelo capítulo I, intitulado: *Fundamentos em Didática da Matemática,* nele, apresentamos a sustentação teórico-didática de nossa pesquisa, mais especificamente, a interpretação dos OE de Bachelard no âmbito da matemática, para isso, fizeram-se necessários os estudos de Guy Brousseau. Além disso, este capítulo traz as definições da teorização proposta por Gérard Vergnaud, conhecida como Teoria dos Campos Conceituais, e, ainda, se propõe apresentar uma confluência entre elementos da teorização didática de Brousseau com elementos da teorização didática de Vergnaud.

No segundo capítulo, intitulado *Uma Discussão do Conceito de Infinito na Matemática,* apresentaremos uma síntese histórica a respeito do conceito de infinito na matemática, mais especificamente, a construção e diferenciação dos conceitos de *infinito potencial* e *infinito atual*. Já o capítulo III, *O conceito de infinito como um obstáculo na matemática*, é destinado a discutir o conceito de infinito como um obstáculo na matemática em dois aspectos: na sua constituição histórica e em seu ensino e aprendizagem.

No quarto capítulo, *Pressupostos teórico-metodológicos das atividades e unidades de contexto*, explicitaremos na primeira subseção o papel da história e da epistemologia para a elaboração de nossa abordagem, e na segunda subseção, a estrutura teórico-metodológica para a construção das atividades e suas respectivas unidades temáticas de contexto. No capítulo V, intitulado *Procedimentos metodológicos,* apresentaremos o caminho percorrido pela pesquisa, tanto a parte empírica quanto os estudos teóricos. Este capítulo foi estruturado em duas seções, na primeira delas, descreveremos o suporte teórico-metodológico para obtenção e análise dos dados, bem como uma descrição da condução da entrevista e os critérios de escolha dos sujeitos da pesquisa. Na segunda seção, apresentaremos as atividades com suas respectivas unidades de contexto, e os teoremas-em-ação tipificados nas unidades de registro.

A descrição dos dados coletados, a análise sob a ótica dos referenciais adotados, bem como as nossas inferências dedutivas, resultantes da pesquisa realizada, serão exibidas no capítulo VI: *Descrição e análise dos dados*.

Em seguida, apresentaremos nossas *Considerações finais*. O texto finaliza com as referências, apêndice e anexos.

I. FUNDAMENTOS EM DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

> Logo, toda cultura científica deve começar [...] por uma catarse intelectual e afetiva. Resta, então, a tarefa mais difícil: colocar a cultura científica em estado de mobilização permanente, substituir o saber fechado e estático por um conhecimento aberto e dinâmico, dialetizar todas as variáveis experimentais, oferecer enfim à razão razões para evoluir (BACHELARD, 1996, p. 24).

Neste capítulo apresentamos o aporte teórico-didático de nossa pesquisa. Partilhamos da ideia de que no processo de ensino-aprendizagem não há linearidade na construção de conceitos que constituem o conhecimento a ser ensinado e aprendido. Nesse sentido, adotamos teorizações a respeito da didática, que se alinham com essa perspectiva e, também, apresentamos outros elementos que orientaram a estruturação desta pesquisa.

Para D'Amore (2007), independentemente da origem, o problema decisivo da aprendizagem parece ser "aprender a 'manipular' conceitos" (p. 210), mas manipular conceitos não se traduz numa tarefa fácil, pois cada conceito, segundo Giordan e Vecchi (1996), é rodeado de representações, e estas admitem múltiplos níveis de formulações e integrações do conceito.

Apesar de aparentemente simples, a explicitação desse problema da aprendizagem e sua execução, em geral, são extremamente difíceis, pois envolvem uma complexidade de representações e formulações do conceito. O primeiro passo para D'Amore (2007), é "limpar o conceito desse halo que parece esconder seu significado íntimo", e, ainda, "é preciso ter presentes os *obstáculos* que se interpõem na aprendizagem" (Ibid., p. 210).

> No próprio processo de ensino-aprendizagem, por um lado, é conveniente que se formem ideias transitórias, mas, por outro lado, é preciso levar em conta que tais ideias resistirão (tentarão resistir) depois, quando da tentativa de serem superadas. As rupturas são necessárias. Mas existem então fenômenos aos quais se fez referência antes: os *obstáculos* (D'AMORE, 2007, p. 211).

Desse modo, as rupturas no processo de ensino e aprendizagem se tornam imprescindíveis quando certo conhecimento, já consolidado e validado pelo aluno em certo domínio do conhecimento, não garante mais explicações adequadas para outro domínio. Mas, antes que sejam efetivadas tais rupturas, é preciso superar os *obstáculos*.

1.1 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS DE BROUSSEAU NA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

> A noção de obstáculo epistemológico pode ser estudada no desenvolvimento histórico do pensamento científico e na prática da educação. Em ambos os casos, esse estudo não é fácil (BACHELARD, 1996, p. 21).

Apresentaremos, nesta seção, a interpretação dos obstáculos epistemológicos de Bachelard no âmbito da matemática, para isso, fazem-se necessários os estudos de Guy Brousseau, que se inspirou nas ideias de Bachelard para a teorização a respeito dos obstáculos.

A noção de obstáculo epistemológico se insere na discussão didática das ciências por meio da obra *A formação do espírito científico*, de Gaston Bachelard[9]. Nessa obra, Bachelard argumenta que a evolução do espírito científico não era reflexo apenas de construções contínuas e cumulativas, mas também de rupturas e obstáculos.

> Quando se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado. E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos (BACHELARD, 1996, p. 17).

Bachelard (1996) caracteriza o que ele considera um obstáculo epistemológico e cria também diferenciações quanto à natureza desses obstáculos: conhecimento ou experiência primeira; conhecimento geral; obstáculo verbal; conhecimento pragmático; obstáculo substancialista; obstáculo animista e obstáculo do conhecimento quantitativo.

---

[9] Publicada originalmente em 1938 com o título: *La Formation de l'esprit scientifique: contribution à une psychanalyse de Ia connaissance.*

Entretanto, Bachelard considera que sua análise epistemológica para a produção do conhecimento científico (ciências naturais) não era apropriada para o conhecimento matemático. “Com efeito, a história da matemática é maravilhosamente regular. Conhece períodos de pausa. Mas não conhece períodos de erro. Logo, nenhuma das teses que sustentamos neste livro se refere ao conhecimento matemático” (BACHELARD, G. 1996, p. 28).

Podemos, neste momento, fazer duas observações, primeiro, acreditamos que a visão de Bachelard em relação à produção do conhecimento matemático, ainda perdura como uma crença em matemáticos e aprendizes de matemática, isto é, a visão de que a matemática é livre de contradições e rupturas. A segunda observação se refere ao como interpretamos a causa da visão supracitada. Acreditamos que a forma como o conhecimento matemático é sistematizado, ou seja, a sistematização da matemática por meio de demonstrações não deixa explícitos os obstáculos, dificuldades e até rupturas no processo de produção do conhecimento matemático, causando, assim, uma aparência de regularidade de todo o processo.

Porém, as ideias de Bachelard em relação à epistemologia das ciências naturais influenciou o pensador francês Guy Brousseau, que, a partir da década de 1970, fez uma transposição para a matemática da noção de obstáculo epistemológico. Essa transposição ficou conhecida como teoria das situações didáticas (TSD).

> La transposition en mathématiques de la notion d'obstacle épistémologique, que BACHELARD [1938] pensait réservée aux sciences expérimentales, a été rendue possible et même nécessaire par le développement de la théorie des situations didactiques dans les années 70[10] (BROUSSEAU, 1989, p. 41).

Para Igliori (2002), a noção de obstáculo epistemológico se insere nas investigações em Educação Matemática, principalmente por pesquisadores franceses em didática, e, ainda, a principal correlação entre a didática e a epistemologia passa pela noção de obstáculo: “é principalmente na noção de obstáculo que se pode perceber a interdependência entre Epistemologia e Didática” (IGLIORI, 2002, p. 97).

---

[10] A transposição para a matemática da noção de um obstáculo epistemológico, que BACHELARD (1938) pensava estar reservada para as ciências experimentais, foi possível e até mesmo necessária para o desenvolvimento da teoria das situações didáticas na década de 1970 (TRADUÇÃO NOSSA).

Para Brousseau (1989), o conhecimento é resultado de uma adaptação do aluno a alguma situação S. Vejamos, se propuséssemos a um aluno uma situação – um problema, por exemplo – que possa ser resolvida com ações mentais, já consolidadas pelo aluno, essa situação não provocará um novo conhecimento. Por outro lado, se apresentarmos uma situação S, que seja composta de diferentes complexidades e que promova nova adaptação do aluno para a compreensão do fenômeno contido na situação, então haverá produção de conhecimento.

> Par exemple, si l'on veut favoriser la solution d'un système linéaire par combinaisons linéaires, pour des élèves qui connaissent la méthode de substitution, il vaut mieux choisir des systèmes de rang 4 que 2 ou même que 3[11] (BROUSSEAU, 1989, p. 41).

Segundo Igliori (2002), Brousseau define a constituição de um obstáculo "como um conhecimento, com os objetos, as relações, os métodos de apreensão, com as evidências, as ramificações imprevistas" (p. 100). E, ainda, este obstáculo vai "resistir, ele tentará (como se deve) adaptar-se localmente, modificar-se, otimizar-se num campo reduzido, seguindo um processo de acomodação bem conhecido" (Ibid., p.100).

Brousseau (1976) propõe a existência de três tipos de obstáculos na didática da matemática, os obstáculos de origem ontogenética, decorrentes da individualidade genética de cada indivíduo ou do próprio processo de maturação cognitivo do indivíduo;

> Les obstacles d'origine ontogénique sont ceux surviennent du fait des limitations (neurophysiologiques entre autres) du sujet à um moment de son développement: il développe des connaissances appropriées à ses moyens et ses buts[12] (BROUSSEAU, 1976, p. 108).

O segundo tipo é o que Brousseau (1976) denominou de obstáculos de origem didática, decorrentes de situações didáticas: "Les obstacles d'origine didactique sont ceux qui semblent de dépendre que d'un projet de système éducatif"

---

[11] Por exemplo, se desejamos obter a solução de um sistema linear por combinações lineares, para estudantes que conheçam o método de substituição, é melhor escolher sistemas de quatro equações do que de duas ou mesmo três (TRADUÇÃO NOSSA).

[12] Os obstáculos de origem ontogênica são aqueles que surgem pelas limitações (neurofisiológicas entre outros) do sujeito no momento do seu desenvolvimento: ele desenvolve conhecimentos adequados aos seus meios e seus objetivos.

(p. 108). E, o terceiro, os obstáculos de origem epistemológica, decorrentes da resistência do próprio conhecimento matemático:

> Les obstacles d'origine proprement épistémologiques sont ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes. Cela ne veut pas dire qu'on doit amplifier leur effet ni qu'on doit reproduire en milieu scolaire les conditions historiques où on les a vaincus[13] (BROUSSEAU, 1976, p. 108).

Para Sierpinska (1989), "A noção de obstáculo epistemológico é útil em nosso esforço para compreender a evolução dos conceitos matemáticos tanto no seu desenvolvimento histórico quanto individual[14]" (p.145). Nesse sentido, Brousseau (1989), enumera três momentos importantes para pesquisarmos OE:

> i) Trouver ces erreurs récurrentes, montrer qu'elles se regroupent autour de conceptions,
> ii) Trouver des obstacles dans l'histoire des mathématiques,
> iii) Confronter les obstacles historiques aux obstacles d'apprentissage et établir leur caractère épistémologique[15] (BROUSSEAU, 1989, p. 42).

Desse modo, considerando que os OE existem na história da matemática, nosso próximo passo será apresentar outra teorização que também leva em conta rupturas e erros na construção de conceitos matemáticos.

1.2 CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD NA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

Gérard Vergnaud desenvolveu uma teorização conhecida como Teoria dos Campos Conceituais (TCC), que se encontra no domínio das teorias cognitivistas. Orientado por Piaget em seu doutorado, Vergnaud herdou pontos de vista do seu orientador no campo de pesquisa em Psicologia da Aprendizagem,

---

[13] Os obstáculos de origem propriamente epistemológica são aqueles aos quais não se pode e nem deve escapar, por seu papel constitutivo no conhecimento pretendido. Eles podem ser encontrados na história dos próprios conceitos. Isso não significa que devamos amplificar seu efeito, nem que devamos reproduzir na escola as condições históricas em que os superamos.

[14] Citação original: La notion d'obstacle épistémologique est utile dans notre effort pour compreendre l'évolution des concepts mathématiques dans leur développement tant historique qu'individuel.

[15] i) Encontrar estes erros recorrentes, mostrar que eles se agrupam em torno de concepções,
ii) Encontrar obstáculos na história da matemática,
iii) Confrontar os obstáculos históricos aos de aprendizagem e estabelecer seu caráter epistemológico (TRADUÇÃO NOSSA).

entretanto em um de seus artigos adverte: “O quadro teórico proposto neste texto permite integrar pontos de vistas diferentes e complementares do de Piaget” (2009, p.13).

Podemos exemplificar a influência de Piaget na teorização de Vergnaud quando ele mesmo explicita sua compreensão do que é conhecimento, ou seja, “conhecimento é adaptação” (Ibid., p.13), e essa concepção é uma herança piagetiana. Por outro lado, considerar que “aprendemos e nos desenvolvemos em qualquer idade” (Ibid., p. 13) mostra uma complementação das pesquisas de Piaget a respeito do processo de desenvolvimento cognitivo, que se restringiram a bebês, crianças e adolescentes.

> A Minha primeira ideia é que a Teoria de Campo Conceitual trata de desenvolvimento. É preciso conceber o processo cognitivo, não só como aquele que organiza as atividades e o seu funcionamento em situação, isto é, a conduta, a percepção, a representação e as competências, mas também o desenvolvimento das formas inteligentes de organização da atividade de certa pessoa durante a sua experiência (VERGNAUD, 2003, p. 22).

Se considerarmos que conhecimento é adaptação e que “o indivíduo se adapta às situações” (VERGNAUD, 2009, p. 13), podemos agora perguntar: Como é que nos adaptamos? Vejamos que, se respondermos a essa pergunta, significa responder “o como” obtemos conhecimento, ou seja, como aprendemos. Com efeito, para Vergnaud, a adaptação de um sujeito se dá “por meio de uma evolução da organização de sua atividade” (Ibid., p. 13), por exemplo:

> É dada a responsabilidade a um experiente mecânico de automóvel de recepcionar os clientes que levam seus carros para o concerto. Nessa nova função, o recepcionista tem como primeiro objetivo, dentro dos 5 aos 15 minutos de que ele dispõe, obter do cliente uma informação tão confiável quanto possível sobre o problema do mecânico do carro; sua competência como mecânico é essencial (VERGNAUD, 2009, p. 16).

Nesse exemplo, o sujeito se depara com uma nova situação, diferentemente do que provavelmente era sua rotina de mecânico sem contato inicial com os clientes. Neste caso, será necessária uma reorganização de sua atividade, vejamos:

> [...] escutar o cliente, fazer-lhe questões pertinentes, tanto para saber o que o próprio cliente tem condições de saber, quanto para afastar os

> diagnósticos errados que o cliente propõe. Um estudo aprofundado realizado por Patrick Mayer mostrou que, em paralelo com esse primeiro objetivo, existem duas questões que estão em jogo no diálogo com o cliente: tranquilizá-lo e fidelizá-lo. É claro que a acolhida deve satisfazer o cliente e encorajá-lo e a voltar da próxima vez e não ir ao concorrente (VERGNAUD, 2009, p. 16).

Para Vergnaud (2009), a ação do sujeito é sempre adaptativa e, por trás de cada etapa da ação, existe uma conceitualização, consciente ou não. A atividade do sujeito perante uma situação apresenta componentes que vão da percepção da situação, sistematização, hierarquização, identificação de padrões, pesos, medidas etc., até o momento de o sujeito verbalizar, ou estruturar um discurso que compartilhe sua interpretação da situação apresentada. Esses componentes da atividade do sujeito conduzem para a definição de *esquema*.

> Definição 1: o esquema é uma organização invariante da atividade para uma classe de situações dada.
> Definição 2: é formada necessariamente por quatro componentes:
> • um objetivo, subobjetivos e antecipações;
> • regras em ação de tomada de informação e de controle;
> • invariantes operatórios: conceitos em ação e teoremas em ação;
> • possibilidades de inferência em situação (VERGNAUD, 2009, p. 21).

A partir dessas definições, aparecem ideias fundamentais da TCC, como, por exemplo, classe de situações. Para Vergnaud, as situações representam as ocasiões de confrontação do sujeito em que se exijam mobilização dos processos cognitivos e produção de respostas diante da ocasião. Essas situações devem conter duas ideias principais:

> 1. A de variedade: existe grande variedade de situações num campo conceitual dado; as variedades de situações são um meio de construir sistematicamente o conjunto das classes possíveis;
> 2. A da história: os conhecimentos dos alunos são elaborados por situações que eles enfrentam e dominaram progressivamente, sobretudo para as primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que se pretende ensinar-lhes (VERGNAUD, 1993, p. 12).

Vergnaud (1993) propõe que alunos, diante de situações a serem resolvidas, lancem mão do que ele denomina de *esquemas*. Geralmente os alunos mobilizarão esquemas que anteriormente já foram utilizados para alguma situação que eles julguem parecida e que os orientarão na resolução do problema. Para

Vergnaud (1993, p.1), “O conhecimento racional é operatório ou não”, e podemos separá-los em duas classes de situações:

> 1) Classe de situações que o sujeito dispõe em seu repertório, em dado momento de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação.
> 2) Classe de situações em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas, levando-o eventualmente ao sucesso ou ao fracasso (VERGNAUD, 1993, p. 2).

No primeiro caso das classes de situações, o sujeito mobiliza seus conhecimentos de forma automatizada e estes geralmente são reunidos num único esquema. No segundo caso, o sujeito está diante de uma classe de situações em que é obrigado a dispor de vários esquemas, pois o sucesso na tentativa de resolução não é imediato, ocasionando embaraços e ensaios fracassados. Nesse sentido, os esquemas precisam “[…] ser acomodados, descombinados e recombinados. Este processo é necessariamente acompanhado por descobertas” (VERGNAUD, 1993, p. 2).

Na reorganização e acomodação dos esquemas, que Vergnaud sugere em sua teorização, o sujeito pode adquirir novos conceitos. Quando engendramos na tarefa de compreender a formação de um conceito, “não nos parece possível realizar um trabalho sério sem levar em consideração esses elementos periféricos, mais ou menos difusos, cujo conjunto constitui o que chamamos a aura conceptual” (GIORDAN; VECCHI, 1996, p. 184). Nesse sentido, um elemento imprescindível na estrutura teórica proposta por Vergnaud é o que ele denomina de *campo conceitual.*

> Um campo conceitual é ao mesmo tempo um conjunto de situações e um conjunto de conceitos: o conjunto de situações cujo domínio progressivo pede uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas em estreita conexão; o conjunto de esquemas que contribuem com o domínio dessas situações (VERGNAUD, 2009, p. 29).

Sendo assim, Vergnaud (1990) sustenta que é necessária uma gama de fatores interligados para que possamos compreender um conceito, isto é, o *campo conceitual* de um conceito é formado por diversos outros conceitos, situações, símbolos, representações, propriedades e teoremas, todos interligados. O

“Campo conceitual é um conjunto vasto, porém organizado, a partir de um conjunto de situações. Para fazer face a essas situações, é preciso um conjunto de esquemas de conceituações e de representações simbólicas” (VERGNAUD, 2003, p. 30-31).

É necessário advertir, segundo Vergnaud (2003), que um campo conceitual não se resume no conjunto de conceitos que resolverão uma situação dada ou um conjunto delas. Existem outros conceitos implícitos nas ações de um sujeito, por exemplo:

> […] para os problemas de adição e subtração, há uma série de conceitos acerca dos quais não se fala muito, às vezes não se fala nunca, e que estão implícitos na atividade de resolução desses problemas de adição e subtração feitos pelas crianças. Os conceitos de quantidades, discretas e contínuas; de medidas, da parte e do todo; do estado e da transformação; de comparação entre o referido e o referente; de comparação do quê com o quê; de composições binárias; de medidas, de transformação e relações; de inversão; de número natural e número relativo; de posição, abcissa e valor algébrico (VERGNAUD, 2003, p. 31).

Na ação de um sujeito perante uma situação dada, apresentam-se elementos que são denominados de *conceitos-em-ação* e *teoremas-em-ação.* Esses elementos são conhecimentos contidos nos esquemas e são denominados, de maneira mais ampla, de *invariantes operatórios.*

Podemos dizer que os invariantes operatórios estão entre os principais conceitos na estruturação teórica dos campos conceituais e tiveram origem na teorização piagetiana:

> […] Apesar de as análises apresentadas aqui serem relativamente diferentes daquelas de Piaget, e testemunharem de uma grande preocupação de definição e generalidade, concernente ao conceito de esquema, ao menos, o empréstimo à Piaget dos termos “esquema” e “invariante operatório” indica claramente que ele é o primeiro inspirador desta teoria (VERGNAUD, 2009, p. 24).

Os invariantes operatórios podem ser separados em três tipos lógicos, o primeiro deles é o que Vergnaud denominou de “invariantes do tipo ‘proposição’: podem ser verdadeiras ou falsas; os teoremas-em-ação são invariantes deste tipo” (VERGNAUD, 1993, p. 6).

Em determinada situação podemos lançar mão de proposições que são localmente verdadeiras e, consequentemente, obtermos êxito para explicar um fenômeno específico. Vergnaud (1993) exemplifica esse tipo de invariante com a seguinte situação: "Entre 5 e 7 anos, as crianças descobrem que não é preciso recontar o todo para achar o cardinal de $A \cup B$, se A e B já foram contados[16]. Este conhecimento pode ser expresso por um teorema-em-ação" (p.6).

Evidenciaremos um elemento que entendemos fundamental na relação que queremos estabelecer em nossa pesquisa, o conceito de teorema-em-ação, que é passível de ser falso ou verdadeiro, dependendo do domínio em que é acionado. Notemos que o teorema-em-ação $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$, desde que $A \cap B = \emptyset$, é válido apenas para conjuntos finitos - e geralmente para crianças funciona apenas com coleções pequenas. Veremos, no próximo capítulo, que, quando se trata de conjuntos infinitos, esse teorema-em-ação pode ser falso.

O segundo tipo de invariante operatório Vergnaud define como

> Invariantes do tipo "função proposicional": não são suscetíveis de serem verdadeiras ou falsas, mas constituem marcos indispensáveis à construção das proposições. Por exemplo: os conceitos de cardinal e coleção, assim como os de estado inicial, transformação e relação quantificada, são indispensáveis à conceitualização das estruturas aditivas. Não são proposições (VERGNAUD, 1993, p. 6-7).

Esse tipo de invariante raramente é explicitado pelo estudante mesmo que seja utilizado na ação de resolver uma situação. Tais conceitos, para Vergnaud (1993), denominam-se *conceitos-em-ação* ou *categorias-em-ação* e diferem-se logicamente dos teoremas-em-ação. Os conceitos-em-ação são funções proposicionais, isto é, o conceito de *raiz quadrada* é contido em uma ação (conceito-em-ação) quando, por exemplo, um aluno mobiliza esquemas para resolver a seguinte expressão: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$. Notemos que podemos exprimir o conhecimento mobilizado nessa resolução pelo seguinte teorema-em-ação (proposição): $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$. No exemplo supracitado o conceito de *raiz quadrada* não é suscetível a ser verdadeiro ou falso, mas é inerente ao teorema-em-ação $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$.

Para Vergnaud (2009), "um conceito-em-ação é um conceito considerado pertinente na ação em situação, já um teorema-em-ação é uma proposição tida como verdadeira na ação da situação" (p. 23). Os conceitos-em-

[16] Por exemplo, contar 5 laranjas numa caixa e depois conta 3 laranjas em outra e concluir que há 8 laranjas no total, sem que haja a necessidade de contar todas novamente.

ação e os teoremas-em-ação são indissociáveis, segundo Vergnaud (1993), ou seja, "não existem funções proposicionais sem proposição e nem proposição sem função proposicional" (p. 7), é uma relação dialética!

O terceiro tipo de invariante operatório é definido como

> Invariantes do tipo "argumento": quem fala em função proposicional e proposição fala em argumento. Os lógicos clássicos costumavam tomar seus exemplos entre os objetos materiais comuns e suas propriedades. Eram então argumentos a, b e c (valores particulares das variáveis x, y e z) objetos materiais como o livro, a mesa ou o personagem Paulo; e funções proporcionais, propriedades e relações P, R_2, R_3 como as que vimos anteriormente. Por exemplo: "Paulo põe o livro em cima da mesa" pode ser escrito R_3 (Paulo, livro, mesa), proposição esta resultante da atribuição de valores particulares aos argumentos da função proposicional R_3(x, y, z) "x põe y em cima de z", na qual x é uma pessoa, y um pequeno objeto material manipulável, e z um suporte possível (VERGNAUD, 1993, p. 7).

Desse modo, os argumentos podem ser relações, objetos materiais, números, proposição, função porposicional ou, segundo D'amore (2007), qualquer outra coisa que substancialmente requeira uma variável.

A separação desses três tipos de invariantes é, para Vergnaud (1993), indispensável para a didática "Pois a transformação dos conceitos-instrumentos em conceitos-objetos é um processo decisivo na conceitualização do real" (p. 8) e ainda, essa tranformação significa, entre outras coisas que os argumentos podem ser resultantes de funções proposicionais.

Um ponto relevante que Vergnaud (1993) apresenta é que um sujeito deve se submeter a situações variadas, pois são em situações diversas que a operacionalidade de um conceito é mais bem evidenciada. Este processo é importante para que o pesquisador possa analisar a variedade de esquemas e comportamentos para compreender um conceito em questão.

A ação operatória de um sujeito perante alguma situação apresentada não é, para Vergnaud (1993), a totalidade da conceitualização do real, longe disso! Para o autor, a principal base para a conceitualização das relações entre o real e a sua representação[17] passa pela identificação dos invariantes operatórios, isto é, "O homomorfismo entre o real e a representação não deve ser

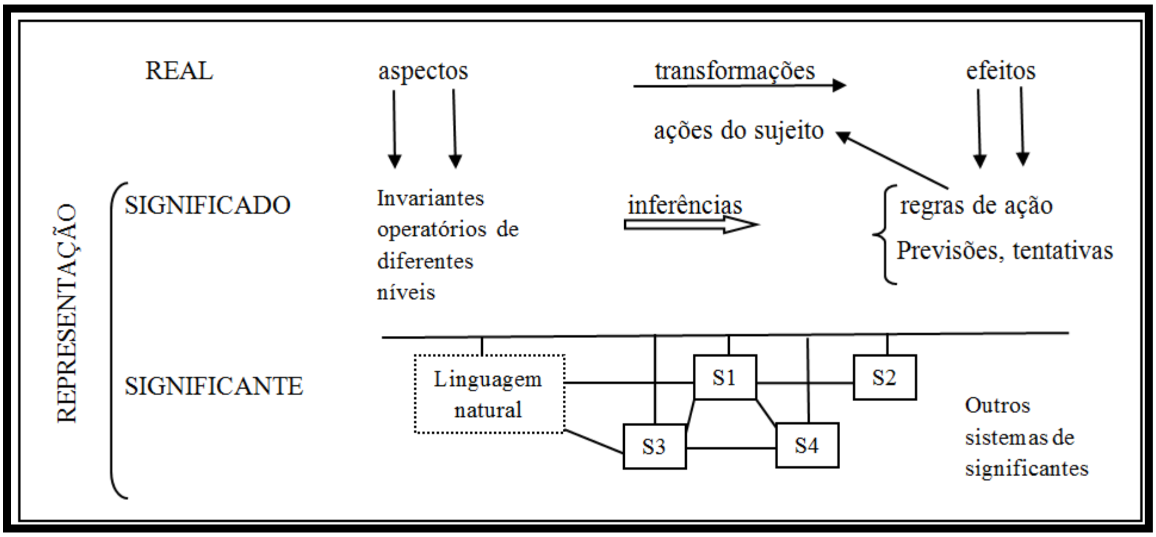
---

[17] Vergnaud usa o termo representação como um sistema de categorias de pensamento e conhecimentos e também como um sistema de relações significante/significados. Para saber mais, ver Vergnaud (2009).

estudado a princípio no nível dos simbolismos, mas no nível dos invariantes operatórios contidos nos esquemas” (Ibid., p. 25).

Vejamos, na figura a seguir, uma relação entre aspectos do real e sua representação:

Figura 01 – Relações entre a representação e o real.



Fonte: (VERGNAUD, 1985 *apud* REZENDE, 2013, p. 67)

A importância da conceitualização na teorização apresentada por Vergnaud fez D’Amore (2007) dizer que é “fundamental e irredutível dar uma definição pertinente e eficaz de conceito” (p. 209). Para isso, Vergnaud (1993) leva em consideração uma trinca de conjuntos:

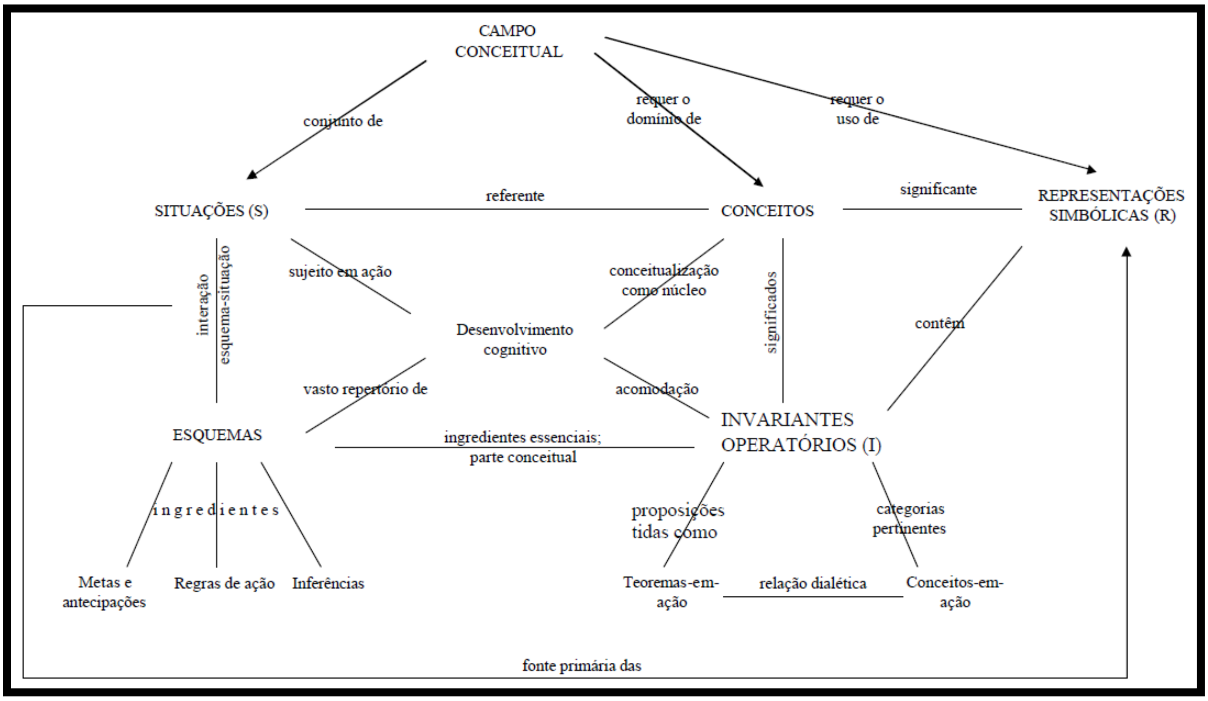
$$C = (S, I, Y)$$

O conjunto **S** é o conjunto das situações que dão sentido ao conceito (referência). O conjunto **I** é o conjunto dos invariantes operatórios em que se baseia a operacionalidade dos esquemas (significado). E o conjunto **Y** é o conjunto das formas de linguagem (ou não) que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante) (VERGNAUD, 1993, p.8).

Portanto, para Vergnaud (1993), “A teoria dos campos conceituais baseia-se em um princípio de elaboração pragmática dos conhecimentos” (p. 24), e, ainda, não podemos teorizar a respeito de como se aprende matemática somente a partir das situações e dos simbolismos atribuídos a ela – “a chave é considerar a ação do sujeito em situação e a organização de seu comportamento” (Ibid. p. 25).

Vejamos, na Figura 2 a seguir, um mapa conceitual para a teorização de Vergnaud, destacando os conceitos-chave da TCC e suas interrelações.

Figura 02 – Mapa conceitual da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.



Fonte: (MOREIRA, 2002, p. 18)

Considerando elementos que compõem a ideia de esquema, como as regras de ação, as metas e antecipações e os invariantes operatórios, Vergnaud (2003) pergunta: "como a intervenção do professor poderá atingir um ou mais desses aspectos que fazem parte do conceito de esquema?" (p.36).

Vergnaud (2003) afirma que tanto Piaget quanto Vygotsky não dispunham de instrumentos teóricos e metodológicos para responder a tal questão em suas respectivas teorizações.

> É fácil apontar o que falta em Piaget e o que falta em Vygotsky, mas, no que diz respeito ao essencial, podemos dizer que a revolução didática não foi feita por eles. Em que consiste a revolução didática? Consiste em propor ao aluno situações que vão desestabilizá-lo. Essas situações desestabilizadoras, graças à ação auxiliar do professor, poderão ser incorporadas pelo aluno, para seu proveito (VERGNAUD, 2003, p. 38).

Após essa breve explanação da TCC, conjecturamos – por ora - que existem obstáculos que um aluno enfrenta diante de situações que envolvem o conceito de infinito e que estão atrelados com a mobilização de teoremas-em-ação falsos (TAF). Nesse sentido, apresentaremos, a seguir, elementos que estabelecem relações entre os TAF e os OE.

1.3 Possíveis relações entre obstáculos epistemológicos e teoremas-em-ação falsos

Esta seção se propõe apresentar uma confluência entre elementos da teorização didática de Brousseau com elementos da teorização didática de Vergnaud, mais especificamente, a relação dos OE e os invariantes operatórios.

Vergnaud (1993) procura esclarecer a natureza das relações entre a visão de situações que se assumem na TCC com aquela assumida na TSD de Brousseau.

> Em princípio, uma situação didática é uma ocorrência interessante e rica. As relações elementares destacadas aqui e as classes de problemas que elas podem gerar só apresentam, em si, um interesse didático moderado, justamente porque são muito elementares. São antes de tudo instrumentos para a análise das situações e para a análise das dificuldades enfrentadas pelos alunos. Toda situação complexa é uma combinação de situações elementares, e não se pode contornar a análise das tarefas cognitivas que podem ser geradas por elas. Mas a organização de uma situação didática, em um projeto coletivo de pesquisa em classe, supõe a consideração simultânea das funções epistemológicas de um conceito, da significação social das áreas de experiência a que ele se refere, do desempenho dos atores da situação didática, dos resultados desse desempenho, do contrato e da transposição (VERGNAUD, 1993, p. 17).

Contudo a TCC considera que um desempenho didático adequado tem como pressuposto o "conhecimento da dificuldade relativa das tarefas cognitivas, dos obstáculos habitualmente enfrentados, do repertório de procedimentos disponíveis e das representações possíveis" (Ibid. p.17).

A aproximação entre a TCC e a TSD foi abordada por Jane Bittencourt (1998), referente ao tratamento didático a ser dado a um obstáculo, e, ainda, argumenta que, superada a discussão a respeito dos OE, posta por Brousseau, o principal objetivo do ensino a ser alcançado é a superação desses obstáculos. A esse respeito, Bittencourt (1998) observa que para Vergnaud, um obstáculo não pode ser saltado, mas sim superado. E superar um obstáculo, para

Sierpinska (1989), significa adquirir consciência histórica acerca de um conhecimento por meio da reflexão, implicando uma mudança de atitude, mais do que isso, uma mudança filosófica frente ao saber.

> A noção de obstáculo pode ser utilizada tanto para analisar a gênese histórica de um conhecimento como o ensino ou a evolução espontânea do aluno. Pode-se portanto pesquisar os obstáculos epistemológicos a partir de uma análise histórica ou a partir de dificuldades resistentes entre os alunos procurando confrontá-las (IGLIORI, 2002, p. 98).

Dois pilares das situações propostas por Vergnaud (1990) são a ideia de variedade, a qual considera a grande variedade de situações presentes em dado campo conceitual, e a ideia de história.

> [...] Os conhecimentos dos alunos são formados pelas situações com que eles se depararam e que progressivamente dominaram, nomeadamente pelas primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e aos procedimentos que se pretende ensinar-lhes (VERGNAUD, 1990, p. 150).

Segundo Bittencourt (1998), Vergnaud propõe que os obstáculos podem ser detectados não só a partir de concepções dos sujeitos, mas sim da ação desses sujeitos perante problemas a serem resolvidos: “Quando colocamos um esquema em ação, na tentativa de solucionar um problema é que aparecem os obstáculos”. Vergnaud, assim como Brousseau, também parte do pressuposto de que existem rupturas no processo de produção do conhecimento matemático. Nesse sentido, Bachelard (1996) já ressaltava que devemos considerar que,

> […] o adolescente entra na aula de física com conhecimentos empíricos já constituídos: não se trata, portanto, de adquirir uma cultura experimental, mas sim de mudar de cultura experimental, de derrubar os obstáculos já sedimentados pela vida cotidiana. (BACHELARD, 1996, p. 23).

Desse modo, apresentar ao aluno situações que podem confrontar concepções falsas, já estruturadas e internalizadas por ele, deve ser considerado no processo de ensino e no processo de estruturação do conhecimento. Uma justificativa para isso reside na “existência de concepções muito persistentes, mas também no fato de que essas estão muito afastadas da visão científica atual, com a qual até entram em choque ocasionalmente” (GIORDAN; VECCHI, 1996, p. 176).

Em situações que exigem a ação do sujeito, Vergnaud (1990) identifica, na conduta desses indivíduos, o que ele define como parte dos esquemas mobilizados, os invariantes operatórios. Segundo Rezende (2013, p 66), “Os invariantes operatórios são conhecimentos que um sujeito dispõe, na ação, para resolver determinada situação. Eles podem ser universais ou apenas localmente verdadeiros”. São exatamente esses invariantes que, em certo domínio do conhecimento, são verdadeiros, porém, quando se muda o domínio, podem se tornar falsos, e, nesse sentido, podemos interpretar esses invariantes como um obstáculo a ser superado, ou, ainda, como um conhecimento a ser aprimorado.

Vejamos que o “erro” possui papel relevante tanto na teorização de Brousseau quanto na de Vergnaud, ou seja, diferentemente do senso comum, o erro não advém necessariamente da ignorância do sujeito, mas, sim, de esquemas mobilizados por ele que, em algum momento, teve sucesso na resolução de algum problema. D’Amore (2007) também chama atenção para a relevância do erro no processo de ensino-aprendizagem:

> O erro então, não é necessariamente fruto da ignorância, mas poderia ser resultado de um conhecimento anterior, um conhecimento que teve sucessos, que produziu resultados positivos, mas que não resiste diante de fatos mais contingentes ou mais gerais. Portanto, não se trata sempre de erros de origem desconhecida, imprevisíveis, mas de obstáculos no sentido de Bachelard (p. 217).

Outra pesquisa que aproximou a TCC e a TSD foi a de Silva (2011), ela utilizou os pressupostos teóricos de Brousseau e Vergnaud para analisar a construção da noção de limite em progressões geométricas infinitas.

> Para fundamentar esta investigação, buscamos aporte teórico na Teoria das Situações Didáticas proposta por Brousseau (1998), com a finalidade de propor aos alunos situações de aprendizagem da noção de limite e, em complementaridade, a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Vergnaud (1996), que nos permitiu reconhecer elementos cognitivos importantes dos sujeitos na construção desta noção durante a experimentação proposta (SILVA, 2011, p. 172).

Silva (2011) buscou em seu referencial teórico, dificuldades elencadas e elementos epistemológicos que serviram de suporte para estabelecer alguns teoremas em ação que porventura seriam mobilizados pelos sujeitos da pesquisa. A escolha e estruturação das situações-problemas propostas permitiram, segundo Silva (2011), “ter acesso a esquemas mobilizados pelos alunos” (p.177).

Sendo assim, a aproximação entre a TCC e a TSD que sustentamos, perpassa tanto pela concepção de conhecimento quanto na compreensão do papel do erro na constituição desse conhecimento. De fato, para Brousseau o conhecimento é resultado de uma adaptação do aluno a alguma situação S e um erro recorrente pode ser um obstáculo de origem epistemológica. Para Vergnaud o indivíduo se adapta às situações, e a adaptação se dá por meio de uma evolução da organização de sua atividade e um erro recorrente pode ser um teorema-em-ação falso.

Descrevendo de outro modo, inferimos que essa aproximação se dá pelo seguinte aspecto: Vergnaud (2009) considera que é preciso criar situações de modo que os alunos possam mobilizar o maior número possível de invariantes operatórios, em específico, os teoremas em ação falsos. Por outro lado, entendemos que uma análise histórica como sugerida por Brousseau em busca de OE traz elementos frutíferos para a elaboração de situações que causem essa mobilização. Acreditamos que, assim como o sujeito epistêmico teve dificuldades para elaborar e/ou superar obstáculos na constituição do conceito de infinito, estes mesmos obstáculos podem causar barreiras na aprendizagem do aluno.

Nesse sentido, buscamos, nesta pesquisa, o estabelecimento relações entre os conhecimentos mobilizados pelos sujeitos e os OE identificados no decorrer da construção histórica do conceito de infinito.

II. UMA DISCUSSÃO DO CONCEITO DE INFINITO NA MATEMÁTICA

Neste capítulo apresentamos uma síntese histórica a respeito do conceito de infinito na matemática, mais especificamente, a construção e diferenciação dos conceitos de *infinito potencial* e *infinito atual*.

Adotamos como síntese histórica a definição apresentada por Gaston Bachelard em sua obra *a epistemologia*:

> É uma síntese cultural que implica a reunião de vários séculos de cultura. Como assinala Louis de Broglie: “Muitas ideias científicas de hoje seriam diferentes se os caminhos seguidos pelo espírito humano para as atingir tivessem sido outros.” Em si mesma, esta observação coloca todo o problema da objetividade científica, uma vez que situa todo o problema da objetividade na confluência de uma história humana e de um esforço de atualidade essencial a toda a investigação científica (BACHELARD, G. 2006, p. 203).

Apresentar esse panorama histórico da construção dos conceitos de *infinito potencial* e *infinito atual* tem por objetivo trazer elementos fundamentais para entendermos como se constituiu esse conceito tão complexo e importante da Matemática. Neste trabalho, essa síntese histórica estará empenhada em apresentar obstáculos e rupturas no conceito de infinito. Sendo assim, para tal apresentação, partimos do momento em que esse conceito surge no pensamento grego.

2.1 O CONCEITO DE INFINITO COMO UMA CATEGORIA FILOSÓFICA

Discussões a respeito da natureza de conceitos tais como o de espaço, o de tempo, e da matéria contribuíram para que os filósofos gregos da Antiguidade abordassem o infinito. Entretanto, nas primeiras tentativas de entender o infinito, a matemática e a filosofia foram levadas a paradoxos, os mais famosos dessa época são os de Zenão de Elea, discípulo de Parmênides.

> Hacia el siglo IV a. C., algunos atomistas, como Leucipo y su discípulo Demócrito, pensaban que la materia estaba compuesta de un número infinito de indivisibles (Lucrecio, trad. 1985), y postulaban además un universo infinito. Parménides y su discípulo Zenón, quien señaló varias paradojas acerca del infinito, estaban en desacuerdo. En el diálogo

> Parménides, Platón (trad. 1969) sitúa a Sócrates y Aristóteles con los dos anteriores discutiendo acerca del movimiento y considerando cómo la postura atomista y su contraria llevarían ambas a contradicciones[18] (MENA-LORCA *et al*, 2015, p. 334).

Os argumentos e os paradoxos estabelecidos por Zenão deram origem, segundo Caraça (1951), ao medo e repúdio a processos infinitos na Matemática que perduraram por vários séculos e provocaram consequências tanto positivas quanto negativas no desenvolvimento da Matemática. De positivo, podemos destacar o método da exaustão[19], que, segundo Struik (1992), foi uma resposta aos argumentos de Zenão; e, de negativo, a demora na aceitação e compreensão dos infinitesimais (LORIN, 2009).

O paradoxo mais conhecido de Zenão, segundo Aczel (2003), é o de Aquiles e a tartaruga. Nele, Zenão descreve uma corrida entre Aquiles, um corredor famoso da Grécia antiga, e uma tartaruga. Aquiles largou atrás em relação à posição da tartaruga, já que ela era muito lenta, e por isso foi dada a ela esta certa vantagem. Na argumentação apresentada por Zenão, quando Aquiles alcançasse o ponto onde a tartaruga estava no momento em que começou a corrida, a tartaruga teria avançado certa distância. E, quando Aquiles percorresse essa segunda distância até a tartaruga, ela consequentemente teria avançado mais um pouco. Esse argumento continua *ad infinitum*[20]*.* Portanto, concluiu Zenão que Aquiles nunca alcançaria tartaruga.

A discussão em torno da origem das coisas[21] e as medidas incomensuráveis levaram Aristóteles à posição que considera o ilimitado (*apeíron*) como ente em potência (*dynamei on*), "Aristóteles será o primeiro a dar um tratamento lógico mais sistemático e instrumental à questão do infinito, sem perder de vista as considerações sobre o seu fundamento na realidade" (SANTOS, 2008, p. 62).

Na cultura grega, mais especificamente na obra de Aristóteles, o infinito aparece como categoria filosófica, mas não ainda como um "objeto

---

[18] Até o século IV. C., alguns atomistas, como Leucipus e seu discípulo Demócrito, pensavam que a matéria era composta por um número infinito de indivisíveis (Lucrecio, trans., 1985), e também postularam um universo infinito. Parmênides e seu discípulo Zenão, que apontaram vários paradoxos sobre o infinito, discordaram. No diálogo de Parmênides, Platão (trad.169) coloca Sócrates e Aristóteles com os dois anteriores discutindo acerca do movimento e considerando que tanto a postura atomística quanto o seu oposto levariam a contradições (TRADUÇÃO NOSSA).
[19] Estabelece critérios para a convergência de uma sequência infinita.
[20] Até o infinito.
[21] Também conhecida como o problema da *arkhé.*

matemático", apenas a ideia de *infinito potencial* era aceita na concepção aristotélica (MORENO; WALDEGG, 1991).

Moreno e Waldegg (1991) apresentam uma análise gramatical a respeito dos papéis que a palavra infinito tinha na cultura grega. O primeiro como substantivo, "[...] appearing only in accounts of the mythological, theological or metaphysical types: "Infinity" pertains to the realm of the gods"[22] (MORENO; WALDEGG, 1991, p. 202).

O segundo papel gramatical que o infinito assume na Grécia antiga, de acordo com Moreno e Waldegg (1991), é como um adjetivo que descreve um substantivo, ou seja,

> [...] it is only used when the latter has the characteristics of an absolute, like the Universe, the Being, space or time. Aristotle only uses this form when denying its real (physical) existence, since the concept embraces an actual infinity that realistic Aristotelian philosophy does not allow[23] (MORENO; WALDEGG, 1991, p. 202).

Ainda, segundo Moreno e Waldegg (1991), a existência do infinito assumindo um dos dois papéis gramaticais supracitados, isto é, como adjetivo ou como substantivo, não era possível por razões filosóficas, as quais não admitiam a existência ideal ou real de objetos infinitos.

O infinito nos papéis de adjetivo e substantivo, na concepção aristotélica, era empregado apenas quando se referiam a entidades não pertencentes ao mundo terreno, não se permitia conceber ao infinito um status de objeto acabado. Ainda a esse respeito, Kolar e Čadež (2012) dizem que, para Aristóteles, é impossível conceber o infinito como uma totalidade concluída porque não se pode pensar em uma coleção em sua totalidade sem se refletir acerca de cada um dos seus elementos, ou seja, sem a realização física ou mental de cada etapa.

O terceiro papel gramatical do infinito foi o que Aristóteles considerou possível de ser adotado. Neste caso, o infinito assume o papel de advérbio de modo, isto é,

---

[22] [...] aparecendo somente em contos mitológicos, teológicos ou metafísicos: O infinito pertence ao reino dos deuses (TRADUÇÃO NOSSA).

[23] [...] ele só é usado quando este tem as características de um absoluto, como o Universo, o Ser, o espaço ou o tempo. Aristóteles só usa essa forma para negar sua real existência (física), uma vez que o conceito abarca um infinito atual que a filosofia aristotélica realista não permite (TRADUÇÃO NOSSA).

> [...] it is used to qualify (mental) actions, as for example, to extend, to subdivide, to continue, to add, to approximate, etc. This use of infinity has to do with what we call potential infinity, that is, when the process in question could be continued indefinitely[24] (MORENO; WALDEGG, 1991, p. 202).

Para Aristóteles, o infinito não tinha uma "existência física", mas era uma necessidade matemática, fosse por redução (divisão), por adição, o infinito existe apenas potencialmente (*infinito potencial*), não considerando totalidades infinitas acabadas, atualmente dadas (*infinito atual*).

> Assim, seja por redução (divisão), seja por adição, o infinito existe apenas potencialmente. Contudo, findo em algum momento arbitrário o processo de adição ou de divisão, o que se obtém, de fato, como objeto atualizado por esse processo, é sempre uma magnitude finita, nunca infinita. Isto é, seja in concreto, seja in abstrato, o infinito atual não existe para Aristóteles (SANTOS, 2008, p. 62).

Uma característica recorrente em discursos de filósofos da Grécia antiga, quando eles se referem ao infinito, é a do ilimitado. Jammer (2010), quando trata de conceitos de espaço na Antiguidade, apresenta o que ele denomina de "a prova lucreciana" para o caráter ilimitado de espaço. Lucrécio, ao argumentar a natureza do espaço, apresenta as propriedades de ilimitado e infinito como parte essencial para se construir tal conceito. É possível identificar, nas palavras de Lucrécio, uma relação quase que indissociável desses conceitos.

> Devemos admitir que não há nada além do conjunto de coisas. Portanto, o Universo não tem exterior e, por conseguinte, não tem fim nem limite. Não importa em qual das suas regiões a pessoa se posicione; seja qual for a posição em que alguém se coloque, ele deixa o Universo tão infinito quanto antes, em todas as direções. Por outro lado, se por ora considerarmos que o espaço seja limitado, supondo-se que um homem até as suas fronteiras externas, pare no limite extremo e lance um dardo, acaso devemos concluir que, quando lançado com força vigorosa, ele alcançará até o ponto para o qual foi mandado, voará para longe, ou devemos decidir que algo pode bloquear seu caminho e detê-lo? Devemos admitir e adotar uma dessas duas hipóteses, pois não há outro caminho. Isso nos obriga a admitir que o Universo se estende infinitamente[25] (JAMMER, 2010, p. 36).

---

[24] [...] é utilizado para qualificar as ações (mentais), por exemplo, para estender, subdividir, para continuar, para somar, para aproximar etc. Esse uso do infinito tem a ver com o que denominamos infinito potencial, isto é, quando o processo em questão poderia ser continuado indefinidamente (TRADUÇÃO NOSSA).

[25] T. Lucreti Cari, *De rerum natura* (trad. Munro, Cambridge, 1886), v.3, p.23.

Outras categorias de espaço foram elaboradas na Antiguidade, e, apesar se serem divergentes, o caráter potencial do infinito sempre aparece na sustentação das ideias. Outro modo de conceber espaço diferentemente da maneira apresentada por Lucrécio sustenta que o espaço não pode ser infinito. Essa argumentação encontra-se em Górgias de Leontini[26], que, segundo Jammer (2010, p.37), foi o primeiro a demonstrar a finitude do espaço. Vejamos:

> [...] se o existente [o espaço, grifo nosso] fosse infinito, não estaria em lugar nenhum. Se estivesse em algum lugar, aquilo em que estaria seria diferente dele; portanto, o existente, sendo abarcado por alguma coisa, deixaria de ser infinito, pois o que abarca é maior que o abarcado, e nada pode ser maior que o infinito (JAMMER, 2010, p. 37).

É importante notar, aqui, a impossibilidade de um infinito abarcar outro infinito, nos argumentos apresentados por Górgias de Leontini, pois, para este, o infinito deve ser ilimitado, e, sendo assim, não há nada que o possa conter. Fica evidente a identificação entre infinito e ilimitado, que converge com a tradição aristotélica de infinito em potência que perdurou por séculos na matemática:

> [...] that infinity expresses, in fact, only a pure potentiality, i.e., the non-limited possibility to increase an interval or to divide it. It was that interpretation of infinity as a potentiality, which dominated mathematics until the Cantorian revolution[27] (FISCHBEIN *et al*., 1979, p. 3).

Essa maneira de conceber o infinito, qualificando uma ação, produz, segundo Moreno e Waldegg (1991), “mais uma maneira de pensar do que um objeto matemático” (p. 213), entretanto, ainda segundo os mesmos autores, este modo de pensar o infinito possibilitou grandes resultados na matemática grega, mas não possibilitou uma conceitualização matemática do infinito.

A interpretação do infinito como uma potencialidade possibilitou, por exemplo, a Arquimedes se aprofundar no desenvolvimento de técnicas de cálculo de áreas e volumes. Para Aczel (2003), Arquimedes expandiu as ideias de Eudóxio e “demonstrou como utilizar um *infinito potencial* para encontrar o volume de uma esfera e um cone, gerando resultados reais” (ACZEL, 2003, p. 28).

---

[26] *Sexti empirici opera,* “Adversus dogmáticos” (org. H. Mutsch-mann, Leipzig, 1912-1914), v. 2, p.17.

[27] [...] o infinito expressa, na verdade, apenas uma potencialidade pura, isto é, a possibilidade não limitada de aumentar um intervalo ou dividi-lo. Foi essa interpretação do infinito como uma potencialidade que dominou a matemática até a revolução cantoriana (TRADUÇÃO NOSSA).

Sabemos que o *infinito potencial* convive até hoje na matemática como um modo de operação mental. No decorrer da história, o infinito permeou debates importantes na matemática e também causou dificuldades e paradoxos. Galileo Galilei, em *Diálogo Acerca de Duas Novas Ciências*[28], debate, por meio de seus personagens, as dificuldades do homem no entendimento do conceito de infinito:

> These difficulties are real; and they are not the only ones. But let us remember that we are dealing with infinities and indivisibles, both of which transcend our finite understanding, the former on account of their magnitude, the latter because of their smallness. In spite of this, men cannot refrain from discussing them, even though it must be done in a roundabout way[29] (GALILEI, 1914, p. 26).

Galileo Galilei, no âmago dos debates entre seus personagens, dá origem a paradoxos acerca do infinito. Inferimos que os paradoxos apareceram justamente pelo fato da não aceitação do infinito enquanto ato. Galilei conclui que não podemos, com nossas mentes finitas, discutir o infinito: “Dificuldades surgem quando tentamos, com nossas mentes finitas, discutir o infinito, atribuindo-lhes propriedades que damos aos finitos e limitados” (GALILEI, 1914, p. 31). Para Galilei, as propriedades de “maior” ou “menor” não fazem sentido quando trabalhamos com quantidades infinitas. E ele tinha razão, apesar de não apresentar uma alternativa para tal situação. Veremos, mais adiante, que, quando se trata de comparar quantidades infinitas, o adequado, hoje, é usar o conceito de cardinalidade[30].

A tradição filosófica de tratar o infinito pela concepção aristotélica do ser em potencial começa a ser rompida. Segundo (Moreno; Waldegg, 1991), foi necessário admitir o infinito enquanto adjetivo para que o *infinito atual* pudesse ser constituído. Entretanto fez-se necessário que novos objetos (conceituais) fossem concebidos e estes são os conjuntos.

---

[28] Titulo original: *Dialogues Concerning Two New Sciences.*

[29] Essas dificuldades são reais; e elas não são as únicas. Mas lembremos que estamos lidando com infinitos e indivisíveis, que transcendem nosso entendimento finito, o primeiro por sua magnitude, o último por causa de sua pequenez. Apesar disso, os homens não podem abster-se de discuti-los, mesmo que seja feito de forma indireta (TRADUÇÃO NOSSA).

[30] A definição científica atual de cardinalidade será explicitada na seção 3.3.

2.2 O CONCEITO DE INFINITO ATUAL COMO OBJETO DE ESTUDO NA MATEMÁTICA

> Ciertamente no todas, como dice Kästner, pero sin duda alguna sí la mayoría de las afirmaciones paradójicas que surgen en el ámbito de las matemáticas, tienen que ver con el concepto de infinito ya sea que lo mencionen directamente o involucrándolo de manera indirecta em su demostración[31] (BOLZANO, 1991, p. 39).

O trabalho de Bolzano[32], em *Os Paradoxos do Infinito* (1851), traz à tona a discussão acerca da possibilidade de introduzir o infinito em matemática como objeto de estudo. Para Moreno e Waldegg (1991), o passo decisivo a ser tomado, para esse fim, foi conceber o infinito como um atributo de uma coleção e não como um substantivo ou um advérbio. Segundo Waldegg (2008), Bolzano entende que a maneira adequada para se referir ao conceito de infinito é por meio do conceito de conjunto.

Na visão de Bolzano, a matemática trata de conjuntos abstratos, portanto, os critérios de validação para a existência dessas coleções infinitas tinha que ser nova, isto é, baseada principalmente em sua natureza não contraditória. Esse foi um passo decisivo para se abandonar a validação empírica. A ideia principal a apoiar o novo nível de representação reside no fato de que a concepção de um conjunto, que resulta de um processo construtivo utilizando os elementos, é abandonada. Em vez disso, Bolzano adotou um conceito sintético de conjunto, isto é, um conjunto é concebido como um todo, sem qualquer necessidade de se pensar em separado cada elemento (MORENO e WALDEGG, 1991).

Bolzano se empenhou em refutar argumentos daqueles que sustentavam a ideia de que não era possível conceber o infinito como um todo, em qualquer esfera de objetos, independentemente se fossem objetos restritos à matemática. Uma das afirmações que Bolzano refuta é a de que "um conjunto infinito no puede existir em niguna parte, por la sencilla razón de que no es posible abarcar nunca com el pensamento, como um todo unitário, um conjunto de esa índole" (BOLZANO, 1991, p. 52). Bolzano levanta o contraditório, afirma que devemos observar que esse argumento é claramente um erro, e que é equivocada a

---

[31] Certamente não todas, como disse Kästner, mas sem dúvida a maioria das afirmações paradoxais que surgiram no campo da matemática, têm a ver com o conceito de infinito, seja mencionando diretamente ou envolvendo indiretamente em sua demonstração (TRADUÇÃO NOSSA).

[32] Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano, nascido em Praga, República Checa, em 5 de outubro de 1781, e falecido também em Praga, em 18 de dezembro de 1848.

ideia de que, para pensar os objetos $a, b, c, d, \ldots$, é necessário formar as representações mentais individuais de cada um desses objetos, e, para isso, dá um exemplo:

> Puedo pensar, por ejemplo, el conjunto, el agregado o, si se quiere, el todo de los habitantes de Praga o de Beijing sin necesidad de tener una representación particular de cada uno de ellos. En realilidad, es precisamente esto lo que estoy haciendo en este momento al hablar de ese conjunto y hacer afirmaciones sobre él[33] (BOLZANO, 1991, p. 52).

Para Mena-Lorca *et al* (2015), Bolzano entende que o infinito se comporta de maneira paradoxal, embora isso não tenha sido um empecilho para Bolzano ser o primeiro a admitir a existência do conceito em seu sentido atual. Afinal, são paradoxos, mas não são contradições. Além disso, Bolzano afirma que o infinito, apesar de poder desafiar a intuição por meio de seus paradoxos, é possível dar sustentação suficiente para abordá-los. Hitt (2013) também observa que Bolzano tem a postura de enfrentar os paradoxos e ainda, "explota la idea de Galileo, pero contrariamente a la posición de Galileo, Bolzano toma la postura de enfrentar una paradoja y no pensar que la situación es contradictoria" (HITT, 2013, p. 105).

Vejamos agora o que Bolzano (1991) elegeu como uma das características mais notáveis dos conjuntos infinitos:

> Afirmo lo seguinte:
> Dos conjuntos pueden estar relacionados entre sí de tal manera que resulte posible
> (1) cada uno de los elementos de cualquiera de ellos se encuentre asociado con un elemento del otro, no existiendo ningún objeto en ninguno de los dos conjuntos que entre en esa relación con más de un elemento del otro; y
> (2) que uno de esos conjuntos incluya al otro como una parte propia, por lo que las multiplicidades que ambos conjuntos representan pueden encontrarse en las relaciones más variadas entre sí cuando se consideran todos los elementos de los mismos como objetos individuales intercambiables[34] (BOLZANO, 1991, p. 64, 65).

---

[33] Posso pensar, por exemplo, o conjunto, o agregado ou, se você quiser, todos os habitantes de Praga ou Pequim sem precisar ter uma representação particular de cada um deles. Na realidade, é exatamente isso que estou fazendo neste momento, quando falo acerca desse conjunto e faço declarações sobre o assunto (TRADUÇÃO NOSSA).

[34] Afirmo o seguinte:
Dois conjuntos podem ser relacionados entre si de tal forma que é possível
(1) cada um dos elementos de qualquer um deles está associado a um elemento do outro, não havendo nenhum objeto em nenhum dos dois conjuntos que entre nessa relação com mais de um elemento do outro; e
(2) que um desses conjuntos inclua o outro como parte própria, de modo que as multiplicidades que ambos os conjuntos representam podem ser encontradas nas relações mais variadas entre si quando

Essas características dos conjuntos infinitos superam a crença, que pode se tornar um obstáculo epistemológico, de que o "todo é maior que a parte". A origem histórica dessa crença, apesar de aparecer no denominado paradoxo de Galilei, está na Grécia antiga, mais especificamente no item 8 das denominadas *noções comuns* no Livro I dos Elementos, de Euclides:

> 1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
> 2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
> 3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
> 4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
> 5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
> 6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
> 7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
> 8. E o todo (é) maior do que a parte.
> 9. E duas retas não contêm uma área (EUCLIDES, 2009, p. 99).

Uma nova interpretação para a relação parte-todo de conjuntos infinitos é dada por Bolzano em seu trabalho, e relações até então consideradas paradoxais começam a ser arimetizadas, como, por exemplo, a possibilidade de relacionar biunivocamente um subconjunto infinito (parte) com um conjunto infinito (todo). Para Galilei, isso era contraditório, pois estava sob a égide do princípio estabelecido por Euclides.

Bolzano (1991) apresenta exemplos, como os conjuntos de números representados pelos intervalos (0, 5) e (0, 12), e argumenta que, claramente, esses conjuntos possuem infinitos números e, ainda, um pode ser considerado subconjunto próprio do outro (neste caso, (0, 5) $\subset$ (0,12)). Bolzano continua seu raciocínio afirmando que é possível estabelecer uma relação um-a-um entre os números de cada conjunto por meio da equação "$5y = 12x$". A seguir, a argumentação de Bolzano para esse caso:

> No es menos cierto, sin embargo, que si x es una cantidad cualquiera entre 0 y 5, y derterminamos la relación entre x e y por médio de la equación "$5\mathrm{y} = 12\mathrm{x}$", y es también una cantidad entre 0 y 12. Inversamente: siempre que y se encuentre entre 0 y 12, x ha de localizarse entre 0 y 5.
> De la ecuación se segue igualmente que a todo valor de x corresponde un único valor de y y vice-versa. Y es también claro que a toda cantidad x en el conjunto entre 0 y 5 corresponde una cantidad en el conjunto entre 0 y 12,

todos os elementos deles são considerados objetos individuais intercambiáveis (TRADUÇÃO NOSSA).

> de tal manera que ninguno de los objetos en alguno de estos dos conjuntos queda sin ser relacionado, y ninguno de ellos lo está con más de un solo objeto del otro conjunto[35] (BOLZANO, 1991, p. 65).

Bolzano sedimenta o caminho para o estabelecimento do *infinito atual* na matemática, cria um novo objeto matemático (os conjuntos), estabelece relações biunívocas[36] entre conjuntos infinitos[37] e seus subconjuntos próprios[38] e desenvolve várias propriedades que Piaget denominou de intraobjeto, dando sustentação para o surgimento posterior das relações interobjetos, estabelecidas por Georg Cantor (MORENO e WALDEGG, 1991).

> Bolzano postula los princípios sobre los que debe edificarse el concepto de infinito:
> a) El infinito es atributo de conjuntos. Bolzano descarta la idea de que los conjuntos infinitos son indeterminables. Su determinabilidad descansa en dos ideas que jugarán más tarde un papel crucial en la axiomatización de la teoría de conjuntos: la extensión y la comprensión.
> b) El infinito admite distintos grados, los conjuntos infinitos no tienen, como muchas veces se había argumentado, todos el mismo tamaño[39] (WALDEGG, 1996, p. 109-110).

Apesar de postular princípios, demonstrar a existência de diferentes infinitos e definir operações entre conjuntos infinitos, baseando-se no critério intraobjeto, isto é, comparando conjuntos com subconjuntos próprios, Bolzano não conseguiu, de modo mais geral, o que denominamos hoje de arimetização do infinito.

---

[35] Não é menos verdade, no entanto, que, se x for qualquer quantidade entre 0 e 5, e determinarmos a relação entre x e y por meio da equação "$5y = 12x$", y também é uma quantidade entre 0 e 12. Inversamente: sempre que y está entre 0 e 12, x deve estar localizado entre 0 e 5.
A partir da equação, é igualmente claro que a todo valor de x corresponde a um único valor de y e vice-versa. E também é claro que qualquer quantidade x no conjunto entre 0 e 5 corresponde a uma quantidade no conjunto entre 0 e 12, de modo que nenhum dos objetos em nenhum desses dois conjuntos permaneça sem relação e nenhum deles se relaciona com mais do que um único objeto do outro conjunto (TRADUÇÃO NOSSA).
[36] Relações um a um. Por exemplo, uma função bijetora, que é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora, estabelece uma relação biunívoca entre suas variáveis.
[37] No capítulo II, seção 2.4, será apresentada a definição de conjuntos infinitos e subconjuntos próprios.
[38] Dizemos, por exemplo, que *A* é subconjunto próprio de *B* se cada elemento de *A* está em *B*, mas existe pelo menos um elemento de *B* que não está em *A*. A diferença entre ser subconjunto próprio e ser subconjunto é que na segunda alternativa os conjuntos podem ser iguais.
[39] Bolzano postula os princípios sobre os quais o conceito de infinito deve ser construído:
a) O infinito é um atributo de conjuntos. Bolzano descarta a ideia de que os conjuntos infinitos são indetermináveis. A sua determinabilidade baseia-se em duas ideias que mais tarde desempenharão um papel crucial na axiomatização da teoria dos conjuntos: extensão e compreensão.
b) O infinito admite graus diferentes, os conjuntos infinitos não têm, como muitas vezes foi discutido, o mesmo tamanho (TRADUÇÃO NOSSA).

Com o trabalho de Bolzano, uma semente para uma tematização do *infinito atual* apareceu, embora, de fato, naquele momento, o conceito em si ainda não estivesse totalmente "tematizado". Isso porque, segundo Moreno e Waldegg (1991), o (a epistêmica) assunto tratado por Bolzano com certo "know-how" em situações restritas (intraobjeto) não envolveram aspectos estruturais do problema. As justificativas para que as relações entre conjuntos definidos por Bolzano sejam consideradas relações de tipo intraobjeto são:

> (a) A definition was given for the comparison between infinite sets - the direct predecessor to the establishment of bijective functions which characterize Cantor's approach. However, this comparison does not give rise to transformations, since it does not define set operations that would give a different set as their result.
>
> (b) The verification systems are mostly empiricall for instance, they are often based on the geometric (perceptual) properties of the figures, and the comparison is closely linked to the geometric (empirical) characteristics of the object.
>
> (c) There is no evidence of conservation (in the Piagetian sense), since a figure - seen as a set of points on the plane - can not be distorted or transformed (through dilation, for instance) without changing the number of elements of the set of points.
>
> (d) A certain degree of transitivity already exists in the relationships used by Bolzano, albeit limited. Bolzano's approach therefore constitutes the core of the structuration that was required for the evolution towards the inter-objectal level[40] (MORENO e WALDEGG, 1991, p 21-22).

Pudemos, a partir da estruturação proposta por Bolzano, conceber conjuntos infinitos como um objeto na matemática e estabelecer relações e propriedades com esses conjuntos. Na próxima seção, apresentamos a formalização dos conjuntos infinitos, iniciada por Bolzano.

---

[40] (a) A definição foi dada para a comparação entre conjuntos infinitos - o antecessor direto para o estabelecimento de funções bijetivas que caracterizam a abordagem de Cantor. No entanto essa comparação não dá origem a transformações, uma vez que não define operações de conjunto que daria um conjunto diferente como seu resultado.

(b) Os sistemas de verificação são principalmente empíricos, por exemplo, eles são muitas vezes baseados nas propriedades geométricas (percepção) dos números, e a comparação está intimamente ligada às características (empíricas) geométricas do objeto.

(c) Não existe evidência de conservação (no sentido de Piaget), uma vez que uma figura - vista como um conjunto de pontos no plano - não pode ser distorcida ou transformada (por meio de dilatação, por exemplo), sem alterar o número de elementos do conjunto de pontos.

(d) Certo grau de transitividade já existe nas relações usadas por Bolzano, embora limitado. A abordagem de Bolzano constitui, portanto, o núcleo da estruturação que era necessário para a evolução para o nível interobjeto (TRADUÇÃO NOSSA).

2.3 A FORMALIZAÇÃO DO INFINITO ATUAL COMO MUDANÇA CONCEITUAL HISTÓRICA

> Cantor desenvolveu com base nestes conceitos e com bastante sucesso, a teoria dos números transfinitos[41] e formulou um cálculo para eles. Desta forma, graças ao esforço hercúleo de Frege, Dedekind e Cantor o infinito se fez rei e reinou em grande triunfo. Em vôo vertiginoso, o infinito atingiu o pináculo da glória[42] (HILBERT, 1926, p. 169).

Georg Cantor, diferentemente de Bolzano, baseia o seu critério de comparação acerca da existência de uma relação bijetora entre os conjuntos a serem comparados. A introdução de um instrumento de comparação externa pode ser alcançada graças à ideia de trabalhar os conjuntos como separados em relações, o que levou à detecção de propriedades reflexiva, transitiva e simétrica, associadas à relação.

A mudança conceitual se consolida com Cantor, pois a teoria do infinito deste representa um ponto de importância crucial na história da construção do *infinito atual* em matemática. Foi então que o infinito alcançou uma posição permanente como um objeto de estudo com seu próprio funcionamento. Para esse fim, esse teórico definiu, pela primeira vez na história, uma operação realizada em conjuntos: dado um conjunto de pontos, seu conjunto de derivados (o conjunto de pontos de acumulação) pode ser construído. Essa operação significa que eram possíveis a geração e diferenciação de conjuntos infinitos, de acordo com as formas pelas quais os seus elementos eram "organizados" (MORENO, WALDEGG, 1991).

Santos (2008) em sua tese[43] considerou que Georg Cantor, com a teoria dos conjuntos, revolucionou a matemática e, ainda, considerou o modo de conceber o infinito, depois da teoria de Cantor, como uma mudança revolucionária no sentido da teoria de Kuhn[44]. Fischbein *et al* (1979) também afirmam a existência de uma mudança conceitual do conceito de infinito diante da tradição aristotélica que interpretava o infinito apenas como uma potencialidade.

---

[41] Números transfinitos ou cardinais transfinitos foi um sistema criado por Cantor para dizer o "tamanho" dos conjuntos infinitos. Estes cardinais transfinitos serão abordados na próxima seção.

[42] Cantor hat nun in Verfolg dieser Gedanken die Theorie der tranfiniten Zahlen aufs erfolgreichste ausgebaut und einen vollständigen Kalkül für dieselben geschaffen. So wurde schlieblich durch die gigantische Zusammenarbeit von Frege, Dedekind, Cantor das Unendliche auf den Thron gehoben und genob die Zeit des höchsten Triumphes. Das Unendliche war in kühnstem Fluge auf eine schwindelnde Höhe des Erfolges gelangt.

[43] O Infinito de George Cantor: uma revolução paradigmática no desenvolvimento da matemática.

[44] Em seu livro *A Estrutura das Revoluções Científicas.*

> The first aspect of that revolution was to prove the mathematical meaningfulness of the concept of actual infinity. This fact required first of all the elaboration of new logical schemes which were partially in contradiction with our usual mental schemes. For instance, in admitting infinity as actually existing we have to admit the strange proposition that the whole may be equivalent to some of its parts[45] (FISCHBEIN *et al*, 1979 p.4).

Com a estruturação proposta por Cantor, segundo Santos (2008), há invalidação de princípios que sustentam o paradigma finitista aristotélico, como a de que o todo será sempre maior que uma de suas partes ou que na matemática se trabalha apenas com quantidades finitas.

> Porém, a perda de generalidade desse princípio (o todo é sempre maior que a parte), assumido tão naturalmente por Galileo, só foi possível porque, em um contexto mais amplo, outro grande princípio foi deixado de lado. O princípio de que a matemática é uma ciência que trabalha apenas com magnitudes atualmente finitas, ou com magnitudes apenas potencialmente infinitas. Esse último princípio aparece nas conclusões de Aristóteles em sua Física, que podem ser condensadas na afirmação de que todo número, assim como todo conjunto, é finito. (SANTOS, 2008, p. 205, 206).

Esse rompimento com a tradição filosófica aristotélica, segundo Rezende (1999), permitiu "que paradoxos [...] reapareçam com força insofismável na fundação basilar do edifício do conhecimento matemático, [...] pondo em marcha, de forma dramática, uma jornada de profícua investigação filosófica sobre seus fundamentos" (REZENDE, 1999, p.2). Tal crise iniciou um processo de reflexão a respeito de como devemos realizar a verificação da verdade matemática, ou seja, em que devemos fundamentar a origem de qualquer conhecimento matemático. As direções tomadas para resolver essa crise foram classificadas por historiadores em três escolas, o logicismo, o intuicionismo e o formalismo.

Para Rezende (1999), questões metafísicas são invocadas para a discussão do conceito de infinito, com as novas definições de conjuntos enumeráveis e não enumeráveis, assim como já ocorreu na origem deste conceito na Grécia antiga.

---

[45] O primeiro aspecto dessa revolução era para provar o significado matemático do conceito de infinito real. Esse fato exigiu, em primeiro lugar, a elaboração de novos esquemas lógicos que estavam parcialmente em contradição com os nossos esquemas mentais habituais. Por exemplo, em admitir o infinito como realmente existente, temos de admitir a estranha proposição de que o todo pode ser equivalente a algumas de suas partes (TRADUÇÃO NOSSA).

> Parece que a razão não pode ultrapassar o enumerável, mas que a crença na existência do não enumerável é um ato de fé compatível com os limites da razão, que nos leva a apreender o significado de todo o edifício do conhecimento matemático em cores e formas distintas do que se nos apresenta caso recusemos este ato (REZENDE, 1999, p.20).

O trabalho de Cantor, segundo Hitt (2013), proporcionou à matemática uma estrutura que integra tanto o conceito de *infinito potencial* quanto o *infinito atual*. Porém isso não foi de imediato aceito pela comunidade acadêmica, pelo contrário, Cantor teve dificuldades de compreensão pelos seus pares e principalmente para publicar seus trabalhos.

> Uno de sus opositores Kronecker, mencionaba que Dios nos proporcionó los números naturales, y con eso nos bastaba. Cantor tuvo serios problemas para publicar sus trabajos y los opositores le hicieron la vida muy complicada… Cantor se refugió en la teología y llegó incluso a afirmar que Dios escribía utilizando como medio sus manos […][46] (HITT, 2013, p.106).

Com o passar do tempo, a comunidade matemática foi aceitando a teoria de Cantor para conjuntos, admitindo que essa estruturação proposta para o tratamento de conjuntos infinitos proporcionou vasto campo de desenvolvimento para a matemática e, como disse Hilbert, "um paraíso!".

2.4 Conjuntos infinitos, conjuntos enumeráveis e cardinalidade

Nesta seção apresentaremos, a partir do consenso científico atual, os conceitos, definições e teoremas que formalizam o conceito de infinito no campo da análise real.

Para Jahnke (2001), o primeiro conceito determinante no estudo dos conjuntos infinitos foi o de *cardinalidade*. Entretanto, antes de definirmos o conceito de cardinalidade de um conjunto infinito, apresentaremos como são definidos conjuntos finito e infinito[47].

---

[46] Um de seus oponentes, Kronecker, mencionou que Deus nos deu os números naturais, e isso foi suficiente para nós. Cantor teve sérios problemas para publicar suas obras e os adversários tornaram sua vida muito complicada... Cantor se refugiou na teologia e chegou a afirmar que Deus escrevera usando suas mãos como meio [...] (TRADUÇÃO NOSSA).

[47] As conceituações apresentadas nesta seção podem ser encontradas na maioria dos livros do curso de análise. Em específico, aqui usamos as encontradas no livro "Curso de Análise Vol. 1", de Elon Lages Lima.

Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, a seguinte notação para representar o conjunto dos números naturais maiores e iguais a 1 (um) e menores ou iguais a n.

$$I_n = \{p \in \mathbb{N}; 1 \leq p \leq n\}$$

Isto é, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1, 2\}$, $I_3 = \{1, 2, 3\}$, $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ e assim sucessivamente. Note que I_n também é escrito como $I_n = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$.

Desse modo, considerando a notação supracitada, um conjunto X denomina-se *finito* quando é vazio ou quando existe uma bijeção de I_n em X, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Em relação ao número de elementos desses conjuntos, dizemos, no primeiro caso (quando X é vazio), que X tem zero elemento, já, no segundo caso, dizemos que $n \in \mathbb{N}$ é o número de elementos de X. Como consequência dessa definição, temos que I_n é um conjunto finito.

A forma como são definidos conjuntos finitos, segundo Lima (2006), nos possibilita intuitivamente dizer que um conjunto finito X é aquele cujos elementos podemos contar por meio da bijeção $\varphi: I_n \to X$, de tal maneira que, com $\varphi(1) = x_1$, $\varphi(2) = x_2$,..., $\varphi(n) = x_n$, chegamos à representação ordinária do conjunto finito $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Um conjunto infinito, geralmente, é definido como a negação de um conjunto finito, ou seja, um conjunto X é infinito se não é vazio ou, se para qualquer $n \in \mathbb{N}$, não existe a bijeção $\varphi: I_n \to X$. Isto é equivalente a afirmar que *um conjunto infinito X denomina-se infinito quando não é finito*. Apesar de esta afirmação não estar errada, acreditamos que ela não explica a complexidade do conceito de conjunto infinito.

A forma de definirmos um conceito matemático como a negação de outro conceito não é exclusiva da definição de conjunto infinito. É comum encontrarmos, nos livros didáticos de matemática, a definição dos números irracionais como aqueles que não podem ser escritos como uma fração de dois números inteiros, isto é, definem-se os irracionais como aqueles que não são racionais no domínio dos números reais.

Para Vergnaud (1993, p.1), “Um conceito não pode ser reduzido à sua definição, principalmente se nos interessamos por sua aprendizagem e seu ensino”. Sabemos da importância das definições na estrutura formal do conhecimento matemático, e, ainda, segundo Rezende (2013), a afirmação de

Vergnaud "não significa que o pesquisador minimize a importância de se definir os conceitos no decorrer de sua aprendizagem, mas, sim, que apenas a definição de um conceito não é suficiente para compreendê-lo na essência" (p. 59).

A maneira tradicional em que se definem os conjuntos infinitos pela negação dos conjuntos finitos aparece como uma das preocupações de Bolzano, como bem escreveu Waldegg (2008):

> [...] se define el concepto "conjunto infinito" (cuyos elementos son todos de la misma especie) a partir de "conjunto finito", pero no a la manera tradicional de definir lo infinito como la negación de lo finito. La posición de Bolzano es que para hablar del infinito hay que hacerlo a través de conjuntos infinitos[48] (WALLDEGG, 2008, p. 120).

Entretanto essa tradição ainda perdura nos manuais didáticos de Análise Matemática, conforme foi mostrado anteriormente. Vejamos agora um resultado que geralmente se apresenta em forma de teorema e que poderia definir um conjunto infinito, sem que haja a necessidade do argumento da negação de um conjunto finito. Com efeito, um conjunto A é *infinito* se existir bijeção entre A e um subconjunto próprio de A. Este teorema, no entanto, segundo Sampaio (2009), é apresentado em forma de definição desde a época de Dedekind.

Na forma em que foram definidos os conjuntos finitos fica explícito seu número de elementos. Mas e quando se trata de conjuntos infinitos? É claro que não podemos afirmar que um conjunto infinito A tenha x elementos, porém será que não podemos falar nada a respeito da "quantidade" de elementos ou "tamanho" dos conjuntos infinitos como bem disse Galileo Galilei?

Vejamos agora duas definições, a primeira de *conjuntos enumeráveis* e a segunda de *cardinalidade*.

Um conjunto X é *enumerável*, quando for finito ou quando existir uma bijeção: $f: \mathbb{N} \to X$, ou seja, uma bijeção do conjunto dos números naturais com X. No segundo caso, dizemos que X é *infinito enumerável*. Denominamos cada bijeção acima definida como uma *enumeração* dos elementos de X.

Consideremos agora dois conjuntos X e Y. Dizemos que X e Y têm o mesmo *número cardinal* ou a mesma *cardinalidade* se existir uma bijeção $f: X \to Y$.

---

[48] O conceito "conjunto infinito" (cujos elementos são todos da mesma espécie) é definido a partir de "conjunto finito", mas não da forma tradicional de definir o infinito como a negação do finito. A posição de Bolzano é que, para falar do infinito, ele deve ser feito através de conjuntos infinitos (TRADUÇÃO NOSSA).

Temos agora parâmetros para comparar a “quantidade” de elementos tanto de conjuntos finitos quanto de conjuntos infinitos. Pois bem, dado dois conjuntos finitos, diremos que eles possuem o mesmo número cardinal se possuírem o mesmo número de elementos. Agora, caso queiramos comparar dois conjuntos infinitos X e Y, podemos lançar mão do conceito de cardinalidade.

Vejamos: se X for um conjunto infinito enumerável, temos que $card(X) = card(Y)$, se, e somente se, Y for um conjunto infinito enumerável.

Sabemos que um conjunto A é enumerável se possuir bijeção com os conjuntos dos números naturais. Assim, podemos dizer que a cardinalidade de A é a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$. Mas será que todo conjunto infinito é enumerável? Essa pergunta está no cerne da classificação que Cantor propõe para conjuntos infinitos, no entanto a resposta encontrada na história da matemática é negativa.

Cantor, em sua estruturação da teoria dos conjuntos, enuncia uma série de teoremas que darão sustentação para demonstrar, por exemplo, que os conjuntos $\mathbb{Z}$ dos números inteiros e o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais são enumeráveis. Dentre esses teoremas, podemos citar o que afirma o seguinte: Considere $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ conjuntos enumeráveis. A reunião $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ é enumerável. Em outras palavras, uma reunião enumerável de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

Com o intuito de estabelecer o “tamanho” dos conjuntos infinitos, Cantor demonstrou que $\mathbb{Z}$ é enumerável, isto é, possui a mesma cardinalidade do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Em 1873, segundo Stewart (2014), Cantor demonstrou que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais também é enumerável, fato que foge às primeiras intuições, “afinal, existem infinitamente mais números racionais no intervalo entre dois inteiros consecutivos” (Ibid., p. 321).

Voltando à pergunta supracitada, a de que se todos os conjuntos infinitos possuem a mesma cardinalidade, é de supormos que tal hipótese começasse a ficar mais evidente, uma vez que Cantor já havia demonstrado que outros conjuntos infinitos possuíam a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais. Nesse sentido, Cantor pensou o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais como uma união infinita enumerável de conjuntos, bastava então provar que cada um desses conjuntos era enumerável, e, consequentemente, por resultados anteriores já demonstrados, concluiria que $\mathbb{R}$ era enumerável.

De fato, o conjunto $\mathbb{R}$ pode ser escrito como

$$\mathbb{R} = \mathbb{Z} \cup \ldots \cup (-2-1) \cup (-1{,}0) \cup (0{,}1) \cup (1{,}2) \cup \ldots$$

Cantor havia demostrado que o conjunto $\mathbb{Z}$ era enumerável, deste modo, demonstrar que o intervalo $(0{,}1)$ é enumerável, bastaria[49], sem perda de generalidade, para provar que $\mathbb{R}$ era enumerável.

Supondo que o intervalo $(0{,}1)$ é um conjunto enumerável, Cantor listou seus elementos:

1º elemento $s_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \ldots$

2º elemento $s_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \ldots$

3º elemento $s_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \ldots$

4º elemento $s_4 = 0, a_{41}a_{42}a_{43}a_{44} \ldots$

$\vdots$

Cada decimal a_{ij} assume valores inteiros entre 0 e 9, e, por exemplo, o número 0,25 será representado pela dízima 0,2500000…, o número $\frac{1}{3}$, por 0,33333… e assim por diante.

Usando o que ficou conhecido como o método da diagonalização, Cantor percebeu que a lista não continha todos os números do intervalo $(0{,}1)$, chegando, assim, a uma contradição. Vejamos: para cada decimal a_{ij}, com $i = j$, caracterizado acima, troque seu valor por qualquer outro diferente dele mesmo e renomeie por b_{ij}.

$$\begin{gathered} 0, \mathbf{b_{11}}a_{12}a_{13}a_{14} \ldots \\ 0, a_{21}\mathbf{b_{22}}a_{23}a_{24} \ldots \\ 0, a_{31}a_{32}\mathbf{b_{33}}a_{34} \ldots \\ 0, a_{41}a_{42}a_{43}\mathbf{b_{44}} \ldots \\ \vdots \end{gathered}$$

Note que o número $b = 0, b_{11}b_{22}b_{33}b_{44} \ldots$ do conjunto $(0{,}1)$ é diferente de todos os listados inicialmente, de fato, é diferente do primeiro elemento s_1, pois $a_{11} \neq b_{11}$, também é diferente do segundo elemento s_2, pois $a_{22} \neq b_{22}$ e assim sucessivamente. Temos, assim, que o número b escolhido não está na lista, chegando, assim ao absurdo, isto é, contrariando a hipótese de (0,1) ser

[49] Provar a enumerabilidade do intervalo (0,1) era suficiente, pois é possível estabelecer uma função bijetora que leva o intervalo (0,1) ao outro intervalo da construção proposta por Cantor, e, assim, como já sabido, se há bijeção entre dois conjuntos e se um é enumerável, o outro também o será.

enumerável, pois conseguimos um elemento do intervalo que não está posto em correspondência com nenhum número natural. Logo, o intervalo $(0,1)$ não é enumerável, e, como $(0,1)$ está contido no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, esse também não o é.

Portanto, a tentativa de demonstrar a hipótese inicial de que $\mathbb{R}$ era enumerável tornou-se posteriormente um dos principais resultados da teoria dos conjuntos, isto é, Cantor provou[50] que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é enumerável. Como consequência, descobriu que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais possuía natureza distinta às daqueles que se colocavam em relação biunívoca com os conjuntos dos naturais.

> O conjunto dos racionais era denso mas não contínuo, e isso criava a suspeita de que existiam, de fato, dois tipos distintos de conjuntos infinitos: um primeiro tipo capaz de reunir todos aqueles conjuntos que poderiam ser colocados em uma relação um-a-um com o conjunto dos números naturais, e entre si; e um segundo tipo, cuja característica era, justamente, a de não aceitar uma correspondência, um-a-um, com aqueles conjuntos do primeiro tipo. Em poucas palavras, tudo indicava que havia infinitos de *tamanhos distintos*, isto é, infinitos que apresentam quantidades distintas de elementos (SANTOS, 2008, p.113).

Cantor criou uma classificação para os conjuntos infinitos e, digamos assim, a primeira "classe" de infinitos, na estruturação desse teórico, são aqueles conjuntos que possuem bijeção com o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Ou seja, os conjuntos infinitos enumeráveis. A notação utilizada para essa classificação foi a letra hebraica $\aleph$ (Aleph), e, para denotar os conjuntos infinitos enumeráveis, foi utilizado o símbolo $\aleph_0$. Em outras palavras, os alephs denotam o *número cardinal* (o número de elementos) dos conjuntos infinitos. Segundo Aczel (2003), Cantor queria ordenar os cardinais transfinitos, ou seja, queria nominá-los consecutivamente: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \aleph_4, \dots$ assim por diante.

Sabemos que a cardinalidade do conjunto dos números reais é maior que a cardinalidade do conjunto dos números naturais, e, ainda:

$$\aleph_0 = card(\mathbb{N}) = card(\mathbb{Z}) = card(\mathbb{Q}) < card(\mathbb{R}).$$

Sabemos também que, dado um conjunto X com n elementos, o conjunto das partes X, denotado por $\mathcal{P}(X)$, terá 2^n elementos. Cantor também

---

[50] "E é no início de 1874 que Cantor publica um artigo no *Mathematische Annalen*, com o título *Über eine Eigenschaft des Inbegrieffes aller reellen algebraischen Zahlen*, no qual apresenta a prova da não-enumerabilidade dos números reais" (SANTOS, 2008, p. 114).

demonstrou que o conjunto das partes de um conjunto infinito possui cardinalidade superior que o próprio conjunto, por exemplo, $\mathrm{card}(\mathbb{N}) < card(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, e, ainda, demonstrou que $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$.

> Cantor sabia que o conjunto de todos os números reais, o *continuum* da linha real, compreendia todos os possíveis subconjuntos do conjunto de todos os números inteiros. Todo inteiro pode estar incluído ou não em qualquer posição infinita de um número decimal. Por conseguinte, o número de elementos do *continuum* tinha de ser 2 elevado à potência do número infinito de inteiros. Consequentemente, o número cardinal do *continuum* era $\mathrm{c} = 2^{\aleph_0}$ (ACZEL, 2003, p. 132).

O cardinal dos números reais, como Aczel (2003) apresenta, é designado por $card(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$. Desse modo, o problema do contínuo de Cantor pode ser assim formulado: Existe algum outro número cardinal entre número cardinal do conjunto $\mathbb{N}$ (designado $\aleph_0$) e o número cardinal do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais (designado $c = 2^{\aleph_0}$)? Para Cantor, a resposta a essa pergunta era negativa.

Com a afirmação de que não existem conjuntos com cardinalidade intermediária em relação ao conjunto dos números naturais e o conjunto dos números reais, Cantor gerou uma das mais conhecidas conjecturas da comunidade matemática, denominada de *Hipótese do Contínuo,* ou seja*,* $\aleph_1 = 2^{\aleph_0} = card(\mathbb{R})$.

> Em especial, Cantor fez a si mesmo a pergunta: "Existe outro número cardinal, outro *alef*, entre o *alef*-zero e o cardinal do *continuum*?". Se a resposta fosse "não", Cantor poderia chamar a ordem de infinito do *continuum*, *c*, simplesmente de $\aleph_1$. Sem a resposta, não era possível ordenar os cardinais transfinitos, pois não havia como determinar qual cardinal sucede ao $\aleph_0$. Cantor não podia designar $\aleph_1$ nem nenhum *alef* maior que $\aleph_0$ (ACZEL, 2003, p. 134).

A Hipótese do Contínuo (HC), ou conjectura do contínuo, como alguns matemáticos preferem, ficou inacessível aos matemáticos por muitos anos e digamos que ainda hoje é pouco discutida no meio acadêmico. Hilbert colocou a HC como o primeiro de uma lista com mais de 23 problemas propostos no Congresso Internacional de Matemáticos em 1900. Segundo Madore (2001), o logicista Kurt Gödel, em 1940, demonstrou que a HC era infalsificável, ou seja, impossível de demonstrar que era falsa. Já em 1963, o logicista Paul Cohen demonstrou que a HC era indemonstrável, isto é, impossível de mostrar que a HC era verdadeira.

Sendo assim, a validade da HC dependerá da escolha de axiomas que serão base para o desenvolvimento para a teoria dos conjuntos. Segundo

Stewart (2014), dependendo dos axiomas escolhidos, desenvolve-se uma teoria consistente e coerente em que a HC será válida, e, escolhendo-se outros axiomas igualmente coerentes, constrói-se outra teoria em que a HC não será valida. Ainda, segundo Stewart (2014), embora a validade da HC dependa da escolha dos axiomas escolhidos, uma igualdade permanece inalterada: $c = 2^{\aleph_0}$. Concluímos este capítulo com uma das implicações da teorização de Cantor, a de que para além da existência de conjuntos infinitos maiores que outros, não há um cardinal infinito maior que todos os outros:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \cdots.$$

III. O CONCEITO DE INFINITO COMO UM OBSTÁCULO NA MATEMÁTICA

Eu vejo, mas não creio!

Neste capítulo apresentamos o conceito de infinito como um obstáculo na Matemática em dois aspectos, na sua constituição histórica e em seu ensino e aprendizagem. Para isso o separamos em duas seções, a primeira, para apresentar uma síntese dos obstáculos do conceito de *infinito atual* na história da matemática, e a segunda para trazer as implicações desses obstáculos no ensino e na aprendizagem da matemática.

3.1 O INFINITO COMO OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Desde a Grécia antiga, como descrito no capítulo anterior, já era possível identificar obstáculos em relação ao conceito infinito. De fato, Aristóteles admitiu a possibilidade de se descrever o infinito de dois modos, em ato e em processo, para isso, ele utilizou três formas gramaticais que representavam os papéis que o infinito poderia assumir. Porém o único papel por que o infinito poderia ser adotado, por razões filosóficas, era a forma gramatical que qualifica uma ação, isto é, o *infinito potencial.*

O "horror ao infinito", como bem disse Caraça (1951, p. 81), já precedia Aristóteles, como, por exemplo, as contradições causadas pelos paradoxos de Zenão e as dificuldades encontradas pelos pitagóricos em encontrar um número[51] que representasse a diagonal de um quadrado. Essa aversão ao *infinito atual* influenciou não só a matemática grega, mas também todo o desenvolvimento da matemática ocidental até o século XVII, que se apoiou, quando exigido, apenas no *infinito potencial*.

---

[51] Números, para os pitagóricos, eram apenas os inteiros positivos (os naturais sem o zero para nós hoje). Desse modo, como a medida da diagonal de um quadrado qualquer sempre será incomensurável em relação à medida do lado desse quadrado, não era possível descrever essa relação em termos dos números inteiros, causando abalo na crença pitagórica de que o universo poderia ser descrito por completo por meio dos números que eles conheciam.

> Conclui-se pela *exclusão do conceito quantitativo de infinito* dos raciocínios matemáticos – a matemática grega toma uma feição cada vez mais *finitista*: invade-a o *horror do infinito*. Conclui-se pelo *abandono das concepções dinâmicas*, sempre que tal fosse possível – a matemática grega é invadida pelo *horror do movimento* (CARAÇA, 1951, p. 81).

Segundo Sierspinska (1985), a expressão “horror ao infinito” remonta a Georg Cantor, e significa uma forma de miopia que nos impede de ver o infinito atual.

> Cette expression renvoie à Georg Cantor: “L'horreur de l'infini est une forme de myopie qui empêche de voir l'infini actuel, bien que, dans sa forme supérieure cet infini nous ait crées et nous maintient, et dans ses formes secondaires transformées il se manifeste tout autour de nous et va jusqu'à habiter nos esprits”[52] (CANTOR, 1932 *apud* SIERSPINSKA, 1985, p. 39).

Após Zenão e Aristóteles tratarem o infinito apenas como uma potencialidade, Euclides, que tinha o mesmo pressuposto, enunciou como noção comum, no Livro I dos Elementos, que o todo é sempre maior que uma de suas partes. Esta noção perdurou durante séculos na matemática, e ainda hoje, se mantém como intuitivamente irrevogável por muitos.

Com as discussões apresentadas por Galilei em seus diálogos, já no século XVII, o infinito se torna peça central em alguns de seus debates e a noção de que o todo é sempre maior que uma de suas partes é colocada em xeque. Quando Galilei propõe, por meio de seus personagens de sua obra, uma possível relação entre os números naturais e seus quadrados perfeitos, fica explícita a dificuldade em aceitar o infinito em ato, ou ainda, em aceitar que o todo (números naturais) pode se relacionar bionivocamente com uma de suas partes (números quadrados perfeitos). Fazendo um anacronismo declarado, uma vez aceitado o *infinito atual,* Galilei colocaria fim ao (aparente) paradoxo.

Vejamos a seguir, nos diálogos dos personagens Salviate e Simplício, como Galilei apresentou, de forma paradoxal, a dificuldade de tentar relacionar conjuntos infinitos:

> SALVIATE: [...] I take it for granted that you know which of the numbers are squares and which are not.

[52] Esta expressão refere-se a Georg Cantor: "O horror do infinito é uma forma de miopia que nos impede de ver infinito real, embora em sua forma superior esse infinito que criamos e sustentamos, em suas formas secundárias transforma-se e manifesta-se a nossa volta e continua a habitar nossas mentes” (TRADUÇÃO NOSSA).

> SIMPLÍCIO: I am quite aware that a squared number is one which results from the multiplication of another number by itself; thus 4, 9, etc., are squared numbers which come from multiplying 2, 3, etc., by themselves.
> SALVIATE: Very well; and you also know that just as the products are called squares so the factors are called sides or roots; while on the other hand those numbers which do not consist of two equal factors are not squares. Therefore if I assert that all numbers, including both squares and non-squares, are more than the squares alone, I shall speak the truth, shall I not?
> SIMPLÍCIO: Most certainly.
> SALVIATE: If I should ask further how many squares there are one might reply truly that there are as many as the corresponding number of roots, since every square has its own root and every root its own square, while no square has more than one root and no root more than one square.
> SIMPLÍCIO: Precisely so.
> SALVIATE: But if I inquire how many roots there are, it cannot be denied that there are as many as there are numbers because every number is a root of some square. This being granted we must say that there are as many squares as there are numbers because they are just as numerous as their roots, and all the numbers are roots. Yet at the outset we said there are many more numbers than squares, since the larger portion of them are not squares. Not only so, but the proportionate number of squares diminishes as we pass to larger numbers. Thus up to 100 we have 10 squares, that is, the squares constitute 1/10 part of all the numbers; up to 10000, we find only 1/100 [79] part to be squares; and up to a million only 1/1000 part; on the other hand in an infinite number, if one could conceive of such a thing, he would be forced to admit that there are as many squares as there are numbers all taken together.
> SAGREDO: What then must one conclude under these circumstances?[53] (GALILEI, 1914, p. 31-32).

---

[53] SALVIATE: [...] Eu digo por certo que você sabe quais dos números são quadrados e quais não são.
SIMPLÍCIO: Estou ciente de que um número quadrado é aquele que resulta da multiplicação de outro número por si mesmo; assim, 4, 9 etc. são números quadrados que se originam da multiplicação de 2, 3 etc. por si mesmos.
SALVIATE: Muito bem; e você também sabe que, assim como os produtos são chamados de quadrados, então os fatores são denominados de lados ou raízes; enquanto, por outro lado, os números que não consistem em dois fatores iguais não são quadrados. Portanto, se eu afirmar que todos os números, incluindo quadrados e não quadrados, são mais do que os quadrados sozinhos, falo a verdade, não?
SIMPLÍCIO: Certamente.
SALVIATE: Se eu devesse perguntar mais quantos quadrados há, um pode responder verdadeiramente que existem tantos como o número correspondente de raízes, uma vez que cada quadrado tem sua própria raiz e cada raiz, seu próprio quadrado, enquanto nenhum quadrado tem mais de uma raiz e nenhuma raiz mais de um quadrado.
SIMPLÍCIO: Precisamente.
SALVIATE: Mas, se eu perguntar quantas raízes existem, não se pode negar que existem tantos quanto há números porque cada número é uma raiz de algum quadrado. Ao ser concedido, devemos dizer que existem tantos quadrados quanto números, porque são tão numerosos quanto suas raízes e todos os números são raízes. No entanto, desde o início, dissemos que há muito mais números do que quadrados, uma vez que a maior parte deles não são quadrados. Não só assim, mas o número proporcional de quadrados diminui à medida que passamos para números maiores. Assim, até 100, temos 10 quadrados, ou seja, os quadrados constituem 1/10 parte de todos os números; Até 10000, encontramos apenas 1/100 [79] partes para serem quadrados; e até um milhão apenas 1/1000 parte; por outro lado, em um número infinito, se alguém pudesse conceber tal coisa, ele seria forçado a admitir que há tantos quadrados quanto todos os números juntos.
SAGREDO: O que, então, se deve concluir nessas circunstâncias? (TRADUÇÃO NOSSA).

A dificuldade apresentada por Galilei diante de relacionar quantidades infinitas pôde ser resolvida com o trabalho de Bolzano, que admitiu a existência do *infinito atual* e introduziu o conceito de conjuntos na matemática. Bolzano, por meio de sua obra "Os paradoxos do infinito", refutou, uma a uma, todas as contradições que o próprio anunciou em sua obra, e que permeavam o conceito de infinito. Para isso, um dos passos foi admitir existência do infinito em ato, uma mudança significativa na epistemologia desse conceito e que foi negada na filosofia aristotélica e seguida por toda a produção matemática ocidental até Bolzano.

Com a inclusão e aceitação do infinito em ato na matemática, a estruturação dos conjuntos infinitos começou a se solidificar com a obra de Cantor. Porém isso não significa que esse processo transcorreu sem obstáculos. A famosa frase "Eu vejo, mas não creio", numa carta de George Cantor, endereçada a Richard Dedekind, em 1877, representa um dos principais obstáculos na discussão do infinito na matemática. Nessa carta, Cantor se referia à demonstração de que era possível, por exemplo, estabelecer relação biunívoca entre os pontos de um quadrado com um de seus lados. A estranheza de Cantor se deu pelo fato de "igualarmos", em termos de "quantidades" de pontos, um objeto bidimensional a um objeto unidimensional.

Um enunciado geral desse teorema é: Dada uma variedade[54] contínua de dimensão n qualquer, tal que $n > 1$, pode-se estabelecer uma relação biunívoca com uma variedade contínua de dimensão 1. Este teorema permite, entre outras coisas, afirmar que uma reta possui a mesma cardinalidade que o plano, que o espaço tridimensional, e até mesmo com qualquer outro espaço de dimensão n.

Segundo Arrigo e D'amore (1999), o espanto de Cantor pode ser comprovado por suas próprias palavras:

> "La mayor parte de aquellos a los que les he puesto esta pregunta se han sorprendido mucho del hecho mismo de que yo hubiera hecho tal pregunta ya que se entiende por si mismo que, para la determinación de un punto sobre una extensión a p dimensiones, se necesitan siempre p coordenadas independientes". Después, Cantor confiesa que había intentado demostrar este hecho, considerando que fuese verdadero, pero solo porque ya no estaba satisfecho de la suposición y de tan difundida evidencia! Y confiesa por lo tanto de haber formado parte siempre de aquellos que no ponían en

[54] Variedade é qualquer objeto geométrico pertencente ao espaço R^n.

> duda tal hecho; siempre, hasta que había demostrado que en cambio las cosas no eran así…[55] (ARRIGO; D'AMORE, 1999, p. 6).

Apresentaremos, a seguir, um quadro em que resumimos os episódios históricos, adotados nesta tese, que deram origem a obstáculos no conceito de infinito na matemática ou que causaram ruptura no processo de conceber o infinito.

Quadro 01: Resumo de episódios históricos

PERSONAGENS HISTÓRICOS	ESPISÓDIOS HISTÓRICOS QUE GERARAM OBSTÁCULOS OU RUPTURAS	CONCEPÇÃO ADOTADA DE INFINITO
ZENÃO	**Criação de paradoxos, como o de Aquiles e a Tartaruga:** Medo e repúdio a processos infinitos.	Infinito potencial
ARISTÓTELES	**O infinito apenas como uma categoria filosófica:** O infinito como qualificador de uma ação; Nega a possibilidade de conceber o infinito em ato; O infinito é sempre ilimitado.	Infinito potencial
EUCLIDES	**Noção comum enunciada nos Elementos:** E o todo (é) maior do que a parte.	Infinito potencial
GALILEI	**Escreve a obra *Diálogo Acerca de Duas Novas Ciências*:** Apresenta um paradoxo causado pela tentativa de relacionar números naturais com seus respectivos quadrados perfeitos.	Infinito potencial
BOLZANO	**Apresenta a definição de conjuntos e assume o infinito atual como objeto na matemática**: Estabelece relação intraobjetos, ou seja, estabelece relações biunívocas entre conjuntos infinitos e subconjuntos próprios.	Infinito atual e potencial
CANTOR	**Cria classes de infinito, os transfinitos:** Define enumerabilidade e cardinalidade; Elabora a *Hipótese do Contínuo*; Estabelece bijeção entre objetos de dimensões distintas, causando a famosa frase "eu vejo, mas não acredito".	Infinito atual e potencial

(Fonte: do autor)

3.2 O INFINITO COMO OBSTÁCULO NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Não é de hoje que dificuldades na compreensão do infinito atingem o processo de ensino-aprendizagem. Autores como Duval (1983) e Fishbein (2001) apresentaram conflitos cognitivos de estudantes e professores de matemática em

[55] "A maioria daqueles a quem fiz esta pergunta ficou muito surpreso com o fato de ter feito tal questão, já que se entende que, para a determinação de um ponto em uma extensão com p dimensões, são sempre necessárias p coordenadas independentes". Mais tarde, Cantor confessa que ele tentou demonstrar esse fato, considerando que era verdade, mas apenas porque ele não estava mais satisfeito com a suposição e evidências tão generalizadas! E ele confessa, portanto, ter sempre sido parte daqueles que não questionaram esse fato; sempre, até ter mostrado que as coisas não eram assim… (TRADUÇÃO NOSSA).

suas pesquisas vinculadas ao conceito de infinito, como, por exemplo, questões relacionadas à subdivisão infinita de um segmento, a comparação entre conjuntos e subconjuntos próprios, ambos infinitos e dízimas decimais infinitas. Outro exemplo, dado por Igliori (2002) está na aceitação do próprio conceito de infinito:

> O aspecto metafísico da noção de limite foi um entrave para a sua introdução na matemática e se apresenta também hoje como um dos principais obstáculos para a aprendizagem. Os estudantes têm relutância em aceitar a noção de infinito por acharem "não rigorosa", "que não existe", "muito abstrata" (IGLIORI, 2002, p. 107).

Esse aspecto metafísico da noção de limite - o infinito - é o primeiro obstáculo a dificultar a aprendizagem do conceito de limite, segundo Sierspinska (1985). A partir do estudo do desenvolvimento histórico da noção de limite e baseada nos estudos de caso que realizou, Sierspinska (1985) elenca o que considera obstáculos para a noção de limite:

> 1. "Horror Infiniti"
> 2. Obstacles liés à la notion de function
> 3. Obstacles "geométriques"
> 4. Obstacles "logiques"
> 5. L'obstacle du symbole[56] (SIERSPINSKA, 1985, p. 38).

Vejamos que a aversão ao infinito é enunciada por Sierpinska (1985) como a primeira de sua listagem de OE. O "horror ao infinito", considerado como um componente metafísico no processo de aprendizagem de limite. Um exemplo, segundo a autora, é a não aceitação dos conjuntos infinitos. Além disso, a execução de processos algébricos que envolvem os limites é realizada por meio de aproximações ligada ao movimento físico, usando termos como: "aproxima-se cada vez mais".

> L'obstacle qui consiste à associer le passage à la limite à un mouvement physique, à un rapprochement: "on s'approche indéfiniment" ou "on s'pprouche de plus en plus", alors que la notion de limite dans la théorie formelle est conçue de façon "statique". Alors que pour un "rapprochement illimité" l'infini potentiel suffit, la théorie formelle exige que l'on prenne en considération tous les termes d'une suite, autrement dit, elle exige l'existence d'un ensemble infini[57] (SIERSPINSKA, 1985, p. 40).

---

[56] 1. Horror ao Infinito; 2. Obstáculos relacionados à noção de função; 3. Obstáculos "geométricos"; 4. Obstáculos de "lógica"; 5. O obstáculo do símbolo (TRADUÇÃO NOSSA).

[57] O obstáculo consiste de associar a passagem ao limite a um movimento físico, a uma aproximação: "nos aproximamos indefinidamente" ou "nos aproximamos cada vez mais", enquanto o conceito de

Vejamos que concepção de infinito potencial, assim como observou Sierpinska (1985), é suficiente para entender o processo de limite baseado em aproximações. Entretanto, em sua definição formal, é preciso finalizar o processo, é necessário que completemos uma sequência infinita. É preciso adotar o infinito atual.

Duval (1983) apresentou obstáculos de estudantes entre 12 e 13 anos em relação ao que denominamos de problemas parte-todo, isto é, problemas que estabelecem relação biunívoca entre conjuntos infinitos e subconjuntos próprios infinitos. Esse desconforto cognitivo por parte dos alunos, ou conflito parte-todo, como Waldegg e Moreno (1991) denominaram essa tensão provocada por esses tipos de problemas, também é apresentado no artigo *The intuition of infinity*, dos autores Fischbein *et al* (1979).

O problema de relacionar parte de um conjunto infinito com o seu todo fez surgir, o que ficou conhecido como paradoxo de Galilei. Por meio de diálogos entre personagens fictícios, Galileo Galilei (1638) apresenta, com uma retórica peculiar, o que, para ele, na época era um paradoxo, a tentativa de estabelecer uma relação entre o que denominamos hoje[58] de conjunto dos números quadrados perfeitos com o conjunto dos números naturais, isto é, relacionar o conjunto dos números naturais (o todo) com o subconjunto próprio dos números quadrados perfeitos (a parte).

Para Waldegg (1996), o obstáculo mais difícil a superar para a compreensão dos conjuntos infinitos é o estabelecimento de uma bijeção entre um conjunto infinito e alguma de suas partes própria. Além disso, considerando essa bijeção um obstáculo epistemológico, no decorrer da história da matemática, é conveniente estudarmos a natureza desse obstáculo no domínio didático. Nesse sentido, Sampaio (2009) também investigou a bijeção entre conjuntos infinitos e subconjuntos próprios infinitos, num questionário respondido por 829 alunos no

---

limite na teoria formal é projetado de forma "estática". Enquanto que, para uma "aproximação ilimitada", o infinito potencial é suficiente, a teoria formal requer que consideremos todos os termos de uma sequência, ou seja, requer a existência de um conjunto infinito (TRADUÇÃO NOSSA).

[58] No momento em que Galileo escreveu seus diálogos, o conceito de conjunto, como estudamos hoje na matemática, ainda não existia, somente depois de mais de 200 anos Bolzano estabeleceu o conceito usual de conjunto, mais especificamente em 1851 em sua obra *Paradoxien des Unendlichen* (Os Paradoxos do Infinito).

ensino secundário de Portugal, chegando também à conclusão de que essa bijeção é um dos maiores obstáculos na compreensão do infinito.

A estabilidade do pensamento intuitivo também foi um dos obstáculos apresentados por Walldeg (1996), já sinalizados por outros autores, como Pozo e Carter (1987)[59], citados pela autora. O tipo de pensamento que parte do ponto de vista do senso comum apresenta resistência a mudanças, e a causa dessa estabilidade tem origem na coerência local das concepções dos alunos, que permite a eles resolver convenientemente inúmeras situações, como, por exemplo, estender propriedades e características de conjuntos finitos para conjuntos infinitos, enquanto que outra abordagem, proposta pela a Análise Matemática, não oferece mais que resultados "absurdos".

Estamos diante de um obstáculo que surge de uma concepção baseada na intuição e na evidência empírica, afirma Waldegg (1996). Situações que envolvem comparações de conjuntos infinitos, segunda a autora, é um bom candidato a se tornar um obstáculo didático.

> Las concepciones de los conjuntos finitos impiden fuertemente la aceptación del criterio de la biyección para establecer una comparación de conjuntos infinitos y entonces avanzar así hacia una aritmetización del infinito[60] (WALDEGG, 1996, p. 111).

Num primeiro momento, é possível que alunos enfrentem certa dificuldade em aceitar, por exemplo, que os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ têm a mesma cardinalidade, problema este com a mesma natureza de dificuldade enfrentada com o denominado paradoxo de Galilei. Porém, segundo Arrigo e D'amore (1999), após a demonstração de que os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ possuem a mesma cardinalidade, pode surgir outro obstáculo, isto é, muitos estudantes podem concluir que esse fenômeno (mesma cardinalidade) se estenderá para todos os conjuntos infinitos, que ficou conhecido, segundo o mesmo autor, como *constrição* ou *achatamento*[61], "Esta aceptación intuitiva (que representa um misconcepción bastante difundida) la

[59] Pozo, J. I., Carretero, M. (1987). "Del pensamiento formal a las concepciones espontáneas: ¿Qué cambia en la enseñanza de la ciencia?", Infancia y Aprendizaje, 38, 50.

[60] As concepções dos conjuntos finitos impedem fortemente a aceitação do critério de bijecção para estabelecer uma comparação de conjuntos infinitos e depois avançar para uma aritmetização do infinito (TRADUÇÃO NOSSA).

[61] Os termos utilizados por D'amore em italiano para este fenômeno foi *appiattimento*.

llamaremos de ahora em adelante: *aplastamiento* de los cardinales transfinitos" (ARRIGO; D'AMORE, 1999, p. 7).

Esse fenômeno possui relação com um episódio histórico. De fato, Georg Cantor, na ânsia de arimetizar os conjuntos infinitos, já havia demonstrado a enumarabilidade de vários conjuntos infinitos, entre eles, o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ e o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$. Entretanto, este fato levou Cantor a supor, em sua hipótese inicial, que o conjunto dos números reais também era enumerável, ou seja, a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, por exemplo. Mas quando admitia a enumerabilidade $\mathbb{R}$, sempre se chegava a uma contradição. Por isso a demonstração atual usada para a não enumerabilidade de $\mathbb{R}$ é uma prova por absurdo. Conjecturamos assim que esse fenômeno também pode ser considerado como um obstáculo epistemológico.

Este fenômeno de achatamento também é descrito na pesquisa de D'amore *et al* (2004).

> Essendo l'infinito una categoria non sottoponibile ad ulterior classificazioni, tutti gli infiniti sono uguali tra loro; dalla maggior parte dei soggetti che fanno questa considerazione o simili, l'infinito è visto come entità numerica non precisabile, più un modo di dire che um oggetto passibile di oggettivazione matemática[62] (D'AMORE *et al,* 2004, p. 66).

Na pesquisa de Moreno e Waldegg (1991), alunos foram confrontados com as perguntas: "Porque o conjunto de inteiros é infinito? E, porque é infinito o número de pontos de um segmento?" (Ibid. p. 220). Alguns estudantes responderam, respectivamente: "porque cada inteiro tem um sucessor e porque entre dois pontos, há sempre outro ponto" (Ibid. p. 220). Essas respostas, segundo Moreno e Waldegg (1991), são baseadas numa concepção construtiva de uma sequência que é definida em termos da regra para gerá-la, no entanto traz implicitamente a incapacidade de completar o processo.

Outro possível motivo para desencadear obstáculos é a nova maneira, em relação à sua época, com que Cantor introduziu para a contagem de conjuntos, descrita na seção 2.4. Para Kolar e Čadež (2012), a forma formalista de

[62] Infinito sendo uma categoria que não pode ser submetida a classificações adicionais, todos os infinitos são iguais entre eles. Para a maioria dos assuntos que fazem essa consideração ou considerações semelhantes, o infinito é visto como uma entidade numérica que não pode ser especificada, é mais uma maneira de dizer (ou pensar), do que um objeto passível de objetificação matemática (TRADUÇÃO NOSSA).

compreensão dos conjuntos e do infinito, como propôs Cantor, contradiz a lógica natural, pois "substitui o processo de contagem, que é o método mais natural de comparar conjuntos desde a infância, com o processo formalista de correspondência um-para-um" (p. 391).

Sampaio (2009) afirmou que o conceito de *infinito atual* não evolui com o amadurecimento do aluno, a autora verificou que, nos três últimos anos do ensino secundário, a quantidade de respostas adequadas dos alunos à questão que investigava o conceito de *infinito atual* foi praticamente a mesma. Esse resultado vai ao encontro da seguinte hipótese: "as intuições e, particularmente, as intuições do infinito são resistentes ao efeito da idade" (FIESHBEIN, TIROSH & HESS, 1979, p. 32). Essa afirmação, segundo o próprio autor, é uma das hipóteses mais importantes de seu trabalho.

> Our findings partially confirmed this prediction. Starting with grade 7 (12-13 years), the percentage of the main categories of answers (especially "finitists"' and "infinitists") is generally stable across ages with a slight tendency of domination of the "infinitist" answers toward the higher grades[63] (FISHBEIN *et al*, 1979, p. 32).

Rock (2003) apresenta elementos relacionados ao conceito de infinito que podemos considerar como possíveis áreas de dificuldades. São eles: a existência de diferentes tipos de infinito; a importância do contexto e situação matemática; processos interativos e recursivos; natureza do objeto matemático.

> Hemos querido enfatizar diferentes niveles en los problemas del aprendizaje del cálculo. Uno de ellos es la importancia que se le debe proporcionar a los problemas de conversión entre representaciones. Este acercamiento es notorio en los libros de texto de los últimos años, por ejemplo en los Estados Unidos. Sin embargo, un problema mayor sigue persistiendo, que es que el aprendizaje sobre el infinito está ligado a sobrepasar un obstáculo de corte epistemológico, y que ello conlleva a realizar un acercamiento de enseñanza con mucho más cuidado que lo que hasta ahora se ha propuesto[64] (HITT, 2013, p.120).

---

[63] Nossas descobertas confirmaram parcialmente essa previsão. Começando com o grau 7 (12-13 anos), a porcentagem das principais categorias de respostas (especialmente "finitistas" e "infinitistas") é geralmente estável ao longo de todas as idades, com pouca tendência de dominação das respostas "infinitas" em direção a graus mais elevados (TRADUÇÃO NOSSA).

[64] Queríamos enfatizar diferentes níveis nos problemas de aprendizagem do cálculo. Um deles é a importância que deve ser dada aos problemas de conversão entre representações. Esta abordagem é notória nos livros didáticos dos últimos anos, por exemplo, nos Estados Unidos. No entanto um grande problema continua a persistir, que é que aprender sobre o infinito está ligado a superar um obstáculo epistemológico, e isso leva a uma abordagem para ensinar com muito mais cuidado do que o proposto até agora (TRADUÇÃO NOSSA).

Para Belmonte e Sierra (2011), a incorporação do conceito de infinito no currículo e nos livros didáticos apresenta uma singularidade em relação a qualquer outro: não está definido nem é acompanhado por nenhum manual, apesar da onipresença em quase todas as etapas de ensino em matemática.

Embora exista uma vasta literatura a respeito das dificuldades encontradas para se ensinar e aprender conceitos que estão relacionados ao infinito, no âmbito escolar, segundo Rock (2003), muitos avanços teóricos para o tratamento didático do infinito ainda fora do alcance dos alunos e não resolvem os obstáculos da intuição em relação a este conceito. Ainda, segundo Rock (2003), há evidências de que muitos OE presentes no desenvolvimento do conceito de infinito têm relação com obstáculos manifestados em estudantes quando estes estudam matemática.

Partilhamos da compreensão de Hitt (2013) quando ele afirma que a história nos mostrou que a manipulação do conceito de infinito merece que o tratemos com respeito e de acordo com a noção de obstáculo epistemológico. Para Mena-Lorca *et al* (2015), a persistência e resistência de OE são definitivamente características do infinito enquanto objeto de estudo, e, ainda:

> Los antecedentes históricos planteados al inicio refuerzan la conclusión de que el infinito es un obstáculo epistemológico: el origen del problema que enfrenta la persona al abordarlo se puede pesquisar en lo que la propia historia nos muestra respecto de las dificultades que los matemáticos tuvieron que sortear ante situaciones de carácter similar, y es bien posible que esa persona enfrente dificultades similares a pesar de la (mayor) información previa de la cual pueda disponer[65] (MENA-LORCA *et al,* 2015, p. 350).

D'Amore (2007) argumenta que, "quando na história da evolução de um conceito se percebe uma ruptura, mudanças radicais de concepções, então se supõe que tal conceito possua no seu interior *obstáculos de caráter epistemológico*" (p. 214). Como pudemos perceber na discussão histórica, apresentada neste trabalho, este é o caso do conceito de infinito. Nesse sentido, considerando o conceito de infinito o causador de OE, é preciso, segundo Brousseau (1989), reconhecer esses obstáculos e enfrentá-los.

---

[65] Os antecedentes históricos, levantados no início, reforçam a conclusão de que o infinito é um obstáculo epistemológico: a origem do problema que a pessoa enfrenta ao lidar com isso pode ser investigada no que a própria história nos mostra a respeito das dificuldades que os matemáticos tiveram que vencer diante de situações de natureza semelhante, e é bem possível que essa pessoa enfrente dificuldades semelhantes, apesar da (maior) informação prévia que pode estar disponível. (TRADUÇÃO NOSSA)

Apresentamos, a seguir, um quadro-resumo que descreve os principais obstáculos epistemológicos diante do conceito de infinito na aprendizagem que foram abordados nesta tese.

Quadro 02 – Resumo de obstáculos na aprendizagem em relação ao infinito.

OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO	**DESCRIÇÃO DO OBSTÁCULO**	**ALGUMAS REFERÊNCIAS**
Constrição ou achatamento da cardinalidade	Considera que todos os conjuntos infinitos possui a mesma cardinalidade.	Arrigo e D'amore (1999) D'amore *et al* (2004)
Parte-todo: o todo é sempre maior que uma de suas partes.	Dificuldade em aceitar a bijeção entre conjuntos infinitos, sendo um dos conjuntos, parte própria do outro.	Duval (1983) Waldegg (1996)
Infinito ≡ ilimitado	Considera-se que todo e qualquer ente infinito é ilimitado.	Moreno e Waldegg (1991)
O limite é algo que se aproxima, mas não chega!	A ideia de limite baseada em aproximações. Não se finaliza o processo.	Sierpinska (1985)

(Fonte: do autor)

IV. PRESSUPOSTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS DAS ATIVIDADES E UNIDADES DE CONTEXTO

Este capítulo tem como objetivo explicitar os pressupostos que nortearam a construção das atividades e suas respectivas unidades de contexto. Para isso, estruturamos uma primeira seção a fim de apresentar o papel que o conhecimento histórico e epistemológico da matemática possui no trabalho pedagógico do professor de matemática e, ainda, uma segunda seção para exibir a fundamentação teórico-metodológica que sustentou cada uma das atividades e unidades de contexto que compuseram nossa coleta de dados.

4.1 A HISTÓRIA E A EPISTEMOLOGIA DA MATEMÁTICA COMO POTENCIALIDADE NO TRABALHO PEDAGÓGICO.

Pretendemos, nesta seção, evidenciar algumas potencialidades da história da matemática (HM), tanto na formação pedagógica do professor, quanto na contribuição para esta pesquisa. Acreditamos que a utilização da história no processo de ensino e aprendizagem de matemática assume valor epistemológico relevante. D'ambrósio (2009) afirma que "a história da matemática é um elemento fundamental para se perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época" (p. 29-30).

> Havia um homem que aprendeu a matar dragões e deu tudo que possuía para se aperfeiçoar na arte. Depois de três anos ele se achava perfeitamente preparado, mas que frustração, não encontrou oportunidades de praticar sua habilidade. (Dschuang Dsi)
> Como resultado ele resolveu ensinar como matar dragões. (René Thom) (D'AMBRÓSIO, 2009, p.30).

O poema supracitado por D'ambrósio apresenta uma metáfora acerca de conteúdos que aprendemos em contextos artificiais, e, em algum momento, nos damos conta de que tal contextualização utilizada simplesmente não possui mais respaldo na realidade atual, entretanto, ainda assim, continuaremos a reproduzi-la.

Essa metáfora representa, em alguns casos, momentos da formação de um professor de matemática. Acreditamos que uma forma de amenizar, ou até, suprimir essa deformação, ou formação não adequada, é considerar o uso da HM e da epistemologia da matemática na formação docente, pois,

> Ao estudar um determinado conceito, a partir de uma abordagem histórica, o professor pode caminhar para uma compreensão de como aquele conceito foi sendo desenvolvido, quais os elementos conceituais necessários para a sua compreensão, quais são os pontos de maior dificuldade, por que eles foram importantes naquela época, por que são importantes hoje, quais eram as necessidades para o desenvolvimento daquele dado conceito, entre outros (ARAMAN; BATISTA, 2017, p. 386).

Para Batista (2009), o professor deve se apropriar de elementos e trilhar alguns caminhos para implementar uma abordagem histórico-filosófica; produzir atividades específicas para o uso de exemplares históricos e discussões filosóficas; fundamentar suas aulas, tanto metodológica quanto teórico-conceitualmente; investigar e conhecer reconstruções didáticas de experimentos históricos; e proporcionar atividades interdisciplinares.

> Essa compreensão extrapola aquela recebida durante a sua formação, ocasionando um entendimento mais amplo e significativo do conteúdo matemático, o que trará benefícios para suas aulas. Ao desenvolver um conteúdo com seus alunos, o professor pode oferecer muito mais do que fórmulas e exercícios, desde que ele tenha conhecimento para isso (ARAMAN; BATISTA, 2017, p. 386).

A inserção da história e filosofia nos currículos de formação de professores já foi colocada em discussão há mais de 22 anos, quando Matthews (1995) escreveu que algumas instituições americanas denunciaram que o ensino de ciências nos Estados Unidos não correspondia mais às necessidades nacionais e, ainda, que inserir a história, filosofia e a sociologia da ciência no escopo curricular, poderia apresentar algumas respostas para tal crise.

É possível encontrar opiniões contrárias à inserção da história no ensino de ciências - que poderiam se estender também para a matemática. De fato, Matthews (1995) apresenta alguns autores, como Whitaker (1979)[66] e Klein (1972)[67], que argumentavam a respeito da qualidade duvidosa do tipo de história que poderia

[66] WHITAKER, M. A. B. History and Quasi-history in Physics Education Pts I, II , *Physics Education* 14, 108-112,239-242, 1979.
[67] KLEIN, M. J. Use and Abuse of Historical Teaching in Physics , in S. G. Brush & A. L. King (eds.) History in the Teaching of Physcs, University Press of New England, Hanover, 1972.

ser utilizada no ensino - geralmente denominada de quasi-história – e corríamos o risco de piorarmos o resultado, caso adotássemos tal uso.

> Whitaker (1979) explorou mais profundamente esses argumentos num ensaio intitulado História e quasi-história no ensino de física, onde preocupava-se em identificar qual a ficção histórica que prevalecia a fim de satisfazer-se não apenas aos fins pedagógicos, mas aos fins da ideologia científica ou à visão de ciência que tinha o autor. Tais casos são bastante frequentes em livros-texto. Um caso que tem sido bastante discutido é o do registro, largamente difundido, de como a teoria da relatividade de Einstein teria sido inspirada pelo fracasso do experimento de Michelson Morley; um mito inspirado em Popper (MATTHEWS, 1995, p. 173-174).

Imprecisões ou possíveis superdimensionamentos de descobertas também podem contribuir para a descaracterização da construção científica. Nobre (2004) apresenta um conhecido episódio na HM, que é o da medição da sombra das pirâmides do Egito por Thales.

> Um outro destaque que gostaria de reportar refere-se a um conhecido teorema da geometria que diz respeito às relações de proporcionalidade entre os segmentos de reta que são originados por retas paralelas e suas transversais: o famoso Teorema de Thales. Também de acordo com Eudemus, Thales viajou ao Egito, onde aprendeu geometria e a levou para a Grécia. No Egito, segundo conta a história, Thales teve a façanha de calcular a altura de uma pirâmide a partir de sua sombra (NOBRE, 2004, p. 535).

Nobre (2004) levanta suspeita sobre a veracidade de tal feito, uma vez que "são raros os períodos do ano em que o Sol se encontra em posição de oferecer uma sombra privilegiada para que se possa fazer as medições para se determinar, de forma um pouco mais precisa, a altura da pirâmide" (Ibid. p.536). Apesar de compreender que existem imprecisões na HM, Nobre (2004) não coloca o uso da história como algo negativo no ensino de matemática, mas chama a atenção para o uso das fontes de pesquisa.

> Quanto maior for a quantidade de informações sobre determinados acontecimentos históricos, maior é a possibilidade de se obter um encadeamento histórico, firmado em bases qualitativas, que sustente a informação adquirida. Se essas informações forem escassas, ou originárias de fontes duvidosas, as conclusões históricas referentes ao assunto tratado ficam frágeis e passíveis de diferentes e, muitas vezes, conflitantes interpretações (NOBRE, 2004, p. 531).

Matthews (1995) apresentou argumentos para contrapor posições que fossem contrárias ao uso da história no ensino, de fato, não é o fato de a história da ciência ser simplificada que impede a sua inserção no ensino, pois "o problema hermenêutico da interpretação da história da ciência não pode impedir seu uso, pelo contrário é uma boa forma de inserir os alunos em discussões importantes" (MATTHEWS, 1995 p. 177), e, ainda, que a interpretação, a percepção e a subjetividade humana estão presentes em todas as tarefas e que a ciência – e acrescentamos a matemática - não está imune a divergências.

Batista (2009) afirma que não podemos confundir ensino de ciências com o ensino de história ou filosofia das ciências e expõe que as reconstruções puramente históricas e/ou filosóficas não são suficientes, apesar de necessárias, para contribuir na produção de conhecimento pesquisado na área de educação científica.

Além dos pontos favoráveis, já explicitados nesta tese, em relação à utilização da HM na formação do professor, esta também contribui para a formação metodológica. Araman (2011) afirma que, quando o professor se propõe a desenvolver abordagens históricas, ele vai além dos conhecimentos históricos ou conceituais, relacionados ao conteúdo:

> Ele utiliza também conhecimentos pedagógicos vindos de estudos teóricos e também de sua prática, a fim de tornar factível o uso daquelas informações históricas em sala de aula. Como já dissemos, essa não é uma tarefa trivial, exige e relaciona entre si diversos conhecimentos metodológicos. Ou seja, ele precisa realizar uma série de escolhas e adequações entre diferentes perspectivas metodológicas e conceituais para atingir o seu objetivo: proporcionar aprendizagem de matemática (ARAMAN, 2011, p. 113).

Para Igliori (2002), a inserção da HM num contexto de ensino já acontece desde o fim do século passado, muito em função dos estudos de Bachelard, "no entanto a ideia de analisar o conhecimento matemático numa perspectiva histórica para obter algumas luzes de como se dá o processo de construção do conhecimento pelos estudantes só tomou força nos últimos vinte anos" (p. 99).

Este trabalho se insere no contexto supracitado, e o conhecimento histórico e epistemológico da constituição do conceito de infinito serviu para que pudéssemos conhecer e compreender OE presentes nele. Isso foi imprescindível para a elaboração das atividades, das unidades de registro e das unidades de contexto. Para Araman (2011), quando o professor se propõe a construir uma abordagem histórica, essa vivência “proporciona ao docente uma formação que envolve muitos elementos, como conceituais, metodológicos e experienciais” (Ibid. 205).

4.2 ESTRUTURA TEÓRICO-METODOLÓGICA DAS ATIVIDADES

Nesta seção apresentaremos elementos históricos e epistemológicos que deram suporte para a elaboração das atividades que serviram de base para nossa coleta de dados, bem como os pressupostos de nossa fundamentação didática, apresentados no capítulo I como parte do referencial teórico metodológico.

> Hoje, a questão fundamental em didática é a escolha de situações apropriadas para alunos, levando-se em consideração o ponto de desenvolvimento que já atingiram. É verdade que nessa escolha é fundamental se interessar acerca da epistemologia específica dos diversos domínios de conhecimento – matemático, histórico, científico, moral etc. – ou seja, das questões específicas de conteúdo (VERGNAUD, 2003, p. 39).

O instrumento de coleta de dados é constituído por tarefas estruturadas, com o intuito de propiciar aos investigados uma gama diversa de situações que envolvem o conceito de infinito. Para as respostas de cada atividade, serão solicitadas justificativas, permitindo que os sujeitos demonstrem mais adequadamente seu nível de compreensão, procurando meios de esclarecer as ambiguidades surgidas nas respostas.

Para a elaboração das atividades, foram considerados pressupostos da teorização dos campos conceituais de Vergnaud e da teorização das situações didáticas de Brousseau, mais especificamente, atividades que consideram o histórico de conhecimentos já elaborados pelo aluno, uma variedade de situações presentes no campo conceitual do infinito e OE do infinito, apresentados na literatura.

Vergnaud (2009) considera que a base da conceitualização por parte do aluno é a formação de invariantes operatórios durante as atividades e, ainda, que o mediador tem, igualmente como responsabilidade:

> […] escolher situações para oferecer ao aprendiz que esclareçam o objetivo da atividade, contribuir com a organização da atividade, inclusive com a tomada de informação e de controle, de fazer aparecer, ao menos parcialmente, os teoremas em ação pertinentes, de facilitar as inferências em situação. (VERGNAUD, 2009, p. 33).

Na elaboração das atividades, buscamos contemplar diferentes linguagens da matemática, como a aritmética, geométrica e algébrica, de modo a propiciar diferentes contextos envolvendo o conceito de infinito. Segundo Rock (2003), o infinito pode ser encontrado em vários contextos da matemática e chama a atenção para a mudança de postura de interpretação de acordo com o contexto.

> El infinito se encuentra en una diversidad de contextos y áreas de la matemática: desde la geometría, hasta la teoría de conjuntos, pasando por los conceptos de sucesiones y series, y límites. Pero el contexto y situación afectan la interpretación que se tenga del infinito. De hecho, y como observan varios investigadores (e.g. Nuñez, 1993), aún cuando un problema se construye de manera isomórfica en diferentes contexto, el contexto afecta la manera en la que se concibe el problema[68] (ROCK, 2003, p. 264).

Vergnaud (2003) apresenta questões que estão no centro da ação pedagógica e didática do professor como, por exemplo, quais elementos devem estar presentes nas situações de modo que favoreça a desestabilização de conhecimentos falsos do aluno? Como ao mesmo tempo propiciar a desestabilização desses conhecimentos no aluno e ainda conduzi-lo a uma situação que focalize aspectos importantes e necessários do conteúdo?

Nesse sentido, foram elaboradas atividades complementares a fim de proporcionar aos alunos entrevistados situações que pudessem confrontar possíveis respostas consideradas não adequadas no consenso científico atual. Estas atividades foram elaboradas usando a ideia de desmobilização de teoremas em ação falsos que possivelmente serão mobilizados pelos alunos.

---

[68] O infinito é encontrado numa diversidade de contextos e áreas da matemática: desde a geometria, até a teoria dos conjuntos, passando pelos conceitos de sequências e séries e limites. Mas o contexto e a situação afetam a interpretação do infinito. Na verdade, e como vários pesquisadores observam (por exemplo, Nuñez, 1993), mesmo quando um problema é construído de maneira isomórfica em diferentes contextos, o contexto afeta a maneira como o problema é concebido (TRADUÇÃO NOSSA).

Na atividade 1 simulamos um diálogo entre dois personagens que se autointitulam infinito. Com esse diálogo foi possível investigar, por meio das respostas dos alunos do curso de licenciatura em Matemática, que relações eles estabeleceram a respeito do conceito de infinito e as propriedades de limitado e ilimitado. No capítulo II apresentamos a identificação entre infinito e limitado, principalmente nas concepções de infinito na Grécia antiga, já que admitiam apenas o infinito em potência.

Para essa atividade, não foi elaborada atividade complementar, porém, caso os alunos respondessem algo fora do consenso científico ou que provocasse alguma dúvida, o entrevistador poderia fazer uma intervenção oral.

A atividade 2 apresenta um problema adaptado que aparece nas obras de Arrigo e D'amore (1999), Moreno e Waldegg (1991), Fischbein *et al* (1979) e Fischbein (2001) e traz uma representação geométrica de comparação entre a quantidade de pontos de dois segmentos de reta que possuem comprimentos distintos. Além disso, esta atividade traz outros elementos para a discussão a respeito do infinito, que são os conjuntos não enumeráveis[69].

Com esta atividade pretendemos investigar se os alunos mobilizarão conhecimentos que possam ser qualificados como TAF, como, por exemplo, o de que um o segmento menor possui menos pontos do que o segmento maior, já que um pode ser considerado parte do outro, explicitando, assim, um dos OE já enunciados nesta tese, ou mobilizar conhecimentos afirmando que os conjuntos de pontos que formam os segmentos AB e CD possuem a mesma cardinalidade.

Moreno e Waldegg (1991) afirmam que, quando um aluno entra pela primeira vez em contato com conjuntos infinitos, um dos principais conflitos que aparece é entender ou aceitar que o todo pode ser igual a uma de suas partes. No cerne desse conflito está o fato de que os esquemas intelectuais de cada indivíduo surgem a partir da experiência cotidiana, em que é óbvio que o todo é maior que a parte.

Uma variação do problema parte-todo é abordada na atividade 3. Agora, usando uma linguagem algébrica, esta atividade apresenta um diálogo, por

---

[69] Conjuntos não enumeráveis são conjuntos infinitos, mas que não é possível estabelecer uma relação bijetora com o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

meio de personagens da obra de Galileo Galilei[70], acerca dos números naturais e seus respectivos quadrados, também conhecido como o paradoxo de Galilei. Com esta atividade pretendemos investigar se os alunos identificam se o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números quadrados perfeitos possuem a mesma cardinalidade.

A atividade 4 apresenta um diálogo que traz uma situação aritmética envolvendo o conceito de infinito, a igualdade $0,\overline{9} = 1$. Com esta atividade pretendemos investigar se os alunos interpretam a igualdade como uma soma infinita de uma PG, ou seja, $0,\overline{9}=0,9+0,09+0,009+...=1$.

Além disso, a situação proposta pela atividade 4 pode explicitar a maneira de um aluno tratar o infinito, isto é, se um aluno entende que, sempre que for possível acrescentar mais um dígito 9 na sequência, estará baseando-se no infinito em potência. A partir do momento em que ele aceita completar o processo, isto é, que 0,9999... = 1, ele assumirá o infinito em ato.

Para Mena-Lorca *et al* (2015), o contexto que reproduzimos na atividade 4 provoca dificuldades que possuem origem num obstáculo epistemológico.

> Observemos que la notación 0,999… sugiere un infinito potencial, y que la cuestión de si acaso 0,999… =1 se refiere al infinito actual, pues pregunta acerca del resultado cuando se haya desplegado toda la expansión decimal de 0,999… Es la confrontación de ambos tipos de infinito, en este caso uno que se va progresivamente construyendo y otro que es el resultado final de esa construcción, lo que provoca el obstáculo (de origen) epistemológico[71] (ARTURO MENA-LORCA *et al*, 2015, p. 331).

A atividade 5 apresenta um dos mais famosos paradoxos da matemática, o de Aquiles, proposto por Zenão de Elea. Vejamos uma versão deste paradoxo:

> At each instant during the race, Achilles and the tortoise are at some point of their paths, and neither is twice at the same point. Then, since they run for the same number of instants, the tortoise runs through as many distinct

---

[70] Personagens da obra "*Dialogues concerning two new sciences"*, de Galileo Galilei, publicada originalmente em 1638.

[71] Observe que a notação 0,999... sugere um infinito potencial e que a questão de se 0,999 ... = 1 se refere ao infinito atual, pois ela pergunta acerca do resultado quando toda a expansão decimal de 0,999 for desdobrada... É o confronto de ambos os tipos do infinito, neste caso um que é progressivamente construído e outro que é o resultado final dessa construção, o que causa um obstáculo (de origem) epistemológico (TRADUÇÃO NOSSA).

> points as does Achilles. On the other hand, if Achilles is to catch up with the tortoise he must run through more points than the tortoise does since he has to travel a greater distance. Hence, Achilles can never overtake the tortoise[72] (KLINE, 1990 *apud* FISHBEIN, 2001, p. 321).

Esse problema é uma variação da atividade 4, pois também traz uma situação aritmética envolvendo o conceito de infinito, entretanto nesta atividade a igualdade pretendida é a soma dos espaços percorridos por Aquiles. Com esta atividade também pretendemos investigar se os alunos a interpretam como uma soma infinita de uma PG, ou como uma série geométrica. A negação de que Aquiles alcança a tartaruga pode revelar a dificuldade na aceitação do infinito em ato, ou seja, uma soma infinita de parcelas (espaços percorridos) resultando num número real.

A atividade 6 apresenta uma situação geométrica envolvendo o conceito de infinito, a comparação entre objetos de dimensões distintas. Em outras palavras, essa situação propõe a discussão da uma correspondência biunívoca entre os pontos de um quadrado e os pontos de um segmento. Esse problema é um caso particular do problema proposto por Georg Cantor (1845-1918) a Richard Dedekind (1831-1916), em uma carta escrita em 29 de junho de 1877.

Com esta atividade pretendemos investigar se os alunos terão algum obstáculo em aceitar tal identificação, assim como Cantor escreve na carta depois de ter feito a demonstração: “Eu vejo, mas não creio”. Além disso, a situação, apesar de aparentemente ser geométrica, tem demonstração basicamente algébrica, forçando os alunos a transitar de um campo da matemática para explicar outro.

Destacamos por fim, que a estruturação de todas as atividades teve como intuito identificar, nas respostas dos entrevistados, possíveis teoremas em ação falsos e propor situações com a finalidade de desestabilizar os conhecimentos falsos dos alunos e correlacioná-los com OE do conceito de infinito, já definidos na literatura.

---

[72] A cada instante durante a corrida, Aquiles e a tartaruga estão em algum ponto de seus caminhos, e tampouco é duas vezes o mesmo ponto. Então, uma vez que eles correm para o mesmo número de instantes, a tartaruga percorre tantos pontos distintos como faz Aquiles. Por outro lado, para Aquiles alcançar a tartaruga, ele deve percorrer mais pontos do que a tartaruga faz uma vez que ele tem de viajar uma distância maior. Assim, Aquiles nunca pode ultrapassar a tartaruga (TRADUÇÃO NOSSA).

V. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo apresentará as percepções dos autores a respeito do caminho percorrido na pesquisa, tanto a parte empírica quanto os estudos teóricos. Por que percepção? Partilhamos de uma visão não linear de ciência e pudemos vivenciar essa não linearidade na produção desta pesquisa. Acreditamos que em qualquer tentativa de descrever caminhos numa pesquisa, inerentemente, processos por vezes subjetivos ficarão imersos nessa descrição.

Sabemos da necessidade de explicitar a descrição metodológica e da sua fundamentação. Nesse sentido, passamos agora a descrever os passos metodológicos desta pesquisa que está inserida no que a literatura denomina de pesquisa qualitativa.

Tratou-se, de início, de uma pesquisa bibliográfica, no que se refere às suas fontes. A pesquisa possui orientação histórico-filosófica, à medida que prevê uma investigação do desenvolvimento epistemológico do conceito de infinito. Desse modo, parte desta pesquisa se deu pela metodologia da pesquisa documental e bibliográfica. Num segundo momento, foi elaborado um material composto por uma sequência de atividades, a fim de servir como base para uma entrevista semiestruturada.

A estruturação e a fundamentação do material produzido para a coleta de dados foram detalhadas no capítulo anterior, entretanto, as atividades bem como suas respectivas unidades de registro fazem parte do corpus deste capítulo.

Organizamos as duas próximas seções, a fim de que a descrição de nosso caminho percorrido na pesquisa ficasse o mais compreensível possível. Num primeiro momento, descreveremos o suporte teórico-metodológico para obtenção e análise dos dados, bem como o objetivo de nossa pesquisa e a escolha dos sujeitos da pesquisa. Na segunda seção, apresentaremos as atividades e as respectivas unidades de contexto, e os teoremas em ação tipificados nas unidades de registro.

5.1 SUPORTE TEÓRICO-METODOLÓGICO PARA OBTENÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Passamos a apresentar a descrição de como foi realizada a análise das respostas dos sujeitos da pesquisa, obtidas por meio das entrevistas semiestruturadas. Acreditamos na possibilidade de relacionar os TAF que porventura surgirem nas respostas dos alunos diante das situações apresentadas e relacioná-los com os OE do conceito de infinito apresentados nesta pesquisa. Para isso, retomamos nossa hipótese inicial e os objetivos de nossa pesquisa.

Hipótese de pesquisa:

Será que é possível relacionar obstáculos epistemológicos com conhecimentos mobilizados por alunos em situações que envolvam o conceito de infinito?

Objetivo geral:

Investigar a relação entre obstáculos epistemológicos, identificados no decorrer da história na conceitualização do infinito enquanto objeto (*infinito atual*), e os conhecimentos mobilizados por acadêmicos de licenciatura em Matemática em situações relacionadas a este conceito.

Objetivos específicos:

Para alcançar o objetivo proposto, foi necessário realizar as seguintes etapas: identificar OE no decorrer da história no que se refere ao conceito de infinito; criar situações de ensino que problematize esses OE; identificar possíveis teoremas-em-ação mobilizados pelos acadêmicos mediante as situações criadas, e, por fim, estabelecer relação entre os OE e os teoremas-em-ação, mobilizados pelos alunos.

Baseados nas hipóteses iniciais e seguindo orientação de Bardin (2004), elaboramos unidades de análises que compreendeu Unidades Temáticas de Contexto (UC) e suas respectivas Unidades de Registro (UR), Bardin as define como,

> a) A unidade de registro é uma unidade de significação a codificar e corresponde ao segmento de conteúdo a considerar como unidade de base, visando a categorização e a contagem frequencial. A unidade de registro pode ser de natureza e de dimensões variadas (BARDIN, 2004, p 104).
> b) A unidade de contexto serve de unidade de compreensão para codificar a unidade de registro e corresponde ao segmento da mensagem, cujas dimensões (superiores à unidade de registro) são ótimas para que se possa

> compreender a significação exata da unidade de registro (BARDIN, 2004, p. 107).

As unidades de registro propostas por Bardin (2004) admitem naturezas distintas, tais como palavra, tema, objeto ou referente, personagem, acontecimento e documento.

Nossa investigação se enquadra no âmbito das pesquisas qualitativas, e tem, entre outras, a preocupação de investigar o processo de mobilização e desmobilização de conhecimentos dos sujeitos, procurando descrever este processo. Para nossa análise qualitativa, adotaremos as unidades de registros temáticas.

Optamos em debruçarmos, com certa especificidade, na reação dos quatro sujeitos perante as atividades que lhes foram oferecidas, com o intuito de descobrir quais conhecimentos estavam sendo mobilizados a respeito do conceito de infinito, sendo assim, acreditamos que esta investigação se enquadra no que a literatura denominada de estudo de casos.

5.1.2 Condução da entrevista e os sujeitos da pesquisa

A condução da entrevista semiestruturada foi realizada de modo a permitir a intervenção dos pesquisadores. De início, cada sujeito da pesquisa foi recebido em uma sala reservada. Depois de explicado o contexto da pesquisa e apresentado o termo de consentimento esclarecido, foi dado início à coleta dos dados, apresentando a primeira atividade e deixando o sujeito da pesquisa livre para fazer perguntas quando necessário.

A escolha de tomada de dados, por meio da entrevista semiestruturada, está em consonância com os subsídios teórico-metodológicos das atividades construídas, pois permitiu que a obtenção dos dados fosse flexível, de modo a atender aos objetivos desta pesquisa.

A organização do instrumento de coleta de dados nos direcionou a construir atividades que privilegiassem a comunicação entre pesquisadores e sujeitos da pesquisa. As entrevistas foram individuais, nas quais pudemos de maneira estruturada, acompanhar as respostas dos entrevistados em cada atividade e interferir, quando possível e de forma pertinente, para tentar evitar ambiguidades nas respostas dos alunos, bem como confrontá-los com novas situações, oportunizando, assim, que estes pudessem reelaborar seus conhecimentos.

A obtenção dos dados de cada sujeito teve duração média de 120 minutos de modo contínuo, isto é, não houve tomada de dados que começou em um dia e terminou em outro. Os registros das respostas das atividades foram digitalizados e inseridos no apêndice. Todas as entrevistas foram gravadas por meio de gravador de voz.

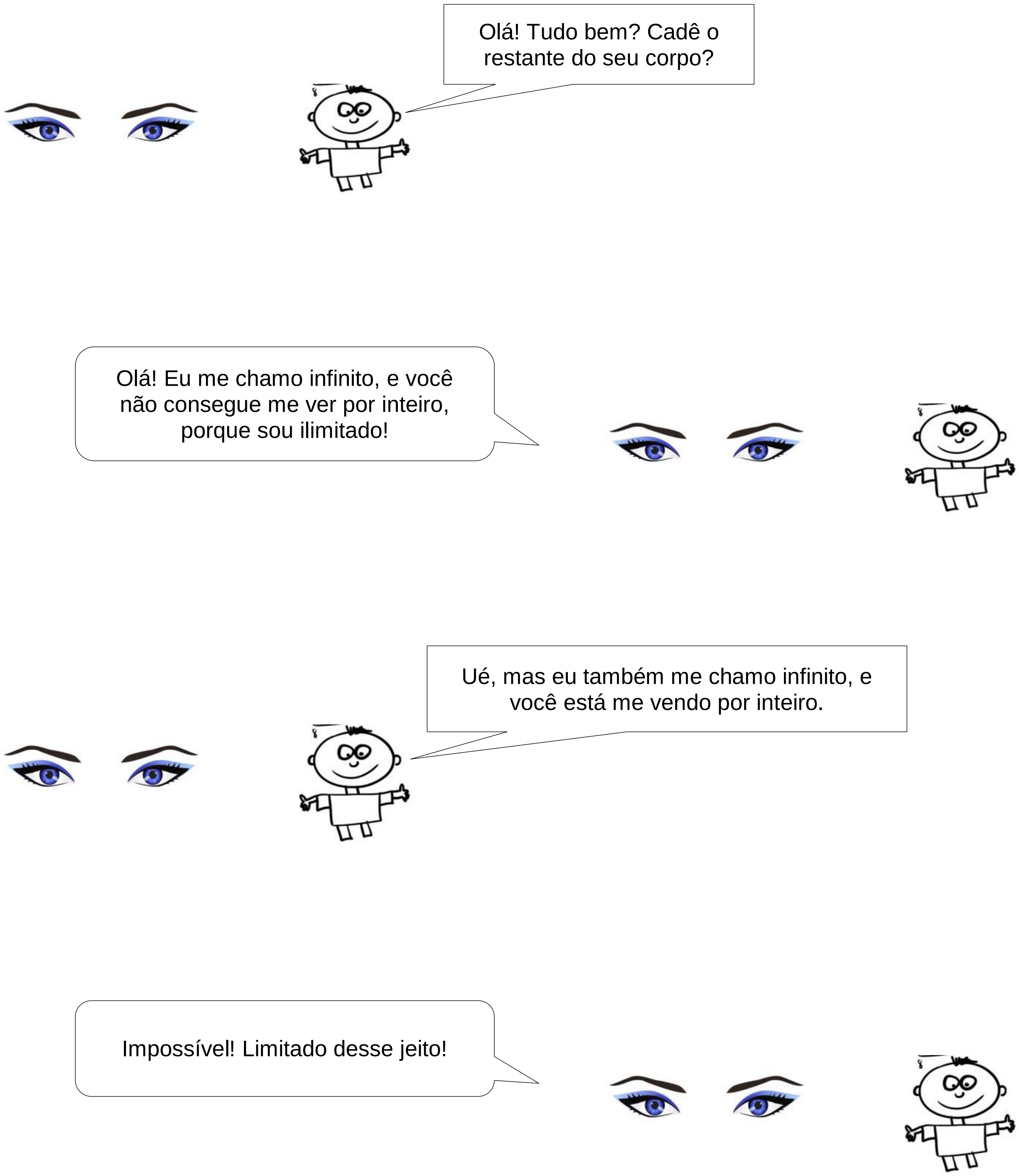
Foram entrevistados três alunos de graduação em licenciatura em Matemática de uma universidade do Estado do Paraná e um aluno recém-graduado também em licenciatura em Matemática, formando, ao todo, quatro sujeitos da pesquisa. Todos os sujeitos da pesquisa assinaram um termo de consentimento livre e esclarecido (Anexo A), em que autorizaram o uso dos dados obtidos em futuras publicações por meio de respostas escritas e gravadas por áudio, resguardando a identidade dos sujeitos por meio de códigos.

A escolha de alunos do último ano ou recém-graduado foi uma opção nossa para que pudéssemos garantir que todos os sujeitos tivessem tido pelo menos um contato inicial com a disciplina de análise, de modo que conceitos como o de cardinalidade e conjuntos enumeráveis, por exemplo, pudessem ter sido abordados em sala de aula.

Apresentaremos, a seguir, as atividades que compuseram a entrevista semiestruturada e também suas respectivas unidades de contexto. Os enunciados das atividades e a elaboração das unidades de contextos e de registros passaram por uma interdecodificação subjetiva dos integrantes do grupo de pesquisa IFHIECEM.

5.2 Atividades suporte da entrevista e unidades temáticas de contexto

ATIVIDADE 1 - Considere o diálogo imaginário a seguir:



Comente este diálogo!

A Unidade Temática de Contexto 1 (UC1), **"Relação entre objetos/conjuntos infinitos e as propriedades de limitado e ilimitado"**, foi elaborada a fim de reunir fragmentos textuais a respeito da relação que os alunos estabelecem entre objetos/conjuntos infinitos e as propriedade de ilimitado e limitado.

UR-1.1 **"Todo objeto/conjunto infinito é ilimitado"**: para agrupar os registros em que os(as) estudantes argumentam que todo objeto/conjunto infinito deve necessariamente ser ilimitado;

UR-1.2 **"Objetos/Conjuntos infinitos podem ser limitados"**: para agrupar os registros em que os(as) estudantes admitem a existência de objetos/conjuntos infinitos limitados;

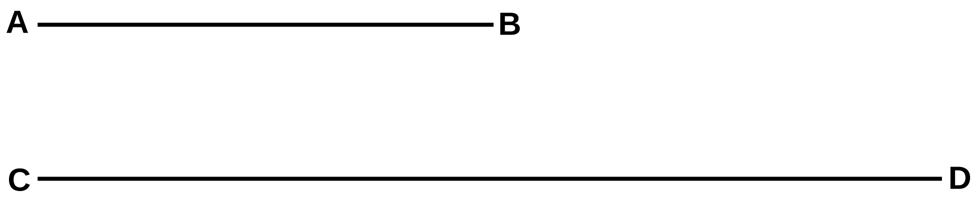
UR-1.3 **"Objetos/Conjuntos infinitos podem ser limitados ou ilimitados com exemplificação"**: para agrupar os registros em que os(as) estudantes admitem e exemplificam a existência de objetos/conjuntos infinitos limitados e objetos/conjuntos infinitos ilimitados;

UR-1.4 **"Admitem que objetos/conjuntos infinitos podem ser limitados ou ilimitados, mas sem exemplificação"**: para agrupar os registros em que os(as) estudantes admitem a existência de objetos/conjuntos infinitos limitados e objetos/conjuntos infinitos ilimitados, mas não exemplificam;

UR-1.5 **"Divergências e/ou polissemias semânticas na relação estabelecida":** para agrupar registros em que os(as) estudantes apresentam divergência semântica ou polissemia semântica quando tentam estabelecer relação entre o conceito de infinito e as propriedades de limitado e ilimitado;

UR-1.6 **"Não contempla a discussão proposta":** para agrupar registros em que os(as) estudantes comentam incoerentemente o diálogo proposto.

ATIVIDADE 2[73] - Considere os dois segmentos de reta AB e CD, representados abaixo, e responda às questões subsequentes:



- Supondo que o segmento AB seja constituído por pontos, para você, a quantidade de pontos em AB é finita (porém muito grande) ou é infinita?

- Se tivesse que comparar a quantidade de pontos do segmento AB com a do segmento CD, concluiria que CD possui mais pontos que AB? Justifique sua resposta.

[73] Adaptado de: Arrigo e D'amore (1999).

A Unidade Temática de Contexto 2 (UC2), **“Comparação entre conjuntos não enumeráveis”**, foi elaborada a fim de reunir fragmentos textuais da compreensão que os alunos apresentam diante de uma situação geométrica que compara conjuntos não enumeráveis.

UR-2.1 **“O segmento AB possui finitos pontos”**: para agrupar os registros em que os(as) estudantes argumentam que o conjunto de pontos que formam o segmento AB possui uma quantidade finita de pontos;

UR-2.2 **“O segmento AB possui infinitos pontos”**: para agrupar os registros em que os(as) estudantes argumentam que o conjunto de pontos que formam o segmento AB possui uma quantidade infinita de pontos;

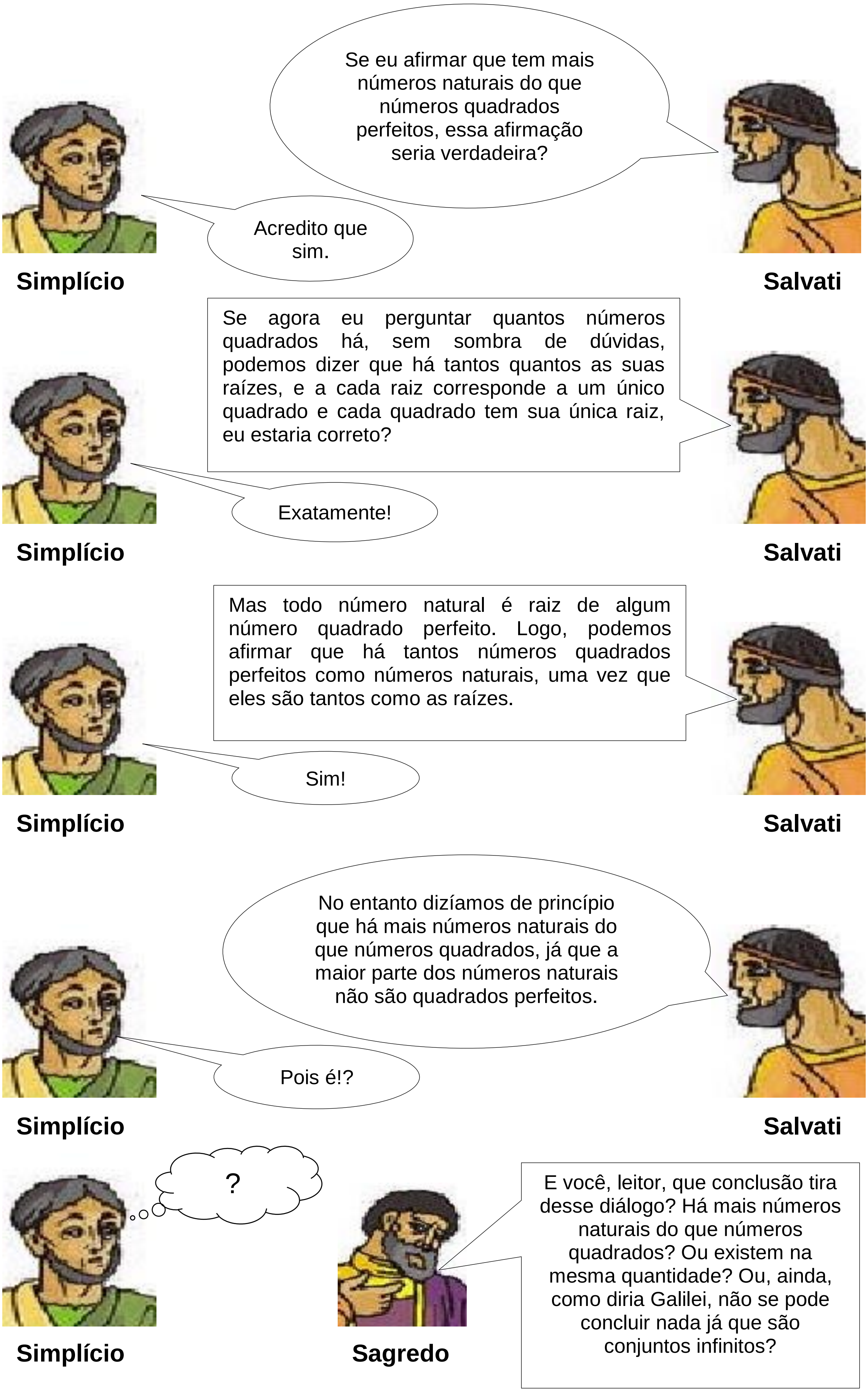
UR-2.3 **“O segmento AB possui uma quantidade de pontos menor que o segmento CD”**: para agrupar os registros em que os(as) estudantes acreditam que o segmento CD possui uma quantidade maior de pontos que o segmento AB;

UR-2.4 **“Os conjuntos de pontos dos segmentos AB e CD possuem a mesma cardinalidade”**: para agrupar os registros em que os(as) estudantes admitem que é possível estabelecer uma relação biunívoca entre o conjunto dos pontos de AB com o conjunto dos pontos de CD;

UR-2.5 “**Divergências e/ou polissemias semânticas na relação estabelecida”:** para agrupar registros em que os(as) estudantes apresentam divergência semântica ou polissemia semântica quando tentam estabelecer relação entre os conjuntos de pontos dos segmentos apresentados;

UR-2.6 **“Não contempla a discussão proposta”:** para agrupar registros em que os(as) estudantes comentam incoerentemente as questões.

ATIVIDADE 3 - Considere o diálogo a seguir:



A Unidade Temática de Contexto 3 (UC3), **“Comparação entre conjuntos infinitos enumeráveis”**, foi elaborada a fim de reunir fragmentos textuais a respeito da compreensão que os alunos apresentam diante de uma situação aparentemente paradoxal na abordagem do conceito de cardinalidade.

UR-3.1 **“O conjunto dos números naturais, possui** *mais números/elementos* **ou é** *maior* **que o conjunto dos números quadrados perfeitos”**: para agrupar os registros em que os(as) estudantes argumentam que o conjunto dos números naturais possuem mais números/elementos do que o conjunto dos números quadrados perfeitos e não admitem que é possível estabelecer uma relação biunívoca entre os conjuntos;

UR-3.2 **“Não se pode comparar os conjuntos apresentados, pois possuem infinitos elementos”**: para agrupar os registros em que os(as) estudantes afirmam que se podem apenas comparar conjuntos que possuem um número finito de elementos, e, quando se trata de conjuntos infinitos, isso não é possível;

UR-3.3 **“Os conjuntos possuem a mesma cardinalidade”**: para agrupar os registros em que os(as) estudantes admitem que existe relação biunívoca entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números quadrados perfeitos;

UR-3.4 **“Divergências e/ou polissemias semânticas na relação estabelecida”:** para agrupar registros em que os(as) estudantes apresentam divergência semântica ou polissemia semântica quando tentam estabelecer relação entre os conjuntos apresentados;

UR-3.5 **“Não contempla a discussão proposta”**: para agrupar registros em que os(as) estudantes comentam incoerentemente o diálogo proposto.

ATIVIDADE 4[74] – Dado o desafio "vence quem é capaz de encontrar o maior número que começa com zero", considere o seguinte diálogo:

Se você fosse o árbitro neste desafio, a quem você daria a vitória? E por quê?

---

[74] Adaptado de: D'Amore B.; Arrigo G.; Bonilla Estévez M.; Fandiño Pinilla M.I.; Piatti A.; Rodríguez Bejarano J.; Rojas Garzón P.J.; Romero Cruz J.H.; Sbaragli S. (2004).

A Unidade Temática de Contexto 4 (UC4), **“Limite de uma soma”**, foi elaborada a fim de reunir fragmentos textuais da compreensão que os alunos apresentam diante de uma situação aritmética que traz uma representação decimal infinita que converge para uma representação decimal finita.

UR-4.1 **“0,9999... nunca chegará a ser 1”**: para agrupar os registros em que os(as) estudantes argumentam que, por mais que se acrescente o dígito 9 no número representado pela sequência decimal, este número nunca chegará a ser o número 1;

UR-4.2 **“O número 0,9999... pode ser também representado pelo número 1”**: para agrupar os registros em que os(as) estudantes argumentam que o número 0,9999... será 1;

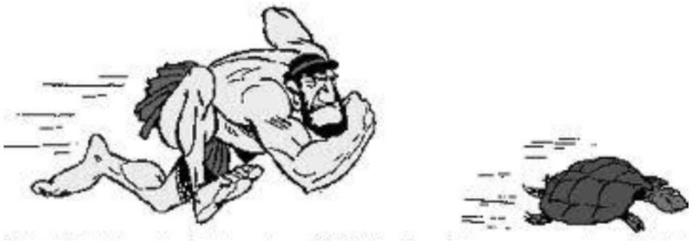
UR-4.3 “**Divergências e/ou polissemias semânticas na relação estabelecida”:** para agrupar registros em que os(as) estudantes apresentam divergência semântica ou polissemia semântica quando tentam a igualdade ou diferença entre os números 0,9999... e 1;

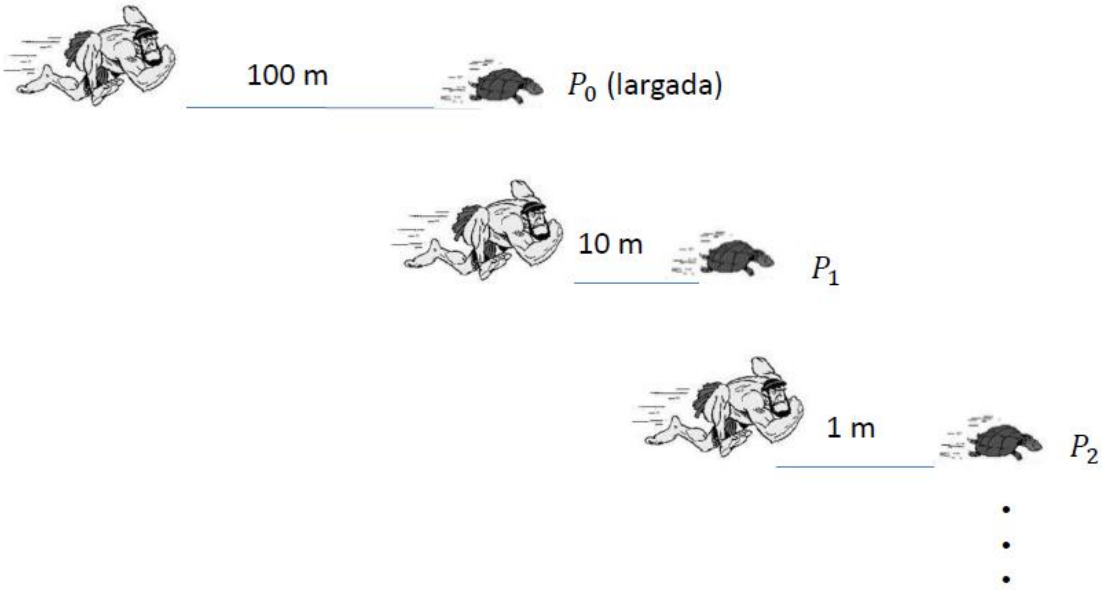
UR-4.4 **“Não contempla a discussão proposta”:** para agrupar registros em que os(as) estudantes comentam incoerentemente as questões.

ATIVIDADE 5

Zenão de Eléia, um filósofo da Grécia Antiga, além de perfeito dialético, ficou muito conhecido por seus famosos paradoxos. O paradoxo mais conhecido de Zenão é: Aquiles e a Tartaruga.

Aquiles e uma tartaruga movem-se na mesma direção ao longo de uma linha reta, sendo que Aquiles correrá sempre 10 vezes mais rápido que a tartaruga. Aquiles deu um adianto de 100m a tartaruga, e nunca conseguiu alcançá-la, já que quando ele atingiu a posição inicial da tartaruga, ela já tinha avançado 10 m, e se encontrara noutro local adiante dele, e quando ele chegar a essa nova posição, a tartaruga terá realizado novo avanço; e assim sucessivamente.





Para mim, Aquiles nunca alcançará a Tartaruga...

Chegará, sim! Cada vez mais, Aquiles se aproxima da tartaruga...

Por mais perto que Aquiles se aproxime da tartaruga, sempre existirá um espaço entre os dois...

Pois é, acho que tem razão.

E, para você, qual a sua opinião?

A Unidade Temática de Contexto 5 (UC5). **“Limite de uma soma envolvendo um paradoxo”**, foi elaborada a fim de reunir fragmentos textuais da compreensão que os alunos apresentam diante de uma situação paradoxal que pode ser resolvida, assim como a atividade 4, por uma soma infinita que converge para um número real.

UR-5.1 **“Aquiles nunca alcançará a Tartaruga”**: para agrupar os registros em que os(as) estudantes argumentam que, por mais próximo que Aquiles esteja da Tartaruga, este nunca a alcançará;

UR-5.2 **“Aquiles alcançará a Tartaruga, mas sem dizer onde”**: para agrupar os registros em que os(as) estudantes argumentam que Aquiles alcançará, entretanto não realiza operações aritméticas para encontrar o ponto de alcance;

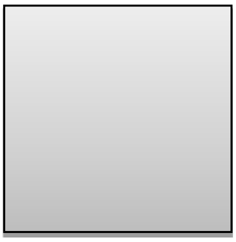
UR-5.3 **“Aquiles alcançará a Tartaruga, e mostra onde”**: para agrupar os registros em que os(as) estudantes argumentam que Aquiles alcançará, realizando operações aritméticas para encontrar o ponto de alcance;

UR-5.4 **“Divergências e/ou polissemias semânticas na relação estabelecida”:** para agrupar registros em que os(as) estudantes apresentam divergência semântica ou polissemia semântica quando tentam decidir se Aquiles alcançará ou não a Tartaruga;

UR-5.5 **“Não contempla a discussão proposta”:** para agrupar registros em que os(as) estudantes comentam incoerentemente as questões.

ATIVIDADE 6 - Considere a situação abaixo:

Em um quadrado de lado 10 cm há infinitos pontos.



10 cm

Também em um lado do quadrado há infinitos pontos.

10 cm

Seria possível afirmar que há tantos pontos num quadrado (uma figura bidimensional) quanto num segmento que representa seu lado (uma figura unidimensional)? **Justifique sua resposta**.

A Unidade Temática de Contexto 6 (UC6), **“Identificação biunívoca de variedades com dimensões distintas”**, foi elaborada a fim de reunir fragmentos textuais da compreensão que os alunos apresentam diante de uma situação que propõe estabelecer uma relação biunívoca entre variedades geométricas de dimensões distintas.

UR-6.1 **“O quadrado possui mais pontos que um de seus lados”**: para agrupar os registros em que os(as) estudantes argumentam que o quadrado possuirá mais pontos pois é uma figura de dimensão maior que o segmento;

UR-6.2 **“O quadrado possui tantos pontos quanto seu lado”**: para agrupar os registros em que os(as) estudantes argumentam que existe relação biunívoca entre os pontos do quadrado e um de seus lados;

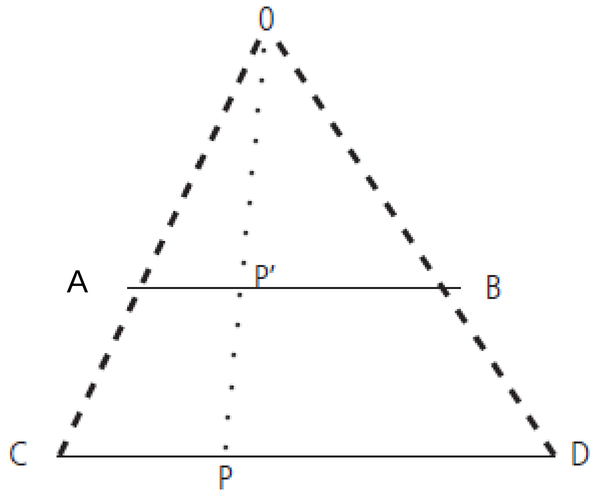
UR-6.3 **“Não é possível estabelecer relação com dimensões distintas”:** para agrupar registros em que os(as) estudantes argumentam que não é possível relacionar biunivocamente objetos de dimensões distintas.

UR-6.4 **“Divergências e/ou polissemias semânticas na relação estabelecida”:** para agrupar registros em que os(as) estudantes apresentam divergência semântica ou polissemia semântica quando tentam estabelecer uma relação entre os pontos do quadrado e um de seus lados;

UR-6.5 **“Não contempla a discussão proposta”:** para agrupar registros em que os(as) estudantes comentam incoerentemente as questões.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

I) - Olhe para os segmentos paralelos AB e CD. Desenharemos linhas pontilhadas CA e DB que terão interseção em O. Seja P qualquer ponto em CD, ao traçarmos o segmento PO, determinamos um ponto em P’ em AB.



a) Para cada ponto em CD, existe um ponto em AB determinado desta maneira?
b) Para cada pondo em AB, existe um único em CD determinado desta maneira?
c) Qual a relação desta atividade com a atividade 2?

II) – Considere a função $f(x) = x^2$. Represente o gráfico desta função no domínio dos reais. A função é bijetora? Qual a relação desta função com a atividade 3?

III) - Considere a sequência a seguir:

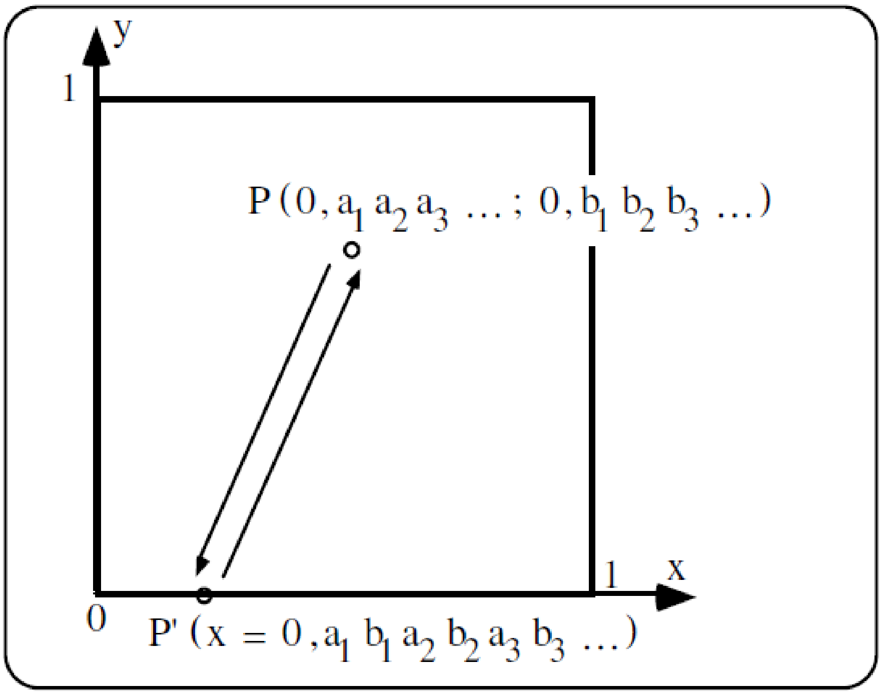
$$\left(\frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1000}, \dots\right)$$

a) É possível a caracterizar como uma PG?
b) Em caso afirmativo, quais as condições para que uma PG infinita possua soma?
c) É possível relacionar esta atividade com a atividade 4 ou com a atividade 5?

IV) Demonstração[75] do teorema de Cantor:

"Dada uma variedade contínua de dimensão p, com p>1. É possível estabelecer uma relação unívoca com uma variedade contínua de dimensão 1 de tal maneira que a cada ponto de uma variedade corresponde a um ponto e somente um da outra variedade"

Observação, esta demonstração será realizada juntamente com os alunos para o caso particular de dimensão 2, pois é justamente este que a atividade 6 apresenta.



[demonstração, caso particular p = 2]

Coloque um quadrado num sistema de eixos cartesiano ortogonais de origem O, de tal maneira que os dois lados consecutivos se apoiem sobre os eixos (obviamente um dos vértices coincide então com a origem). Considerando que o lado do quadrado mede uma unidade de medida, tem-se imediatamente que cada ponto P interno ao quadrado com coordenadas reais X_p e Y_p satisfaz:

$$0 < X_p < 1 \text{ e } 0 < Y_p < 1.$$

[75] Baseada na demonstração apresentada no artigo de Arrigo, G. e D'Amore, B. (1999): "*Lo veo, pero no lo creo*" Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual.

Por outro lado, podemos explicitar as coordenadas de um ponto qualquer desse quadrado da seguinte forma:

$$X_p = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

e

$$Y_p = 0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots$$

A cada par ordenado de números reais (X_p, Y_p), fazemos corresponder ao número real $X_{p'}$, definido da seguinte maneira:

$$X_{p'} = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n \dots$$

Isto é, $X_{p'}$ é obtido, colocando-se número 0 vírgula, e, após, alternando-se os decimais de cada coordenada. Pode-se facilmente constatar que $0 < X_{p'} < 1$ e, ainda, $X_{p'}$ se define de maneira unívoca a partir de X_p e Y_p; e, também, $X_{p'}$ pode ser visto como a abcissa das coordenadas de um ponto P' no eixo X, isto é, P' dado pelas coordenadas $(X_{p'}, 0)$.

Demonstraremos agora a volta, isto é, se pode partir de um ponto P’ no eixo X, considerando-se sua coordenada abscissa e, com um método trivial inverso de distribuição dos números decimais, chega-se univocamente a um ponto definido como o P dado. Portanto, temos demonstrado o teorema de Cantor, pelo menos para o caso em que a dimensão da variedade seja 2, isto é, os pontos internos de um quadrado unitário correspondem, de maneira biunívoca, aos pontos internos do segmento unitário.

5.2.1 IDENTIFICAÇÃO DE TEOREMAS-EM-AÇÃO FALSOS NAS UNIDADES DE REGISTRO

Nesta subseção, apresentaremos quadros resumo dos objetivos de cada atividade e suas respectivas unidades de contexto e registro. Como já mencionado no capítulo anterior, as atividades e as unidades de registro e contexto tiveram como suporte teórico pesquisas realizadas a respeito do desenvolvimento histórico e epistemológico do conceito de infinito, mais especificamente, os OE desse conceito da história da matemática, bem como pesquisas que apresentaram esses obstáculos na aprendizagem dos alunos. Além disso, tipificamos cinco TAF nas unidades de registros. Neles estão implícitos ou explícitos obstáculos relacionados ao conceito de infinito que identificamos na literatura. Esses TAF ajudaram a nortear a análise dos conhecimentos mobilizados pelos sujeitos nas respostas obtidas nesta pesquisa.

Quadro 03 – Objetivo das atividades.

ATIVIDADES	OBJETIVOS
Atividade 1	Com esse diálogo pretendemos investigar que relações os alunos estabelecem a respeito do conceito de infinito e as propriedades de limitado e ilimitado.
Atividade 2	Com esta atividade pretendemos investigar se os alunos identificam se os conjuntos de pontos que formam os segmentos AB e CD possuem a mesma cardinalidade.
Atividade 3	Com esta atividade pretendemos investigar se os alunos identificam se o conjunto dos números naturais e o conjunto dos seus respectivos quadrados possuem a mesma cardinalidade.
Atividade 4	Com esta atividade pretendemos investigar se os alunos interpretam a igualdade como uma soma infinita de uma PG, ou seja, 0,999...=0,9+0,09+0,009+...=1.
Atividade 5	Com esta atividade também pretendemos investigar se os alunos interpretam a atividade como uma soma infinita de uma PG, ou como uma série geométrica.
Atividade 6	Com esta atividade pretendemos investigar se os alunos aceitam tal identificação, assim como Cantor escreve na carta, depois de ter feito a demonstração, “Eu vejo, mas não creio”.

(Fonte: do autor)

As URs foram concebidas para agrupar respostas que estão de acordo com o consenso científico atual, respostas que não estão de acordo com o consenso, ou ainda, respostas que não contemplaram as perguntas contidas nas atividades. Este processo de síntese nos ajudou na tipificação de cinco TAF baseados em OE do conceito de infinito. É possível, porventura, encontrar nas URs afirmações que sejam candidatas a TAF, entretanto, tipificamos aquelas que estão relacionadas com OE do conceito de infinito apresentados nesta tese.

Quadro 04 - Atividade 1 e suas respectivas URs.

ATIVIDADE 1	
	A Unidade Temática de Contexto 1 (UC1): Relação entre objetos/conjuntos infinitos e as propriedades de limitado e ilimitado
UR-1.1	**“Todo objeto/conjunto infinito é ilimitado”**
UR-1.2	“Objetos/conjuntos infinitos podem ser limitados”
UR-1.3	“Objetos/conjuntos infinitos podem ser limitados ou ilimitados com exemplificação”
UR-1.4	"Admitem que objetos/conjuntos infinitos podem ser limitados ou ilimitados, mas sem exemplificação”
UR-1.5	“Divergências e/ou polissemias semânticas na relação estabelecida”
UR-1.6	“Não contempla a discussão proposta”

(Fonte: do autor)

O primeiro TAF está presente na UC1:

TAF_1: *Todo conjunto infinito é ilimitado*.

Este TAF_1 se relaciona com a ideia de infinito sem limites, ilimitado, e se fundamenta com o conceito de infinito em potência. Para Jammer (2010), a característica do ilimitado é recorrente em discursos de filósofos da Grécia Antiga, já que admitiam apenas o infinito em potência. Fischbein *et al*.(1979) também apresentam a concepção de infinito dos gregos da antiguidade, para eles, o infinito pode expressar somente uma potencialidade pura, por exemplo, a possibilidade ilimitada de aumentar ou dividir um intervalo. Os conhecimentos mobilizados que podem ser caracterizados pelo TAF_1 aparecem nas respostas dos sujeitos como um obstáculo nas investigações de Moreno e Waldegg (1991).

Quadro 05 - Atividade 2 e suas respectivas URs.

ATIVIDADE 2	
	A Unidade Temática de Contexto 2 (UC2): **“Comparação entre conjuntos não enumeráveis”**
UR-2.1	“O segmento AB possui finitos pontos”
UR-2.2	“O segmento AB possui infinitos pontos”
UR-2.3	**“O segmento AB possui uma quantidade de pontos menor que o segmento CD”**:
UR-2.4	**“**Os conjuntos de pontos dos segmentos AB e CD possuem a mesma cardinalidade”
UR-2.5	“Divergências e/ou polissemias semânticas na relação estabelecida”
UR-2.6	“Não contempla a discussão proposta”

(Fonte: do autor)

Quadro 06 - Atividade 3 e suas respectivas URs.

ATIVIDADE 3	
	A Unidade Temática de Contexto 3 (UC3): **“Comparação entre conjuntos infinitos enumeráveis**
UR-3.1	**O conjunto dos números naturais possui *mais números* ou é *maior* que o conjunto dos números quadrados perfeitos**
UR-3.2	"Não se podem comparar os conjuntos apresentados, pois possuem infinitos elementos"
UR-3.3	“Os conjuntos possuem a mesma cardinalidade”
UR-3.4	“Divergências e/ou polissemias semânticas na relação estabelecida”
UR-3.5	“Não contempla a discussão proposta”

(Fonte: do autor)

O segundo TAF está presente nas UC2 e UC3 vejamos:

TAF_2: *A parte é sempre menor que o todo.*

O TAF_2 é usado, por exemplo, para justificar respostas de que o segmento AB possui uma quantidade de pontos menor que o segmento CD na atividade 2, ou que o conjunto dos números naturais possui mais números ou é maior que o conjunto dos números quadrados perfeitos na atividade 3. Para Waldegg (1996) e Sampaio (2009), um dos obstáculos mais difíceis de superação, quando se trata de conjuntos infinitos, são justamente os problemas que envolvem a relação parte-todo. Este tipo de obstáculo também foi abordado por Duval (1983), Waldegg e Moreno (1991) e Fischbein *et al* (1979).

Quadro 07 - Atividade 4 e suas respectivas URs.

ATIVIDADE 4	
	A Unidade Temática de Contexto 4 (UC4): "Limite de uma soma"
UR-4.1	**"0,9999... nunca chegará a ser 1"**
UR-4.2	"O número 0,9999... pode ser também representado pelo número 1"
UR-4.3	"Divergências e/ou polissemias semânticas na relação estabelecida"
UR-4.4	"Não contempla a discussão proposta"

(Fonte: do autor)

Quadro 08 - Atividade 5 e suas respectivas URs.

ATIVIDADE 5	
	A Unidade Temática de Contexto 5 (UC5) "Limite de uma soma envolvendo um paradoxo"
UR-5.1	**"Aquiles nunca alcançará a Tartaruga"**
UR-5.2	"Aquiles alcançará a Tartaruga, mas sem dizer onde"
UR-5.3	"Aquiles alcançará a Tartaruga e mostra onde"
UR-5.4	"Divergências e/ou polissemias semânticas na relação estabelecida"
UR-5.5	"Não contempla a discussão proposta"

(Fonte: do autor)

O terceiro TAF foi se relaciona com a UC4 e UC5:

TAF_3: *Dada uma série infinita convergente, sua soma apenas se aproxima de um número real "L", mas nunca chegará a ser L.*

O TAF_3 serve para justificar, por exemplo, que a soma da sequência $(\frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1000}, \ldots)$ representada pela série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$, apenas se aproxima do número real 1, mas nunca chegará a ser 1, ou que Aquiles nunca alcançará a Tartaruga, chegará tão próximo quanto de queira, mas nunca a atingirá. Sierpinska (1985) e

Arrigo e D’amore (1999) são alguns dos autores que deram sustentação teórica para este tipo de caracterização do obstáculo implícito em TAF_3.

Quadro 09 - Atividade 6 e suas respectivas URs.

ATIVIDADE 6	
	A Unidade Temática de Contexto 6 (UC6): “Identificação biunívoca de variedades com dimensões distintas”
UR-6.1	**“O quadrado possui mais pontos que um de seus lados”**
UR-6.2	“O quadrado possui tantos pontos quanto seu lado”
UR-6.3	“Divergências e/ou polissemias semânticas na relação estabelecida”
UR-6.4	“Não contempla a discussão proposta”

(Fonte: do autor)

O quarto TAF que nos ajudará em nossa análise, se relaciona com a UC6

TAF_4: *O quadrado possui mais pontos que um de seus lados, pois tem dimensão superior.*

Este TAF_4 tem relação com a ideia intuitiva de que variedades contínuas de dimensões distintas possuem, necessariamente, cardinalidade distintas. Como, por exemplo, a de que a área de um quadrado qualquer possui mais pontos que um de seus lados. Este TAF_4 baseia-se no espanto que Cantor nos revelou, “Eu vejo, mas não creio”, quando escreveu a carta a Dedekind com a demonstração desse fato. Arrigo e D’amore (1999) e D’amore *et al* (2004) são algumas referências que trataram desse obstáculo em investigação com alunos.

O quinto e último TAF permeia as várias atividades, ou melhor, pode decorrer das discussões das atividades presentes na abordagem utilizada na entrevista semiestruturada. Arrigo e D’amore (1999) e D’amore (2004) denotaram este fenômeno por *achatamento*:

TAF_5: *Todos os conjuntos infinitos possuem a mesma cardinalidade.*

Este tipo de conhecimento pode ser mobilizado pelos sujeitos quando, diante de uma demonstração, por exemplo, que o conjunto dos números naturais tem a mesma cardinalidade que o conjunto dos números inteiros, ou do conjunto dos números quadrados perfeitos presentes na atividade 3. Este fenômeno pode ser caracterizado como um obstáculo epistemológico como já mencionado na seção 3.2.

Para uma visualização mais adequada da relação entre os TAF e os OE do infinito abordados nesta tese, agrupamos os episódios históricos e os personagens da história que se relacionam com OE do infinito que deram suporte para a construção das atividades e suas respectivas unidades de registro. Também apresentamos neste agrupamento os TAF tipificados nas unidades.

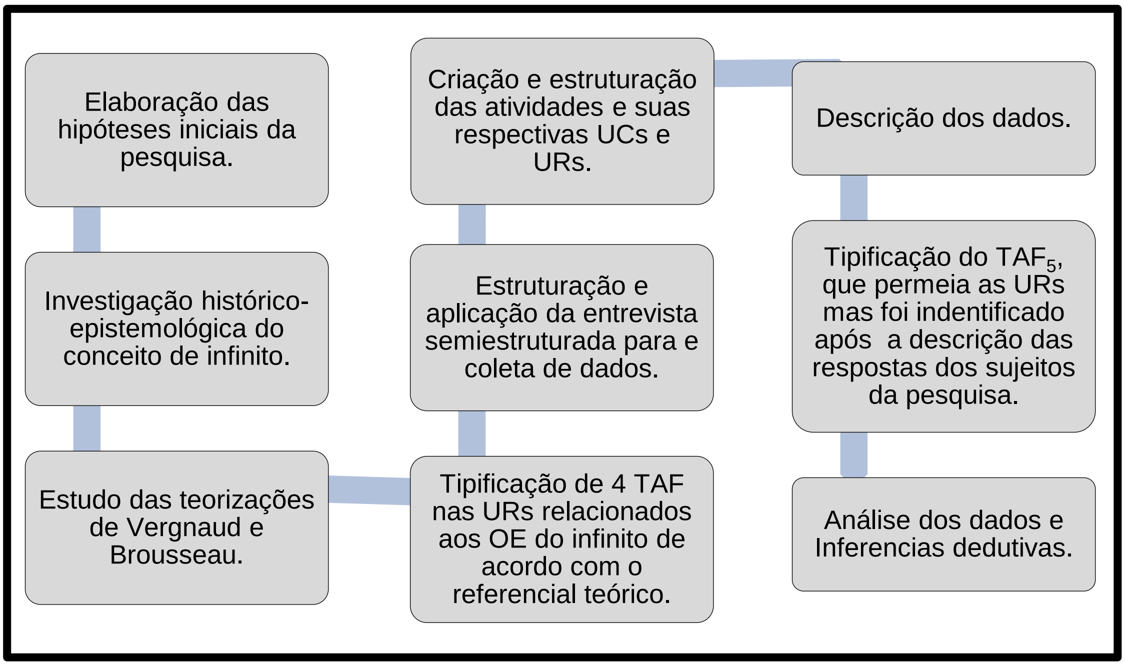
Quadro 10 – Relação entre TAF e OE do infinito.

Personagem / Episódio Histórico relacionado	**Obstáculo Epistemológico**	**Teoremas-em-ação falsos**
Aristóteles / O infinito apenas como uma categoria filosófica	Infinito ≡ ilimitado	TAF_1
Euclides / Noção comum enunciada Elementos	Parte-todo: o todo é sempre maior que uma de suas partes.	TAF_2
Zenão / Paradoxos	O limite é algo que se aproxima, mas não chega!	TAF_3
Cantor / "Eu vejo, mas eu não creio"	Estabelecimento de bijeção entre objetos de dimensões distintas	TAF_4
Cantor / Cria-se classes de infinito, os transfinitos.	Constrição ou achatamento da cardinalidade	TAF_5

(Fonte: do autor)

Finalizamos esta seção dos procedimentos metodológicos, apresentando uma síntese esquemática das etapas que se sucederam para a constituição desta tese. Salientamos que apesar da síntese possuir uma estrutura linear, a revisitação das etapas foi necessária, se constituindo em um processo de idas e vindas inerente ao processo criativo e de pesquisa.

Figura 03 – Síntese esquemática da constituição da tese.



Fonte: (do autor)

Passaremos agora, norteados pelos TAF tipificados nessa seção, a descrever e analisar os dados obtidos em nossa pesquisa.

VI. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo faremos uma descrição dos dados coletados bem como uma análise sob a ótica dos referenciais adotados. Como já mencionado neste trabalho, a coleta se deu por meio de uma entrevista semiestruturada.

Faremos, a seguir, a transcrição das respostas dos alunos(as) de cada uma das atividades, para isso denotaremos como S_1, S_2, S_3 e S_4, os sujeitos entrevistados. As respostas escritas coletadas estarão no texto com fonte Arial, tamanho 11, e na forma itálica, e as respostas obtidas por meio de gravação estarão em formato de texto em fonte Arial, tamanho 11, forma itálica, apresentadas em quadros, com as respectivas indicações dos sujeitos antes de cada fala, assim como a indicação com a letra P quando interagirmos nos diálogos com os sujeitos da pesquisa.

Optamos por apresentar um caminho percorrido de cada sujeito da pesquisa por meio de respostas escritas e fragmentos de falas captadas por áudio na entrevista semiestruturada. Desse modo, passaremos a descrever e analisar os dados de cada um dos sujeitos individualmente. Posteriormente a descrição e análise de cada caso, faremos nossas inferências dedutivas a respeito dos dados apresentados.

6.1 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO SUJEITO S_1

Na primeira atividade simulamos um diálogo entre dois personagens que se autointitulam infinito. Com esse diálogo foi pretendido investigar, por meio de conhecimentos mobilizados pelos alunos nas respostas das atividades, que relações eles estabelecem a respeito do conceito de infinito e as propriedades de limitado e ilimitado.

> *O diálogo é sobre algo relacionado a "tipos de infinito". Um infinito limitado é possível se considerarmos os números reais entre 0 e 1, ou seja, um intervalo limitado, porém, com infinitos números.*
> *(Resposta de S_1 para a atividade 1).*

Neste fragmento é possível identificar, na resposta do aluno, elementos que compõem a unidade de registro UR-1.3, que agrupa os registros em que os(as) estudantes admitem e exemplificam a existência de objetos/conjuntos infinitos limitados e objetos/conjuntos infinitos ilimitados.

Esta resposta contempla o consenso científico atual a respeito da possibilidade de conceber um conjunto infinito, porém limitado.

Num momento posterior da entrevista, retornamos para esta atividade e indagamos a respeito do termo “tipos de infinito”, utilizado por S_1, com o intuito de investigar se este apresenta compreensão a respeito da existência de infinitos de naturezas distintas. Vejamos o diálogo que diz respeito a esse momento.

Quadro 11 – diálogos com S_1 a respeito da atividade 1.

P: Você poderia dizer como se dá essa diferenciação, isto é, o que diferencia esses infinitos? *S_1: É porque, por exemplo… é no sentido de que… aqui neste caso seria assim, um infinito é ilimitado e o outro é limitado, se você pensar a reta ao todo é um infinito ilimitado, agora quando eu fecho ele, igual como eu falei, um conjunto de 1 a 2 é um infinito limitado.*

(Fonte: do autor)

Podemos dizer que, apesar de S_1 não explicitar ou nominar as naturezas distintas dos conjuntos infinitos, os exemplos dados por ele, para explicar essa diferenciação, são exemplos de infinito potencial (a reta ilimitada) e de infinito atual (o intervalo limitado [1, 2]).

A atividade 2 (página 87) mostrou uma representação geométrica de um problema de comparação entre a quantidade de pontos de dois segmentos de reta que possuem medidas distintas de comprimentos. Além do modo de representação da atividade, neste caso geométrico, ela trouxe outros elementos para a discussão a respeito do infinito, que são os conjuntos não enumeráveis. Com esta atividade pretendíamos investigar se os alunos identificavam se os conjuntos de pontos que formam os segmentos AB e CD possuíam a mesma cardinalidade. Vejamos como S_1, respondeu o primeiro item:

> *Acho que a quantidade de pontos é infinita, pois, considerando como um segmento que é limitado de A até B, existem infinitos pontos neste intervalo que constituem este segmento. Sempre entre dois pontos existirá mais um.*
> *(Resposta de S_1 para a atividade 2).*

A resposta do primeiro item possui elementos característicos da UR-2.2, ou seja, que agrupar os registros em que os(as) estudantes argumentam que o conjunto de pontos que formam o segmento AB possui uma quantidade infinita de pontos. Neste caso, a resposta vai ao encontro do consenso científico atual. Antes de escrever a resposta do segundo item da atividade 2, o aluno S_1 pergunta:

Quadro 12 – diálogo com S_1 a respeito da atividade 2.

*S_1**:** Eu posso responder alguma coisa utilizando Análise mesmo? Análise Real?* *P: Pode, claro!* *S_1: Porque, por exemplo, aqui na segunda questão fala assim, que o segundo segmento tem mais pontos que o primeiro... é... eu poderia comparar, por exemplo, o intervalo de 1 a 2 e de 1 a 3, que eu sei que tem mais pontos de 1 a 3.* *S_1: Só que os dois são infinitos, os dois possuem infinitos pontos.* *S_1: No caso desse intervalo menor a gente fala que ele é mais denso, vamos dizer assim... (inaudível)... eu acho, acho que seria isso!* *P: Certo... Então a diferença que você estabelece entre os dois intervalos é a densidade?* *S_1: É... É a densidade, acredito que sim!* *P: E o que é a densidade de um segmento? Você lembra ou não?* *S_1: Eu acredito que a densidade está relacionada a ser mais compacto, acredito... Ser mais fechado...* *P: O que você compreende por "mais compacto" e "mais fechado"?* *S_1: É porque os dois têm infinitos... só que vamos dizer que esse daqui está mais espremido... não sei...(risos). Eu costumo fazer esse tipo de associação, mas eu não sei explicar... Mas vamos dizer assim, que entre os dois aqui têm infinitos pontos, né..., a gente não fala que um infinito é maior que o outro, né... mas é..., igual eu falei, pensando em intervalos de 1 a 2 e de 1 a 3, eu sei que de 1 a 3 tem mais pontos, do que de 1 a 2! Né... os dois estão limitados, então acho que é possível fazer essa comparação.* *P: Você poderia escrever, mesmo que minimamente, qual a sua justificativa?* *S_1: Sim.*

(Fonte: do autor)

Vejamos, então, como o sujeito S_1 estruturou sua resposta em relação ao segundo item da atividade 2.

> *Como CD é um segmento maior do que AB pode-se concluir que há mais pontos no segundo segmento, porém acho que é correto também dizer que os segmentos AB e CD possuem infinitos pontos. Neste caso, não comparamos o "tamanho" dos infinitos, mas dizemos que o segmento AB é mais denso do que CD. Por exemplo, supondo que AB é o segmento de 1 a 2 e CD é o segmento de 1 a 3. Podemos dizer que, pensando em IR [Reais], CD possui mais pontos que AB, porém, os dois segmentos vão possuir infinitos pontos, com a diferença de que AB é mais denso. (Resposta de S_1 na atividade 2)*

Nessa resposta, S_1 apresentou elementos que se enquadram na UR-2.3, que agrupa os registros em que os(as) estudantes acreditam que o segmento CD possui uma quantidade maior de pontos que o segmento AB.

Vejamos que, posto em ação diante desta atividade, o aluno S_1 usa uma argumentação polissêmica a respeito do conceito de densidade – indagamos a respeito do que ele acreditava ser um conjunto denso – e S_1 argumenta que o segmento CD possui "mais" pontos de o segmento AB, e ainda, AB é mais denso que CD.

Esta atividade explicita um obstáculo, como já citado na construção teórico-metodológica, diante da comparação entre dois conjuntos infinitos, que denominamos de "problema parte-todo", em consonância com as pesquisas de Duval (1983), Moreno e Waldegg (1991) e Fischbein, E. Tirosh, D. e Hess, P. (1979) que também identificaram esse obstáculo nos alunos, e estão relacionados com o OE de superar o princípio apresentado nos Elementos de Euclides, em que o todo é sempre maior que alguma de suas partes.

Perante a resposta do aluno, foi apresentada a ele uma atividade complementar, na tentativa de desmobilizar, o que inferimos ser um TAF, mais especificamente o TAF_2: *A parte é sempre menor que o todo.* Diante dos conhecimentos falsos que porventura aparecem nas respostas dos alunos, temos a responsabilidade, segundo Vergnaud (2009), de escolher situações que possibilitem o aparecimento de teoremas-em-ação e, posteriormente, caso seja um conhecimento falso, apresentar situações que os desmobilize. Sendo assim, na tentativa de desmobilizar este conhecimento falso de S_1, propomos uma atividade complementar.

A atividade complementar I apresenta uma ilustração com os mesmos segmentos apresentados na atividade 2, porém traçando-se segmentos pontilhados pelos pontos extremos de cada segmento dado até se encontrarem num ponto P. A partir disso, a ilustração apresenta um segmento saindo de P em direção ao segmento CD interceptando o segmento AB (página 97).

> a) *Sim, basta seguir o mesmo processo descrito pelo exercício.*
> *b) Sim, utilizando o mesmo processo dado pela construção do exercício.*
> *c) Apesar dos segmentos AB e CD terem tamanhos diferentes, é possível fazer uma correspondência entre cada ponto de AB com um único ponto de CD e vice-versa. Esta relação pode ser construída conforme o exercício apresentou, por exemplo. (Resposta de S_1 para atividade complementar I).*

Vejamos que, após as atividades complementares, S_1 admite que é possível estabelecer uma relação biunívoca entre o conjunto dos pontos de AB com o conjunto dos pontos de CD. Diante dessa resposta apresentada pelo aluno na atividade complementar, nós o confrontamos com a resposta anterior na atividade 2, já que S_1 apresentou argumentos divergentes, isto é, num primeiro momento, S_1 afirmou que o segmento AB era menor que CD e por isso possuía "menos pontos" e, posteriormente, argumentou que era possível estabelecer uma relação um-a-um entre os pontos de AB e CD.

Quadro 13 – diálogo com S_1 a respeito da atividade 2 e complementar 2.

S_1: É porque quando… quando levado para o infinito né, é aí que a gente fala que a cardinalidade deles é igual, neste caso né… porque a gente vai dizer que os dois têm infinitos pontos e ai não vou fazer esse tipo de comparação (mais ou menos pontos).

(Fonte: do autor)

Desse modo, é possível identificar que o aluno abandonou o conceito de "mais ou menos" pontos, quando tratou de conjuntos infinitos, e adotou a resposta da atividade complementar como a mais adequada.

Na atividade 3 apresentamos um diálogo, por meio de personagens da obra de Galileo Galilei, acerca dos números naturais e seus respectivos quadrados, também conhecido como o paradoxo de Galilei (ver página 89). Com esta atividade pretendemos investigar se os alunos identificam se os conjuntos possuem a mesma cardinalidade.

> *Podemos dizer que a cardinalidade do conjunto dos números naturais e dos quadrados perfeitos é a mesma. Também é possível criar uma relação de um para um (biunívoca) entre cada número natural com um quadrado perfeito através da função $f(x) = x^2$, desde que a relação seja de IN em IN.*
> *(Resposta de S_1 para atividade 3).*

Nesta atividade, a resposta de S_1, acreditamos que foi influenciada pela discussão da questão anterior, quando surgiu o conceito de cardinalidade, e apresenta elementos da UR-3.3 que agrupa os registros em que os(as) estudantes admitem que existe relação biunívoca entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números quadrados perfeitos. Podemos afirmar que, pelo menos temporariamente, o conflito parte-todo foi superado com as atividades complementares anteriores, uma vez que esta atividade também apresenta variação desse obstáculo.

A atividade 4 apresenta um diálogo que traz uma situação aritmética envolvendo o conceito de infinito, a igualdade $0{,}999\ldots = 1$ (ver página 91). Com esta atividade pretendemos investigar se os alunos interpretam a igualdade como uma soma infinita de uma PG, ou seja, $0,\overline{9} = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \cdots = 1$. Além disso, a situação pode explicitar a maneira de o aluno tratar o infinito, isto é, se se baseará no infinito em potência, ou se assumirá o infinito em ato.

Daria a vitória ao garoto, pois apesar da afirmação ser verdadeira (1 = 0,9999...) o garoto escolheu o maior número.
(Resposta de S_1 para atividade 4).

Logo após o nosso contato, na resposta dada por S_1 na atividade 4, a palavra "apesar", causou curiosidade e, consequentemente, indagamos a respeito do uso do termo.

Quadro 14 – diálogo com S_1 a respeito da atividade 4.

P: Explique-me o porquê do uso da palavra "apesar". *S_1: Ah sim, é por que… no sentido assim… de que o cachorro achou que ele estava "roubando" né, então, apesar de parecer um artifício do menino… continua sendo verdade… então ele acertou!*

(Fonte: do autor)

Desse modo, a resposta do sujeito S_1 trouxe os elementos que se enquadram na UR-4.2, que agrupa os registros em que os(as) estudantes argumentam que o número 0,9999... será 1. Neste caso, é possível inferir aparentemente que o sujeito S_1 não possuiu dificuldade em completar a sequência, entretanto, na próxima atividade, isso não se confirmou.

Sabemos, segundo Vergnaud (1993), que apenas um tipo de atividade não é suficiente para o professor ou pesquisador identificar teoremas-em-ação, sejam eles verdadeiros ou falsos. Essas premissas puderam ser confirmadas neste caso, S_1 aparentemente não apresentou resistência em aceitar a igualdade proposta na atividade 4, entretanto, na próxima atividade que apresentaremos, S_1 exibiu uma resposta contraditória com a resposta dessa atividade.

A atividade 5 apresenta um dos mais famosos paradoxos da matemática, o paradoxo de Aquiles, proposto por Zenão de Elea (ver página 93). Este problema é uma variação da atividade 4, pois também traz uma situação aritmética envolvendo o conceito de infinito, entretanto, nesta atividade, a igualdade pretendida é a soma dos espaços percorridos por Aquiles. Com esta atividade também pretendemos investigar se os(as) alunos(as) interpretam como a soma infinita de uma PG ou como uma série geométrica. A negação de que Aquiles alcança a tartaruga pode revelar a dificuldade na aceitação do infinito em ato, ou seja, uma soma infinita de parcelas (espaços percorridos) resultando num número real.

> *Aquiles[76] nunca alcançará a tartaruga. Podemos notar que a distância entre ele e a tartaruga está sendo dividida por 10 constantemente. No início a distância é de 100m, depois de 10m depois de 1m; 0,1m; 0,01m; 0,001m e assim consecutivamente. Logo, podemos concluir que, por mais perto que Aquiles esteja da tartaruga, ele nunca chegará a posição da mesma.*
> *(Resposta de S_1 para atividade 5).*

Podemos notar que a resposta de S_1 apresenta elementos da UR-5.1, que agrupa registros daqueles que acreditam que Aquiles nunca alcançará a tartaruga. O fragmento de resposta "*por mais perto que Aquiles esteja da tartaruga, ele nunca chegará a posição da mesma*", explicita a mobilização de conhecimentos que caracterizamos como TAF_3: *Dada uma série infinita convergente, sua soma apenas se aproxima de um número real "L", mas nunca chegará a ser L.* Note que este teorema em ação não foi mobilizado na atividade anterior e, diante da evidente contradição entre as respostas da atividade 4 e da atividade 5, apresentamos a S_1 a atividade complementar III (ver página 97). Vejamos como S_1 respondeu:

> *a) Sim, se considerarmos uma razão $q = \frac{1}{10}$.*
> *(Resposta de S_1 para o item a) da atividade complementar III).*

[76] Aqui, por um erro de digitação da pergunta na atividade 5, foi trocado o personagem Aquiles por Zenão. Por esse fato, nas respostas digitalizadas em anexo, irá eventualmente aparecer o nome do personagem Zenão em vez de Aquiles. Entretanto esse erro de digitação não causou danos qualitativos para o desenvolvimento das atividades.

Após essa resposta, o sujeito S_1 afirmou que não saberia responder aos próximos itens, sendo assim, com a nossa interferência, discutimos alguns conceitos de PG e, com isso, S_1 pôde dar continuidade nas respostas.

> *b) A razão precisa estar entre -1 e 1 e* $\neq 0$.
> *(Resposta de S_1 para o item b) da atividade complementar III).*

Depois de finalizados os cálculos para conseguir responder ao item c) da atividade complementar S_1, nós discutimos a resposta alcançada.

Quadro 15 – diálogo com S_1 a respeito da atividade complementar 4.

S_1: Deu $\frac{1000}{9}$? *P: Isso! E o que representa $\frac{1000}{9}$?* *S_1: A soma das distâncias, não é? Até…* *P: Que o Aquiles[77] percorreu?* *S_1: Uhum…* *P: Até onde?* *S_1: Até o infinito.* *P: Mas se ele percorreu $\frac{1000}{9}$?* *S_1: Ah sim!…ah tá!… seria até alcançar a tartaruga?* *P: O que você acha?* *S_1: Acho que seria o que faz mais sentido (risos).*

(Fonte: do autor)

A partir desse ponto, o sujeito começa a reelaborar seus conhecimentos que foram mobilizados na primeira resposta a esta atividade. Tentamos desestabilizar o TAF_3 por meio de perguntas a S_1.

Quadro 16 – diálogo com S_1 a respeito da atividade complementar 4.

P: Você acabou somando os termos de uma PG, correto? *S_1: Sim.* *P: Cada termo dessa PG representa o quê?* *S_1: As distâncias percorridas* *P: Então esse resultado é a distância que Aquiles percorreu até alcançar a tartaruga?* *S_1: Sim* *P: Como você relaciona essa resposta com a resposta anterior, em que Aquiles não alcança a tartaruga?* *S_1: É… agora acho que "buguei" um pouco!* *P: (risos)*

[77] Aqui usamos o personagem Zenão em vez de Aquiles para não atrapalhar o raciocínio do sujeito que já havia construído a resposta com os personagens trocados.

S_1: Por que… se uma… se eu pensar que é uma PG infinita… que ele tá… *S_1: Porque eu ainda acredito que ele está sempre se aproximando, mas não está alcançando…* *S_1: Talvez no sentido de que isso seja uma aproximação?*

(Fonte: do autor)

Podemos inferir que o sujeito tenta, de várias maneiras, reorganizar seus conhecimentos, e mesmo diante de novas evidências, isto é, considerando que a atividade pode ser respondida por meio de uma PG e que o resultado é um número real, a resistência de S_1 em abandonar TAF_3 é visível.

O diálogo continua no sentido de buscar outras referências para a situação apresentada. Foi discutido a respeito de como uma PG pode ser, por exemplo, considerada um caso particular de séries convergentes, até chegarmos à definição de limite de uma função e limite de uma série convergente. Foi consensual dizer que o limite de uma função, caso exista, é um número real L, e não se aproxima de L.

Quadro 17 – diálogo com S_1 a respeito da atividade complementar 4.

P: Você gostaria de pensar um pouco mais a esse respeito? *S_1: Na minha visão, ele ainda não vai alcançar!* *P: Ah é?* *S_1: Sim.* *S_1: Eu sei que isso daqui significa alguma coisa… que eu não sei exatamente o que significa ou como vou interpretar esse número, esse resultado…* *P: Certo…* *S_1: Mas na minha visão, isso daqui ainda vai acontecer* (nesse momento ele mostra rascunhando a tartaruga sempre um pouco a frente)*…* *P: Uhum…* *S_1: Eu acredito que não seja o certo, acredito que tenha uma explicação correta para isso, mas…* *P: Mas por que a resposta “não alcançar” estaria errada?* *S_1: Porque isso aqui* (o resultado da soma da PG) *significa alguma coisa.* *S_1: Eu acho que ele não vai alcançar, mas talvez eu esteja cego pelo o que eu estou vendo aqui. Não esteja enxergando em grande escala… não sei.* *S_1: Mas não!… não acho que ele vai alcançar ainda!*

(Fonte: do autor)

A resistência em aceitar que o resultado da soma da PG representa a distância em que Aquiles alcança a tartaruga ainda persistia. Nesse momento precisamos lançar mão de outra estratégia. Abandonamos aparentemente esta atividade e voltamos à anterior. A razão para isso é que a igualdade 0,999… = 1 também pode ser interpretada como a soma infinita de termos de uma PG, e, neste caso, o sujeito S_1 não havia apresentado resistência em aceitar a igualdade, sendo assim, continuamos o diálogo.

Quadro 18 – diálogo com S_1 a respeito da atividade complementar 4.

P: Isso aqui (a sequência descrita no item “a” da atividade complementar) *pode ser considerado como uma PG, como já havia falado correto?* *S_1: Sim.* *P: Se você somar os termos dela, vai ter que número? Você tentou fazer?* *S_1: Não, me deixa ver…* *S_1: Vai dar um (1), a soma.*

(Fonte: do autor)

Diante da realização da soma dos termos da PG $(\frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1000}, \ldots)$, que o sujeito conclui ser 1 (um) e, ainda, que a soma dos termos da PG também pode ser escrita como $0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \cdots$, ou seja, $0{,}999\ldots$, provocamos, no sentido de estimular a ação, o porquê de S_1 considerar que o garoto ganhou a disputa, considerando $0{,}999\ldots = 1$, e, por outro lado, Aquiles não alcança a tartaruga, mesmo depois de realizar a soma da PG que representa o espaço percorrido até a tartaruga. Vejamos a finalização dos diálogos a respeito dessa atividade:

Quadro 19 – diálogo com S_1 a respeito da atividade complementar 4.

P: Explica-me por que neste caso você considera que sempre existirá um espaço entre Aquiles e a Tartaruga, e consequentemente não alcança, e na atividade anterior você afirma que sempre vai existir mais um 9 (na sequência $0{,}999\ldots$), *entretanto considera como sendo 1?* *P: Eu poderia argumentar que sempre existirá mais um dígito 9 na sequência 0,999… e por isso nunca será 1?* *S_1: Pode.* *P: Esse não é o mesmo tipo de argumento que você está usando para afirmar que Aquiles nunca alcançará a Tartaruga?* *S_1:* (pensando…) *P: Então agora eu te desafio, qual afirmação que você continua sustentando? Você concorda que existe uma contradição entre aceitar que $0{,}999\ldots = 1$ e que Aquiles não alcança a tartaruga?* *S_1: Sim.* *P: Diante dessa contradição, você abandona uma das duas afirmações ou mantém a contradição?* *S_1: Se eu tiver que abandonar uma, eu abando essa* (de que Aquiles não alcança a Tartaruga). *P: Por quê?*

S_1: Porque eu acredito mais nisso daqui… isso aqui é uma dízima, eu consigo mostrar que ela é 1. *P: Essa* (a PG que representa os espaços percorridos por Aquiles) *não dá uma dízima? Será que conseguimos reescrever esse problema em forma de dízima?* *S_1: Ah, essa daqui seria* $111{,}1111\ldots$*, seria isso? É! É uma dizima!* $111{,}111\ldots = \frac{1000}{9}$. *$S_1$: Então é uma dízima também… É ... então ele alcança!* (mostra-se surpreso). *S_1: Não é um paradoxo então* (risos). *P: (risos).*

(Fonte: do autor)

Desse modo, mesmo com a resistência do TAF_3- pelo que pôde ser visto nos diálogos – acreditamos ter apresentado argumentos suficientes para que S_1 reelaborasse seus conhecimentos mobilizados e, em seguida, reescreva sua resposta para a atividade 5.

> *A partir da atividade 5 complementar, conclui-se que é possível que Aquiles alcance a tartaruga, ao conseguirmos encontrar a soma dos termos da PG infinita (100, 10, 1, 0,1, ...).*
> *(Restruturação da resposta de S_1 para a atividade 5).*

Na atividade 6 é apresentada uma situação geométrica que envolve o conceito de infinito, a comparação entre objetos de dimensões distintas (página 94). Em outras palavras, essa situação apresenta a possibilidade de correspondência biunívoca entre os pontos de um quadrado e os pontos de um segmento. Esse problema é um caso particular do proposto por Georg Cantor (1845-1918) a Richard Dedekind (1831-1916), em uma carta escrita em 29 de junho de 1877.

Com esta atividade pretendemos investigar se os alunos terão algum obstáculo em aceitar tal identificação, assim como Cantor escreve na carta, depois de ter feito a demonstração, “Eu vejo, mas não creio”. Antes de o sujeito S_1 escrever sua resposta da atividade 6, fez algumas indagações descritas no diálogo a seguir:

Quadro 20 – diálogo com S_1 a respeito da atividade 6.

S_1: A pergunta desta atividade 6 é no sentido de que se é possível estabelecer uma relação biunívoca entre o lado do quadrado e a sua área? *P: Sim. Você acha que é possível?* *S_1: No “bater do olho” assim, intuitivamente eu poderia dizer que no quadrado tem muito mais pontos do que em um segmento.* *P: Certo…* *S_1: Porque um espaço bidimensional comparado com um espaço unidimensional…*

(Fonte: do autor)

Após alguns minutos refletindo a respeito da possibilidade de se obter uma relação biunívoca entre a área do quadrado e um dos lados, o sujeito S_1 responde à questão:

> *Acredito que não seja possível encontrar uma relação biunívoca entre o segmento e o quadrado, pois, pelo menos a princípio, não consegui encontrar um relação satisfatória. O fato de compararmos uma figura unidimensional com uma bidimensional dificulta o pensamento.*
> *(Resposta de S_1 na atividade 6).*

Podemos ver, na resposta do S_1, elementos da UR-6.3, criada para agrupar registros em que os(as) estudantes argumentam que não é possível relacionar biunivocamente objetos de dimensões distintas. Esse tipo de resposta apresenta indícios do TAF_4: *o quadrado possui mais pontos que um de seus lados, pois tem dimensão superior.* Que se baseia na dificuldade apresentada por Cantor, explicitada na frase “eu vejo, mas não acredito”.

A tentativa de desestabilização desse TAF_4 foi apresentar a atividade complementar IV (página 96). Essa atividade mostra a demonstração de um caso particular de um teorema de Cantor, na qual atividade 6 se encaixa. Sabemos que a apresentação da demonstração deste fato matemático é um artifício de convencimento muito grande, pois o processo formal da demonstração matemática influencia no processo de convencimento. Entretanto, não sabemos até que ponto houve desmobilização.

Finalizamos com um quadro resumo das atividades e as URs caracterizadas nas respostas de S_1, bem como os candidatos a TAF mobilizados e os OE relacionados.

Quadro 21 – URs, TAF e OE identificados nas respostas de S_1.

	URs caracterizadas	TAF mobilizados	OE relacionado
Atividade 1	UR-1.3		
Atividade 2	UR-2.2 UR-2.3	TAF_2	Parte-todo: o todo é sempre maior que uma de suas partes.
Atividade 3	UR-3.3		
Atividade 4	UR-4.2		
Atividade 5	UR-5.1	TAF_3	O limite é algo que se aproxima, mas não chega!
Atividade 6	UR-6.3	TAF_4	Estabelecimento de bijeção entre objetos de dimensões distintas

(Fonte: do autor)

6.2 Descrição e análise do sujeito S_2

Na primeira atividade investigamos a possibilidade de aceitar uma representação finita ou limitada para o infinito. O sujeito S_2 encontrou resistência em aceitar a uma representação sincopada do infinito, vejamos sua resposta:

> *É impossível ver todos os elementos de um conjunto com infinitos elementos, o máximo possível seria listar alguns e supor a existência dos outros.*
> *No diálogo o 'boneco' comete um equívoco ao supor que todos os que ele consegue listar formam um conjunto com infinitos elementos, ele não desenvolveu esse conceito de supor elementos que ele não consegue listar.*
> *(Resposta de S_2 na atividade 1).*

A frase "*É impossível ver todos os elementos de um conjunto com infinitos elementos*" nos indica que S_2 mobiliza conhecimentos associados ao TAF_1, pois na resposta escrita de S_2 é possível encontrar argumentos que sugerem a impossibilidade da descrição de todos os elementos de uma sequência infinita. Podemos interpretar os argumentos de S_2 no sentido de que é necessário conceber separadamente cada objeto e que a representação de um todo infinito é uma impossibilidade para a mente.

Diante da resposta de S_2, foi perguntado,

Quadro 22 – diálogo com S_2 a respeito da atividade 1.

P: Então você acha que não é possível representar um conjunto com infinitos elementos? *S_2: É possível representar um conjunto com infinitos elementos. Não é possível representar todos os elementos nesse conjunto.* *P: Certo, então você afirma que não é possível representar todos os elementos de um conjunto infinito. E o como você entende o modo como representamos os números naturais por $\mathbb{N}$, você acha que $\mathbb{N}$ não está representando todos os números naturais?* *S_2: Eu acho que não fui bem claro na minha explicação, por exemplo, não teria como descrever todos os elementos do conjunto dos naturais, mas tem como vc representar através de uma letra.* *P: Então você afirma que não consegue, por exemplo, falar os elementos um a um ou escrever elemento um por um dos naturais.* *S_2: Isso!* *P: Qual, por exemplo, não é possível?* *S_2: Não, eu não consigo descrever todos os elementos dos naturais um por um, Mas consigo um símbolo que representa todos eles.* *P: Você pode dar outro exemplo de como é possível representar infinitos elementos?*

S_2: Você poderia escrever alguns [elementos] e colocar três pontinhos, depois representando que existem mais elementos, e que vão seguir esse mesmo padrão, essa mesma ordem que estão seguindo os [elementos] anteriores.

(Fonte: do autor)

S_2 mostra uma incapacidade temporária de se completar um processo, característica ligada à concepção de infinito em potência. Vejamos que, apesar de aceitar que existe um símbolo que representa todos os elementos do conjunto dos naturais, S_2 ainda persiste na necessidade de descrever todos os elementos um por um. Bolzano (1991), quando introduz na matemática a definição de conjuntos infinitos, a representação de um conjunto infinito por um símbolo de conter a representação individual de cada elemento, ou seja, não é possível, deste modo, representar um conjunto por um símbolo sem que este não represente um a um cada elemento. Acreditamos que S_2 apresentou elementos da UR-1.1 que agrupa os registros em que os(as) estudantes argumentam que todo objeto/conjunto infinito deve necessariamente ser ilimitado.

Passamos para a descrição da segunda atividade que traz em sua concepção o obstáculo epistemológico parte-todo, isto é, estabelece relação entre um conjunto infinito e uma de suas partes próprias.

Item (a): A quantidade de pontos de AB é infinita.
Item (b): A quantidade de pontos dos dois segmentos é infinita, porém, o conjunto formado por todos os pontos possíveis de CD seria maior do que o conjunto formado por todos os pontos de AB.
(Resposta de S_2 para a atividade 2).

Para o primeiro item da atividade o sujeito S_2 admite a que o segmento AB possui infinitos elementos, resposta que se enquadra na UR-2.2, já no segundo item da atividade 2, apresentou resposta condizente com a UR-2.4 (o segmento AB possui uma quantidade de pontos menor que o segmento CD) reproduzindo uma representação baseada na experiência cotidiana, em que é claro que o todo é maior que a parte, mas que não condiz com o consenso científico atual da matemática, quando tratamos de conjuntos infinitos.

Na sequência à entrevista, S_2 começa a responder a terceira atividade, que também é uma variação do problema parte-todo, e traz os diálogos dos personagens de Galileu a respeito de uma possível relação bijetiva[78] entre números quadrados perfeitos e dos números naturais.

> *Para cada número natural é possível fazer relação com um quadrado perfeito, portanto mesmo o conjunto dos números naturais e o conjunto dos quadrados perfeitos, sendo infinitos, é possível dizer que eles teriam a mesma quantidade de elementos, essa relação entre eles, me garante isso.*
> *(Resposta de S_2 para a atividade 3).*

Vejamos que na resposta de S_2, apesar de não explicitar as palavras “biunívoca” e “cardinalidade”, é possível estabelecer uma identificação com a UR-3.3: “Os conjuntos possuem a mesma cardinalidade”, que agrupa registro daqueles que entendem que é possível estabelecer uma relação biunívoca entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números quadrados perfeitos.

Logo após o término desta atividade, foi proposta uma atividade complementar I (ver página 97) na tentativa de desestabilizar os conhecimentos mobilizados por S_2 na resposta da atividade 2 e confrontar com sua resposta na atividade 3. Vejamos como S_2 responde:

> *a) Sim*
> *b) Sim*
> *(Resposta parcial de S_2 para a atividade complementar I)*

A resposta positiva do entrevistado no item (b) da atividade complementar contraria a resposta de S_2 para o segundo item da atividade 2, este fato faz com que S_2 expresse sua perplexidade por meio de um sorriso perante essa situação, pois a questão pede para que se estabeleça uma relação entre as repostas da atividade anterior. Vejamos como se dá o diálogo a respeito dessa atividade:

Quadro 23 – diálogo com S_2 a respeito da atividade complementar I.

S_2: (risos) [aparentemente de perplexidade] *P: O que foi essa risada [risos]?* *S_2: Parece que… não importa o que eu responder nesse item (c), está entrando em contradição com o que eu respondi na atividade 2 [item (b)].* *P: E você quer repensar alguma das suas respostas?* *S_2: Porque na 2, aqui na atividade 2, tecnicamente o conjunto de pontos formados por todos os pontos em AB deveria estar contido em CD.* *P: Certo…*

[78] Aqui cometemos um anacronismo enunciado, já que este termo não era usado à época.

S_2: E como CD é um conjunto maior, por isso ele teria mais elementos… Mas se você fosse fazer uma relação ponto a ponto, pelo fato dos dois terem infinitos [elementos], eles têm a mesma quantidade de elementos. *P: Então a sua afirmação de que, se um conjunto está contido no outro, logo ele possui menos elementos, ainda é válida?* *S_2: Não, acho que isso não pode ser mais afirmado.* *P: Por quê? Você pode dar algum exemplo?* *S_2: Porque é possível fazer essa [a relação apresentada na atividade complementar I] relação de ponto a ponto.* *P: Mesmo se tratando de conjunto e subconjunto?* *S_2: Mesmo se tratando de conjunto e subconjunto [pensando]… Como pode uma parte do conjunto ter uma quantidade igual de elementos como o todo?!… Estranho!*

(Fonte: do autor)

Nesse ponto da entrevista, afirmamos para S_2 que sua estranheza também já foi partilhada por outros personagens da história da matemática e, em seguida, retornamos para a resposta de S_2 apresentada na atividade 3 – fizemos isso na tentativa de desmobilizar o conhecimento falso de S_2 expresso pelo TAF_2: *a parte é sempre menor que o todo*.

Quando revisitamos a resposta na atividade 3, mais uma vez confirmamos o entendimento, por parte de S_2, da existência da relação biunívoca estabelecida entre os dois conjuntos infinitos, volta-se o diálogo a respeito da comparação dos segmentos AB e CD.

Quadro 24 – diálogo com S_2 a respeito da atividade complementar I.

P: Voltando então para a discussão dos segmentos. Vejamos que na atividade 3 você admite uma relação um a um entre um conjunto e um de seus subconjuntos próprios, enquanto que na atividade 2 isso lhe parece estranho, o que tem a me dizer a esse respeito? *S_2: Mas é que ficou um pouco mais… as coisas só ficaram claras para mim quando eu consegui fazer essa relação. Quando consegui fazer a relação aqui e aqui* (ele mostra nas respostas a relação entre os conjuntos na atividade 3)*. Mas na atividade 2 eu não consegui fazer essa relação. Então… eu tive a impressão do conjunto* (de pontos) *de CD ser maior que* (o conjunto de pontos de) *AB.* *P: Certo, mas e agora, o que você me diz? Ainda sustenta a afirmação de que o conjunto de pontos de CD possui mais pontos que o conjunto de pontos de AB?* *S_2: Então… eu não sei dizer! Parece para mim que as duas coisas são verdades, e elas estão entrando em conflito… e eu não consigo analisar qual realmente é verdadeira ou não…* *S_2: Dá um tempinho para eu tentar?* *P: Claro! Pode ficar tranquilo…* *S_2: Tem importância de tempo?*

(Fonte: do autor)

Note que S_2 pede um tempo para reelaborar seus conhecimentos que foram mobilizados de forma contraditória nas atividades 2 e 3. Esta etapa de reelaboração é importante, pois, segundo Vergnaud (2003), "[…] filiações, continuidade e rupturas num processo de desenvolvimento são aspectos extremamente importantes; e são importantes não só nas competências cognitivas e abstratas, [mas] como nas gestuais" (p. 58). Depois de algum tempo S_2 escreve sua resposta para o item (c) da atividade complementar I.

c) Se tratando de conjuntos infinitos, sendo um conjunto possuindo mais elementos que o outro é possível fazer relação elemento a elemento que contemple todos os elementos dos dois conjuntos.
(Resposta parcial de S_2 para a atividade complementar I).

Diante de sua resposta o próprio sujeito dá início ao diálogo.

Quadro 25 – diálogo com S_2 a respeito da atividade complementar I.

S_2: Eu acho que eu, meio que, acabei criando um teorema em ação aqui para responder essa (c).
P: Ah é? (o pesquisador não conteve uma expressão de surpresa com a resposta).
S_2: Sim.
P: Você poderia dizer qual é?
S_2: A minha resposta no item (c).
P: Quer me explicar sua resposta?
S_2: Parece que quando se trata de infinitos, parece que isso é válido. Lembra-se de uma pequena parte que pode ser comparada com o todo? Uma pequena parte contida no conjunto pode ser relacionada no conjunto com o todo.
P: Então agora você tá dizendo que é possível estabelecer aquela relação entre o AB e o CD.
S_2: Sim.

(Fonte: do autor)

Vejamos que o sujeito admite ter mobilizado novos conhecimentos para poder entender a situação, quando ele afirma que "criou um teorema em ação". Note que o conhecimento mobilizado por S_2 resolve a situação apresentada a ele, pois ele afirma que, quando se trata de conjuntos infinitos, sempre vai existir uma relação biunívoca entre os elementos do conjunto e seu subconjunto.

Sabemos que a afirmação feita por S_2 somente é válida quando se trata de conjuntos infinitos de mesma cardinalidade, por exemplo, os números naturais e os números quadrados perfeitos possuem cardinalidade $\aleph_0$, ou ainda, considerando os segmentos AB e CD como intervalos da reta dos números reais, seus conjuntos de pontos possuem mesma cardinalidade $\aleph_1$. Entretanto, se considerarmos, por exemplo, o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e o subconjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, os dois conjuntos são infinitos, um é subconjunto do outro, porém com cardinalidades distintas e não existe bijeção entre eles, contrariando assim a afirmação de S_2.

O teorema em ação, enunciado por S_2, é um fenômeno já observado por outros pesquisadores e foi denominado por “constrição” ou “achatamento”, em D’amore (1999). Caracterizamos esses conhecimentos mobilizados pelo TAF_5: *todos os conjuntos infinitos possuem a mesma cardinalidade.* Acreditamos que esse fenômeno é o mesmo que caracteriza a resposta de S_2. Vejamos o diálogo que confirma essa hipótese.

Quadro 26 – diálogo com S_2 a respeito da atividade complementar I.

P: Você então está afirmando que para qualquer conjunto infinito eu consigo fazer isso (estabelecer relação biunívoca entre o conjunto e uma de suas partes próprias).
S_2: Sim. Qualquer conjunto infinito.
P: E considerarmos que o conjunto dos números reais e o conjunto dos números naturais são dois conjuntos infinitos, correto?
S_2: Sim.
P: Os naturais estão contidos nos reais, correto?
S_2: Sim.
P: E para esses dois conjuntos é possível estabelecer uma relação biunívoca entre eles?
S_2: Sim. Exato.

(Fonte: do autor)

Portanto, este diálogo, e as respostas anteriores, indica a presença de conhecimentos mobilizados por S_2 que podem ser caracterizados como pelo TAF_5

Passamos para a resposta de S_2 na atividade 4 que apresentou um diálogo entre dois personagens a respeito da igualdade $0{,}999 \ldots = 1$.

> *Eu daria a vitória para o menino porque ele representou o maior número possível começando em zero.*
> *(Resposta de S_2 para a atividade 4).*

A resposta de S_2 se enquadra na UR-4.2 - O número 0,9999... pode ser também representado pelo número 1 - que agrupa os registros em que os(as) estudantes argumentam que o número 0,9999... é igual a 1. O diálogo a respeito dessa resposta foi apenas para confirmar o entendimento do aluno, vejamos esse diálogo:

Quadro 27 – diálogo com S_2 a respeito da atividade 4.

P: O que você acha da afirmação do personagem Snoop a respeito de que não era justa a resposta do menino, pois $0{,}999\ldots = 1$.   *S_2: Não, ele está errado.*   *P: Você confirma que a igualdade é válida?*   *S_2: É assim, por mais que seja igual, a forma de representação desse número [0,999…] existe. Então ele obedeceu às regras* (começar com 0)*, e é possível provar que* $0{,}999\ldots = 1$.   *P: Certo.*

(Fonte: do autor)

A próxima atividade traz uma variação da atividade 4 e que do mesmo modo que o sujeito S_1 respondeu a princípio que Aquiles não alcançaria a tartaruga, S_2 também apresentou a mesma afirmação.

Aquiles nunca alcançará de fato a tartaruga.
(Resposta de S_2 para a atividade 5).

Vejamos que a resposta de S_2 possui elementos da UR-5.1 que agrupa os registros em que os(as) estudantes argumentam que, por mais próximo que Aquiles esteja da Tartaruga, este nunca a alcançará.

Em seguida foi proposta a atividade complementar III, em que no item (a) se pergunta se é possível caracterizar a sequência $\left(\frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1000}, \ldots\right)$ como uma PG, e no item (b) quais as condições para que isso aconteça e no item (c) se era possível relacionar esta atividade com as atividades 3 e 4. As respostas foram:

a) Sim.
b) $0 < r < 1$ *[r aqui representa a razão entre os termos da PG e* $r \neq 0$*]*
c) Sim.
(Resposta de S_2 para a atividade complementar III).

Diante das respostas apresentadas por S_2, perguntamos:

Quadro 28 – diálogo com S_2 a respeito da atividade 5.

P: Na atividade 4 você afirmou que a igualdade $0{,}999\ldots = 1$ é verdadeira e inclusive disse que é possível provar usando soma de PG infinita. Por outro lado, na atividade 5 você afirma que Aquiles nunca vai alcançar a tartaruga. Você acha que não é possível estabelecer uma relação da atividade 5 com uma PG?

S_2: Deixa-me pensar… aqui na atividade 5 eu não vi algo que possa relacionar com PG ainda. *P: Porque você afirma que Aquiles nunca vai alcançar a tartaruga?* *S_2: Porque ela* (a tartaruga) *sempre vai estar um pouquinho na frente dele.*

(Fonte: do autor)

Nesse momento da entrevista foi sugerido a S_2 representar as distâncias percorridas por Aquiles a tentar caracterizá-las como um PG. S_2 percebe então que é possível realizar a soma, já que as parcelas a serem somadas se comportam como uma PG passível de soma. Entretanto, mesmo assumindo que é possível realizar tal soma, essa soma na realidade é apenas uma convenção, ou nas palavras de S_2 por "consideração". Vejamos o diálogo:

Quadro 29 – diálogo com S_2 a respeito das atividades 4 e 5.

P: É possível somar esses elementos? É possível somar todas as distâncias que Aquiles percorreu? Ou você acha que não é possível? *S_2: É possível somar todas as distâncias que ele percorreu.* *P: E o resultado dessa soma, o que representa?* *S_2: Representa a distância dele* (Aquiles) *do ponto inicial até o ponto que ele onde supostamente encontrou a tartaruga… na verdade… voltando na questão do 1 ser igual a* $0{,}999,\ldots$ *P: Certo.* *S_2: Eu acho que existe uma representação para esse número* $0{,}999,\ldots$, *tanto é que aquele menino ganhou aquele jogo [se referindo à atividade 4].* *P: Certo.* *S_2: Mas se você levar em consideração que esse número* ($0{,}999,\ldots$) *está tendendo ao infinito você pode considerar que ele fosse 1 entendeu? Você considera como se fosse 1 pelo fato dele estar cada vez mais se aproximando de 1.* *P: Você quer dizer então, que apenas consideramos que seja 1, mas de fato não é?* *S_2: Ele* ($0{,}999\ldots$) *não é! Ele é considerado como se fosse 1, mas ele não é 1.*

(Fonte: do autor)

Nesse momento, percebemos que havíamos nos enganado a respeito do entendimento de S_2 acerca da resposta da atividade 4. A princípio, houve a impressão de que S_2 assume a igualdade $0{,}999\ldots = 1$, entretanto, após outras atividades se verifica que S_2 volta atrás em seus argumentos e diz que apenas aceita a igualdade por consideração, mas que na realidade, a sequência $0{,}999\ldots$ cada vez mais se aproxima de 1, mas nunca chegará a ser 1.

Apresentamos a tentativa de desmobilizar esses conhecimentos, vejamos:

Quadro 30 – diálogo com S_2 a respeito das atividades 4, 5 e complementar III.

P: Você respondeu que é possível fazer essa soma (a soma da PG da atividade complementar III). *Se você fizer essa soma dá quanto?* *S_2: Se eu fizer essa soma… dá 1?* *P: Sim. Sendo assim, quando se realiza a soma dessa PG, ou seja, quando somamos esses infinitos termos e dá 1. Esse resultado é por consideração?* *S_2: Só por consideração, porque tecnicamente não é 1, está o mais próximo possível de 1. É o número mais próximo possível de 1.* *P: E você usa essa mesma justificativa no caso de Aquiles?* *S_2: Na verdade a distância que ele percorreu vai ser o número mais próximo possível do número inteiro* (sujeito S_2 não realizou a soma das distâncias, que resulta num número racional não inteiro). *P: Quando você calcula o limite, por exemplo, de uma função, o resultado encontrado, é um número real. Esse valor encontrado é por consideração?* *S_2: Aquele valor* (o resultado de um limite) *está representando um número, o maior número possível, antes daquele valor.* *P: Está afirmando então que o limite não é L* (supondo que L seja o resultado do limite da função) *e sim ele se aproxima de L.* *S_2: É o número mais próximo possível de L.* *P: Mas é assim que está na definição?* *S_2: Na definição fala-se que é L, mas daí seria por consideração.* *P: Entendi, se quiser complementar sua resposta na atividade complementar…* *S_2: Vou tentar, mas não sei se vou conseguir escrever certinho.*

(Fonte: do autor)

Podemos inferir, neste caso, que S_2 apresenta uma resistência em aceitar processos infinitos em ato, e que apenas consideramos os valores encontrados nos processos de cálculo por alguma convenção. Não encontramos elementos para apresentar uma situação que pudesse desmobilizar esse teorema falso TAF_3 - *Dada uma série infinita convergente, sua soma apenas se aproxima de um número real "L", mas nunca chegará a ser L* – que apresentou resistência na argumentação de S_2. Vejamos como S_2 sintetizou sua argumentação:

> *Quando fazemos $\sum_1^\infty \left(\frac{9}{10^n}\right)$ isso resulta em um (1), mas não é realmente o número 1, e sim o número mais próximo possível de 1 sendo que o mesmo não ultrapassa o 1, considera-se como sendo 1 por ser o número mais próximo possível, mas sua real representação é $0,\overline{9}$.*
> *(Resposta de S_2 após a atividade complementar III).*

Na atividade 6, se apresenta uma situação em que se supõe uma relação biunívoca entre um quadrado qualquer e um de seus lados. Para essa situação, S_2 responde:

É possível fazer uma relação para cada ponto do segmento com um único ponto do quadrado.
(Resposta de S_2 na atividade 6).

Diante da resposta que se enquadrou na UR-6.2 - O quadrado possui tantos pontos quanto seu lado **-** que agrupa os registros em que os(as) estudantes argumentam que existe uma relação biunívoca entre os pontos do quadrado e um de seus lados. Perguntamos ao S_2 se a possibilidade de estabelecer uma relação biunívoca entre um quadrado e um dos lados não lhe causava alguma estranheza. Vejamos o diálogo:

Quadro 31 – diálogo com S_2 a respeito da atividade 6.

P: Este fato não lhe causou nenhum incômodo? *S_2: Não, eu já fiquei chocado naquela atividade anterior* (atividade 2 dos segmentos)*. Se você ver a ideia que isso está tentando passar é muito parecida com aquela, então… Eu já me surpreendi com aquela.*

(Fonte: do autor)

Em seguida foi mostrado ao sujeito como se deu a demonstração da afirmação que aparece na atividade 6 finalizando a entrevista. Vejamos agora um quadro resumo das URs identificadas nas respostas de S_2 bem como os candidatos a TAF e os respectivos OE relacionados.

Quadro 32 – URs, TAF e OE identificados nas respostas de S_2.

	URs caracterizadas	TAF mobilizados	OE relacionado
Atividade 1	UR-1.1	TAF_1	Infinito ≡ ilimitado
Atividade 2	UR-2.2 UR-2.4	TAF_2 / TAF_5	Parte-todo: o todo é sempre maior que uma de suas partes / Constrição ou achatamento da cardinalidade
Atividade 3	UR-3.3		
Atividade 4	UR-4.2		
Atividade 5	UR-5.1	TAF_3	O limite é algo que se aproxima, mas não chega!
Atividade 6	UR-6.2		

(Fonte: do autor)

6.3 Descrição e análise do sujeito S_3

Começamos pela transcrição da resposta de S_3 obtida na atividade 1. Relembrando que essa atividade traz um diálogo entre dois personagens acerca da possibilidade de aceitarmos o infinito como algo limitado.

> *Durante minha vida escolar (EM e EF), não me recordo, de que meus professores em algum momento tenham mencionado o termo infinito. Já na graduação em matemática este termo passou a ser mencionado com maior frequência.*
> *Fui instigada a pensar (refletir), que entre os números 0 e 1, existem infinitos termos. E não foi fácil em um primeiro contato compreender um limite que tende ao infinito. Assim, como na tirinha, a meu ver, não é fácil explicar para uma criança o conceito de infinito. Este muitas vezes para alguns é um número, pois há aqueles que alegam ou pensam "meu número é o maior de todos, é o infinito"!*
> *Refletindo também sobre conjuntos, como explicar que um conjunto é infinito e limitado? Trabalhar exemplos, representar, faz com que alcancemos que o sujeito compreenda o que é o infinito?*
> *Acredito que assim como diferentes sujeitos pensem em diferentes números dois, diferentes sujeitos pensam e acreditam, e ainda, consigam imaginar diferentes infinitos.*
> *(Resposta de S_3 na atividade 1).*

Notemos que S_3 aceita que objetos/conjuntos podem ser limitados ou ilimitados, já que admitiu a existência de uma infinidade de números no intervalo limitado entre 0 e 1, desse modo, a resposta apresentou elementos da UR – 1.3. Após a entrega da resposta, houve o seguinte diálogo:

Quadro 33 – diálogo com S_3 a respeito da atividade 1.

P: O que você acha dos dois personagens se autointitularem infinito? Você vê problema nisso? *S_3: Ah… eu S_3 acho que para mim não seria, mas para outra pessoa lendo, ficaria confusa.* *P: Por qual motivo você acredita que outra pessoa ficaria confusa?* *S_3: Por exemplo, como eu explicaria para um aluno, que nem, por exemplo, quando a gente aprende conjuntos, né… que nem, por exemplo, vamos pensar no conjunto dos números naturais né, por exemplo, igual eu falei [*na resposta escrita*] entre 0 e 1 tem infinitos números né, mas assim, a concepção que eles têm é 0; 0,1; 0,2, né, chegou no 1! Mas entre o 0,1 e o 0,2, como trabalhar isso com eles? Que algo é limitado, mas que têm infinitos números ali, por exemplo […]* (continua)

(Fonte: do autor)

Pausamos na descrição do diálogo para que pudéssemos fazer uma observação. Primamos por transcrever, pelo menos por ora, os vícios de linguagem de S_3, pois acreditamos que eles trazem elementos que podem indicar mobilização dos conhecimentos difusos por parte de S_3, isto é, acreditamos que, quando S_3 respondeu "*para mim não seria, mas para outra pessoa lendo, ficaria confusa",* houve transferência para uma terceira pessoa fictícia, uma confusão que lhe pertence. Vejamos a continuação do diálogo:

Quadro 34 – diálogo com S_3 a respeito da atividade 1.

S_3: […] Eu fico pensando, o que eles estão pensando quando a gente fala isso (entre dois números existem outros infinitos) *né? Então eu acho que num primeiro contato causaria um espanto, causaria um problema, por que eu acho que eles… que nem eu falei, esse termo, para mim foi ficar comum quando eu terminei a faculdade* (sujeito recém-egresso)*, porque pelo menos eu não me recordo dos professores terem trabalhado ou falado, né, então assim, eu me lembro de quando a gente pensava em limites, limite tendendo ao infinito, então assim, num primeiro contato com cálculo [disciplina], por exemplo, em cálculo 1, eu ficava, tipo, como assim? Tendendo ao infinito?! Sabe… uma questão de eu ter que imaginar mesmo. Como assim né? Então não é algo assim, como eu vou te dizer, não é fácil de explicar e nem de se compreender. Então, eu acho que causa sim, um estranhamento nesse sentido, por ser de uma classe mais complexa de se entender. Não sei se eu respondi. Entendeu o que eu quis dizer?* *P: Acho que sim, você afirmou que a compreensão do conjunto dos números naturais é razoavelmente fácil, mas que quando temos que trabalhar com conjuntos densos, por exemplo, ai fica mais complexo. É isso?* *S_3: Já fica mais complexo para eles, mais ou menos nesse sentido.*

(Fonte: do autor)

O diálogo acima continua, entretanto S_3 começa a abordar a resposta da segunda atividade que já havia respondido, deste modo, apresentamos sua resposta para essa atividade:

> *1) Acredito que a quantidade de pontos é infinita. Supondo A=1 e B=2. Teríamos, por exemplo, o ponto 1,5 ; 1,51 ; 1,512 ; infinitos números (pontos) entre 1 e 2.*
> *2) Olhando a representação eu concluiria que sim [que o segmento CD possui mais pontos de AB], porém, como comparar o infinito de AB com o infinito de CD? Seria o mesmo que dizer que existe um infinito maior que outro. Eu acredito ser um equívoco essa afirmação.*
> *(Resposta de S_3 para a atividade 2).*

Apresentamos também as respostas de S_3 para a atividade complementar I, pois os diálogos a respeito das respostas começaram apenas quando S_3 já havia terminado de responder as atividades 1, 2 e complementar I, foram adiantados diálogos presentes nos Quadros 30 e 31, apenas por uma questão estrutural de nossa análise. Vejamos então a resposta de S_3:

a) Acredito que sim.
b) Não consigo imaginar um ponto em AB que corresponda a mais de um ponto em CD.
c) Vou conseguir estabelecer infinitos pontos em CD que correspondam a um único em AB. Porém como fazer isto se o CD é maior (visual) que AB? Faltariam pontos para corresponder. Isso contradiz o que disse em b.
(Resposta de S_3 na atividade complementar I)

É possível encontrar na resposta de S_3 elementos da UR-2.2 na resposta do item denotado por 1) da atividade 2. Já no item denotado de 2), encontramos elementos da UR -2.3 que reúnem registros daqueles que acreditam que CD possui mais pontos de AB. Entretanto S_3 afirma que este tipo de comparação não deveria ser feita, já que tratamos de dois conjuntos infinitos, e, portanto, seria um equívoco afirmar que existe um infinito maior que outro. Percebemos indícios da mobilização do TAF_2: *A parte é sempre menor que todo,* para justificar que o segmento CD possui mais pontos que o segmento AB. Cabe ressaltar que, neste caso, apesar de AB e CD possuírem medidas distintas, não se trata de infinitos com "tamanhos" diferentes como afirmou S_3, pelo contrário, AB e CD possuem a mesma cardinalidade, e, portanto são conjuntos infinitos de mesmo "tamanho".

A ideia de existir infinitos distintos intriga S_3, como podemos perceber no diálogo a seguir:

Quadro 35 – diálogo com S_3 a respeito da atividade 2 e complementar I.

S_3: […] Como eu vou comparar o infinito desse [AB] com esse [CD], sendo que eu não sei qual é o infinito disso entendeu? Como eu vou comparar dois infinitos, sendo que o infinito é uma coisa só, entendeu? Tem como eu estabelecer que é aqui (aponta para o segmento CD) *o infinito maior e aqui* (aponta para o segmento AB) *o infinito menor? Ai quebra! Entendeu? Quebra o conceito de infinito. Mas como assim, infinito maior e infinito menor? Como eu vou comparar? Entendeu o que eu quis dizer?* *P: Estou entendendo.* *S_3: É mais ou menos nesse sentido assim […] tipo, existem infinitos pontos, beleza, aqui também né, na visualização esse daqui [CD] é maior que esse daqui [AB] né, mas assim, olhando cada detalhe, como comparar esse infinito aqui com aquele infinito ali, sendo que são infinitos? […] Eu quero dizer que não existe um infinito maior que outro infinito.*

(Fonte: do autor)

O diálogo continuou, mas sem trazer elementos diferentes daqueles já explicitados por S_3 nos fragmentos de fala apresentados até agora. A atividade complementar I não foi suficiente para desmobilizar o TAF_2.

Passamos, então, para a resposta dada na atividade 3, lembrando que nesta atividade foi apresentado um diálogo a respeito de uma possível bijeção entre o conjunto dos números naturais com o conjunto dos números quadrados perfeitos:

> *Acredito que nada podemos concluir. Como comparar conjuntos infinitos? Ligando com a atividade 2, como comparar a quantidade de infinitos pontos dos segmentos. Existe um infinito maior que outro? Afirmar isto faz cair por terra a função, ou melhor, o que se entende e o que é o infinito.*
> *(Resposta de S_3 para a atividade 3).*

Encontramos nessa resposta elementos da UR-3.2 que reúnem registro daqueles que afirmam não ser possível comparar conjuntos infinitos em relação à quantidade de elementos. Após visualizarmos essa resposta, pedimos a S_3 para comentá-la.

Quadro 36 – diálogo com S_3 a respeito da atividade 3.

P: Você poderia comentar a respeito de sua resposta na atividade 3? *S_3: Então, deu um nó na minha cabeça esse "diabo" aqui (risos).* *S_3: Deixa-me ler […] bom aqui eu me lembrei da atividade do segmento, eu pensei a mesma coisa. Como eu vou comparar um infinito com o outro né […] daí se quebraria tudo o que se entende por infinito, entendeu?* *P: Você acredita que nesse diálogo…* *S_3: Que a gente não consegue.* *P: Que não se pode estabelecer uma relação entre os dois conjuntos, porque se trata de conjuntos infinitos. Você concorda com afirmação de Galilei na atividade?* *S_3: É como Galilei fala… Por quê? Ah, mas não é? […] neste caso eu fico imaginando a mesma questão anterior né, como comparar um conjunto maior que outro, sendo que ambos têm infinitos números […] não tem como […] É como se existisse infinitos maiores que outros. Professor você entende quando eu quero dizer que não, como eu vou te explicar, se eu falar que existe um infinito 10 e outro infinito 9, é um equívoco! Porque se perde o que é o infinito, entendeu?* *P: E o que é o infinito para você?* *S_3: Então, pois é… não sei se sei explicar…* *P: Para você não existe infinitos distintos? É um único infinito?* *S_3: É, tipo assim, uma maneira de eu entender, que é algo muito grande, é infinito.* *P: Certo… é ilimitado?* *S_3: Então, vamos pensar no universo, ele é grande, daí ele continua, continua e existem galáxias, e continua e continua, entendeu? Então é assim, chega a ser inimaginável.* *P: Certo…* *S_3: Então, quando a gente pensa em infinito, pensamos em algo tão grande que às vezes você não consegue nem imaginar, quanto mais representar, de tão grande que é você compreendeu?*

(Fonte: do autor)

Nesse momento do diálogo, acreditamos que S_3 estivesse mobilizando o TAF_1 que afirma que todo conjunto infinito é ilimitado, entretanto, nas respostas anteriores, S_3 afirma que os segmentos limitados AB e CD possuem infinitos pontos. Deste modo, tento colocar alguns elementos no diálogo a fim de esclarecer essa aparente contradição.

Quadro 37 – diálogo com S_3 a respeito da atividade 3.

P: Para você, não se pode representar um conjunto muito grande, por exemplo, o conjunto dos números reais? *S_3: Representar?* *P: Sim.* *S_3: Não! Porque é muito grande… quer dizer, depende né, vamos supor, vamos pegar o conjunto dos números inteiros* (aqui acredito que a intensão era dizer os números positivos)*, representar algebricamente né, $x > 0$, representou né?* *P: Sim.* *S_3: Quando eu falei representação o professor entendeu o que eu quis dizer, assim no sentido da responsabilidade dessa representação.* *P: Entendi. É possível representar, mas essa representação não dá conta de toda a natureza contida naquele conjunto, é isso?* *S_3: Sim, será que o aluno compreende aquilo* (uma representação)*?* *P: Entendi… mas agora eu queria confirmar se você acredita que todo conjunto infinito precisa necessariamente possuir a característica do ilimitado?* *S_3: Não, ele tem que ter uma característica muito grande, mas não necessariamente ilimitado.* *P: Poderia exemplificar?* *S_3: Ah, eu pensei no segmento né, ele é limitado, mas existem infinitos pontos.* *P: Certo.* *S_3: Mas também existe a reta numérica, que é ilimitada.* *P: Certo.* *S_3: Então… é ilimitada…* *P: Sim é ilimitada…* *S_3: Mas é infinita também… São duas coisas diferentes…* *P: São.* *S_3: Sabe professor, é uma responsabilidade muito grande pensando assim…*

(Fonte: do autor)

Pudemos confirmar com esse diálogo que S_3 admite, então, a existência de conjuntos infinitos limitados. Em diálogos posteriores, S_3 continua em afirmar que não é possível comparar conjuntos infinitos, pois isso seria o mesmo que afirmar que existem infinitos distintos (no sentido de tamanho). Tentamos, na medida do possível, mostrar a possibilidade de existir infinitos de naturezas distintas – o infinito em potência e o infinito em ato – porém existia por parte de S_3 uma polissemia semântica, pois quando tentávamos exemplificar possibilidades de duas naturezas de infinito, S_3 contra-argumentava dizendo não haver critérios de comparação de tamanhos de conjuntos infinitos. Vejamos:

Quadro 38 – diálogo com S_3 a respeito da atividade 3.

P: Depois que você me respondeu, que é possível representar o infinito tanto por conjuntos limitados, quanto por conjuntos ilimitados, será que podemos dizer que existem infinitos de natureza distinta? *S_3: Não! Por que eu acho que não tem como eu comparar um infinito com outro, entendeu?* *P: Entendi.* *S_3: Não existe um infinito 10, que é maior que o infinito 9, por exemplo. Se eu afirmar isso é o mesmo que perder o que se entende por infinito.*

(Fonte: do autor)

Às vezes em que S_3 afirma não existir um infinito 10 e um infinito 9, acreditamos que S_3 esteja negando a possibilidade de uma classificação dos infinitos, assim como foi feita por Cantor, com infinitas classes de infinitos, $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \cdots$. Essa negação por parte se S_3 não se constitui, ao nosso crivo, no fenômeno do achatamento que se traduziu em nossa pesquisa no TAF_5. Pois para que S_3 pudesse mobilizar tal TAF, é necessário supor que todos os conjuntos infinitos possuem a mesma cardinalidade, entretanto, esta possibilidade sequer é considerada por S_3, pois nega qualquer tipo de comparação entre conjuntos infinitos.

Passamos a analisar a resposta na atividade 4.

Acredito que o cachorro estudou análise na reta. (rs). Bom, eu daria a vitória para o menino, ainda mais de fosse num contexto que estivesse explicando aos alunos que existe infinitos números entre 0 e 1. Dizer que 0,999... = 1, causa uma confusão.
(Resposta de S_3 para a atividade 4).

Em um primeiro momento, não ficou claro se S_3 considera a igualdade como verdadeira. Sendo assim, foi necessária uma intervenção para que pudéssemos esclarecer o entendimento de S_3 acerca da igualdade. Acreditamos que a resposta de S_3 apresenta elementos da UR-4.3 que agrupa registros em que os(as) estudantes apresentam divergência semântica ou polissemia semântica quando tentam a igualdade ou diferença entre os números 0,9999... e 1.

Quadro 39 – diálogo com S_3 a respeito da atividade 4.

P: Você acredita que é possível estabelecer essa relação de igualdade, ou seja, $0{,}999 \ldots = 1$*?* *S_3: Em análise a gente fez a demonstração, mas…* *P: Em análise você afirma que é possível demonstrar a igualdade, mas qual é a sua opinião?* *S_3: Antes de estudar, eu diria que não* (não valeria a igualdade)*… Se fosse pensar como aluno né…* *P: Mas o que te faz afirmar que a igualdade não valeria se você fosse pensar "como aluno"?* *S_3: É porque se eu falar que* $0{,}999 \ldots = 1$*, é a mesma coisa que eu falar que não existe o* $0{,}999 \ldots$ *entendeu?* *P: Não, por quê?* *S_3: Porque daí, se [*$0{,}999, \ldots$*] vai ser 1, então não existe os infinitos "9". Entendeu? […] Se a gente assume isso* ($0{,}999 \ldots = 1$)*, é como se a gente tivesse assumindo que é uma coisa, que a gente consegue contar. Você concorda? […] se a gente igualar, a gente tá falando que é 1, então você consegue contar quantos 9 têm ali* (na sequência)*. Então não é infinito! Entendeu o que eu quis dizer?*

(Fonte: do autor)

É possível inferirmos que S_3 apresenta uma argumentação que sugere a impossibilidade de realizarmos uma operação infinita, isto é, não aceita a sequência completada, como nas palavras de Bolzano (1991), um objeto sincrético. Aceitar que 1 é igual a 0,999… é aceitar os infinitos "9" da sequência como um objeto sincrético, o 1! E é justamente essa sincretude que S_3 não aceitou em sua argumentação.

Com a atividade complementar III tentamos apresentar elementos que pudessem desestabilizar as justificativas apresentadas por S_3, primeiramente foi discutida a relação das frações apresentadas na atividade complementar III e uma PG, em seguida, transformamos as frações em dízimas, de modo que pudéssemos relacionar a soma das frações com o número 0,999…

Quadro 40 – diálogo com S_3 a respeito da atividade 4 e complementar III.

P: Vamos pensar na atividade complementar III, esses números $\frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1000}$ *tranformando em dízimas temos quais números?* *S_3:* $0{,}9$ *,* $0{,}09$ *,* $0{,}009$*.* *P: Essa sequência pode ser caracterizada como uma PG?* *S_3: É uma PG!* *P: Qual a razão?* *S_3: A razão é* $\frac{1}{10}$*.* *P: Em que condições é possível realizar a soma de um PG infinita?* *S_3: Agora eu não lembro.* *P: É quando a razão está entre -1 e 1 e difere de 0?*

S_3: Então é possível fazer a soma. *P: Antes, se usarmos a regra da soma de uma PG infinita, gostaria que somassem os 03 primeiros termos da PG em forma de dízima, isto é,* $0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009$*. Dá quanto?* *S_3: Dá 0,999.* *P: Isso, somamos apenas os 03 primeiros termos, se fôssemos continuar somando como você representaria?* *S_3: Daí ficaria* $0{,}999\ldots$ *P: Exatamente. Por outro lado, é possível realizar essa soma usando a regra da soma de uma PG infinita, vamos lá?* *S_3:* (depois de alguns cálculos) *Vai dar 1!* *S_3: Tá errada a minha questão* (aqui o sujeito se refere à resposta inicial de que $0{,}999\ldots$ não poderia ser 1 numa suposta explicação para alunos) *[…] então, lá no ensino médio, é possível você somar infinitas partes e chegar numa coisa finita!*

(Fonte: do autor)

O diálogo acima continua, entretanto, direcionado para a atividade 5. Apresentaremos, então, antes de mostrar a continuidade do diálogo, a resposta de S_3 para atividade 5, que apresenta uma versão do paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, proposto por Zenão.

> *Acredito que numericamente sempre existirá este espaço. Porém visualmente já não será simples de se estabelecer.*
> *(Resposta de S_3 para a atividade 5).*

Note que a resposta de S_3 apresenta elementos da UR-5.1 que agrupa os registros em que os(as) estudantes argumentam que, por mais próximo que Aquiles esteja da Tartaruga, este nunca a alcançará. Os conhecimentos mobilizados de S_3 na resposta da atividade 5 nos apresentam indícios que nos permite caracterizá-los como TAF_3 - Dada uma série infinita convergente, sua soma apenas se aproxima de um número real "L", mas nunca chegará a ser L.

Quadro 41 – diálogo com S_3 a respeito da atividade 5 e complementar III.

P: É possível estabelecermos relação entre a atividade 5 e uma soma de uma PG infinita? *S_3: A distância está diminuindo, dividindo em 10 né? Se a gente fosse representar, é isso que o senhor quer dizer?* *P: Isso, cada uma das distâncias que Aquiles percorreu.* *S_3: Começou em 100 né, depois 10, depois 1…* *P: Isso [*as distâncias percorridas*] dá uma PG?* *S_3: Sim, eu estou multiplicando por $\frac{1}{10}$.* *P: A PG possui soma?* *S_3: Possui, vamos ver […] dá $\frac{1000}{9}$.* *P: O que essa soma representa?*

S_3: A soma desses… (espaços)*?* *P: Sim! Não é o espaço percorrido por Aquiles até a Tartaruga?* *S_3: É! Mas eu não tinha interpretado essa soma como o ponto onde Aquiles alcançou a tartaruga, da mesma forma que interpretei a igualdade $0{,}999\ldots = 1$. Acho que se não fosse sua ajuda, não teria concluído isso sozinha […] Mas professor, porque o senhor me deu essa questão* (atividade 5) *para resolver? Qual o objetivo? O que é que o senhor quer que eu entenda? Foi para eu pensar na questão 0,999… ser 1?* *P: Gostaria que você refletisse a respeito de casos em que temos infinitos números somados…* *S_3: E o resultado dá um número finito?* *P: Um número real!*

(Fonte: do autor)

Neste momento, S_3 tenta entender o objetivo da questão 5, pois os argumentos utilizados para se aceitar que $0{,}999\ldots = 1$ pareciam mais bem sedimentados em S_3, ou acomodados para usar um termo piagetiano. Entretanto, S_3 ainda não tinha associado a soma dos espaços percorridos por Aquiles com o ponto em que se alcança a tartaruga.

Quadro 42 – diálogo com S_3 a respeito da atividade 5 e complementar III.

S_3: Eu não associaria que somando isso daqui, daria exatamente o ponto onde Aquiles alcança a tartaruga, porque para mim, sempre vai ter um espaço, sempre vai existir um espaço, por mais que a gente não conseguisse visualizar, ele existiria […] *Mas pensando assim* (como uma PG) *vai deixar de existir esse espaço? [*aqui S_3 faz uma pergunta retórica que ele mesmo responde*] Vai, porque a gente consegue somar! Consegue chegar num ponto* (ponto de alcance da tartaruga) *né, é isso?* *P: Vamos fazer o seguinte raciocínio: Na atividade 4 sempre vai existir mais um 9 na sequência $0{,}999\ldots$?* *S_3: Sempre.* *P: E, por mais que sempre existe um dígito 9 na sequência, a gente pode concluir que essa sequência é 1?* *S_3: Sim, ahhh, então por mais que sempre vai existir um espaço… eu consigo chegar a um ponto […] Ahhh então se eu afirmar que a sequência 0,999… não é 1 é o mesmo que eu afirmar que não vai existir o ponto de alcance! Entendi. Mas o senhor concorda que há um estranhamento em dizer essas coisas né?* *P: Pode ser…* *S_3: No sentido de que, "sempre vai ter um 9" ou "sempre vai ter um espaço", mais que tudo vai se transformando numa coisa só né, num número principalmente.*

(Fonte: do autor)

Pudemos perceber que S_3, apesar de explicitar estranhamento, entendeu que da mesma forma que foi possível compreender que a sequência 0,999… converge para 1 e que as duas representações significam o mesmo número, também podemos considerar os infinitos espaços decrescentes entre

Aquiles e a tartaruga, e ainda assim realizar a sua soma, “transformando-se numa coisa só, num número" em suas palavras.

Em seguida, foi apresentada a S_3 a atividade 6. Não houve, nesta questão, uma resposta escrita por parte de S_3, porém, será possível descrevê-la por meio dos diálogos captados pelo áudio.

Quadro 43 – diálogo com S_3 a respeito da atividade 6.

S_3: Neste caso aqui (atividade 6)*, ele está perguntando se é possível comparar, no sentido de ter a mesma quantidade de pontos? É isso?* *P: Se é possível admitir a existência de uma relação matemática que garante que o quadrado e um de seus lados possuem a mesma quantidade de pontos.* *S_3: O mesmo tanto que tem aqui* (aponta o lado do quadrado)*, também tem no interior* (do quadrado)*?* *P: Isso.* *S_3: Então… eu tenho infinitos pontos nesse interior do quadrado né, e da mesma forma tenho infinitos pontos no lado do quadrado né… bom vejamos, matematicamente, supondo que o lado do quadrado tenha 10 cm, então no interior é como se eu tivesse 10 vezes mais? Seria isso, 100 cm^2, a área do quadrado… assim se eu tivesse 10 pontos no lado do quadrado eu teria 100 pontos no quadrado todo, é assim, comparar matematicamente assim?*

(Fonte: do autor)

No diálogo apresentado acima, S_3 comete equívocos na estruturação de seus conhecimentos na tentativa de explicar a situação apresentada na atividade 6. Escolhemos dar continuidade no raciocínio apresentado por S_3 para procurar entender se ele assumia que na área do quadrado possuía uma quantidade maior de pontos que um de seus lados.

Quadro 44 – diálogo com S_3 a respeito da atividade 6.

P: Você quer afirmar que não há tantos pontos no quadrado, quanto em algum de seus lados. Você quer dizer que o interior do quadrado possui uma quantidade maior de pontos? *S_3: Sim… é pensando por esse lado sim… teria mais né… mas eu não conseguiria dizer exatamente o quanto a mais, porque estou trabalhando com infinitos pontos né… e como comparar esse infinito como esse né?* *P: Certo.* *S_3: Porque aí se perde o que se entende por infinito né, é como se houvesse escalas de infinitos, né?* *P: E você acredita que não existe escala de infinitos?* *S_3: Não… não me recordo de ter visto algo sobre isso.*

(Fonte: do autor)

Acreditamos que S_3 apresentou características da UR-6.5 que agrupa registros em que estudantes comentam incoerentemente a questão, pois ao mesmo tempo em que S_3 afirmou não ser possível comparar conjuntos infinitos, apresentou argumentação contraditória quando afirmou que o interior do quadrado possui mais pontos que algum de seus lados. Em seguida ao diálogo supracitado, perguntamos a S_3 a respeito dos conjuntos enumeráveis. S_3 lembrou vagamente do termo, mas sem apresentar nenhum exemplo ou caracterização; deste modo, se fez necessário de nossa parte, recapitular as propriedades dos conjuntos enumeráveis. Entretanto, não conseguimos desmobilizar os conhecimentos que resistiram em S_3, mesmo exibindo a definição de relação biunívoca e exemplificações de conjuntos enumeráveis, tais como $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, e de um conjunto não enumeráveis, como $\mathbb{R}$.

Vejamos o quadro resumo das URs identificadas nas respostas de S_3 bem como os candidatos a TAF e os respectivos OE relacionados.

Quadro 45 – URs, TAF e OE identificados nas respostas de S_3.

	URs caracterizadas	TAF mobilizados	OE relacionado
Atividade 1	UR-1.3		
Atividade 2	UR-2.2 UR-2.3	TAF_2	Parte-todo: o todo é sempre maior que uma de suas partes
Atividade 3	UR-3.2		
Atividade 4	UR-4.3		
Atividade 5	UR-5.1	TAF_3	O limite é algo que se aproxima, mas não chega!
Atividade 6	UR-6.5	TAF_4	Estabelecimento de bijeção entre objetos de dimensões distintas

(Fonte: do autor)

6.4 Descrição e análise do sujeito S_4

Passamos a descrever e analisar as respostas de nosso quarto e último sujeito da pesquisa. Lembramos que a primeira questão tem por objetivo investigar se os alunos apresentam noções de infinito que admitem apenas a propriedade do ilimitado, ou se é possível admitir o infinito representado por algo limitado. Vejamos a resposta de S_4:

O diálogo dessa atividade sugere, a meu ver, as diferentes interpretações de infinitos em diferentes áreas, digo, na física, o infinito é ensinado como um termo que representa valores muito grandes, mais especificamente no ensino médio, já na matemática, o conceito de infinito é empregado como um valor ilimitado, no qual não conseguimos imaginar/visualizar por inteiro, apenas supomos ser um valor grande e de difícil representação palpável.
(Resposta de S_4 para a atividade 1).

Na resposta de S_4 é possível encontrar elementos da UR-1.1 que a caracterizam, isto é, que agrupa registros daqueles que afirmam que todo conjunto infinito deve ser necessariamente ilimitado. Esta afirmação de S_4 mobiliza conhecimentos que tipificamos como o TAF_1: *todo conjunto infinito é ilimitado*. Há indícios que este conhecimento foi desmobilizado por meio da resolução das atividades seguintes e confirmado nas próprias palavras de S_4:

Após a realização das outras atividades o conceito de infinito na matemática muda, ao levarmos em conta os segmentos de reta, visto que são delimitados por dois pontos, mas são formados por infinitos.
Esse conflito de conceitos ocorreu ao se pensar em infinitos aprendidos no ensino médio, mais especificamente quando se pede para imaginar o número infinito em uma situação real, esquecendo-se da representação geométrica e, depois, retomando os conceitos aprendidos no curso de matemática, que nos expandem para conceitos mais elaborados.
(Resposta de S_4 para a atividade 1 após realizar outras atividades).

Salientamos que S_4 não reescreveu sua resposta para a primeira questão de modo imediato, foi necessário um caminho que pudesse desestabilizar sua primeira afirmação. Vamos descrever como se deu esse caminho, começando pela resposta de S_4 na atividade 2.

O primeiro segmento, delimitado pelos pontos A e B, é composto por infinitos pontos.
Em relação aos dois segmentos, sabemos que ambos são infinitos, ou seja, são compostos por infinitos pontos. Contudo, se calcularmos as distâncias entre os dois pontos que os determinam, encontraríamos que o segmento CD possui maior tamanho/distância do que AB, o que consequentemente nos leva a concluir maior quantidade de pontos que AB.
(Resposta de S_4 para atividade 2).

Na primeira pergunta da atividade - que indaga se o segmento $\overline{AB}$ possui infinitos pontos – S_4 responde que sim. Esta resposta se enquadra na UR-2.2 que elaboramos. Notemos agora, que na resposta para a segunda pergunta desta atividade, S_4 relaciona a quantidade de pontos existentes nos segmentos a seu tamanho métrico, isto é, a distância entre os pontos iniciais e finais de cada segmento. S_4 usa esse argumento para justificar que o segmento $\overline{CD}$ tem mais pontos que o segmento $\overline{AB}$. Sendo assim, encontramos elementos da UR-2.3 que agrupam registros daqueles que afirmam que o segmento $\overline{CD}$ possui uma quantidade maior de pontos do que o segmento $\overline{AB}$. Este fato, nos fez supor que S_4 apresenta indícios do TAF_2: *a parte é sempre menor que o todo* mobilizado em sua resposta.

Em seguida, foi apresentada a atividade complementar I (ver página 97), a fim de que S_4 pudesse reelaborar seus conhecimentos mobilizados na atividade 2. Vejamos as respostas:

> *a) Sim*
> *b) Sim*
> *c) Após a atividade complementar é possível concluir que o segmento CD não possui mais pontos que o segmento AB. Além disso, percebemos que possuem a mesma quantidade de pontos correspondentes.*
> *(Resposta de S_4 para atividade complementar I).*

Acreditamos que a atividade em si, já foi suficiente - pela resposta escrita apresentada por S_4 - para que S_4 reelaborasse sua afirmação inicial de que o segmento CD possuía mais pontos; deste modo, o diálogo que se seguiu foi apenas para a confirmação da mudança de conhecimentos mobilizados por S_4 na atividade 2.

Quadro 46 – diálogo com S_4 a respeito da atividade 2 e complementar I.

P: Diferentemente de sua resposta da atividade complementar I, na atividade 2, você afirma que o segmento AB possui menos pontos que o segmento CD, por quê? *S_4: Pela ideia da distância.* *P: Mas agora esse critério não está mais adequado?* *S_4: Não! Na verdade, a princípio eu tinha pensado que era o mesmo tamanho pela ideia de infinito. Então se têm infinitos pontos aqui* (mostra um dos segmentos) *ia ser semelhante aos infinitos pontos do outro* (segmento). *Mas eu fiquei em dúvida por causa da distância.* *P: Ficou em dúvida pela medida do tamanho do segmento?* *S_4: É, mas agora eu acho que o tamanho não interfere.*

(Fonte: do autor)

Aproveitamos a resposta apresentada por S_4 no primeiro item da atividade 2, "*O primeiro segmento, delimitado pelos pontos A e B, é composto por infinitos pontos",* para confrontá-la com sua resposta na primeira atividade, os próximos diálogos, portanto, irão mostrar a finalização do caminho percorrido por S_4, anunciado a pouco, e que demonstra como que S_4 conseguiu reescrever sua resposta para atividade 1.

Quadro 47 – diálogo com S_4 a respeito das atividades 1 e 2.

P: No primeiro item da atividade 2, você afirma que o segmento $\overline{AB}$ *possui infinitos pontos. Agora gostaria que você lesse sua resposta na atividade 1.* *S_4: Que eles* (os conjuntos infinitos) *são ilimitados! O conceito de infinito…* (aqui S_4 lê parte de sua resposta na atividade 1). *P: Certo, então na atividade 1 você escreveu que não é possível representar o infinito por algo que seja limitado.* *S_4: É.* *P: Por outro lado, aqui* (na atividade 2) *você afirma que o segmento* $\overline{AB}$ *possui infinitos pontos.* *S_4: É que aqui* (atividade 1) *eu pensei no número infinito, quando a gente fala "imagina um número infinito", a gente não consegue pensar nele, como por exemplo, 100 mil, é maior, sempre é maior, então a gente não consegue delimitar como se fosse o dinheiro, ou alguma coisa assim… a gente não tem noção de como seria essa quantidade. Mas como segmento é possível, então, neste caso, já fura o que eu pensei na primeira.* *P: E você quer fazer alguma observação na primeira resposta em relação a essa situação?* *S_4: Pode ser, quer que eu continue* (a resposta da atividade 1) *como se fosse a continuação da ideia, ou escreve que foi após outras atividades [*que se chegou a conclusão*]?* *P: Pode escrever que foi após outras atividades.*

(Fonte: do autor)

Após essa conversa, S_4 reescreve sua resposta para a atividade 1, como já descrito no início desta seção. Passamos agora para as respostas referentes à atividade 3, que apresentou o diálogo entre os personagens de Galilei a respeito de uma possível relação entre os números naturais e os números quadrados perfeitos.

> *Com base no diálogo dessa atividade, conclui-se que há o mesmo tanto de números naturais em relação aos números quadrados.*
> *(Resposta de S_4 para atividade 3).*

Notemos que na resposta de S_4 é possível encontrar elementos da UR-3.4, que agrupam registros de alunos que admitem a existência de uma relação biunívoca entre os conjuntos da situação apresentada. No diálogo a seguir, será possível identificar que S_4 entende que os conjuntos possuem a mesma cardinalidade, apesar de não explicitar o termo.

Quadro 48 – diálogo com S_4 a respeito da atividade 3.

P: Você poderia comentar sua resposta na atividade 3? Comentar por que você acha que existe o mesmo tanto de números nos dois conjuntos. *S_4: Porque para qualquer número natural você vai conseguir uma correspondência única com os números quadrados.* *P: E você saberia dizer o nome dessa relação correspondência?* *S_4: Enumerabilidade? É isso?* *P: É…* *S_4: O conjunto dos números naturais eu sei que é enumerável!* *P: E dos números quadrados perfeitos?* *S_4: Também, eu acho…* *P: O que garante isso* (enumerabilidade) *é justamente a relação que eu te perguntei… se denomina relação biunívoca.* *S_4: Ah, sim!*

(Fonte: do autor)

Salientamos que o conceito de enumerabilidade de um conjunto, lembrado por S_4, é definido, justamente, quando existe uma relação biunívoca entre o conjunto em estudo e o conjunto dos números naturais. Dizemos neste caso que o conjunto é enumerável.

Na atividade subsequente exibida a S_4, apresenta-se uma situação em que se supõe a igualdade $0{,}999\ldots = 1$. Vejamos o que S_4 responde:

> *Considerando o poder de definir o vencedor dessa disputa, o primeiro personagem teria ganhado, visto que $0,\overline{9}$ é 1 e não atende ao requisito de “maior número que começa com 0”.*
> *(Resposta de S_4 para atividade 4).*

Percebe-se que S_4 admite que a igualdade $0{,}999\ldots = 1$ é válida, apresentando elementos da UR-4.2, porém não entendemos quais foram os argumentos utilizados para dizer que o personagem Snoop saiu vencedor da disputa. Para que fosse sanada a dúvida, tivemos que perguntar, e descrevemos no diálogo a seguir:

Quadro 49 – diálogo com S_4 a respeito da atividade 4.

P: Você argumentou que o primeiro personagem ganhou a disputa, por outro lado, disse que 0,999…=1. Poderia me explicar porque o primeiro personagem ganhou? *S_4: Porque, aparentemente, quando tiver tão próximo, ele* (o primeiro digito da dízima 0,999…) *não vai mais valer 0, já vale 1 quando assumimos infinitas casas.* *P: Entendi. Você argumenta que quando temos infinitos dígitos 9, essa representação* (*0,999…*) *e o 1 é o mesmo número, é isso?* *S_4: É que na minha mente, valeria como se fosse um algoritmo. Como se fosse assim, "ah tende a infinitas casas, ele já não ia considerar o 0,999…", não é mais considerado esse valor. A gente troca pelo 1, então a representação dele seria 1.* *P: Se a representação dele é 1, então, será que podemos dizer que são duas representações para um mesmo número?* *S_4: Sim… mas a gente considera somente o 1.* *P: Você afirma que $0{,}999\ldots = 1$, mas não podemos usar a representação $0{,}999\ldots$? É isso?* *S_4: É o que seria correto né, não aceitar o $0{,}999\ldots$* *P: Por quê?* *S_4: É* (pensando) *eu acho que deveria ter aceitado as duas!* *P: Então você volta atrás em relação a aceitar as duas representações?* *S_4: É eu volto atrás.* *P: $^1/_2$ tem alguma outra representação?* *S_4: 0,5.* *P: As duas representações são aceitas?* *S_4: São. Já entendi.* *P: Certo… e você não teve nenhuma dificuldade em aceitar que $0{,}999\ldots = 1$, por quê?* *S_4: Não tive, porque já vi a demonstração.* *P: Certo.* *S_4: É que a gente vê a demonstração, a gente aceita, é verdade! Tá demonstrado! Mas é que fica aquele conceito de: "nossa será que é mesmo?". É difícil quebrar a ideia que você tem de antes.* *P: Certo, então…* (S_4 me interrompe). *S_4: Não! Você me convenceu já com o exemplo de $^1/_2$ e 0,5. Podemos seguir.* *P: Ok.*

(Fonte: do autor)

Após o diálogo acerca da possibilidade de representações distintas para um mesmo número, S_4 quis refazer sua resposta para a questão 4, como segue:

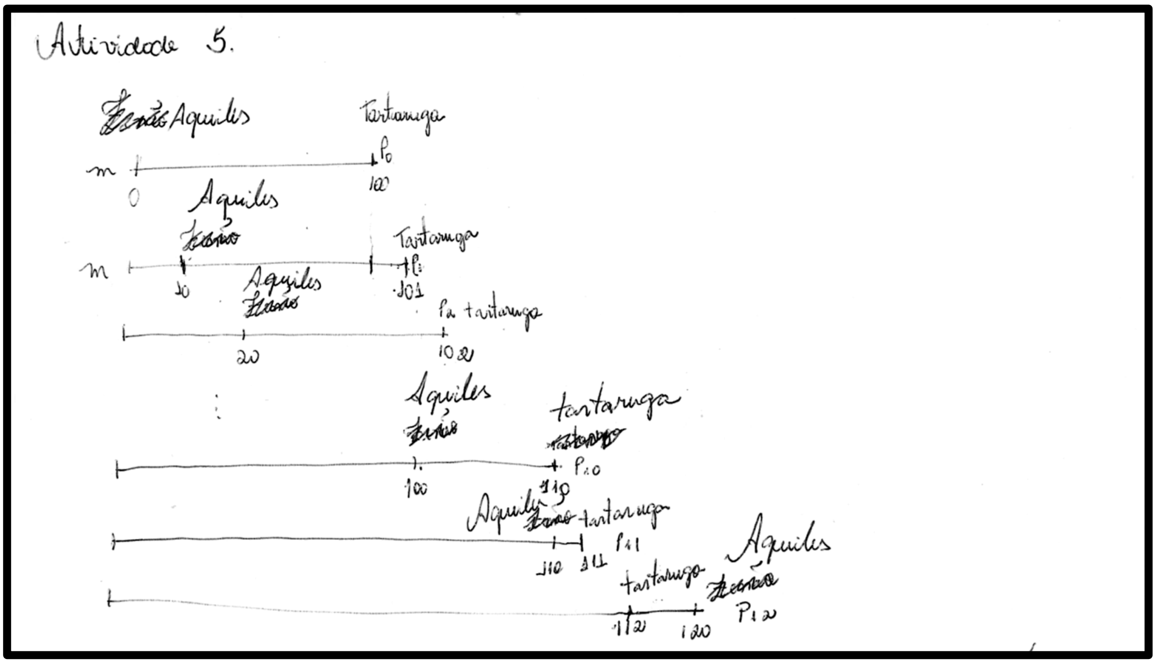
> *Após o comentário do professor João sobre se ambas as representações ½ e 0,5 são aceitas, mudaria a vitória do personagem 1 para o 2, pois o $0,\overline{9}$ será o maior valor e sua representação satisfaz a regra do desafio.*
> *(Resposta de S_4 para atividade 4).*

A próxima resposta analisada é a que se refere à atividade 5, que traz uma versão do paradoxo de Zenão, vejamos a resposta de S_4.

No paradoxo de Zenão, temos que Aquiles ultrapassa a tartaruga no P_{12}, ou seja, quando a tartaruga andar 12 passos de 1m mais os 100m de vantagem, estará na posição 112m. Já Aquiles estará na posição 120m, visto que anda 10 vezes mais que a tartaruga.
(Resposta de S_4 para atividade 5).

A resposta de S_4 para esta atividade apresentou elementos da UR-5.2, que reúne fragmentos em que os estudantes argumentam que Aquiles alcançará a tartaruga, entretanto, não explicitou o ponto de alcance. É possível afirmar que S_4 entende que Aquiles alcança a tartaruga, pois na figura esquemática (Figura 7) para explicar a situação, Aquiles ultrapassa a tartaruga, sendo assim, alcança em algum ponto.

Figura 04 – Esquema de explicação de S_4 para a atividade 5.



(Fonte: do autor)

Nos diálogos acerca de sua resposta, ficou claro para os pesquisadores que S_4 não apresentou resistência com a ideia de Aquiles alcançar a tartaruga, entretanto, não conseguiu de imediato dizer o ponto de alcance, mas que com uma caracterização por meio de uma PG dos espaços percorridos por Aquiles, facilmente S_4 concluiu que o número calculado por meio da soma infinita dos termos da PG era exatamente o ponto de alcance de Aquiles para com a tartaruga. Diante disso, seguiu-se para a última atividade da entrevista semiestruturada, que apresentou uma situação em que se problematiza a respeito da possibilidade de se estabelecer uma relação entre figuras de dimensões distintas. Vejamos a resposta de S_4:

> *Nessa atividade, não é possível afirmar que uma figura possui mais pontos do que a outra figura.*
> *(Resposta de S_4 para atividade 6).*

Diante dessa resposta tentamos investigar por qual motivo S_4 fazia tal afirmação.

Quadro 50 – diálogo com S_4 a respeito da atividade 6.

P: Em sua resposta, você argumenta que não é possível afirmar que uma das figuras possui mais pontos que a outra? Porque não é possível? *S_4: Elas são iguais, pois conseguimos encontrar uma equivalência.* *P: Você quer colocar isso em sua resposta?*

(Fonte: do autor)

Vejamos o complemento da resposta:

> *Além disso, pode-se afirmar que possuem a mesma quantidade de pontos, visto ser possível estabelecer uma equivalência entre elas.*
> *(Complementação da resposta de S_4 para atividade 6).*

Quadro 51 – diálogo com S_4 a respeito da atividade 6.

P: Você conhece alguma relação que garante essa equivalência? *S_4: Eu não me lembro, mas acredito que exista.* *P: Para você não há nenhum desconforto o fato de…?* *S_4: Não! Por mudar de dimensão?* *P: É…* *S_4: Não.* *P: Certo.*

(Fonte: do autor)

Percebemos na resposta de S_4 elementos da UR-6.2, que agrupa registros daqueles que admitem a existência de uma relação biunívoca entre os pontos do quadrado e um de seus lados. Apesar de S_4 não conseguir dizer qual a relação, não insistimos nesse ponto, pois o objetivo desta última atividade era ver se os sujeitos apresentariam algum tipo de surpresa ou resistência em admitir que se possa relacionar biunivocamente figuras de dimensões distintas, o que não ocorreu com S_4. Apresentamos agora o quadro resumo das URs identificadas nas respostas de S_4, bem como os candidatos a TAF e seus respectivos OE relacionados.

Quadro 52 – URs, TAF e OE identificados nas respostas de S_4.

	URs caracterizadas	TAF mobilizados	OE relacionado
Atividade 1	UR-1.1	TAF_1	Infinito ≡ ilimitado
Atividade 2	UR-2.2 UR-2.3	TAF_2	Parte-todo: o todo é sempre maior que uma de suas partes
Atividade 3	UR-3.4		
Atividade 4	UR-4.2		
Atividade 5	UR-5.2		
Atividade 6	UR-6.2		

(Fonte: do autor)

6.5 INFERÊNCIAS DEDUTIVAS

Nesta seção apresentaremos nossas inferências dedutivas – ou metatexto - resultantes da nossa pesquisa. Na primeira atividade da abordagem, que compôs nossa entrevista semiestrurada, queríamos provocar os sujeitos a pensar em conjuntos infinitos, que pudessem ser representados de forma sincopada, finita.

Uma visão construtivista de conjunto, como as apresentadas por Waldegg e Moreno (1991), foi possível identificar em respostas da nossa investigação, como por exemplo, "É impossível ver todos os elementos de *um conjunto com infinitos elementos, o máximo possível seria listar alguns e supor a existência dos outros" ou "o conceito de infinito é empregado como um valor ilimitado, no qual não conseguimos imaginar/visualizar por inteiro"* dos sujeitos S_2 e $S_{4,}$ respectivamente.

Bolzano (1991) afirma que este argumento se baseia na ideia errônea de que, a fim de construir um conjunto que tem elementos $a, b, c, d, \ldots$, estes elementos devem primeiro ser concebido como separado. Por outro lado, uma característica básica do conceito de conjunto, segundo Bolzano (1991), é o conjunto como um objeto sincrético. Enquanto esta representação não é atingida não será alcançada a representação do infinito atual.

As concepções gregas da antiguidade trazem essa característica do ilimitado para o infinito. Jammer (2010) e Fischbein *et al* (1979) expressam essas concepções por meio da potencialidade pura, de processo que não acaba. Essa característica de pensar o infinito como algo sem fim pode ser considerado como um obstáculo epistemológico. Tipificamos os conhecimentos que apresentam essas características pelo TAF_1: *todo conjunto infinito é ilimitado,* e inferimos que S_2 e S_4 apresentaram indícios de mobilização do TAF_1.

Na atividade 2 foi colocada uma situação em que os sujeitos foram levados a comparar dois segmentos de medidas distintas. O critério de comparação para esta atividade foi a quantidade de pontos. Queríamos investigar se os sujeitos apresentariam indícios relacionados ao obstáculo parte-todo, ou se simplesmente conseguiriam concluir que os dois segmentos possuem mesma cardinalidade.

Todos os quatro sujeitos da pesquisa apresentaram indícios do obstáculo parte-todo, como podemos inferir das respostas de todos os sujeitos como, por exemplo, a resposta do sujeito S_4: *"se calcularmos as distâncias entre os dois pontos que os determinam, encontraríamos que o segmento CD possui maior tamanho/distância do que AB, o que consequentemente nos leva a concluir maior quantidade de pontos que AB"*. É possível identificar nessa resposta, que S_4 associa a medida de um segmento à quantidade de pontos que esse segmento possui, logo, para S_4, se um segmento possui uma medida maior do que outro segmento, também irá possuir uma quantidade maior de pontos.

Vimos em nossa fundamentação, que um obstáculo para a compreensão dos conjuntos infinitos é o estabelecimento de uma bijeção entre um conjunto infinito e alguma de sua parte própria. Esse obstáculo para Waldegg (1996) é o mais difícil de superar. A quantidade significativa de pesquisas, tais como, Fischbein et al (1979); Duval (1983); Waldegg e Moreno (1991); Waldegg (1996); Sampaio (2009); entre outros, identificam este obstáculo em suas investigações. Isto nos dá um indicativo do por que deste obstáculo ter sido identificado em todos os sujeitos entrevistados nesta pesquisa. Caracterizamos os conhecimentos relacionados ao obstáculo parte-todo, mobilizados pelos sujeitos como TAF_2: *A parte é sempre menor que o todo*.

Na terceira atividade, também queríamos provocar os alunos a respeito da comparação parte-todo. Na elaboração inicial da abordagem, as atividades 2 e 3 estavam invertidas na sequência, porém em uma das etapas da interdecodificação subjetiva que aconteceu no grupo de pesquisa IFHECEM, resolvermos invertê-las por entender que a atividade 2, apresentaria um grau de dificuldade menor que a atividade 3.

A motivação inicial da inversão das atividades não se comprovou, entretanto, inverter as atividades foi, como no caso do sujeito S_2, crucial para que o TAF_2 pudesse ser desmobilizado. Inferimos que a atividade 3, por apresentar um diálogo que pode ser traduzido numa linguagem algébrica, foi um facilitador para o estabelecimento de uma relação biunívoca entre um conjunto infinito e uma de suas partes próprias.

Nas atividades 4 e 5 ocorreram um fenômeno inverso do observado nas atividades 2 e 3. Todos os sujeitos que mobilizaram conhecimentos que puderam ser tipificados como o TAF_3, foi no momento em que foram confrontados com a atividade 5. Entretanto, foram confrontadas as respostas da atividade 4, que conseguimos, como foi no caso do sujeito S_1, desmobilizar o TAF_3: *dada uma série infinita convergente, sua soma apenas se aproxima de um número real "L", mas nunca chegará a ser L*.

Na atividade 6, queríamos proporcionar uma situação em que imaginávamos ser a mais contra-intuitiva, como exemplificado na fala de S_1 "*O fato de compararmos uma figura unidimensional com uma bidimensional dificulta o pensamento"*. Entretanto, dois sujeitos da pesquisa, talvez já influenciados pelas discussões anteriores não apresentaram tal "espanto" assim como a célebre frase de Cantor "Eu vejo, mas não creio".

Este diálogo com S_2, "*P: Este fato não lhe causou nenhum incômodo? S_2: Não, eu já fiquei chocado naquela atividade anterior … Eu já me surpreendi com aquela"*, e este outro com S_4, "*P: Para você não há nenhum desconforto o fato de…? S_4: Não! Por mudar de dimensão? P: É… S_4: Não."* exemplificam a hipótese de já estarem influenciados.

Um fato curioso que apareceu na descrição e análise do sujeito S_2 foi o momento que o próprio S_2 anuncia um teorema-em-ação mobilizado por ele. Na tentativa de superar o TAF_2 mobilizado na atividade 2, S_2 anuncia "*Eu acho que eu, meio que, acabei criando um teorema em ação aqui para responder essa (c)"*. Como não nos referimos a nenhum dos termos da teorização de Vergnaud durante as entrevistas semiestruturadas, acreditamos que S_2 tenha feito essa relação pelo fato de já ter cursado a disciplina de didática da matemática que aborda elementos dessa teorização.

Além disso, o teorema em ação identificado por S_2, descrito neste fragmento: "*Se tratando de conjuntos infinitos, sendo um conjunto possuindo mais* *elementos que o outro é possível fazer relação elemento a elemento que contemple todos os elementos dos dois conjuntos*", se relaciona com um fenômeno já descrito na literatura, como em Arrigo & D'amore (1999) e D'amore (2004), denotado por fenômeno do *achatamento.* Este fenômeno foi interpretado nesta tese como um obstáculo epistemológico, e argumentamos a esse respeito na seção 3.2. A tipificação deste obstáculo em nossa tese se deu pelo TAF_5: *Todos os conjuntos infinitos possuem a mesma cardinalidade.*

Salientamos que foram apresentados indícios de mobilização de todos os TAF, e cada sujeito apresentou pelo menos dois TAF tipificados nesta tese. Vejamos um quadro-resumo da ocorrência desses TAF mobilizados pelos sujeitos pesquisados, bem como os OE do conceito de infinito na história da matemática.

Quadro 53 – Ocorrências dos TAF nos sujeitos.

Obstáculos Epistemológicos	Sujeitos			
	S_1	S_2	S_3	S_4
Infinito ≡ ilimitado		TAF_1-mobilizado na atividade 1.		TAF_1-mobilizado na atividade 1.
Parte-todo: o todo é sempre maior que uma de suas partes	TAF_2-mobilizado na atividade 2.	TAF_2-mobilizado na atividade 2.	TAF_2-mobilizado na atividade 2.	TAF_2-mobilizado na atividade 2.
O limite é algo que se aproxima, mas não chega!	TAF_3-mobilizado na atividade 5.	TAF_3-mobilizado na atividade 5.	TAF_3-mobilizado na atividade 5.	
Estabelecimento de bijeção entre objetos de dimensões distintas	TAF_4-mobilizado na atividade 6.		TAF_4-mobilizado na atividade 6.	
Constrição ou achatamento da cardinalidade		TAF_5-mobilizado na atividade 2.		

(Fonte: do autor)

Sabemos que é preciso ter cautela para afirmar que um sujeito desestabilizou um TAF. Por isso, acreditamos ser adequado dizer que o sujeito apresentou indícios de desestabilização para o referido conhecimento falso, pois, numa situação diferenciada, ou meses depois, o estudante pode voltar a mobilizar o mesmo conhecimento falso. Ou seja, quando se trata de um conhecimento resistente para os sujeitos, sua desestabilização pode demorar muito tempo, e vai depender das diferentes situações enfrentadas por ele no processo de escolarização.

A resistência dos TAF nos levou a inferir uma relação com OE, já que os OE do conceito de infinito também possui esse caráter de resistência, seja em seu processo de construção na história da matemática, ou na aprendizagem de conteúdos que envolvem os conceitos de infinito.

Afirmamos que nossa hipótese inicial de investigação pôde ser validada na medida em que estabelecemos relações entre os OE do conceito de infinito e os TAF mobilizados nos sujeitos da pesquisa. De fato, a investigação dos OE do conceito de infinito no decorrer da história da matemática contribuiu para que elaborássemos situações de ensino no sentido de Vergnaud, de modo que criássemos um ambiente favorável ao aparecimento dos TAF mobilizados pelos sujeitos da pesquisa. Os conhecimentos mobilizados pelos alunos que foram caracterizados como TAF puderam, em parte, serem desmobilizados. Além disso, essa desmobilização pode ser facilitada quando se usa argumentos baseados nos constructos teóricos da história da matemática, e que foram desenvolvidos para superar tais OE.

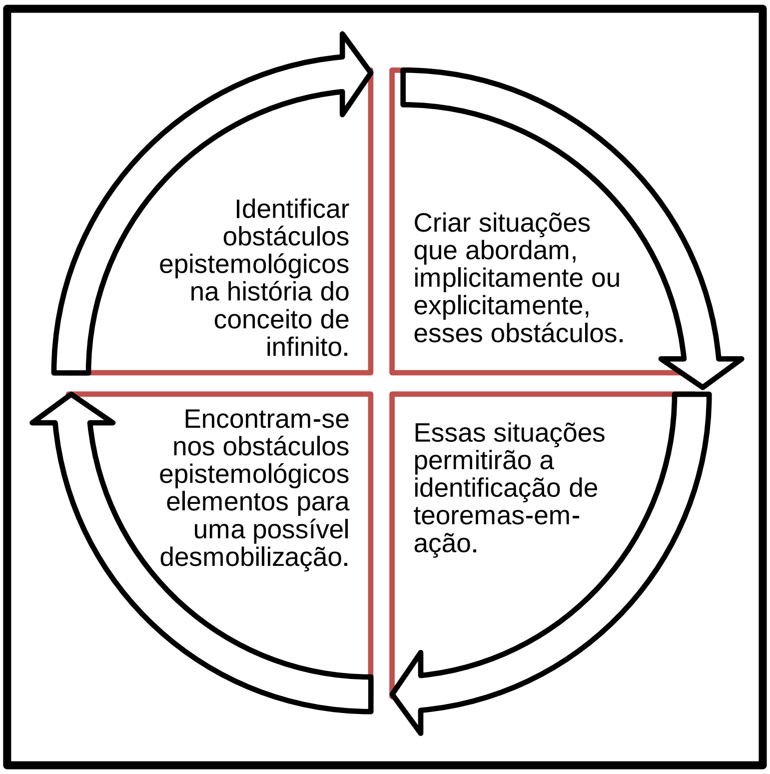
Vejamos um exemplo presente em nossa pesquisa de como esta relação se concretizou, com efeito, identificamos em nosso estudo histórico-epistemológico do conceito de infinito na matemática, o obstáculo epistemológico denominado parte-todo, que segundo Waldegg (1996) e Sampaio (2009), é um dos mais difíceis obstáculos do infinito para superar.

Baseando-se nesse obstáculo e, concomitantemente, considerando os pressupostos das teorizações de Brousseau e Vergnaud expostos no capítulo I, elaboramos as atividades 2 e 3, que abordaram o obstáculo parte-todo de forma implícita. Com a aplicação das atividades 2 e 3, foi possível detectar indícios de mobilização do TAF_2 - *A parte é sempre menor que o todo* - em todos os sujeitos da pesquisa, como pudemos ver nas seções anteriores presentes neste capítulo.

Para tentar desmobilizar o TAF_2 manifestado pelos sujeitos, apresentamos a atividade complementar I - além dos diálogos estabelecidos entre o pesquisador e os sujeitos aqui expostos - que possuía artifícios criados para o estabelecimento de uma relação biunívoca entre os pontos de dois segmentos de reta. Esta estratégia foi baseada em argumentos utilizados por Bolzano (1991) para estabelecer relação biunívoca entre dois conjuntos infinitos, como os que aparecem na seção 2.2.

Usando então, os construtos teóricos da história do conceito de infinito para superar o obstáculo epistemológico que denominamos de parte-todo, pudemos identificamos indícios de desestabilização de conhecimentos falsos mobilizados pelos sujeitos da pesquisa. Sendo assim, finalizamos nossas inferências dedutivas com a representação de uma síntese esquemática das ações que nos permitiu estabelecer relação entre TAF e OE do conceito de infinito na matemática.

Figura 05 – Síntese esquemática da proposta da pesquisa.



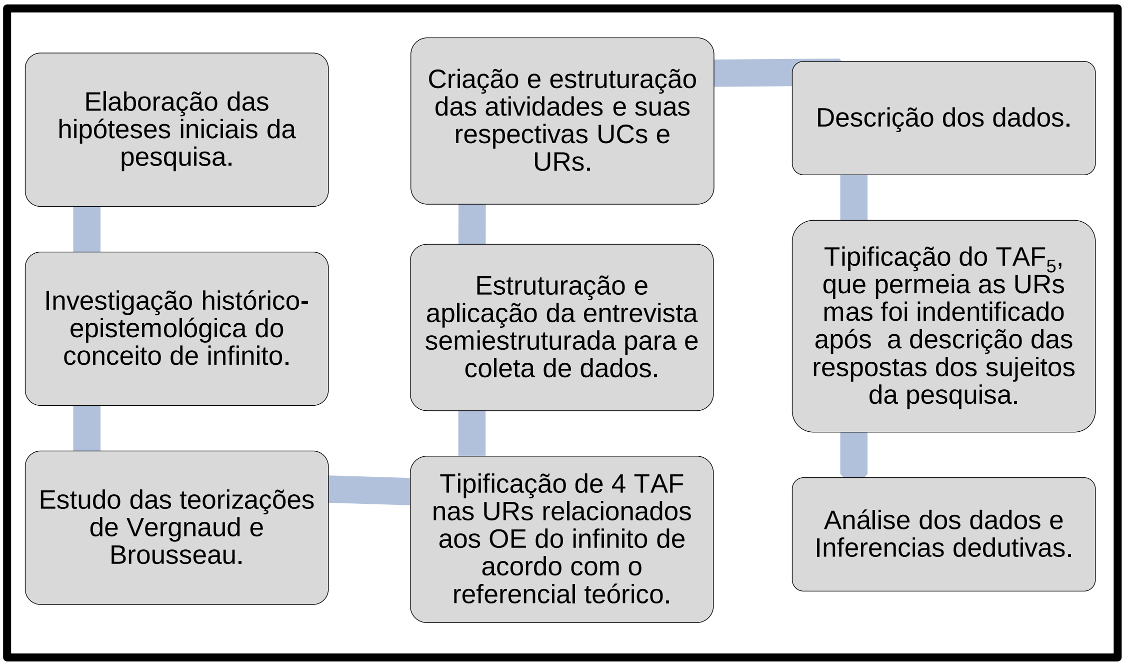
(Fonte: do autor)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Partimos do pressuposto que o conceito de infinito possui obstáculos, tanto no decorrer da história quanto no ambiente escolar, e nossa hipótese de pesquisa era: será que é possível relacionar obstáculos epistemológicos com conhecimentos mobilizados por alunos em situações que envolvam o conceito de infinito? Considerando essa hipótese, nossa pesquisa teve como objetivo estabelecer relações entre OE da história do conceito de infinito na matemática e conhecimentos mobilizados por alunos em situação de ensino no sentido de Vergnaud.

Para alcançar esse objetivo foi necessário realizar as seguintes etapas: identificar OE no decorrer da história no que se refere ao conceito de infinito; criar situações de ensino que problematize esses OE; identificar possíveis teoremas-em-ação falsos (TAF) mobilizados pelos acadêmicos mediante as situações criadas, e, por fim, estabelecer relação entre os OE e os TAF, mobilizados pelos alunos. A seguir reproduzimos a síntese esquemática da constituição da constituição da tese.

Figura 03 – Síntese esquemática da constituição da tese.



Fonte: (do autor)

Em nossa estruturação teórico-metodológica foram apresentadas duas questões que Vergnaud (2003) considera estar no centro da ação pedagógica e didática do professor, são elas: quais elementos devem estar presentes nas situações de modo que favoreça a desestabilização de conhecimentos falsos do aluno? Como ao mesmo tempo propiciar a desestabilização desses conhecimentos do aluno e ainda conduzi-lo a uma situação que focalize aspectos importantes e necessários do conteúdo?

Guiados por essas questões na elaboração a aplicação de nossas atividades, oferecemos aos sujeitos de nossa pesquisa diferentes situações, em que possivelmente eles ainda não haviam vivenciado e, consequentemente, apresentaram dúvidas, hesitações, reflexões e respostas contraditórias. Além disso, apresentamos nas atividades elementos que contribuíram para a desestabilização momentânea de conhecimentos falsos mobilizados, bem como, elementos que puderam orientar aspectos importantes do conceito de infinito na matemática.

Para que fosse possível a estruturação e elaboração das atividades, identificamos em nossa investigação seis personagens e episódios históricos relacionados a obstáculos ou superação de obstáculos do conceito de infinito, são eles:

Quadro 01: Resumo de episódios históricos

PERSONAGENS HISTÓRICOS	ESPISÓDIOS HISTÓRICOS QUE GERARAM OBSTÁCULOS OU RUPTURAS	CONCEPÇÃO ADOTADA DE INFINITO
ZENÃO	**Criação de paradoxos, como o de Aquiles e a Tartaruga:** Medo e repúdio a processos infinitos.	Infinito potencial
ARISTÓTELES	**O infinito apenas como uma categoria filosófica:** O infinito como qualificador de uma ação; Nega a possibilidade de conceber o infinito em ato; O infinito é sempre ilimitado.	Infinito potencial
EUCLIDES	**Noção comum enunciada nos Elementos:** E o todo (é) maior do que a parte.	Infinito potencial
GALILEI	**Escreve a obra *Diálogo Acerca de Duas Novas Ciências*:** Apresenta um paradoxo causado pela tentativa de relacionar números naturais com seus respectivos quadrados perfeitos.	Infinito potencial
BOLZANO	**Apresenta a definição de conjuntos e assume o infinito atual como objeto na matemática**: Estabelece relação intraobjetos, ou seja, estabelece relações biunívocas entre conjuntos infinitos e subconjuntos próprios.	Infinito atual e potencial
CANTOR	**Cria classes de infinito, os transfinitos:** Define enumerabilidade e cardinalidade; Elabora a *Hipótese do Contínuo*; Estabelece bijeção entre objetos de dimensões distintas, causando a famosa frase “eu vejo, mas não acredito”.	Infinito atual e potencial

(Fonte: do autor)

Além disso, foi possível elencar quatro obstáculos epistemológicos relacionados à aprendizagem do conceito de infinito, são eles: *Constrição ou achatamento da cardinalidade*, que considera todos os conjuntos infinitos com a mesma cardinalidade; *Parte-todo*, que se apresenta como a dificuldade em aceitar a bijeção entre dois conjuntos infinitos, sendo um dos conjuntos, parte própria do outro; *Infinito ≡ Ilimitado*, que considera todo e qualquer ente infinito é ilimitado; *O limite é algo que se aproxima, mas não chega,* que se configura em pensar o limite apenas por meio de aproximações e nunca finalizar o processo.

Para elaboração das atividades foram construídas unidades de contexto e unidades de registros que possuíam respostas que estão de acordo com o consenso científico atual, respostas que não estão de acordo com o consenso, ou ainda, respostas que não contemplaram as perguntas contidas nas atividades. Todas as URs, bem como as UCs e as atividades em si, passaram por uma interdecodificação subjetiva no grupo de pesquisa IFHIECEM, esse processo foi importante para o refinamento das atividades antes das entrevistas semiestruturadas.

Foram entrevistados três alunos do último ano de graduação e um recém-formado, todos em Licenciatura em Matemática. Esta escolha foi opção dos pesquisadores para garantir que todos os sujeitos da pesquisa tivessem pelo menos um contato inicial com a disciplina de análise real. As entrevistas foram individuais, nas quais pudemos de maneira estruturada, acompanhar as respostas dos entrevistados em cada atividade e interferir, quando possível e de forma pertinente, para tentar evitar ambiguidades nas respostas dos alunos, bem como confrontá-los com novas situações, oportunizando, assim, que estes pudessem reelaborar seus conhecimentos.

Esta pesquisa, portanto, foi realizada no âmbito das pesquisas qualitativas, tendo como referencial para elaboração das unidades temáticas e análise dos fragmentos de respostas dos alunos, a análise de conteúdo de Bardin. Temos consciência de que esta pesquisa tratou de estudos de casos, e que qualquer inferência em domínios de pesquisas distintos desta tese, faz-se necessário considerar uma (re)adequação metodológica, afim de não cometermos equívocos que possam ser caracterizados como indutivismo ingênuo.

Antes da análise dos dados coletados pela entrevista semiestruturada, tipificamos os TAF com base em nossa URs. Este processo de síntese nos ajudou na tipificação de cinco TAF relacionados OE do conceito de infinito, são eles, TAF_1*: Todo conjunto infinito é ilimitado;* TAF_2*: A parte é sempre menor que o todo;* TAF_3*: Dada uma série infinita convergente, sua soma apenas se aproxima de um número real "L", mas nunca chegará a ser L;* TAF_4*: O quadrado possui mais pontos que um de seus lados, pois tem dimensão superior;* TAF_5: *Todos os conjuntos infinitos possuem a mesma cardinalidade.*

Pudemos constatar indícios de mobilização de todos os TAF nos sujeitos entrevistados, como apresentado no quadro a seguir:

Quadro 52 – Ocorrências dos TAF nos sujeitos.

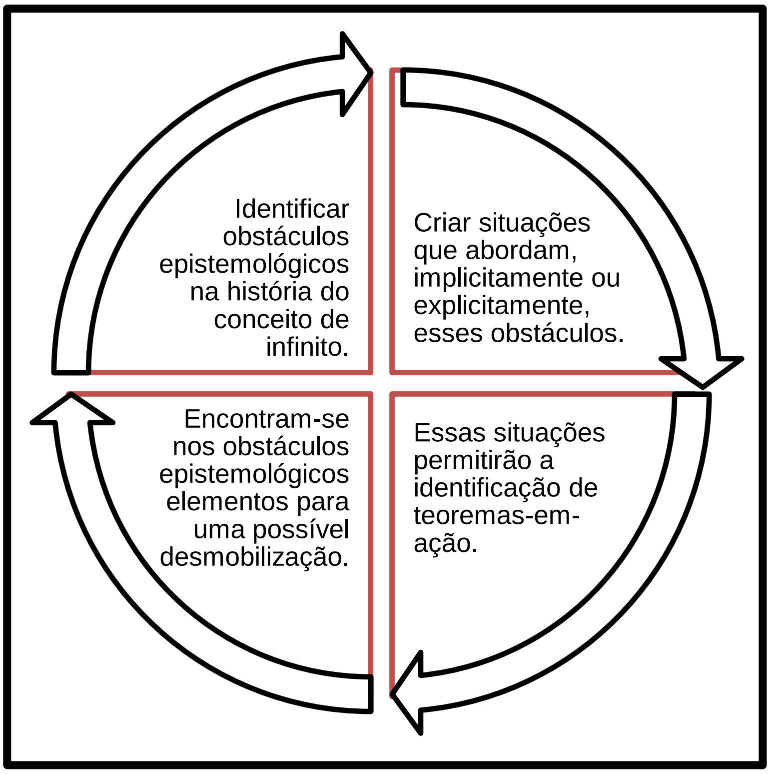
Obstáculos Epistemológicos	Sujeitos			
	S_1	S_2	S_3	S_4
Infinito ≡ ilimitado		TAF_1-mobilizado na atividade 1.		TAF_1-mobilizado na atividade 1.
Parte-todo: o todo é sempre maior que uma de suas partes	TAF_2-mobilizado na atividade 2.	TAF_2-mobilizado na atividade 2.	TAF_2-mobilizado na atividade 2.	TAF_2-mobilizado na atividade 2.
O limite é algo que se aproxima, mas não chega!	TAF_3-mobilizado na atividade 5.	TAF_3-mobilizado na atividade 5.	TAF_3-mobilizado na atividade 5.	
Estabelecimento de bijeção entre objetos de dimensões distintas	TAF_4-mobilizado na atividade 6.		TAF_4-mobilizado na atividade 6.	
Constrição ou achatamento da cardinalidade		TAF_5-mobilizado na atividade 2.		

(Fonte: do autor)

Nossa hipótese inicial de investigação pôde então ser validada na medida em que estabelecemos relações entre os OE do conceito de infinito e os TAF mobilizados nos sujeitos da pesquisa. De fato, a investigação dos OE do conceito de infinito no decorrer da história da matemática contribuiu para que elaborássemos situações de ensino no sentido de Vergnaud, de modo que criássemos um ambiente favorável ao aparecimento dos TAF mobilizados pelos sujeitos da pesquisa. Os conhecimentos mobilizados pelos alunos que foram caracterizados como TAF puderam, em parte, serem desmobilizados. Além disso, essa desmobilização pode ser facilitada quando se usa argumentos baseados nos constructos teóricos da história da matemática, e que foram desenvolvidos para superar tais OE.

Este processo pode ser visualizado na representação da síntese esquemática das ações que nos permitiu estabelecer relação entre TAF e OE do conceito de infinito na matemática.

Figura 05 – Síntese esquemática da proposta da pesquisa.



(Fonte: do autor)

Há indicativos relevantes, como a identificação de conhecimentos falsos relacionados aos OE encontrados nas respostas dos sujeitos entrevistados, que nos levam a considerar a relevância de estudos históricos e epistemológicos a respeito de conceitos-chave da matemática para a formação do professor. O conhecimento de elementos históricos e epistemológicos acerca do desenvolvimento da matemática é um aporte para o professor, pois se traduz em um passo importante na busca de elementos frutíferos na composição de situações de ensino no sentido de Vergnaud, e ainda, pode contribuir em interferências pedagógicas no processo de aprendizagem, de maneira que haja modificações e superações de possíveis TAF mobilizados por alunos.

O elo entre o desenvolvimento histórico do conceito de infinito e o desenvolvimento cognitivo deste conceito, nos sujeitos entrevistados, pode induzir a uma suposição tácita de que existe algum paralelismo entre a ontogênese e a filogênese do conceito de infinito. Não estamos afirmando que o obstáculo epistemológico é algo intrínseco ao conhecimento, mas que OE identificados na história são “apenas” candidatos a obstáculos na aprendizagem dos sujeitos.

Sabemos das limitações pedagógicas da estratégia adotada nesta pesquisa, pois não são todos os conceitos da matemática que o professor conhece a sua história, bem como os possíveis obstáculos que, porventura, existiram na construção do conceito. Além disso, a desmobilização de conhecimentos falsos apresentados por alunos pode não se concretizar com uma situação apresentada, como foi o caso de S_3 diante da situação apresentada por meio da atividade 2.

Como os conhecimentos mobilizados por S_3 foram resistentes, é necessário que S_3 vivencie outras situações de modo a desestabilizar o TAF apresentado. Nesse sentido, é primordial o papel do professor na busca de novas fontes ou reelaboração de atividades para que se concretize tal desmobilização. O tempo para um “amadurecimento” dos conceitos é previsto na teorização de Vergnaud, todavia este retorno para as questões, num intervalo de tempo maior, não foi possível de alcançar nessa pesquisa, pois cada entrevista se deu num único dia em função de nossa delimitação metodológica.

Acreditamos que há caminhos a serem seguidos, como por exemplo, na investigação do campo conceitual do infinito, e esta pesquisa pode servir de *start* para pesquisas futuras neste campo, contribuindo para o aprofundamento das pesquisas em educação matemática.

Por fim, destacamos a relevância dessa pesquisa para subsidiar a ação do professor, no sentido de identificar e possivelmente desmobilizar TAF, em situações de aprendizagem correlatas.

REFERÊNCIAS

ACZEL, Amir D. **O Mistério de Alef:** a matemática, a Cabala e a procura do infinito. Trad. Ricardo Golveia. São Paulo: Ed. Globo, 2003.

AMADEI, Flávio Luiz. **O infinito um Obstáculo no Estudo da Matemática.** 2005. 212f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. PUC, São Paulo, 2005.

ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira; BATISTA, Irinéa de Lourdes. **O Processo de Construção de Abordagens Históricas na Formação Interdisciplinar do Professor de Matemática**. Bolema, Rio Claro, v. 31. n. 57, p. 380-407, abr. 2017.

______________. **Contribuições da história da matemática para a construção dos saberes do professor de matemática.** 2011. 244f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

ARRIGO G.; D'AMORE B. ***"Lo veo, pero no lo creo"*** **Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual**. Educación matemática, México. v. 11, n. 1, p. 5-24, 1999.

BACHELARD, Gaston. **A Epistemologia**. Tradução Fátima Lourenço Godino. Lisboa-Portugal: Edições 70, 2006.

______________. **A formação do espírito científico:** contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Tradução Esteia dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo.** Trad. Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2004.

BATISTA, Irinéa de Lourdes. Reconstruções histórico-filosóficas e a pesquisa interdisciplinar em educação científica e matemática. In: **Pós-Graduação em ensino de ciências e educação matemática: um perfil de pesquisas.** Org. BATISTA, Irinéa de Lourdes; SALVI, Rosana Figueiredo. Londrina: Ed. Eduel, 2009.

BELMONTE, José Luiz; SIERRA, Modesto. **Modelos Intuitivos del Infinito y Patrones de Evolución Nivelar**. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime), México, v. 14, n. 2, p. 139-171, 2011.

BITTENCOURT, Jane. **Obstáculos epistemológicos e a pesquisa em didática da matemática**. Educação Matemática em Revista, Florianópolis, SC, ano 5, n. 6, p. 13-17, 1998.

BOLZANO, Bernard. (1851). **Las paradojas del infinito.** Trad. Luis Felipe Segura. México: UNAM (colección Mathema), 1991.

BROUSSEAU, Guy. **Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques.** Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, p. 41-63, 1989.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da teoria à prática.** Campinas: Papirus, 2009.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de Didática da Matemática**. Trad. Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

D'AMORE, B.; ARRIGO, G.; BONILLA ESTÉVEZ, M.; FANDIÑO PINILLA, M.I.; PIATTI, A.; RODRÍGUEZ BEJARANO, J.; ROJAS GARZÓN, P.J.; ROMERO CRUZ, J.H.; SBARAGLI, S. **Il "senso dell'infinito"**. La matematica e la sua didattica. Bolonha - Itália. Vol. 4, p.46-83, 2004.

DUVAL, R. **L'obstacle de dedoublement des objects mathématiques**. Educational Studies in Mathematics, v. 14, p. 385-414, 1983.

EUCLIDES. **Os Elementos.** Trad. e introdução Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

FISCHBEIN, Efraim. **Tacit Models and Infinity.** Educational Studies in Mathematics, v.48, p. 309-329, 2001.

FISCHBEIN, Efraim; TIROSH, Dina; HESS, P. **The intuition of infinity**. Educational Studies in Mathematics, v.10, n.1, 1979.

GALILEI, Galileo. (1638). **Dialogues Concerning Two New Sciences** (H. Crew & A. de Salvio, Trans.). New York: Dover, 1914.

GIORDAN, André. VECCHI, Gerard de. **As origens do saber:** das concepções dos aprendentes aos conceitos científicos. 2ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

HILBERT, David**. Über das Unendliche**. Mathematische Annallen (Berlin) v. 95, p. 161-190, 1926.

HITT, Fernando. **El infinito en matemáticas y el aprendizaje del cálculo :** Infinito potencial versus infinito real. El Cálculo y su Enseñanza, v. 4, México, 2013.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. A noção de obstáculo epistemológico e a educação matemática. In: **Educação Matemática – uma (nova) introdução**. Machado, S. (Org.) São Paulo: Ed. PUC-SP, 2002.

JAHNKE, Hans Niels. **Cantor's cardinal and ordinal infinities: An epistemological and didactic view.** Educational Studies in Mathematics, v. 48, p. 175-197, 2001.

JAMMER, Max. **Conceitos de espaço:** A história das teorias de espaço na física. Trad. Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Contraponto: Ed. PUC-Rio, 2010.

KOLAR, Vida Manfreda; ČADEŽ, Tatjana Hodnik. **Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity**. Educational Studies in Mathematics, v. 80, n. 3, p. 389–412, 2012.

LIMA. Elon Lages. **Curso de Analise v. 1.** Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2006.

LORIN, João Henrique. **Uma Revolução Científica na Matemática: do Paradigma Pitagórico ao Paradigma Euclidiano.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Centro de Ciências Exatas, UEM, Maringá, 2009.

MADORE, David A. **L'infini en mathématiques** (une présentation élémentaire), 2001. Disponível em: http://www.madore.org/~david/math/infinity.pdf Acesso em: 13 de fevereiro de 2018.

MARIA, Kattou; THANASIA, Michael; KATERINA, Kontoyianni; CONSTANTINOS, Christou; GEORGE, Philippou. **Teachers' perceptions about infinity:** a process or an object? In: Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME),6, 2009, France. Disponível em www.inrp.fr/editions/cerme6, Acesso em: 27 de fevereiro de 2018.

MATTHEWS, Michel. **História, filosofia e ensino de ciências:** a tendência atual de reaproximação. Caderno Catarinense de Ensino de Física, Florianópolis, v. 12, n. 3, p. 164-214, 1995.

MENA-LORCA A.; MENA-LORCA J.; MONTOYA E.; MORALES A.; PARRAGUEZ M. **El obstáculo epistemológico del infinito actual:** persistencia, resistencia y categorías de análisis. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime), México, v. 18, n. 3, p. 329-358, 2015.

MOMETTI, Antonio Luis. **O Infinito e as Metáforas no Ensino de Cálculo**. 2007. 272p. Tese (doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - PUC, São Paulo, 2007.

MOREIRA, Marco Antônio. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área.** Investigações em Ensino de Ciências, v. 7, p. 7-29, 2002.

MORENO, Luis E.; WALDEGG, Guillermina. **The conceptual evolution of actual mathematical infinity**. Educational Studies in Mathematics, v. 22, n. 3, p. 211-231, 1991.

MORRIS, Richard. **Uma breve história do infinito:** dos paradoxos de Zenão ao universo quântico. Trad. Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Ed. Jorge Zahar, 1998.

NOBRE, Sergio. **Leitura crítica da história:** reflexões sobre a história da matemática. Ciência & Educação, Bauru (SP), v. 10, n. 3, p. 531-543, 2004.

REZENDE, P. A. D. de, **A crise nos fundamentos da Matemática e a teoria da Computação.** 1999. Disponível em: <http://www.cic.unb.br/docentes/pedro/sd.php> Acesso em: 15 de outubro de 2017.

REZENDE, Veridiana. **Conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses:** um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino. Tese (doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Para a Ciência e a Matemática, Centro de Ciências Exatas, UEM, Maringá, 2013.

ROCK, Ana Isabel Sacristán. **Dificultades y Paradojas del Infinito: experiencias en un ambiente de exploración computacional.** In: Filloy, Eugenio (org.). Matemática Educativa: Aspectos de la investigación actual, Spanish Edition, p. 262-279, 2003.

SAMPAIO, Patrícia Alexandra da Silva Ribeiro. **Infinito: uma realidade à parte dos alunos do Ensino Secundário.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 22, n. 32, p. 123-146, 2009.

______________. **Concepções de infinito dos alunos do ensino secundário:** contributo da webquest Escher e a procura do infinito. Tese de Mestrado em Educação, ramo da Tecnologia Educativa - Instituto de Educação e Psicologia – Universidade do Minho - Braga-Portugal, 2006.

SANTOS, Eberth Eleutério dos. **O Infinito de George Cantor: uma revolução paradigmática no desenvolvimento da matemática**. Tese (doutorado) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, UNICAMP, Campinas, 2008.

SBARAGLI, Silvia. **Primary school teachers' beliefs and change of beliefs on mathematical infinity.** Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, v. 5, n. 2, p. 49–76, 2006.

SIERPINSKA, Anna. **Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique**. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE, p. 130-147, 1989.

______________. **Obstacles Epistemologiques Relatifs a la Notion de Limite.** Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 6, n. 1, p. 5-67, 1985.

SILVA, Camila de Oliveira da. **Um estudo sobre a noção de limite de progressões geométricas infinitas com alunos de ensino médio.** Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Centro de Ciências Exatas, UFMS, Campo Grande, 2011.

STEWART, Ian. **Em busca do infinito:** uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos. Trad. George Schlesinger. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender? In. **A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.** Org. BITTAR, Marilena, MUNIZ, Cristiano Alberto. Editora CRV, Curitiba, 2009.

____________. A gênese dos campos conceituais. In **Porque ainda há quem não aprende? A teoria.** Org. Grossi, Ester Pilar. Editora Vozes, Petrópolis - RJ, 2003.

____________. **Teoria dos campos conceituais.** In Nasser, L. (Ed.) Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, pp. 1-26, 1993.

____________. **La théorie des champs conceptuels**. Recherche en Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage, vol. 10, n. 2.3, p. 133 a 170, 1990.

WALDEGG, Guillermina. **El acercamiento de Bolzano a Las paradojas del infinito:** implicaciones para la enseñanza (*in)* HOMENAJE A UNA TRAYECTORIA: GUILLERMINA WALDEGG. Irma Fuenlabrada (compiladora), México, 2008.

____________. **Identificação de obstáculos didáticos em el estúdio del infinito actual.** Revista Mexicana de Investigação Educativa, enero-junio, v. 1, n. 1, p. 107-122, 1996.

APÊNDICE

RESPOSTAS DAS ATIVIDADES DIGITALIZADAS

A) Aluno 1:

Atividade 1

É impossível ver todos os elementos de um conjunto com infinitos elementos, o máximo possível seria listar alguns e supor a existência dos outros.

No diálogo o "Ioânio" comete um equívoco ao supor que todos os que ele ~~q~~ consegue listar ~~so~~ formam um conjunto com ~~0~~ infinitos elementos, ele não desenvolveu esse conceito de supor elementos que ele não consegue listar.

Atividade 2

▷ A quantidade de pontos em $\overline{AB}$ é infinita

▷ A quantidade de pontos dos dois seguimentos é infinita, porém, a (~~quantidade de elementos no~~) o conjunto formado por todos os pontos possíveis de $\overline{CD}$ seria maior do que o conjunto formado por todos os ponto $\overline{AB}$.

Atividade complementar II

(A) Sim

(B) Sim

(C) Se tratando de conjuntos infinitos, sendo um conjunto possuindo mais elementos que o outro é possível fazer uma relação elemento a elemento, que contemple todos os elementos dos dois conjuntos.

Atividade 3

Para cada número natural é possível fazer relação com um quadrado perfeito, portanto mesmo o conjunto dos numeros naturais e o conjunto dos quadrados perfeitos sendo infinito, é possível disser que eles teriam a mesma quantida-de de elemento, essa relação entre eles, me garante isso.

Atividade 4

Eu daria a vitória para o menino porque ele representou o maior número possível começando em zero.

Atividade 5

Zenão nunca alcançará de fato a tartaruga.

Atividade complementar III

(A) Sim

(B) $0 < r < 1$

(C) Sim

É $0,9 + 0,09 + 0,009$

4) $0,\overline{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots$

5) 100 10 1 $1/10$ $1/100$ ... (ZENÃO)

Quando fazemos $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{9}{10^n}\right)$ isso resulta em um, mas não é realmente o número 1 é sim o número mais próximo possível de 1 sendo que o mesmo não ultrapassa o 1, considera-se como sendo 1 por ser o número mais proximo possível, mas sua real representação é $0,\overline{9}$.

Atividade 6

É possível fazer uma relação para cada ponto do seguimento com um único ponto do quadrado.

B) Aluno 2:

Atividade 1 - 08/07/17

- Durante minha vida escolar (E.F e E.M.), não me recordo, de que meus
professores em algum momento tenham mencionado o termo infinito.
Foi na graduação este termo passou a ser mencionado com maior frequên-
em matemática
cia.

Fui instigada a pensar (refletir), que entre os números 0 e 1, existem
infinitos termos. E não foi fácil em um primeiro
contato compreender um limite que tende ao infinito. Assim,
como na tirinha, a meu ver, não é "fácil" explicar para
uma criança o conceito de infinito. Este muitas vezes para
alguns é um número, pois há aqueles que alegam e pen-
sam "meu número é o maior de todos, é o infinito"!

Refletindo também sobre conjuntos, como explicar que um conjunto
é infinito e limitado? Trabalhar exemplos, representar, faz com
que alcancemos que o sujeito compreenda o que é o infinito?

Acredito que assim como diferentes sujeitos pensem em dife-
rentes números dois, diferentes sujeitos pensam e acreditam, e
ainda, consigam imaginar diferentes infinitos.

Atividade 2. 04/07/17

a) Acredito ~~xxx~~ que a quantidade de pontos é infinita. Supondo $A=1$ e $B=2$. Teríamos, por exemplo, o ponto 1,5 ; 1,51 ; 1,512 ; infinitos números (pontos) entre 1 e 2.

b) Olhando a representação eu ~~concordaria~~ concluiria que sim, porém, ~~comp~~ como comparar o infinito de AB com o infinito de CD. Seria o mesmo que dizer que existe um infinito maior que outro. E acredito ser um equívoco essa afirmação.

II)

a) Acredito que sim.

b) Não consigo imaginar um ponto em AB que corresponda a mais de um ponto em CD.

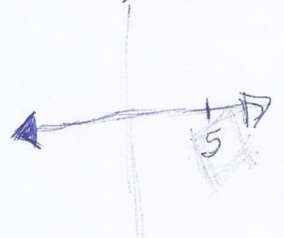
c) Vou conseguir estabelecer infinitos pontos em CD que correspondam a um único em AB. Porém como fazer isto se o CD é maior que AB? Faltaram pontos para corresponder.
Isso contradiz o que disse em b.

Visual

Atividade 3. 04/07/17

- Acredito que nada podemos concluir. Como comparar conjuntos infinitos? Ligando com a atividade 2, como comparar a quantidade inf. de pontos dos segmentos. Existe um infinito maior que outro? Afirmar isto faz cair por terra a função, ou melhor, o que se entende e o que é o infinito.

$2 \times 2 = 4$



∞

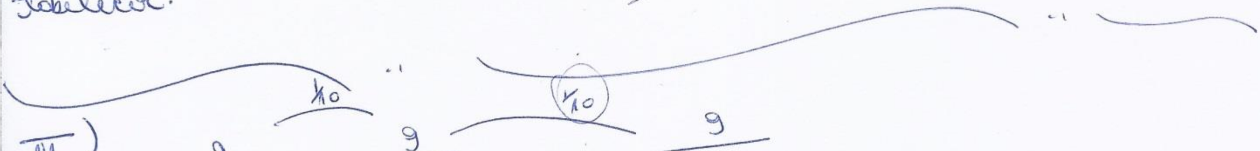
Atividade 4 -

- Acredito que o cachorro estudou análise da reta. (RS)

Bom, eu daria a itória para o menino. ainda mais se fosse em contexto que estivesse explicando aos alunos que existe infinitos nº entre o 0,9 e o 1. Dizer que 0,999..... = 1, causa uma confusão.

Atividade 9.

- Acredito que numericamente sempre existirá este espaço. Porém visualmente já não será simples de ~~[illegible]~~ se es tabelecer.



III)

$\frac{9}{10}$ $\quad$ $\frac{9}{100}$ $\quad$ $\frac{9}{1000}$

0,9 $\quad$ 0,09 $\quad$ 0,009 . . . .

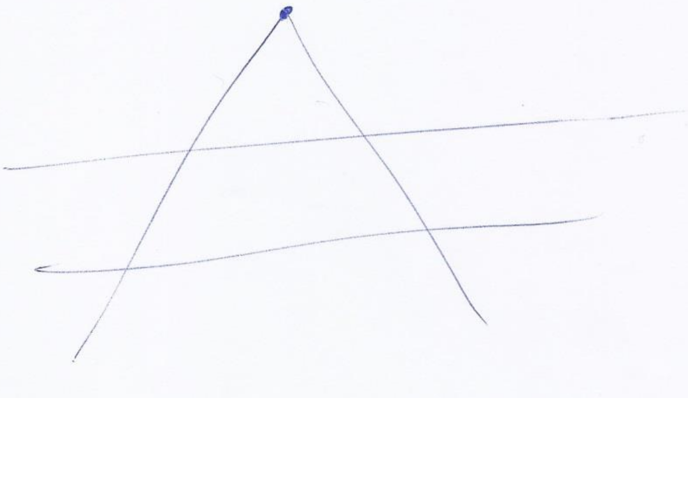
0,999

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{9/10}{1 - 1/10} = \frac{9/10}{10/10 - 1/10} = \frac{9/10}{9/10} = 1$$

100 $\quad$ 10 $\quad$ 1 $\quad$ 0,1

$$S_n = \frac{100}{1 - 1/10} = \frac{100}{9/10} = 100 \cdot \frac{10}{9} = \boxed{\frac{1000}{9}}$$

1	2	3	4	5	. . . .	n
1	4	9	16	25	. . .	n^2



C) Aluno 3:

ATIVIDADE 1:

O diálogo é sobre algo relacionado à "tipos de infinito". Um infinito limitado é possível se consideramos os números reais entre 0 e 1, ou seja, um intervalo limitado, porém, com infinitos números.

ATIVIDADE 2:

ⓐ Acho que a quantidade de pontos é infinita, pois, considerando como um segmento que é limitado de A até B, existem infinitos pontos neste intervalo que constituem este segmento. Sempre entre dois pontos existirá mais um.

ⓑ Como CD é um segmento maior do que AB, pode-se concluir que há mais pontos no segundo segmento, porém acho que é correto também dizer que os segmentos AB e CD possuem infinitos pontos. Neste caso, não comparamos o "tamanho" dos infinitos, mas dizemos que o segmento AB é mais denso do que CD. Por exemplo, supondo que AB é o segmento de 1 a 2 e CD é o segmento de 1 a 3. Podemos dizer que, pensando em $\mathbb{R}$, CD possui mais pontos que AB, porém, os dois segmentos vão possuir infinitos pontos, com a diferença de que AB é mais denso.

ATIVIDADE 2 COMPLEMENTAR:

ⓐ Sim, basta seguir o mesmo processo descrito pelo exercício.

ⓑ Sim, utilizando o mesmo processo dado pela construção do exercício.

ⓒ Apesar dos segmentos AB e CD terem tamanhos diferentes, é possível fazer uma correspondência entre cada ponto de AB com um único ponto de CD e vice-versa. Esta relação pode ser construída conforme o exercício apresentou, por exemplo.

ATIVIDADE 3:

Podemos dizer que a cardinalidade do conjunto ~~dos~~ números naturais e dos quadrados perfeitos é a mesma. Também é possivel criar uma relação de um para um (biunívoca) entre cada número natural com um quadrado perfeito através da função $f(x) = x^2$, desde que a relação seja de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$.

ATIVIDADE 4:

Daria a vitória ao garoto, pois apesar da afirmação ser verdadeira ($1 = 0{,}9999...$) o garoto escolheu o maior número.

ATIVIDADE 5:

Zenão nunca alcançará a tartaruga. Podemos notar que a distância entre ele e a tartaruga está sendo dividida por 10 constantemente. No inicio a distância é de 100m, depois 10m depois 1m, 0,1m, 0,01m, 0,001m e assim consecutivamente. Logo, podemos concluir que, por mais perto que Zenão esteja da tartaruga, ele nunca chegara à posição da mesma.

A partir da ATV 5 COMP. conclue-se que é possível que Zenão alcance a tartaruga, ~~por~~ ao conseguirmos encontrar a soma dos termos da PG infinita (100, 10, 1, 0,1, ...).

ATIVIDADE 5 COMPLEMENTAR:

ⓐ Sim, se considerarmos uma razão $q = \frac{1}{10}$

ⓑ A razão precisa estar entre -1 e 1 e $\neq 0$.

ⓒ

$$\frac{a_1}{1-r} = S_n \rightarrow \text{ATV. 5}$$

$$\frac{100}{1-\frac{1}{10}} = S_n \Rightarrow \frac{100}{\frac{9}{10}} = S_n \Rightarrow 100 \cdot \frac{10}{9} = S_n \Rightarrow \frac{1000}{9} = S_n$$

ATV. 5 COMP.

$$S_n = \frac{9/10}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

A partir da 1ª soma, podemos dizer que Zenão alcança a tartaruga.

ATIVIDADE 6

Acredito que não seja possível encontrar uma relação biunívoca entre o segmento e o quadrado, pois, pelo menos a princípio, não consegui encontrar uma relação satisfatória. O fato de compararmos uma figura unidimensional com uma bidimensional dificulta o pensamento

D) Aluno 4:

Atividade 1.

O diálogo dessa atividade sugeriu, ao meu ver, as diferentes interpretações de infinitos em diferentes áreas, digo, na física infinito é ensinado como um termo que representa valores muito grande, mais especificamente no Ensino Médio. Já na Matemática, o conceito de infinito é empregado como um valor ilimitado, no qual não conseguimos imaginar/visualizar por inteiro, apenas supomos ser um valor grande e de difícil representação palpável.

Após a realização das outras atividades, o conceito de infinito na matemática, mudo, ao levarmos em conta os segmentos de reta, visto que são delimitados por dois pontos, mas é formado por infinitos.

Esse conflito de conceitos ocorreu ao se pensar em infinitos aprendido no Ensino Médio, mais especificamente quando se pede para imaginar o número infinito em uma situação real, esquecendo da representação geométrica e, depois, retomando os conceitos aprendido no curso de Matemática, que nos expandem para conceitos mais elaborados.

Atividade 2.

→ O primeiro segmento, delimitado pelos pontos A e B, é composto por infinitos pontos.

→ Em relação aos dois segmentos, sabemos que ambos são infinitos, ou seja, são compostos por infinitos pontos. Contudo, se calcularmos as distância entre os dois pontos que os determinam, encontraríamos que o segmento CD possui maior tamanho/distância do que AB, o que consequentemente nos leva a concluir que possui maior quantidade de pontos que AB.

Atividade 3.

Com base no diálogo dessa atividade, ~~com~~ conclui-se que há o mesmo tanto de números naturais em relação aos números quadrados.

Atividade Complementares

I) a) Sim

b) Sim

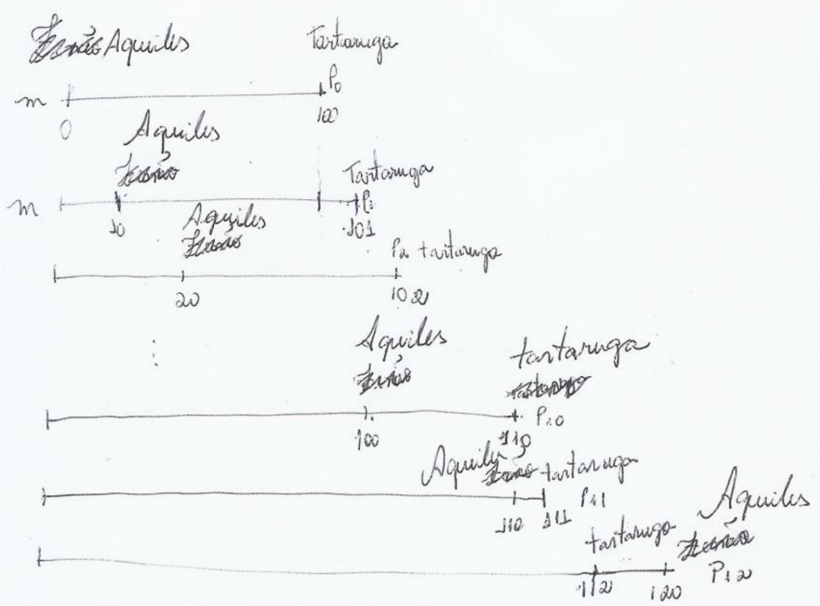
c) Após a atividade Complementar, é possível concluir que o segmento CD ~~possui~~ não possui mais pontos que o segmento AB. Além disso, percebemos que possuem a mesma quantidade de pontos correspondentes

Atividade 4.

Considerando o poder de definir o vencedor dessa disputa, o primeiro personagem teria ganhado, visto que $0,\overline{9}$ é 1 e não atende ao requisito de "maior número que começa com zero".

Após o comentário do Professor João sobre se ambas as representações $\frac{1}{2}$ e 0,5 são aceitas, mudaria a vitória do personagem 1 para o 2, pois o $0,\overline{9}$ será o maior valor e sua representação satisfaz a regra do desafio.

Atividade 5.



No paradoxo de Zenão, temos que Aquiles ultrapassa a ~~targ~~ tartaruga no P_{12}, ou seja, quando a tartaruga andar 12 passos de 1 m mais os 100 m de vantagem, estará na posição 112 m, já Aquiles estará na posição 120 m, visto que anda 10 vezes mais que a tartaruga.

III) - Considere a sequência a seguir:

$$\left(\frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1000}, \dots\right)$$

a) É possível caracterizá-la como um PG?
b) Caso afirmativo, quais as condições para que uma PG infinita possua soma?
c) É possível relacionar esta atividade com a atividade 4 ou com a atividade 5?

Além disso, você poderia somá-la, isto é, explicitar a soma?

$$-1 < r < 1 \; ; \; r \neq 0$$

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

(100, 91, 82, 73, 64, 55, 46, 37, 28, 19, 10, 1, -8, -18, -27

(0, 10, 20, 30, 40, ...)

(100, 101, 102, 103, 104, ...)

$$\left(100, 10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \dots\right)$$

$$S = \frac{100}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{\frac{9}{10}} = \frac{1000}{9}$$

Atividade 6.

Nessa atividade, não é possível afirmar que uma figura possui mais pontos do que a outra figura. Além disso, pode-se afirmar que possuem a mesma quantia de pontos, visto ser possível estabelecer uma equivalência entre elas.

ANEXOS

ANEXO A[79]

Universidade Estadual de Londrina

PECEM

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a):

Este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido refere-se aos dados coletados numa entrevista semiestruturada que está vinculada ao projeto de pesquisa intitulado, provisoriamente, “**o INFINITO: uma relação entre invariantes operatórios e obstáculos epistemológicos”,** de responsabilidade do pesquisador Me. João Henrique Lorin, referente à Tese de Doutorado no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina/PR, sob orientação da Dr.ª Irinéa de Lourdes Batista. O objetivo desta pesquisa é investigar a relação entre os obstáculos epistemológicos do conceito de infinito e os conhecimentos mobilizados pelos alunos em atividades que aborda o conceito de infinito.

Para participar da pesquisa, é preciso que você preencha a autorização para a publicação das respostas e suas respectivas análises. Ao autorizar, estará contribuindo com a pesquisa e concordando com futuras publicações dos dados fornecidos.

Sua decisão de participar é voluntária e você pode se recusar a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento, sem que isso acarrete qualquer ônus ou prejuízo a você. Esclarecemos que os dados pessoais coletados serão utilizados somente para fins de pesquisa e serão tratados com sigilo e confidencialidade, por meio de códigos, a fim de preservar sua identidade.

Eu, (nome completo)____, RG:________________________, declaro ter sido informado(a) e concordo em participar, como voluntário(a), do projeto de pesquisa acima descrito.

____

ASSINATURA

[79] Como já relatamos anteriormente, os dados coletados por meio das entrevistas estão preservados para pesquisas futuras. Qualquer dúvida, escrever para o autor: em_jlorin@fecilcam.br