Universidade Estadual de Londrina

ANA PAULA ZANIM LORIN

COMPETÊNCIAS DOS ALUNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Londrina
2015

ANA PAULA ZANIM LORIN

COMPETÊNCIAS DOS ALUNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida

Londrina
2015

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

L872c Lorin, Ana Paula Zanim.
Competências dos alunos em atividades de modelagem matemática / Ana Paula Zanim Lorin. – Londrina, 2015.
164 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2015.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Modelos matemáticos – Teses. 3. Educação matemática – Teses. 4. Educação baseada na competência – Teses. 5. Estudantes universitários – Avaliação – Teses. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

ANA PAULA ZANIM LORIN

COMPETÊNCIAS DOS ALUNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Prof.ª Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Prof.ª Dra. Eleni Bisognin
Centro Universitário Franciscano– UNIFRA, Santa Maria (RS)

Prof.ª Dra. Karina Alessandra Pessôa da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Londrina (PR)

Londrina, 03 de março de 2015.

Dedico este trabalho a todos os meus familiares, em especial aos meus pais e ao meu marido João Henrique Lorin.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Drª Lourdes Maria Werle de Almeida, pela oportunidade de desenvolver essa pesquisa, pela orientação, pela oportunidade de aprender e iniciar meus estudos como pesquisadora, pela paciência, por compartilhar comigo durante esses dois anos suas experiências e seus conhecimentos.

Aos amigos do GRUPEMMAT (Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática) que tive a oportunidade de aprender muito. Agradeço a todos pela companhia nesses dois anos, pelas discussões nos seminários, pelas contribuições nas discussões dessa pesquisa, pelo apoio nos momentos difíceis. É muito bom fazer parte dessa família.

Às professoras Karina Alessandra Pessôa da Silva e Eleni Bisognin pelas sugestões e críticas que contribuíram para o aprimoramento dessa pesquisa.

Aos amigos que fiz durante os dois anos de mestrado, em especial à Bárbara, Emerson, Daiany, Keila, Paulo, Gabriel, Diego pelo apoio e momentos.

À minha família, em especial a meus pais, pelo apoio e carinho recebido. Agradeço meus cunhados, minhas cunhadas, sogros, sobrinhos(as) pela compreensão e paciência.

Ao meu marido, João Henrique Lorin, um agradecimento mais que especial pelo seu carinho e compreensão durante todos esses anos que estamos juntos e em especial nesses dois anos de mestrado.

À CAPES pelo apoio financeiro.

“O poder só é efetivado enquanto a palavra e o ato não se divorciam, quando as palavras não são vazias e os atos não são brutais, quando as palavras são empregadas para velar intenções, mais para revelar realidades, e os atos não são usados para violar e destruir, mais para criar novas realidades” (HANNAH ARENDT).

LORIN, Ana Paula Zanim. **Competências dos alunos em atividades de modelagem matemática.** 2015. 164 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo investigar “Quais competências são requeridas ou são desenvolvidas pelos alunos com o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática?” Nossa investigação está pautada em pressupostos teóricos da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática. Com o intuito de buscar evidências de competências requeridas e/ou desenvolvidas no desenvolvimento de atividades de modelagem desenvolvemos com alunos do 4º semestre do curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Modelagem Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Cornélio Procópio atividades de modelagem. As atividades foram desenvolvidas seguindo os momentos de familiarização dos alunos com atividades de Modelagem Matemática propostos por Almeida, Silva e Vertuan (2012). A análise dos dados coletados é inspirada na proposta metodológica da Teoria Fundamentada baseada, principalmente, nas indicações de Kathy Charmaz (2006, 2009). A análise dos dados permitiu reflexões do *como* os alunos lidam com as atividades de modelagem, o que foi requerido ou desenvolvido por eles durante a realização das atividades. Assim identificamos no desenvolvimento das atividades realizadas pelos alunos as seguintes competências: *Competência para identificar um problema em uma situação, Competência para definir um problema matemático, Competência para realizar a dedução do modelo matemático, Competência para estabelecer e interpretar relações entre Matemática e situações reais, Competência de identificação dos procedimentos necessários no desenvolvimento das atividades* e *Competência de identificação de possíveis potencialidades da modelagem.* Reconhecemos que refletir sobre o que os alunos “fazem” quando desenvolvem atividades de modelagem pode auxiliar o professor no monitoramento de suas atitudes no decorrer das atividades de modo a contribuir para a aprendizagem dos alunos.

Palavras-chave: Modelagem matemática. Competências em modelagem matemática. Educação matemática.

LORIN, Ana Paula Zanim. **Competencies of students in the mathematical modeling activities.** 2015. 164 p. Dissertation (Master in Science Education and Mathematics Education) - State University of Londrina, Londrina, 2015.

ABSTRACT

This research aims to investigate “What competencies are requerid or are developed by the students with the development of mathematical modeling activities?” Our research is guided by theoretical principles of Mathematical Modeling in the perspective of Mathematics Education. In order to find evidence competencies required and/or developed in the development of modeling activities developed with studentes from 4th semester of Mathematics Degree course in the discipline of Mathematical Modeling in the Federal Technological University of Paraná – Cornélio modeling activities. The curriculum was developed following the moments of familiarizing of the students with mathematical modeling activities proposed by Almeida, Silva and Vertuan (2012). The analysis of data collected is inspired by the methodological approach of Grounded Theory mainly basead on indications of Kathy Charmaz (2006, 2009). The analysis of data enabled reflections of how students cope with the modeling activities, which was required or developed by them in carrying out activities. So identified in the development of the activities performed by the students the following competencies: competence to identify a problem in a situation, competence to define a mathematical problem, competence to make the deduction of the mathematical model, competence to establish and interpret relationships between mathematical and real situations, competence of identification of the procedures necessary in the development of activities and competence of identificacion of possibles potential o modeling. We realize that reflect on what students “do” when developing modeling activities can help the teacher in monitoring their attitudes in the course of activities to contribute to student learning.

Keywords: Mathematical Modeling. Competencies mathematical modeling. Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No âmbito da Educação Matemática, um aspecto que tem interessado professores e pesquisadores diz respeito ao desenvolvimento de competências nos alunos.

De modo geral, segundo Niss e Højgaard (2011), podemos dizer que uma pessoa é competente em um determinado campo quando ela é capaz de dominar aspectos essenciais dentro desse campo, de forma incisiva, com uma visão geral e certeza de julgamento. Desse modo, ser competente significa mais do que simplesmente repetir um método para resolver uma determinada tarefa.

No âmbito da Matemática, por exemplo, o desenvolvimento de competências matemáticas necessita de "ter conhecimento, compreensão, fazer, usar e ter uma opinião sobre a matemática e atividades de matemática em uma variedade de contextos em que a matemática desempenha ou pode desempenhar um papel[1]" (NISS, HØJGAARD, 2011, p.49).

Segundo Santos (2003), para o desenvolvimento de competências é adequado o uso de atividades investigativas e não rotineiras. A modelagem matemática tem sido caracterizada por diferentes pesquisadores da área de Educação Matemática, por exemplo, Almeida (2012), Klüber (2012), como uma atividade que é essencialmente investigativa e, em geral, também requer do aluno procedimentos não-rotineiros.

Assumimos, em nossa pesquisa, a modelagem matemática como uma alternativa pedagógica, em que problemas, em geral não matemáticos, são resolvidos por meio da matemática (ALMEIDA, BRITO, 2005). Nesse sentido, consideramos que uma atividade de modelagem matemática pode ser descrita "em termos de uma situação inicial (problemática) e de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação-problema) e de um conjunto de procedimentos[2]" (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012, p.12).

O desenvolvimento de atividades de modelagem pode estar associado a competências do "fazer" modelagem. Durante as atividades os alunos podem desenvolver tanto competências de modelagem quanto competências matemáticas. Nesse sentido, Galbraith (2012) aborda a modelagem matemática como conteúdo com duas finalidades: a primeira tem como objetivo ajudar os alunos a aprender a fazer modelagem, a segunda, é que ao aprender a modelar, o aluno tem também oportunidade de aprender matemática.

---

[1] Tradução de: […] comprises having knowledge of, understanding, doing, using and having an opinion about mathematics and mathematical activity in a variety of contexts where mathematics plays or can play a role (NISS, HØJGAARD, 2011, p.49).
[2] Esses procedimentos serão descritos no capítulo 2.

O estudo a respeito do desenvolvimento de competências nos alunos, especialmente em nível internacional, como é o caso de Maaβ (2005), Jensen (2007), Blomhøj e Jensen (2003), Henning e Keune (2011), levou-nos a investigar em uma universidade brasileira *como* os alunos lidam com as atividades de modelagem, mais especificamente, quais competências desenvolvem ou lhe são requeridas, levando em consideração os diferentes momentos de familiarização dos alunos com atividade de modelagem matemática.

O desenvolvimento e/ou requerimento de competências associadas ao desenvolvimento de atividades de modelagem pode contribuir, segundo Blum e Ferri (2009), para a formação dos alunos para a cidadania responsável, para a participação do aluno no desenvolvimento da sociedade, possibilitar aos alunos uma compreensão de fenômenos por meio de modelos, e dar suporte à aprendizagem matemática. Diante disso nos propomos a realizar tal investigação.

Levando em consideração *como* os alunos lidam com as atividades de modelagem matemática, nossa questão de investigação consiste em: **Quais competências são requeridas ou são desenvolvidas pelos alunos com o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática?**

Para subsidiar nossas reflexões com relação a essa questão analisamos atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos do 4º semestre do Curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Modelagem Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Cornélio Procópio durante a familiarização dos alunos com as atividades. A análise das atividades foi realizada à luz da Teoria Fundamentada em Dados, segundo as indicações de Charmaz (2009).

Este texto está estruturado em seis Capítulos. Inicialmente, na Introdução, no qual está inserida a presente discussão, apresentamos ideias que orientam nossa pesquisa. No Capítulo 2 abordamos a Modelagem Matemática apresentando nosso entendimento sobre seu uso na área da Educação Matemática. No Capítulo 3 descrevemos nossa opção metodológica, os procedimentos da pesquisa e uma descrição abreviada das atividades que foram analisadas. No Capítulo 4, analisamos a trajetória dos alunos durante o desenvolvimento das atividades à luz da Teoria Fundamentada em Dados apresentando evidências do que podemos inferir com relação às competências requeridas e/ou desenvolvidas pelos alunos no decorrer dos diferentes momentos de familiarização com a modelagem matemática. No Capítulo 5, apresentamos as considerações finais. Por fim, o Capítulo 6 contém as referências bibliográficas que utilizamos. Nos Apêndices organizamos os documentos que auxiliaram no desenvolvimento do trabalho.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Nesse capítulo apresentamos nosso entendimento de modelagem matemática, mais especificamente, a implementação de atividades de modelagem em sala de aula; abordamos ciclos de modelagem discutidos na literatura, a familiarização dos alunos com atividades de modelagem e o "fazer modelagem" dos alunos durante o desenvolvimento das atividades.

2.1 Modelagem Matemática e Modelos Matemáticos

A modelagem matemática teve sua origem na Matemática Aplicada. Neste contexto, surgiram os primeiros conceitos e procedimentos que caracterizam resoluções de atividades de modelagem matemática. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.12), esta "importação" da Matemática Aplicada possibilita para a modelagem matemática na Educação Matemática "[...] diferentes abordagens e têm sido realizadas segundo diferentes pressupostos em relação às concepções pedagógicas que norteiam as práticas educativas e as estruturações teóricas das pesquisas científicas". O objetivo da modelagem matemática, no âmbito da Educação Matemática, não se restringe a buscar um modelo específico, mas principalmente, proporcionar um ambiente para o ensino e a aprendizagem da matemática, durante o processo da busca pelo modelo, a partir de um trabalho com problemas não essencialmente matemáticos.

De acordo com Bean (2012) a modelagem pode ser vista como uma atividade de construir modelos, pois modelos norteiam nossas atividades socioculturais.

Segundo D'Ambrosio (2009), modelos podem proporcionar aproximações da realidade, e podem ajudar a reformular hipóteses, preparar o terreno para novas teorias que sejam mais apropriadas com relação à questão original. Assim, os modelos podem ser reformulados, conduzindo a uma melhor aproximação da realidade. Nesse sentido, Batista (2004) apresenta uma definição para modelo,

> [...] um modelo é uma entidade natural ou artificial, relacionada de alguma forma à entidade sob estudo ou a algum de seus aspectos. Esse modelo é capaz de substituir o objeto (entidade) em estudo (isto é, de servir como uma "*quasi*-entidade" relativamente independente), e de produzir (sobre essa investigação) certos conhecimentos mediados concernentes à entidade sob estudo (BATISTA, 2004, p.466).

Os modelos podem desempenhar finalidades diferentes, por exemplo, "prever o comportamento de um fenômeno, ser demonstrativo de algo (como uma maquete), ter um fim pedagógico (auxiliar na ilustração de algum conceito), ser descritivo de algo, entre outras" (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012, p. 13). Especificamente na matemática, "[...] um modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou estrutura matemática e tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema" (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012, p. 13).

O desenvolvimento de pesquisas a respeito de modelagem matemática já constitui um *corpus* teórico reconhecido. Esse reconhecimento pode ser percebido, por exemplo, no âmbito nacional, por meio da realização de eventos, como CNMEM (Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática) que acontece desde 1999, com encontros bianuais. Já no âmbito internacional, o evento ICTMA (International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications) que acontece desde 1983, com encontros bianuais. Além disso, não podemos deixar de explicitar os artigos, dissertações, teses, publicações em anais, que tratam de modelagem matemática.

Para Galbraith (2011, p.279) "a modelagem matemática, a sua prática, pesquisa e implicações curriculares continuam envolvendo membros da matemática e das comunidades de Educação Matemática[3]". O envolvimento anunciado por Galbraith (2011) pode ser exemplificado pela consolidação da modelagem matemática nos últimos anos como um campo de investigação em programas de pós-graduação ligados à área de Educação Matemática. E ainda pela inclusão de disciplinas nas grades curriculares em algumas licenciaturas em Matemática no Brasil.

Os estudos a respeito de modelagem matemática em Educação Matemática têm diferentes abordagens, realizadas com diferentes pressupostos no que se refere às perspectivas que norteiam as práticas educativas e as estruturas teóricas das pesquisas científicas. Segundo Barbosa (2003),

> O crescimento do interesse por Modelagem Matemática no campo da Educação Matemática tem sido visível nas últimas décadas. Trata-se de um tema sempre presente nos eventos e publicações, suscitando interesse de professores e pesquisadores. Este crescimento tem impulsionado a configuração de uma comunidade brasileira de pesquisadores em Modelagem, cuja configuração parece estar relacionada à produção de dissertações e teses (BARBOSA, 2003, p.84).

[3] Tradução de: Mathematical Modelling, its practice, research, and curricular implications continue to engage members of the mathematical and mathematics education communities (GALBRAITH, 2011, p.279)

Uma justificativa para estudar modelagem matemática, pode ser relacionada à sua implementação nos currículos escolares como perspectiva metodológica, pois a introdução da modelagem matemática na sala de aula é vista como uma possibilidade de estudar os conteúdos matemáticos e também de proporcionar ao aluno a resolução de situações do seu cotidiano.

Partindo do pressuposto de que a implementação da modelagem matemática é uma realidade em algumas licenciaturas, uma questão que se coloca, diz respeito ao modo *como* os alunos lidam com as atividades de modelagem matemática. De modo geral, as atividades de modelagem matemática envolvem uma situação inicial (problemática) e uma solução para o problema denominado de situação final. Para sair da situação inicial e ir à direção da situação final são requeridos procedimentos que proporcionam encontrar uma solução do problema proposto conforme Almeida, Silva e Vertuan (2012).

De acordo com essa perspectiva, os procedimentos utilizados pelos alunos no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática estão associados aos métodos e às ações utilizadas pelos alunos para irem da situação inicial à situação final. Ao se envolver com a atividade o aluno, segundo Almeida (2010), busca informações, identifica e seleciona as variáveis, elabora hipóteses, simplifica, constrói um modelo matemático e usa para analisar a solução, interpreta a solução bem como comunica para outros.

As possibilidades de integração da modelagem matemática em sala de aula se dão de forma plural. Um aspecto que está relacionado a essa integração diz respeito à perspectiva de modelagem matemática adotada. Desse modo, apresentamos cinco perspectivas de modelagem matemática na Educação Matemática que foram sistematizadas por Kaiser e Sriraman (2006).

Em um artigo intitulado *"A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education"*, Kaiser e Sriraman (2006), por meio de uma revisão da literatura, sistematizaram cinco perspectivas da modelagem matemática na Educação Matemática, sendo elas:

- realística: tem como objetivo prático resolver situações-problema autênticas e retiradas da indústria ou da ciência, propiciando aos alunos o desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas aplicados;
- epistemológica: tem por objetivo aspectos orientados à teoria, as situações-problemas são estruturadas para gerarem o desenvolvimento da teoria matemática;

- educacional: objetiva a estruturação e promoção do processo de ensino, integrando situações-problemas autênticas com o desenvolvimento da teoria matemática;
- sócio-crítica: tem por objetivo um entendimento crítico do mundo a nossa volta, as situações devem propiciar a análise da natureza dos modelos matemáticos e seu papel na sociedade;
- contextual: as situações são devotadas à construção da teoria matemática, mas sustentadas nos estudos psicológicos sobre sua aprendizagem.

Kaiser e Sriraman (2006) apresentam uma sexta perspectiva, tratada como uma meta perspectiva, intitulada como modelagem cognitiva, que tem como objetivos:

> a) Análise dos processos cognitivos que ocorrem durante os processos de modelagem e compreensão destes processos cognitivos.
> b) Promoção de processos de pensamentos matemáticos usando modelos como imagens mentais ou até mesmo retratos psicológicos ou enfatizando a modelagem como processo mental semelhante como a abstração ou generalização[4] (KAISER, SRIRAMAN, 2006, p.3).

As perspectivas apresentadas por Kaiser e Sriraman (2006), podem provocar diferentes representações do desenvolvimento de uma atividade de modelagem, que geralmente são representadas por ciclos. Desse modo, surge a necessidade de explorar essas diferentes representações por meio de ciclos que serão apresentadas na próxima subseção.

2.1.1 Ciclos de Modelagem Matemática

Na sala de aula, uma atividade de modelagem matemática, pode ser desenvolvida a partir de uma sequência de etapas. Na literatura fala-se em “ciclos de modelagem”, associados ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Ciclos são representações e alternativas para o desenvolvimento de atividades de modelagem. Apresentamos nesse texto os ciclos de modelagem propostos por pesquisadores como Bassanezzi (2011), Ferri (2006), Maaβ (2006), Almeida e Silva (2012).

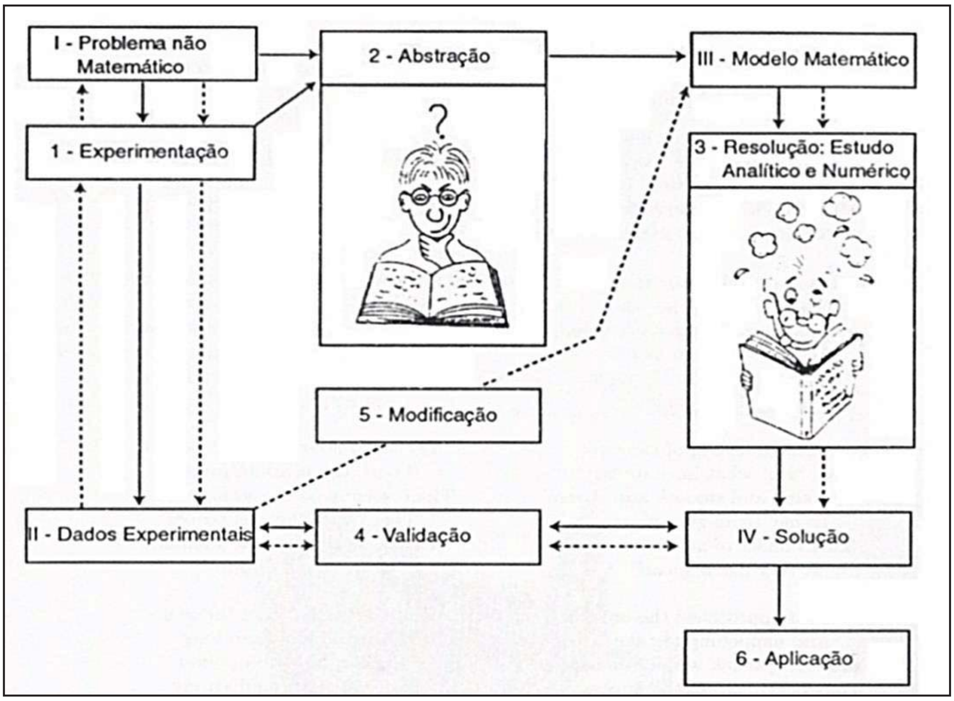
Uma dessas representações é apresentada por Bassanezi (2011), conforme a Figura 2.1. De modo geral, sua representação se dá a partir de um problema não matemático, no qual o aluno realiza um levantamento de dados por meio da experimentação, em seguida formula o modelo matemático, e por fim, chega a uma solução. De acordo com Patrocínio Júnior (2007),

---

[4] Tradução de: Research aims: a) analysis of cognitive processes taking place during modelling processes and understanding of these cognitive processes.
b) promotion of mathematical thinking processes by using models as mental images or even physical pictures or by emphasising modelling as mental process such as abstraction or generalization.

ciclos como o de Bassanazi (2011), estão associados à ideia de que a modelagem matemática está relacionada à resolução de problemas da realidade e por meio dos modelos matemáticos é possível expressar uma solução.

Figura 2.1: Ciclo de modelagem proposto por Bassanezi



Fonte: Bassanezi (2011, p.27).

No ciclo apresentado pela Figura 2.1, as setas contínuas indicam uma primeira aproximação do aluno com a atividade e as setas descontínuas indicam a dinamicidade do desenvolvimento de uma atividade. O autor apresenta as etapas como caracterizadas a seguir para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem.

1) Experimentação: nessa etapa os alunos por meio de pesquisa e experimentação obtêm os dados que serão necessários para a resolução do problema não matemático proposto.

2) Abstração: nessa etapa há a formulação dos modelos matemáticos, sendo assim, são requeridas nessa etapa, seleção de variáveis, problematização, formulação de hipóteses, simplificação.

3) Resolução: nessa etapa o modelo matemático é obtido por meio da substituição da linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente.

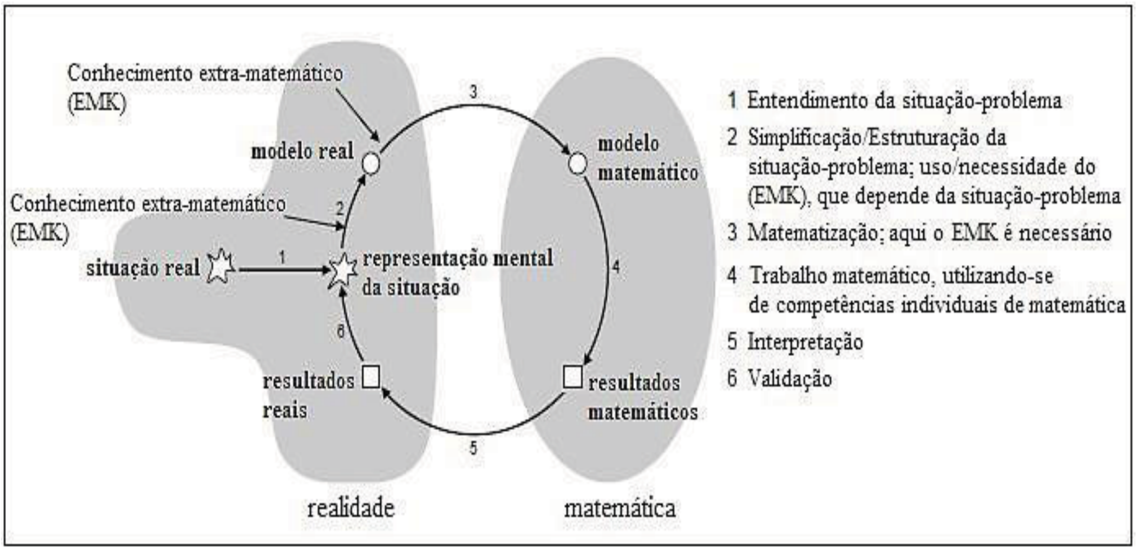
4) Validação: nessa etapa o modelo juntamente com as hipóteses devem ser testados e confrontados com os dados levantados a fim de comparar suas soluções e realizar previsões dos valores obtidos na situação inicial.

5) Modificação: caso ocorra a não aceitação do modelo, nessa etapa, deve-se realizar as modificações necessárias, de modo que o aluno reveja suas hipóteses, os dados coletados, se existem outras variáveis envolvidas, se foi cometido algum erro matemático durante o desenvolvimento do modelo. Caso seja necessário, o desenvolvimento da atividade precisa ser revisado.

6) Aplicação: nessa etapa, o aluno por meio do modelo matemático pode fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender o fenômeno estudado.

Há autores que representam o desenvolvimento de atividades de modelagem fazendo uma separação entre a Realidade e a Matemática, como é o caso das representações apresentadas nas Figuras 2.2 e 2.3. Nessas representações destacamos que as autoras fazem menção às etapas que estão relacionadas com a Realidade e àquelas relacionadas com a Matemática.

Figura 2.2: Ciclo de modelagem sobre uma perspectiva cognitiva



Fonte: traduzido de Ferri (2006, p. 92).

Na representação do ciclo de modelagem de Ferri (2006), conforme Figura 2.2, a autora caracteriza as etapas de modelagem matemática conforme segue.

- Situação real: essa etapa é o primeiro contato com a situação na qual o problema está situado.

- Representação mental da situação: nessa etapa faz-se necessário que o aluno compreenda a situação real decidindo o que pode ser estudado a partir dela, realizando simplificações e tomando decisões a partir das informações obtidas.

- Modelo real: essa etapa possui conexão com a etapa de representação mental da situação, pois o modelo real é construído internamente pelo aluno. Podem-se ter representações externas como fórmulas ou esboços de um modelo real, entretanto isso depende muito das declarações verbais dos alunos ao fazer as representações externas.

- Modelo matemático: nessa etapa os alunos apresentam as representações matemáticas externas por meio de esboços e fórmulas; as declarações dos alunos nesse momento estão mais relacionadas à matemática.

- Resultados matemáticos: nessa etapa os resultados são obtidos por meio do modelo matemático construído para a situação.

- Resultados reais: são obtidos por meio da discussão a respeito dos resultados matemáticos encontrados e sua relação com a situação-problema.

Ferri (2006) ainda ressalta que ao passar de uma etapa para outra, pode-se identificar procedimentos como: entendimento da situação-problema; a simplificação/estruturação da situação-problema ligada à necessidade de conhecimento extra-matemático; a utilização do conhecimento extra-matemático; a matematização; o trabalho matemático utilizando-se de competências individuais de matemática; a interpretação e validação. A autora também considera a ideia de rotas de modelagem dos alunos, ou seja, o desenvolvimento das atividades dos alunos pode ter diferentes caminhos dependendo dos estilos de pensamento de cada um:

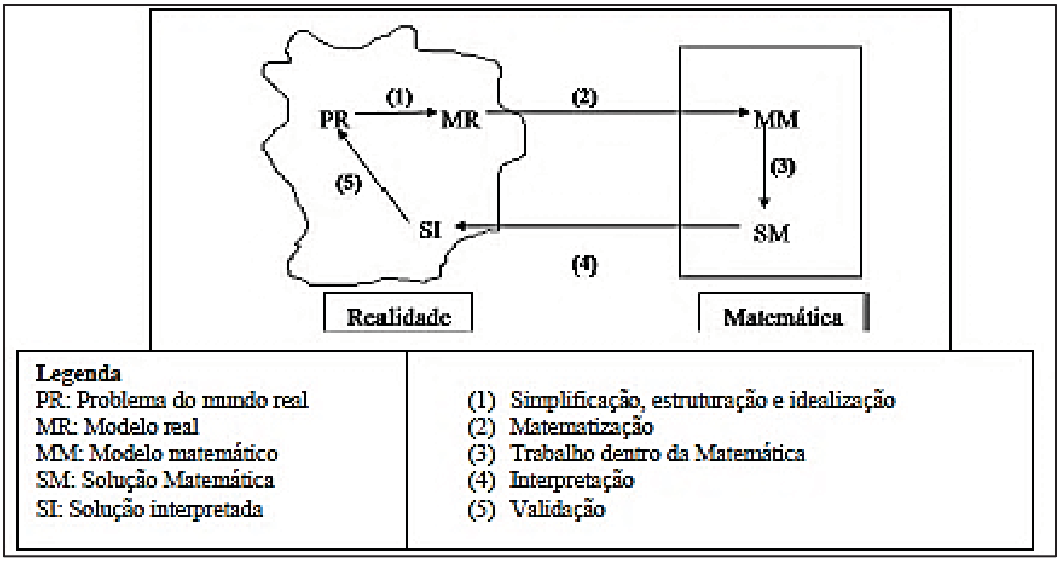
> O indivíduo começa esse processo durante uma certa etapa, de acordo com suas preferências, e pode passar por diferentes etapas várias vezes ou apenas uma única vez, focando em uma certa etapa ou ignorando outras[5] (FERRI, 2007, p. 2083).

Para Patrocínio Junior (2007), indicar os caminhos dos alunos para fazer modelagem, trata-se da consideração das diferentes perspectivas cognitivas individuais que interferem nas possíveis rotas de Modelagem Matemática.

Na representação dada por Maaβ (2006), conforme Figura 2.3, a autora apresenta uma separação entre Realidade e Matemática, em que o desenvolvimento de uma atividade de modelagem começa com um problema do mundo real que precisa ser simplificado, idealizado e estruturado. Em seguida, um modelo real da situação original precisa ser construído. O modelo real é matematizado resultando em um modelo matemático. Faz-se necessário trabalhar matematicamente para que uma solução matemática seja obtida. Essa solução precisa ser interpretada e validada levando em consideração a situação real.

[5] Tradução de: The individual starts this process during a certain phase, according to their preferences, and then goes through different phases several times or only once, focussing on a certain phase or ignoring others.

Figura 2.3: Ciclo de modelagem proposto por Maaβ

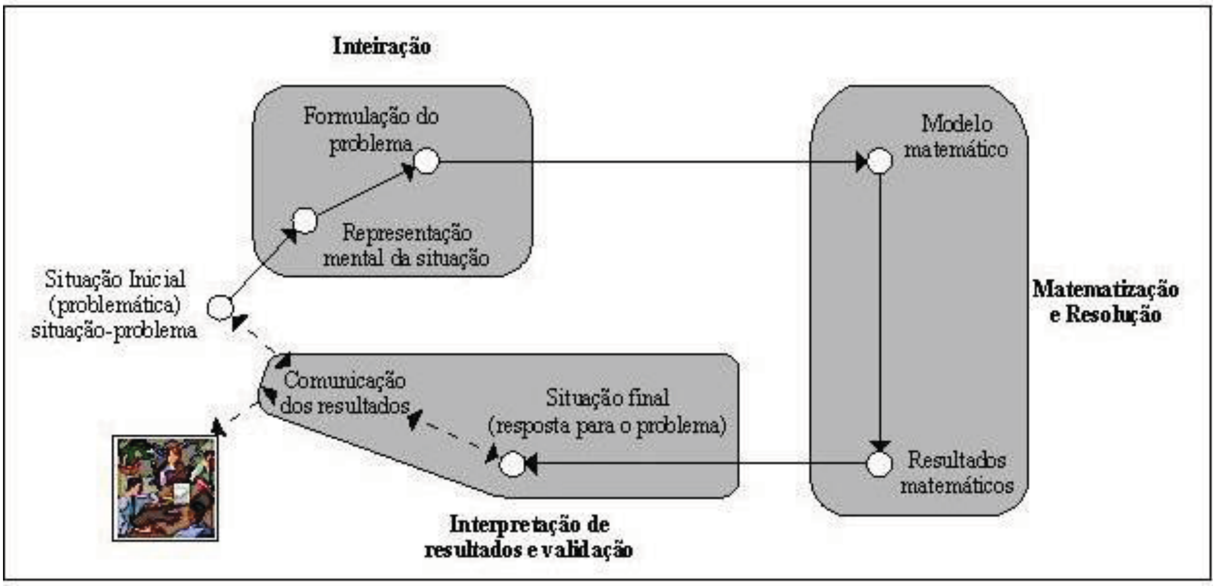


Fonte: traduzido de MAAβ (2006, p.2).

Uma representação do desenvolvimento de uma atividade de modelagem, em que a Matemática está integrada na própria realidade é proposta por Almeida e Silva (2012), conforme a Figura 2.4. Segundo as autoras, uma atividade de modelagem envolve fases como: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.

A inteiração é caracterizada como o primeiro contato do aluno com uma situação-problema. Nessa fase o aluno pode conhecer as caraterísticas específicas do que se pretende estudar, realiza a coleta de dados quantitativos e qualitativos, formula o problema e define as metas para sua resolução. A matematização é caracterizada pelo "processo de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar as descrições matemáticas" (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012, p. 16). A resolução envolve a construção de um modelo matemático que descreva a situação; a interpretação de resultados e validação, "visa, para além da capacidade de construir e aplicar modelos, o desenvolvimento, nos alunos, da capacidade de avaliar esse processo de construção de modelos e os diferentes contextos de suas aplicações" (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012, p. 16).

Figura 2.4: Ciclo de modelagem proposto por Almeida e Silva



Fonte: adaptado de (ALMEIDA, SILVA, 2012, p. 631).

Há representações, como as das Figuras 2.1 e 2.4, em que a Matemática está integrada na própria realidade. De acordo com Patrocínio Junior (2007, p. 845), a Matemática se torna integrada à realidade a partir dos padrões e consensos sociais que estão associados a elementos culturais. Segundo este autor, "o que se entende por contar, medir, calcular, ou por cubo, círculo, hipérbole, depende do olhar humano, não existe por si só, se reificando somente a partir de quem os interpreta" (PATROCÍNIO JUNIOR, 2007, p. 845).

É possível indicar características comuns às representações dos ciclos de modelagem apresentadas. Podemos concluir que todas as representações iniciam com uma noção de um problema não essencialmente matemático que pode ser traduzido em um modelo matemático. Em seguida, o modelo matemático é trabalhado matematicamente e uma solução matemática é interpretada em termos da situação inicial. Destacamos também o caráter cíclico dos ciclos de modelagem, em que as atividades de modelagem não possuem um início ou fim demarcado.

Ressaltamos que há uma multiplicidade de representações de ciclos de modelagem e dos itens que os compõem. Segundo Patrocínio Junior (2007, p.852), "os ciclos mostram-se particulares e condicionados à perspectiva de modelagem adotada".

As diferentes maneiras de representar o desenvolvimento de atividades de modelagem podem suscitar o interesse e o debate a respeito do tema. BlomhØj e Sriraman (2006, apud PERRENET, ZWANEVELD, 2012) afirmam que a representação do desenvolvimento de uma atividade de modelagem está ligada a seis funções: fazer uma análise retrospectiva dos autênticos processos de modelagem matemática; propiciar a identificação dos elementos-chave em competências para fazer modelagem matemática; fazer uma análise retrospectiva do trabalho de modelagem dos alunos; apoiar o trabalho de modelagem dos alunos e a metacognição relacionada; possibilitar o planejamento de cursos, ou projetos de modelagem; definir e analisar um elemento curricular no ensino da matemática. Nesse sentido, Patrocínio Junior (2007), afirma que:

> A diversidade de ciclos vem contribuindo para o entendimento das situações de Modelagem Matemática e suas práticas na sala de aula, assim como, orientando a respeito dos modos de como o professor pode organizar atividades ligadas a esse ambiente de aprendizagem (PATROCÍNIO JUNIOR, 2007, p. 852).

Os ciclos de modelagem podem contribuir para a evidência de possíveis dificuldades dos alunos no decorrer de atividades de modelagem. Blum e Ferri (2009) argumentam que dificuldades podem ser observadas nas etapas de modelagem: construção do modelo (o aluno ignora o contexto e realiza os cálculos); simplificação (o aluno tem dificuldade em fazer suposições) e validação (o aluno não verifica se a solução é razoável e adequada). Crouch e Haines (2004) também afirmam que os alunos têm dificuldades na transição entre o problema do mundo real e o modelo matemático e salientam que essa transição pode parecer mais simples para alunos com mais experiência no desenvolvimento de atividades de modelagem do que para um aluno inexperiente; nesse sentido a transição não é necessariamente simples. Segundo Crouch e Haines (2004),

> Ter sucesso em modelagem matemática envolve a capacidade de mover-se entre o mundo real e o mundo da matemática, tendo ambos em mente. O modelador precisa considerar o problema do mundo real e decidir como matematizá-lo, decidindo quais aspectos do problema do mundo real são relevantes e quais não são - um processo de abstração – e decidir quais princípios matemáticos e técnicas são necessários para resolver o problema, mesmo quando a tecnologia é utilizada na resolução[6](CROUCH, HAINES, 2004, p. 199).

Blum e Ferri (2009), Mischo e Maaβ (2012), indicam que a realização de atividades de modelagem é difícil para os alunos, e que essa dificuldade está relacionada com as demandas

[6] Tradução de: Successful mathematical modelling involves an ability to move between the real world and the mathematical world, bearing both in mind. The modeller needs to consider the real-world problem and decide how to mathematise it, deciding which aspects of the real-world problem are relevant and which not—a process of abstraction—and deciding what mathematical principles and techniques to bring to bear, even when technology is used to apply them (CROUCH, HAINES, 2004, p. 199).

das atividades ou a outras competências não ligadas diretamente à matemática, mas sim a um conjunto mais amplo de habilidades que afetam o desempenho dos alunos.

Levando em consideração que atividades de modelagem podem ser complexas, tanto para os alunos quanto para os professores, é que na literatura, autores como Almeida e Dias (2004), Almeida, Silva e Vertuan (2012), propõem a inserção gradativa de atividades de modelagem, ou seja, o aluno irá se familiarizar com as atividades de modelagem em diferentes momentos. É justamente a respeito dessa inserção o cerne da próxima seção.

2.2 A familiarização dos alunos com modelagem matemática

O desenvolvimento de atividades de modelagem matemática de acordo com Silva, Almeida e Gerôlomo (2011) possibilita que os alunos entrem em contato com práticas que, de forma geral, não são rotineiras na sala de aula, e exigem dos alunos uma postura investigativa com relação à situação-problema proposta pelo professor ou escolhida por eles. Entretanto, os alunos que não estão acostumados a assumirem essa postura investigativa quando entram em contato com uma atividade de modelagem podem sentir-se perdidos em relação ao modo como proceder e em como utilizar a matemática para solucionar o problema em estudo.

Acreditamos que a experiência com atividades de modelagem pode influenciar no caminho percorrido pelos alunos ao se envolverem com tais atividades. Segundo Ferri (2007), a experiência com atividades de modelagem matemática influencia nas ‘rotas de modelagem’[7] dos alunos, pois, conforme o modelador se envolve com as atividades, os caminhos que ele percorre durante o desenvolvimento da atividade podem ser diferentes. Silva, Almeida e Gerôlomo (2011) afirmam que ao enfrentar o novo, o aluno pode familiarizar-se com mecanismos de ação e de reflexão.

> O aluno precisa viver experiências com atividades de modelagem matemática a fim de ‘aprender’ a desenvolvê-las e fazer com que o desenvolvimento da atividade seja orientado pela busca de uma solução para a situação-problema e seja ele próprio o ‘resolvedor’ principal. O aluno tem, portanto, papel central no que se refere à articulação entre definição, investigação e resolução, essencial em uma atividade de modelagem (SILVA, ALMEIDA, GERÔLOMO, 2011, p. 30).

De acordo com Larrosa Bondía (2002, p.21), “experiência é o que nos passa, o que nos acontece, o que nos toca”. Contudo, é relevante que a experiência dos alunos, no caso com

[7]Ferri (2007) caracteriza rota de modelagem como um processo individual de modelagem em que o aluno caminha por diferentes etapas da modelagem várias vezes ou apenas uma vez.

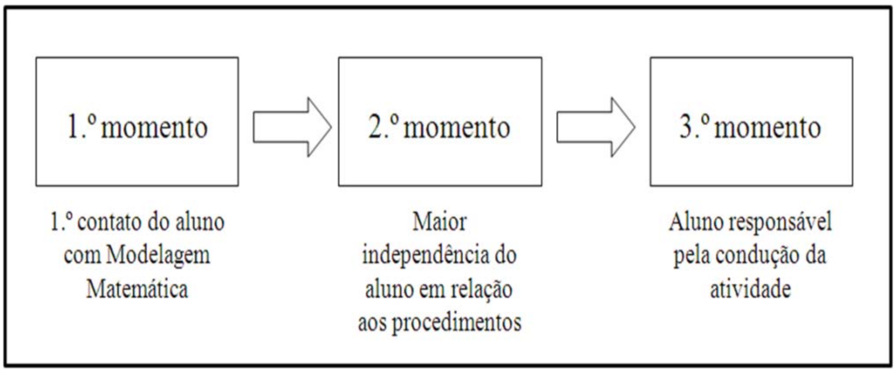
atividades de modelagem, não se baseie em 'guias' prévios apresentados pelo professor. E neste sentido, Larrosa Bondía (2002, p.27) também coloca que "[...] ninguém pode aprender da experiência de outro, a menos que essa experiência seja de algum modo revivida e tornada própria".

De acordo com Silva, Almeida e Gerôlomo (2011) para que o aluno aprenda a desenvolver atividades de modelagem é necessário que "coloque a mão na massa". O aluno tem um papel central na atividade de investigar, analisar a situação inicial para então buscar uma solução para o problema proposto. Assim, na literatura defende-se que a familiarização do aluno com a modelagem pode ser realizada gradativamente, caracterizando três diferentes 'momentos'.

> Em um primeiro momento, o professor coloca os alunos em contato com uma situação-problema, juntamente com os dados e as informações necessárias. A investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático são acompanhadas pelo professor, de modo que as ações como definição de variáveis e de hipóteses, a simplificação, a transição para linguagem matemática, obtenção e validação do modelo bem como o seu uso para a análise da situação, são em certa medida, orientadas e avalizadas pelo professor.
> Posteriormente, em um segundo momento, uma situação é sugerida pelo professor aos alunos, e estes, divididos em grupos, complementam a coleta de informações para a investigação da situação e realizam a definição de variáveis e a formulação de hipóteses simplificadoras, a obtenção e validação do modelo matemático e seu uso para a análise da situação. O que muda, essencialmente, do primeiro momento para o segundo é a independência do estudante no que se refere à definição de procedimentos extramatemáticos e matemáticos adequados para a realização da investigação.
> Finalmente, no terceiro momento, os alunos divididos em grupos, são responsáveis pela condução de uma atividade de modelagem, cabendo a eles a identificação de uma situação-problema, a coleta e análise dos dados, as transições de linguagem, a identificação de conceitos matemáticos, a obtenção e validação do modelo e seu uso para a análise da situação, bem como a comunicação desta investigação para a comunidade escolar (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012, p. 26).

No primeiro e no segundo momento, a orientação e a colaboração do professor é mais intensa, possibilitando ao aluno confiança, independência e autoridade para estudar uma situação-problema, e buscar por meio da matemática uma solução. No decorrer dos diferentes momentos a independência do aluno para o desenvolvimento da atividade vai aumentando, tornando-se responsável por todos os procedimentos no terceiro momento. Esses diferentes momentos são esquematizados na Figura 2.5, por Almeida e Vertuan (2011),

Figura 2.5: Diferentes momentos da modelagem matemática na sala de aula



Fonte: Almeida e Vertuan (2011, p.28).

Embora esse encaminhamento para a integração de atividades de modelagem matemática na sala de aula com alunos ainda não familiarizados não seja uma prescrição rigorosa, de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012), mostra-se adequado em inúmeras experiências realizadas. A realização de atividades de modelagem de forma gradativa pode possibilitar ao aluno o desenvolvimento da habilidade de fazer modelagem. Nesse sentido, o aluno pode desenvolver competências para fazer modelagem no decorrer dos diferentes momentos.

Na próxima seção, apresentamos o que entendemos por competência e competência para fazer modelagem.

2.3 Competência dos alunos em modelagem matemática

2.3.1 Competência em geral

A fim de discutir o que entendemos por competência para fazer modelagem, primeiramente apresentamos considerações a respeito do termo *competência*.

No dicionário etimológico da Língua Portuguesa de Antônio Geraldo da Cunha (2010, p.166) "competência, do latim *competentia sf.:* 'capacidade, habilidade, aptidão, idoneidade'". No dicionário Houaiss (2008, p.775) competência significa "capacidade que um indivíduo possui de expressar um juízo de valor sobre algo a respeito do que é versado; soma de conhecimentos ou de habilidades".

No dicionário de Filosofia da Educação, o termo competência é descrito como: "normalmente, quando alguém é capaz de fazer alguma coisa de maneira que satisfaça minimamente certo padrão ou nível de exigência, diz-se dessa pessoa que é competente naquela dada atividade" (WINCH; GINGELL, 2007, p.41).

Segundo Brasil (2007 apud BROIETTI, 2013) competência pressupõe, num contexto geral, várias habilidades, entretanto, uma habilidade pode vir a ser uma competência num contexto específico, ou seja,

> A diferença entre competência e habilidade, em uma primeira aproximação, depende do recorte. Resolver problemas, por exemplo, é uma competência que supõe o domínio de várias habilidades. Calcular, ler, interpretar, tomar decisões, responder por escrito, etc., são exemplos de habilidades requeridas para a solução de problemas de aritmética. Mas, se saímos do contexto de problema e se consideramos a complexidade envolvida no desenvolvimento de cada uma dessas habilidades, podemos valorizá-las como competências que, por sua vez, requerem outras tantas habilidades (BRASIL, 2007, p.19 apud BROIETTI, 2013, p. 54).

Weinert (2001 apud MISCHO; MAAβ, 2012), define competência como:

> as habilidades e capacidades cognitivas prontamente disponíveis ou aprendidas que são necessárias para a resolução de problemas, bem como a motivação associada, capacidades e habilidades volitivas e sociais, que por sua vez são necessárias para o problema bem sucedido e responsável pela solução de um problema em situações variáveis [8](WEINERT, 2001 apud MISCHO; MAAβ, 2012, p.4).

Frey (1999 apud MAAβ, 2006, p.116), define competência como “a capacidade de uma pessoa... de verificar e julgar a exatidão dos fatos, respectivamente, em relação à adequação de demonstrações e ao seu uso em tarefas pessoais[9]”.

De acordo com Blomhøj e Jensen (2003, p. 126), “competência é definida como a prontidão perspicaz de alguém para agir em resposta aos desafios de uma determinada situação[10]”. Esses autores apresentam uma característica dessa definição que torna a competência direcionada para ação. Argumentam que a “ação” precisa ser interpretada de forma ampla, assim como a “prontidão para agir” na definição de competência “poderia implicar uma decisão positiva de se abster de praticar um ato físico, ou indiretamente ser

---

[8] Tradução de: Weinert (2001, apud MISCHO; MAAβ, 2012) defines competence as "the readily available or learnable cognitive abilities and skills which are needed for solving problems as well as the associated motivational, volitional and social capabilities and skills which are in turn necessary for successful and responsible problem solving in variable situations”.

[9] Tradução de: Frey defines competency in general as follows: “Competence is the ability of a person … to check and to judge the factual correctness respectively the adequacy of statements and tasks personally and to transfer them into action.” (Frey, 1999 apud MAAβ, 2006, p.116)”

[10] Tradução de: This phrasing coheres with our understanding of the concept competence, which we will define as someone’s insightful readiness to act in a way that meets the challenges of a given situation (BLOMHØJ; JENSEN, 2006, p.116).

guiada pela consciência de alguém de certas características em uma determinada situação[11]" (JENSEN, 2007, p. 142).

Santos (2003) apresenta algumas características que estão associadas ao conceito de competência, relacionadas ao contexto da sala de aula e ao processo de aprendizagem, sendo elas:

- Ação: refere-se ao processo de utilizar conhecimentos já aprendidos diante de uma situação;

- Situação com certo nível de complexidade: exige a ativação de recursos próprios do aluno para uma tomada de decisões conscientes dos conhecimentos que deverão ser mobilizados frente a uma dada situação, não rotineira.

- Integração: a atividade deve ser desenvolvida como um todo e não como uma junção de partes, desse modo, o aluno ativa conhecimentos, capacidades e atitudes, entre outros, recursos esses que não podem ser observados separadamente.

De acordo com Mischo e Maaβ (2012), o desenvolvimento de competências não está atrelado apenas às capacidades e habilidades, mas como os usos dessas capacidades e habilidades refletem na vida e na vontade de colocá-las em ação. Assim como ocorre o desenvolvimento de competências num âmbito geral, podemos pensar no desenvolvimento de competências relacionadas ao "fazer modelagem", ou seja, competência para fazer modelagem, que é abordado por autores como, Blum e Kaiser (1997 apud Maaβ 2005), Blum e Ferri (2009), Henning e Keune (2011), Jensen (2007), Maaβ (2005, 2006), Mischo e Maaβ (2012) e que discutimos na próxima seção.

2.3.2 Competência para fazer modelagem matemática

As visões acerca do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática podem estar relacionadas, segundo Maaβ (2006) com a competência para fazer modelagem, produzindo dessa forma, muitas considerações a respeito do termo na literatura.

Blum e Kaiser (1997 apud MAAβ, 2005) afirmam que ter competência para fazer modelagem matemática requer um conjunto do que os autores chamam de subcompetências. Essas subcompetências dizem respeito às etapas apresentadas no ciclo de modelagem. O aluno se torna um modelador experiente quando perpassa por todas as subcompetências. Os autores caracterizam estas subcompetências de modelagem matemática como sendo:

---

[11] Tradução de: [...] could imply a positive decision to refrain from performing a physical act, or indirectly being guided by one's awareness of certain features in a given situation (JENSEN, 2007, p. 142).

> - Competência para entender o problema real e construir o modelo baseado na realidade;
> - Competência para construir um modelo matemático de um modelo real;
> -Competência para resolver questões matemáticas em um modelo matemático;
> - Competência para interpretar resultados matemáticos numa situação real;
> - Competência para validar a solução[12] (BLUM; KAISER 1997 apud MAAβ, 2005, p.62).

De acordo com Henning e Keune (2011), competência para fazer modelagem inclui habilidades, atitudes e a disposição dos alunos em todo o processo de modelagem. Desse modo, competência para fazer modelagem inclui a estruturação, matematização, a interpretação e a resolução de problemas e inclui também habilidades para trabalhar com modelos matemáticos. Com base nessa visão de competência para fazer modelagem, os autores apresentam que o seu desenvolvimento se dá em três níveis:

> Nível 1: Reconhecimento e compreensão da modelagem
> Nível 2: Modelagem independente
> Nível 3: Meta-reflexão na modelagem (HENNING, KEUNE, 2011, p. 3).

No nível 1, o aluno deve demonstrar a habilidade de reconhecer e descrever o desenvolvimento de uma atividade de modelagem, distinguindo e localizando cada uma das etapas da atividade.

No nível 2, o aluno deve ser capaz de analisar e estruturar os problemas, relacionar as variáveis, adotar diferentes perspectivas, construir o modelo matemático, trabalhar matematicamente com o modelo, interpretar os resultados e validar o modelo e todo o processo. "Os alunos que tenham atingido este segundo nível são capazes de resolver um problema de forma independente[13]" (HENNING, KEUNE, 2011, p. 4).

No nível 3, ocorre a junção dos dois níveis anteriores, contudo nesse momento o aluno deve conseguir reconhecer a atividade de modelagem como parte da realidade, de analisar criticamente a atividade desenvolvida, de caracterizar os critérios de avaliação do modelo, de refletir sobre a finalidade da modelagem e refletir sobre a aplicação da matemática.

---

[12] Tradução de: 1. Competencies to understand the real problem and to set up a model based on reality.
2. Competencies to set up a mathematical model from the real model.
3. Competencies to solve mathematical questions within this mathematical model.
4. Competencies to interpret mathematical results in a real situation.
5. Competencies to validate the solution (BLUM; KAISER 1997 apud MAAβ, 2005, p.62)

[13] Tradução de: Pupils who have reached this second level are able to solve a problem independently (HENNING, KEUNE, 2011, p.4)

O estudo empírico de Maaβ (2006) apresentou evidências de que os alunos precisam de competências para a realização das etapas individuais do processo de modelagem e que também há outras competências que não estão intimamente ligadas a uma etapa específica de modelagem, mas sim que são necessárias em todo o processo. Desse modo, de acordo com Maaβ (2006), competência para fazer modelagem inclui habilidades e capacidades para executar processos de modelagem de forma adequada e orientada, e ainda, pré-disposição dos alunos em colocar essas habilidades e capacidades em ação. De acordo com a autora as competências de modelagem contêm:

> A. Competências para realizar os passos individuais do processo de modelagem:
> - Competências para entender o problema real e configurar um modelo baseado na realidade.
> - Competências para a construção de um modelo matemático a partir de um problema não matemático.
> - Competências para resolver questões matemáticas dentro deste modelo matemático
> - Competências para interpretar os resultados matemáticos em uma situação real.
> - Competências para validar a solução.
>
> B. Competências de modelagem metacognitivas
> C. Competências para estruturar problemas do mundo real e trabalhar seguindo em direção para uma solução;
> D. Competências para argumentar em relação ao processo de modelagem e para escrever esta argumentação;
> E. Competências para ver o que a matemática oferece de possibilidades para a solução de problemas do mundo real e considerar essas possibilidades como adequadas[14] (MAAB, 2006, p.139).

Maaβ (2006) afirma que competência para fazer modelagem abrange competências além das relacionadas às etapas do processo de modelagem, considerando que é importante o desenvolvimento de competências de modelagem metacognitivas, isto é, o aluno precisa pensar o desenvolvimento da atividade, analisar criticamente e, então conduzir sua própria aprendizagem; o desenvolvimento de competência na argumentação matemática, ou seja, o

[14] Tradução de: A. Sub-competencies to carry out the single steps of the modelling process
- Competencies to understand the real problem and to set up a model based on reality.
- Competencies to set up a mathematical model from the real model.
- Competencies to solve mathematical questions within this mathematical model.
- Competencies to interpret mathematical results in a real situation.
- Competencies to validate the solution.

B. Metacognitive modelling competencies
C. Competencies to structure real world problems and to work with a sense of direction for a solution
D. Competencies to argue in relation to the modelling process and to write down this argumentation
E. Competencies to see the possibilities mathematics offers for the solution of real world problems and to regard these possibilities as positive (MAAβ, 2006, p. 139).

aluno precisa compreender a linguagem matemática que está utilizando para resolver o problema.

Ainda, Maaβ (2006) em suas análises constatou uma ligação entre competência para fazer modelagem e as atitudes em relação a exemplos de modelagem matemática. Nesse sentido, idealizou quatro tipos de modeladores, sendo eles:

- O modelador realidade-distante: esses modeladores possuem uma atitude positiva em relação a problemas de matemática livres de contexto. Eles rejeitam exemplos de modelagem e não possuem interesse nos contextos dos problemas do mundo real. De acordo com Maaβ (2006), os modeladores realidade-distante não possuem competência para resolver problemas relacionados com contexto, assim eles têm dificuldades com a construção do modelo real, com a validação e, parcialmente, com a interpretação.

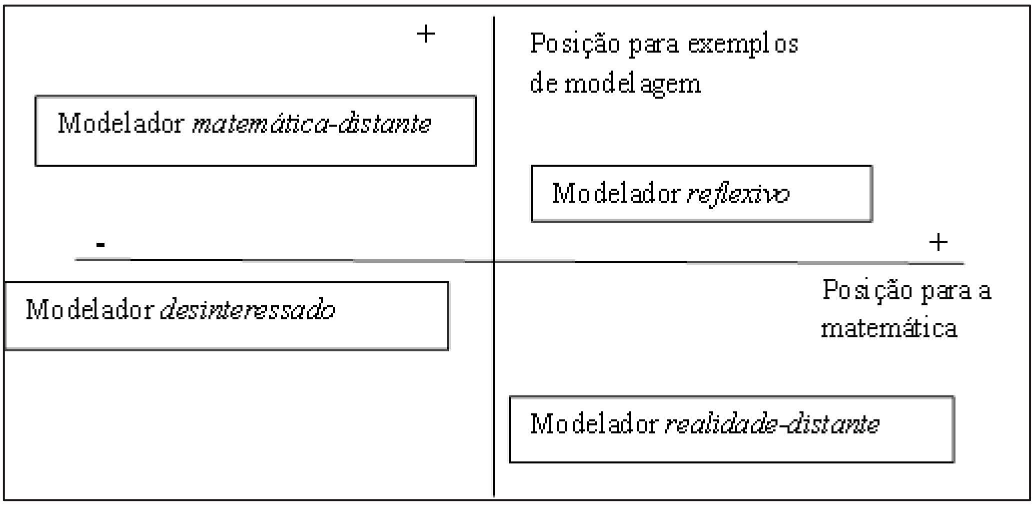
- O modelador matemática-distante: esses modeladores dão preferência ao contexto do problema do mundo real. Contudo, possuem atitudes negativas em relação à matemática. Esses modeladores são capazes de construir o modelo real e validar a solução. Entretanto, não possuem competência na construção do modelo matemático, na busca de uma solução matemática e na interpretação de soluções complexas.

- O modelador reflexivo: esses modeladores possuem atitudes positivas em relação à própria matemática, bem como para exemplos de modelagem.

- O modelador desinteressado: esses modeladores não são interessados nos contextos dos problemas do mundo real e nem na matemática. Segundo Maaβ (2006), os modeladores desinteressados possuem déficits nas competências matemáticas e quando lidam com atividades de modelagem é possível encontrar dificuldades em toda parte do processo de modelagem.

Maaβ (2006), na Figura 2.6, apresenta um esquema representativo dos tipos de modeladores, em que a autora indica a posição para a matemática que pode ser positiva e negativa e a posição para exemplos de modelagem que também pode ser positiva e negativa. De acordo com esta representação, o modelador reflexivo é aquele que possui posição positiva para exemplos de modelagem e para a matemática; o modelador matemática-distante é aquele que possui uma posição positiva para exemplos de modelagem e negativa para a matemática; o modelador desinteressado é aquele que possui posição negativa tanto para exemplos de modelagem quanto para a matemática; o modelador realidade-distante é aquele que possui posição positiva para a matemática e negativa para exemplos de modelagem.

Figura 2.6: Tipos de modeladores proposto por Maaβ



Fonte: traduzido de Maaβ (2006, p. 68).

Outro aspecto no estudo de competências de modelagem diz respeito a como avaliar essas competências. Jensen (2007, p. 141) afirma que "uma abordagem multidimensional é uma condição necessária, mas desafiadora, para avaliações válidas da competência para fazer modelagem matemática[15]". De acordo com esse autor, competência para fazer modelagem é a prontidão perspicaz de alguém realizar todas as partes de um processo de modelagem em uma determinada situação.

A definição de competência apresentada por Jensen (2007) sugere três dimensões para trabalhar com a avaliação de competência para fazer modelagem, sendo elas: nível de extensão; raio de ação e nível técnico.

O nível de extensão refere-se a aspectos da competência que alguém pode ativar e com seu nível de autonomia quando ativa uma competência e também o nível das reflexões envolvidas. Por exemplo, "alguém que começa um diálogo interno com relação à validação de um processo de modelagem tem um nível de extensão maior do que alguém que só pode avaliar os resultados do modelo e não o processo que conduz a eles[16]" (JENSEN, 2007, p. 144).

O raio de ação está relacionado com os diferentes contextos e situações em que alguém pode ativar a competência, ou seja, os conhecimentos, capacidades e atitudes de alguém frente à situação. Por exemplo, se a competência de resolver problemas de uma pessoa for ativada com sucesso tanto dentro da aritmética, da álgebra, da geometria e da

[15] Tradução de: [...] is to argue that a multidimensional approach is a necessary, but challenging, condition for valid assessments of someone's mathematical modelling competency (JENSEN, 2007, p. 141).
[16] Tradução de: […] a person who can enter an inner dialogue regarding the validation of a modelling process has a higher degree of coverage than someone who can only evaluate the model results and not the process leading to them (JENSEN, 2007, p. 144).

probabilidade, o raio de ação em relação à outra que ativou com sucesso apenas em aritmética e álgebra, será maior.

O nível técnico refere-se à quão conceitualmente e tecnicamente avançada a matemática está e como é que alguém pode integrá-la de forma relevante na ativação da competência. Desse modo, uma pessoa que resolve um problema utilizando vários tipos de funções é mais competente que uma pessoa que resolve o problema usando, por exemplo, função linear.

Discutimos nessa seção, competências relacionadas ao "fazer" modelagem matemática, competências para fazer modelagem que os alunos podem desenvolver durante as atividades. Entretanto, podemos também discutir as competências que são desenvolvidas pela modelagem matemática, relacionadas ao aprender matemática por meio da modelagem matemática.

2.3.2.1 Aprender matemática por meio da modelagem matemática

Muitos pesquisadores e professores defendem a implementação de atividades de modelagem matemática na sala de aula, justificando que a modelagem matemática "pode motivar e apoiar a compreensão de métodos e conteúdos da matemática escolar, contribuindo para a construção de conhecimentos bem como pode servir para mostrar aplicações da matemática em outras áreas do conhecimento" (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012, p. 30). Além disso, de acordo com Santos (2003) o ensino da matemática centra-se no desenvolvimento de competências no aluno, e para que haja tal desenvolvimento, é necessário o trabalho com situações novas e complexas,

> Em síntese, podemos afirmar que um ensino da Matemática orientado para o desenvolvimento de competências exige um ambiente de sala de aula onde o professor e alunos terão que progressivamente ser capazes de responder a um conjunto de solicitações sem as quais dificilmente se estabelece um contexto favorável a um ensino com sucesso (SANTOS, 2003, p. 19).

De acordo com Maaß (2011), a modelagem matemática pode conduzir a aprendizagem matemática, contudo é preciso levar em consideração que os alunos precisam de tempo para se familiarizar com as atividades de modelagem.

Segundo Figueiredo e Kato (2011) atividades de modelagem matemática permitem ao aluno o trabalho com situações novas, ou a abordagem de situações de diferentes maneiras. Desse modo, atividades de modelagem podem favorecer o desenvolvimento de competências no aluno, "pois não torna o pensamento dos alunos uma ação técnica, pré-formatada, ao contrário, o aluno tem que adequar o conhecimento que já possui às novas situações que são propostas" (FIGUEIREDO, KATO, 2011, p. 4).

De acordo com Silva (2008) são muitos argumentos que justificam o uso da modelagem matemática em sala de aula, um deles é que a modelagem matemática possibilita condições ao desenvolvimento de conteúdos e habilidades matemáticas, bem como proporcionar um ambiente de interdisciplinaridade para os alunos.

Segundo Bisognin e Bisognin (2013)

> No processo da Modelagem Matemática, em suas diferentes etapas de execução, os alunos necessitam analisar informações, usar diferentes modos de representação, sejam elas algébricas, gráficas, geométricas ou numéricas, estabelecer relações entre as variáveis, formular problemas, desenvolver modelos e procurar soluções, formular e justificar conjecturas, analisar e interpretar os resultados. Durante o processo de desenvolvimento de atividades de modelagem, seja individualmente ou em grupo, os alunos constroem novos conhecimentos e diferentes competências (BISOGNIN, BISOGNIN, 2013, p. 2975).

Galbraith (2012) apresenta duas abordagens relacionadas ao uso de modelagem matemática na aprendizagem da matemática: a modelagem como veículo e como conteúdo. No caso da modelagem como veículo, o uso de contextos e modelos matemáticos é utilizado como veículo para a aprendizagem de matemática, assim a modelagem matemática serve às necessidades curriculares. No caso da modelagem como conteúdo tem-se uma dupla finalidade, por um lado tem como objetivo ajudar os alunos a aprender a fazer modelagem e ao aprender a modelar é possível aprender matemática.

Outro aspecto importante com relação à aprendizagem matemática é que segundo Skovsmose (1992, p.11) "[...] a Matemática tem uma intervenção real na sociedade, não apenas no sentido de que novas ideias podem alterar interpretações, mas também no sentido de que a Matemática coloniza e reorganiza parte da realidade". De acordo com Silva (2005) a modelagem matemática pode promover à reflexão e a tomada de decisões.

Segundo Silva (2005) é relevante possibilitar que os alunos se envolvam com temas ligados à realidade com o intuito de provocar questionamentos que possam favorecer uma participação crítica dos alunos enquanto cidadãos, e que possam discutir sobre questões políticas, sociais, econômicas, etc.

Skovsmose (1992) no artigo intitulado *Democratic competence and reflective knowing in mathematics*, aborda a matemática como possibilidade de desenvolver a competência democrática[17] nos alunos, segundo o autor, "a matemática é o suporte lógico do processamento de informação e, ao mesmo tempo, o alicerce das actuais aplicações da tecnologia da informação" (SKOVSMOSE, 1992, p. 9). Assim, o autor considera que mesmo a matemática formal pode ser capaz de fazer algo à realidade, ou seja, a matemática pode colaborar para o entendimento e reflexão de fenômenos relacionados à nossa realidade. Nesse sentido, entendemos que a modelagem matemática vem ao encontro das ideias de Skovsmose (1992), pois, de modo geral, as atividades de modelagem abordam problemas não essencialmente matemáticos. Segundo Skovsmose (1992),

> A Matemática intervém na realidade ao criar uma "segunda natureza" em nosso redor, oferecendo não apenas descrições dos fenômenos, mas também modelos para a alteração de comportamentos. Não nos limitamos a "ver" de acordo com a Matemática. As estruturas matemáticas são chamadas a desempenhar um papel na vida social de um modo fundamentalmente semelhante ao das estruturas ideológicas na organização da realidade (SKOVSMOSE, 1992, p. 14).

Acreditamos ainda que, além das atividades de modelagem propiciar o desenvolvimento de competências associadas ao fazer modelagem e competências matemáticas, pode propiciar ao aluno o desenvolvimento de competências democráticas, que estão relacionadas ao desenvolvimento de sujeitos críticos e reflexivos na sociedade.

[17] A competência democrática é a base de conhecimento e entendimento necessária para que a delegação da soberania seja submetida a algum tipo de controlo. Trata-se de uma condição para a participação e re-acção. As interpretações dessa competência variam entre dois extremos. Alguns vêem a competência democrática como uma aptidão natural dos seres humanos, outro vêem-na como uma capacidade adquirida (SKOVSMOSE, 1992, p. 6).

3 ASPECTOS METODOLÓGICOS E CONTEXTO DA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos a opção metodológica da pesquisa, abordamos especificidades do contexto da pesquisa, as circunstâncias em que a coleta de dados foi realizada e a descrição das atividades que serão analisadas. Levando em consideração os pressupostos teóricos abordados no capítulo 2, enunciamos também o encaminhamento que será dado às análises.

3.1 Problema de pesquisa

Levando em consideração, o modo como os alunos lidam com as atividades de modelagem matemática, a nossa questão de investigação, como apresentado na Introdução, consiste em **Quais competências são requeridas ou são desenvolvidas pelos alunos com o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática?**

Para tanto, considerando os três momentos de familiarização, conforme seção 2.2, investigamos as competências dos alunos para fazer modelagem, as características referentes aos procedimentos que podem ser observados no desenvolvimento de atividades e como os alunos descrevem seus próprios ciclos de modelagem, analisando o próprio desenvolvimento de atividades.

3.2 Contexto da pesquisa e coleta de dados

A turma

A pesquisa foi desenvolvida com 12 alunos do 4º semestre do curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Modelagem Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Cornélio Procópio, no período de 11/10/2013 à 18/12/2013, totalizando 14 encontros.

A condução das atividades

As atividades de Modelagem Matemática foram introduzidas gradativamente, de acordo com os três momentos de familiarização, com o intuito de promover a familiarização dos alunos com esse tipo de atividade.

Nesse contexto os alunos desenvolveram três atividades no primeiro momento, duas atividades no segundo momento e uma atividade no terceiro momento, totalizando assim seis atividades por aluno. Todas as atividades analisadas nessa pesquisa serão descritas nesse capítulo. O desenvolvimento das atividades foi em grupo, porém os grupos não permaneceram os mesmos em todas as atividades. Durante o desenvolvimento das atividades do primeiro momento a pesquisadora atuou como observadora. Nas atividades desenvolvidas no segundo momento, a pesquisadora atuou como observadora e orientadora. Com relação às atividades desenvolvidas no terceiro momento, a pesquisadora atuou como orientadora.

As atividades desenvolvidas

Atividades de modelagem matemática do primeiro momento: a professora regente da turma desenvolveu três atividades (*CÉSIO-137; PARA O LANCHE: VAI UMA PIPOCA AÍ? CERCA ELÉTRICA*). Nesse momento a professora desenvolveu com todos os alunos a exploração das atividades, ou seja, a professora e os alunos definiram conjuntamente as variáveis e hipóteses, fizeram as simplificações necessárias, realizaram obtenção e validação dos modelos matemáticos correspondentes aos problemas propostos, bem como as análises de cada um dos modelos. A pesquisadora, nesse momento, foi observadora do desenvolvimento das atividades.

Atividades de modelagem matemática do segundo momento: a professora da turma desenvolveu a atividade (*ÍNDICE DE MOTORIZAÇÃO NO ESTADO DO PARANÁ*), de modo que a situação-problema foi proposta aos alunos e com a orientação da professora os alunos definiram o problema, as variáveis, levantaram as hipóteses, obtiveram o modelo matemático, validaram e realizaram a comunicação para a turma toda. Nesse caso, a pesquisadora foi orientadora durante o desenvolvimento da atividade.

A pesquisadora desenvolveu a atividade (DESVALORIZAÇÃO DE UM VEÍCULO), para o desenvolvimento dessa atividade os alunos receberam a situação-problema, bem como o problema que deveriam resolver, e, o papel da pesquisadora foi de orientar o desenvolvimento da atividade.

Atividades de modelagem matemática do terceiro momento: nessas atividades os alunos trabalharam em grupos de três membros em cada grupo e escolheram uma situação para investigar; neste momento os próprios alunos fizeram a identificação da situação-problema que pretendiam desenvolver, a coleta e análise dos dados, o delinear do problema a ser investigado, a identificação dos conceitos matemáticos, a obtenção e validação do modelo e seu uso para a análise da situação, culminando na comunicação desta investigação para todos os alunos da disciplina.

Para o desenvolvimento desta atividade os grupos contaram com a orientação da professora e/ou da pesquisadora. Referimos-nos a este como '*trabalho final*'. As situações-problema desenvolvidas foram: *Que tal uma ducha?; Cuidado com o bafômetro!; Ritalina usos e abusos; Todo cuidado é pouco! O número da AIDS.*

Todos os registros escritos, gravações de áudio e vídeo, aplicação de questionário e realização de entrevista, referentes a essas atividades desenvolvidas foram utilizadas em nossa coleta de dados, conforme descrevemos a seguir.

A coleta dos dados

Os dados consistem em registros escritos, fala dos alunos, gestos que foram obtidos por meio de: gravações em áudio e vídeo, realização de entrevistas, questionários e anotações em caderno de campo. Para o desenvolvimento da pesquisa, todos os alunos assinaram um consentimento livre esclarecido, no termo de autorização, conforme Apêndice A. A pesquisadora atuou como observadora durante o desenvolvimento das atividades do primeiro momento; desenvolveu com os alunos uma atividade relativa ao segundo momento; atuou como orientadora dos grupos, juntamente com a professora da disciplina, nas atividades do terceiro momento. Realizamos juntamente com a professora da turma um cronograma da coleta de dados, como mostra o Quadro 3.1,

Quadro 3.1: Cronograma da coleta de dados

DIA/MÊS	**ATIVIDADES DESENVOLVIDAS**
11/10	- A professora terminou a atividade da pipoca; - A pesquisadora coletou dados das atividades do primeiro momento realizadas; - Os alunos assinaram o termo de consentimento; - Os alunos preencheram uma ficha de perfil e responderam ao questionário;
18/10	- Atividade do 2º momento: Índice de Motorização no Estado do Paraná
23/10	Término da atividade do Índice de Motorização no Estado do Paraná
30/10	- Comunicação dos alunos para a sala a respeito do desenvolvimento da atividade Índice de Motorização no Estado do Paraná.
01/11	- Atividade do 2º momento: Desvalorização de um veículo
06/11	- Entrevista com os alunos a respeito das atividades dos 1º e 2º momentos
08/11	- Entrevista com os alunos a respeito das atividades dos 1º e 2º momentos - Apresentação de seminário, Grupo 1: Na hora de apagar a luz e Grupo 4: E eu pergunto: tem calça de qual tamanho?

20/11	- Atendimento aos grupos a respeito do trabalho final
22/11	- Apresentação de seminário, Grupo 3: A matemática do vai e vém das marés e Grupo 2: Medindo a quantidade de chuva
04/12	Atendimento aos grupos a respeito do trabalho final
06/12	Apresentação do trabalho final
11/12	Entrevista com os alunos que apresentaram no dia 06/12
13/12	Apresentação do trabalho final
18/12	Entrevista com os alunos que apresentaram no dia 13/12

Fonte: elaborada pela autora.

A seguir, descrevemos em que consiste cada um dos meios de coleta de dados.

Registros escritos: relatórios entregues pelos alunos com o desenvolvimento de atividades de modelagem e questionários que foram respondidos pelos alunos após o desenvolvimento de atividades. Os questionários utilizados em diferentes atividades encontram-se nos Apêndices B, C, D e E.

Gravações em vídeo: utilização de filmadora para a captura de gestos e expressões utilizados pelos alunos durante o desenvolvimento ou apresentação de atividades de modelagem matemática.

Gravações em áudio: utilização de gravadores durante o desenvolvimento de atividades de modelagem, em conversas informais com alunos individuais ou em grupo de orientação de trabalhos, nas entrevistas realizadas com alunos após a realização de atividades de modelagem. Os roteiros de entrevistas utilizados em diferentes atividades encontram-se nos Apêndices F e G.

Com a coleta de dados, organizamos um acervo de imagens e áudios que foram integralmente transcritos. Para a escolha dos alunos que temos por objetivo investigar as competências no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, levamos em consideração alguns critérios:

- A participação do aluno nos três momentos de familiarização;
- A entrega de todos os questionários;
- A participação na entrevista;
- A entrega dos registros das atividades.

Considerando esses critérios, analisamos a trajetória de cinco alunos nos três momentos de familiarização. Como no decorrer das atividades os alunos formaram grupos diferentes, não analisamos a trajetória do grupo.

Para fazermos menção aos participantes da pesquisa, utilizamos a letra A para aluno, P para a pesquisadora e Pr para a professora da disciplina. Para diferenciar os alunos utilizamos números, por exemplo, para indicar aluno 1, utilizamos A1; para indicar aluno 2, A2 e, assim, sucessivamente. Considerando que em alguns momentos aparece a fala de outros alunos, além dos cinco alunos analisados, usamos a denominação “Alunos”.

Os dados coletados nas atividades foram codificados segundo a Teoria Fundamentada em dados proposta por Kathy Charmaz. Na próxima seção descrevemos essa opção metodológica para a análise dos dados.

3.3 A Teoria Fundamentada em Dados

Buscamos uma abordagem metodológica de análise qualitativa que atendesse nosso objetivo de procurar nos dados de cada momento de familiarização investigado elementos que nos proporcionassem o entendimento sobre a nossa questão de investigação e, que também, essa opção orientasse para o tratamento de uma grande quantidade de informações.

A análise dos dados é inspirada na proposta metodológica da Teoria Fundamentada em Dados (*Grounded Theory*) baseada, principalmente, nas indicações de Kathy Charmaz (2006, 2009). A Teoria Fundamentada em Dados (tradução mais usada para *Grounded Theory)* teve sua origem nas ciências sociais e sua divulgação original se deu em 1967 no livro The Discovery of *Grounded Theory* cujos autores são Barney Glaser e Anselm L. Strauss. A referência mais usada nas pesquisas no Brasil atualmente é o livro da professora Katy Charmaz - traduzido para o português em 2009 com o título: *A Construção da teoria fundamentada – guia prático para análise qualitativa.*

Segundo Charmaz (2009), os dados formam a base da teoria, e a análise que o pesquisador faz dos dados origina a teoria, ou pelo menos alguns aspectos dessa teoria. Nesse sentido, precisamos elaborar análises teóricas desde o início da investigação.

> Os métodos da teoria fundamentada favorecem a percepção dos dados sob uma nova perspectiva e a exploração de ideias sobre os dados por meio de uma redação analítica já na fase inicial. Ao adotar os métodos da teoria fundamentada, você poderá conduzir, controlar e organizar a sua coleta de dados e, além disso, construir uma análise original dos seus dados. (CHARMAZ, 2009, p. 15)

A Teoria Fundamentada em Dados oferece diretrizes explícitas e sistemáticas a respeito da forma como o pesquisador deve proceder:

> Como pesquisadores adeptos à teoria fundamentada, estudamos os nossos primeiros dados e começamos a separar, classificar e sintetizar esses dados por meio da codificação qualitativa. Codificar significa associar marcadores a segmentos de dados que representam aquilo de que se trata cada um dos

> segmentos. A codificação refina os dados, classifica-os e nos fornece um instrumento para que assim possamos estabelecer comparações com outros segmentos de dados. [...]
> Ao estabelecermos e codificarmos numerosas comparações, a nossa compreensão analítica dos dados começa a tomar forma. Redigimos anotações analíticas preliminares sobre nossos códigos e comparações, bem como qualquer outra ideia que nos ocorra sobre nossos dados-essas anotações são os chamados memorando. Com o estudo dos dados, a comparação destes e a redação dos memorandos, definimos as ideias que melhor se ajustam e interpretam os dados como categorias analíticas provisórias. Quando surgem questões inevitáveis e aparecem lacunas em nossas categorias, buscamos dados que resolvam essas questões e que possam preencher as lacunas. [...] Conforme prosseguimos nossas categorias não apenas coalescem à medida que interpretamos os dados coletados, mas também tornam-se mais sistematizados, uma vez que passamos por níveis sucessivos de análise.
> Nossas categorias e as relações delas extraídas nos fornecem um instrumento conceitual sobre a experiência estudada. Sendo assim, construímos níveis de abstração diretamente dos dados e, posteriormente, reunimos dados adicionais para verificar e refinar as nossas categorias analíticas geradas a partir disso. Nosso trabalho culmina em uma "teoria fundamentada" ou em uma compreensão teórica da experiência estudada (CHARMAZ, 2009, p.16).

A pesquisa começa pela coleta de dados e sua conclusão ocorre com a redação das análises e as reflexões do pesquisador a respeito de todo o processo. Para a autora o processo de pesquisa não é linear, "os pesquisadores que utilizam a teoria fundamentada param e escrevem sempre que as ideias lhes ocorrem" (CHARMAZ, 2009, p. 25). Os métodos da teoria nos indicam a forma *como* devemos proceder.

Dois aspectos são essenciais na Teoria Fundamentada em Dados: a coleta de dados e a codificação. Para a autora, "nossa aventura pela teoria fundamentada começa à medida que entramos no campo no qual procedemos à coleta de dados" (CHARMAZ, 2009, p.29) e vamos avançando à medida que vamos construindo resultados provisórios.

Diferentes técnicas de coleta de dados podem ser utilizadas tais como a observação, entrevistas, e informações de gravações, relatórios, notas de campo. O que se enfatiza nessa metodologia é que a coleta e análise dos dados são processos concomitantes e devem ocorrer até a 'saturação', ou seja, até que dados novos ou relevantes não sejam mais encontrados ou até que os aspectos observados comecem a se repetir.

> A flexibilidade da pesquisa qualitativa permite ao pesquisador seguir indicações que vão surgindo. Os métodos da teoria fundamentada ampliam essa flexibilidade e, simultaneamente, oferecem mais foco ao pesquisador que muitos outros métodos (CHARMAZ, 2009, p.31).

A coleta de dados precisa ser planejada com a intenção de suprir o seu trabalho, possibilitando ao pesquisador um quadro mais completo possível do que se deseja estudar.

A partir dos primeiros dados obtidos, o pesquisador começa a separar, classificar e sintetizar esses dados por meio da codificação.

> A codificação é o elo fundamental entre a coleta dos dados e o desenvolvimento de uma teoria emergente para explicar esses dados. Pela codificação, você define o que ocorre nos dados e começa a debater-se com o que isso significa (CHARMAZ, 2009, p.70).

O processo de codificação envolve: *codificação inicial, codificação axial* e *codificação focalizada.*

A *codificação inicial* é a primeira etapa do processo de codificação de dados. Nela os dados são estudados e são criados fragmentos. Os fragmentos podem se formar por palavras-chave e estas podem surgir a partir de eventos de coleta de dados, de tipos de dados, ou outra escolha. Nesta etapa o pesquisador deve se fixar rigorosamente procurando codificar com palavras que indicam ação. Como indica Charmaz (2009, p.74): "Observe atentamente as ações e, na medida do possível, codifique os dados como ações". É importante, segundo a autora, que o pesquisador fique bem próximo aos dados e que seus códigos sejam simples e precisos, também, sugere ao pesquisador que construa códigos curtos, que conserve as ações.

A *codificação axial* é uma etapa intermediária entre a codificação inicial e a codificação focalizada. Segundo Borssoi (2013, p.28), "nessa etapa analisam-se as palavras selecionadas, faz-se uma reorganização de tais palavras e destas extrai-se uma ideia central e suas subordinações". Faz-se necessária essa codificação pelo grande volume de conceitos originados na codificação inicial. É nessa etapa que se organiza as categorias e sub-categorias, podendo reunir dados que foram quebrados na codificação inicial ou reagrupá-los de novas formas. De acordo com Charmaz (2009, p.91), "os objetivos da codificação axial são de classificar, sintetizar e organizar montantes de dados e reagrupá-los de novas formas".

A etapa final corresponde à *codificação focalizada*, em que o pesquisador realiza uma revisão e avaliação das categorias e o processo é validado. Para Charmaz (2009, p.87), essa codificação "constata as suas preconcepções sobre o tópico" que está sendo analisado.

Para realizar a codificação focalizada se faz necessária a 'organização' das categorias e, provavelmente, sua redução. É preciso descobrir convergências ou divergências entre as categorias e formular uma compreensão teórica sobre o fenômeno a partir desse número menor de categorias ou palavras-chave.

Para a análise dos dados consideramos a seguinte estrutura: inicialmente foi feita uma análise específica dos dados provenientes dos registros das atividades desenvolvidas em cada momento de familiarização e, por meio dessa análise, realizamos a codificação inicial. Em seguida, a fim de que os códigos pudessem ser agrupados em categorias provisórias realizamos uma análise específica dos dados provenientes dos ciclos apresentados pelos alunos em cada momento de familiarização – codificação axial. Também realizamos uma análise específica dos questionários, entrevistas considerando os três momentos, visando à codificação focalizada, a fim de que as categorias que emergiram na codificação axial fossem confirmadas ou que novas categorias fossem identificadas. E por fim, realizamos uma discussão com o referencial teórico abordado nesse trabalho.

3.4 Descrição das atividades de modelagem matemática

Nessa seção, descrevemos as atividades de modelagem matemática cujo desenvolvimento subsidia as análises que realizamos.

3.4.1 As atividades desenvolvidas

As situações-problema escolhidas para o desenvolvimento das atividades de modelagem seguiram cada um dos momentos de familiarização, conforme seção 2.2.

As situações-problema desenvolvidas no 1º momento foram: Césio-137; Para o lanche: vai uma pipoca aí? e Cerca elétrica. Essas situações foram escolhidas pela professora. Nesse texto descrevemos a atividade denominada como Para o lanche: vai uma pipoca aí? A escolha em analisar essa atividade deve-se à quantidade de dados coletados. As demais atividades desenvolvidas estão no Apêndice H.

A situação-problema desenvolvida no 2º momento que será analisada nesse trabalho foi denominada de Índice de motorização no Estado do Paraná. A atividade Desvalorização de um veículo está descrita no Apêndice H e também foi desenvolvida no 2º momento.

As atividades do 3º momento que foram desenvolvidas pelos alunos e as que serão analisadas nesse trabalho intitulam-se Cuidado com o bafômetro! e Todo cuidado é pouco! o número da AIDS. As demais atividades estão descritas abreviadamente no Apêndice H.

3.4.1.1 Atividade do 1º momento: Para o lanche: Vai uma pipoca aí?

Essa atividade foi desenvolvida em dois encontros. Foi uma atividade proposta pela professora e desenvolvida pelos alunos juntamente com a professora. Inicialmente a professora entregou para os alunos a situação-problema, fizeram a leitura com o intuito de propor um problema a ser investigado a partir da situação, conforme mostra o Quadro 3.2.

Quadro 3.2: Atividade de modelagem "Para o lanche: Vai uma pipoca aí"?

Tema: Pipoca

As embalagens de milho de pipoca para serem estouradas no forno micro-ondas apresentam, em geral, a seguinte informação: "o tempo ideal para retirar a pipoca do forno micro-ondas varia entre 2 e 5 minutos, dependendo da potência do forno de micro-ondas. Mas em geral, o instante ideal para tirar o pacote do micro-ondas é quando o tempo entre um estou e outro for superior a 2 segundos".
Os fornos de micro-ondas geralmente possuem um botão para programar o tempo de preparo das pipocas. Com a finalidade de observar a adequação, desse tempo, considerando que o fabricante deve ter feito um trabalho empírico para implementar esse tempo nos fornos de micro-ondas fabricados, foram estourados quatro pacotes de 100g de milho de pipoca de mesma marca em um forno de micro-ondas cujo tempo programado da pipoca é de 2 minutos e 50 segundos, ou seja, 170 segundos.
Utilizando uma balança digital mediu-se a massa de 100 grãos de milho de pipoca. Obtendo a medida aproximada de 14gramas. Então um pacote de pipoca de 100gramas contém 715 grãos de milho de pipoca, aproximadamente. Os dados coletados constam na tabela.

Tabela: Dados obtidos com o preparo de quatro pacotes de pipoca

Pacote de pipoca	Quantidade inicial de milho (grãos)	Instante do primeiro estouro	Instante em que o pacote foi retirado do micro-ondas (em segundos)	Grãos que não estouraram
Pacote 1	715	96	170	52
Pacote 2	715	97	170	75
Pacote 3	715	92	170	63
Pacote 4	715	98	170	40

Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 83).

Após a leitura e a socialização das ideias os alunos com a orientação da professora definiram o seguinte problema: *Qual é o tempo ideal para que haja menor quantidade de grãos sem estourar e sem queimar?*

Para o problema a ser investigado, os alunos e a professora, definiram as variáveis:

t – tempo em segundos

$P(t)$ – número de grãos que não se transformaram em pipoca no instante t.

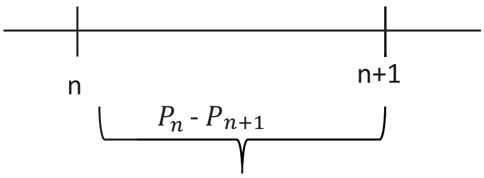
n – variável auxiliar

Levantaram a seguinte hipótese:

Hipótese 1: A variação do número de grãos que se transformam em pipoca é proporcional ao número de grãos que ainda não se transformaram em pipoca.

A partir da discussão da hipótese 1, os alunos juntamente com a professora, iniciaram a dedução do modelo.

Considerando que P_n é o número de grãos que ainda não se transformaram em pipoca no instante n, e P_{n+1} o número de grãos que ainda não são pipoca no instante $n+1$, então $P_n - P_{n+1}$ corresponde ao número de grãos que estouram entre os intervalos n e $n+1$. Assim,



Número de grãos que estouraram entre os intervalos n e n+1

Usando linguagem matemática, portanto, podemos escrever a hipótese 1 como,

$$P_n - P_{n+1} = k.P_n$$

$$P_n - k.P_n = P_{n+1}$$

$$P_n(1-k) = P_{n+1}$$

Por recorrência, temos:

$$Se\ n = 0 \Rightarrow P_1 = P_0(1-k)$$

$$Se\ n = 1 \Rightarrow P_2 = P_1(1-k) \Rightarrow P_2 = P_0(1-k)^2$$

$$Se\ n = 2 \Rightarrow P_3 = P_2(1-k) \Rightarrow P_3 = P_0(1-k)^3$$

Assim, sucessivamente, teremos que $P_n = P_0(1-k)^n$. Considerando $P_0 = 715$, que é o número de pipocas que há em um pacote de 100g, temos:

$$P_n = 715(1-k)^n$$

Em discussão com a turma, a professora chama a atenção de que eles precisam escrever a expressão encontrada utilizando a variável t, já que utilizaram a variável auxiliar apenas para facilitar os cálculos. Assim os alunos observam na tabela da situação inicial o tempo de estouro. Como aparece mais de um tempo de estouro, os alunos decidem fazer uma média, para encontrar o tempo médio de estouro, obtendo aproximadamente $t = 96$ segundos. Foi realizada uma mudança de variável $n = t - 96$, considerando t como uma variável contínua. Portanto, para um tempo t qualquer, podemos escrever:

$$P(t) = \begin{cases} 715 & se\ 0 < t < 96 \\ 715(1-k)^{t-96} & se\ t \geq 96 \end{cases}$$

Em que *t* é o tempo que o pacote foi retirado do forno de micro-ondas e *P(t)* é o número de grãos de pipoca que não estouraram até esse instante.

Após encontrarem a função, a professora iniciou a seguinte discussão com os alunos:

Pr: e aí como que ficou?
[...] silêncio
Aluno: o modelo?
Pr: é, onde a gente chegou? A gente considerou duas hipóteses, não foi?
A4: a gente parou na mudança da variável.
Pr: isso, a gente estava trabalhando e a gente passou da variável auxiliar que é um modelo discreto para contínuo. E como ficou o modelo?
[...] silêncio
A3: ditando o modelo para a professora
Pr: e
A3: continuou ditando para o professora o modelo
A3: aí tem que encontrar o valor de 1-*k*
Pr: Que tipo de função é essa?
[...] silêncio
Pr: é contínua, mas ela é uma função linear?
A2: você falou quando tem duas lá, mas eu esqueci o nome
Pr: o que que é então?
Aluno: duas sentenças
Pr: isso, uma função definida por duas sentenças. Certo?
Pr: a primeira é de que tipo?
Aluno: constante
Pr: e a segunda?
A3, A5: do tipo exponencial.
Pr: isso, do tipo exponencial, ok? Então se a gente fosse pensar num gráfico disso, como seria? A representação gráfica?
Todos: mostram o desenho da representação gráfica com gestos para a professora.
Pr: crescia?
Aluno: não, cai.
Pr: tem que calcular o valor da base para saber o comportamento da função. Bom gente nós paramos aqui, temos que encontrar o valor de 1-*k*, como vamos fazer isso?
[...] silêncio
Pr: Se atribuir o valor para *t* vai encontrar o valor de *k*, não vai? Mas se atribuir o valor para *t* aqui né (professora aponta para a segunda sentença da função).
Pr: e tem como eu saber como encontrar o valor que eu vou usar para t aqui?
Aluno: maior ou igual a 96,
Pr: mas qualquer um?
Aluno: não *P(t)* tem que tender a zero.
Pr: Então como a gente faz pra a partir de um *t* que valor pra *P(t)* a gente vai levar em consideração?
A3: próximo de zero?
Pr: Mas qual? Gente olha aí, as informações que temos na tabela.
Alunos: a partir de 96
Pr: quem é a variável independente?
A5: os grãos de pipoca
Pr: e dependente?
Alunos: tempo
Pr: e se pegar o 96, eu vou encontrar o valor de *k*?
Aluno: não
[...]
Pr: depende de como foi embalada as pipocas. Não vamos levar em consideração o 96, 97 porque foi quando começou a estourar as pipocas e daí quando que todos foram tirados do micro-ondas em 170 segundos. Aí qualquer um desses valores que a gente pegar vai ter um *P(t)* relacionado não vai?

> [...] silêncio
> A5: vamos considerar a menor quantidade que estourou?
> Pr: pode ser?
> Aluno: pode ser uma média
> Pr: é ficará mais próximo, todo mundo concorda em pegar a média?
> [...] silêncio

Nesse diálogo, a professora discute com os alunos a respeito da função encontrada e como encontrar o valor de. Após a discussão, os alunos juntamente com a professora decidem utilizar o valor médio dos grãos que não estouraram da quinta coluna do Quadro 3.2, que corresponde a 58 grãos. Como estão k considerando o tempo depois que se inicia o estouro utilizam a segunda sentença da função:

$$P(t) = 715(1-k)^{t-96}$$

Levando em consideração $t = 170\ s$ que é o tempo que os pacotes foram retirados do micro-ondas, conforme indica a quarta coluna do Quadro 3.2 e a média de grãos de pipoca que não estouraram, temos:

$$P(170) = 58$$

$$P(170) = 715(1-k)^{170-96}$$

$$58 = 715(1-k)^{74}$$

$$\frac{58}{715} = (1-k)^{74}$$

Nesse caso, como precisavam encontrar o valor de $(1-k)$ que é a base da segunda sentença da função *P(t)* utilizaram a operação inversa da exponencial que é o logaritmo. Assim temos:

$$log\left(\frac{58}{715}\right) = log(1-k)^{74}$$

$$log\left(\frac{58}{715}\right) = 74\log(1-k)$$

$$\log(1-k) = \frac{log\frac{58}{715}}{74}$$

Para encontrar o valor da base $(1-k)$, calcularam o logaritmo na base 10:

$$1-k = 10^{\frac{log\frac{58}{715}}{74}}$$

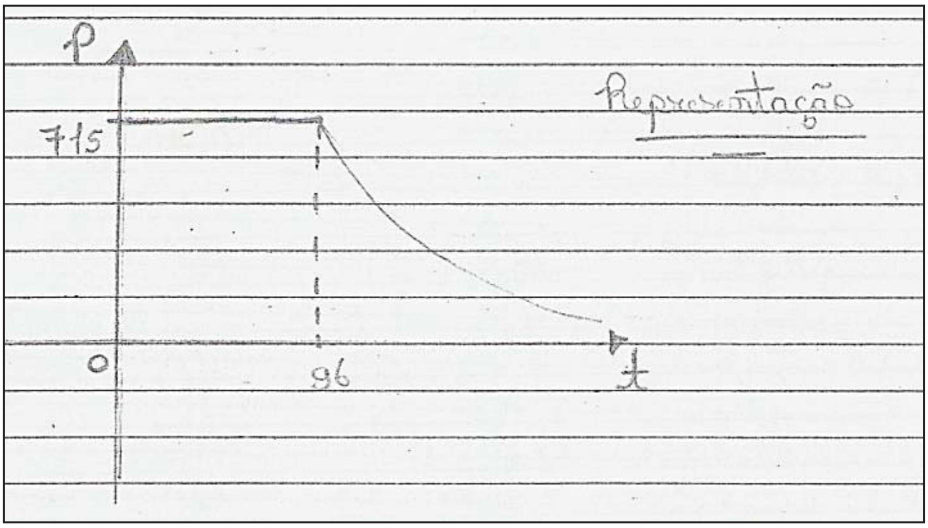
$$1-k = 0{,}966625849$$

Considerando $(1-k) \cong 0{,}9667$ na função definida por duas sentenças, encontraram o seguinte modelo matemático:

$$P(t) = \begin{cases} 715 & se\ 0 < t < 96 \\ 715(0{,}9667)^{t-96} & se\ t \geq 96 \end{cases}$$

cuja representação gráfica é apresentada na Figura 3.1,

Figura 3.1: Representação gráfica do modelo matemático do aluno A1



Fonte: registro do aluno A1.

Após encontrarem o modelo matemático, os alunos juntamente com a professora retornaram ao problema para respondê-lo, conforme o diálogo,

> Pr: agora sabemos como é a representação gráfica da função. Vamos responder o problema? Esse modelo tudo bem para vocês? De fato é verídico? Entre 0 e 96 tem a mesma quantidade de pipoca? E o que acontece a partir do 96?
> A5: começa estourar.
> Pr: isso, estoura, estoura, e vai diminuindo gradativamente. Então olha só a representação gráfica como que seria. (a professora faz o gráfico para os alunos)
> Pr: nunca chega a zero, essa função é assintótica. O que acontece com o limite?
> Alunos: vai tender a zero.
> Pr: responderam o problema? Qual o problema?
> A3: agora que vai validar?
> Pr: Agora que vamos responder o problema. Como faríamos para responder o problema?
> Aluno: tem que tender a zero, substitui o valor nele.
> Pr: que valor? Qual seria o menor valor a ser considerado?
> Aluno: uma pipoca
> Pr: Porque uma pipoca?
> Aluno: Porque a menor pipoca diferente de zero é uma pipoca.
> Pr: é uma função discreta, porque consideramos o grão da pipoca, mas o tempo é contínuo. Bom mais e daí, substituímos quem por uma pipoca.
> Alunos: o *P(t)*
> Estão discutindo as hipóteses do problema. A professora escreve no quadro.
> (Levando em consideração que se tenha o menor número de grãos sem estourar e que não se queime pipocas; entre um estouro e outro não pode superar dois segundos).
> Pr: Como escreve isso matematicamente?
> [...] silêncio

Levando em consideração que se tenha um menor número de grãos de pipoca sem estourar e que não se queime pipocas, temos:

- entre um estouro e outro não pode superar 2 segundos

Escrevendo em linguagem matemática. Em um tempo qualquer, temos

$$P(t) - P(t+2) = 1$$

Usando o modelo matemático encontrado:

$$715(0{,}9667)^{t-96} - 715(0{,}9667)^{t-94} = 1$$

$$715(0{,}9667)^{t-96}[1 - (0{,}9667)^2] = 1$$

$$715(0{,}9667)^{t-96}(0{,}0656) = 1$$

$$46{,}94(0{,}9667)^{t-96} = 1$$

$$(0{,}9667)^{t-96} = \frac{1}{46{,}94}$$

$$(0{,}9667)^{t-96} = 0{,}02131$$

$$log(0{,}9667)^{t-96} = \log(\,0{,}02131)$$

$$(\mathrm{t} - 96)\log(0{,}9667) = \log(0{,}02131)$$

$$(t - 96) = \frac{\log(0{,}02131)}{\log(0{,}9667)}$$

$$t - 96 \cong 113$$

$$t \cong 209 \text{ segundos}$$

Ou seja, nesse forno de micro-ondas, para esta marca de pipocas, o tempo ideal para que se tenha o menor número de pipocas sem estourar e sem queimar é de 3 minutos e 29 segundos.

3.4.1.2 Atividade do 2º momento: Índice de Motorização no Estado do Paraná

Nessa atividade, a professora entregou para os alunos a situação-problema, como mostra o Quadro 3.3.

Quadro 3.3: Atividade de modelagem sobre Índice de Motorização no Estado do Paraná

Índice de Motorização no Estado do Paraná

Segundo dados do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA), o estado do Paraná encontra-se na 2ª posição com relação aos domicílios brasileiros com pelo menos um veículo particular (automóvel ou motocicleta), conforme aparece na figura. Em 2009, 61,7% dos munícipios paranaenses já contavam com pelo menos um veículo particular.

A exemplo do que ocorre no Brasil, todo o crescimento do setor automobilístico tem mudado o padrão de mobilidade urbana. No âmbito nacional, o IPEA apontou que quase metade dos municípios brasileiros (47%), em 2009, já possuía automóvel ou motocicletas para o deslocamento de seus moradores. De 2008 para 2009, por exemplo, o percentual de domicílios com automóvel ou motocicleta subiu de 45,2% para 47%. No entanto, isso não inviabiliza a utilização de transporte coletivo. Segundo dados do IBGE, a população de quase metade dos domicílios do país ainda é muito dependente dos sistemas de transporte público.

Posse de automóvel ou motocicleta por UF

UF	Tem (%)	Não tem (%)	UF	Tem (%)	Não tem (%)
Santa Catarina	70,5	29,5	Rio Grande do Norte	41,2	58,8
Paraná	**61,7**	**38,3**	Acre	39,8	60,2
Distrito Federal	59,7	40,3	Paraíba	38,7	61,3
São Paulo	59,1	40,9	Rio de Janeiro	38,5	61,5
Rondônia	56,1	43,9	Sergipe	35,2	64,8
Roraima	55,8	44,2	Maranhão	34,1	65,9
Rio Grande do Sul	55,4	44,6	Amapá	33,7	66,3
Mato Grosso	54,9	45,1	Ceará	33,3	66,7
Mato Grosso do Sul	53,7	46,3	Amazonas	31,5	68,5
Goiás	53,2	46,8	Pernambuco	29,2	70,8
Tocantins	53,1	46,9	Bahia	28,9	71,1
Minas Gerais	48,9	51,1	Pará	28,3	71,7
Piauí	44,7	55,3	Alagoas	26,3	73,7
Espírito Santo	44,5	55,5	**Brasil**	**48,0**	**52,0**

Fonte:Microdados PNAD, 2009, IBGE (elaborado IPEA)

Em consonância com as informações apresentadas pelo IPEA, dados obtidos do Departamento de Trânsito do Paraná (DETRAN/PR), mostra que o índice de motorização, ou seja, o número de pessoas que possuem veículos providos de motor tem aumentado no estado do Paraná. Esse índice é obtido dividindo-se a frota de veículos do estado pela população estadual e multiplicando-se o resultado por 100. Quanto maior o índice de motorização, maior a quantidade de pessoas que possuem veículos com motor e, dessa forma, maiores são as possibilidades de ocorrer problemas referentes à circulação de veículos nos municípios, nos estados e no país.

A tabela apresenta o crescimento do Índice de motorização (veículos/ 100 habitantes) no estado do Paraná entre os anos de 2001 e 2010.

ÍNDICE DE MOTORIZAÇÃO NO ESTADO DO PARANÁ - PERÍODO 2001 / 2010

ANO	FROTA	POPULAÇÃO	VEÍC. / 100 HAB.
2001	2.532.257	9.606.435	26,36
2002	2.718.779	9.718.001	27,98
2003	2.929.662	9.827.936	29,81
2004	3.182.172	9.936.549	32,02
2005	3.432.367	10.043.918	34,17
2006	3.675.703	10.150.139	36,21
2007	3.999.483	10.284.503	38,89
2008	4.358.093	10.590.169	41,15
2009	4.683.631	10.686.247	43,83
2010	5.041.846	10.439.601	48,30

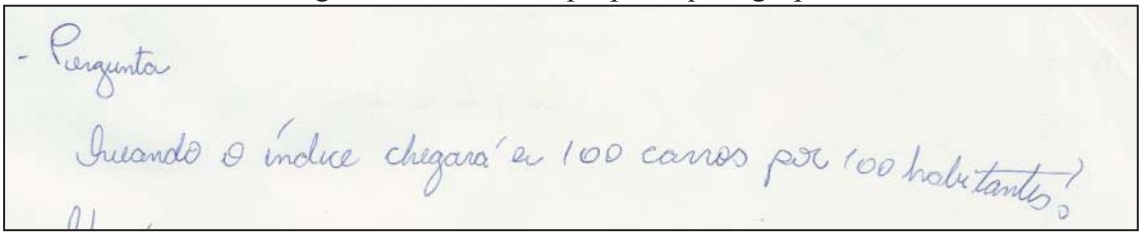
FONTE: DETRAN - Coordenadoria de Veículos
IBGE / IPARDES

Fonte: elaborada pela professora.

Os alunos foram divididos em grupos. Como nesse dia um dos alunos faltou, a turma se dividiu em três grupos, dois grupos com quatro alunos e um grupo com três alunos. Essa atividade foi desenvolvida em três encontros, o aluno que faltou em uma das aulas foi inserido em um dos grupos com quatro alunos. A proposta para essa atividade era que os alunos lessem a situação-problema e a partir dela definissem o problema, as variáveis, as hipóteses, a dedução do modelo e a validação. Nesse caso, tanto a professora como a pesquisadora, tinham como papel orientar os alunos no desenvolvimento da atividade.

Os problemas definidos pelos grupos são apresentados nas Figuras 3.2, 3.3 e 3.4.

Figura 3.2: Problema proposto pelo grupo 3

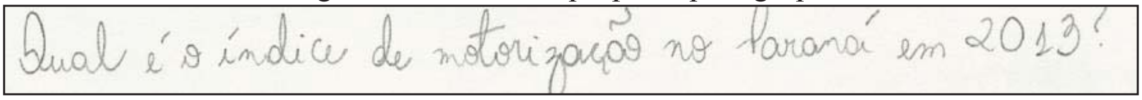


- Pergunta

Quando o índice chegará a 100 carros por 100 habitantes?

Fonte: registro escrito do grupo 3.

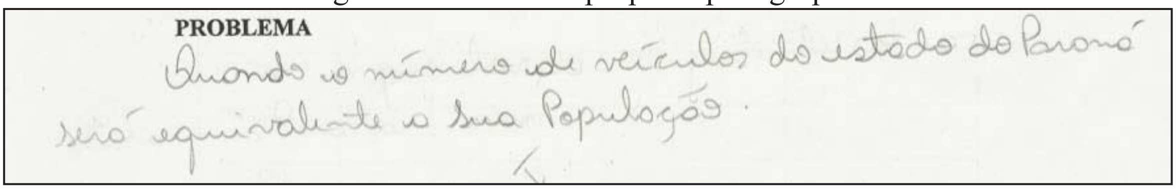
Figura 3.3: Problema proposto pelo grupo 2



Qual é o índice de motorização no Paraná em 2013?

Fonte: registro escrito do grupo 2.

Figura 3.4: Problema proposto pelo grupo 1



PROBLEMA

Quando o número de veículos do estado do Paraná será equivalente a sua População.

Fonte: registro escrito do grupo 1.

Apresentamos aqui, a descrição da resolução do grupo 1. Após, terem decidido qual o problema que iriam abordar, foram definidas as seguintes variáveis:

- Variável dependente: índice de motorização (*M*)
- Variável independente: tempo (*t*)
- Variável auxiliar: (*n*)

Com a intenção de auxiliar os alunos, a professora entregou uma folha que continha algumas dicas para a resolução, conforme o Quadro 3.4,

Quadro 3.4: Dicas para resolução

Dicas para a resolução. Apresentar os procedimentos da resolução nas folhas a ser entregues.

1- Desenhar a tendência dos dados no plano cartesiano.

2- Cálculos como estes podem orientar a definição da hipótese?

Ano	Variável auxiliar (n)	Índice de motorização no Estado do Paraná (veículos/100 hab)	Variação de M $\Delta M = M_{n+1} - M_n$	$\frac{\Delta M}{M} = \frac{M_{n+1} - M_n}{M_n}$
2001		26,36		
2002		27,98		
2003		29,81		
2004		32,02		
2005		34,17		
2006		36,21		
2007		38,89		
2008		41,15		
2009		43,83		
2010		48,30		

Fonte: elaborado pela professora da turma.

A partir dessas dicas, os alunos elaboraram a seguinte hipótese $\frac{\Delta M}{M} = k$.

Partindo da hipótese, temos:

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{M_{n+1} - M_n}{M_n} = k$$

$$\frac{M_{n+1} - M_n}{M_n} = k$$

$$M_{n+1} - M_n = kM_n$$

$$M_{n+1} = kM_n + M_n$$

$$M_{n+1} = M_n(k+1) \quad (1)$$

Atribuindo valores para *n* em (1), temos:

$$n = 1 \Rightarrow M_2 = M_1(k+1)$$

$$n = 2 \Rightarrow M_3 = M_2(k+1) \Rightarrow M_3 = M_1(k+1)^2$$

$$n = 3 \Rightarrow M_4 = M_3(k+1) \Rightarrow M_4 = M_1(k+1)^3$$

$$\vdots$$

$$M_i = M_1(k+1)^{i-1}$$

Levando em consideração o ano de 2009, temos:

$$n = i - 1 \Rightarrow 9 = i - 1 \Rightarrow i = 10$$

E como o índice do ano de 2009 é 48,30, temos:

$$M_{10} = 26{,}36(k+1)^9$$

$$48{,}30 = 26{,}36(k+1)^9$$

Aplicando o logaritmo em ambos os lados, obtemos:

$$log\frac{48{,}30}{26{,}36} = 9\log(k+1)$$

$$\log(k+1) = \frac{log\frac{48{,}30}{26{,}36}}{9}$$

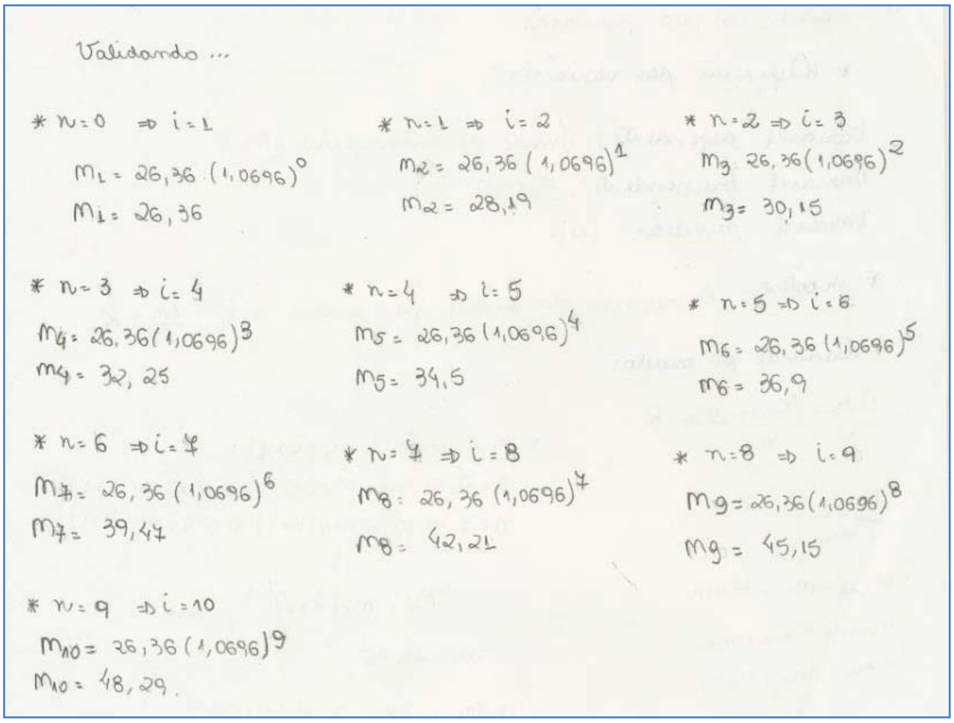
$$k + 1 \cong 1{,}0696$$

Logo, o modelo matemático encontrado é:

$$M_i = 26{,}36(1{,}0696)^{i-1}, \qquad i = n + 1$$

O grupo realizou a validação do modelo encontrado, conforme a Figura 3.5,

Figura 3.5: Validação do modelo da atividade Índice de Motorização no Estado do Paraná



Validando ...

* $n=0 \Rightarrow i=1$
$M_1 = 26{,}36\,(1{,}0696)^0$
$M_1 = 26{,}36$

* $n=1 \Rightarrow i=2$
$M_2 = 26{,}36\,(1{,}0696)^1$
$M_2 = 28{,}19$

* $n=2 \Rightarrow i=3$
$M_3\ 26{,}36\,(1{,}0696)^2$
$M_3 = 30{,}15$

* $n=3 \Rightarrow i=4$
$M_4 = 26{,}36(1{,}0696)^3$
$M_4 = 32{,}25$

* $n=4 \Rightarrow i=5$
$M_5 = 26{,}36\,(1{,}0696)^4$
$M_5 = 34{,}5$

* $n=5 \Rightarrow i=6$
$M_6 = 26{,}36\,(1{,}0696)^5$
$M_6 = 36{,}9$

* $n=6 \Rightarrow i=7$
$M_7 = 26{,}36\,(1{,}0696)^6$
$M_7 = 39{,}47$

* $n=7 \Rightarrow i=8$
$M_8 = 26{,}36\,(1{,}0696)^7$
$M_8 = 42{,}21$

* $n=8 \Rightarrow i=9$
$M_9 = 26{,}36(1{,}0696)^8$
$M_9 = 45{,}15$

* $n=9 \Rightarrow i=10$
$M_{10} = 26{,}36\,(1{,}0696)^9$
$M_{10} = 48{,}29.$

Fonte: registro escrito do grupo 1.

Após a validação, o grupo responde o problema que propuseram: *Quando o número de veículos será equivalente à população do Estado do Paraná?*

$$M_i = 26{,}36(1{,}0696)^{i-1}$$

$$100 = 26{,}36(1{,}0696)^{i-1}$$

$$\frac{100}{26{,}36} = (i-1)\log(1{,}0696)$$

$$log 3{,}793 = (i-1)0{,}0292$$

$$\frac{0{,}5789}{0{,}0292} = i - 1$$

$$i = 20{,}8 + 1 = 21$$

Logo,

$$n = i - 1$$

$$n = 21 - 1 = 20$$

Portanto, $t = 2000 + n \Rightarrow t = 2020$.

Assim, possivelmente a frota de veículos será equivalente à população no ano de 2020, considerando que o índice se mantém crescendo na proporção de 2001 à 2010.

3.4.1.3 Atividade do 3º momento: *Cuidado com o Bafômetro*

Essa atividade foi desenvolvida pelos alunos reunidos em grupos e orientada pela professora da turma e pela pesquisadora. A atividade foi desenvolvida em três encontros.

Os alunos do grupo escolheram esse tema, pois queriam fazer algo que ajudasse as pessoas e como a eliminação do álcool da cerveja no organismo é um tema que está no dia-a-dia da maioria das pessoas, se propuseram a estudá-lo. No início coletaram muitas informações a respeito do tema escolhido e não sabiam como utilizar àquelas informações.

Depois de algumas leituras e pesquisas que fizeram escreveram um texto que explica o tema por eles abordado, conforme o Quadro 3.5,

Quadro 3.5: Texto explicativo a respeito do tema estudado pelos alunos

Cuidado com o bafômetro!

O principal ingrediente das bebidas alcoólicas é a molécula de etanol. Assim que uma pessoa "toma um gole", estas moléculas rapidamente começam a entrar na corrente sanguínea, e se espalham pelo corpo, onde aproximadamente 90% são metabolizadas pelo fígado, e o restante pelos pulmões, rins e pele, para sua eliminação. Este processo ocorre lentamente, eliminando em média 0,10g/L de álcool do sangue do indivíduo por hora.

O consumo de bebidas alcoólicas é um assunto que envolve desde festas e comemorações até riscos. Mesmo com a Lei Seca aprovada em 19 de junho de 2008, Julia Greve médica fisiatra que trabalha no Instituto de Ortopedia e Traumatologia da Universidade de São Paulo afirma que, os números do IML indicam que 50% dos mortos no Brasil vítimas de acidente de trânsito estavam embriagados no momento do acidente. Evidenciando que o hábito de conduzir automóveis após ingerir bebidas alcoólicas continua.

Dados da Universidade Estadual Paulista informam que uma lata skol de 269ml possui 9,22g de álcool. E um condutor que ingerir qualquer quantidade de bebida alcoólica e for submetido à fiscalização de trânsito estará automaticamente sujeito a multa de R$ 1915,40, suspensão do direito de dirigir e terá o veículo retido. Na prática, o condutor não poderá ingerir nenhuma quantidade de álcool que já será considerada a infração de trânsito. Se o indivíduo fizer o teste e a concentração for maior do que 0,068g/L (recomendação do Inmetro como margem de segurança do bafômetro) de sangue, será considerado crime de trânsito e o agente o encaminhará à autoridade policial.

Vejamos esta tabela que mostra a quantidade de sangue no organismo de alguns indivíduos:

Homens		
Massa (kg)	Altura (m)	Quantidade de sangue (L)
65	1,70	4,499
70	1,70	4,660
75	1,70	4,821

Mulheres		
Massa (kg)	Altura (m)	Quantidade de sangue (L)
65	1,70	4,083
70	1,70	4,248
75	1,70	4,414

Situação inicial:
Concentração de álcool no sangue após ingerir bebida alcóolica.
Inteiração:
Buscar informações sobre como o álcool contido na cerveja é eliminado do organismo e como funciona a lei que pune quem dirige alcoolizado.

Fonte: trabalho final dos alunos.

O problema proposto pelo grupo foi: *Após um motorista ingerir uma lata de cerveja quanto tempo ele deve esperar para que o álcool ingerido seja eliminado pelo organismo e consequentemente possa dirigir sem cometer uma infração de trânsito?*

Após conversarem com a professora, os alunos decidiram colocar no papel quais informações eles iriam considerar no trabalho final entregue pelo grupo; eles denominaram como matematização e resolução, onde definiram as variáveis, as hipóteses, conforme a Figura 3.6.

Figura 3.6: Definição das variáveis e hipóteses da atividade Cuidado com o bafômetro

Matematização e resolução:
Definição de variáveis:
Variável independente: t (tempo em horas)
Variável dependente: Q (quantidade de álcool no organismo em g/L)

Hipóteses:
- O organismo elimina em média 0,10 g/L de álcool no sangue por hora;
- 269 ml de cerveja contém 9,22 g de álcool;
- Se o indivíduo fizer o teste do bafômetro e a concentração for maior do que 0,068g/L (recomendação do Inmetro como margem de segurança do bafômetro) de sangue, será considerado crime de trânsito.

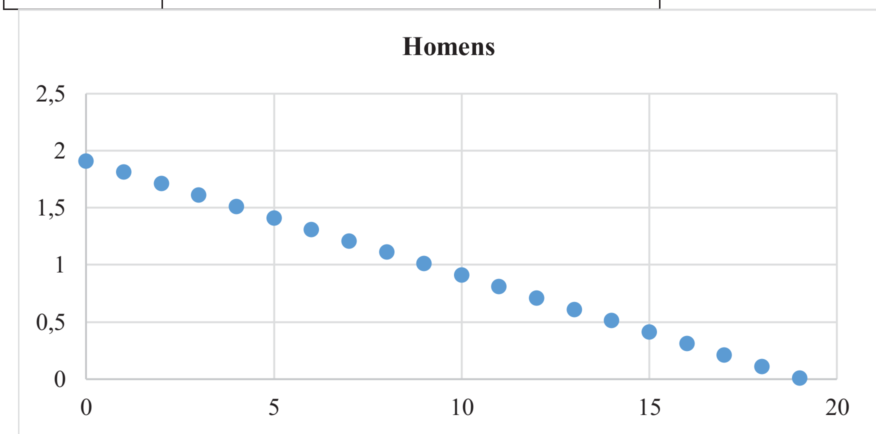
Fonte: trabalho final dos alunos.

Na matematização e resolução obtiveram o modelo matemático, utilizaram recorrência para encontrar o modelo, construíram gráficos para verificar o comportamento dos dados, conforme a Figura 3.7.

Figura 3.7: Modelo matemático obtido pelo grupo na atividade Cuidado com o bafômetro

- Considerando um homem de 75 kg e 1,70 m de altura.

t	Q(t)
0	Q_0 =9,22/4,821= 1,912466293
1	Q_1= Q_0-0,10=1,912466293 - 0,10= 1,812466293
2	Q_2= Q_1-0,10= Q_0-0,10- 0,10= Q_0- 2(0,10)= 1,712466293
3	Q_3= Q_0- 3(0,10)= 1,912466293- 0,30= 1,612466293
n	Q_n= Q_0 –n(0,10)= 1,912466293- t(0,10)



Modelo matemático:

$Q_n = Q_0\,(n+1) - \sum (0,10)$

Fonte: trabalho final dos alunos.

O grupo realizou a interpretação e validação do modelo matemático, conforme a Figura 3.8.

Figura 3.8: Interpretação e validação da atividade: *Cuidado com o Bafômetro*

Interpretação e Validação

t	Q(t)	Validação
0	1,912466	1,9125
1	1,812466	1,8125
2	1,712466	1,7125
3	1,612466	1,6125
4	1,512466	1,5125
5	1,412466	1,4125
6	1,312466	1,3125
7	1,212466	1,2125
8	1,112466	1,1125
9	1,012466	1,0125
10	0,912466	0,9125
11	0,812466	0,8125
12	0,712466	0,7125
13	0,612466	0,6125
14	0,512466	0,5125
15	0,412466	0,4125
16	0,312466	0,3125
17	0,212466	0,2125
18	0,112466	0,1125
19	0,012466	0,0125
20	-0,08753	-0,0875

Um homem de 75kg e 1,70m de altura, após ingerir uma lata de cerveja de 269ml poderá dirigir sem correr riscos de ser detectado no bafômetro após 19horas.

t	Q(t)	Validação
0	2,088808	2,0888
1	1,988808	1,9888
2	1,888808	1,8888
3	1,788808	1,7888
4	1,688808	1,6888
5	1,588808	1,5888
6	1,488808	1,4888
7	1,388808	1,3888
8	1,288808	1,2888
9	1,188808	1,1888
10	1,088808	1,0888
11	0,988808	0,9888
12	0,888808	0,8888
13	0,788808	0,7888
14	0,688808	0,6888
15	0,588808	0,5888
16	0,488808	0,4888
17	0,388808	0,3888
18	0,288808	0,2888
19	0,188808	0,1888
20	0,088808	0,0888
21	-0,01119	-0,0112

Uma mulher de 75kg e 1,70m de altura, após ingerir uma lata de cerveja de 269ml, poderá ingerir sem riscos de ser detectada no bafômetro após 21horas.

Fonte: trabalho final dos alunos.

3.4.1.4 Atividade do 3º momento: Todo cuidado é pouco! O número da Aids

Essa atividade foi desenvolvida pelos alunos e orientada pela professora da turma e pela pesquisadora. A atividade foi desenvolvida em três encontros. O grupo teve muitas ideias com relação ao trabalho final, fizeram várias pesquisas e discutiram entre si.

Após discutirem em grupo, pesquisarem informações a respeito dos temas elencados, decidiram trabalhar com a atividade que denominaram *Todo Cuidado é pouco! O número da Aids*. No trabalho entregue pelo grupo, levantaram informações sobre o tema numa parte denominada por eles de situação inicial, conforme o Quadro 3.6.

Quadro 3.6: Situação inicial da atividade: *Todo Cuidado é pouco! O número da Aids*

Situação Inicial:

Sobre a Aids

No dia 1º de dezembro é comemorado o dia Mundial de Luta contra a Aids. Uma decisão da Assembleia Mundial de Saúde, adotada no Brasil, a partir de 1988.

AIDS é a Síndrome da Imunodeficiência Humana, e se caracteriza pelo enfraquecimento do sistema de defesa do corpo e pelo aparecimento das doenças oportunistas. Como esse vírus ataca as células de defesa do nosso corpo, o organismo fica mais vulnerável a diversas doenças, de um simples resfriado a infecções mais graves como tuberculose e até alguns tipos de cânceres.

Neste domingo (1/12), Dia Mundial de Luta Contra a AIDS, o Ministério da Saúde divulgou o novo boletim sobre a doença no Brasil. são estimados 718 mil portadores de HIV, dos quais cerca de 150 mil ainda não sabem de sua condição. “São quase três Maracanãs lotados”.

Os números demonstram que a Aids, no Brasil apesar de concentrada em populações vulneráveis está também muito presente no universo feminino. De 1980 a junho de 2011, foram identificados 397.662 (65,4%) casos da doença no sexo masculino e 210.538 (34,6%) no sexo feminino. No entanto, essa diferença vem diminuindo ao longo dos anos. Em 1989, a razão era de seis homens infectados para cada mulher, enquanto em 2010 passou para de seis a cada 1,7. Em 2010, a taxa de incidência entre homens foi de 22,9 casos por 100 mil habitantes e nas mulheres, a taxa foi de 13,2 por 100 mil habitantes.

Em 2010, foram registrados mais casos de mulheres entre 13 e 19 anos com Aids do que homens da mesma faixa etária. Segundo dados divulgados pelo Ministério da Saúde, em 2010, foram registrados 349 casos de Aids entre meninas contra 296 notificações do vírus entre meninos. Pelos números, a incidência da doença entre mulheres jovens é de 2,9 para cada 100 mil habitantes, enquanto entre homens a taxa é de 2,5 para cada 100 mil habitantes.

Até 30 de junho de 2011, 137 meninas de 13 a 19 foram infectadas, enquanto 110 jovens do sexo masculino tiveram a doença detectada. "Temos uma grande preocupação com mulheres jovens, de 13 a 19 anos, pelo fato de ter mais mulheres que homens nessa faixa etária e pelo aumento dos casos de Aids entre meninas”, disse o ministro da Saúde, Alexandre Padilha, em entrevista coletiva. Por causa do aumento de casos de Aids no sexo feminino, um dos focos da campanha de prevenção do governo federal serão mulheres de 13 a 19 anos.

Quando se leva em consideração tanto homens quanto mulheres, a incidência da enfermidade é maior entre pessoas de 35 a 39 anos. De acordo com o Ministério da Saúde, em 2010, a taxa de incidência da doença entre pessoas dessa faixa etária é de 38,1 para cada 100 mil habitantes. A taxa de incidência da doença entre homens dessa faixa etária passou de 67,8 casos a cada 100 mil habitantes em 1998 para 49,4 em 2010. Já a verificada entre mulheres aumentou de 26,8 casos a cada 100 mil habitantes para 27,4. A segunda faixa etária com maior incidência é entre 30 e 34 anos (37,4 para cada 100 mil habitantes).

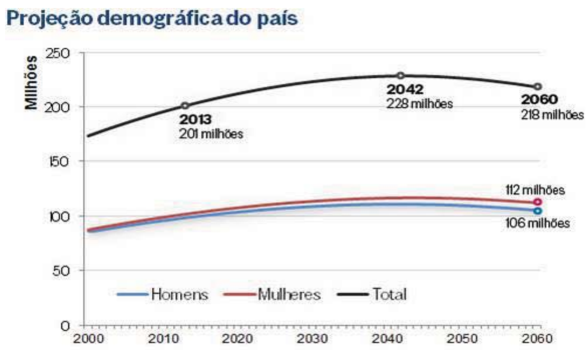
Na faixa etária acima de 50 anos, a taxa entre mulheres aumentou 75,9% em 2010 na comparação com os dados de 1998. Nos homens, a incidência passou de 14,5 casos por 100 mil habitantes em 1998 para 18,8 no ano passado.

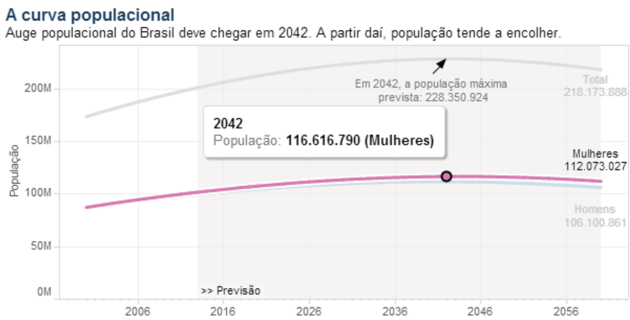
Fonte: trabalho final dos alunos.

Continuação do Quadro 3.7

Sobre a população do Brasil:

O Brasil vai parar de crescer em 2042. Uma nova projeção para a população brasileira, divulgada nesta quinta-feira pelo IBGE, mostra que o país vai atingir o seu ápice populacional naquele ano, quando terá 228,4 milhões de habitantes. A partir daí, a população começa a decrescer - em 2060, por exemplo, já estará no mesmo nível de 2025, um total de 218,2 milhões de pessoas. Em 2013, a população é de 201 milhões.





Fonte: trabalho final dos alunos.

A partir dessas informações levantadas, o grupo propôs o problema: *No ano do ápice populacional do Brasil (2042), o número de incidência de casos de Aids será maior nos homens ou nas mulheres?*

Para encontrar o modelo matemático que respondesse o problema proposto por eles, utilizaram alguns softwares como: Excel, CurveExpert e Geogebra, com o intuito de determinar a função que melhor descrevesse o conjunto de dados que possuíam.

O grupo levantou as seguintes variáveis e hipóteses,

Variáveis:

Variável independente: Tempo (t).

Variável dependente: Taxa de incidência de Aids masculino (M) e feminino (F).

Quantidade total da população (Q(P)).

Variável auxiliar: (x).

Sexo masculino: m(t)

Sexo feminino: f(t)

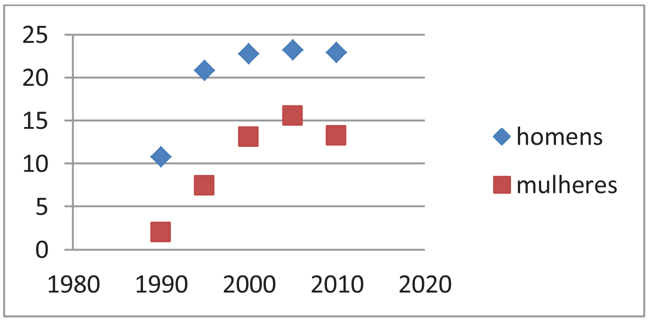
Com o intuito de compreender o comportamento dos dados coletados os alunos construíram a Tabela 3.1 e a curva de tendência dos dados conforme a Figura 3.9.

Tabela 3.1: Incidência de Aids em ambos os sexos

X	*Tempo (t)*	*Sexo feminino (F)*	*Sexo masculino (M)*
0	*1990*	*1,96*	*10,74*
1	*1995*	*7,45*	*20,83*
2	*2000*	*13,05*	*22,75*
3	*2005*	*15,5*	*23,22*
4	*2010*	*13,2*	*22,9*

Fonte: trabalho final dos alunos.

Figura 3.9: Curva de tendência



Fonte: trabalho final dos alunos.

A partir disso, elencaram as seguintes hipóteses:

- A população brasileira atingirá seu ápice em 2042, com 228.350.224 habitantes dos quais 116.616.790 serão mulheres e 111.734.134 serão homens.
- A situação pode ser representada por meio de um modelo definido por partes. A primeira por uma função polinomial do 3° grau, no intervalo de 1990 a 2005, e a segunda, no intervalo de 2005 a 2010, por uma exponencial decrescente.

Para encontrar o modelo matemático, utilizaram pontos que variavam de 5 em 5 anos, plotaram os pontos para estudar a tendência dos dados.

Analisando a tendência dos dados, o grupo decidiu dividir o estudo em duas partes, uma para o sexo masculino e outra para o sexo feminino. Encontrando assim os seguintes modelos matemáticos,

Sexo Masculino:

$$\mathrm{m(t)} = \begin{cases} 1{,}12\left(\dfrac{\mathrm{t}-1990}{5}\right)^3 + 16{,}415\left(\dfrac{\mathrm{t}-1990}{5}\right) + 10{,}74, & \text{se } 1995 \leq \mathrm{t} \leq 2010 \\ 24{,}20708061(0{,}986218776)^{\left(\frac{\mathrm{t}-1990}{5}\right)}, & \text{se } \mathrm{t} > 2010 \end{cases}$$

Sexo Feminino:

$$\mathrm{f(t)} = \begin{cases} 1{,}12\left(\dfrac{\mathrm{t}-1990}{5}\right)^3 + 16{,}415\left(\dfrac{\mathrm{t}-1990}{5}\right) + 10{,}74\,, & \text{se } 1995 \leq \mathrm{t} \leq 2010 \\ 24{,}20708061(0{,}986218776)^{\left(\frac{\mathrm{t}-1990}{5}\right)}, & \text{se } \mathrm{t} > 2010 \end{cases}$$

O grupo coloca em seu relatório final o item *interpretação e validação*, em que eles *respondem o problema*, conforme a Figura 3.10.

Figura 3.10: Interpretação e validação da atividade *Todo Cuidado é pouco! O número da Aids*

Análise do modelo e de suas estimativas. ➢ *Respondendo ao problema:* x= $\frac{t-1990}{5}$ x= $\frac{2042-1990}{5}=\frac{52}{5}$= 10,4 **Masculino:** **f(10, 4)=** $24{,}20708061(0{,}986218776)^{10{,}4}$ **f(10, 4)=** 24,20708061(0,865609415) **f(10, 4)=** 20,95387689 **$f(t)_M$** ≅ 20,95 **Feminino:** **f(10, 4)=** $25{,}09602854(0{,}85161283)^{10{,}4}$ **f(10, 4)=** 25,09602854(0,188156498) **f(10, 4)=**4,721980844 **$f(t)_F$** ≅ 4,72	Em 2042 haverá aproximadamente: **Homens:** 111.734.134 **Mulheres:** 116.616.790 Seja, $\mathrm{M} = \frac{\mathrm{Q}}{100.000}\mathrm{f(t)}$ Temos: $M = \frac{116.616.790}{100.000} \times 4{,}72$ $\mathrm{M} = 1.166{,}17 \times 4{,}7$ $\mathbf{M} = 5.504{,}32$ Logo, o número de mulheres com incidência da doença será de aproximadamente 5.505 mil. Para o caso masculino, temos: Assim, $\mathrm{H} = 23.408{,}95$ $\mathrm{H} = \frac{\mathrm{Q}}{100.000}\mathrm{m(t)}$	Logo, o número de homens com incidência da doença será de aproximadamente 23.409 mil. **Conclusão:** Assim pode-se concluir que mesmo que o número de mulheres no ano de 2042 seja maior que o de homens, isso não será suficiente para que a quantidade de mulheres com incidência de Aids ultrapasse a quantidade de homens com a doença.

Fonte: relatório final do grupo.

4 A TRAJETÓRIA DOS ALUNOS E SUAS COMPETÊNCIAS IDENTIFICADAS NOS TRÊS MOMENTOS DE FAMILIARIZAÇÃO COM A MODELAGEM MATEMÁTICA

A análise dos dados coletados nos três momentos de familiarização foi realizada à luz da Teoria Fundamentada em Dados, seguindo orientações de Charmaz (2009). O intuito desta abordagem adotada é buscar nos dados reflexões sobre a nossa questão de investigação:

Quais competências são requeridas ou são desenvolvidas pelos alunos com o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática?

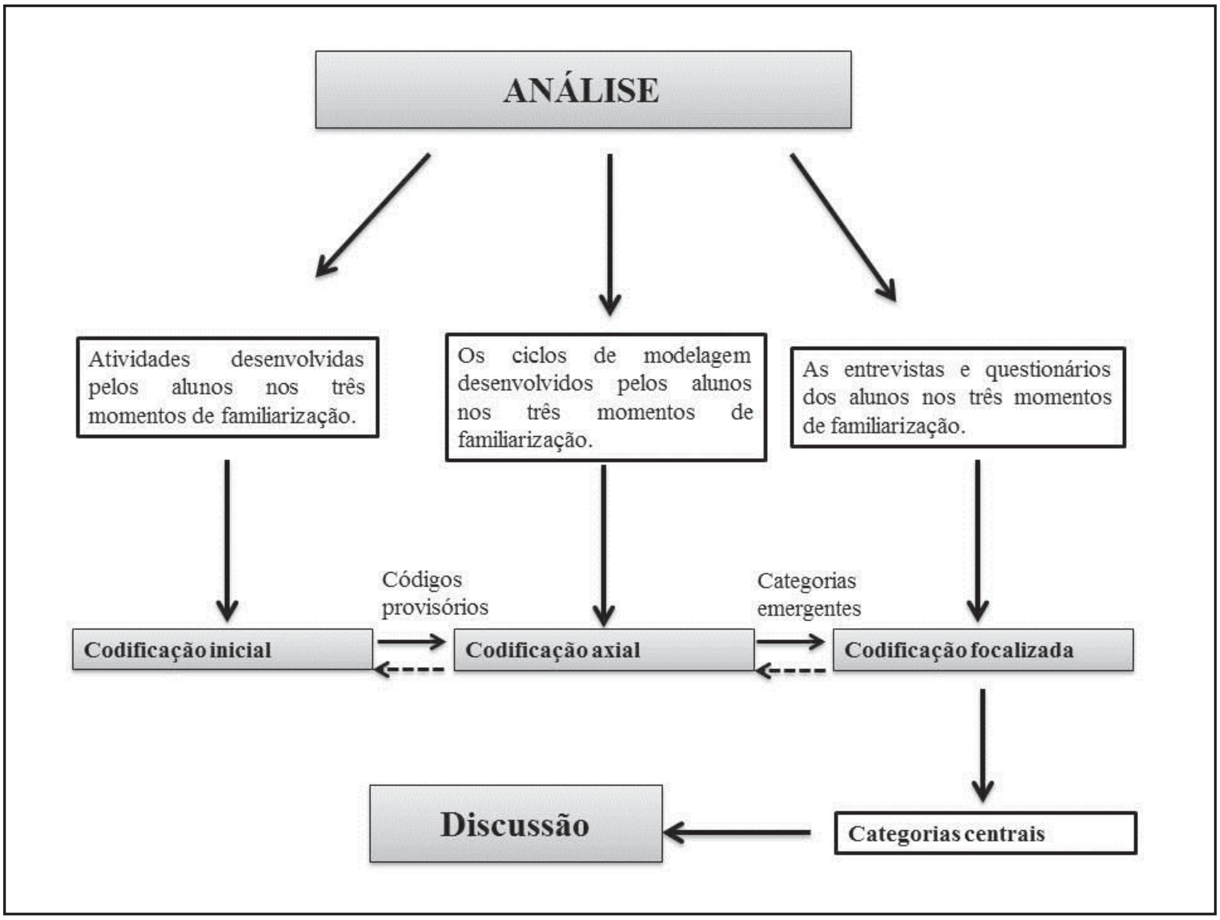
Com a intenção de apresentar reflexões a respeito dessa problemática, considerando os três momentos de familiarização, investigamos as competências dos alunos para fazer modelagem, as características referentes aos procedimentos que podem ser observados no desenvolvimento das atividades e como os alunos descrevem seus próprios ciclos de modelagem, analisando o próprio desenvolvimento de atividades.

Para a análise dos dados consideramos a seguinte estrutura: inicialmente foi feita uma análise específica dos dados provenientes dos registros das atividades desenvolvidas em cada momento de familiarização e, por meio dessa análise, realizamos a codificação inicial. Em seguida, a fim de que os códigos pudessem ser agrupados em categorias provisórias realizamos uma análise específica dos dados provenientes dos ciclos apresentados pelos alunos em cada momento de familiarização – codificação axial. Também realizamos uma análise específica dos questionários, entrevistas considerando os três momentos, visando à codificação focalizada, a fim de que as categorias que emergiram na codificação axial fossem confirmadas ou que novas categorias fossem identificadas. E por fim, realizamos uma discussão com o referencial teórico abordado nesse trabalho. Os dados referentes a cada momento foram organizados no decorrer da coleta e o tratamento de cada conjunto dos dados, visando à análise, foi realizado manualmente.

Nesse capítulo muitas vezes nos remetemos aos códigos obtidos durante as codificações inicial, axial e focalizada. Esses códigos, em geral, são palavras ou uma sequência de palavras que indicam ação e, nesse texto, estão entre colchetes para identificação. Nos diálogos dos alunos sublinhamos o que nos remete aos códigos.

À luz da Teoria Fundamenta em Dados, uma representação esquemática do processo de análise dos dados, é ilustrada pelo Quadro 4.1.

Quadro 4.1: Esquema representativo para a Análise dos Dados



Fonte: elaborado pela autora.

4.1 Codificação inicial: análise das atividades do 1º, 2º e 3º momentos

Para a escolha dos alunos analisados, levamos em consideração alguns critérios:

- A participação do aluno nos três momentos de familiarização;
- A entrega de todos os questionários;
- A participação na entrevista;
- A entrega dos registros das atividades.

Desse modo, cinco alunos cumpriram os critérios estabelecidos e serão identificados como A1, A2, A3, A4 e A5. Quando nos referirmos à professora utilizamos Pr e P para a pesquisadora. Considerando que em alguns momentos aparece a fala de outros alunos, além dos cinco alunos analisados, usaremos a denominação “Aluno(s)”. Nos diálogos apresentados os códigos foram sublinhados.

No primeiro contato que tivemos com os alunos, procuramos por meio de um Questionário (Apêndice A) traçar um perfil dos alunos pesquisados, conforme ilustrado no Quadro 4.2.

Quadro 4.2: Questionário do perfil dos alunos

Perguntas	Aluno – A1	Aluno – A2	Aluno – A3	Aluno – A4	Aluno – A5
1) Qual sua idade?	20	20	20	20	24
2) Já concluiu algum curso superior? Qual?	Não.	Não.	Não.	Não.	Não.
3) Você realiza outras atividades além das acadêmicas? Se sim, quais?	Não.	Sim, trabalho em uma escola particular de educação básica, sou professora de informática.	Sim, sou professora da rede municipal de ensino, fiz magistério.	Não.	Não.
4) Você já teve contato com algum projeto (extensão, ensino ou pesquisa) durante a graduação? Qual? Você gostou? Comente.	Não. Mas pretendo fazer parte de algum projeto.	Não.	Durante a graduação não, mas no ensino médio participei de um projeto de pesquisa na UENP pela Fundação Araucária, na área de tecnologia na Educação Matemática, gostei muito, foi uma ótima experiência para a minha profissão.	Sim, faço parte de um projeto de extensão que tem o objetivo de dar um curso sobre as tendências: modelagem matemática, investigação, resolução de problemas e tecnologia para professores da rede pública.	Ainda não.
5) Você tem experiência como professor de matemática? Quanto tempo? Em que nível de escolaridade?	Não.	Sim. Reforço de matemática para os anos iniciais.	Sim, seis meses como professora de oficina de experiências matemáticas no ensino fundamental I (anos iniciais).	Não.	Não.
6) Você já teve contato com a modelagem matemática antes de iniciar esta disciplina? Qual? E em que contexto?	É a primeira vez que tenho contato.	Não, nunca.	Sim, com uma amiga que realiza um projeto na universidade e ela foi apresentar um trabalho sobre modelagem e apresentou para mim e achei muito interessante.	Sim, foi através do projeto de extensão.	Não.

Fonte: questionário dos alunos.

O Quadro 4.2 apresenta experiências que os alunos possuem com relação à modelagem matemática, se já possuíam alguma experiência como professores de Matemática, se já desenvolveram algum projeto ou se realizam outras atividades além das acadêmicas. Tais informações são importantes, pois além de conhecermos algumas experiências dos alunos, podemos também ter indícios de como essas experiências influenciam durante o desenvolvimento das atividades de modelagem.

4.1.1 Análise da atividade de modelagem: Para o lanche: Vai uma pipoca aí? (1º Momento de Familiarização)

A codificação nessa atividade se deu a partir da descrição abreviada apresentada no Capítulo 3, da transcrição do arquivo de vídeo com parte do desenvolvimento da atividade e do registro escrito dos alunos. A atividade foi desenvolvida pela professora regente da turma juntamente com os alunos em dois encontros nos quais todos eles foram organizados em um único grupo.

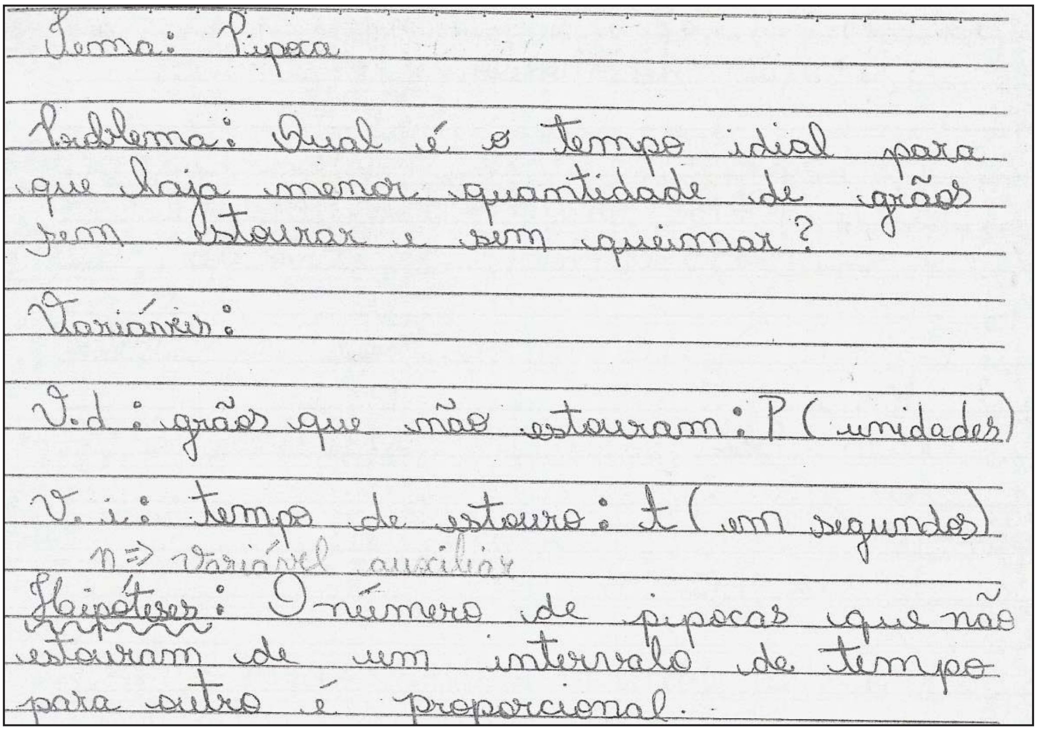
Na primeira aula, os alunos formaram um grande grupo para o desenvolvimento da atividade denominada *Para o lanche: vai uma pipoca aí?* Os alunos juntamente com a professora leram a situação inicial, descrita no Capítulo 3, seção 3.4.1.1. E a partir das informações definiram o problema que seria estudado, identificaram as variáveis e definiram as hipóteses que os ajudariam na dedução do modelo matemático.

Na discussão a respeito do modelo que pudesse representar a situação inicial, a participação dos alunos foi tímida. Podemos inferir que talvez isso esteja acontecendo pelo fato de que para muitos deles era o primeiro contato com atividades de modelagem.

Considerando quatro pacotes de 100g de milho de pipoca de mesma marca em um forno de micro-ondas cujo tempo programado da pipoca é de 2 minutos e 50 segundos o problema foi definido conjuntamente entre os alunos e a professora como sendo: Qual é o tempo ideal para que haja menor quantidade de grãos sem estourar e sem queimar?

A partir do problema que se propuseram a resolver, foi necessária a definição de metas para encontrar a solução. Assim, os alunos juntamente com a professora, a partir dos dados iniciais selecionaram as variáveis e formularam a hipóteses. Com base em Bassanezi (2011) e Almeida, Silva e Vertuan (2012), reconhecemos que a seleção de variáveis e a formulação de hipóteses são procedimentos efetuados pelos alunos juntamente com a professora e que aparecem no registro de todos. Apresentamos como exemplo, o registro do aluno A1, conforme mostra a Figura 4.1.

Figura 4.1: Problema, seleção de variáveis e formulação de hipótese de A1



Tema: Pipoca

Problema: Qual é o tempo idial para que haja menor quantidade de grãos sem estourar e sem queimar?

Variáveis:

V.d: grãos que não estouram: P (unidades)

V.i: tempo de estouro: t (em segundos)

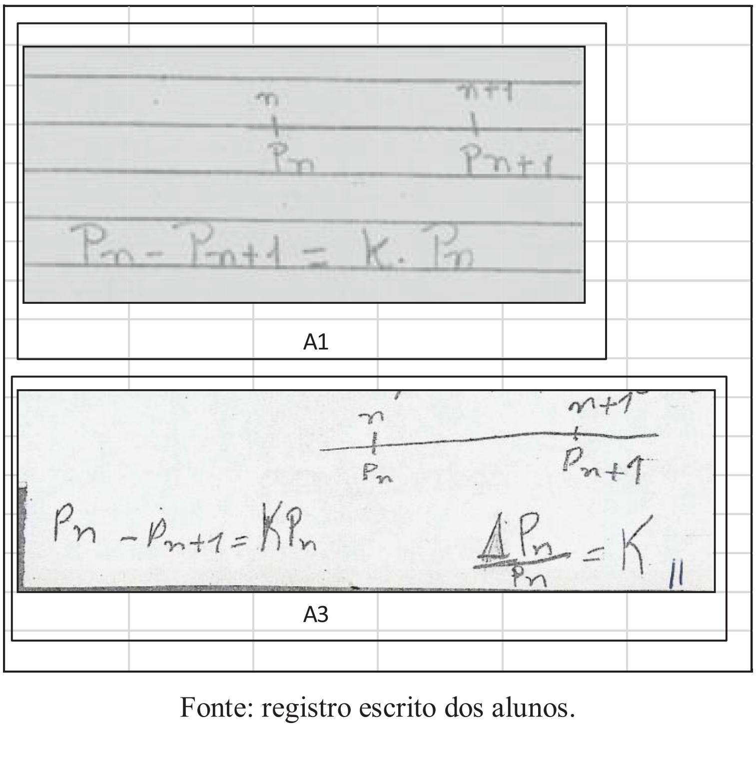
n ⇒ variável auxiliar

Hipóteses: O número de pipocas que não estouram de um intervalo de tempo para outro é proporcional.

Fonte: registro do aluno.

A professora realizou a discussão com os alunos do significado da hipótese que eles levantaram e no que ela ajudaria na construção do modelo matemático. Os alunos A1 e A3 apresentam em seus registros o que significa em termos matemáticos a hipótese que foi levantada, conforme mostra a Figura 4.2.

Figura 4.2: Hipótese em termos matemáticos da atividade do primeiro momento

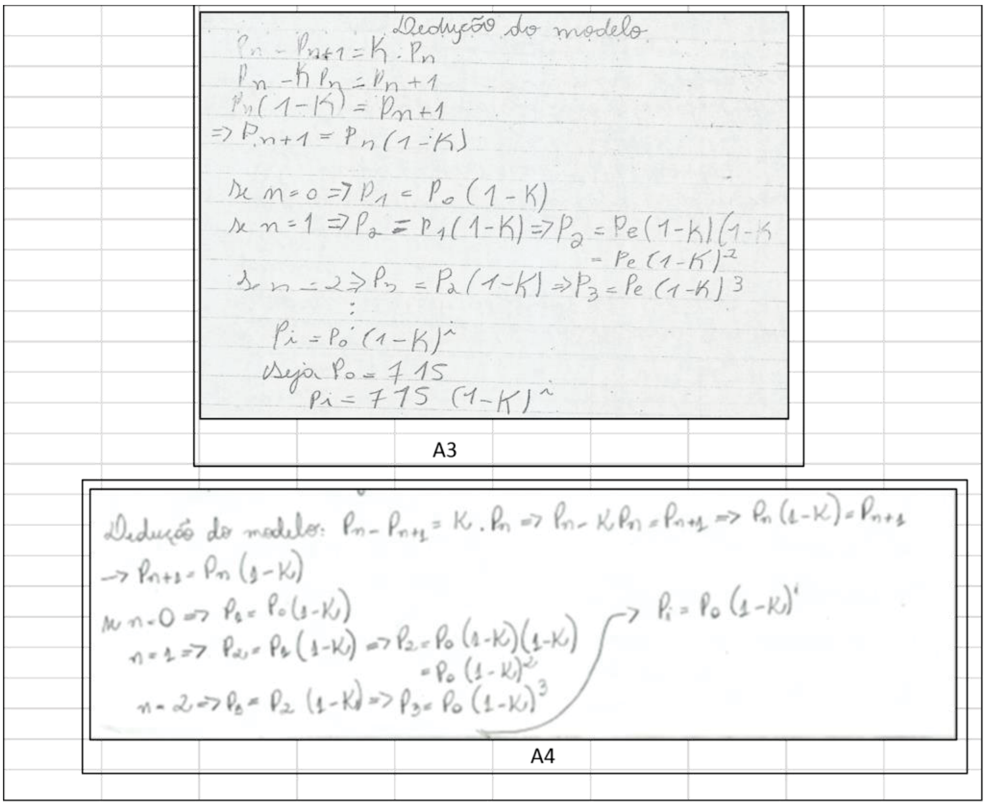


Fonte: registro escrito dos alunos.

Nessa etapa os alunos estão matematizando a situação. Podemos inferir que esses alunos compreenderam o significado da hipótese na linguagem matemática, estão estabelecendo relações que serão relevantes para a dedução do modelo matemático [transformando a hipótese em linguagem algébrica]. Segundo Maaβ (2006) no que diz respeito às etapas de modelagem, os alunos podem ter desenvolvido a *competência para entender o problema e a construção de um modelo baseado no problema*. Os alunos A1 e A3 apresentam em seus registros a hipótese em termos matemáticos conforme Figura 4.2. Considerando que Jensen (2007) se refere a raio de ação como a relação com os diferentes contextos e situações que alguém pode ativar a competência, ou seja, os conhecimentos, capacidades e atitudes de alguém frente à situação. Podemos considerar que o raio de ação é maior nos alunos A1 e A3 do que nos alunos A2, A4 e A5, pois eles mobilizam seus conhecimentos com relação a hipótese do problema conforme indica a Figura 4.2.

Para responder o problema proposto, a professora e os alunos, a partir da hipótese, deduzem o modelo matemático [deduzindo o modelo matemático] pelo método de recorrência. Os alunos A3 e A4 apresentam em seus registros como a construção do modelo matemático foi iniciado conforme Figura 4.3.

Figura 4.3: Início da dedução do modelo dos alunos A3 e A4 na atividade Para o lanche: vai uma pipoca aí?


Dedução do modelo
$P_n - P_{n+1} = K \cdot P_n$
$P_n - K P_n = P_n + 1$
$P_n(1-K) = P_n + 1$
$\Rightarrow P_{n+1} = P_n(1-K)$
se $n=0 \Rightarrow P_1 = P_0(1-K)$
se $n=1 \Rightarrow P_2 = P_1(1-K) \Rightarrow P_2 = P_e(1-K)(1-K$
$= P_e(1-K)^2$
se $n=2 \Rightarrow P_3 = P_2(1-K) \Rightarrow P_3 = P_e(1-K)^3$
$\vdots$
$P_i = P_0(1-K)^i$
seja $P_0 = 715$
$P_i = 715(1-K)^i$
A3

Dedução do modelo: $P_n - P_{n+1} = K \cdot P_n \Rightarrow P_n - KP_n = P_{n+1} \Rightarrow P_n(1-K) = P_{n+1}$
$\Rightarrow P_{n+1} = P_n(1-K)$
se $n=0 \Rightarrow P_1 = P_0(1-K)$
$n=1 \Rightarrow P_2 = P_1(1-K) \Rightarrow P_2 = P_0(1-K)(1-K)$
$= P_0(1-K)^2$
$n=2 \Rightarrow P_3 = P_2(1-K) \Rightarrow P_3 = P_0(1-K)^3$
$\rightarrow P_i = P_0(1-K)^i$
A4

Fonte: registro escrito dos alunos.

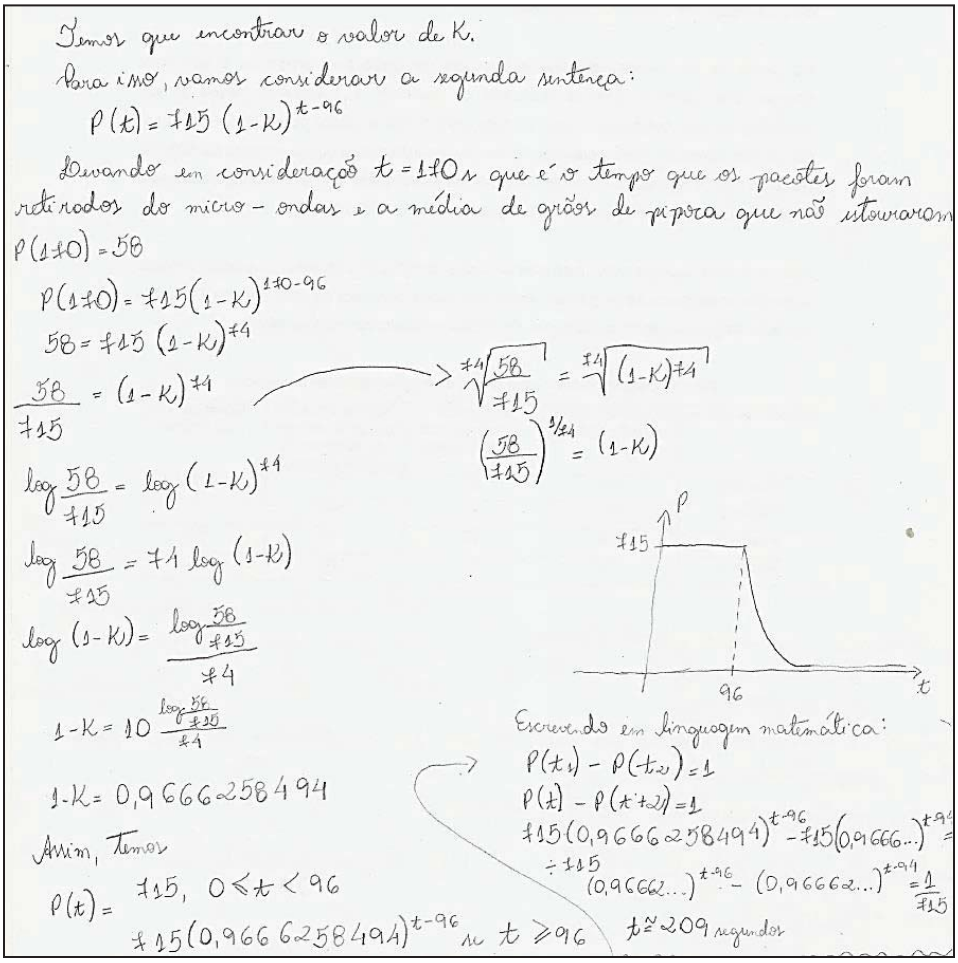
Segundo Maaβ (2006) uma competência associada à construção do modelo matemático é *a competência para a construção de um modelo matemático a partir de um problema não matemático*. Destacamos que nos registros dos alunos A3 e A4 é possível reconhecer essa competência. Os demais alunos apenas colocam o modelo já deduzido. Considerando que Jensen (2007) se refere a raio de ação como a relação com os diferentes contextos e situações que alguém pode ativar a competência, ou seja, os conhecimentos, capacidades e atitudes de alguém frente à situação, os alunos A3 e A4 realizam a dedução do modelo consideramos que o raio de ação deles é maior em relação aos alunos A1, A2 e A5.

No segundo dia do desenvolvimento da atividade, a discussão da professora com os alunos é a respeito de encontrar o valor de *k*, conforme indica o diálogo,

> .
> Pr: tem que calcular o valor da base para saber o comportamento da função. Bom gente nós paramos aqui, temos que encontrar o valor de 1-k, como vamos fazer isso?
> [...] silêncio
> Pr: Se atribuir o valor para t vai encontrar o valor de k, não vai? Mas se atribuir o valor para t aqui né (professora aponta para a segunda sentença da função).
> Pr: e tem como eu saber como encontrar o valor que eu vou usar para t aqui?
> Aluno: maior ou igual a 96,
> Pr: mas qualquer um?
> Aluno: não P(t) tem que tender a zero.
> Pr: Então como a gente faz pra a partir de um t que valor pra P(t) a gente vai levar em consideração?
> A3: próximo de zero?
> Pr: Mas qual? Gente olha aí, as informações que temos na tabela.
> Alunos: a partir de 96
> Pr: quem é a variável independente?
> A5: os grãos de pipoca
> Pr: e independente?
> Alunos: tempo
> Pr: e se pegar o 96, eu vou encontrar o valor de *k*?
> Aluno: não
> [...]
> Pr: depende de como foi embalada as pipocas. Não vamos levar em consideração o 96, 97 porque foi quando começou a estourar as pipocas e daí quando que todos foram tiradas do micro-ondas em 170 segundos. Aí qualquer um desses valores que a gente pegar vai ter um P(t) relacionado não vai?
> [...] silêncio
> A5: vamos considerar a menor quantidade que estourou?
> Pr: pode ser?
> Aluno: pode ser uma média
> Pr: é ficará mais próximo, todo mundo concorda em pegar a média?
> [...] silêncio

De modo geral, a participação dos alunos é tímida nas discussões proposta pela professora. Nesse diálogo podemos reconhecer que os alunos juntamente com a professora estão usando conhecimentos matemáticos para encontrar a solução para o problema [resolvendo questões matemáticas], conforme indica a Figura 4.4.

Figura 4.4 Resolvendo questões matemáticas aluno A4 na atividade Para o lanche: vai uma pipoca aí?



Temos que encontrar o valor de K.
Para isso, vamos considerar a segunda sentença:

$P(t) = 715\,(1-K)^{t-96}$

Levando em consideração $t = 170$ s que é o tempo que os pacotes foram retirados do micro-ondas e a média de grãos de pipoca que não estouraram

$P(170) = 58$

$P(170) = 715(1-K)^{170-96}$

$58 = 715\,(1-K)^{74}$

$\frac{58}{715} = (1-K)^{74}$ → $\sqrt[74]{\frac{58}{715}} = \sqrt[74]{(1-K)^{74}}$

$\left(\frac{58}{715}\right)^{1/74} = (1-K)$

$\log \frac{58}{715} = \log (1-K)^{74}$

$\log \frac{58}{715} = 74 \log (1-K)$

$\log (1-K) = \dfrac{\log \frac{58}{715}}{74}$

$1-K = 10^{\frac{\log \frac{58}{715}}{74}}$

$1-K = 0{,}9666258494$

Assim, temos

$P(t) = \begin{cases} 715, & 0 \leq t < 96 \\ 715(0{,}9666258494)^{t-96} & \text{se } t \geq 96 \end{cases}$

Escrevendo em linguagem matemática:

$P(t_1) - P(t_2) = 1$

$P(t) - P(t+2) = 1$

$715(0{,}9666258494)^{t-96} - 715(0{,}9666\ldots)^{t-94} = 1$

$\div 715$

$(0{,}96662\ldots)^{t-96} - (0{,}96662\ldots)^{t-94} = \frac{1}{715}$

$t \cong 209$ segundos

Fonte: registro do aluno.

Os alunos juntamente com a professora deduzem o modelo matemático e representam graficamente o modelo [representando o modelo graficamente]. Desse modo, questões matemáticas são discutidas com relação à situação inicial, conforme indica o diálogo. Em seguida, retornam ao problema para respondê-lo [retornando ao problema; apresentando uma solução ao problema].

> Pr: agora sabemos como é a representação gráfica da função. Vamos responder o problema? Esse modelo tudo bem para vocês? De fato é verídico? Entre 0 e 96 tem a mesma quantidade de pipoca? E o que acontece a partir do 96?
> A5: começa estourar.
> Pr: isso, estoura, estoura, e vai diminuindo gradativamente. Então olha só a representação gráfica como que seria. (a professora faz o gráfico para os alunos)
> Pr: nunca chega a zero, essa função é assintótica. O que acontece com o limite?
> Alunos: vai tender a zero.
> Pr: responderam o problema? Qual o problema?

A3: agora que vai validar?
Pr: Agora que vamos responder o problema. Como faríamos para responder o problema?
Aluno: tem que tender a zero, substitui o valor nele.
Pr: que valor? Qual seria o menor valor a ser considerado?
Aluno: uma pipoca
Pr: Porque uma pipoca?
Aluno: Porque a menor pipoca diferente de zero é uma pipoca.
Pr: é uma função discreta, porque consideramos o grão da pipoca, mas o tempo é contínuo. Bom mais e daí, substituímos quem por uma pipoca.
Alunos: o P(t)

Nesse diálogo, reconhecemos que os alunos e a professora estão interpretando os resultados obtidos [interpretando os resultados; validando]. Nesse momento eles avaliam a validade da representação matemática associada ao problema, levando em consideração tanto os procedimentos matemáticos quanto a adequação que essa representação possui para a situação. Segundo Maaβ (2006), a interpretação de resultados matemáticos associados ao problema, a visualização para o problema usando linguagem matemática apropriada estão relacionados à *competência para interpretar resultados matemáticos em uma situação real*.

Considerando as nossas análises dos dados, inferimos que no primeiro momento de familiarização os alunos ainda não desenvolveram competências no que diz respeito à definição do problema, ao levantamento de variáveis e hipóteses. As competências nesse momento estão associadas ao reconhecimento de como é que se desenvolve uma atividade de modelagem matemática.

4.1.2 Análise da atividade de modelagem: Índice de Motorização no Estado do Paraná (2º Momento de Familiarização)

A codificação nessa atividade se deu a partir da descrição abreviada apresentada no Capítulo 3, da transcrição do arquivo de áudio do desenvolvimento da atividade e do registro escrito dos alunos. A atividade foi desenvolvida pelos alunos e orientada pela professora regente da turma e pela pesquisadora em três encontros, nos quais os alunos foram organizados em grupo. Os alunos A1, A2 e A5 compuseram um grupo (grupo 1) e os alunos A3 e A4 faziam parte de outro grupo (grupo 2). Analisamos o desenvolvimento da atividade realizada por esses dois grupos. Após receberem a situação inicial, os alunos começam a discutir o problema que pretendiam estudar [descobrindo um problema a ser solucionado], conforme indica o diálogo a seguir.

A4: Qual é o problema?

Aluno: Não é o crescimento de automóveis?
A4: Ah, não sei, ainda não sei qual é o problema. É alguma coisa do crescimento de automóveis.

Registro escrito do grupo 2

A2: O que você acha que é o problema?
A5: Eu acho que tem a ver com o índice, quanto maior o índice maior o número de pessoas que possuem automóveis, agora transformar isso num problema....
A2: Ah, eu acho que aqui está falando que o problema é as pessoas ter muito, tipo assim, a quantidade de carro, por exemplo, por localidade, entendeu, está falando aqui ó (quanto maior o índice de motorização, maior a quantidade de pessoas tem veículo...), eu acho que o problema é tipo assim, qual que seria o índice, está falando Paraná aqui né, por exemplo, o índice apropriado de pessoas com carro no Paraná, tipo pessoas motorizadas, alguma coisa assim, eu acho, que é o problema. O que você acha?
Aluno: Estou lendo o texto agora. Não sei ainda. Eu acho que deve ser alguma coisa assim.
A5: Pode ser assim, quantos anos, em quanto tempo levará para que o número de veículos seja igual ao número de habitantes?

Registro escrito do grupo 1

O aluno A4 do grupo 2 sugere que a atividade tem a ver com outra atividade que desenvolveram. Destacamos que, de modo geral, os alunos buscam em atividades já desenvolvidas ideias para resolver a atividade que foi proposta [adequando a um modelo já conhecido], conforme indica o trecho do diálogo que segue.

A4: eu acho que isso aqui, tem a ver com o césio, mais aqui ele vai aumentando (a aula refere-se aos dados da tabela), ele sempre vai aumentar, nunca vai diminuir. Então porque a população vai sempre crescer e a quantidade de veículos não pode parar de crescer, a gente vai ter que achar um modelo pra tipo assim, qualquer ano que a gente colocar a gente vai conseguir saber a quantidade de veículos. Mas eu não consigo achar qual o problema a gente vai resolver. A do césio é quando vai desaparecer, agora aqui ele não está diminuindo, aqui só vai aumentar.

Aluno A4

Os alunos do grupo 1 e do grupo 2 abandonam por um momento a definição do problema e estudam os dados das tabelas, apresentada na situação inicial no Capítulo 3, seção 3.4.1.2, Quadro 3.4 [estudando os dados]. Nessa discussão o aluno A4 sugere que o modelo matemático será dado por uma função exponencial [falando sobre o modelo matemático], conforme indica o trecho a seguir.

A1: eu tentei achar uma razão, mas não achei.
Aluno: tem que tentar achar uma fórmula assim que calcule em cada ano a quantidade, mais ou menos o índice de coisa que seria veículos a cada 100 habitantes.

Grupo 1

A3: a gente tem que saber a progressão aqui

A4: não, a gente tem que saber o problema e não a progressão. É uma exponencial. Não tem como não ser.
A3: dependendo aqui ó, aqui está crescendo bem mais rápido que aqui.
A4: mas aqui é frota e aqui é população, não tem nada a ver.

Grupo 2

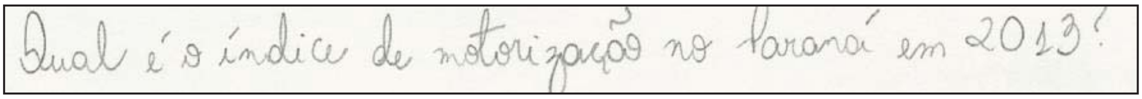
Após discutirem entre si e não conseguirem definir o problema, o grupo 2 solicita a ajuda da professora. Nesse momento a atividade é desenvolvida de forma mais independente pelos alunos e, de modo geral, é natural que eles encontrem dificuldades na compreensão da situação e para definir o problema.

A4: Professora a gente não sabe qual o problema
Professora: Certo. E aí? O que dá pra estudar?
A4: É uma função exponencial.
Pr: Tá, mas qual é o problema?
A4: Isso que eu não sei.
A3: onde vamos chegar.
A4: Então eu sei que a gente tem que achar um tempo que qualquer um que a gente colocar a gente vai ter o número de automóveis por habitante.
Pr: Então, qual é o problema nesse caso?
A3: a gente vai descobrir o número de automóveis por habitantes no ano que a gente quiser.
A4: mas depende da população.
Pr: Isso é valido para a eternidade?
A4: acho que é
Pr: tá.
A4: só tende a aumentar né, que quanto mais pessoas tiverem e a população só tende a crescer.
Aluno: eu também acho que só tende a aumentar.
Pr: então tá, mas qual é o problema? Vocês têm os dados, as informações, você já falou mais ou menos o que pode acontecer, o que vocês querem, então tem que formular agora uma pergunta, um problema, pra isso que vocês estão propondo.
A4: a gente pode falar tipo, daqui 20 anos quanto vai ser o número de veículos por habitante.
Pr: pode ser, não é um problema? Daqui 20 anos qual é o índice de motorização, não é? Porque o índice de motorização é o número de veículos, está explicado aí né.
A4: entendi.
Pr: Então esse é o problema que vocês vão investigar? Tem que levar em consideração que essa tendência vai continuar, essa é uma hipótese que vocês precisam considerar.

Grupo 2

Reconhecemos nesse diálogo que o aluno A4 já tinha uma ideia do que o grupo poderia estudar e os questionamentos da professora nesse momento contribuíram para que ele organizasse suas ideias e definisse um problema a ser estudo [definindo o problema]. Assim, o problema proposto pelo grupo 2, após a discussão com a professora é representado na Figura 4.5.

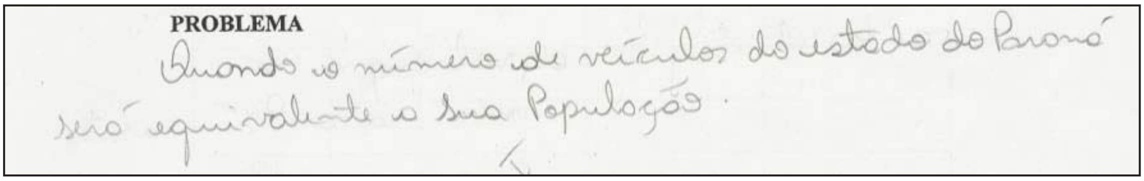
Figura 4.5: Problema proposto pelo grupo 2


Qual é o índice de motorização no Paraná em 2013?

Fonte: registro da atividade dos alunos.

O grupo 1 definiu o problema sem solicitar a ajuda da professora e nem da pesquisadora, conforme indica a Figura 4.6.

Figura 4.6: Problema proposto pelo grupo 1


PROBLEMA
Quando o número de veículos do estado do Paraná será equivalente a sua População.

Fonte: registro da atividade dos alunos.

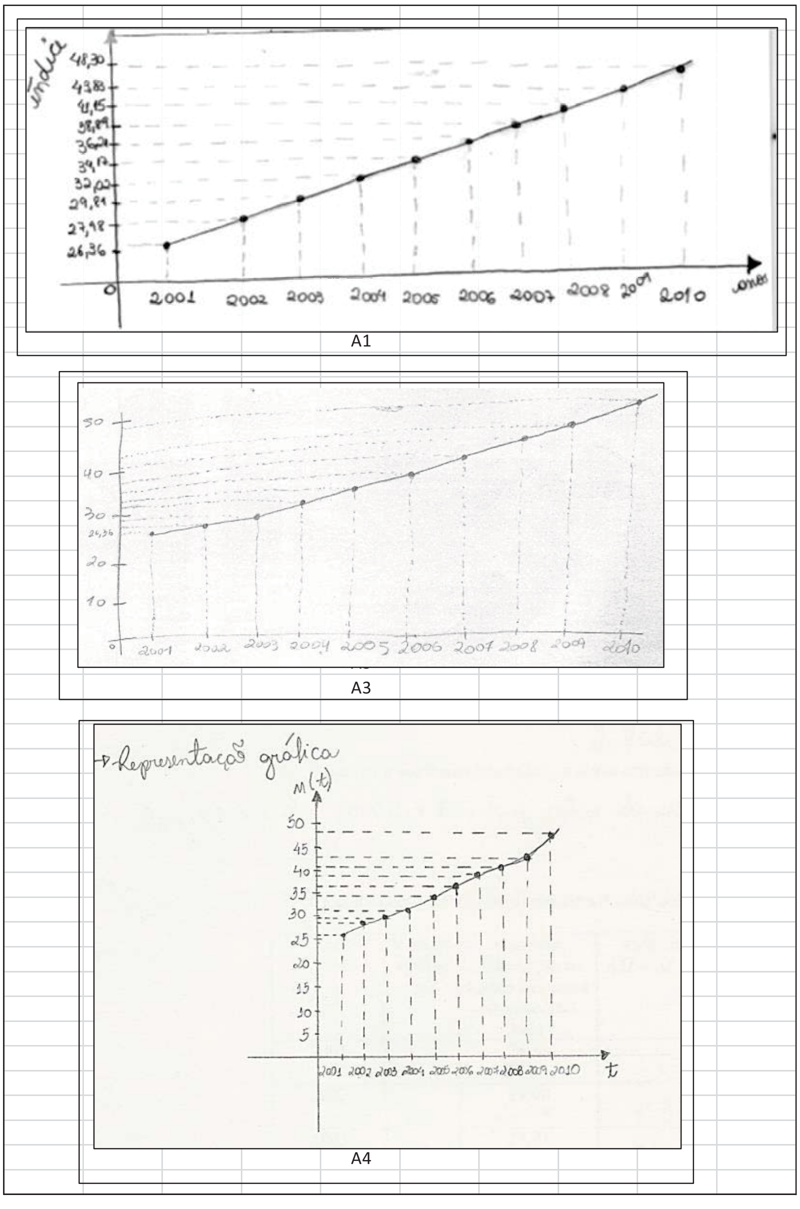
Considerando que Jensen (2007) se refere a raio de ação como a relação com os diferentes contextos e situações que alguém pode ativar a competência, ou seja, os conhecimentos, capacidades e atitudes de alguém frente à situação. Nesse sentido os alunos do grupo 1 definiram o problema com uma maior independência, ou seja, não solicitaram a orientação da professora nem da pesquisadora. Assim inferimos que o raio de ação é maior no grupo 1 do que no grupo 2. Definidos os problemas, os grupos realizam a definição das variáveis [definindo variáveis] e a discussão sobre o modelo matemático [pensado no modelo matemático] que melhor se ajusta ao problema. No grupo 1 a dúvida era qual variável dependia de qual, conforme indica o diálogo que segue.

> Aluno: Mas qual depende de qual? A frota depende da população? Na verdade não, uma pessoa pode ter dois carros, por isso que eu falei, por exemplo, se a gente quer saber o índice ele depende das outras duas, a população não depende da frota e nem a frota depende da população, agora o índice depende dos dois.
> A5: Então a independente vai ser a população e a dependente vai ser o índice.
> A2: eu acho que primeiro a gente tinha que escrever as informações, para depois tentar achar as variáveis.
> A5: parece que tudo depende de tudo aqui.
> A2, A5: olha nosso problema, é o tempo.
> A1: é alguma coisa de exponencial, cresce, porque se for representar isso no gráfico dá uma exponencial.
> Aluno: é parecida com a do césio, dá uma olhadinha para você ver.
>
> Grupo 1
>
> A4: tá, daqui 10 anos qual o índice de motorização? É só isso né. Nossa gente vai ser complicado hein.
> Aluno: no Paraná, né.

A4: é no Paraná.
A3: agora a gente tem que pegar, ver as variáveis.
A4: a professora falou que a nossa hipótese é que nunca vai parar de crescer né.
Aluno: é isso.
A4: mas é muita coisa que a gente tem que pensar, a gente vai ter que considerar a frota, a população. A gente vai ter que achar um modelo que cabe pra todo mundo. Ah, mas como a gente vai saber a população daqui 10 anos?
A3: por isso que eu falei que tem uma progressão que a gente vai ter que estudar, pra saber qual é, tem que ver qual a progressão. Vai ter que estimar quantas pessoas vai ter, eu acho. Mas como faz a gente pensar né.
A4: é uma função exponencial. Não tem como não ser. Porque cresce rapidamente. A variável auxiliar é n, então é o tempo mesmo que a gente vai variar.

Grupo 2

Figura 4.7: Representação gráfica da atividade Índice de Motorização no Estado do Paraná dos alunos A1, A3 e A4

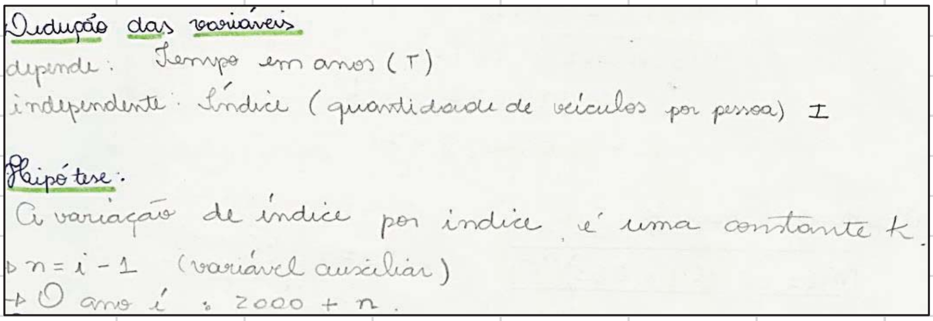


Fonte: registro dos alunos.

Nessa etapa os alunos estão matematizando a situação. Os alunos fazem suposições para o problema, simplificam a situação, procuram reconhecer as quantidades que influenciam a situação. Os alunos A1, A3 e A4 apresentam em seus registros a representação gráfica [representando graficamente] com o intuito de reconhecer a curva de tendência que os dados indicavam conforme mostra a Figura 4.7.

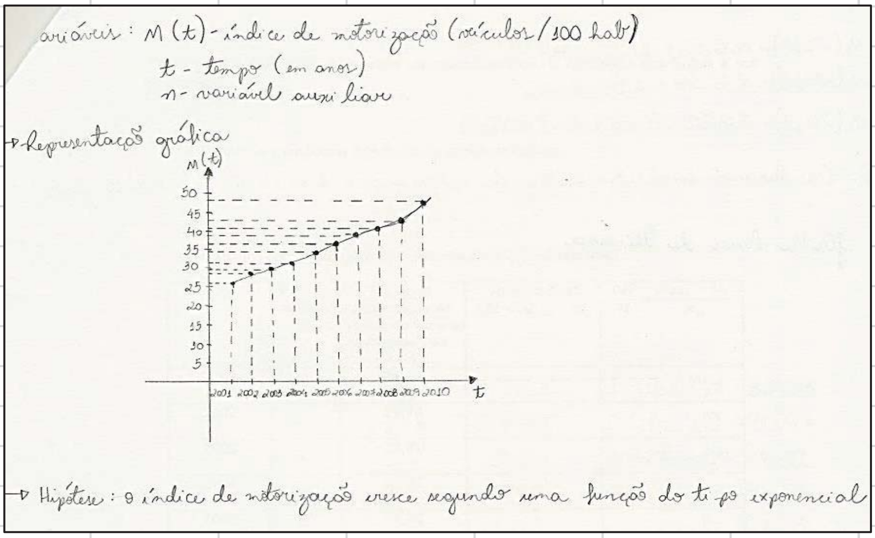
Associamos seus apontamentos à *competência para entender o problema real e para a construção de um modelo baseado na realidade,* em consonância com a caracterização de Maaβ (2006). Assim, no registro do desenvolvimento da atividade os grupos apresentam as variáveis, as hipóteses que elencaram para a discussão do problema que propuseram, conforme indica a Figura 4.8.

Figura 4.8: Definição das variáveis, levantamento de hipóteses A4 e A2 respectivamente


Dedução das variáveis
depende: Tempo em anos (T)
independente: Índice (quantidade de veículos por pessoa) I

Hipótese:
A variação de índice por índice é uma constante k.
▷ n = i − 1 (variável auxiliar)
→ O ano i : 2000 + n.

A2


Variáveis: M(t) - índice de motorização (veículos/100 hab)
t - tempo (em anos)
n - variável auxiliar

→ Representação gráfica

→ Hipótese: o índice de motorização cresce segundo uma função do tipo exponencial

A4

Fonte: registros dos alunos.

Podemos reconhecer nas discussões dos alunos que eles levam em consideração as hipóteses e a dedução do modelo conjuntamente [deduzindo o modelo matemático], conforme indica o diálogo do grupo 1 que segue.

> Aluno: vamos ver o que temos de dados.
> A2: aqui está dividindo só que o nosso vai multiplicar (comparando com outra atividade).
> Aluno: como a nossa é exponencial, vamos encontrar um padrão.
> Aluno: até o terceiro ano está diminuindo
> A2: é que a gente está considerando que sempre vai crescer, e tem ano que diminuem.
> Aluno: tá a primeira coisa que tem que fazer é o gráfico, analisar a tendência no gráfico.
> A5: fazemos a variação do tempo com o índice.
> [...]
> Aluno: vamos levar em consideração o ano de 2020.
> A2: nossa hipótese pode ser assim: existe um número k que representa a oscilação da variação de m por n.
> Aluno: vamos escrever o que na hipótese: a variação do índice pelo índice é uma constante, assim fica mais fácil.
> A2: o que você está fazendo A5?
> Aluno: ela está generalizando, aqui ó esse vai ser o modelo, o começo do modelo.
> A2: eu achei o da pipoca mais difícil.
> Aluno: dá uma olhada professora.
> A2: está escrito aqui, apresente todos os procedimentos e cálculos.
> Pr: vamos ver se esse modelo de fato procede. Não tem uma única resposta depende da condução que você dá, tem que validar o modelo.
> Aluno: tá professora então vamos validar.
>
> Grupo 1

Nesse diálogo notamos que o grupo se remete aos problemas anteriores estudados [adequando a algum modelo conhecido] como uma maneira de compreender o que podem fazer para encontrar uma solução para o problema. O grupo 2 apresenta dificuldades em encontrar o modelo matemático que melhor se ajusta ao problema, chegando até a pensar em desistir da atividade, conforme indica o trecho do diálogo a seguir.

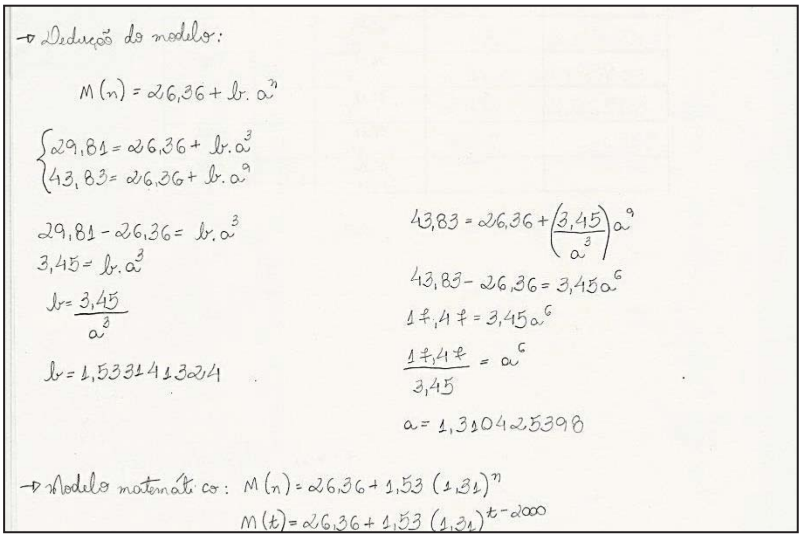
> A3: aqui ó, a independente é o tempo. Professora estamos desistindo, está muito difícil.
> Pr: por que?
> A4: a gente fez a diferença. Não encontramos a relação.
> Pr: mas quando faz a diferença...
> A3: estamos procurando a variável dependente e independente, a gente acha que é o índice o dependente.
> Pr: aham, e qual a independente?
> A3: a gente acha que é o tempo.
> Pr: exato
> A4: a gente vai ter que achar o tempo, pra trocar a variável.
> Pr: então, mas primeiro você vai deduzir o modelo pra depois fazer a troca de variável.
> A4: ah, então vou usar isso aqui só depois (aponta para as dicas)
> Pr: essa tabela vocês vão completar só se acharem necessário, pra desenvolver a atividade.
> A3: ah não estávamos tão longe né.
> A4: é.

A4: vamos fazer que o M é o índice de motorização e t é o tempo. Então o índice de motorização é dado pela frota dividido pela população vezes 100.

Grupo 2

Após a conversa com a professora os alunos do grupo 2 ficam mais tranquilos, pois percebem que não estavam tão distantes do modelo, apenas precisavam de orientação para continuar trabalhando. O grupo 1 utilizou recorrência para obter o modelo matemático e o grupo 2 utilizou sistemas de duas equações [trabalhando com a matemática], conforme mostram as Figuras 4.9, 4.10, respectivamente.

Figura 4.9: Dedução do modelo matemático pelo grupo 2



→ Dedução do modelo:

$$M(n) = 26,36 + b \cdot a^n$$

$$\begin{cases} 29,81 = 26,36 + b \cdot a^3 \\ 43,83 = 26,36 + b \cdot a^9 \end{cases}$$

$$29,81 - 26,36 = b \cdot a^3$$
$$3,45 = b \cdot a^3$$
$$b = \frac{3,45}{a^3}$$
$$b = 1,533141324$$

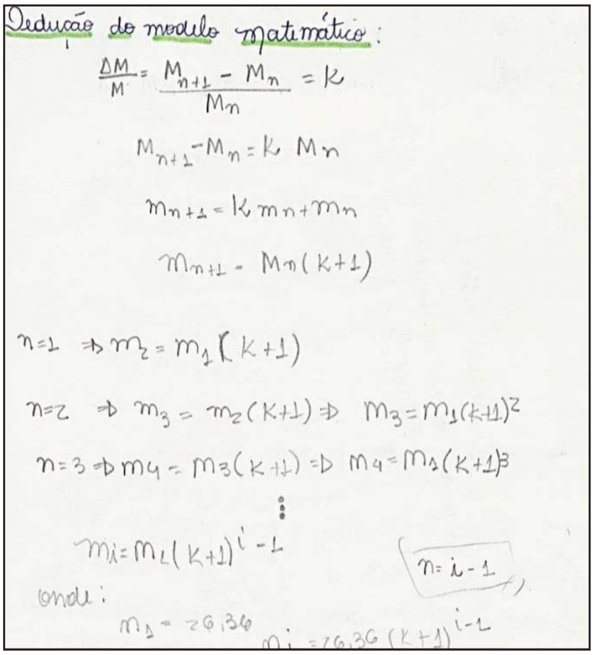
$$43,83 = 26,36 + \left(\frac{3,45}{a^3}\right) a^9$$
$$43,83 - 26,36 = 3,45 a^6$$
$$17,47 = 3,45 a^6$$
$$\frac{17,47}{3,45} = a^6$$
$$a = 1,310425398$$

→ Modelo matemático: $M(n) = 26,36 + 1,53\,(1,31)^n$

$$M(t) = 26,36 + 1,53\,(1,31)^{t-2000}$$

Fonte: registro dos alunos.

Figura 4.10: Dedução do modelo matemático pelo grupo 1



Dedução do modelo matemático:

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{M_{n+1} - M_n}{M_n} = k$$
$$M_{n+1} - M_n = k\,M_n$$
$$m_{n+1} = k\,m_n + m_n$$
$$m_{n+1} = M_n(k+1)$$

$n=1 \Rightarrow m_2 = m_1(k+1)$

$n=2 \Rightarrow m_3 = m_2(K+1) \Rightarrow M_3 = m_1(k+1)^2$

$n=3 \Rightarrow m_4 = m_3(K+1) \Rightarrow m_4 = m_1(K+1)^3$

$\vdots$

$m_i = m_1(K+1)^{i-1}$ $\quad n = i - 1$

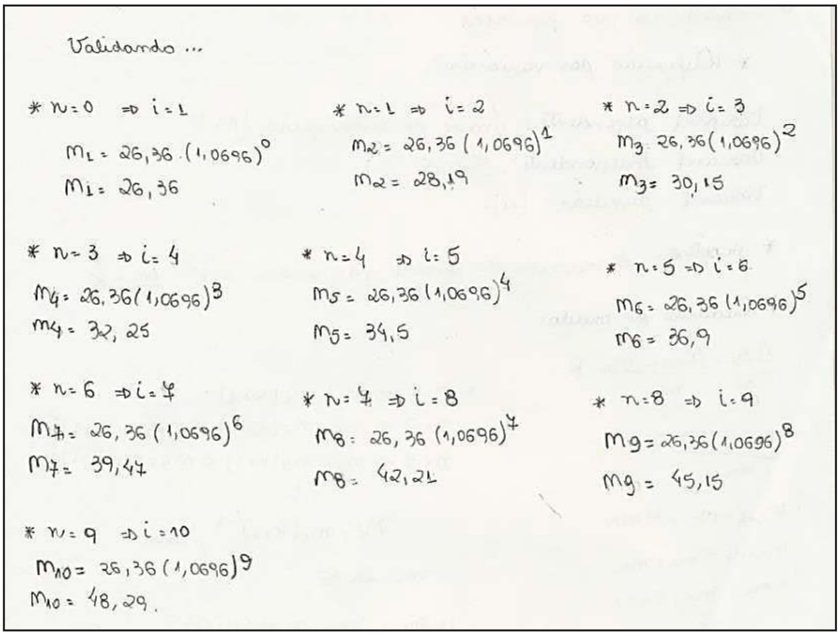
onde:

$m_1 = 26,36$ $\quad m_i = 26,36\,(K+1)^{i-1}$

Fonte: registro dos alunos.

Na construção do modelo matemático os alunos resolvem questões matemáticas [trabalhando com a matemática]. Desse modo, podemos associar à *competência para resolver questões matemáticas dentro do modelo matemático.* Nesse momento os alunos estão na etapa de resolução. Ao realizarem o que denominaram como validação do modelo [validando o modelo], Figuras 4.11 e 4.12, interpretam os resultados matemáticos associados ao problema [interpretando resultados] com relação a esse procedimento destacamos a *competência para interpretar resultados matemáticos em uma situação real*, caracterizada por Maaβ (2006).

Figura 4.11: Validação do modelo do grupo 1



Validando ...

* $n=0 \Rightarrow i=1$
  $M_1 = 26,36\,(1,0696)^0$
  $M_1 = 26,36$

* $n=1 \Rightarrow i=2$
  $M_2 = 26,36\,(1,0696)^1$
  $M_2 = 28,19$

* $n=2 \Rightarrow i=3$
  $M_3\ 26,36\,(1,0696)^2$
  $M_3 = 30,15$

* $n=3 \Rightarrow i=4$
  $M_4 = 26,36\,(1,0696)^3$
  $M_4 = 32,25$

* $n=4 \Rightarrow i=5$
  $M_5 = 26,36\,(1,0696)^4$
  $M_5 = 34,5$

* $n=5 \Rightarrow i=6$
  $M_6 = 26,36\,(1,0696)^5$
  $M_6 = 36,9$

* $n=6 \Rightarrow i=7$
  $M_7 = 26,36\,(1,0696)^6$
  $M_7 = 39,47$

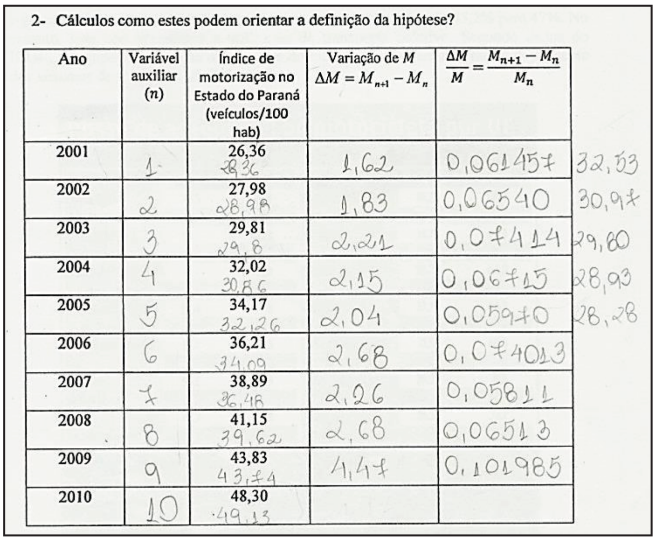
* $n=7 \Rightarrow i=8$
  $M_8 = 26,36\,(1,0696)^7$
  $M_8 = 42,21$

* $n=8 \Rightarrow i=9$
  $M_9 = 26,36\,(1,0696)^8$
  $M_9 = 45,15$

* $n=9 \Rightarrow i=10$
  $M_{10} = 26,36\,(1,0696)^9$
  $M_{10} = 48,29.$

Fonte: registro dos alunos.

Figura 4.12: Validação do modelo do grupo 2



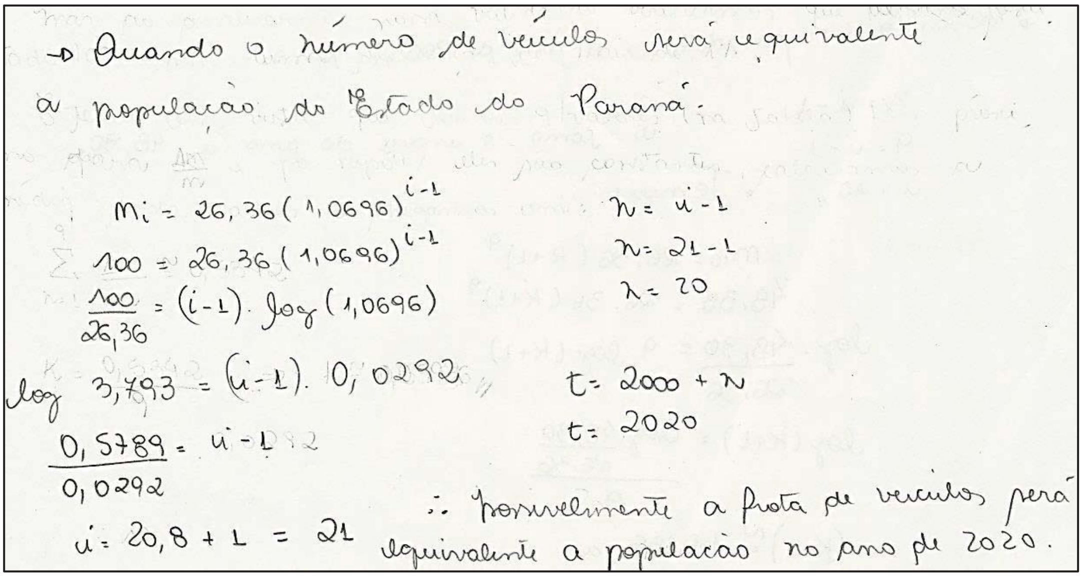
2- Cálculos como estes podem orientar a definição da hipótese?

Ano	Variável auxiliar (n)	Índice de motorização no Estado do Paraná (veículos/100 hab)	Variação de M $\Delta M = M_{n+1} - M_n$	$\frac{\Delta M}{M} = \frac{M_{n+1} - M_n}{M_n}$	
2001	1	26,36 28,36	1,62	0,061457	32,53
2002	2	27,98 28,98	1,83	0,06540	30,97
2003	3	29,81 29,8	2,21	0,07414	29,80
2004	4	32,02 30,86	2,15	0,06715	28,93
2005	5	34,17 32,26	2,04	0,05970	28,28
2006	6	36,21 34,09	2,68	0,074013	
2007	7	38,89 36,48	2,26	0,05811	
2008	8	41,15 39,62	2,68	0,06513	
2009	9	43,83 43,74	4,47	0,101985	
2010	10	48,30 49,13			

Fonte: registro dos alunos.

Os alunos respondem o problema [respondendo ao problema] conforme indica a Figura 4.13.

Figura 4.13: Solução para o problema do grupo 1 e do grupo 2


→ Quando o número de veículos será equivalente à população do Estado do Paraná:

$m_i = 26,36(1,0696)^{i-1}$ $\quad n = i-1$

$100 = 26,36(1,0696)^{i-1}$ $\quad n = 21-1$

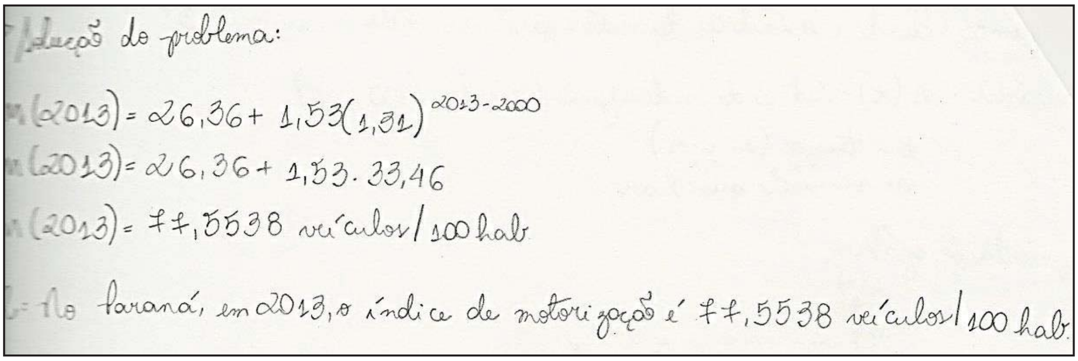
$\frac{100}{26,36} = (i-1)\cdot \log(1,0696)$ $\quad n = 20$

$\log 3,793 = (i-1)\cdot 0,0292$ $\quad t = 2000 + n$

$\frac{0,5789}{0,0292} = i-1$ $\quad t = 2020$

$i = 20,8 + 1 = 21$

∴ possivelmente a frota de veículos será equivalente a população no ano de 2020.


olução do problema:

$m(2013) = 26,36 + 1,53(1,31)^{2013-2000}$

$m(2013) = 26,36 + 1,53 \cdot 33,46$

$m(2013) = 77,5538$ veículos/100 hab

No Paraná, em 2013, o índice de motorização é 77,5538 veículos/100 hab.

Fonte: registro dos alunos.

Não reconhecemos nos registros dos alunos uma verificação crítica e reflexiva com relação à solução encontrada. Desse modo, podemos inferir que a *competência para validar a solução encontrada* a que se refere Maaβ (2006) não foi desenvolvida pelos alunos nessa atividade. Destacamos que, em vários momentos, para que os alunos dessem continuidade à atividade foi necessária a orientação da professora e/ou pesquisadora.

No sentido de Henning e Keune (2011) podemos considerar que os alunos estão se encaminhando para o nível 1 do desenvolvimento de competência para fazer modelagem defendida pelos autores, em que eles precisam demonstrar habilidades de reconhecer e descrever o desenvolvimento de uma atividade de modelagem, distinguindo e localizando cada uma das etapas da atividade. As etapas, segundo esses autores, são: a estruturação, a matematização, a interpretação e a resolução de problemas e inclui também habilidades para trabalhar com modelos matemáticos.

4.1.3 Análise da atividade de modelagem: Cuidado com o Bafômetro (3º Momento de Familiarização)

A codificação nessa atividade se deu a partir da descrição abreviada apresentada no Capítulo 3, da transcrição do arquivo de áudio do desenvolvimento da atividade, do registro escrito dos alunos. A atividade foi desenvolvida pelos alunos e orientada pela professora regente da turma e pela pesquisadora em três encontros nos quais os alunos foram organizados em grupo. Os alunos A1, A3 e A4 compuseram um grupo.

Os alunos escolheram esse tema pois queriam fazer algo que ajudasse as pessoas. E como o tema sobre a eliminação do álcool da cerveja no organismo é um tema que está no dia-a-dia da maioria das pessoas, propuseram-se a estudá-lo [relacionando com o cotidiano]. No início coletaram muitas informações a respeito do tema escolhido e não sabiam como utilizar aquelas informações para resolver o problema, conforme indica o diálogo a seguir.

> A4: nós já definimos nosso problema, né?
> A3: professora cadê a folha que nós anotamos?
> Pr: vou entregar.
> A4: A3 o que você pesquisou de dados que pode contribuir?
> [silêncio]
> Pr: mas o que vocês querem?
> A1 e A4: vamos coletar os dados
> A3: como vamos escrever... teor de álcool. Eu achei umas coisas.
> A4: quanto de álcool tem na cerveja, vamos escrever tudo que a gente pensou. Sabe o que a gente tem que saber, de quanto em quanto tempo o álcool é eliminado do corpo. Em quanto tempo ele vai ser eliminado.
> A3: a garrafinha tipo pilsen sabe.
> A4: na verdade a gente vai ter que saber assim, um gole, um copo de 500 ml
> A1: uma lata dá quanto?
> A4: acho que vai ter que ser por copo.
> A3: se sabemos quanto tem na garrafa, descobrimos quanto tem no copo, o teor de álcool.
> A3: então coloca aí, um copo tem 200 ml.
> A4: então porque também se elimina pelo suor.
> A3: até se a pessoa comer muda a absorção.
> P: é vocês precisam levantar as hipóteses, vê o que vão considerar para o problema de vocês. Pois tem vários fatores que influenciam na eliminação do álcool.
> A4: tem uma coisa parecida no livro do Bassanezi, a gente podia olhar, vê o que ele considerou.
> A1 e A3: é verdade
> A1: vamos ter que fazer uma proporção, porque a quantidade de álcool da garrafa não vai ser a mesma do copo, se a gente for considerar o copo.
> A1: é verdade.
> A4: acho que vamos ter que ir ao mercado e olhar as latinhas, está muito estranho
> A3: mas gente nós vamos fazer do que, de garrafa, de latinha, de copo.

Depois de algumas leituras e pesquisas [pesquisando um tema] que fizeram escreveram um texto explicando o tema por eles abordado [explicando a situação], descrito no

Capítulo 3, seção 3.4.1.3. O problema proposto [elaborando um problema] pelo grupo foi o seguinte: Após um motorista ingerir uma lata de cerveja quanto tempo ele deve esperar para que o álcool ingerido seja eliminado pelo organismo e, consequentemente, possa dirigir sem cometer uma infração de trânsito?

Reconhecemos que os alunos realizam procedimentos como pesquisando um tema, elaborando um texto explicativo a respeito do tema que não fizeram nas outras atividades desenvolvidas. Isso acontece, pois, no terceiro momento os alunos são responsáveis pela condução de toda a atividade, enquanto que no primeiro e segundo momentos são conferidos aos alunos menos responsabilidades.

O grupo tinha muitas informações a respeito do tema e a dificuldade estava nas informações que seriam importantes para resolver o problema. Discutiram que fatores como metabolismo, sexo, massa corporal poderiam influenciar na eliminação do álcool [selecionando dados relevantes para a solução do problema]. O grupo decidiu pedir ajuda à professora, conforme indica o diálogo a seguir.

> A4: <u>professora estamos com um monte de dúvida, a gente não sabe qual dos dados vamos usar.</u>
> Pr: <u>quais dados vocês têm</u>?
> A4: <u>a gente achou a quantidade de álcool no organismo</u>.
> A3: <u>quanto que elimina por hora, achamos também a quantidade de sangue também por causa do bafômetro, aí a gente não sabe o que que usa pra encontrar o nosso modelo</u>.
> A4: <u>a gente fez tipo assim, uma tabela com homem e mulher e diferentes pesos que achamos em uma reportagem e quantos litros de sangue eles têm no corpo. Achamos num site que em 5 litros eliminava tanto de álcool e agora vamos fazer pra um litro e colocar aqui.</u>
> A3: <u>o nosso valor é 10 g/L de álcool é eliminado por hora. Entendeu professora? Tem um monte de variável</u>.
> Pr: <u>O que vocês coletaram até agora</u>?
> A3: <u>porque ainda estamos na pesquisa, porque foi surgindo novas informações</u>.
> A4: tipo assim quanto de álcool vai sair do corpo.
> A3: estamos fazendo só de uma, pra depois fazer de outras
> A4: mas é que não vai só pro sangue.
> A3: de eliminação são quatro lugares: é o fígado, a urina, o suor e o ar. Aí parece que não vai ser real, porque estão simplificando.
> P: <u>vocês vão estudar o que? A eliminação do álcool no organismo. Aí vocês precisam escrever quais as condições que vão considerar</u>.
> Grupo: ok

Os alunos decidiram escrever quais informações eles iriam considerar [selecionando dados relevantes para a solução do problema] no trabalho final entregue pelo grupo. Eles denominaram como matematização e resolução, onde definiram as variáveis, as hipóteses, conforme mostra a Figura 4.14. Podemos inferir que associados a esses procedimentos realizados pelos alunos têm a *competência para entender o problema real e para a construção de um modelo baseado na realidade* identificada por Maaβ (2006).

Figura 4.14: Definição das variáveis e hipóteses da atividade *Cuidado com o Bafômetro*

Matematização e resolução:
Definição de variáveis:
Variável independente: t (tempo em horas)
Variável dependente: Q (quantidade de álcool no organismo em g/L)

Hipóteses:
- O organismo elimina em média 0,10 g/L de álcool no sangue por hora;
- 269 ml de cerveja contém 9,22 g de álcool;
- Se o indivíduo fizer o teste do bafômetro e a concentração for maior do que 0,068g/L (recomendação do Inmetro como margem de segurança do bafômetro) de sangue, será considerado crime de trânsito;

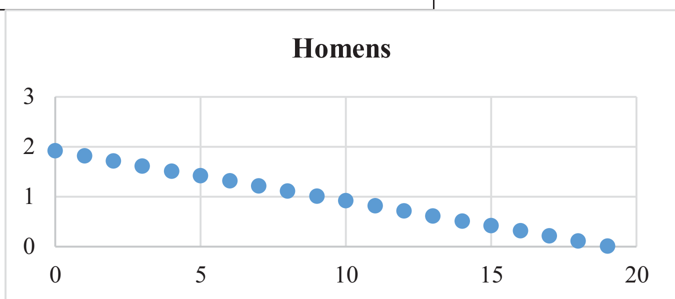
Fonte: trabalho final dos alunos.

Também na matematização e resolução obtiveram o modelo matemático [deduzindo o modelo matemático]. Utilizaram recorrência para encontrar o modelo. Construíram gráficos para verificar o comportamento dos dados [utilizando a tecnologia], conforme indica a Figura 4.15.

Figura 4.15: Modelo matemático obtido pelo grupo

- Considerando um homem de 75 kg e 1,70 m de altura.

t	Q(t)
0	Q_0 =9,22/4,821= 1,912466293
1	Q_1= Q_0-0,10=1,912466293 - 0,10= 1,812466293
2	Q_2= Q_1-0,10= Q_0-0,10- 0,10= Q_0- 2(0,10)= 1,712466293
3	Q_3= Q_0- 3(0,10)= 1,912466293- 0,30= 1,612466293
n	Q_n= Q_0 –n(0,10)= 1,912466293- t(0,10)



Modelo matemático:
$Q_n = Q_0\,(n+1) - \sum (0,10)$

Fonte: trabalho final dos alunos.

Com relação ao que os alunos denominaram como matematização e resolução, os alunos usam conhecimentos matemáticos para encontrar uma solução para o problema [resolvendo matematicamente], representam graficamente a situação, analisam se a solução encontrada é apropriada ao problema proposto e generalizam o modelo matemático encontrado. Podemos identificar assim três competências caracterizadas em Maaβ (2006), sendo elas: *competência para a construção de um modelo matemático a partir do modelo real, competência para resolver questões matemáticas dentro desse modelo matemático* e *competência para interpretar resultados matemáticos em uma situação real.*

Em outra parte do trabalho, denominada por eles como interpretação e validação, o grupo respondeu ao problema [encontrando uma solução para o problema] e validou o modelo encontrado [validando o modelo]. Ao comunicar os resultados para a turma fez-se necessário que eles pensassem a respeito de toda a situação e refletissem a respeito das soluções encontradas. Desse modo identificamos a *competência para validar a solução* caracterizada em Maaβ (2006).

No desenvolvimento dessa atividade os alunos realizaram a estruturação, matematização, a interpretação e a resolução de problemas, conforme Henning e Keune (2011). Desse modo, podemos considerar que os alunos atingiram o nível 1 do desenvolvimento de competências proposto pelos autores. Os alunos demonstraram a habilidade de reconhecer e descrever o desenvolvimento de uma atividade de modelagem.

4.1.4 Análise da atividade de modelagem: Todo cuidado é pouco! O número da Aids (3º Momento de Familiarização)

A codificação nessa atividade se deu a partir da descrição abreviada apresentada no Capítulo 3, da transcrição do arquivo de áudio do desenvolvimento da atividade, do registro escrito dos alunos. A atividade foi desenvolvida pelos alunos e orientada pela professora regente da turma e pela pesquisadora em três encontros, nos quais os alunos foram organizados em grupo. Os alunos A2 e A5 compuseram um grupo.

O grupo teve muitas ideias com relação ao trabalho final [pesquisando o tema], fizeram várias pesquisas e discutiram entre si, conforme mostra o diálogo a seguir.

> A2: <u>tenho uma ideia, mas não sei como podíamos modelar isso: planetas habitáveis podem ser comuns, um quinto das estrelas parecidas com o Sol tem planetas habitáveis, estrelas mais próxima com planetas habitáveis está há 12 anos-luz, aí tipo, tem distância, envolve matemática, mas eu não sei como colocar isso, entendeu? Acharam um planeta e tem as informações dele</u>.
> A2: e aí gente, vamos expor as ideias.
> Aluno: <u>eu estava pensando em fazer sobre a quantidade de presidiários que tem no Brasil</u>.
> P: mas daí seria só contar a quantidade?

> Aluno: não eu queria saber se um dia vai ter a mesma quantidade de presos que tem lá fora. Então a A2 achou um de galáxias e A5 sobre o pré-sal, bem legal, só que não temos o volume do pré-sal, temos a área.
> A2: eu peguei mais ou menos o que é redes sociais e tem a ver com a matemática (lê para as colegas), e eu peguei uma tabela que tem todas as redes sociais e com a quantidade de todos os seguidores. Mas a do planeta é muito legal gente, de verdade, eu já pensei em um problema, mas não sei. Bom vou ler tudo pra vocês me ajudarem a encontrar um problema (lendo sobre o tema); é legal o tema, tipo assim dá pra gente fazer uma modelagem da distância. Quais seriam os planetas habitáveis daqui a tantos anos-luz? Vamos escrever esse que a gente trouxe. Então vamos selecionar o que nós vamos procurar, do pré-sal já sabemos que não dá, então vamos procurar sobre os planetas e sobre os presídios.

No relatório final do grupo os alunos afirmam que decidiram trabalhar com o tema Aids por ser um assunto que está presente no cotidiano [relacionando com o cotidiano]. Decidido o tema, foram em busca dos dados que precisavam [buscando informações]. O grupo relata no trabalho final que teve dificuldades em estudar o comportamento dos dados que coletaram.

No que denominaram como situação inicial os alunos realizaram o levantamento das informações [elaborando um problema] a respeito do tema e a partir disso, propuseram o seguinte problema: *No ano do ápice populacional do Brasil (2042), o número de incidência de casos de Aids será maior nos homens ou nas mulheres?*

Para a obtenção do modelo matemático que respondesse o problema proposto por eles, utilizaram alguns softwares [utilizando a tecnologia] como Excel, CurveExpert e Geogebra, com o intuito de avaliar a função que melhor descrevesse o conjunto de dados que possuíam. Os alunos dividiram seu problema em dois casos, para homens e para mulheres e, desse modo, obtiveram dois modelos matemáticos [deduzindo o modelo].

No trabalho final, em que denominaram matematização e resolução, reconhecemos que os alunos realizam o [levantamento das variáveis e das hipóteses] e a [dedução do modelo matemático]. Nessa etapa os alunos realizam procedimentos como estabelecer relações entre as variáveis, construir tabelas para realizar um estudo dos dados, plotar o gráfico para estudar a tendência dos dados, deduzir os modelos matemáticos. Esses procedimentos estão associados às seguintes competências apresentadas por Maaβ (2006): *competência para entender o problema real e para a construção de um modelo baseado na realidade, competência para a criação de modelo matemático do modelo real* e *competência para resolver questões matemáticas dentro desse modelo matemático.*

Na etapa denominada por eles de validação [validando o modelo] os alunos interpretam os resultados matemáticos associados ao problema [interpretando resultados].

Desse modo, associada a esse procedimento destacamos a *competência para interpretar resultados matemáticos em uma situação real* caracterizada em Maaβ (2006).

O grupo coloca em seu relatório final o item interpretação e validação, em que eles [encontram uma solução para o problema]. Ressaltamos que os itens colocados no relatório final dos alunos foram escolhidos por eles. Podemos considerar que os nomes dados pelos alunos aos itens se aproximam do que encontramos na literatura pelo fato deles já terem tido contato com atividade de modelagem matemática anteriormente.

4.2 Indicações da codificação inicial

No processo de organização dos códigos e na busca de uma melhor compreensão de quais códigos emergiram em cada um dos três momentos de familiarização foi construído o Quadro 4.3. Este quadro nos dá os indicativos do que observamos nas atividades desenvolvidas pelos alunos considerando os três momentos de familiarização com a modelagem matemática.

Quadro 4.3: Códigos gerados na codificação inicial

1º momento	**2º momento**	**3º momento**
transformando as hipóteses numa linguagem algébrica	descobrindo um problema a ser solucionado	pesquisando um tema
deduzindo modelo matemático	adequando a algum modelo conhecido	relacionando com o cotidiano
resolvendo questões matemáticas	estudando os dados	buscando informações
representando o modelos graficamente	falando sobre o modelo matemático	explicando a situação
retornando ao problema	definido as variáveis	elaborando um problema
encontrando uma solução para o problema	formulando hipóteses	selecionando dados relevantes para a solução do problema
interpretando resultados	representando graficamente	definição de variáveis
validando	deduzindo o modelo matemático	levantamento de hipóteses
	trabalhando com a matemática	utilizando a tecnologia
	solucionando o problema	dedução do modelo matemático
	interpretando resultados	resolvendo matematicamente
	validando o modelo	encontrando uma solução para o problema
		interpretando resultados
		validando o modelo

Fonte: da autora.

Nesta codificação inicial caracterizada pela Teoria Fundamentada em Dados, muitos códigos emergiram que irão nos auxiliar nas reflexões com relação à questão de investigação: **Quais competências são requeridas ou são desenvolvidas pelos alunos com o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática?**

Com a finalidade de avançar na identificação de elementos para subsidiar nossas reflexões, realizamos a codificação axial a que refere Charmaz (2009). Para a identificação de códigos nessa fase consideramos os esquemas construídos pelos alunos para caracterizar os ciclos de modelagem matemática.

4.3 Codificação axial: ciclos dos alunos nos três momentos de familiarização

Em todos os momentos de familiarização foi solicitado aos alunos que fizessem um esquema que representasse o desenvolvimento das atividades. A fim de avançar em compreensão, analisamos nesta seção os ciclos apresentados por eles.

Embora os cinco alunos que estamos analisando fizessem parte de grupos distintos podemos analisar os ciclos de cada um deles uma vez que cada aluno fazia e entregava individualmente o esquema caracterizando o ciclo associado à atividade.

4.3.1 Atividade do 1º momento: Para o lanche, vai uma pipoca aí?

Com relação à atividade "Para o lanche: vai uma pipoca aí?" desenvolvida pelos alunos no primeiro momento de familiarização e analisada na seção 4.1.1, os cinco alunos que estamos analisando apresentaram os ciclos conforme indica a Figura 4.16.

Vamos inicialmente considerar a etapa relacionada ao problema que será investigado. Os alunos A2, A3, A4 e A5 caracterizam, respectivamente, como sendo: *definição do problema; análise e investigação dos dados e tabelas; descobrir um problema a ser investigado e identificação do problema*. Reconhecemos que os quatro alunos referem-se à mesma etapa usando denominações distintas.

Podemos considerar que nestes esquemas se confirmam os códigos que já identificamos na codificação inicial, resumida no Quadro 4.3 da seção 4.2, como sendo: descobrindo um problema a ser solucionado; definindo um problema; estudando os dados.

Com relação ao aluno A1 o ciclo indica que ele não reconhece a etapa *definindo o problema*. Inferimos que isso possa ter ocorrido pois de modo geral, nas atividades do primeiro momento o problema é proposto pela professora.

As etapas relacionadas à definição de variáveis e levantamento de hipóteses são identificadas em todos os ciclos. Relacionamos a essas etapas os seguintes códigos identificados na codificação inicial: levantando as variáveis; formulando hipóteses; estabelecendo relações; selecionando o que é relevante para o problema.

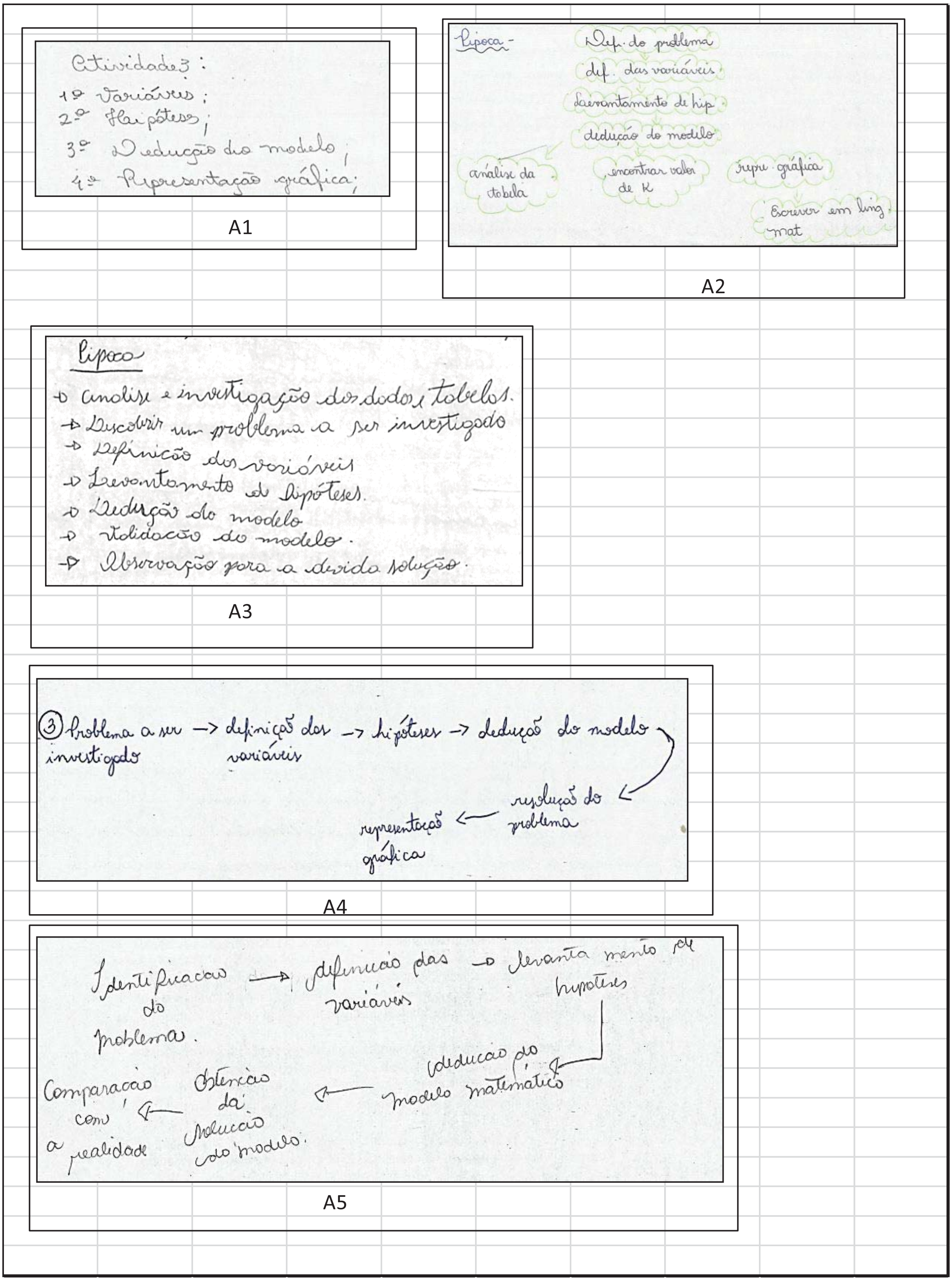
Nos ciclos dos alunos identificamos a etapa dedução do modelo matemático, que foi recorrente na codificação inicial. Reconhecemos os seguintes códigos que dizem respeito à dedução do modelo matemático: falando sobre o modelo matemático; utilizando a tecnologia; deduzindo o modelo matemático.

Com relação às questões matemáticas envolvidas na atividade, identificamos que os alunos A2 e A5 explicitam em seus ciclos a etapa de encontrar o valor de k e a etapa de obtenção da solução do modelo, respectivamente. Associadas a essas etapas estão os códigos: resolvendo questões matemáticas; simplificando quantidades relevantes; trabalhando com a matemática. Ressaltamos que os outros alunos também resolveram em suas atividades questões matemáticas, apenas não explicitaram em seus ciclos.

No que corresponde à validação do modelo, código recorrente no primeiro momento, identificamo-lo nos ciclos de modelagem de quase todos os alunos, embora com nomes diferentes. Por exemplo, o aluno A1 apresenta a validação como representação gráfica; o aluno A2 como análise da tabela e representação gráfica; o aluno A3 validação do modelo; o aluno A4 como representação gráfica e A5 como comparação com a realidade.

Identificamos, por meio da codificação axial, a confirmação dos seguintes códigos: identificando o problema; analisando os dados; levantando as variáveis; formulando hipóteses; dedução do modelo matemático; validação do modelo. Esses códigos estão associados às etapas de modelagem matemática descritas na literatura, por Bassanezi (2011), Almeida, Silva e Vertuan (2012), entre outros. Ressaltamos que os nomes utilizados pelos autores podem ser diferentes dos apresentados pelos alunos, entretanto dizem respeito aos mesmos procedimentos.

Figura 4.16: Ciclos do desenvolvimento da atividade *Para o lanche: Vai uma pipoca, aí?*



Fonte: registro escrito dos alunos.

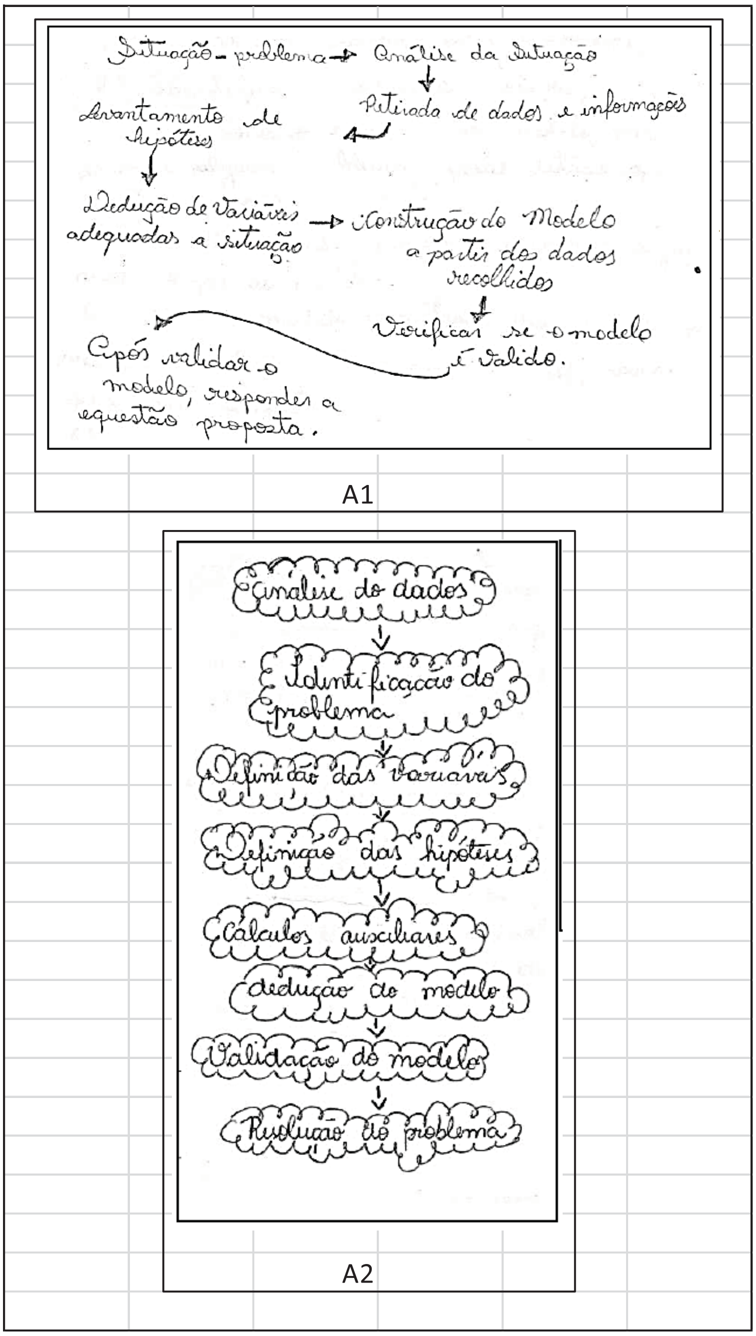
4.3.2 Atividade do 2º momento: Índice de Motorização no Estado do Paraná

Considerando atividade "Índice de Motorização no Estado do Paraná" desenvolvida pelos alunos no segundo momento de familiarização e analisada na seção 4.1.2, os cinco alunos que estamos analisando apresentaram os ciclos conforme indica a Figura 4.17.

Notamos que nos ciclos apresentados nesse segundo momento de familiarização, ocorre um refinamento com relação às etapas apresentadas pelos alunos nos ciclos do primeiro momento de familiarização. Destacamos, por exemplo, que nesse momento aparecem as etapas análise dos dados e cálculos auxiliares nos ciclos de A2 e A5.

No desenvolvimento da atividade "Índice de Motorização no Estado do Paraná" os alunos tiveram uma maior independência com relação às atividades do primeiro momento. Desse modo, outras etapas, além das que eles realizaram na atividade do primeiro momento, se fizeram presentes. Percebemos também um maior refinamento das etapas, por exemplo, no caso do aluno A1, que no seu primeiro ciclo apontou as etapas: variáveis; hipóteses; dedução do modelo e representação gráfica, no segundo ciclo ele identifica mais etapas e as descreve com mais detalhes, conforme mostra a Figura 4.17. Podemos inferir que a ocorrência desse refinamento deve-se à familiarização do aluno com atividades de modelagem. Podemos considerar que nestes esquemas se confirmam os códigos que já identificamos na codificação inicial, resumida no Quadro 4.3 da seção 4.2, como sendo: descobrindo um problema a ser solucionado, definindo um problema, estudando os dados; definição das variáveis, levantamento de hipóteses, dedução do modelo matemático, validando o modelo, respondendo o problema.

Figura 4.17: Ciclos apresentados pelos alunos da atividade *Índice de Motorização no Estado do Paraná*



Fonte: registro escrito dos alunos.

Continuação da Figura 4.17

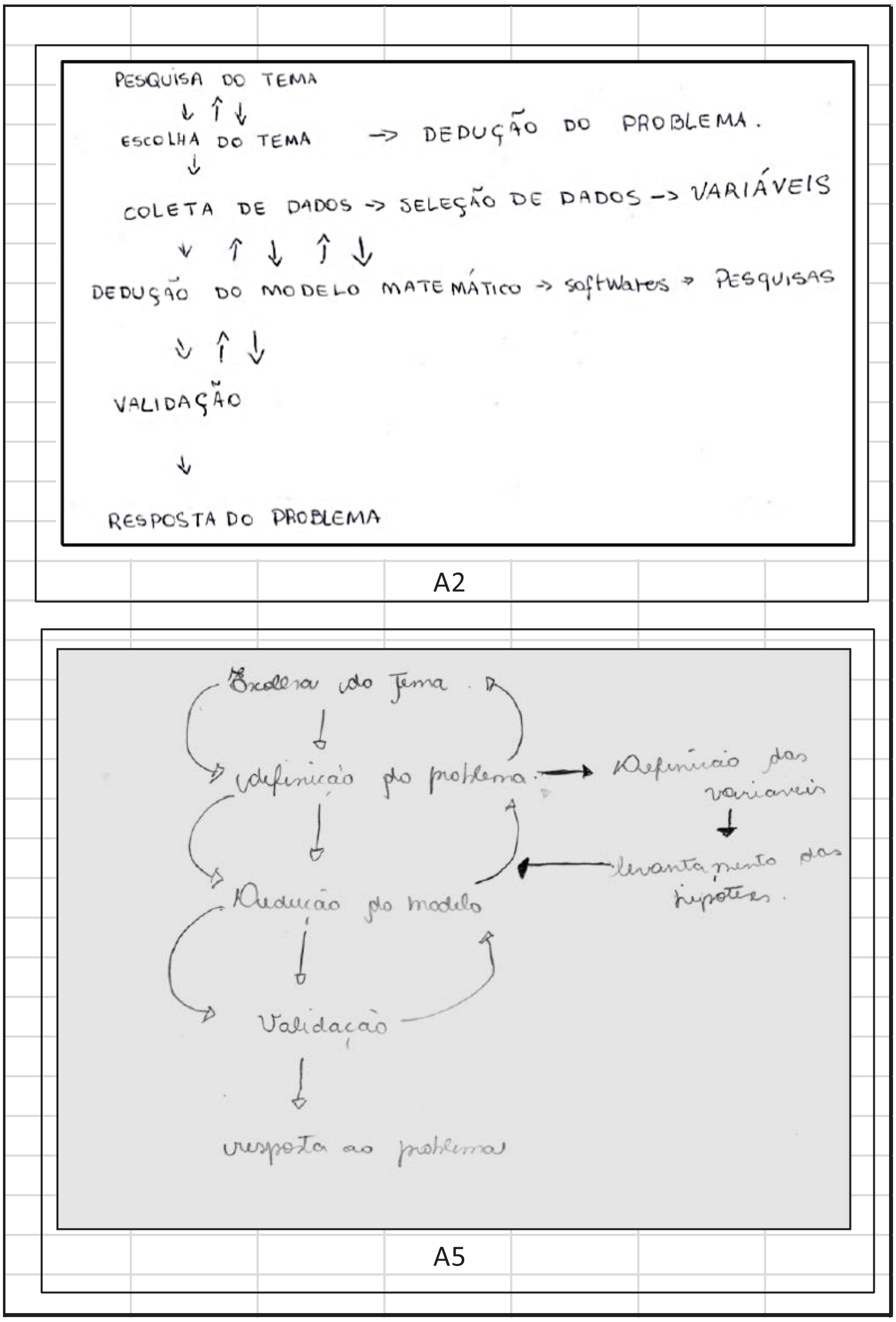
Fonte: registro dos alunos.

Por meio da codificação axial confirmamos os códigos: identificando o problema; analisando os dados; levantando as variáveis; formulando hipóteses; dedução do modelo matemático; validação do modelo. Na literatura pesquisadores como Bassanezi (2011), Almeida, Silva e Vertuan (2012) associam esses códigos às etapas de modelagem matemática. Ressaltamos que os nomes utilizados pelos autores podem ser diferentes dos apresentados pelos alunos, entretanto dizem respeito aos mesmos procedimentos.

4.3.3 Os ciclos nas atividades do terceiro momento *Todo Cuidado é pouco! O número da Aids* e *Cuidado com o bafômetro*

Nas Figuras 4.18 e 4.19 apresentamos os ciclos dos alunos para a atividade “Todo cuidado é pouco: O número da AIDS” e “Cuidado com o bafômetro”, respectivamente.

Figura 4.18 Ciclos apresentados pelos alunos da atividade *Todo Cuidado é pouco! O número da Aids*



Fonte: registro dos alunos.

Figura 4.19 Ciclos apresentados pelos alunos da atividade *Cuidado com o Bafômetro*

1º Escolha do Problema: Para esse trabalho, pensamos primeiramente no problema a ser investigado.

2º Coleta de Dados: Pesquisamos na internet e em outras fontes sobre o uso do álcool e o comportamento dele no organismo.

3º Dedução do Modelo: A partir dos dados coletados, deduzimos o modelo.

4º Validação: Usamos o excel para validar o nosso modelo.

A1

→ Pesquisa;
→ Escolha do tema;
→ Escolha da situação a se estudar referente ao tema escolhido;
→ Definir o problema;
→ Pesquisa de dados para construção do modelo;
→ Elaboração das hipóteses e das variáveis;
→ Construção do modelo;
→ Representação do modelo em forma tabular e gráfica;
→ Validação e interpretação do modelo;
→ Obtenção da consideração final;

A3

→ Definição do tema e do problema
→ Coleta dos dados
→ Inteiração
→ Matematização
- Hipóteses
- Dedução do modelo
- Conteúdos matemáticos abordados

→ Interpretação e validação
→ Situação final

A4

Fonte: registro dos alunos.

Nos ciclos apresentados pelos alunos no terceiro momento de familiarização é possível perceber um refinamento ainda maior que no segundo momento. Acreditamos que isso ocorre justamente por causa do processo de familiarização, ou seja, é possível considerar que a familiarização dos alunos com atividades de modelagem, de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012), seja relevante para que compreendam o desenvolvimento de uma atividade de modelagem e também pelo fato dos alunos perceberem como se dá seu próprio desenvolvimento de uma maneira mais adequada. Podemos, ainda, inferir que no terceiro momento os alunos compreendem, de forma mais abrangente, o desenvolvimento de atividades de modelagem.

Os ciclos apresentados pelos alunos são similares com os encontrados na literatura. Outro aspecto que identificamos é que no primeiro e no segundo momentos, os ciclos dos alunos são lineares, eles ainda não identificam idas e vindas no processo de modelagem. Perrenet e Zwaneveld (2012) consideram que a linearidade nos ciclos dos alunos pode ocorrer por dois motivos: um deles é que os alunos, para resolver o problema, necessitam percorrer o ciclo somente uma vez, e o segundo, pode ser que não tenha tido tempo suficiente para percorrer o ciclo mais de uma vez.

Podemos considerar que nos ciclos do terceiro momento também se confirmam os códigos que já identificamos na codificação inicial, resumida no Quadro 4.3 da seção 4.2, como sendo: descobrindo um problema a ser solucionado, definindo um problema, estudando os dados; definição das variáveis, levantamento de hipóteses, dedução do modelo matemático, validando o modelo, respondendo o problema.

4.4 Indicações da codificação axial

A partir do estudo analítico dos dados (ou códigos), notamos que as categorias provisórias identificadas na codificação inicial são recorrentes em todos os alunos analisados. Desse modo, decidimos não fazer uma análise individualizada das categorias. Considerando o Quadro 4.3, página 83, agrupamos os códigos que foram recorrentes nos três momentos de familiarização e que nos indicam categorias provisórias. A seguir, apresentamos o Quadro 4.4 com o agrupamento dos códigos.

Quadro 4.4: Codificação axial: agrupamento dos códigos gerados na codificação inicial[18]

1º momento	2º momento	3º momento
✓ transformando as hipóteses numa linguagem algébrica	• descobrindo um problema a ser solucionado	• pesquisando um tema; • relacionando com o cotidiano; • buscando informações; • explicando a situação; • elaborando um problema.
❖ deduzindo o modelo matemático; ❖ resolvendo questões matemáticas; ❖ representando o modelo graficamente.	✓ adequando a algum modelo conhecido; ✓ estudando os dados; ✓ falando sobre o modelo matemático; ✓ definindo as variáveis; ✓ formulando hipóteses.	✓ selecionando dados relevantes para a solução do problema; ✓ definindo as variáveis; ✓ levantamento de hipóteses.
▪ retornando ao problema; ▪ encontrando uma solução para o problema; ▪ interpretando resultados; ▪ validando.	❖ representando graficamente; ❖ deduzindo o modelo matemático; ❖ trabalhando com a matemática.	❖ utilizando a tecnologia; ❖ dedução do modelo matemático; ❖ resolvendo matematicamente.
	▪ solucionando o problema; ▪ interpretando resultados; ▪ validando o modelo.	▪ encontrando uma solução para o problema; ▪ interpretando resultados; ▪ validando o modelo.

Fonte: elaborado pela autora.

A partir da análise e síntese dos códigos que emergiram, foi possível elaborar as seguintes categorias provisórias:

- Os códigos pesquisando um tema, relacionando com o cotidiano, buscando informações, explicando a situação, descobrindo um problema a ser solucionado e elaborando um problema, parecem associados a uma competência no que se refere ao fazer modelagem matemática. Identificamos essa competência como *Competência para identificar um problema em uma situação* e diz respeito ao conjunto de habilidades e/ou capacidades para

[18] Os itens representam os agrupamentos realizados na codificação axial.

elaborar ou justificar uma situação, problematizando-a, definindo assim, um problema matemático.

- ✓ Os códigos transformando as hipóteses numa linguagem algébrica; adequando a algum modelo conhecido; estudando os dados; falando sobre o modelo matemático; definindo as variáveis; formulando hipóteses; selecionando dados relevantes para a solução do problema; definindo as variáveis e levantamento de hipóteses, parecem associados a uma competência no que se refere ao fazer modelagem matemática. Identificamos essa competência como *Competência para definir um problema matemático* e diz respeito ao conjunto de habilidades e/ou capacidades para selecionar e sistematizar os dados relevantes, realizar simplificações, bem como selecionar as variáveis e levantar hipóteses.
- ❖ Os códigos deduzindo o modelo matemático; resolvendo questões matemáticas; representando o modelo graficamente; representando graficamente; trabalhando com a matemática; utilizando a tecnologia e resolvendo matematicamente, parecem associados a uma competência no que se refere ao fazer modelagem matemática. Identificamos essa competência como *Competência para realizar a dedução do modelo matemático* e diz respeito ao conjunto de habilidades e/ou capacidades para deduzir o modelo matemático, resolver questões matemáticas, bem como utilizar a tecnologia.
- ▪ Os códigos interpretando resultados, validando o modelo, retornando ao problema, encontrando uma solução para o problema, parecem associados a uma competência no que se refere ao fazer modelagem matemática. Identificamos essa competência como *Competência para estabelecer e interpretar relações entre Matemática e situações reais* e diz respeito ao conjunto de habilidades e/ou capacidades para validar o modelo encontrado, interpretar os resultados com referência à situação inicial.

Seguindo as indicações dos dados, identificamos as categorias supracitadas. Assim, buscamos por meio da codificação focalizada evidências que fortaleçam nossa compreensão dos aspectos já levantados nas codificações inicial e axial. Faz-se necessário, para um avanço na compreensão de nossa questão de pesquisa, para a consolidação e/ou a identificação de novas categorias no que se refere ao desenvolvimento de competências dos alunos, a realização da codificação focalizada caracterizada por Charmaz (2009). Nessa codificação realizamos uma revisão e avaliação das categorias e desse modo validamos nosso processo.

Para Charmaz (2009) por meio da codificação focalizada podemos constatar nossas preconcepções sobre o fenômeno estudado.

4.5 Codificação focalizada: entrevista e questionários dos alunos nos três momentos de familiarização

Buscamos nas entrevistas e questionários respondidos pelos alunos, durante as atividades dos três momentos de familiarização, a consolidação das categorias provisórias e/ou a identificação de novas categorias no que se refere ao desenvolvimento de competências dos alunos, sejam competências requeridas pelas atividades de modelagem matemática, ou competências desenvolvidas por meio destas atividades.

Considerando o Quadro 4.4, página 91, buscamos nas entrevistas e questionários dos alunos a confirmação dos códigos, ou a identificação de novos, destacando os códigos que aparecem no Quadro 4.4.

Os códigos que se referem à categoria *Competência para definir um problema matemático* estão presentes também nas entrevistas e questionários dos alunos, como por exemplo, no trecho da entrevista:

> Você identifica "passos" ou "etapas" quando desenvolve uma atividade de modelagem matemática? Quais são?
> A1 - [...] <u>determinar as hipóteses e as variáveis</u>.
> A2 – [...] <u>definimos as variáveis, levantamos as hipóteses</u>.
> A3 – [...] <u>dedução da hipótese</u>.
> A4 – [...] <u>as variáveis, as hipóteses</u>.
> A5 – [...] <u>vê as variáveis e as hipóteses</u>.

Destacamos que os códigos que se referem à categoria *Competência para definir um problema matemático* aparecem nos três momentos de familiarização dos alunos com as atividades de modelagem.

Com relação à categoria *Competência para identificar um problema em uma situação*, notamos que a elaboração de um problema a partir da situação inicial ocorreu no terceiro momento de familiarização. No primeiro momento o problema foi apresentado pela professora, sendo assim, consideramos que não foi requerida dos alunos a elaboração de um problema. Essa competência somente foi requerida no segundo e terceiros momentos de familiarização como indica trechos da entrevista a seguir.

> Quais "passos" ou "etapas" você identificou no desenvolvimento dessa atividade?
> A1 – [...] Então a gente começou a pesquisar, a gente viu uns dados, pensamos no problema.
> A2 – [...] Primeiramente a escolha do nosso tema, definimos nosso problema.
> A3 – [...] o problema referente ao tema que escolhemos.
> A4 – [...] Interação, a gente teve que definir o problema.
> A5 – [...] a gente teve que procurar o tema, analisar o tema, definir nosso problema.

Os códigos referentes à categoria *Competência para identificar um problema em uma situação* se confirmam na entrevista do terceiro momento. É natural que essa competência seja requerida apenas no terceiro momento, já que nesse momento os alunos são responsáveis pela condução de toda a atividade.

Com relação à categoria *Competência para realizar a dedução do modelo matemático*, em todos os momentos de familiarização os alunos se remetem aos códigos [deduzindo o modelo], [utilizando representação gráfica], conforme indica o trecho da entrevista que segue.

> Você identifica "passos" ou "etapas" quando desenvolve uma atividade de modelagem matemática? Quais são?
> A1 – [...] chegar no modelo.
> A2 – [...] constrói o modelo matemático.
> A3 – [...] observar se é possível fazer um gráfico, dedução do modelo.
> A4 – [...] dedução do modelo.
> A5 – [...] deduz o modelo.

No que diz respeito às categorias *Competência para estabelecer e interpretar relações entre Matemática e situações reais* nas entrevistas e questionários dos alunos os códigos [resposta para o problema], [responder o problema], [resolução do problema], [validar o modelo], [validação] nos remete às categorias, conforme indica o trecho da entrevista a seguir.

> Você identifica "passos" ou "etapas" quando desenvolve uma atividade de modelagem matemática? Quais são?
> A1 – [...] validar esse modelo e responder o problema.
> A2 – [...] validação e resolução do problema.
> A3 – [...] validação e reflexão.
> A4 – [...] validação e a resposta para o problema.
> A5 - [...] valida e conclui.

Reconhecemos que, por meio desses códigos, as categorias provisórias apresentadas na codificação axial são confirmadas. Desse modo as quatro categorias podem ser consideradas categorias centrais e serão discutidas à luz da literatura mais adiante.

Para sistematização e compreensão da codificação focalizada elaboramos Quadros com os códigos que emergiram dos questionários e entrevistas dos alunos nos três momentos de familiarização com a modelagem matemática. Este processo também serviu para confirmar as categorias apresentadas na codificação axial. Os novos códigos que emergiram dessa codificação serão apresentados posteriormente em outro Quadro, afim de que por meio deles possamos identificar ou não novas categorias.

Quadro 4.5: Códigos da categoria: *Competência para definir um problema em uma situação problema*

Alunos: A1, A2, A3, A4 e A5
Buscando um tema que pudesse ajudar alguém
Definindo o tema
Buscando dados
Elaborando o texto
Pesquisando um tema
Procurando dados
Escolhendo um tema
Pesquisa para definir um tema
Pesquisando sobre o tema
Levantando as informações
Observando um problema que eu posso retirar daquela situação
Definir o problema
Elaborar algum problema
Identificando um problema
Investigação do problema

Fonte: da autora.

Quadro 4.6: Códigos da categoria: *Competência para definir um problema matemático*

Alunos: A1, A2, A3, A4 e A5
Percebendo os detalhes
Levantando hipóteses relevantes
Pensando na interpretação dos dados
Analisando os dados
Definindo as variáveis
Levantando as informações relevantes
Estudando a variação dos dados
Interação
Analisando as variáveis
Estudando os dados

Fonte: da autora.

Quadro 4.7: Códigos da categoria: *Competência para realizar a dedução do modelo matemático*

Alunos: A1, A2, A3, A4 e A5
Retomando conteúdo que não lembrava
Utilizando a representação gráfica
Observando se é possível fazer um gráfico
Deduzindo o modelo
Interpretando o problema graficamente
Construindo o modelo matemático
Matematizando
Determinando o modelo
Construindo a representação gráfica
Elaborando o modelo

Fonte: da autora.

Quadro 4.8: Códigos da categoria: *Competência para estabelecer e interpretar relações entre Matemática e situações reais*

Alunos: A1, A2, A3, A4 e A5
Resposta para o problema
Concluindo
Resolução do problema
Validação
Validar o modelo

Fonte: da autora

Os Quadros 4.5 a 4.8 indicam os códigos que emergiram na codificação focalizada com base nesses códigos que confirmamos nossas categorias. Além desses códigos outros emergiram. Desse modo organizamos esses novos códigos conforme indica o Quadro 4.9.

Quadro 4.9: Códigos emergentes na codificação focalizada

Alunos: A1, A2, A3, A4 e A5
Atividade de modelagem inovadora
Estávamos confusos com o desenvolvimento
Primeiro contato com a modelagem matemática
Relacionando com a realidade
Diferentes formas de resolver
Adaptando ao processo
Dificuldade com a interpretação
Possibilitando a aprendizagem
Aprendendo com os colegas e a professora
A relação da atividade com a realidade pode influenciar o pensamento do aluno
A atividade foi impactante
Opções diferentes (variação da atividade)
A atividade foi ficando mais fácil
O contato com as atividades vai deixando mais fácil

Diferentes resoluções da mesma atividade
Dificuldade em interpretar o problema
Dificuldade em ver qual o conteúdo matemático utilizar
Relação com o cotidiano
A modelagem como meio de estudar a realidade por meio da matemática
Comparando as atividades com outras já desenvolvidas
Percebendo a mudança nas atividades
Fazendo mais sozinhos
Dificuldades com os conteúdos matemáticos
Aprendendo conteúdos que não sabiam
Percebendo o ir e vir da atividade
Pensando nas atividades anteriores
Dificuldade em encontrar o modelo
Independência na atividade
A atividade ajudando a relembrar conteúdos
Estabelecendo relações com as primeiras atividades desenvolvidas
A modelagem como possibilidade de abordar a matemática de uma maneira diferente
Autonomia no desenvolvimento da atividade
Buscando por conteúdos matemáticos não aprendidos
Identificando idas e vindas
Utilizando um contexto do cotidiano
Diversidade de conteúdos abordados
Dificuldade em relacionar o conteúdo matemático com o problema

Fonte: da autora.

Com base no Quadro 4.9 realizamos um agrupamento dos códigos que emergiram na codificação focalizada. Buscamos indícios desses novos códigos nas codificações anteriores e identificamos nos diálogos dos alunos, bem como em suas atividades, indícios de que esses códigos se confirmam. Desse modo, a partir desses códigos elencamos as categorias que serão discutidas posteriormente à luz da literatura, conforme Quadro 4.10,

Quadro 4.10: Agrupamento dos códigos emergentes na codificação focalizada

Alunos: A1, A2, A3, A4 e A5
♦ Atividade de modelagem inovadora
✧ Estávamos confusos com o desenvolvimento
✧ Primeiro contato com a modelagem matemática
♦ Relacionando com a realidade
♦ Diferentes formas de resolver
✧ Adaptando ao processo
✧ Dificuldade com a interpretação
♦ Possibilitando a aprendizagem
♦ Aprendendo com os colegas e a professora
♦ A relação da atividade com a realidade pode influenciar o pensamento do aluno
♦ A atividade foi impactante

♦	Opções diferentes (variação da atividade)
✧	A atividade foi ficando mais fácil
✧	O contato com as atividades vai deixando mais fácil
♦	Diferentes resoluções da mesma atividade
✧	Dificuldade em interpretar o problema
✧	Dificuldade em ver qual o conteúdo matemático utilizar
♦	Relação com o cotidiano
♦	A modelagem como meio de estudar a realidade por meio da matemática
♦	Comparando as atividades com outras já desenvolvidas
✧	Percebendo a mudança nas atividades
✧	Fazendo mais sozinhos
✧	Dificuldades com os conteúdos matemáticos
♦	Aprendendo conteúdos que não sabiam
✧	Percebendo o ir e vir da atividade
✧	Pensando nas atividades anteriores
✧	Dificuldade em encontrar o modelo
✧	Independência na atividade
♦	A atividade ajudando a relembrar conteúdos
✧	Estabelecendo relações com as primeiras atividades desenvolvidas
♦	A modelagem como possibilidade de abordar a matemática de uma maneira diferente

Fonte: elaborada pela autora.

A partir da análise e síntese dos códigos que emergiram, foi possível elaborar as seguintes categorias:

- ✧ Associamos os códigos estávamos confusos com o desenvolvimento; primeiro contato com a modelagem matemática; adaptando ao processo; dificuldade com a interpretação; a atividade foi ficando mais fácil; o contato com as atividades vai deixando mais fácil; dificuldade em interpretar o problema; dificuldade em ver qual o conteúdo matemático utilizar; percebendo a mudança nas atividades; fazendo mais sozinhos; dificuldades com os conteúdos matemáticos; percebendo o ir e vir da atividade; dificuldade em encontrar o modelo; independência na atividade e estabelecendo relações com as primeiras atividades desenvolvidas à competência que identificamos como *Competência de identificação dos procedimentos necessários no desenvolvimento das atividades* e diz respeito ao conjunto de habilidades e/ou capacidades para compreensão do desenvolvimento das atividades, isto é, identificam idas e vindas nas atividades; estabelecem relações com as atividades realizadas anteriormente; autonomia na realização das atividades.

- Associamos os códigos atividade de modelagem inovadora, relacionando com a realidade, diferentes formas de resolver, possibilitando a aprendizagem, aprendendo com os colegas e a professora, a relação da atividade com a realidade pode influenciar o pensamento do aluno, a atividade foi impactante, opções diferentes, diferentes resoluções da mesma atividade, relação com o cotidiano, a modelagem como meio para estudar a realidade por meio da matemática, comparando as atividades com outras já desenvolvidas, aprendendo conteúdos que não sabiam, a atividade ajudando a relembrar conteúdos e a modelagem como possibilidade de abordar a matemática de uma maneira diferente à competência que identificamos como *Competência de identificação de possíveis potencialidades da modelagem* e diz respeito ao conjunto de habilidades e/ou capacidades que permite aos alunos identificar nas atividades as possibilidades de relembrar conteúdos; aprender novos conteúdos; negociar significados; estabelecer relações com o cotidiano.

Com a análise dos dados provenientes das atividades dos alunos, dos ciclos de modelagem, bem como, da análise dos dados provenientes das entrevistas e questionários dos alunos, consolidamos nossas categorias provisórias em categorias centrais, por meio da codificação focalizada. Assim as categorias centrais que discutiremos nesse trabalho são: *Competência para identificar um problema em uma situação, Competência para definir um problema matemático, Competência para realizar a dedução do modelo matemático, Competência para estabelecer e interpretar relações entre Matemática e situações reis, Competência de identificação dos procedimentos necessários no desenvolvimento das atividades* e *Competência de identificação de possíveis potencialidades da modelagem.*

4.6 Discussão

Seguindo as indicações dos dados foi possível identificar seis competências. Chamamos essas competências internas e externas ao processo de desenvolvimento das atividades de modelagem, denominando-as, respectivamente, *competências intra-modelagem* e *competências extra-modelagem*.

- Competências *intra-modelagem*: são as competências que estão relacionadas com o desenvolvimento interno das atividades, isto é, aquelas que são requeridas implícita ou explicitamente no momento em que os alunos desenvolvem as atividades. Essas categorias são: *Competência para* *identificar um problema em uma situação, Competência para definir um problema matemático, Competência para realizar a dedução do modelo matemático, Competência para estabelecer e interpretar relações entre Matemática e situações reais.*

- Competências *extra-modelagem*: são competências que estão relacionadas ao modo *como* os alunos enxergam o próprio desenvolvimento das atividades e as suas possíveis potencialidades. As categorias associadas são: *Competência de identificação dos procedimentos necessários no desenvolvimento das atividades e Competência de identificação de possíveis potencialidades da modelagem.*

Maaβ (2006) em seu trabalho já sinaliza que é possível identificar competências para além das relacionadas às etapas de modelagem matemática, transcendendo a situação-problema estudada. Desse modo, o agrupamento das categorias apresentada por esse trabalho encontra respaldo na literatura. A seguir, apresentamos uma discussão acerca de cada uma das competências.

4.6.1 Competência para identificar um problema em uma situação

A elaboração, a justificação e a problematização de uma situação foram identificadas nas codificações ao longo dessa pesquisa. Buscamos compreender como esses procedimentos foram utilizados pelos alunos e em que momentos.

Na análise das atividades do primeiro momento de familiarização - Césio-137, Cerca elétrica, Para o lanche: vai uma pipoca ai? - a situação inicial foi proposta pela professora, bem como o problema a ser investigado. Assim, a problematização, a tradução de uma situação-problema para um problema matemático vem "orientada" pelas indicações da professora nesse momento. Considerando que a *competência para identificar um problema em uma situação* mobiliza no aluno a elaboração, a justificação e a problematização de uma situação, não podemos afirmar que nesse primeiro momento de familiarização essa competência foi mobilizada pelos alunos analisados nesse trabalho.

No segundo momento de familiarização, na atividade Índice de Motorização no Estado do Paraná, os alunos receberam a situação inicial, como descrita no Capítulo 3, seção 3.4.1.2, e a partir dessa situação foi necessário que eles realizassem a problematização, como eles conduziram essa discussão no grupo está sinalizado no diálogo a seguir.

A4: Qual é o problema?
Aluno: Não é o crescimento de automóveis?
A4: Ah, não sei, ainda não sei qual é o problema. É alguma coisa do crescimento de automóveis.

Grupo 2

A2: O que você acha que é o problema?
A5: Eu acho que tem a ver com o índice, quanto maior o índice maior o número de pessoas que possuem automóveis, agora transformar isso num problema....
A2: Ah, eu acho que aqui está falando que o problema é as pessoas ter muito, tipo assim, a quantidade de carro, por exemplo, por localidade, entendeu, está falando aqui ó (quanto maior o índice de motorização, maior a quantidade de pessoas tem veículo...), eu acho que o problema é tipo assim, qual que seria o índice, está falando Paraná aqui né, por exemplo, o índice apropriado de pessoas com carro no Paraná, tipo pessoas motorizadas, alguma coisa assim, eu acho, que é o problema. O que você acha?
Aluno: Estou lendo o texto agora. Não sei ainda. Eu acho que deve ser alguma coisa assim.
A5: Pode ser assim, quantos anos, em quanto tempo levará para que o número de veículos seja igual ao número de habitantes?

Grupo 1

Ressaltamos que não foi solicitado aos alunos que eles elaborassem ou justificassem a escolha do tema, pois no segundo momento de familiarização a situação inicial é proposta pela professora. Entretanto, a problematização da situação é necessária. No diálogo é possível identificar que os alunos realizaram a interpretação da situação inicial para então propor o problema a ser investigado. Os alunos A1, A2 e A5 propuseram o seguinte problema: *Quando o número de veículos do Estado do Paraná será equivalente à sua população?* E os alunos A3 e A4 definiram o seguinte problema: *Qual o índice de motorização no Paraná em 2013?*

Evidenciamos que no segundo momento de familiarização acontece uma mobilização com relação à problematização da situação pelos alunos analisados, entretanto consideramos que a *competência para identificar um problema em uma situação* não foi requerida dos alunos, sendo essa competência, provavelmente, desenvolvida por meio das intervenções e das orientações da professora.

No terceiro momento de familiarização os alunos são responsáveis pela condução de toda a atividade, desse modo a elaboração, justificação e problematização de uma situação são necessárias nesse momento.

Além dos registros escritos com a apresentação dos temas escolhidos pelos alunos, na entrevista do terceiro momento (Apêndice G), os alunos descrevem como procederam na elaboração e justificação da situação, conforme indica o trecho da entrevista a seguir.

1) Fale sobre como se deu o desenvolvimento da atividade.

> A1: A gente escolheu o álcool que é um tema assim bem, querendo ou não sempre vai gerar, como eu posso dizer, uma curiosidade, que é uma coisa que não vai sumir, sempre vai está assim em alta, você liga a televisão sempre estão comentando sobre a questão do álcool e direção. Então a gente começou a pesquisar, a gente coletou alguns dados, a gente começou a ver que já existiam trabalhos sobre, já tinha livros publicados, artigos, então a gente viu que não era só a gente que tinha pensado, aí tivemos que mudar alguns dados.
> A2: A gente acabou escolhendo o que a gente achou que tivesse mais dados e que era um tema interessante e que também fosse fácil de resolver esse problema. Depois que nós definimos o tema, vamos dizer que a gente ficou muito tempo sem saber o que fazer com esse tema, a gente se reunia, conversava e não saia, mas parecia que a gente não conseguia achar mesmo com tanta informação sobre o nosso tema, não conseguia encontrar o que a gente ia fazer, então a gente se reuniu várias vezes e não saia nada.
> A3: O pessoal do meu grupo tem assim bastante foco sabe? Eu não, eu viajo e aí eu comecei a observar as coisas e eu achei tanta coisa importante que eu não sabia qual que era a que eu deveria considerar né e a A4 queria me ajudar mas não tinha jeito a gente conseguiu se entender no fim porque tinha que montar o modelo não tinha como, mas eu tinha muitos dados eu tinha muita coisa na minha cabeça. Eu pesquisei muito, eu li muito até o processo do álcool no organismo como funcionava, onde ele ia, como era eliminado, até assim cientificamente eu li em sites de medicina, revistas,.
> A4: Então primeiro a gente demorou um pouco, porque a gente queria fazer uma coisa que pudesse ajudar alguém sabe alguma coisa que tivesse significado, não fosse à toa, aí na verdade deu um estalo da gente fazer sobre a eliminação do álcool da cerveja no organismo, porque é uma coisa que acontece no dia-a-dia e está muito ligada a acidente de trânsito e talvez algumas pessoas que ouçam talvez levem em consideração, aí a gente escolheu o tema, aí foi muito difícil pra gente focar.
> A5: Então inicialmente a gente se reuniu e decidiu que a gente não tinha nada em mente ali na hora a gente falou assim: ó cada uma pesquisa o tema a próxima vez que a gente se encontrar a gente decidi qual vai ser. Aí a gente pesquisou teve vários temas, teve temas até eu pesquisei e não foi colocado ali na hora sabe que nós conversamos [...]aí foi onde a gente acabou escolhendo o da AIDS, que a gente tinha bastante dados, daí a gente teve uma ideia interessante pra trabalhar com ele.

Os alunos relatam que a escolha do tema foi motivada pela busca por algo que pudesse ajudar as pessoas. Outros escolheram considerando a quantidade de dados coletados a respeito do tema. Nesse momento o aluno está no processo de inteirar-se sobre e, considerando os ciclos de modelagem, podemos observar que segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012) os alunos estão na etapa de inteiração.

Com relação à problematização da situação, no desenvolvimento das atividades *Cuidado com o Bafômetro* e *Todo Cuidado é pouco! O número da Aids,* os alunos inicialmente buscaram um tema de interesse e a partir desse tema formularam um problema. Os problemas formulados pelos alunos foram: *Depois de quanto tempo o álcool é eliminado do organismo, após um indivíduo ingerir uma lata de cerveja Skol de 269ml, para que como motorista, possa dirigir sem ser pego pelo bafômetro?* e *No ano do ápice populacional do Brasil (2042), o número de incidência de casos de Aids será maior nos homens ou nas mulheres?*

Reconhecemos que no terceiro momento de familiarização é solicitada dos alunos a elaboração, justificação e problematização da situação. Desse modo, consideramos que os alunos investigados tiveram a *competência para identificar um problema em uma situação* requerida no desenvolvimento das atividades. De acordo com Maaβ (2006) competências para fazer modelagem são requeridas no desenvolvimento de atividades o que respalda nossa inferência.

4.6.2 Competência para definir um problema matemático

O estudo e a seleção de dados relevantes para o problema proposto, a realização de simplificações, bem como a seleção de variáveis e levantamento de hipóteses foram analisadas e codificadas em todas as atividades desenvolvidas pelos alunos. Buscamos compreender quais dessas habilidades e/ou capacidades foram utilizadas pelos alunos.

Com relação à definição de variáveis e o levantamento de hipóteses reconhecemos que no primeiro momento de familiarização com a modelagem matemática, os alunos realizam esses procedimentos juntamente com a professora. Como se trata do primeiro contato de muitos deles com atividades de modelagem e também do primeiro momento de familiarização, os alunos não realizam tais procedimentos de maneira autônoma.

Entendemos que no primeiro momento a *competência para definir um problema matemático* não é requerida pelos alunos. Os alunos precisam mais do que simplesmente reproduzir a fala do professor em sala de aula para que esse conjunto de habilidades e/ou capacidades sejam competências requeridas por eles. Essa nossa inferência encontra respaldo na definição de competência de Jensen (2007, p.141), pois de acordo com o autor, "competência para fazer modelagem é a prontidão perspicaz de alguém realizar todas as partes de um processo de modelagem em uma determinada situação". Nesse sentido, o aluno precisa agir diante do que é proposto.

Relacionamos essa competência à etapa matematização conforme Almeida, Silva e Vertuan (2012) e abstração, conforme Bassanezi (2011). Reconhecemos que essas habilidades e/ou capacidades fazem parte do desenvolvimento de uma atividade de modelagem. Entretanto não as consideramos competências requeridas pelos alunos, já que, para que algo se torne competência é necessário mais do que escrever as hipóteses, as variáveis, isto é, é necessário que tenha um envolvimento do aluno com a situação. Desse modo, como não encontramos indícios suficientes desse envolvimento não consideramos que tal competência tenha sido requerida nas atividades do primeiro momento.

No segundo momento de familiarização reconhecemos que os alunos realizam suposições para o problema, simplificam a situação, reconhecem quantidades que influenciam na situação, estabelecem relações entre as variáveis, conforme indica o diálogo a seguir.

> Aluno: Mas qual depende de qual? A frota depende da população? Na verdade não, uma pessoa pode ter dois carros, por isso que eu falei, por exemplo, se a gente quer saber o índice ele depende das outras duas, a população não depende da frota e nem a frota depende da população, agora o índice depende dos dois.
> A5: Então a independente vai ser a população e a dependente vai ser o índice.
> A2: eu acho que primeiro a gente tinha que escrever as informações, para depois tentar achar as variáveis.
> A5: parece que tudo depende de tudo aqui.
> A2, A5: olha nosso problema, é o tempo.
> A1: é alguma coisa de exponencial, cresce, porque se for representar isso no gráfico dá uma exponencial.
> Aluno: é parecida com a do césio, dá uma olhadinha para você ver.
>
> Grupo 1

> A3: agora a gente tem que pegar, ver as variáveis.
> A4: a professora falou que a nossa hipótese é que nunca vai parar de crescer né.
> Aluno: é isso.
> A4: mas é muita coisa que a gente tem que pensar, a gente vai ter que considerar a frota, a população. A gente vai ter que achar um modelo que cabe pra todo mundo. Ah, mas como a gente vai saber a população daqui 10 anos?
> A3: por isso que eu falei que tem uma progressão que a gente vai ter que estudar, pra saber qual é, tem que ver qual a progressão. Vai ter que estimar quantas pessoas vai ter, eu acho. Mas como faz a gente pensar né.
>
> A4: é uma função exponencial. Não tem como não ser. Porque cresce rapidamente. A variável auxiliar é n, então é o tempo mesmo que a gente vai variar.
>
> Grupo 2

Inferimos que no segundo momento há um envolvimento dos alunos com a atividade no sentido de agir frente ao que foi solicitado. No que diz respeito à *competência para definir um problema matemático* entendemos que essa competência foi requerida dos alunos. A independência dos alunos nesse momento garante que eles mobilizaram as capacidades e/ou habilidades que são necessárias para definir um problema matemático.

No desenvolvimento das atividades do terceiro momento de familiarização *Cuidado com o bafômetro* e *Todo Cuidado é pouco! O número da Aids*, os alunos estudam os dados que coletaram a respeito do problema que propuseram, realizam as simplificações que julgam necessárias, conforme indica o trecho da entrevista que segue.

> 1) Fale sobre como se deu o desenvolvimento da atividade.

> A1: [...] Então a gente começou a pesquisar, a gente viu alguns dados. [...] a gente teve que mudar alguns dados, escolher as hipóteses porque tinha muita coisa que influenciava no nosso tema.
> A2: [...] A gente tinha vários dados e queríamos usar todos, mas não tinha como, então nós tivemos que selecionar da melhor forma possível de acordo com o problema que tínhamos proposto.
> A3: [...] então, tipo a gente pesquisou alguns dados, uns além, eram muitas variáveis.
> A4: aí depois que a gente focou, achou os dados que queríamos, daí encaminhou, aí desenvolvemos a matematização.
> A5: [...] a gente tinha bastante dados, daí a gente teve uma ideia interessante para trabalhar com os dados, aí foi a parte que a gente perdeu muito tempo, aí a gente pesquisou mais um pouco, completou nossos dados para completar a ideia e fomos para a dedução do modelo.

É possível reconhecer nas respostas à questão da entrevista que os alunos estão mobilizando habilidades e/ou capacidades a respeito da definição de um problema matemático, pois eles precisam pensar quais aspectos são relevantes para o problema e como a matemática pode ser usada aí. Desse modo, afirmamos que a *competência para definir um problema matemático* foi requerida dos alunos pesquisados apoiados também nas indicações de Maaβ (2006), Jensen (2007).

4.6.3 Competência para realizar a dedução do modelo matemático

Buscamos ao longo dessa pesquisa nos registros dos alunos indícios da mobilização de habilidades e/ou capacidades na construção do modelo matemático, na resolução de questões matemáticas, bem como o uso da tecnologia. Analisamos e codificamos levando em consideração essas capacidades e/ou habilidades no decorrer dos três momentos de familiarização dos alunos com atividades de modelagem.

Nas atividades do primeiro momento os alunos deduzem o modelo matemático com a ajuda da professora. Entretanto, mesmo a dedução do modelo sendo mediada pela professora, reconhecemos que os alunos apresentam suas considerações e participam ativamente da dedução do modelo, conforme indica o diálogo a seguir.

> Pr: tem que calcular o valor da base para saber o comportamento da função. Bom gente nós paramos aqui, temos que encontrar o valor de 1-k, como vamos fazer isso?
> [...] silêncio
> Pr: Se atribuir o valor para t vai encontrar o valor de k, não vai? Mas se atribuir o valor para t aqui né (professora aponta para a segunda sentença da função).
> Pr: e tem como eu saber como encontrar o valor que eu vou usar para t aqui?
> Aluno: maior ou igual a 96,
> Pr: mas qualquer um?
> Aluno: não P(t) tem que tender a zero.

Pr: Então como a gente faz pra a partir de um t que valor pra P(t) a gente vai levar em consideração?
A3: próximo de zero?
Pr: Mas qual? Gente olha aí, as informações que temos na tabela.
Alunos: a partir de 96
Pr: quem é a variável independente?
A5: os grãos de pipoca
Pr: e independente?
Alunos: tempo
Pr: e se pegar o 96, eu vou encontrar o valor de k?
Aluno: não
[...]
Pr: depende de como foi embalada as pipocas. Não vamos levar em consideração o 96, 97 porque foi quando começou a estourar as pipocas e daí quando que todos foram tiradas do micro-ondas em 170 segundos. Aí qualquer um desses valores que a gente pegar vai ter um P(t) relacionado não vai?
[...] silêncio
A5: vamos considerar a menor quantidade que estourou?
Pr: pode ser?
Aluno: pode ser uma média
Pr: é ficará mais próximo, todo mundo concorda em pegar a média?
[...] silêncio

Afirmamos que a *competência para realizar a dedução do modelo matemático* foi requerida pelos alunos A3 e A4, já que é possível identificar nos registros desses dois alunos toda a dedução do modelo, Figuras 4.3 e 4.4. Enquanto que nos registros dos outros alunos não encontramos indícios suficientes de que essa competência foi alcançada.

No desenvolvimento das atividades do segundo e terceiro momentos de familiarização os alunos deduzem o modelo de forma mais independente o que nos indica que há a mobilização de habilidades e/ou capacidades no que diz respeito à construção do modelo matemático. Assim, reconhecemos que a *competência para realizar a dedução do modelo matemático* é requerida dos alunos, conforme indica o diálogo que segue.

Pr: e como vocês determinaram a quantidade de litro consideraram qualquer pessoa.
A4: não, nós pegamos uma tabela que encontramos que tem o peso, a altura e quantidade de sangue.
A3: é um dado que a gente tem.
Pr: e aí?
A4: nós dividimos essa quantidade aqui menos 0,10.
Pr: e esse 4,821 vocês fizeram uma média?
A4: não, agora a gente pegou um específico, um homem com 65kg...
Pr: ah tá.
A4: aí a gente pegou q_0 e estamos fazendo assim.
Pr: aqui não é 0,10 vezes q_0. Por que quem é q_1?
A4: ah tá, professora eu vi. Agora vamos ter que generalizar né, porque pegamos um específico.
Pr: isso.

A4: aqui deu negativo.
A1: não tem problema, lembra? É que está muito baixo.
A4: é verdade, deu certo então.

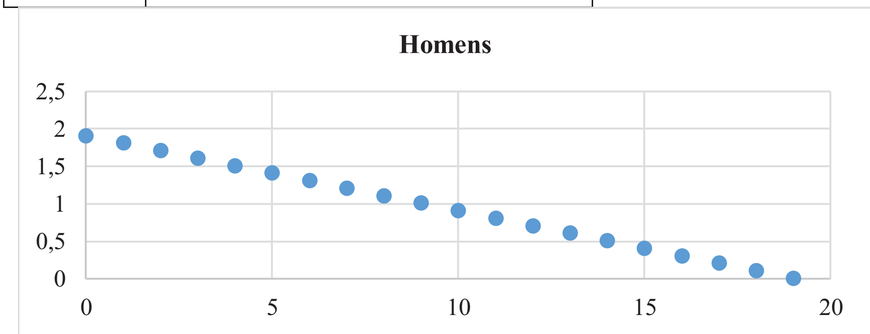
A construção modelo matemático é identificada em todas as representações de ciclos de modelagem que apresentamos nesse trabalho, seção 2.1.1, bem como nos registros das atividades dos alunos, por exemplo, no terceiro momento, conforme indica as Figuras 4.20 e 4.21. Desse modo, consideramos relevante que os alunos mobilizem capacidades e/ou habilidades nessa etapa do desenvolvimento da atividade. Reconhecemos que os alunos buscam por modelos matemáticos já conhecidos com o intuito de terem um certo apoio no que concerne às construções matemáticas.

Figura 4.20: Problema proposto e dedução do modelo matemático da atividade *Cuidado com o bafômetro*

Problema: Após um motorista ingerir uma lata de cerveja quanto tempo ele deve esperar para que o álcool ingerido seja eliminado pelo organismo e consequentemente possa dirigir sem cometer uma infração de trânsito?

- Considerando um homem de 75 kg e 1,70 m de altura.

t	Q(t)
0	Q_0=9,22/4,821= 1,912466293
1	Q_1= Q_0-0,10=1,912466293 - 0,10= 1,812466293
2	Q_2= Q_1-0,10= Q_0-0,10- 0,10= Q_0- 2(0,10)= 1,712466293
3	Q_3= Q_0- 3(0,10)= 1,912466293- 0,30= 1,612466293
n	Q_n= Q_0 –n(0,10)= 1,912466293- t(0,10)



Modelo matemático:

$Q_n = Q_0\,(n+1) - \sum (0{,}10)$

Fonte: trabalho final dos alunos.

Figura 4.21: Problema proposto e dedução do modelo matemático da atividade *Todo Cuidado é pouco! O número da Aids*

Problema: No ano do ápice populacional do Brasil (2042), o número de incidência de casos de Aids será maior nos homens ou nas mulheres?

Sexo Masculino:

$$m(t) = \begin{cases} 1{,}12\left(\frac{t-1990}{5}\right)^3 + 16{,}415\left(\frac{t-1990}{5}\right) + 10{,}74, & \text{se } 1995 \leq t \leq 2010 \\ 24{,}20708061(0{,}986218776)^{\left(\frac{t-1990}{5}\right)}, & \text{se } t > 2010 \end{cases}$$

Sexo Feminino:

$$f(t) = \begin{cases} 1{,}12\left(\frac{t-1990}{5}\right)^3 + 16{,}415\left(\frac{t-1990}{5}\right) + 10{,}74\,, & \text{se } 1995 \leq t \leq 2010 \\ 24{,}20708061(0{,}986218776)^{\left(\frac{t-1990}{5}\right)}, & \text{se } t > 2010 \end{cases}$$

Fonte: trabalho final dos alunos.

4.6.4 Competência para estabelecer e interpretar relações entre Matemática e situações reais

No primeiro momento de familiarização os alunos juntamente com a professora, depois de deduzir o modelo matemático retornam ao problema para respondê-lo, conforme indica o diálogo a seguir.

> Pr: agora sabemos como é a representação gráfica da função. Vamos responder o problema? Esse modelo tudo bem para vocês? De fato é verídico? Entre 0 e 96 tem a mesma quantidade de pipoca? E o que acontece a partir do 96?
> A5: começa estourar.
> Pr: isso, estoura, estoura, e vai diminuindo gradativamente. Então olha só a representação gráfica como que seria. (a professora faz o gráfico para os alunos)
> Pr: nunca chega a zero, essa função é assintótica. O que acontece com o limite?
> Alunos: vai tender a zero.
> Pr: responderam o problema? Qual o problema?
> A3: agora que vai validar?
> Pr: Agora que vamos responder o problema. Como faríamos para responder o problema?
> Aluno: tem que tender a zero, substitui o valor nele.
> Pr: que valor? Qual seria o menor valor a ser considerado?
> Aluno: uma pipoca
> Pr: Por que uma pipoca?
> Aluno: Porque a menor pipoca diferente de zero é uma pipoca.
> Pr: é uma função discreta, porque consideramos o grão da pipoca, mas o tempo é contínuo. Bom mais e daí, substituímos quem por uma pipoca.
> Alunos: o P(t)

A atividade proporcionou aos alunos a retomada e também a possibilidade da aprendizagem de uma função definida por duas sentenças, das operações com logaritmos e operações com exponenciais. Por meio da atividade, os alunos observaram como conceitos matemáticos podem ser aplicados em situações cotidianas, no trecho da entrevista de A1, por exemplo, é possível identificar a relação que o aluno estabeleceu depois que desenvolveu a atividade.

> A1: [...] eu descobri o tempo que demora pra estourar cada grão que tem que considerar a potência do micro-ondas né porque depende do micro-ondas aí muda o tempo que a pipoca fica lá dentro. E depois eu também estourei pipoca em casa e fiquei observando.

Com relação à aprendizagem dos conteúdos matemáticos abordados na atividade, apresentamos o trecho da entrevista de A3 como exemplo, a seguir.

> A3: [...] teve alguma coisa que eu aprendi até, uma coisa que eu não sabia, foi a da pipoca que eu falei assim – nossa nem eu sabia disso – então tá vendo como o aluno aprende tem que valorizar isso mesmo. Eu me surpreendi porque eu falei se eu estou aprendendo imagina o aluno, ele vai aprender com o colega e com a professora.

Reconhecemos que os alunos e a professora estão interpretando os resultados obtidos, estão avaliando a validade da representação matemática associada ao problema. Desse modo consideramos que houve interpretação de resultados matemáticos associados ao problema, a visualização do problema usando linguagem matemática. A validação do modelo matemático no primeiro momento de familiarização foi realizada pelos alunos juntamente com a professora. Consideramos que essas capacidades e/ou habilidades foram requeridas dos alunos e estão relacionadas à *competência para estabelecer e interpretar relações entre Matemática e situações reais.*

No segundo e terceiro momentos de familiarização, os alunos encontraram uma solução para o problema que propuseram, conforme Figura 4.13 e Figura 4.14. Os alunos interpretaram os resultados matemáticos associados ao problema.

No segundo momento de familiarização identificamos nos registros dos alunos a validação do modelo matemático, conforme Figuras 4.11 e 4.12, entretanto não encontramos indícios de uma reflexão a respeito das soluções encontradas. Desse modo, entendemos que a *competência para estabelecer e interpretar relações entre Matemática e situações reais* não foi mobilizada pelos alunos analisados nesse trabalho.

No terceiro momento de familiarização no desenvolvimento das atividades *Cuidado com o bafômetro e Todo Cuidado é pouco! O número da Aids,* a atividade proporcionou aos alunos a retomada e também a possibilidade da aprendizagem de novos conteúdos, bem como a reflexão a partir da atividade que desenvolveram, conforme indica o trecho da entrevista de A2 a seguir.

> A2: Eu gostei, por exemplo, o conteúdo matemático a gente já sabia no final das contas. Eu gostei dessa questão da gente primeiro não saber o que fazer e depois descobrir que sabia isso foi muito bom! E eu também comentei com o pessoal do grupo: poxa olha que legal eu nunca imaginei que eu faria alguma coisa do tipo, que eu ia pegar alguma coisa, porque a previsão que a gente está fazendo é real, já pararam pra pensar. Aí a gente brincou, falou assim: olha em 2042 nós vamos ligar uma pra outra e dizer olha o nosso modelo deu certo, porque a matemática que a gente está acostumada é a dos livros algo pronto, agora a gente fazer isso uma previsão é muito interessante!

No terceiro momento de familiarização ocorreu à comunicação dos resultados para toda a turma, sendo assim, ao comunicar os resultados, os alunos precisaram pensar a respeito de toda a situação e refletiram a respeito das soluções encontradas. Assim reconhecemos que *a competência para estabelecer e interpretar relações entre Matemática e situações reais* foi requerida dos alunos no terceiro momento de familiarização.

4.6.5 Competência de identificação dos procedimentos necessários no desenvolvimento das atividades

Apresentamos dentre outras categorias centrais que os dados nos indicavam aquela que denominamos de *Competência de identificação dos procedimentos necessários no desenvolvimento das atividades*, que é uma referência a um conjunto de códigos recorrentes durante o primeiro, segundo e terceiro momentos de familiarização com atividades de modelagem e nos fez refletir sobre a forma de entendimento dos alunos em relação ao desenvolvimento das atividades, isto é, identificam idas e vindas nas atividades, estabelecem relações com as atividades realizadas anteriormente, autonomia na realização das atividades.

Na entrevista do primeiro e segundo momentos (Apêndice F) fizemos a seguinte pergunta aos alunos: O que foi diferente para vocês ao realizarem as atividades "Césio-137", "Cerca Elétrica", "Para o lanche: Vai uma pipoca aí?", "Índice de Motorização no Estado do Paraná" e "Desvalorização de um veículo"? As respostas dos alunos estão indicadas no trecho a seguir.

> A1: a professora pediu pra gente entender a situação, ela nunca colocava tudo direto, ela ia sempre perguntando. Foi como ela disse que ia trabalhar, primeiro ela orientando e desenvolvendo, depois a gente um pouco mais sozinhos e depois nós sozinhos.

> A2: estávamos mais independentes
> A3: Parece que a gente vai se adaptando a todo aquele processo de observar o problema, de analisar o que está acontecendo naquele problema, a gente pode observar se tem um gráfico, o que podemos elaborar, qual a nossa hipótese.
> A4: As duas últimas nós fizemos mais sozinhos e as três primeiras teve uma ajuda maior da professora.
> A5: As três primeiras foi um primeiro contato, então a gente não conhecia, foi algo novo. As duas últimas já eram uma coisa que a gente já tinha convivido então foi mais fácil, então a gente já sabia pra onde ir.

Reconhecemos nessas falas que os alunos diferenciam os dois momentos em termos do que eles realizaram em cada um deles e, quando novamente são questionados a respeito das atividades desenvolvidas na entrevista do terceiro momento, outros aspectos são levantados por eles, conforme indica o trecho das entrevistas que segue.

> A1: Ah, tivemos bem mais autonomia, porque querendo ou não era a gente que tinha que ver se o conteúdo era adequado, porque a gente tem que saber a matemática daquele problema.
> A2: Então esta atividade foi totalmente diferente pra gente. Desde a escolha de alguma coisa. Parecia fácil no começo, achar alguma coisa interessante, tentar responder alguma coisa envolvendo matemática, mas quando a gente colocou isso na prática mesmo, a gente viu que era difícil, então isso foi uma coisa diferente pra gente, quando era a professora que trazia os dados já prontos a gente ficava ali analisando era uma coisa, agora você pegar uma coisa que está bruta que não tem nada pronto isso foi muito diferente pra gente.
> A3: Ah, é bem mais autônoma né.
> A4: Ah, eu acho que foi a coleta de dados, o foco, na elaboração do texto, porque assim quando você vai fazer aquela lá, você lê é tudo maravilhoso sabe o que está acontecendo, agora pra gente elaborar pras pessoas tirarem os dados que são necessários têm que ter muita cautela. Os outros era o que eu entendia, aqui não, além do que eu entendi, quem vai ler tem que entender.
> A5: Essa última atividade foi diferente de tudo que já tinha feito.

Identificamos que em cada um dos momentos os alunos reconhecem aspectos diferentes das atividades e que conforme vão se familiarizando com as atividades, o entendimento com relação aos procedimentos necessários no desenvolvimento das atividades se fortalece.

Afirmamos que, no nosso entendimento, os alunos estão desenvolvendo competências no que diz respeito ao desenvolvimento das atividades. É possível identificar o desenvolvimento de competências com relação ao que os alunos reconhecem desenvolver nas atividades por meio dos ciclos de modelagem produzidos por eles nos três momentos de familiarização, conforme Figuras 4.16, 4.17, 4.18 e 4.19.

No primeiro e segundo momentos de familiarização identificamos indícios nos registros, bem como nos ciclos de modelagem apresentados pelos alunos, do reconhecimento das etapas de modelagem. Considerando os níveis definidos por Henning e Keune (2011), podemos considerar que os alunos atingiram o nível 1, ou seja, demonstraram a habilidade de reconhecer e descrever o desenvolvimento de uma atividade de modelagem, distinguindo e localizando cada uma das etapas da atividade. Ressaltamos que consideramos a denominação dada pelos alunos às etapas do desenvolvimento das atividades.

Nas atividades do terceiro momento é possível inferir que os alunos atingiram o nível 2, apresentado por Henning e Keune (2011) a respeito de competência para fazer modelagem, ou seja, os alunos foram capazes de analisar e estruturar os problemas, relacionar as variáveis, adotar diferentes perspectivas, construir o modelo matemático, trabalhar matematicamente com o modelo, interpretar os resultados e validar o modelo e todo o processo de forma independente.

Outro aspecto que apresentamos é que a familiarização dos alunos com as atividades de modelagem pode propiciar que eles identifiquem as idas e vindas do desenvolvimento das atividades. Por exemplo, no caso do aluno A5, em sua entrevista do primeiro e segundo momentos quando apresenta os "passos" ou "etapas" ele coloca "acredito ser bem linear mesmo" e já na entrevista do terceiro momento ele coloca "teve muitas idas e vindas". Reconhecemos que a linearidade que eles acreditavam ter no desenvolvimento das atividades do primeiro momento começa a mudar quando eles desenvolvem a atividade com mais autonomia, o que acontece no segundo e terceiro momentos de familiarização.

4.6.6 Competência de identificação de possíveis potencialidades da modelagem

Outra categoria teórica que os dados nos indicou denominamos por *Competência de identificação de possíveis potencialidades da modelagem.* Os códigos que se referem a essa categoria nos fez refletir a respeito de como os alunos identificam nas atividades as possibilidades de relembrar conteúdos, aprender novos conteúdos, negociar significados, estabelecer relações com o cotidiano.

Durante o desenvolvimento das atividades, das entrevistas e questionários respondidos pelos alunos, reconhecemos aspectos relacionados à implementação da modelagem matemática como uma possibilidade de abordar a matemática de uma maneira alternativa, ou seja, abordar a matemática por meio de problemas não essencialmente matemáticos.

Quando os alunos foram questionados a respeito de suas impressões acerca das atividades, suas respostas foram, por exemplo: "Achei assim, foi inovador", "No começo foi assim meio impactante", "Bom eu gostei bastante, foi o primeiro contato com a modelagem".

Esses aspectos levantados pelos alunos, em certa medida, deve-se ao primeiro contato com atividades de modelagem, e de acordo com Figueiredo e Kato (2011), o desenvolvimento das atividades permite que os alunos trabalhem com situações novas e abordagens de situações de diferentes maneiras e de modo geral eles estão acostumados com esquemas prévios e situações que envolvam ações técnicas, conforme indica o trecho a seguir.

> O que você mais considera importante para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem? Por quê?
> A5 - O fato e unir coisas assim do cotidiano. Uma coisa real através da matemática, que é uma coisa assim que em toda a minha vida acadêmica assim, do ensino médio eu não sabia que tinha isso sabe? Isso eu achei muito interessante, você resolver um problema da vida real usando matemática, porque matemática pra mim, eu entrei no curso acreditando que matemática era resolver equações, fazer contas.

Outro aspecto levantado pelo aluno A5 e também pelos outros é a possibilidade da modelagem unir um problema do cotidiano com a Matemática. Esse aspecto é defendido por muitos autores, por exemplo, Bassanezi (2011), Almeida, Silva e Vertuan (2012), Bisognin e Bisognin (2013). Segundo esses autores os alunos desenvolvem conteúdo e habilidades matemáticas, bem como é possível proporcionar um ambiente interdisciplinar para eles.

Nas atividades desenvolvidas pelos alunos no terceiro momento de familiarização, identificamos a preocupação dos mesmos em abordar um tema que "pudesse ajudar as pessoas". Nesse sentido, a modelagem possibilita que os alunos possam se envolver com temas ligados ao cotidiano e desse modo possam refletir a respeito do mundo à sua volta, de acordo com Silva (2005) e Skovsmose (1992).

Levando em consideração os aspectos identificados, afirmamos que a *competência de identificação de possíveis potencialidades da modelagem,* foi sendo desenvolvida pelos alunos ao longo da familiarização com as atividades de modelagem.

4.6.7 Síntese da discussão

Como um dos resultados de nossa pesquisa identificamos que algumas competências são requeridas no interior das atividades, denominadas de *competências intra-modelagem*, e ainda, identificamos por meio das entrevistas e dos questionários competências desenvolvidas, mas que não são necessariamente requeridas no decorrer do processo de modelagem, chamadas de *competências extra-modelagem.*

Para uma síntese de nossa análise, apresentamos o Quadro 4.11.

Quadro 4.11: Competências identificadas nos momentos, entrevistas e questionários

	Atividades do primeiro momento	Atividades do segundo momento	Atividades do terceiro momento	Entrevistas e questionário nos três momentos
Competência para identificar um problema em uma situação			A1, A2, A3, A4, A5	
Competência para definir um problema matemático		A1, A2, A3, A4, A5	A1, A2, A3, A4, A5	
Competência para realizar a dedução do modelo matemático	A3, A4	A1, A2, A3, A4 ,A5	A1, A2, A3, A4, A5	
Competência para estabelecer e interpretar relações entre Matemática e situações reais	A1, A2, A3, A4, A5	A1, A2, A3, A4, A5	A1, A2, A3, A4, A5	
Competência de identificação dos procedimentos necessários no desenvolvimento das atividades				A1, A2, A3, A4, A5
Competência de identificação de possíveis potencialidades da modelagem				A1, A2, A3, A4, A5

Fonte: da autora.

O Quadro 4.11 revela que no primeiro momento de familiarização a competência para realizar a dedução do modelo matemático e a competência para estabelecer e interpretar relações entre Matemática e situações reais são requeridas pelos alunos. Reconhecemos que isso ocorre pelo fato de que no primeiro momento as competências estão associadas aos alunos reconhecerem o desenvolvimento de uma atividade de modelagem. No segundo e terceiro momentos outras competências são requeridas. Identificamos que somente no terceiro momento de familiarização é que todas as *competências intra-modelagem* analisadas nesse trabalho são requeridas dos alunos.

Com relação às *competências extra-modelagem* que identificamos durante a realização das entrevistas e dos questionários respondidos pelos alunos nos três momentos de familiarização foi possível identificar a forma como os alunos entendem o processo de modelagem e o que eles esperam de potencialidades desse processo.

Outro aspecto que podemos destacar diz respeito aos tipos de modeladores identificados por Maaβ (2006). Nas entrevistas realizadas com os alunos identificamos indícios desses modeladores, como indica o trecho da entrevista a seguir.

> 9) O que você considera mais importante para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem?

> A1 – Ah eu acho que é a partir do problema encontrar um modelo válido para aquela situação e tem que responder a pergunta né, porque se sai sem responder o esforço não vale a pena.
> A2 – Eu acho que é você entender o que tem que fazer naquele problema, por exemplo, você tem um problema, o que você sabe os conhecimentos que você tem que pode te ajudar a chegar num possível resultado para você responder aquela pergunta. Então eu acho que isso é o mais importante, você olhar para a atividade e ter uma ideia do que você tem que fazer, o que eu sei que pode me ajudar.
> A3 – Ah eu gosto muito da interpretação, acho legal o aluno observar não só o resultado, porque assim isso influencia se for uma coisa da realidade o pensamento do aluno, e também gosto de quando a gente começa a perceber a validação do modelo, começa a ver o que está dando certo, acho que é uma parte bem importante, falar: olha só, não que só o número seja mais importante né?
> A4 – Eu acho que é importante você achar um problema e a dedução do modelo, porque é com esse modelo que vou responder meu problema, que vou validar.
> A5 - O fato é unir coisas assim do cotidiano. Uma coisa real através da matemática, que é uma coisa assim que em toda a minha vida acadêmica assim, do ensino médio eu não sabia que tinha isso sabe? Isso eu achei muito interessante, você resolver um problema da vida real usando matemática, porque matemática pra mim, eu entrei no curso acreditando que matemática era resolver equações, fazer contas.

Evidenciamos nesse trecho aspectos que nos permitem identificar os tipos de modeladores dos alunos analisados. No caso de A1, A2 e A4, identificamos que eles são modeladores realidade-distante, pois dão uma importância maior à dedução do modelo matemático e aos conhecimentos matemáticos necessários nessa dedução. Reconhecemos que os alunos A3 e A5 são os modeladores reflexivos pois a ênfase está na situação abordada e também na matemática.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde o início da pesquisa, buscamos elementos que possibilitassem investigar **Quais competências são requeridas ou são desenvolvidas pelos alunos com o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática?** Na busca desses elementos, considerando os três momentos de familiarização, investigamos as competências dos alunos para fazer modelagem, as características referentes aos procedimentos que podem ser observados no desenvolvimento das atividades e como os alunos descrevem seus próprios ciclos de modelagem, analisando o próprio desenvolvimento de atividades.

A partir das reflexões que fizemos, retornamos aqui, de modo geral, as compreensões construídas ao longo da pesquisa, que são advindas de reflexões realizadas com base nos alunos analisados.

Para responder nossa questão de investigação, analisamos atividades de modelagem matemática, que nessa pesquisa foi utilizada como alternativa pedagógica, desenvolvidas com e por alunos do 4º semestre do Curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Modelagem Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Cornélio Procópio durante a familiarização dos alunos com as atividades. A análise das atividades foi realizada à luz da Teoria Fundamentada em Dados, segundo as indicações de Charmaz (2009).

Ao utilizarmos a Teoria Fundamenta em Dados como opção metodológica e de análise entendemos que ficar próximos aos dados possibilitou compreender nossa questão de investigação. As codificações realizadas, concomitante à coleta de dados, permitiu que identificássemos possíveis lacunas nos dados coletados e buscar novos dados para compreender de forma analítica o fenômeno estudado.

Assim, consideramos ao final dessa pesquisa, que competências para fazer modelagem matemática são requeridas ou são desenvolvidas pelos alunos. No caso dessa pesquisa, identificamos *competências intra-modelagem* e *competências extra-modelagem* dos alunos no desenvolvimento das atividades. Acreditamos que as *competências intra-modelagem* estão relacionadas às etapas de modelagem e são competências requeridas pelos alunos. Entendemos como competências desenvolvidas pelos alunos àquelas relacionadas às *competências extra-modelagem* em que identificamos a forma como os alunos entendem o processo de modelagem e o que eles esperam de potencialidades desse processo.

A análise dos dados permitiu reflexões do *como* os alunos lidam com as atividades de modelagem, o que foi requerido ou desenvolvido por eles durante a realização das atividades.

Assim identificamos no desenvolvimento das atividades realizadas pelos alunos as seguintes competências: *Competência para identificar um problema em uma situação, Competência para definir um problema matemático, Competência para realizar a dedução do modelo matemático, Competência para estabelecer e interpretar relações entre Matemática e situações reais, Competência de identificação dos procedimentos necessários no desenvolvimento das atividades* e *Competência de identificação de possíveis potencialidades da modelagem.*

Com essa pesquisa, acrescentamos conhecimento à área de Modelagem Matemática na Educação Matemática no que diz respeito às evidências de competências desenvolvidas ou requeridas dos alunos para fazer modelagem no desenvolvimento das atividades. No que diz respeito à familiarização dos alunos com as atividades, reconhecemos que foi possível identificar quais competências foram requeridas e/ou desenvolvidas pelos alunos no decorrer dos diferentes momentos. Em nossa pesquisa, reconhecemos que a habilidade de fazer modelagem foi sendo desenvolvida pelos alunos no decorrer do seu envolvimento com as atividades conforme sugerem os momentos de familiarização. Assim, consideramos que a familiarização gradativa vez com que nas atividades algumas competências foram sendo requeridas enquanto outras eram desenvolvidas por meia da atividade.

Embora essa pesquisa contribua para o desenvolvimento da Modelagem Matemática na Educação Matemática reconhecemos algumas limitações. É possível que outras competências possam ser identificadas, considerando outros contextos ou um número maior de alunos. Entretanto, mesmo encontrando limitações nossa pesquisa pode ser mote para que outras sejam realizadas nesse sentido, para que estas e/ou outras competências possam ser identificadas, contribuindo assim para o ensino da matemática.

Refletir sobre o que os alunos “fazem” quando desenvolvem atividades de modelagem pode auxiliar o professor no monitoramento de suas atitudes no decorrer da aplicação das atividades de modo a contribuir para a aprendizagem dos alunos.

Esperamos que a reflexão desencadeada na pesquisa sobre as competências dos alunos em atividades de modelagem possa atingir também outros pesquisadores que, como nós, buscam compreender que competências podem ser requeridas ou desenvolvidas quando os alunos se envolvem com atividades de modelagem.

6 REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W.; BRITO, D. S. Atividades de modelagem matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência & Educação**, v. 11, n. 3, p. 483-498, 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 22, p. 19-35, 2004.

ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké**, Campinas, v. 18, número temático, p. 379-406, 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os modos de inferência. **Ciência & Educação**, v. 18, n. 3, p. 623-642, 2012.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W; VERTUAN, R. E. Discussões sobre "como fazer" Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W. de; ARAÚJO, J. de L.; BISOGNIN, E. (Org.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, p. 19-43, 2011.

BARBOSA, J. C. Sobre a pesquisa em Modelagem Matemática no Brasil. In. **II Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática GT Modelagem Matemática**. Santos, 2003.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: o que é? Por que? Como? **Veritati**, Salvador, v. 4, p. 73-80, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BATISTA, I. L. O ensino de teorias Físicas mediante uma estrutura histórico-filosófica. **Ciência & Educação**, v.10, n. 3, p.461-476, 2004.

BEAN, D. As premissas e os pressupostos na construção conceitual de modelos. In: **Anais do V Seminário Internacional de pesquisa em Educação Matemática**. Petrópolis, 2012.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Modelagem Matemática como possibilidade de desenvolvimento de competências com alunos de Licenciatura em Matemática. In: **Congresso Iberoamericano de Educação Matemática**, 2013, Montevidéu. Anais do VII CIBEM. Montevidéu: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya, v. 1. p. 1-8, 2013.

BLOMHØJ, M. ; JENSEN, T. H. Developing mathematical modeling competence: conceptual clarification and educational planning. **Teaching Mathematics and its applications**. Volume 22, No. 3, p. 123 – 139, 2003.

BORSSOI, A. H. **Modelagem Matemática, Aprendizagem Significativa e Tecnologias**: articulações em diferentes Contextos Educacionais. 2013. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2013.

BROIETTI, F. C. D. **O ENEM, O Vestibular e o Ensino de Química:** o caso da Universidade Estadual de Londrina. 2013. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciências e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, 2013.

BLUM, W; FERRI, R. B. Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n. 1, p. 45-58, 2009.

CHARMAZ, K. **A construção da teoria fundamentada**: guia prático para análise qualitativa. Tradução de Joice Elias Costa. Porto Alegre: Artmed, 2009.

CHARMAZ, K. **Constructing Grounded Theory**: a practical guide through qualitative analysis. Londres: SAGE Publications, 2006.

CROUCH, R. ; HAINES, C. Mathematical modelling: transitions between the real world and the mathematical model. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 35, n. 2, p. 197-206, 2004.

CUNHA, A. G. **Dicionário Etimológico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Lexikon, 2010.

D'AMBROSIO, U. Mathematical Modeling: cognitive, pedagogical, historical and political dimensions. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n. 6, p. 89-98, 2009.

FERRI, R. B.; Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. **ZDM**, v. 38 (2), 2006.

FERRI, R. B. Personal Experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. Proceedings for the **CERME 5**, WG 13, 2007.

FIGUEIREDO, D.; KATO, L. A. A modelagem e o desenvolvimento de competências. In: **VII Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática**. Belém. 2011.

GALBRAITH, P. Models of Modelling: Is there a first among equals? Mathematics: traditions and [new] pratices. **AAMT & MERGA**, 2011.

GALBRAITH, P. Models of Modelling: Gneres, Purposes or Perspectives. **Jornal of Mathematical Modelling and Application,** Vol.1, No. 5, 3-16, 2012.

HENNING, H.; KEUNE, M. Levels of modeling competence. In: KAISER, G. et al. (ed.). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14). New York: Springer, p. 225-232, 2011.

HOUAISS, A. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. São Paulo: Publifolha, 2008.

JENSEN, T. H. Assessing mathematical modeling competency. In Haines et al. (Eds.) Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics Chichester: Horwood Publishing, p. 141- 148, 2007.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM** – The International Journal on Mathematics Education, Vol. 38 n. 3, pp. 302-310, 2006.

KLÜBER, T. E. (Des) Encontros entre Modelagem Matemática na Educação Matemática e a Formação de Professores de Matemática. **Alexandria**, v.5, n.1, p. 63-84, 2012.

LARROSA BONDÍA, J. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. Tradução de João Wanderley Geraldi. Revista Brasileira de Educação,n. 19, p. 20-28, jan/fev/mar/abr. 2002.

MAAβ, K. Barriers and opportunities for the integration of modelling in mathematics classes: results of an empirical study. In: BLOMHOJ, M.; BRANDELL, G.; NISS, M. (Eds). **Teaching mathematics and applications**: the 10th ICME. Conpenhagen, p. 61-74, 2005.

MAAβ, K. What are modelling competences? **ZDM**, vol. 38 (2), 2006.

MAAβ, K. How can teachers' beliefs affect their professional development? **ZDM**, vol. 43, p. 573-586, 2011.

MISCHO, C.; MAAβ, K. Which personal factors affect mathematical modelling? The effect of abilities, domain specific and cross domain-competences and beliefs on performance in mathematical modeling. **Journal of Mathematical Modelling and Application,** Vol. 1, No. 7, 3-19, 2012.

NISS, M.; HØJGAARD, T. **Competencies and Mathematical Learning.** English edition, October, 2011.

PATROCÍNIO JÚNIOR, C. A. Os ciclos explicativos e as diversas práticas de modelagem na Educação Matemática. In**: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática** — CNMEM, 5, Universidade Federal de Ouro Preto/Universidade Federal de Minas Gerais, Ouro Preto. Anais... Ouro Preto, p. 843-854, 2007.

PERRENET, J.; ZWANEVELD, B. The many faces of the mathematical modeling cycle. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n. 6, 3-21, 2012.

SANTOS, L. Avaliar Competências: uma tarefa impossível? – Revista: Educação e Matemática, n. 74, p. 16 – 21, Setembro/Outubro, 2003.

SILVA, A.G.O. **Modelagem Matemática: uma perspectiva voltada para a Educação Matemática Crítica.** (Dissertação de mestrado) – Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina, 2005.

SILVA, K.A.P. **Modelagem Matemática e Semiótica: algumas relações.** (Dissertação de mestrado) – Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina,2008.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. W.; GERÔLOMO, A. M. L. "Aprendendo" a Fazer Modelagem Matemática: A Vez do Aluno. **Educação Matemática em Revista,** p. 28-36, 2011.

SKOVSMOSE, O. Democratic competence and reflective knowing in mathematics. **For the Learning of Mathematics,** vol. 12, No. 2, 1992.

WINCH, C.; GINGELL, J. Dicionário de Filosofia da Educação. Tradução de: Renato Marques de Oliveira – São Paulo: Contexto, 2007.

APÊNDICES

APÊNDICE A

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

E PERFIL DO ACADÊMICO

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Tendo em vista o desenvolvimento da pesquisa: Competência dos alunos em atividades de modelagem matemática, sob responsabilidade de Ana Paula Zanim Lorin, aluna do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, declaro que consinto que a mesma utilize meus registros escritos e os registros de minhas discussões na realização das atividades de MM no período de 11/10/2013 à 18/12/2013, bem como os registros de minhas respostas durante entrevistas, podendo utilizá-los parcial ou integralmente, sem restrições de prazos e citações, desde a presente data, podendo divulgá-lo em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que meu nome não seja citado em hipótese alguma, garantindo o anonimato. Igualmente abdico dos direitos meus e de meus descendentes. Declaro ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Nome	RG	Assinatura
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		
9.		
10.		
11.		
12.		

Londrina, 11 de outubro de 2013.

Universidade Estadual de Londrina
Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática
Prof. Dra. Lourdes M. W. de Almeida
Mestranda: Ana Paula Zanim Lorin

PERFIL DO ACADÊMICO

1. Nome: ____ 2. Idade:___

3. Já concluiu algum curso superior? Qual?

4. Você realiza outras atividades além das acadêmicas? Se sim, quais?

5. Você já teve contato com algum projeto (extensão, ensino ou pesquisa) durante a graduação? Qual? Você gostou? Comente.

6. Você tem experiência como professor de Matemática? Quanto tempo? Em que nível de escolaridade?

7. Você já teve contato com a modelagem matemática antes de iniciar esta disciplina? Qual? E em que contexto?

APÊNDICE B

QUESTIONÁRIO DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

CÉSIO-137; CERCA ELÉTRICA; PARA O LANCHE: VAI UMA PIPOCA AÍ?

Universidade Estadual de Londrina - UEL
Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática
Orientadora: Prof. Dra. Lourdes M. W. de Almeida
Mestranda: Ana Paula Zanim Lorin
Instrumento de coleta de dados 1 – Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Aluno(a): ____data: 13/10/13

Sobre o desenvolvimento das atividades: "CÉSIO-137"; "CERCA ELÉTRICA" E "PARA O LANCHE: VAI UMA PIPOCA AÍ"? Responda:

Parte I: As questões serão respondidas no quadro que se encontra no final da página. Sua resposta pode varia de um extremo a outro dependendo da sua opinião.

1) Caracterize o grau de complexidade das atividades desenvolvidas.

2) Sua familiaridade com os conceitos matemáticos utilizados durante a resolução das atividades.

3) Suas impressões sobre a atividade desenvolvida.

4) Você ficou convencido(a) da validade da solução encontrada?

5) Importância da generalização da situação-problema.

6) Uso de diferentes maneiras para resolver o problema.

1. Pouco complexo	1	2	3	4	5	6	7	Muito complexo
2. Pouco familiar	1	2	3	4	5	6	7	Muito familiar
3. Pouco interessante	1	2	3	4	5	6	7	Muito interessante
4. Pouco convencido(a)	1	2	3	4	5	6	7	Totalmente convencido(a)
5. Sem importância	1	2	3	4	5	6	7	Muito importante
6. Dispensável	1	2	3	4	5	6	7	Indispensável

PARTE II

1) Considerando as três atividades estudadas, enumere de 1 até 5, conforme a importância que atribui a cada item, considerando como 1 a maior importância e 5 a menor importância.
( ) A aplicação da matemática.
( ) A resolução de um problema.
( ) A relação da matemática com a realidade.
( ) A aprendizagem da matemática por meio da atividade.
( ) A relação com a sua prática futura enquanto professor de matemática.

2) Na atividade Vai uma pipoca aí, qual é o aspecto que você considera mais positivo? Por que?

3) Na atividade Vai uma pipoca aí, qual é o procedimento em que mais teve dúvida ou precisou de ajuda? Por que?

4) Com relação à atividade Vai uma pipoca aí, responda:

1 – O tema estudado é significativo.
a) Totalmente de acordo b) De acordo c) Em desacordo d) totalmente em desacordo

2 – O levantamento de hipóteses e as escolha de variáveis são muito importantes no desenvolvimento da atividade de MM.
a) Totalmente de acordo b) De acordo c) Em desacordo d) totalmente em desacordo

3 – Com o desenvolvimento desta atividade de MM, você conseguiu aprender algo mais sobre o conteúdo funções exponenciais.
a) Totalmente de acordo b) De acordo c) Em desacordo d) totalmente em desacordo

4 – O modelo encontrado apresenta um resultado adequado para o problema.
a) Totalmente de acordo b) De acordo c) Em desacordo d) totalmente em desacordo
5 – Esta atividade pode lhe influenciar na hora de usar o micro ondas para fazer pipoca.
a) Totalmente de acordo b) De acordo c) Em desacordo d) totalmente em desacordo

6- A atividade lhe permitiu saber o que é uma equação de diferenças
a) Totalmente de acordo b) De acordo c) Em desacordo d) totalmente em desacordo

PARTE III
1) Descreva para cada uma das atividades os procedimentos que realizou para resolver o problema.

2) Faça um esquema indicando mais ou menos os passos ou as etapas que foram usados para o desenvolvimento da atividade. Faça um esquema para cada atividade.

3) Você acha que sua reação inicial em relação aos problemas estudados, estava condicionada por experiências passadas com a matemática ou com a resolução de problemas anteriores? Fale sobre isso.

4) Assinale procedimentos que identificou na resolução das atividades;
( ) coleta de dados
( ) definição de variáveis
( ) definição de problema
( ) obtenção de um modelo matemático
( ) análise de uma resposta
( ) necessidade de diálogo com colegas ou professor
( ) necessidade de fazer simplificações

5) Responda: o que é Modelagem Matemática?

APÊNDICE C

QUESTIONÁRIO DA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

ÍNDICE DE MOTORIZAÇÃO NO ESTADO DO PARANÁ

Universidade Estadual de Londrina - UEL
Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática
Orientadora: Prof. Dra. Lourdes M. W. de Almeida
Mestranda: Ana Paula Zanim Lorin
Instrumento de coleta de dados 1 – Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Aluno(a): ____data: 18/10/13

Sobre o desenvolvimento da atividade **Índice de Motorização no Estado do Paraná,** faça um esquema indicando os passos ou as etapas que você considera que foram usados para o desenvolvimento da atividade.

APÊNDICE D

QUESTIONÁRIO DA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

DESVALORIZAÇÃO DE UM VEÍCULO

Universidade Estadual de Londrina - UEL
Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática
Orientadora: Prof. Dra. Lourdes M. W. de Almeida
Mestranda: Ana Paula Zanim Lorin
Instrumento de coleta de dados 1 – Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Aluno(a): ____data: 18/10/13

Sobre o desenvolvimento da atividade **Desvalorização de um veículo,** faça um esquema indicando os passos ou as etapas que você considera que foram usados para o desenvolvimento da atividade.

APÊNDICE E

QUESTIONÁRIO DA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA DO TERCEIRO MOMENTO DE FAMILIARIZAÇÃO

Universidade Estadual de Londrina - UEL
Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática
Orientadora: Prof. Dra. Lourdes M. W. de Almeida
Mestranda: Ana Paula Zanim Lorin
Instrumento de coleta de dados 1 – Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Aluno(a): ____data: 13/12/13

Título do trabalho de Modelagem Matemática: ______________________________

____

1) Sobre o desenvolvimento da sua atividade no trabalho final, faça um esquema indicando os passos ou as etapas que você considera que foram usados para o desenvolvimento da atividade.

2) Descreva as dificuldades encontradas pelo grupo no desenvolvimento da atividade.

3) Comente sobre como foi a condução (sequência) da atividade desde a escolha do tema até encontrarem a solução para a situação-problema.

4)Enumere de 1 a 4, considerando o que gostou mais na atividade de modelagem desenvolvida (atribua valores de 1 até 4, conforme tenha sido maior o seu interesse)
( )A aplicação da matemática.
( ) Resolver um problema não matemático por meio da matemática.
( ) A aprendizagem da matemática proporcionada pelo desenvolvimento da atividade.
( )A aprendizagem visando a sua atuação como professor de Matemática no futuro.

APÊNDICE F

ROTEIRO DE ENTREVISTA PARA AS ATIVIDADES

CÉSIO-137

CERCA ELÉTRICA

PARA O LACHE: VAI UMA PIPOCA AÍ?

ÍNDICE DE MOTORIZAÇÃO NO ESTADO DO PARANÁ

DESVALORIZAÇÃO DE UM VEÍCULO

Entrevista 1º e 2º momento

1) Quais suas impressões sobre o desenvolvimento das primeiras atividades de modelagem: "CÉSIO-137", "CERCA ELÉTRICA", "PARA O LANCHE: VAI UMA PIPOCA AÍ?".

2) Quais suas impressões sobre o desenvolvimento das atividades: "Índice de Motorização no Estado do Paraná", "Desvalorização de um veículo".

3) O que foi diferente para vocês ao realizarem as atividades "CÉSIO-137", "CERCA ELÉTRICA", "PARA O LANCHE: VAI UMA PIPOCA AÍ?" e "Índice de Motorização no Estado do Paraná", "Desvalorização de um veículo"?

4) Vocês ficaram convencidos da validade da solução encontrada nas atividades que desenvolveram?

5) Quais as dificuldades sentidas por você durante o desenvolvimento das atividades?

6) Os conhecimentos matemáticos necessários para o desenvolvimento das atividades eram coisas já aprendidas ou foi necessário algum tipo de suporte?

7) Que características dos dados matemáticos foram essenciais na construção de cada modelo matemático?

8) Você pensou em utilizar o recurso gráfico para validar os modelos obtidos no problema?

9) O que você considera mais importante para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática? Por quê?

10) Por quê você está fazendo a atividade de modelagem dessa maneira, seguindo esses passos? (Mostrar uma atividade que eles fizeram e o que eles resolveram nos passos).

11) Você identifica "passos" ou "etapas" quando desenvolve uma atividade de modelagem matemática? Quais são?

APÊNDICE G

ROTEIRO DE ENTREVISTA PARA A ATIVIDADE DO TERCEIRO MOMENTO DE FAMILIARIZAÇÃO

Entrevista 3º momento

1) Fale sobre como se deu o desenvolvimento da atividade.

2) Em algum momento no desenvolvimento da atividade pensaram em desistir do tema e procurar outro? Por quê?

3) O que foi diferente para vocês ao realizarem as atividades “CÉSIO-137”, “CERCA ELÉTRICA”, “PARA O LANCHE: VAI UMA PIPOCA AÍ?” , “Índice de Motorização no Estado do Paraná”, “Desvalorização de um veículo” e está que desenvolveram?

4) Quais as dificuldades sentidas por você durante o desenvolvimento da atividade?

5) Vocês ficaram convencidos da validade da solução encontrada na atividade que desenvolveram?

6) Os conhecimentos matemáticos necessários para o desenvolvimento da atividade eram coisas já aprendidas ou foi necessário algum tipo de suporte?

7) Você pensou em utilizar o recurso gráfico para validar os modelos obtidos no problema?

8) Quais “passos” ou “etapas” você identificou no desenvolvimento dessa atividade?

9) O que você considera mais importante para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática? Por quê?

10) O que gostou mais na atividade:
A aplicação da matemática?
Resolver um problema não matemático por meio da matemática?
A aprendizagem da matemática proporcionada pelo desenvolvimento da atividade?
A aprendizagem visando a sua atuação como professor de Matemática no futuro?
Porque?

APÊNDICE H

DESCRIÇÃO ABREVIADA DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

H1 –ATIVIDADES DESENVOLVIDAS NO PRIMEIRO MOMENTO

H1.1 CÉSIO-137

Essa foi uma atividade proposta pela professora e, desenvolvida pelos alunos juntamente com a professora. Inicialmente a professora entregou para os alunos a situação-problema, eles fizeram a leitura com o intuito de propor um problema a ser investigado a partir da situação, conforme mostra o Quadro,

Quadro: Descrição do tema *CÉSIO-137*

No dia 13 de setembro de 1987, dois sucateiros encontraram um aparelho de radioterapia em um prédio abandonado da Santa Casa de Misericórdia de Goiânia, capital do Estado de Goiás. Eles, então, levaram o aparelho desconhecido para a casa de um deles onde o desmontaram. Durante a desmontagem do aparelho, os sucateiros expuseram no ambiente 19,26g de cloreto de césio-137 (CsCl), pó branco semelhante ao sal de cozinha, que brilha no escuro com uma coloração azulada. Segundo a Comissão Nacional de Energia Nuclear (CNEN): Cada elemento radioativo se transmuta a uma velocidade que lhe é característica. Meia-vida é o tempo necessário para que a sua atividade seja reduzida à metade da atividade inicial. Alguns elementos possuem meia-vida de milionésimos de segundos. Outros, de bilhões de anos. (CNEM, 2006). A meia-vida do césio-137 é 30,2 anos. Mas para facilitar nossos cálculos vamos considerar a meia-vida do césio-137 como sendo de 30 anos.

Fonte: elaborado pela professora da turma

A partir destas informações, os alunos e a professora se propuseram a estudar como se comporta a concentração do césio-137 na cidade de Goiânia no decorrer de 10 anos.

Definiram as variáveis: As variáveis utilizadas para resolver o problema são:

- variável independente: t →tempo (anos);

- variável dependente: Q→quantidade (gramas) de césio-137.

Formularam as hipóteses: Para realizar o estudo fez-se necessário a formulação de algumas hipóteses para que a partir delas, realizassem a dedução do modelo que descreve a situação em estudo.

H1 : A quantidade de césio-137 depende do ano.

H2 : A quantidade inicial de césio-137 que contaminou Goiânia é 19,26g.

H3 : A meia-vida do césio-137 é de 30 anos.

H4 : O tempo inicial é 1987.

Dedução do modelo matemático

Como a quantidade de césio-137 diminui pela metade a cada 30 anos, construímos uma tabela, na qual tomamos o tempo inicial como sendo o ano de 1987, somamos 30 a cada ano considerado e dividimos a quantidade anterior de césio-137 por 2.

Assim, obtemos os seguintes resultados:

Tempo (ano)	Valor de n	Quantidade de césio-137 (gramas)
1987	$n = 0$	$Q_0 = 19{,}26 = \frac{Q_0}{2^0} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 . Q_0$
2017	$n = 1$	$Q_1 = 9{,}63 = \frac{19{,}26}{2} = \frac{Q_0}{2^1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 . Q_0$
2047	$n = 2$	$Q_2 = 4{,}815 = \frac{19{,}26}{4} = \frac{Q_0}{2^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 . Q_0$
2077	$n = 3$	$Q_3 = 2{,}4075 = \frac{19{,}26}{8} = \frac{Q_0}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 . Q_0$
2107	$n = 4$	$Q_4 = 1{,}20375 = \frac{19{,}26}{16} = \frac{Q_0}{2^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 . Q_0$
⋮	⋮	⋮
$1987 + 30.n$	n	$Q_n = \frac{Q_0}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n . Q_0$

Logo, o modelo matemático que obtiveram foi o seguinte:

$$Q_n = \frac{Q_0}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n . Q_0$$

Considerando que o ano zero ($n = 0$) corresponde a 1987 e que a meia-vida do césio-137 é de 30 anos, ou seja n =1 corresponde ao ano de 1987+30=2017, podemos escrever que a quantidade de césio-137 num ano t qualquer é dada por:

$$Q(t) = 19{,}26.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t-1987}{30}}$$

Assim, no ano de t = 1997, a quantidade de césio-137 em Goiânia é

$$Q(t) = 19{,}26.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t-1987}{30}}$$

$$Q(1997) = 19{,}26.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1997-1987}{30}}$$

$$Q(1997) = 15{,}286 \text{ g}$$

Depois de 10 anos a quantidade de césio-137 presente em Goiânia é de 15,286g.

H1.2 CERCA ELÉTRICA

Essa foi uma atividade proposta pela professora e, desenvolvida pelos alunos juntamente com a professora. Inicialmente a professora entregou para os alunos a situação-problema, eles fizeram a leitura com o intuito de propor um problema a ser investigado a partir da situação, conforme mostra o Quadro,

Quadro: Descrição do tema *Cerca elétrica*

O aumento do índice de violência que ronda a vidas das pessoas tanto no campo como na cidade, conduz à procura por equipamentos de segurança instalados em construções. Dessa forma, as pessoas estão recorrendo à instalação de cercas elétricas para melhorar sua segurança.

A cerca elétrica é uma forma de proteção bastante eficiente. Consiste numa cerca ligada a uma central elétrica, capaz de produzir choque suficiente para impulsionar uma pessoa para longe.

As informações a seguir foram obtidas junto a empresas especializadas, as quais oferecem duas opções de serviços de instalação de cercas elétricas residenciais, conforme o quadro a seguir.

Conteúdo	Opção 1 (kit pronto)	Opção 2 (kit a montar)
Central	R$ 370,00	R$ 180,00
Bateria		R$ 60,00
Sirene		R$ 25,00
Haste de aterramento		R$ 35,00
Cerca (20 metros)		________________

Para a primeira opção, paga-se R$5,00 por metro de cerca que exceder os 20 metros constantes do kit pronto. Já para a segunda opção, cada metro de cerca custa R$4,50.

Fonte: elaborado pela professora da turma

Na situação são consideradas as informações:

- Na opção 1, o valor do kit é de R$370,00, e paga-se R$5,00 por metro de cerca que exceder 20m;
- Na opção 2, tem-se um valor fixo de R$300,00 e cada metro de cerca custa R$4,50.

A partir das informações, qual a opção mais vantajosa para um cliente que deseja instalar esse equipamento de segurança?

Consideramos o comprimento da cerca l, dado em metros, como variável independente e o custo do kit 1 (C_1) e o custo do kit 2 (C_2), dados em reais, como variáveis dependentes.

A fim de comparar os valores das opções, construímos a tabela 1 e a tabela 2 que apresentam o custo de cada kit de acordo com o comprimento da cerca.

Tabela 1: Custo (C_1) da cerca elétrica usando a opção 1

l (em m)	C_1
1 a 20	370
21	370 + 5 = 370 + 1.5
22	370+5+5 = 370 + 2.5
23	370+5+5+5 = 370 + 3.5
24	370+5+5+5+5= 370 + 4.5
25	370+5+5+5+5+5 = 370 + 5.5
⋮	⋮
l	370+(l-20)5

Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (p.76, 2012)

Tabela 2: Custo (C_2) da cerca elétrica usando a opção 2

l	C_2
1	300 + 4,50 = 300 + 1. 4,50
2	300 + 4,50 + 4,50 = 300 + 2. 4,50
3	300 + 4,50 + 4,50 + 4,50 = 300 + 3. 4,50
4	300 + 4,50 + 4,50 + 4,50 + 4,50= 300 + 4. 4,50
⋮	⋮
l	300 + 4,50 + 4,50 + 4,50 +...+ 4,50 = 300+4,50 l

Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (p.77, 2012)

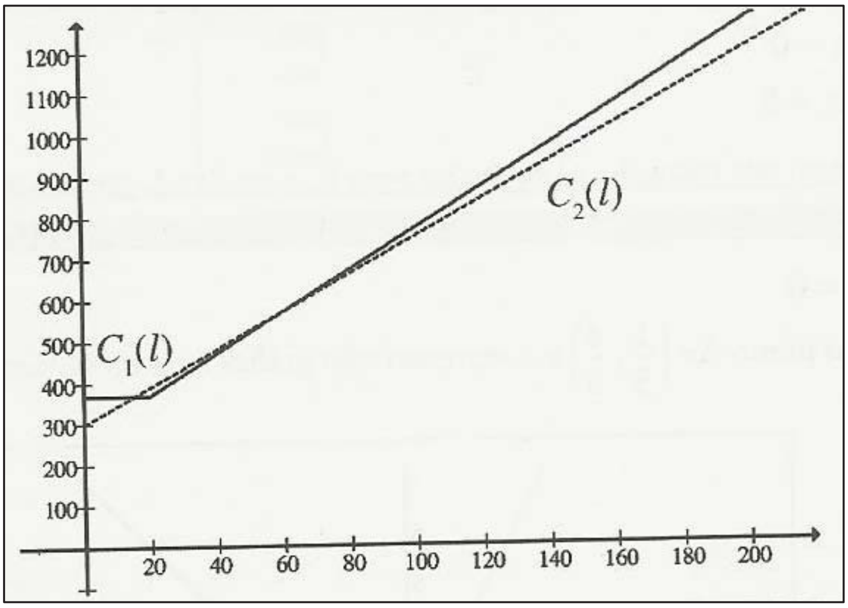
A partir dos dados das tabelas, podemos escrever as representações algébricas para o custo da cerca elétrica em cada opção, como sendo:

$$C_1(l) = \begin{cases} 370 & se\ l \leq 20 \\ 370 + 5(l - 20), & se\ l > 20 \end{cases}$$

$$C_2 = 300 + 4{,}5l \text{ para } l > 0$$

A representação gráfica desses modelos é apresentada na Figura 1.

Figura 1: Modelos $C_1(l)$ e $C_2(l)$



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (p.77, 2012).

A análise da figura 1 remete à discussão sobre qual opção é mais vantajosa para a instalação de uma cerca elétrica residencial. Os gráficos sinalizam que em dois pontos (que correspondem a comprimentos de cerca e seu custo) esses custos são iguais. Resta determinar quais são esses pontos e realizar a discussão sobre a vantagem de uma opção ou outra. Para isso, fazemos $C_1(l) = C_2(l)$.

Na análise dessa igualdade, na situação em estudo, temos que considerar dois intervalos para o comprimento de cerca, pois $C_1(l)$ é uma função definida por duas sentenças.

Para o caso em que $0 < l \leq 20, C_1(l) = 370\ e\ C_2(l) = 300 + 4{,}5l$

Da igualdade $C_1(l) = C_2(l)$, segue que $370 = 300 + 4{,}5l\ \rightarrow l = 15{,}56m$.

Assim, para $l = 15{,}56m$ o custo para as duas opções é de R$370,00.

Já para o caso em que $l > 20, C_1(l) = 370 + 5(l + 20)\ e\ C_2(l) = 300 + 4{,}5l$ a igualdade $C_1(l) = C_2(l)$ implica em $l = 60m$. Portanto, para $l = 60m$ o custo para as duas opções é de R$570,00.

Assim, considerando a problemática do custo de instalação da cerca elétrica, podemos concluir que:

- Para $0 < l < 15{,}56m$, a opção 2 é mais vantajosa;
- Para $15{,}56 < l < 60m$, a opção 1 é mais vantajosa;
- Para $l > 60m$, a opção 2 é mais vantajosa.

Cabe, portanto, ao usuário a decisão por uma das opções disponíveis, considerando a extensão da cerca que pretende instalar.

H2 – ATIVIDADE DO SEGUNDO MOMENTO: DESVALORIZAÇÃO DE UM VEÍCULO

Situação inicial

Segundo a revista Quatro Rodas, um carro popular é como um espelho: cada um que olha para ele enxerga uma coisa diferente. É o presente para o jovem que passou no vestibular, é o único carro da família (com filhos pequenos ou grandes), é o meio de transporte do empresário que prefere deixar o esportivo na garagem durante a semana. De janeiro a maio deste ano, 352 811 pessoas – quase a população de Florianópolis – compraram aquilo que a Fenabrave classifica como "carro de entrada". É um segmento dentro de outro segmento (o dos carros com motor 1.0), mas é tão grande que concentra 40% das vendas de carro no Brasil. O que atrai tanta gente é, claro, o preço. Mas o que eles procuram, isso já varia bastante. De acordo com a revista os cinco nacionais mais baratos são: Celta, Clio, Gol, Ka e Mille.

O valor de um carro modelo Gol G4 2p zero km é de R$25,760,00 a taxa de desvalorização do veículo a partir da sua retirada da concessionária é de 10% ao ano durante os 5 primeiros anos de uso, depois disso, é de 6,5 % ao ano de 5 a 10 anos de uso.

O que investigar: Qual modelo descreve a desvalorização do veículo Gol G4 a partir da sua compra na concessionária até 10 anos de uso?

Variáveis:

- V_n = o valor do veículo após n anos de uso

- n = tempo em anos;

- V_0 = valor inicial

Hipótese:

- veículo popular: gol G4

- taxa de juro estável

- valor do carro: R$ 25.760,00

- taxa de desvalorização:

10% no período de 0 à 5 anos e 6,5% no período de 5 à 10 anos

Dedução do Modelo Matemático

Conhecimentos matemáticos requeridos para a dedução do modelo matemático:

Definição: Dado um número real a ($a > 0$ e $a \neq 1$), denomina-se função exponencial de base a uma função $f: \Re \to \Re_+^*$ definida por $f(x) = ba^x$.

Considerando $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a} = e^{kx}$ onde $k = \ln a$

Assim, a função exponencial pode ser definida como $f(x) = be^{kx}$, com b, k constantes.

Definição: O símbolo $[\![x]\!]$ é usado para denotar o maior inteiro, menor ou igual a x; isto é,

$$[\![x]\!] = n \; se \; n \leq x < n + 1$$

onde n é um número inteiro.

Consideremos a seguinte mudança de variável:

$$t - 2013 = n$$

onde n = 0, 1, 2, 3, ..., 10 e t = 2013, 2014, 2015,....

Assim, vamos encontrar uma função para cada um dos períodos:

Para $0 \leq n \leq 5$, temos:

V_0 = 25.760,00

$V_1 = V_0 - 0{,}1V_0 = V_0(1 - 0{,}1)$

$V_2 = V_1 - 0{,}1V_1 = V_1(1 - 0{,}1) = V_0(1 - 0{,}1)^2$

$V_3 = V_2 - 0{,}1V_2 = V_2(1 - 0{,}1) = V_0(1 - 0{,}1)^3$

$V_4 = V_3 - 0{,}1V_3 = V_3(1 - 0{,}1) = V_0(1 - 0{,}1)^4$

$V_5 = V_5 - 0{,}1V_5 = V_5(1 - 0{,}1) = V_0(1 - 0{,}1)^5$

Generalizando, obtemos a seguinte função,

$V_n = 25.760 \cdot (0{,}9)^n$, se $0 \leq n \leq 5$

Em $n = 5$, temos que o valor do carro será de: $V_5 = 25.760 \cdot (0{,}9)^5$= 15, 211

Tomemos uma variável auxiliar V' para calcularmos a desvalorização no período de 5 à 10 anos, assim temos:

$V_0' = 15{,}211$

$V_1' = V_0' - 0{,}065V_0' = V_0'\,(1 - 0{,}0625)$

$V_2' = V_1' - 0{,}065V_1' = V_0'(1 - 0{,}0625)^2$

$V_3' = V_2' - 0{,}065V_2' = V_0'(1 - 0{,}0625)^3$

$V_4' = V_3' - 0{,}065V_3' = V_0'(1 - 0{,}0625)^4$

$V_5' = V_4' - 0{,}065V_4' = V_0'(1 - 0{,}0625)^5$

Assim temos,

$V_5 = V_0' = 15{,}211$

$V_6 = V_1' = V_0'\,(1 - 0{,}0625)$

$V_7 = V_2' = V_0'(1 - 0{,}0625)^2$

$V_8 = V_3' = V_0'(1 - 0{,}0625)^3$

$V_9 = V_4' = V_0'(1 - 0{,}0625)^4$

$V_{10} = V_5' = V_0'(1 - 0{,}0625)^5$

Generalizando, obtemos a seguinte função:

$V_n = 15.211 \cdot (0{,}935)^{n-5}$, se $5 \leq n \leq 10$

Dessa forma, definimos a seguinte função por partes:

$$V_n = \begin{cases} 25.760 \cdot (0{,}9)^n, & se\ \ 0 \leq n \leq 5 \\ 15.211 \cdot (0{,}935)^{n-5}, & se\ 5 < n \leq 10 \end{cases}$$

Como estamos analisando um fenômeno à função mais indicada para responder o nosso problema é uma função exponencial de base e. Assim temos

$$f(x) = ab^x, b > 0\ e\ b \neq 1$$

Sabemos que,

$$b^x = e^{lnb^x} = e^{xlnb}$$

Tomando $\ln b = k$, temos:

$$f(x) = ae^{kx}$$

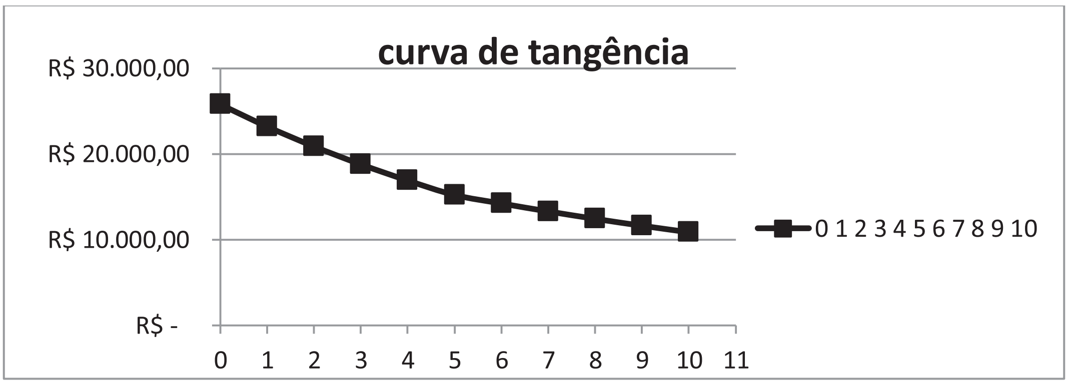
Resta o valor de k, sabemos que $a_{1=}25760$ e $a_{2=}15211$ e $b_{1=}0{,}9$ e $b_{2=}0{,}935$, calculemos o valor de k,

$$\ln 0{,}9 = -0{,}10536 = \ k_1$$

$$\ln 0{,}935 = -0{,}0672087 = \ k_2$$

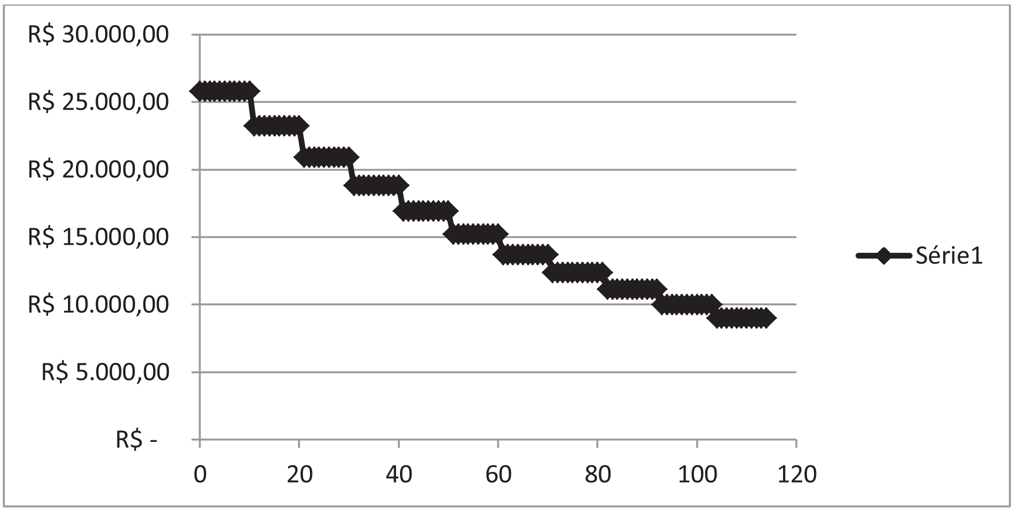
Assim, obtemos a seguinte função por partes,

$$V_n = \begin{cases} 25.760 \cdot e^{-0{,}10536n}, & se\ \ 0 \leq n \leq 5 \\ 15.211 \cdot e^{-0{,}0672(n-5)}, & se\ 5 < n \leq 10 \end{cases}$$



Uma função que descreve com mais exatidão a situação-problema é a função maior inteiro menor ou igual a n.

$$V(n) = \begin{cases} 25.760 \cdot e^{-0,10536n} & se\ 0 \leq n \leq 1 \\ 25.760 \cdot e^{-0,10536[n]} & se\ 1 < n \leq 5 \\ 15.211 \cdot e^{-0,0672[n-5]} & se\ 5 < n \leq 10 \end{cases}$$



Validação do modelo matemático

t	n	Valor inicial	Valor calculado
2013	**0**	25.760	25.760
2014	**1**	23.184	23.184
2015	**2**	20.856	20.865
2016	**3**	18.770	18.779
2017	**4**	16.893	16.901
2018	**5**	15.203	15.211
2019	**6**	14.215	14.222,28
2020	**7**	13.292	13.297,83
2021	**8**	12.428,02	10.869,65
2022	**9**	11.620,19	8.307,34
2023	**10**	10.864,87	5.936,35

A análise comparativa entre os dados observados e os dados obtidos pelo modelo revela que se trata de uma solução cuja confiabilidade é elevada considerando que o percentual de diferença não ultrapassa 3%.

Interpretação da Solução:

De acordo com o modelo obtido, estimamos que em 2023 o valor do gol G4 será de R$5.936,35.

H3 - ATIVIDADES DO TERCEIRO MOMENTO

H3.1 Ritalina, Usos e Abusos

Aumentou de forma surpreendente o consumo do remédio Ritalina no Brasil, desde o ano de 2002. O metilfenidato é da família das anfetaminas. É prescrito para crianças e adultos portadores de Transtorno do Déficit de Atenção e hiperatividade (TDAH), com os objetivos de melhorar a concentração, diminuir o cansaço e acumular mais informações em menos tempo. Alguns usam o medicamento somente para se manter desperto durante longas jornadas de estudo ou de trabalho. Jovens que buscam euforia química e meninas que querem emagrecer também usam. Ocorre que essa droga pode trazer dependência química, pois ela tem o mesmo mecanismo de ação da cocaína. A Drug Enforcement Administration a classifica como um narcótico.

Nosso país é o segundo consumidor da droga, perdendo apenas para os EUA. Fala-se que, se a pessoa diagnosticada com TDAH não fizer o tratamento com a Ritalina©, pode até se tornar delinquente. Segundo a pediatra Maria Aparecida Affonso Moysés, docente do Departamento de Pediatria da Faculdade de Ciências Médicas (FCM) da Unicamp, "nenhum dado permite dizer isso. Então, não tem comprovação que funciona". "A gente corre o risco de fazer um genocídio do futuro. Mais vale a orientação familiar", diz a pediatra, em entrevista ao Portal Unicamp.

Conforme informações obtidas com o neurologista Dr. Jean Carlos Shimazaki, uma criança de 6 anos pode tomar 1 comprimido de 10mg de ritalina até 2x por dia. O tratamento pode se estender até a adolescência, ou até mesmo até a fase adulta, conforme a evolução do transtorno. Interrompe-se o tratamento aos sábados, domingos e férias escolares somente quando o grau de hiperatividade não for intenso. Podem ocorrer efeitos colaterais, como: insônia (não tomar o medicamento à noite); cefaleia; vertigem; boca seca; diminuição do apetite, dentre outros.

PROBLEMÁTICA

- **Problema 1:** Em quanto tempo o medicamento vai praticamente sumir do organismo?
- **Problema 2:** Qual a concentração do medicamento no organismo em determinado tempo, tomando 1 comprimido de 10mg a cada 12 h?

INTEIRAÇÃO:

Análise dos dados em sites de revista, site da Unicamp, pesquisa com profissional da área (médico neurologista), pesquisas bibliográficas.

MATEMATIZAÇÃO E RESOLUÇÃO

Definição de hipóteses:

- **H1:** Dosagem do medicamento: 1 comprimido de 10 mg.
- **H2:** Tratamento com 1 comprimido de 10mg de Ritalina©, a cada 12 horas.
- **H3:** Meia-vida do medicamento: 2 horas.

DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS:

- **Variável independente:** ***(t)*** – tempo em horas.
- **Variável dependente:** ***C(t)*** – Concentração do medicamento no organismo em função do tempo.
- **Variável auxiliar:** ***n*** – variável discreta. Tomando ***n=t/2***.

MATEMÁTICA DO PROBLEMA:

- Função exponencial;
- Progressão Geométrica.

INTERPRETAÇÃO E VALIDAÇÃO

Confirmação das equações dos modelos: uma define a concentração do medicamento no organismo, tomando 1 dose única de 10 mg. Outra define a concentração do medicamento no organismo, tomando 1 comprimido de 10mg a cada 12 horas.

SITUAÇÃO FINAL

Modelo que relaciona o tempo com a concentração do medicamento no organismo.

Situação 1: CONCENTRAÇÃO DO MEDICAMENTO NO ORGANISMO
DOSE - 1 COMPRIMIDO DE 10 mg. De METILFENIDATO (RITALINA)

t (tempo)	C (t)	n (variável auxiliar)	t(tempo)	C (t)	n (variável auxiliar)
0	10,000000000	*0*	**38**	0,000019073	*19*
2	5,000000000	*1*	**40**	0,000009537	*20*
4	2,500000000	*2*	**42**	0,000004768	*21*
6	1,250000000	*3*	**44**	0,000002384	*22*
8	0,625000000	*4*	**46**	0,000001192	*23*
10	0,312500000	*5*	**48**	0,000000596	*24*
12	0,156250000	*6*	**50**	0,000000298	*25*
14	0,078125000	*7*	**52**	0,000000149	*26*
16	0,039062500	*8*	**54**	0,000000075	*27*
18	0,019531250	*9*	**56**	0,000000037	*28*
20	0,009765625	*10*	**58**	0,000000019	*29*
22	0,004882813	*11*	**60**	0,000000009	*30*
24	0,002441406	*12*	**62**	0,000000005	*31*
26	0,001220703	*13*	**64**	0,000000002	*32*
28	0,000610352	*14*	**66**	0,000000001	*33*
30	0,000305176	*15*	**68**	0,000000001	*34*
32	0,000152588	*16*			
34	0,000076294	*17*			
36	0,000038147	*18*			

DEDUZINDO O MODELO MATEMÁTICO DO PROBLEMA 1

C (t)= 10 mg

$C\ (10)= C_0*({}^1/_2)^{\mathbf{0}}$

$C\ (5)= {}^{10}/_2 = C_0/_2 = C_0*({}^1/_2)^{\mathbf{1}}$

$C(2,5)= {}^{10}/_4 = C_0/_4 = C_0/_{2}{}^{2} = C_0*({}^1/_2)^{\mathbf{2}}$

$C(1{,}25)= {}^{10}/_{8} = C_0/_8 = C_0/2^3 = C_0*({}^1/_2)^{\mathbf{3}}$

$C(n)= C_0*({}^1/_2)^{n} = C_0.2^{\mathbf{-n}}$

$C(t)= C_0*({}^1/_2)^{\ t/2}$

$\boxed{C(t)= 10*({}^1/_2)^{\ t/2}}$

MUDANÇA DE BASE PARA A BASE "*e*"

$C(t)= 10*({}^1/_2)^{t/2}$

$C(t)= 10*e^{ln(1/2)\ \wedge\ t/2}$

$C(t)= 10*e^{\ t/2\ *\ ln\ (1/2)}$

$C(t)= 10*e^{\ (-0{,}69314718\ *\ t)/2}$

$C(t)= 10*e^{\ (-0{,}34657359\ *\ t)}$

Obs: ln (1/2)= -0,69314718; -0,69314718 / 2= -0,34657359

MUDANÇA DE BASE PARA A BASE "10"

$C(t)= 10*10^{log*(1/2)\ \wedge\ (t/2)}$

Concentração do medicamento tomando uma dose de 10 mg de 12/12h			
t (tempo)	**C (t)**	**N (variável auxiliar)**	**dias**
0	10,00000000	*0*	0
12	10,15625000	*1*	
24	10,15869141	*2*	1
36	10,15872955	*3*	
48	10,15873015	*4*	2
60	10,15873016	*5*	

DEDUZINDO O MODELO MATEMÁTICO DO PROBLEMA 2

C (0)= 10 mg

$C\ (1)= C_0.({}^1/_2)^{\mathbf{6}} + 10= \boxed{\mathbf{C_0.[({}^1/_2)^6 + 1]}}$

$C\ (2)= C_1.({}^1/_2)^{\mathbf{6}} + 10= C_0.[({}^1/_2)^6 + 1] * [({}^1/_2)^6 + C_0]$

$= C_0.[(^1/_2)^6 + 1] * [(^1/_2)^6 + 1]$

$= \boxed{\mathbf{C_0.[(^1/_2)^{12} + (^1/_2)^6 + 1]}}$

$C(3) = C_2*(^1/_2)^6 + 10 = \boxed{\mathbf{C_0.[(^1/_2)^{18} + (^1/_2)^{12} + (^1/_2)^6 + (^1/_2)^0]}}$

$C(n) = \boxed{\mathbf{C_0.[(^1/_2)^{6n} + (^1/_2)^{6*(n-1)} + (^1/_2)^{6*(n-2)} + ... + (^1/_2)^{6*(1)} + (^1/_2)^{6*(0)}]}}$

$C(n) = C_0.Sn \qquad Sn = \dfrac{a_1*(q^n - 1)}{q-1}$

$Sn = \dfrac{\mathbf{[(^1/_2)^0 + (^1/_2)^{6*(n)}})*n}{2} = \dfrac{\mathbf{(^1/_2)^{6*(n)}})*n}{2}$

$\boxed{Cn = 10 * \left[\dfrac{\mathbf{(^1/_2)^{6*(n+1)}} - 1}{\mathbf{(^1/_2)^6 - 1}}\right]}$

Na calculadora: 10x((1/2^6-1) / ((1/2^6) - 1)

H3.2 Que tal uma ducha?

Pensando em um estilo de vida urbano que exige mais eficácia e rapidez, poupando trabalho, tempo e gastos, as empresas de aparelhos domésticos estão investindo em tecnologia buscando atingir a esses objetivos.

A mangueira é um grande e eficaz utensilio doméstico porem pensando em atingir aos objetivos ditos acima é que surgiram as Lavadoras de Alta Pressão.

*Uma **Lavadora alta pressão** é uma máquina que bombeia água sob pressão através de uma tubulação para a limpeza de superfícies com um jato de água a alta velocidade. Equipamentos como estes operam a pressões de 50 bars (750 psi) até 1.200 bars (30.000 psi) ou mais. Ideal para uso em condomínios, residências, comércios, indústrias, hospitais, clínicas, construção civil. O preço das lavadoras domésticas varia de R$ 200 a R$ 800 em média.*

Se comparado com uma mangueira, uma lavadora de alta pressão gasta até 14% da água que gastaria uma mangueira ligada à torneira totalmente aberta.
A máquina tem um sistema dosador que, aliado à pressão, limita a vazão de água, independentemente da abertura da torneira. As lavadoras domésticas gastam, em média, até 8 litros por minuto.

Já a mangueira, mesmo com meia-volta na torneira ligada à rede pública, gasta cerca de 30 litros por minuto.

Partindo do ato de levar o automóvel a um lava rápido onde o valor cobrado pela lavagem seja de R$ 35,00 considerando uma lavagem ao mês.

Analisaremos em quantas lavagens compensaria ter comprado uma lavadora de alta pressão, se comparado ao preço gasto com lava rápido.

Para iniciar a construção do modelo.

Situação inicial (problemática):

Lavagem de carro

Inteiração:

Coleta de preços na cidade, como o preço da água por metro cúbico, preço do lava-rápido, além de dados da internet, como a que diz que a vazão de uma lavadora de alta pressão é, em média, 8 litros por minuto.

Definição do problema: Em quanto tempo compensaria ter comprado uma lavadora de alta pressão, se comparado ao preço que gastaria em lava-rápidos.

Hipóteses:

H1: 200 litros de água por lavagem

H2:. Valor da máquina é R$ 200,00.

H3: Valor do lava-rápido é R$ 35,00 por lavagem.

H4: O valor de água excedido é R$ 3,54 por metros cúbicos.

H5: Lavar o carro em casa não é necessidade, então se pode colocar isso como o que excede os 10 m^3 (obrigatório).

Variável Independente: Quantidade de lavagens (T).

Variável Dependente: Valor pago com maquina de alta pressão (V1, em reais).

TEMPO COM A LAVADORA DE ALTA PRESSÃO

Quantidade (T)	Valor (R$)
T1	200,42
T2	200,85
T3	201,27
T4	201,70
T5	202,12
T6	202,55

TEMPO NO LAVA-RÁPIDO

Tempo (Meses)	Valor (R$)
T1	35,00
T2	70,00
T3	105,00
T4	140,00
T5	175,00
T6	210,00

Modelo Matemático da situação:

$V_1 = 200 + 0,4248t$

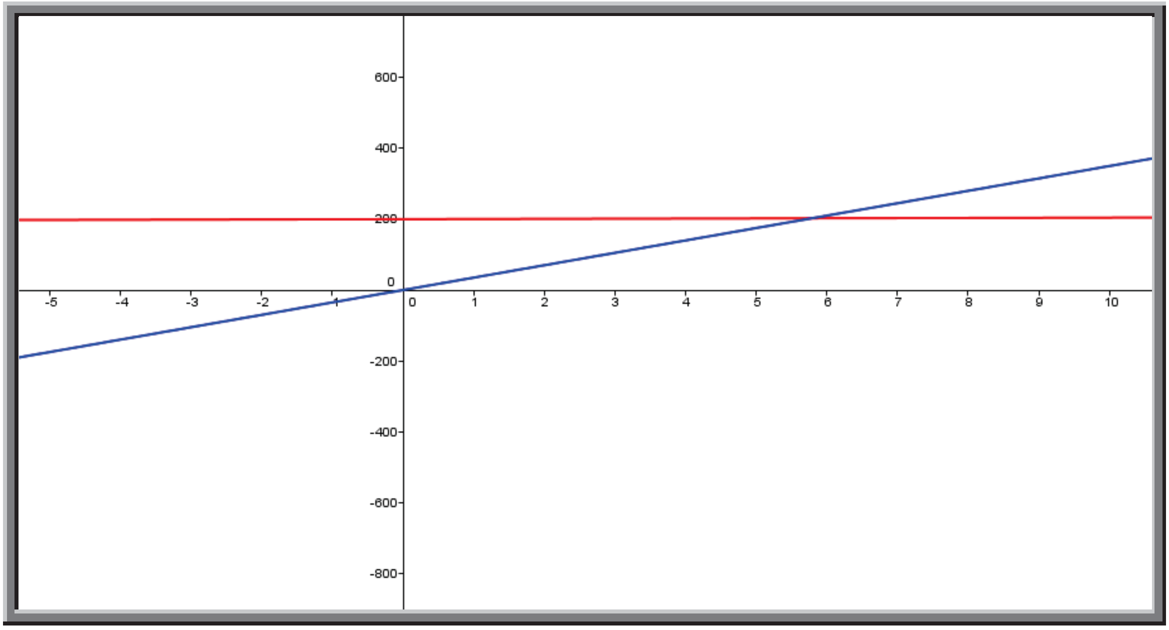
$V_2 = 35t$

Matemática utilizada na atividade:

- Funções de primeiro grau
- Equações de primeiro grau

Os alunos construíram o gráfico que mostra a interseção das duas funções que obtiveram.

GRAFICO – DA INTERSEÇÃO DAS DUAS FUNÇÕES.



Interpretação e Validação:

A única interseção entre as retas corresponde ao valor para o qual o preço do lava-rápido e da lavadora de alta pressão são iguais, sendo assim, os meses seguintes serão os que os lava-rápidos são mais caros que a máquina de alta pressão e os anteriores os preços que a máquina de alta pressão é mais cara que os lava-rápidos.

Situação Final:

6 meses após ter comprado a lavadora de alta pressão, o preço dela sairá mais barato em relação ao preço do lava-rápido.