UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

JULIANA MAIRA SOARES LOPEZ

ANÁLISE INTERPRETATIVA DE QUESTÕES NÃO-ROTINEIRAS DE MATEMÁTICA

Londrina
2010

JULIANA MAIRA SOARES LOPEZ

ANÁLISE INTERPRETATIVA DE QUESTÕES NÃO-ROTINEIRAS DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco.

Londrina
2010

Catalogação Elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

L864a Lopez, Juliana Maira Soares.

Análise interpretativa de questões não-rotineiras de matemática / Juliana Maira Soares Lopez. - Londrina, 2010. 128 f.: il.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2010.

1. Educação matemática - Teses. 2. Matemática - Estudo e ensino - Teses. 3. Produção escrita em matemática - Teses. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

JULIANA MAIRA SOARES LOPEZ

ANÁLISE INTERPRETATIVA DE QUESTÕES NÃO-ROTINEIRAS DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco
UEL – Londrina –PR

Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
UEL – Londrina –PR

Profa. Dra. Helena Noronha Cury Centro
UNIFRA – Rio Grande do Sul – RS

Londrina, 22 de fevereiro de 2010

AGRADECIMENTOS

A Deus, por permitir e possibilitar que mais um sonho pudesse ser realizado.

A minha família, pelo exemplo de carinho, caráter, educação, dignidade, apoio. Pelos esforços dispensados para que eu pudesse realizar essa pesquisa. *"Sem vocês, eu nada seria!".*

A professora Regina Luzia Corio de Buriasco, por ter acreditado na minha competência para realizar esse trabalho, pelas orientações e discussões.

As professoras Angela Marta Pereira das Dores Savioli, Helena Noronha Cury e Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão, por terem aceitado fazer parte da minha banca, pelas valiosas críticas e sugestões realizadas, tanto no exame de qualificação quanto na defesa, para que esse trabalho pudesse ser melhor realizado.

Ao Shock, pelo carinho, pelo incentivo, pela compreensão, por ficar do meu lado tanto nos bons momentos quanto nos mais difíceis.

Aos meus amigos do GEPEMA, pelos momentos de estudos, discussões, confraternizações. Em especial a Pamela e Andréia, pelas palavras de incentivo, pela sempre "co-orientação", pelo "ombro amigo" nos momentos de angustia, enfim, pela valiosa amizade que possuímos.

Aos queridos colegas e professores do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Em especial a Janaina, pela amizade construída, pela "parceria" tanto em assuntos acadêmicos, quanto pessoais.

A todos os meus amigos por compreenderem meus momentos de ausência, e pelas comemorações realizadas a cada etapa vencida.

Ao CNPQ pela bolsa de estudos concedida.

Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram para que mais essa conquista pudesse ser obtida! Muito Obrigada!

A verdadeira viagem da descoberta consiste não em buscar novas paisagens, mas em ter olhos novos.

Marcel Proust

LOPEZ, Juliana Maira Soares. **Análise interpretativa de questões não-rotineiras de matemática**. 2010. 128 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2010.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo analisar a produção escrita de uma amostra de alunos paranaenses em sete questões de matemática da aferição do PISA/2006, consideradas não-rotineiras, relacionadas com a ideia estruturadora de *Mudança e Relações*, para compreender como lidam com essas questões em situação de avaliação. A abordagem utilizada para esta investigação foi predominantemente qualitativa de cunho interpretativo, realizada com base nas orientações da Análise de Conteúdo, assumindo a avaliação como prática de investigação. O estudo envolveu a identificação, o inventário e a análise de estratégias e procedimentos utilizados por esses alunos. Considerando as semelhanças existentes entre as resoluções dos estudantes nas questões, foram construídos agrupamentos conforme os procedimentos adotados por eles. De modo geral, entre outros, foi possível identificar que algumas das interpretações e resoluções são diferentes das consideradas corretas; os alunos apresentaram pouco envolvimento com as questões, e, apesar do aparente domínio dos procedimentos necessários para solucioná-las, tiveram dificuldade em resolvê-las.

Palavras-chave: Educação matemática. Avaliação como prática de investigação. Análise da produção escrita. Educação matemática realística.

LOPEZ, Juliana Maira Soares. **Interpretative analysis of mathematics not-routine questions**. 2010. 128 f. Dissertation Thesis (Master's Degree in Science Teaching and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2010.

ABSTRACT

This work aims to analyse the writing production of a sample of students from Parana state (Brazil) in seven mathematics questions of PISA/2006, considered non-routine, related to the "overaching ideas" of "Change and Relationships" to understand how they deal with this questions in assessement situation. The approach used for this investigation was predominantly qualitative and interpretative, realized and based on Content Analysis, assuming evaluation as an investigation practice. The study involved the identification, the inventory and the analysis of strategies and procedures used by students. Taking into consideration the similarities found in the student's resolutions, they were grouped according to the procedures adopted. In general, among other things, it was possible to verify that some interpretations and solutions were different from those considered correct; students showed a little involvement with the questions, and, although they showed an apparently dominance of the procedures, they presented some difficult in solve them.

Keywords: Mathematics education. Evaluation as an investigation practice. Mathematics written production analysis. Realistic mathematic education.

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Se perguntarmos para alunos do Ensino Fundamental, Médio ou Superior por que eles estão na escola ou por que eles precisam estudar, dificilmente receberemos como resposta: “porque queremos aprender”. Certamente eles responderão que estudam “para passar de ano”, e infelizmente essa resposta tem fundamento, pois, na maioria das escolas, o processo de ensino e aprendizagem tem se resumido às metas de “tirar nota”, “passar de ano” e “passar no vestibular”, enfim, em selecionar os alunos “que sabem”. Mas quem garante que o aluno que “tirou nota” compreendeu o conteúdo ensinado e o que “não tirou” não sabe esse conteúdo?

Geralmente, professores esperam que seus alunos resolvam os exercícios da maneira que eles “ensinaram” e raras vezes se dispõem a realizar uma análise detalhada da produção escrita encontrada nas provas. As resoluções dos alunos são comparadas com uma resolução padrão feita pelo professor e tomada como a única correta.

Nesse contexto, os alunos, geralmente, apenas decoram os procedimentos e os reproduzem nas provas, sem se preocuparem com seus conceitos e ideias. Muitos professores compactuam com essa cultura, ensinando os alunos a reproduzirem conteúdos matemáticos e não a compreendê-los e utilizá-los. Aqueles que não conseguem “reproduzir” esses conteúdos, além de serem atestados como fracassados, ficam sem aprendê-los, pois raramente seus erros são revistos e o conteúdo é retomado.

A avaliação deveria

> [...] dar pistas ao professor sobre qual o caminho já percorrido, em que ponto o aluno se encontra, que práticas ou decisões devem ser revistas ou mantidas para que juntos, professor e aluno, possam chegar a um resultado satisfatório (BURIASCO, 2002, p.1).

Desse modo, a avaliação deve ser vista como prática de investigação na qual professores e alunos refletem sobre conhecimentos matemáticos durante o processo de aprender e ensinar matemática na escola. Deve ser tomada como subsídio para melhor aprender e ensinar matemática, e não como um instrumento classificatório.

O instrumento de avaliação utilizado por grande parte dos professores é, ainda, a prova escrita e, infelizmente, da maneira como é trabalhada, perdem-se oportunidades de se ter conhecimentos detalhados sobre a atividade matemática dos alunos.

A produção escrita pode ser objeto de investigação e estar presente como uma prática cotidiana dos professores. Nos últimos anos, o GEPEMA[1] tem se interessado em analisar a produção escrita de alunos e professores em situação de avaliação, a fim de obter informações que possam auxiliar no processo de ensino e aprendizagem.

Os participantes do GEPEMA tomam a avaliação como prática de investigação, e acreditamos que, por meio da análise da produção escrita, é possível descobrir algumas das possíveis causas de dificuldades dos alunos, fazer reflexões sobre a prática em sala de aula e até pensar em meios de fazer intervenções na busca de superar essas dificuldades. Mediante a análise da produção escrita, podemos fazer inferências sobre como os alunos lidam com os problemas e conteúdos, possibilitando um repensar na maneira como estes têm sido abordados em sala de aula.

Em pesquisas já realizadas no interior do GEPEMA (NAGY, 2005; PEREGO, 2005; SEGURA, 2005; ALVES, 2006; NEGRÃO DE LIMA, 2006; PEREGO, 2006; DALTO, 2007; VIOLA dos SANTOS, 2007), foram analisadas produções escritas de alunos e professores em questões discursivas rotineiras de matemática da aferição da AVA/2002[2]. Em 2006, iniciou-se um estudo sobre produção escrita de alunos e professores em questões discursivas não-rotineiras de matemática, já com quatro dissertações defendidas (CELESTE, 2008; SANTOS, 2008; ALMEIDA, 2009; FERREIRA, 2009).

Para esse estudo sobre produções escritas em questões discursivas não-rotineiras, optou-se por utilizar questões de aferições do PISA[3], única e exclusivamente por suas questões serem consideradas não-rotineiras e já terem sido validadas. Para esses estudos, as pesquisadoras utilizaram algumas questões divulgadas das aferições dos anos de 2000 e 2003 e aplicaram a alunos do Ensino Fundamental, do Ensino Médio, do Ensino Superior, além de professores que ensinam matemática na Educação Básica, respectivamente.

De acordo com os documentos oficiais do PISA, um dos seus objetivos é avaliar se os alunos conseguem aplicar a matemática que aprendem na escola em diversas situações, podendo ser escolares ou não. Utilizam questões ditas não-rotineiras por acreditarem que possibilitam um maior envolvimento do aluno, exigem mais do que simples reprodução de procedimentos e permitem construções de resoluções dos próprios alunos, não exigindo uma resposta padrão pré-estabelecida.

---

[1] Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação – Universidade Estadual de Londrina.
[2] AVA - Avaliação do Rendimento Escolar do Estado do Paraná.
[3] PISA - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes.

Atualmente, alguns membros do GEPEMA estão estudando a produção escrita de alunos paranaenses em questões não-rotineiras de matemática da aferição do PISA/2006, questões essas sigilosas, fornecidas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), juntamente com a amostra paranaense digitalizada dos cadernos de provas resolvidos pelos alunos do Paraná.

Neste trabalho, temos por objetivo geral investigar a produção escrita dos alunos paranaenses, que participaram da aferição do PISA/2006, em questões não-rotineiras de matemática relacionadas com a ideia estruturadora de Mudança e Relações, buscando compreender como lidaram com tais questões e o que mostram saber por meio delas.

Este trabalho está dividido em seis capítulos. Nos três primeiros, apresentamos os referenciais teóricos que fundamentam esta investigação. São eles:

- *Sobre a Educação Matemática Realística* – dividido em: Breves considerações, subitem no qual apresentamos, de maneira geral, características dessa abordagem da Educação Matemática; e Avaliação na Educação Matemática Realística, no qual apresentamos uma perspectiva “realística” de avaliação que vai ao encontro de nossa concepção de avaliação como prática de investigação;
- *Sobre o PISA* – no qual explicamos o que é esse programa, algumas características e relação com a pesquisa realizada;
- *Breves considerações sobre Educação Algébrica e pensamento algébrico* – no qual apresentamos a perspectiva adotada em relação a esse tema.

No quarto capítulo, “Procedimentos Metodológicos”, apresentamos as escolhas metodológicas e o caminho percorrido nessa investigação.

O quinto capítulo é o referente à Análise e Discussão, no qual apresentamos interpretações que fizemos das produções dos alunos paranaenses.

E, no sexto capítulo, denominado “Considerações Finais”, apresentamos algumas considerações sobre a investigação realizada e sobre os resultados obtidos.

1 SOBRE A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

Foi no final dos anos 60 e começo dos anos 70, do século XX, que a chamada Educação Matemática Realística (EMR) começou a tomar corpo. Esses anos foram marcados pelo início da reforma curricular holandesa, que buscava, dentre outros, modernizar a educação matemática do país e, assim, elaborar uma alternativa à implementação da abordagem americana “Matemática Moderna”, implementação essa que parecia evidente por causa da grande quantidade de materiais didáticos importados pela Holanda dos Estados Unidos naquela época (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

Constituída principalmente pelas ideias e contribuições de Hans Freudenthal, que afirmava que “a matemática deve ser conectada com a realidade, estar perto das crianças e ser relevante para a sociedade, a fim de ser de valor humano” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 10, tradução nossa) [4], a EMR é basicamente sustentada por “três pilares”, que dizem respeito à maneira como a matemática é vista, como os estudantes aprendem e, como a matemática deveria ser ensinada (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 14). Com base nesses “três pilares”, apresentaremos uma breve explanação sobre essa abordagem de educação matemática.

1.1 Breves Considerações

Diferentemente da matemática pronta e acabada que geralmente é apresentada aos alunos, para Freudenthal, a matemática deve ser vista como uma atividade humana, isto é, ela não deve ser tomada como um conteúdo a ser “imposto”, “transferido”, “receptado”, e, sim, como uma criação humana, um processo de matematizar a realidade (FREUDENTHAL, 1968[5] apud VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996). Pensar em uma matemática possível de ser transferida significa pensar que alunos “aprendem” ao armazenar e reproduzir informações (conceitos, objetos matemáticos), assim como, por exemplo, robôs e computadores. Quem “recebe” não participa da escolha de quais informações vai receber e, muito menos, da decisão de quais são importantes para serem “armazenadas”, de quando aplicá-las, para quê e/ou por que elas são relevantes, ou como foram obtidas. Essa poderia ser adjetivada como uma “atividade robótica”, “atividade cibernética”, mas não humana. Tomar a

[4] “[…] mathematics must be connected to reality, stay close to children and be relevant to society in order to be of human value”.

[5] FREUDENTHAL, H. Why to Teach Mathematics so as to Be Useful. Educational Studies in Mathematics, n. 1, p. 3-8, 1968.

matemática como uma atividade humana significa compreendê-la de uma maneira mais ampla do que normalmente é entendida, não limitando sua definição a objetos como algoritmos, fórmulas, equações (objetos matemáticos). Implica compreender a matemática também como um processo de organização da realidade que permite tanto tratá-la (a realidade) utilizando objetos e ideias matemáticas (ex. algoritimizar, formular, equacionalizar, generalizar) como utilizá-la como fonte para elaboração de conhecimentos matemáticos.

Segundo Freudenthal (1971[6], 1973[7] apud VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 11), matemática "pode ser mais bem aprendida fazendo" (tradução nossa)[8] e uma maneira de isso acontecer é pela "reinvenção guiada" (FREUDENTHAL, 1994). Para ele,

> [...] crianças deveriam repetir o processo de aprendizagem da humanidade, não como isso de fato ocorreu, mas, sim, como ele teria sido feito se as pessoas no passado tivessem conhecido um pouco mais do que nós sabemos agora (FREUDENTHAL, 1994, p. 48, tradução nossa) [9].

Nessa perspectiva da reinvenção guiada, ao invés de apresentar conceitos, insights e ferramentas matemáticas prontas e acabadas, dá-se a oportunidade de os estudantes "reinventá-las" em um processo de matematização[10], e isso, segundo suas necessidades e nível de compreensão, atribuindo aos estudantes o papel de protagonistas no processo de aprendizagem.

O foco principal na "reinvenção guiada" não está nos objetos matemáticos e, sim, na atividade, não está no produto e, sim, no realizar. Segundo Freudenthal (1994), o aprendiz deveria aprender matemática, matematizando; abstrair, abstraindo; esquematizar, esquematizando; algoritmos, algoritmizando; fórmulas, formulando...

Freudenthal (1994) aponta três argumentos pedagógicos em favor dessa política da "reinvenção guiada". Primeiro, ele considera que se aprende mais e melhor como resultado de sua própria atividade; isso significa que conhecimento e habilidade tornam-se mais rapidamente disponíveis do que quando impostos por outras pessoas. Segundo, ele considera que a descoberta pode ser divertida, assim como a aprendizagem pela reinvenção

---

[6] FREUDENTHAL, H. Geometry Between the Devil and the Deep Sea. Educational Studies in Mathematics, n. 3, p. 413-435, 1971.
[7] FREUDENTHAL, H. Mathematics as an Educational Task. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1973.
[8] "[…] can best be learned by doing […]"
[9] "Children should repeat the learning process of mankind, not as it factually took place but rather as it would have done if people in the past had known a bit more of what we know now".
[10] Segundo De Lange (1999, p. 17), o processo de matematização pode ser entendido como organização da realidade utilizando ideias e conceitos matemáticos.

pode ser motivadora, e, terceiro, isso nutre uma atitude de experimentação matemática como uma atividade humana (FREUDENTHAL, 1994).

Para esse autor, por serem construídos a partir das próprias ações, elaborações e produções dos estudantes, os conteúdos matemáticos tornam-se significativos para eles e, dessa forma, dificilmente serão esquecidos, como usualmente acontece com conteúdos ensinados de forma mecânica e decorada. Além disso, informações decoradas raramente podem ser aplicadas em contextos diferentes dos que foram transmitidos, já conhecimentos elaborados por meio de matematizações podem permitir um leque maior de aplicabilidade, uma vez que o aluno pode compreender, que tipos de fenômenos puderam dar origem a essas elaborações, quais ferramentas matemáticas foram utilizadas, que processos de organização podem ser utilizados também para organizar outras situações, já que os processos são independentes da área de aplicação.

Por focar a aprendizagem por meio da matematização da realidade, outro ponto em relação à "reinvenção guiada" é a possibilidade de as diferenças entre os níveis de compreensão dos estudantes serem respeitadas e exploradas, uma vez que uma atividade permite diferentes níveis de matematização, tanto em relação à sua própria atividade quanto em relação às atividades de outros estudantes. Como aponta Van den Heuvel-Panhuizen (1998, p.19), um dos benefícios na distinção de níveis

> [...] é que os alunos podem compreender algo em diferentes níveis. Em outras palavras, eles podem trabalhar nos mesmos problemas, sem estarem no mesmo nível de compreensão. A distinção de níveis na compreensão [...] é muito frutífera para trabalhar no progresso de compreensão das crianças. Isso oferece apoios para estimular este progresso (tradução nossa) [11].

Segundo Van den Heuvel-Panhuizen (1996), os níveis de matematização são conectados aos vários níveis de compreensão pelos quais os estudantes podem passar, e a atividade matematizada, que em um momento está em um nível inferior, pode, mais tarde, se tornar objeto de análise em um nível superior.

Um exemplo disso dentro da EMR é a maneira como é proposto o trabalho com algoritmos. Diferentemente da abordagem tradicional, na qual se apresenta os algoritmos prontos e se espera que sejam decorados pelos estudantes e aplicados em diferentes contextos, na EMR, eles são elaborados pelos próprios alunos, partindo dos conhecimentos e estratégias

[11] "[…] is that students can understand something on different levels. In other words, they can work on the same problems without being on the same level of understanding. The distinction of levels in understanding, […], is very fruitful for working on the progress of children's understanding. It offers footholds for stimulating this progress."

que já possuem, em um conjunto de situações, por meio da chamada "progressiva matematização". Dessa maneira, desde o início, os alunos são apresentados a problemas complexos, mas no início trabalham em níveis relativamente baixos de matematização (percebem poucas generalizações correspondentes às suas compreensões). Em estágios posteriores, os alunos, baseados em suas próprias estratégias, começam a perceber os esquemas que podem ser mantidos e os que generalizaram durante as atividades e, dessa maneira, seguem seus próprios caminhos para elaborarem seus próprios algoritmos e podem, eventualmente, chegar aos algoritmos padrões. Estratégias informais são valorizadas e tomadas como base para estratégias formais.

> Em vez do aumento gradativo na complicação dos problemas, os problemas permanecem os mesmos, mas as estratégias se tornam mais e mais avançadas (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1998, p. 7, tradução nossa)[12].

Na abordagem tradicional, o ensino geralmente começa com situações relativamente simples para só depois aumentar o grau de complexidade das tarefas, acreditando que a aprendizagem de coisas "fáceis" é a base para o aprendizado de coisas "difíceis". Dessa forma, a escolha dos problemas a serem resolvidos é feita baseada no grau de complexidade que eles podem oferecer à aplicação de conceitos já apresentados aos alunos. Já na perspectiva da EMR, a escolha dos problemas é feita com o foco na possibilidade e no nível de matematização que eles oferecem.

Assim como a matemática surgiu da matematização da realidade, a aprendizagem de matemática deve também ter suas origens na matematização da realidade (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996), e a busca por fenômenos atuais que possibilitem que esse processo ocorra é o objetivo da chamada "fenomenologia didática", proposta por Freudenthal. Analisam-se situações da realidade, para encontrar fenômenos que possam servir como fonte para o desenvolvimento matemático dos alunos, fenômenos esses que contribuíram na construção de conceitos matemáticos particulares no passado. Além disso, é necessário pensar como esses conceitos poderão aparecer para os estudantes durante o estudo da situação e de que maneiras colocar os estudantes em contato com esses fenômenos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

[12] "Instead of step by step increasing the complicatedness of the problems, the problems remain the same, but the strategies become more and more advanced".

Nessa perspectiva, os problemas a serem trabalhados durante o processo de ensino e aprendizagem devem estar embutidos em contextos possíveis de serem matematizados, que suscitem a matemática que se pretende ensinar e que ofereçam oportunidades de os alunos construírem suas próprias respostas e estratégias. Os contextos não precisam necessariamente se referir a situações da vida real, mas precisam ser possíveis de receberem tratamento matemático e serem acessíveis aos alunos, de modo que possam ser "imagináveis", "realizáveis" por eles. Segundo Van den Heuveul-Panhuizen (1996), foi esse aspecto do "possível de serem imagináveis" que deu origem ao nome "realística" para o movimento.

É tomando a matemática como uma atividade humana, considerando que ela pode ser mais bem aprendida por meio de sua "reinvenção" em um processo de matematização da realidade, utilizando problemas ligados a fenômenos que mostrem sua importância e valor, que se pretende alcançar o objetivo maior da Educação Matemática Realística que, segundo De Lange (1999, p. 3, tradução nossa)[13], "é ajudar os estudantes a se tornarem matematicamente letrados[14]"

Levando em consideração as características e os objetivos da EMR, torna-se necessário um olhar diferente (uma ampliação na maneira de conceber) para a avaliação escolar. A seguir, apresentaremos uma perspectiva de avaliação escolar com base nos pressupostos da EMR.

1.2 AVALIAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

Usualmente, na escola, a palavra avaliação é relacionada apenas com provas escritas e notas. É considerada como aquele momento angustiante em que o professor enfileira seus alunos na sala de aula e ordena que não olhem para os lados, não façam pesquisas em seus materiais, não consultem colegas e respondam as questões apresentadas em uma folha, questões essas elaboradas geralmente sobre um ou dois assuntos específicos para saber o quanto falta para os alunos aprenderem do que foi ensinado sobre esses assuntos.

A preocupação dos alunos e professores em relação à avaliação, na maioria das vezes, fica apenas focada na nota, elemento responsável pela aprovação ou reprovação do

[13] "The aim of mathematics education is to help students become mathematically literate".
[14] Letramento em matemática pode ser entendido como "a capacidade do indivíduo de identificar e compreender o papel que a matemática desempenha no mundo, de fazer avaliações bem fundamentadas e de utilizar a matemática e envolver-se com ela de forma que atendam suas necessidades de vida enquanto cidadão construtivo, engajado e reflexivo" (OCDE, 2004, p.24).

aluno, e, assim, pouca importância é dada para o processo de ensino e aprendizagem. Se um aluno, em uma prova sobre um determinado assunto, obteve uma nota igual ou superior à média estabelecida pelo professor, isto é tomado como suficiente para que se conclua que esse aluno já domina tal conteúdo e, portanto, "nada mais precisa ser feito". Se, ao contrário, um aluno "tira" uma nota inferior à média, isto é tomado como suficiente para que se constate que ele não sabe tal conteúdo e, da mesma maneira, assume-se que "nada mais precisa ser feito", uma vez que ele poderá "recuperar essa nota" em outras provas, envolvendo outros assuntos. Assim, dá-se maior ênfase para a obtenção de nota do que para a aprendizagem. No entanto, segundo Buriasco (2002, p.2),

> [...] uma vez que esse tipo de avaliação, que temos em nossas escolas, não conduz à superação das dificuldades no processo de ensino e aprendizagem, tanto do aluno quanto do professor, ela não pode ser considerada avaliação no seu sentido pleno.

Esse tipo de avaliação reduz o conhecimento matemático a seus objetos, acreditando-se que isso possibilite que ela seja transmitida, memorizada e reproduzida, e, por conseguinte, cabe ao professor mostrar esses objetos e, aos alunos, reproduzi-los. Verifica-se apenas a presença ou não de determinado conhecimento, no que se considera o produto final do processo, não possibilitando maneiras de este ser modificado. Avaliação apenas para obtenção de nota, para "certificar" a capacidade ou não do aluno para ingressar na série seguinte não é considerada válida na EMR, uma vez que os objetivos desse tipo de avaliação parecem ser muitos mais burocráticos do que pedagógicos.

Segundo De Lange (1999), o objetivo da avaliação escolar é produzir informações que contribuam para o processo de ensino e aprendizagem e ajudem nas decisões educacionais, decisões que devem ser feitas por estudantes, professores, pais e administradores. A avaliação não deve ter como objetivo primeiro certificar, selecionar, classificar os alunos como detentores ou não do conhecimento matemático, mas fornecer informações para que os professores melhorem suas práticas de ensino e para que os alunos possam melhor aprender matemática e, assim, tornarem-se matematicamente letrados.

Com base em pesquisas realizadas, em mais de vinte anos de estudos da EMR, foram elaborados princípios para a avaliação escolar com o objetivo de possibilitar o letramento matemático dos alunos. Esses princípios apresentados por De Lange (1999) foram fortemente influenciados pela literatura disponível na época, pelos Standards publicados pelo

NCTM[15], e refletem muito bem as características da avaliação na EMR apontadas por Van den Heuvel-Panhuizen (1996) como sendo uma representação de sua natureza didática e, nela, o papel crucial atribuído aos problemas.

O **primeiro princípio** para a avaliação escolar da EMR diz que "o principal propósito da avaliação escolar é melhorar a aprendizagem" (DE LANGE, 1999, p. 10, tradução nossa) [16]. Ela não deve ser feita como um processo separado, apenas para cumprir as exigências burocráticas da escola, para informar os pais sobre o desempenho bimestral de seus filhos, para rotular os alunos em bons ou maus. A avaliação deve fornecer informações para professores e alunos de modo a poderem reorientar suas práticas a fim de melhorá-las.

Todos os elementos constituintes da avaliação devem ser pensados e formulados a fim de possibilitarem a aprendizagem de matemática pelos alunos, desde os instrumentos utilizados, os critérios de correção e classificação adotados, até a comunicação das informações. O professor passa a ter maior responsabilidade, uma vez que ele é quem escolhe os instrumentos, elabora os critérios, comunica os resultados, decide o que deve e quando deve ser avaliado, entre outros.

> [...] é preciso que o professor tenha claro quais são as evidências necessárias para descrever o progresso de seus alunos durante a aprendizagem de matemática; escolha quais são os critérios que o ajudarão na busca de fazer interpretações válidas sobre o que os alunos aprendem; saiba qual a melhor forma de comunicar essas interpretações aos seus alunos de modo a serem utilizadas por eles para implementar suas aprendizagens (BURIASCO, 2004, p. 16)

Uma maneira apontada por Van den Heuvel-Panhuizen (1996) para ajudar os alunos a melhorarem sua aprendizagem é dar a eles feedbacks sobre seu processo de aprendizagem, e essa ideia vai ao encontro do **oitavo princípio** para avaliação escolar apresentado em De Lange (1999, p. 10, tradução nossa)[17], que diz que "estudantes deveriam ter oportunidade de receber feedbacks genuínos em seus trabalhos" . Segundo o dicionário Houaiss (2009), *feedback* pode ser entendido como "informação que o emissor obtém da reação do receptor à sua mensagem e que serve para avaliar os resultados da transmissão". Considerando a avaliação um processo de comunicação, o aluno (emissor), ao realizar uma tarefa, emite uma mensagem ao professor (receptor), esperando por um parecer sobre sua produção. O professor, ao analisar a mensagem, tece suas considerações sobre a tarefa a fim

[15] National Council of Teachers of Mathematics.
[16] "The main purpose of classroom assessment is to improve learning".
[17] "Students should have opportunities to receive genuine feedback on their work".

de possibilitar ao aluno melhorá-la. A qualidade dessa mensagem de retorno pode ter um peso fundamental nas próximas ações dos alunos (BARLOW, 2006).

Para De Lange (1999), sem o apropriado feedback, o papel da avaliação como contribuinte do processo de aprendizagem fica ameaçado. Um aluno que realiza uma prova e recebe como feedback de sua produção, por exemplo, apenas um número 6, não recebe informações suficientes e necessárias para que possa entender a qualidade da sua produção, nem meios para que possa melhorá-la. Com o “6”, ele recebe apenas a informação que a lacuna entre sua produção e a produção ideal é de medida “4”, ou seja, que ainda lhe falta “4” para aprender. Mas, no que essa informação contribui para o seu processo de aprendizagem? Qual o real significado do “6” e do “4”? Como o “6” indica o que ele, o aluno, deve fazer para chegar ao tão desejado “10”? Perguntas similares valem para o professor.

Feedbacks adequados são aqueles que trazem informações fidedignas sobre o processo de ensino e aprendizagem, informações baseadas nas diferenças tangíveis entre o que o aluno mostra e o que se espera dele, na busca de contribuir para a melhoria das próximas ações. Por conseguinte, eles trazem mais informações sobre o que os alunos mostram saber do que sobre o que ainda não sabem, e, são essas informações que o professor utiliza para reorientar o processo. Podemos considerar que o feedback relativo à lacuna entre o que é e o que deveria ser contribui para o processo de ensino e aprendizagem apenas quando essa comparação (entre o que foi apresentado e a referência) é utilizada para modificar essa lacuna (DE LANGE, 1999).

Uma nota em um teste é uma informação codificada (DE LANGE, 1999) que só fará sentido para os alunos se estes conseguirem decodificá-la e interpretá-la com base nos critérios de codificação que o professor de fato utilizou, e, por isso, esses critérios precisam estar acessíveis e claros para os alunos. Barlow (2006) afirma que o problema não reside na utilização da avaliação cifrada, mas na maneira como ela tem sido realizada e que sua eficácia precisa ser melhorada. Muitas vezes, a nota atribuída pelo professor e a nota recebida pelo aluno é interpretada de maneira diferente, pois ou os critérios do professor não estão bem definidos, ou eles não são acessíveis aos alunos. Com isso, pelo menos parte da informação se perde e a comunicação que deveria acontecer não acontece.

Um rito[18] comum na avaliação escolar tradicional é a ideia de que muitos dos seus elementos devem ser inacessíveis aos alunos com o intuito de assegurar a sua eficácia, como se “pegar os alunos de surpresa” para mostrarem o que sabem ou esconder alguns de seus elementos garantisse a eficácia. Contudo, a eficácia da avaliação diz respeito a fornecer informações confiáveis sobre o processo e, quanto mais informações os alunos tiverem sobre como são avaliados, melhor poderão mostrar o que sabem de maneira possível de ser identificada. Na perspectiva proposta pela EMR, toma-se como certo que os alunos aprendem melhor com um processo de avaliação transparente e aberto, no qual alunos e professores discutem e negociam um contrato de avaliação. Nessa perspectiva, foram elaborados **o sexto e o sétimo princípios** da avaliação escolar, que dizem, respectivamente, que “critérios de classificação deveriam ser públicos e aplicados consistentemente; deveriam incluir exemplos de classificações, anteriores mostrando trabalhos exemplares e trabalhos não tão exemplares” e, “o processo de avaliação, incluindo pontuação e classificação, deveria ser aberto aos estudantes” (DE LANGE, 1999, p. 11, tradução nossa)[19].

Os alunos precisam saber o que o professor espera deles, como o trabalho será pontuado e classificado, porque fazem testes e o que será feito com os resultados (DE LANGE, 1999). Por meio do contrato de avaliação, o professor pode explicar suas intenções e objetivos para os alunos, apresentar a maneira como costuma pontuar as suas produções, o que considera importante, o que não merece tanta atenção, ou seja, pode deixar claro como avalia o progresso dos alunos.

Essa discussão e negociação possibilitam ao aluno perceber que a avaliação não é um “bicho de sete cabeças” que tenta impedi-lo de ter sucesso em sua vida acadêmica e, sim, que ela serve para ajudá-lo em seu processo de aprendizagem. Os alunos precisam entender o propósito das avaliações e, dessa forma, se preocuparem em aprender matemática ao invés de se preocuparem apenas em “aprender a passar de ano”.

Sabendo as intenções e critérios do professor, o aluno tem mais segurança em seu trabalho, pois poderá escolher suas estratégias de modo a mostrar aquilo que o

---

[18] Segundo Barlow (2006, p.19-20), podemos definir rito, na linha de Marcel Mauss, como “uma prática religiosa – isto é, um conjunto de gestos e de palavras estritamente codificadas (sempre realizadas da mesma maneira, segundo normas muito precisas com atores definidos) e que correspondem a uma representação religiosa ou a um mito”. Ainda de acordo com Barlow (2006, p.vi), mitos pode ser compreendidos como “um imaginário narrativo que estrutura a concepção de universo por suas afirmações e suas narrativas” , e, dessa forma, ritos, “no sentido mais geral e não exclusivamente religioso do termo, são de fato o imaginário em ação, gestualizado” . “O mito é verdadeiro aos olhos do povo porque é sempre dito; o rito é benéfico porque é sempre feito” (BARLOW, 2006, p.vi).

[19] “Grading criteria should be public and consistently applied; and should include examples of earlier grading showing exemplary work and work that is less than exemplary” e “the assessment process, including scoring and grading, should be open to students”.

professor deseja observar. Não se trata de fazer o trabalho pensando somente nas intenções do professor, mas em conhecê-las para poder pensar como poderá mostrar o que sabe de uma maneira que o professor possa enxergar.

Os professores precisam conhecer melhor seus alunos para que possam ajudá-los. Quanto mais informações o professor puder ter do processo de aprendizagem dos alunos, feedbacks mais genuínos e adequados ele poderá emitir. Como a qualidade dos feedbacks depende, em grande parte, da maneira como as respostas dos alunos foram formuladas (DE LANGE, 1999), o tipo de tarefa dada a eles tem fundamental importância, uma vez que é dependendo "do que" e "como" é perguntado aos alunos que suas respostas serão elaboradas.

Van den Heuvel-Panhuizen (1996, p. 94, grifo e tradução nossa) [20] afirma que o objetivo principal da EMR é desenvolver "a habilidade de resolver um problema usando meios matemáticos e insights" e, para ela, "uma tarefa é interessante se ela requer uma resolução de problema" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 106, grifo e tradução nossa) [21] De Lange (1999) diz que os princípios para a avaliação escolar foram elaborados com o objetivo de "habilitar indivíduos para lidarem com a matemática envolvida nos problemas do mundo real" (DE LANGE, 1999, p. 11, grifo e tradução nossa) [22] e, ainda, afirma que "é essencial ao letramento em matemática a habilidade de matematizar um problema" (DE LANGE, 1999, p. 17, grifo e tradução nossa) [23]. Com essas afirmações, podemos perceber que os problemas[24] recebem um lugar de destaque na EMR, e que "resolver problemas" parece ser o tipo mais adequado de tarefa para que esses objetivos possam ser alcançados.

Na perspectiva da EMR, é desejável que os estudantes tenham um papel ativo na construção de seu conhecimento matemático e que, dessa maneira, aprendam fazer matemática como uma realização, ou seja, matemática como um processo, uma ação, uma maneira de proceder, não como uma ciência estática, pronta e acabada. Matemática como o "realizar" e não como o resultado. Acredita-se que é por meio da matematização de problemas que a aprendizagem matemática melhor acontece. De acordo com **o segundo princípio** para a

[20] "[…] the ability to solve problem using mathematical means and insights".
[21] "[…] a task is worthwhile if it requires problem solving".
[22] "[…] enable individuals to deal with the mathematics involved in real-world problems".
[23] "Essential to mathematical literacy is the ability to mathematize a problem".
[24] Estamos tomando "problema" como sendo uma situação que precisa ser resolvida, porém não apresenta uma resolução evidente e imediata.

avaliação escolar, "a matemática está embutida em problemas interessantes[25] que são parte do mundo real dos estudantes" (DE LANGE, 1999, p. 10, tradução nossa) [26], e, dessa maneira, nos parece que a tarefa de avaliação mais apropriada é aquela que contemple problemas interessantes que possibilitem uma matematização por parte do aluno.

A preocupação com a utilização de bons problemas de matemática é uma característica marcante da EMR. Um problema é "bom", "interessante", "meritório", quando ele possibilita que os objetivos para o qual ele foi criado possam ser alcançados.

Van den Heuvel-Panhuizen (1996) afirma que bons problemas de avaliação devem ser informativos, significativos e conter o conteúdo que se deseja examinar. Como o principal objetivo da avaliação é fornecer informações úteis para a reorientação e a melhoria do processo de ensino e aprendizagem, problemas interessantes de avaliação são aqueles que permitem que os alunos produzam tais informações (por exemplo, sobre o conhecimento, insights, habilidades, estratégias dos alunos) de modo que os professores possam analisá-las e utilizá-las da melhor maneira.

Para que informações sobre o processo de ensino e aprendizagem sejam fidedignas, o problema de avaliação precisa ser significativo, tanto do ponto de vista do estudante, quanto do ponto de vista do assunto a ser abordado.

Um dos critérios apontados por Van den Heuvel-Panhuizen (1996) como sendo necessário para que um problema de avaliação seja significativo para os alunos é que ele deve ser acessível a esses alunos. Para que o aluno possa se envolver com o problema e tentar resolvê-lo, as questões e suas instruções precisam ser as mais claras possíveis, elaboradas de maneira que qualquer pessoa possa pelo menos começar uma formulação de resposta. Os alunos devem ser capazes de imaginar alguma coisa nos problemas ou, como bem coloca Dekker (1991) apud Van den Heuvel-Panhuizen (1996), os problemas devem ser realísticos.

Essa acessibilidade diz respeito, também, à oportunidade de os alunos abordarem o problema de diferentes maneiras e em diferentes níveis de matematização, de acordo com seu nível de compreensão. Para isso, além de ser flexíveis, os problemas precisam possibilitar alguma construção no sentido de não ter uma resolução única, padrão – de permitir a utilização de procedimentos elaborados pelos próprios alunos. Problemas flexíveis que não possuem uma resposta padrão fixada pelo professor permitem uma maior liberdade

---

[25] Worthwhile. Segundo o dicionário inglês Oxford (1994, p. 1477, tradução nossa), significa "importante, interessante, ou gratificante suficiente para justificar o tempo, dinheiro ou esforço que é gasto".

[26] "The mathematics is embedded in worthwhile (engaging, educative, authentic) problems that are part of the student's real world".

para os alunos pensarem de acordo com suas experiências e repertório matemático e, assim, terem a oportunidade de mostrar o que sabem e como lidam com a questão.

De acordo com o terceiro princípio para a avaliação escolar (DE LANGE, 1999, p. 10), “métodos de avaliação deveriam ser tais que habilitem os estudantes a revelarem o que sabem ao invés do que não sabem” (tradução nossa)[27], e quando o problema não permite essas múltiplas abordagens, apenas os alunos que já construíram o conhecimento desejado podem respondê-lo corretamente. Quando o problema pode ser respondido em diferentes níveis de compreensão e quando há oportunidades para os alunos construírem suas próprias respostas, tanto os que já dominaram o conteúdo em um nível desejado quanto os que ainda estão nesse processo podem se envolver com o problema e tentar resolvê-lo. Dessa maneira, além de possibilitar que mais alunos se envolvam com o problema e reduzir o “tudo ou nada” da avaliação, dá-se mais oportunidade para os alunos demonstrarem seu poder matemático e, assim, fornecer mais informações úteis para a melhoria do processo, tornando-o mais justo.

Outro importante critério apontado por Van den Heuvel-Panhuizen (1996) para que um problema de avaliação possa ser significativo para os alunos é que ele deve ser desafiador. Um problema não pode requerer apenas recordação de fatos, reprodução de procedimentos já realizados, aplicação de fórmulas.

A satisfação em responder um problema reside em encontrar uma solução para o que, a priori, parecia não ter. Está na constatação de saber que, mesmo que no início do processo o resolvedor não conhecia meios claros de abordar o problema, conseguiu lidar com ele utilizando os conhecimentos que já possuía e outros que construiu durante o processo. E essa satisfação é proporcional ao grau de desafio que é imposto. Quanto mais complexo o problema, maior a vontade de encontrar respostas e maior a alegria ao resolvê-lo (BUTTS, 1997).

Dessa maneira, problemas desafiadores são, muitas vezes, problemas não-rotineiros, os quais envolvem situações novas para os estudantes, para as quais precisam elaborar/utilizar estratégias para abordá-los e não simplesmente respondê-los imediatamente.

Uma situação que pode ser facilmente resolvida não pode ser considerada um problema de fato e pode não permitir um envolvimento do resolvedor. Se deseja saber o que os alunos sabem e o seu nível de compreensão, deve-se dar oportunidade para que todos os níveis de compreensão possam ser contemplados no problema. Tentando resolver um

[27] “Methods of assessment should be such that they enable students to reveal what they know, rather than what they do not know”.

problema em que existe certo grau de complexidade, o aluno pode mostrar tanto altos como baixos níveis de compreensão e matematização, porém, quando o problema exige apenas matematizações simples e utilização de procedimentos rotineiros, nada se pode dizer sobre os níveis mais elevados.

Problemas significativos de avaliação do ponto de vista dos alunos são aqueles que apresentam certo grau de dificuldade, mas são acessíveis, desafiam e motivam os alunos a quererem resolvê-los, podem ser abordados em diferentes maneiras e níveis de compreensão, não exigem uma resposta fixa padrão, possibilitam aos alunos mostrarem seu potencial matemático.

Do ponto de vista do assunto, para que um problema de avaliação possa ser significativo, ele precisa suscitar os conhecimentos matemáticos que se pretende avaliar e refletir a importância dos conteúdos e processos matemáticos envolvidos nele.

De acordo com o **nono princípio** para avaliação escolar (DE LANGE, 1999), a qualidade da tarefa, daquilo que foi proposto para o aluno fazer, pode ser definida pela autenticidade e equidade, na medida em que satisfaz os outros oito princípios para a avaliação. Mais importante que a "precisão matemática" de uma nota, ou a garantia de que um problema será interpretado da mesma maneira em diferentes momentos, são as inferências sobre a possibilidade de as tarefas propiciarem oportunidades para todos os alunos se envolverem com os problemas e mostrarem sua compreensão e poder matemático, bem como de possibilitarem maneiras de os professores conhecerem essa compreensão e poder matemático para que possam reorientar suas práticas e auxiliar os alunos nos seus processos de aprendizagem.

Toda essa preocupação em relação aos problemas de avaliação é explicitada para garantir que ela possibilite a melhor oportunidade para os alunos mostrarem o que sabem e como sabem, e para que os professores possam constituir uma imagem o mais completa possível da compreensão matemática dos estudantes, a fim de poderem emitir feedbacks úteis para a melhoria de todo o processo de ensino e aprendizagem. Para que essa imagem dos conhecimentos dos alunos seja a mais completa possível, ela não pode ser constituída apenas com informações oriundas de um único tipo de avaliação, ou utilizando somente um tipo de instrumento de avaliação. Tradicionalmente, os alunos apenas são avaliados em momentos isolados, em situações bem diferentes das vivenciadas no seu processo de aprendizagem, frequentemente com datas rigidamente estabelecidas (geralmente, no final dos bimestres escolares) e por meio da utilização do instrumento de avaliação conhecido como prova escrita. Mas, quando se utiliza apenas uma única fonte de informação, a qualidade desse subsídio fica comprometida (BURIASCO, 2002).

Na perspectiva da EMR, a avaliação é vista como um componente integral do processo de ensino e aprendizagem e não pode ser tomada como uma interrupção dele. Isso não significa que provas escritas com datas pré-estabelecidas não devam ser utilizadas como meio de obter informações sobre os alunos, mas que não se deve limitar a ideia de avaliação a elas.

"Um plano de avaliação equilibrado deveria incluir múltiplas e variadas oportunidades para os alunos mostrarem e documentarem suas realizações" – **quarto princípio** para a avaliação escolar (DE LANGE, 1999, p. 10, tradução nossa) [28] – e, dessa maneira, tanto avaliações "formais"[29], que seguem um certo protocolo – data marcada, instrumento definido –, como "informais"[30], bem como a utilização de uma variedade de ferramentas de avaliação e formatos de questões, deveriam ser realizadas durante todo o processo.

Na EMR, as avaliações informais ganham destaque (e não exclusividade).

> Juntamente com os vários tipos de avaliação formal como testes e questionários, os professores deverão reunir de forma contínua, informações sobre a evolução dos seus alunos por meios informais, como a colocação de questões durante uma aula, a condução de entrevistas individuais com alunos, e a elaboração de pequenos comentários por escrito (NCTM, 2008, p. 24).

Quando as informações são obtidas apenas por avaliações formais, elas fornecem um só ponto de vista daquilo que os alunos são capazes de fazer em determinadas condições muito particulares, contribuindo para uma imagem incompleta, ou até mesmo distorcida, do desempenho dos alunos (NCTM, 2008).

De Lange (1999) destaca a importância das discussões e observações como fontes de informação para o processo de ensino e aprendizagem e afirma que

---

[28] "A balanced assessment plan should include multiple and varied opportunities (formats) for students to display and document their achievements".

[29] Considerando avaliações formais como sendo aquelas nas quais é evidente que se trata de um momento avaliativo, em que se segue um certo protocolo, utilizam-se instrumentos específicos de avaliação como provas escritas, portfólios, provas em duas fases.

[30] Considerando avaliações informais aquelas feitas durante todo o tempo de aula ou que podem ser realizadas a qualquer momento, não sendo necessária a utilização de instrumentos específicos de avaliação. Nas avaliações informais, o professor pode avaliar enquanto participa de mediador no processo, pode fazer uma pergunta ou uma colocação sobre a produção do aluno enquanto ele ainda está realizando, contribuindo imediatamente nessa produção e já obtendo informações sobre o conhecimento do aluno, ou ainda pode apenas observar os alunos enquanto trabalham, sem precisar perguntar nada para eles, pois a pergunta já está no problema, e a resposta seria todas as ações realizadas pelos alunos.

> [...] observações sistemáticas dos estudantes fazendo matemática, como eles trabalham em um projeto sustentado por suas próprias respostas para provar questões são indicadores mais autênticos das suas habilidades matemáticas do que testes compilados pela totalização do número de respostas corretas (DE LANGE, 1999, p. 33, tradução nossa) [31].

As discussões em sala de aula permitem aos alunos um ambiente no qual são estimulados a organizar, mostrar e defender suas produções, ideias e argumentos, tanto para o professor, quanto para os outros colegas, e assim podem ser consideradas, também, como fonte importante para a coleta de informações sobre o poder matemático dos alunos. Além disso, esse tipo de interação em sala de aula possibilita a exploração de diferentes estratégias para abordar as tarefas, diferentes resoluções e respostas para um mesmo problema, contribuindo para a visão da matemática como atividade humana.

Na EMR, observações dos professores relativas às ações dos alunos podem ser tomadas como prática de avaliação informal quando fornecem informações sobre o processo que vão além de simples percepções comportamentais, e focam na compreensão, nas estratégias e nos insights dos alunos durante a realização das tarefas. Como as observações acontecem enquanto os alunos estão envolvidos nas tarefas, as informações obtidas por meio delas podem gerar intervenções imediatas e mais eficazes para ajudar os alunos nos seus processos de aprendizagem.

Avaliações formais, utilizadas frequentemente nas escolas, como provas escritas e testes de múltipla escolha, têm sido fortemente criticadas e rejeitadas por educadores, pois, da maneira como são realizadas (focando apenas as respostas corretas ou incorretas), não fornecem informações sobre os processos, estratégias desenvolvidas pelos alunos, não contribuindo com a aprendizagem.

Porém, novas maneiras de elaborar, utilizar e corrigir as provas escritas foram pesquisadas e propostas por educadores da EMR, com o objetivo de explorar melhor esse tipo de instrumento de avaliação, fazendo com que elas contribuíssem, também, com informações úteis e possibilitassem mais uma maneira de os alunos mostrarem o que sabem. Procuraram pensar "avaliações escritas" que pudessem contemplar os princípios da EMR para a avaliação escolar.

Van den Heuvel-Panhuizen (1996) apresenta as alternativas da EMR para melhorar as "avaliações escritas". Resumidamente, essas alternativas dizem respeito à

---

[31] "Systematic observations of students doing mathematics as they work on a project supported by their responses to probing questions are more authentic indicators of their ability to do mathematics than test score by totaling the number of correct item responses".

utilização de diferentes formatos de provas escritas como, por exemplo, testes em duas fases, ensaios; utilização de problemas significativos e informativos; utilização de tarefas de avaliação com diferentes níveis de complexidade e níveis de competência matemática requerida para a resolução.

De Lange (1999) apresenta uma "Pirâmide de Avaliação" (Figura 1), na qual é possível visualizar uma organização adequada dos itens de avaliação para representar a compreensão matemática dos alunos, levando em conta os níveis de pensamento requerido, grau de complexidade e domínios de conteúdo (DE LANGE, 1999). Essa pirâmide também é apresentada por Van den Heuvel-Panhuizen (1996) como sendo uma alternativa para a melhoria das avaliações escritas.

Para que uma avaliação seja equilibrada e forneça informações sobre o poder matemático dos alunos, ela

> [...] não dever ser restrita a avaliações particularmente fáceis de habilidades isoladas, mas, em vez disso, toda a gama de objetivos deve ser coberta, tanto em largura (todos os componentes do currículo e as ligações entre eles) quanto em profundidade (todos níveis de compreensão) (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 86, tradução nossa) [32].

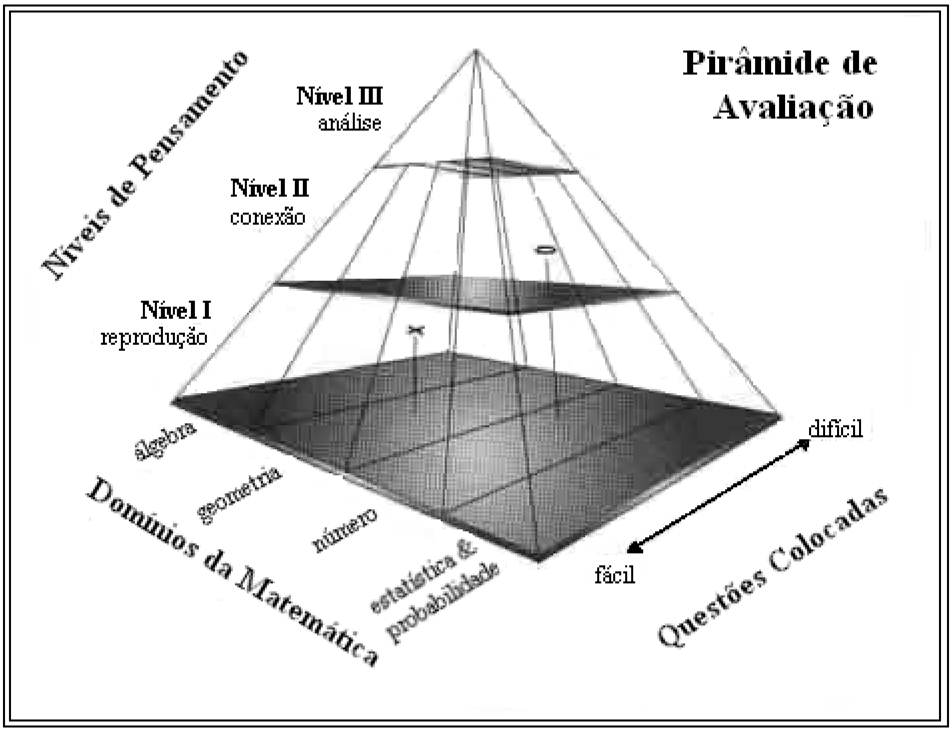
Por conseguinte, as "tarefas deveriam operacionalizar todos os objetivos do currículo (não apenas os inferiores)" – **quinto princípio** para avaliação escolar (DE LANGE, 1999, p. 10, tradução nossa) [33].

---

[32] "[...] may not be restricted to particular easily assessed isolated skills, but, instead, that the entire range of gols must be covered, both in breadth (all curriculum components and the links between them) and in depth (all levels of comprehension".

[33] "Tasks should operationalize all the goals of the curricula (not just the 'lower' ones)".

Figura 1 – Pirâmide de Avaliação proposta por De Lange (1999).



Uma alternativa, portanto, para que uma "avaliação escrita" possa fornecer informações necessárias para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem é procurar elaborá-la de maneira a "preencher" a "Pirâmide de Avaliação" proposta por De Lange, com tarefas envolvendo problemas significativos e informativos.

É necessária, também, uma mudança em relação à maneira como as produções escritas dos alunos são normalmente interpretadas e analisadas nesse tipo de avaliações. Como se pretende conhecer a compreensão matemática do aluno, apenas a verificação de respostas certas ou erradas não contribuem nessa busca, pois isto, por si só, não mostra como os alunos se envolveram com o problema e nem como chegaram a tal resposta. É por meio da análise das estratégias e procedimentos aplicados pelos alunos e da análise de como foram aplicados que as informações sobre a compreensão que tiveram sobre o problema e a maneira como mobilizaram seus conhecimentos para respondê-lo poderão ser obtidas.

A produção escrita dos alunos pode fornecer valiosas informações a respeito do modo como lidaram com a tarefa de avaliação, mas nem sempre essas informações estão imediatamente visíveis para o professor. Não basta "passar os olhos" nas produções, é necessário analisá-las com alguma cautela, investigar como seu processo de elaboração foi constituído e, quando possível, por que ocorreu dessa maneira. É preciso tomar a avaliação como prática de investigação[34], "colocar-se no lugar" do aluno para tentar compreender, por meio dos registros escritos, os caminhos por ele percorridos, as dificuldades que se mostraram presentes, se e como foram superadas, como o aluno interpretou a situação, relacionou as informações obtidas a partir dela com seu repertório de conhecimento, aplicou ou elaborou suas estratégias de resolução, concluiu e comunicou a resposta.

"Assumir a avaliação da aprendizagem escolar como prática de investigação implica em entrar em contato íntimo com os processos de produção de conhecimento dos estudantes, [...] questionar-se sobre os [seus] modos de pensar" (FERREIRA, 2009, p. 21), e, fazendo isso, o professor tem mais uma oportunidade de acompanhar e participar do processo de aprendizagem tanto do estudante quanto do seu próprio.

É nessa perspectiva de avaliação como prática de investigação que procuramos analisar as produções escritas dos alunos paranaenses que participaram do PISA/2006, buscando conhecer como lidaram com as questões não-rotineiras relacionadas com a ideia de Mudança e Relações.

---

[34] Ferreira (2009).

2 SOBRE O PISA[35]

O PISA[36] – Programa Internacional de Avaliação de Alunos – é uma aferição realizada trienalmente nos países membros da OCDE[37] e em alguns países convidados, para obter informações sobre o rendimento cumulativo dos sistemas educacionais em uma idade[38] na qual a escolarização, na maioria dos países, é obrigatória. Essas informações permitem que os responsáveis pela formulação de políticas nacionais desses países comparem o desempenho de seus sistemas educacionais com os de outros países, possibilitando um diálogo entre políticas, colaboração na definição e implementação de metas educacionais, entre outros.

Criado no final da década de 1990, esse programa teve sua primeira aferição realizada no ano de 2000. Nas aferições já realizadas (2000, 2003 e 2006), os focos foram, respectivamente, letramento em Leitura, letramento em Matemática e letramento em Ciências. O Brasil participa do PISA, como país convidado, desde sua primeira aferição, sendo o INEP[39] o órgão responsável pela sua realização. Em 2006, participaram do PISA os 30 países membros da OCDE e 27 países convidados, totalizando 57 países e cerca de 400 mil estudantes.

O PISA procura avaliar o nível de letramento dos estudantes, analisando não só se os alunos são capazes de reproduzir aquilo que aprenderam, mas se são capazes de explorar o que aprenderam e aplicar esses conhecimentos em outros contextos, escolares ou não. O foco passa a recair no domínio de processos, na compreensão de conceitos e na capacidade de atuar em diversas situações, em lugar de se deter apenas aos conteúdos. Uma das intenções é avaliar se os alunos são capazes de utilizar aquilo que aprenderam na escola em situações que possivelmente encontrarão em seu “dia a dia”.

A posição do PISA quanto ao uso de calculadoras e outros instrumentos é a de que os estudantes devem poder utilizá-los de forma como utilizam na escola, ou seja, se estão habituados a utilizarem esses instrumentos como auxílio na resolução de problemas matemáticos, estariam em desvantagem se esse recurso lhes fosse negado. No entanto, as questões que constituem a prova comum a todos os países foram elaboradas de maneira que

---

[35] Texto elaborado com base nos documentos oficiais do PISA, disponíveis em <www.inep.gov.br> e <www.oecd.org>.
[36] PISA – Programme for Internacional Student Assessment
[37] OCDE – Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômicos
[38] Participam do PISA os estudantes com idades entre 15 anos e 3 meses e 16 anos e 2 meses, no momento da avaliação, independentemente da série que estão cursando ou do tipo de instituição em que estão matriculados.
[39] INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

fosse possível resolvê-las sem esse tipo de auxílio, para que tanto os alunos que estão habituados com a utilização de calculadoras como os que não estão pudessem ter oportunidade de resolvê-las.

Para avaliar o letramento em matemática, o PISA distingue três componentes que compõem a avaliação: situações ou contextos; competências e idéias estruturadoras.

Uma parte importante do letramento em matemática é saber utilizar e fazer matemática em situações diversas. Situações ou contextos dizem respeito à “parte” do mundo do estudante em que se situam as tarefas. Dependendo do contexto em que o problema é apresentado é que geralmente são escolhidas as estratégias e os procedimentos para resolvê-lo. Levando isso em conta, o PISA dá preferência a problemas que podem ser encontrados em situações da vida real, nos quais a utilização da matemática para resolvê-los pode ser autêntica, e define quatro contextos-tipo de problemas: pessoais; educacionais/ocupacionais; públicos e científicos. Esses contextos-tipo diferem pela proximidade do estudante com a situação e na identificação explícita ou não da utilização da matemática para resolvê-los.

Os contextos pessoais são aqueles que dizem respeito às atividades cotidianas dos estudantes e, por isso, são as mais próximas deles. Tratam essencialmente das percepções dos estudantes em relação à situação e como ela os afeta.

Já os contextos educacionais/ocupacionais remetem a situações com que os estudantes se deparam possivelmente ou em sala de aula, ou em seu ambiente de trabalho. Tratam essencialmente da utilização matemática que esses ambientes podem exigir.

Os contextos públicos podem ser relacionados com as situações que ocorrem na comunidade do estudante. Tratam basicamente da maneira como os estudantes compreendem as relações entre elementos de sua comunidade e das consequências dessas relações para a vida em coletivo.

Contextos científicos remetem às situações explicitamente matemáticas e relativamente abstratas, que seriam mais comumente encontradas em uma aula de matemática.

As ideias estruturadoras servem para definir os conteúdos matemáticos em relação aos fenômenos e aos tipos de problemas para os quais foram criados. O PISA apresenta quatro ideias estruturadoras que, juntas, abrangem a grande diversidade de tópicos matemáticos que os estudantes deveriam ter aprendido ao longo dos seus anos de escolarização, e são elas: quantidade, espaço e forma, mudança e relações e incerteza.

Quantidade envolve a necessidade da quantificação na organização do mundo. Inclui a compreensão de tamanho relativo, reconhecimento de padrões numéricos, e uso de números para representar contagem e mensurações. Focaliza o raciocínio quantitativo, que tem como componentes essenciais: o senso numérico, a representação de números de várias formas, a compreensão do significado de operações, a intuição sobre magnitude de números, as computações matemáticas elegantes, e as estimativas mentais. O raciocínio quantitativo é comumente relacionado à aritmética.

Espaço e forma diz respeito ao estudo de fenômenos por meio de padrões. Inclui, entre outros, a compreensão das propriedades dos objetos e suas posições relativas, a compreensão de como representar objetos tridimensionais em duas dimensões, a conscientização de como vemos as coisas e por que as vemos dessa maneira. Um conceito muito focado nesse agrupamento é o de “apreensão do espaço”, que significa aprender a conhecer, explorar e conquistar melhores maneiras de viver nos espaços que ocupamos. A “apreensão do espaço” é relacionada e abordada geralmente nas aulas de geometria.

Mudança e relações envolve a elaboração ou o reconhecimento de modelos para analisar fenômenos naturais e as relações entre eles por meio da matemática. Envolve manifestações matemáticas de mudança assim como relações funcionais e dependência entre variáveis (geralmente expressas por meio de equações ou desigualdades, mas que podem assumir outras formas como equivalências, divisibilidade, etc.). Focaliza o pensamento funcional, isto é, pensar em termos de relações e a respeito delas. Essa ideia estruturadora tem uma relação mais estreita com a álgebra.

Incerteza destaca a necessidade cada vez maior de analisar informações e pode ser relacionada a dois tópicos básicos: dados e possibilidades (objetos de estudo da estatística e da probabilidade, respectivamente). Tem como foco conceitos e atividades matemáticas relacionados à coleta de dados, análise e apresentação/visualização de dados, probabilidade e inferência.

As competências dizem respeito aos processos matemáticos aplicados pelos estudantes para resolverem problemas. As oito competências matemáticas apresentadas dos documentos do PISA (pensamento e raciocínio; argumentação; comunicação; modelagem; colocação e resolução de problemas; representação; utilização de linguagem e operações simbólicas, formais e técnicas; e utilização de auxílios e ferramentas) formam três agrupamentos – reprodução, conexões e reflexão – utilizados nas análises, uma vez que, para resolver uma questão, diferentes competências são ativadas simultaneamente e em diferentes níveis, analisá-las separadamente seria uma tarefa impossível.

O agrupamento reprodução abrange itens relativamente familiares aos estudantes, para os quais são necessárias essencialmente a reprodução de conhecimentos já praticados e a utilização de procedimentos rotineiros.

Envolvendo as competências descritas no agrupamento anterior e outras, o agrupamento conexões envolve itens com contextos ainda familiares ou quase familiares aos estudantes, mas que, para resolvê-los, são necessários mais do que simples procedimentos de rotina. Nesse agrupamento, fazem-se necessárias a integração e a conexão entre várias ideias estruturadoras, ou de diferentes linhas curriculares de matemática ou, ainda, de diferentes representações de um mesmo problema. Os itens podem ser descritos como os seguintes descritores principais: integrar, conectar e ampliar modestamente material já praticado anteriormente.

E, finalmente, o agrupamento reflexão que envolve, além das competências descritas nos outros dois agrupamentos, a capacidade de refletir e planejar estratégias para resolver problemas poucos familiares. Os itens podem ser descritos como os seguintes descritores principais: raciocínio avançado, argumentação, abstração, generalização e modelagem aplicada a contextos novos.

Essa distinção de componentes que compõem a avaliação adotada pelo PISA corresponde aos elementos apresentados na Pirâmide de avaliação de De Lange (1999), que, por sua vez, contempla a perspectiva e objetivos da EMR.

Escolhemos utilizar as produções escritas presentes na prova de matemática do PISA/2006, primeiramente, pelo interesse em estudar a produção escrita de alunos em questões não-rotineiras de matemática e de acordo com os documentos divulgados do PISA. A prova é composta por questões consideradas desse tipo, já validadas, não necessitando que construíssemos questões e nem que aplicássemos (recebemos a amostra dos alunos paranaenses pronta). Posteriormente, após alguns estudos sobre o PISA, surgiu também o interesse em estudar a Educação Matemática Realística, que supostamente dava base teórica para o PISA.

Por motivo de falta de tempo hábil para ser realizada a pesquisa, tivemos que limitar o número de itens da prova do PISA/2006 a serem analisados. Levando em consideração que a prova de matemática era composta por cerca de $\frac{1}{4}$ de questões referentes a cada uma das ideias estruturadoras (Espaço e Forma, Quantidade, Mudança e Relações, Incerteza) e que essa quantidade seria possível e viável de ser estudada, resolvemos tomar como critério de corte as "ideias estruturadoras", sendo escolhidas para essa investigação as questões referentes a Mudança e Relações, enquanto as questões referentes às outras ideias estruturadoras estão sendo investigadas em outras pesquisas no interior do GEPEMA.

De acordo com os documentos estudados do PISA, a ideia de Mudança e Relações tem "uma relação mais estreita com álgebra" e, por essa razão, acreditamos ser importante tecer algumas breves considerações sobre a concepção de Educação Algébrica e pensamento algébrico que adotaremos nas análises. A seguir, apresentamos essas considerações.

3 BREVES CONSIDERAÇÕES SOBRE EDUCAÇÃO ALGÉBRICA E PENSAMENTO ALGÉBRICO

Tradicionalmente, Educação Algébrica tem sido resumida ao ensino de um conjunto de procedimentos para resolver e simplificar equações e operações envolvendo notação simbólica literal e à aprendizagem de maneiras de memorizar e reproduzir as técnicas operatórias utilizadas. Alunos memorizam procedimentos que conhecem como apenas um "passo a passo" para operações com símbolos, resolvem problemas artificiais que não carregam significado para suas vidas, são avaliados e classificados segundo suas habilidades de reprodução das técnicas ao invés de sê-lo por sua compreensão sobre os conceitos e raciocínios matemáticos envolvidos (KAPUT, 1999). Essa limitada concepção de álgebra escolar tem sido fortemente criticada por pesquisadores (KIERAN, 1996, 2004; KAPUT, 1999), uma vez que a redução da álgebra a apenas alguns de seus objetos, desconectados tanto de outros conhecimentos matemáticos quanto da realidade dos estudantes, dificulta sua compreensão e significação como um todo, impossibilitando a constatação de seus benefícios e importância como mais uma maneira de abordar diversos tipos de situações, tidas como matemáticas ou não.

A insatisfação com o ensino tradicional de álgebra e o reconhecimento do raciocínio algébrico "entre as mais poderosas ferramentas intelectuais que nossa civilização tem desenvolvido" (KAPUT, 1999, p. 3, tradução nossa)[40] fizeram com que educadores matemáticos procurassem maneiras mais efetivas para ensinar álgebra, de modo a torná-la acessível, significativa e útil para todos os alunos. O repensar sobre Educação Algébrica faz necessário ampliar a concepção de álgebra escolar incluindo atividades, ferramentas e maneiras de pensar que antes não eram tidas como algébricas, com o objetivo de, finalmente, chegar a uma visão mais coerente com o que os educadores acreditam ser o conteúdo adequado da álgebra escolar (KIERAN, 1996).

Assim, álgebra deixa de ser pensada como uma disciplina escolar rígida e pré-determinada, dependente de notação simbólica, possível de ser fragmentada em um ou dois cursos isolados e transmitida para os alunos, e passa a ser pensada como uma atividade humana, como uma maneira de pensar e agir sobre objetos, estruturas e situações matemáticas, dando ênfase aos processos de generalização e raciocínio, estimulando a participação ativa dos alunos, contribuindo para um processo de ensino e aprendizagem com

---

[40] "[...] are among the most powerful intellectual tools that our civilization has developed".

compreensão. Passa a ser considerada como tendo potencial de enriquecer atividades matemáticas e, por isso, deve ser abordada desde os primeiros anos de escolarização, possibilitando aos alunos, desde cedo e de forma gradativa, construírem poderosas ferramentas para resolver problemas diversos (NCTM, 2008).

Ao invés de uma definição rígida para álgebra escolar, o termo mais amplo pensamento algébrico tem sido cada vez mais utilizado como veículo para descrever os tipos de encontros que os alunos estão tendo com álgebra (KIERAN, 1996). Segundo essa autora, pensamento algébrico pode ser interpretado “como uma abordagem a situações quantitativas que enfatizam os aspectos gerais relacionais” (KIERAN, 1996, p. 275, tradução nossa) [41], não sendo necessária a utilização de notação simbólica literal para representar essa abordagem. Para ela, desde que a relação subjacente à representação utilizada para abordar a situação ainda seja numérica, essa maneira de representação e a maneira de se pensar sobre ela podem ser incluídas no domínio algébrico (KIERAN, 1996). Fica evidente a ampliação da concepção de álgebra escolar, uma vez que a ideia de pensamento algébrico não faz referência a objetos ou produtos específicos, mas foca no tipo de atividade e de processos em que os alunos estão envolvidos.

Tomando a ideia de álgebra como uma atividade, Kieran (1996) desenvolveu um modelo para conceitualizar atividades algébricas. Segundo ela, existem três principais atividades de álgebra escolar:

- atividade de geração (situações, propriedades, padrões e relações são representadas ou interpretadas algebricamente);
- atividade de transformação (foco nas manipulações algébricas);
- e atividade global/meta-nível (não são específicas da álgebra, mas permitem uma abordagem algébrica) (KIERAN, 1996; 2004).

Todas deveriam ser abordadas em sala de aula, porém, deve-se dar uma ênfase maior para as atividades global/meta-nível por possibilitarem maior liberdade para os alunos construírem suas respostas e, assim, participarem mais ativamente do processo de ensino e aprendizagem.

Driscoll (1999) argumenta que, por a álgebra abranger tantos recursos, o termo pensamento algébrico desafia simples definições e que, geralmente, a sua caracterização acontece de acordo com o recurso que é focado. Para aqueles que focam no importante papel que as funções realizam na álgebra, pensamento algébrico provavelmente é

[41] “The algebraic thinking can be interpreted as an approach to quantitative situations that emphasize the general relational aspects...”

caracterizado "como a capacidade de representar situações de modo que as relações entre as variáveis se tornem aparentes[42]", já aqueles que têm resolução de problemas como referência para pensar sobre álgebra devem considerar pensamento algébrico "a maneira como os resolvedores modelam problemas[43]" (DRISCOLL, 1999, p. 1, traduções nossas). E ainda, aqueles que distinguem aritmética da álgebra consideram "a habilidade de operar em uma quantidade desconhecida como se a quantidade fosse conhecida, em contraste com o raciocínio aritmético que envolve operações em quantidades conhecidas" (LANGRALL; SWAFFORD, 1997, p. 2 apud DRISCOLL, 1999, p. 1, tradução nossa)[44] como sendo a caracterização do pensamento algébrico.

Lins (1994, 30) considera pensamento algébrico como um modo, entre outros, de produzir significado para álgebra, e o caracteriza por "(i) pensar aritmeticamente, (ii) pensar internamente e (iii) pensar analiticamente" .

> Pensar aritmeticamente significa que os objetos com que estou lidando são exclusivamente números, operações aritméticas e, acrescento aqui, uma relação de igualdade. Pensar internamente significa que as propriedades destes objetos que sustentam o que eu faço com eles, isto é, que sustentam a lógica das operações num sentido mais amplo, não fazem referência a nada fora do domínio destes objetos. [...] Pensar analiticamente, por fim, significa que números genéricos são tratados exatamente como se fossem específicos, "incógnitas" são tratadas exatamente como se fossem "dados" (LINS, 1994, p. 30).

Podemos interpretar essa caracterização de pensamento algébrico como uma abordagem a situações quantitativas, nas quais as quantidades são despidas de contexto e tomadas apenas como números, a lógica na manipulação desses números se refere e é sustentada apenas pelas propriedades aritméticas, e é possível operar com números desconhecidos como se fossem dados.

Nessa caracterização apresentada por Lins (1994), podemos perceber a valorização da aritmética como aliada e base para que o pensamento algébrico possa ser desenvolvido. Porém, isso não significa que primeiro é necessário dominar os conteúdos aritméticos para só depois se aventurar nos estudos algébricos, mas que o estudo de ambos deva acontecer de forma simultânea, de modo a um potencializar o outro.

---

[42] "[...] as the capacity to represent quantitative situations so that relations among variables become apparent".
[43] "[...] how problem solvers model problems".
[44] "[...] the ability to operate on an unknown quantity as if the quantity was known, in contrast to aritchmetic reasoning which involves operations on known quantities".

Com o objetivo de analisar a produção escrita e o pensamento algébrico presente em produções escritas de alunos da 4ª e 8ª séries, do Ensino Fundamental, e alunos do 3º ano, do Ensino Médio, Viola dos Santos (2007, p. 41-42) caracterizou o pensamento algébrico "pela expressão de um processo que envolva alguma relação entre estruturas aritméticas[45] por meio de ações sintáticas, que sigam regras procedimentais e formais, e, semânticas, que atribua algum sentido lógico para a relação dessas estruturas". Utilizando essa caracterização, ele conseguiu identificar marcas de pensamento algébrico em produções escritas, sendo várias delas de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental, contribuindo com a ideia de que alunos das séries iniciais são capazes de pensar algebricamente.

Fiorentini et al. (2005) também apresentam caracterizadores do pensamento algébrico. Eles acreditam que a criança desenvolve gradativamente o pensamento algébrico quando

> [...] estabelece relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos [...]; percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema; produz mais de um modelo aritmético de uma situação-problema; ou, reciprocamente, produz vários significados para uma mesma expressão numérica; interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; transforma uma expressão aritmética em outra mais simples; desenvolve algum tipo de processo de generalização; percebe e tenta expressar regularidades ou invariâncias; desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente... (FIORENTINI et al., 2005, p. 6).

Analisando as caracterizações de pensamento algébrico apresentadas, é possível notar que em nenhuma delas houve subordinação à linguagem simbólica, ou ênfase em técnicas manipulativas. O foco nessas caracterizações parece residir na maneira como os alunos abordam situações quantitativas, nas relações que estabelecem entre os números, estruturas e propriedades aritméticas envolvidas nessas situações, e como operam com elas. Há uma valorização da aritmética, das relações estabelecidas, dos processos de generalização e raciocínio.

Assumiremos, em nosso trabalho, a ideia de pensamento algébrico como uma maneira de abordar situações quantitativas, de forma que o foco da abordagem resida nas relações existentes entre as quantidades, em utilizar ou tornar aparente essas relações a fim de organizar matematicamente a situação.

---

[45] "Por estruturas aritméticas estamos entendendo o resultado da construção do procedimento utilizado na realização de uma operação por meio de um enunciado" (VIOLA DOS SANTOS, 2007, p. 42).

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Tendo em vista que esta investigação tem como objetivo analisar a produção escrita dos alunos paranaenses que participaram do PISA/2006, a fim de compreender como lidam com questões não-rotineiras de matemática relacionadas à ideia estruturadora de Mudança e Relações, adotou-se uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo, com base na Análise de Conteúdo, que pode ser entendida, resumidamente, como

> um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 2004, p. 37).

Este conjunto é organizado em três etapas:

- a pré-análise – é a fase da organização propriamente dita que possui três missões: a escolha dos documentos a serem submetidos a análise (delimitação do corpus), a formulação das hipóteses e dos objetivos, e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final;
- a exploração do material – é a fase de operações de codificação, recortes (escolhas de unidades), enumeração (escolha de regras de contagem) e categorização;
- tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação (BARDIN, 2004).

Apresentamos, a seguir, o caminho percorrido nesta investigação, desde a pré-análise até a interpretação.

4.1 DA PRÉ-ANÁLISE À EXPLORAÇÃO DO MATERIAL

Tendo em vista o objetivo dessa investigação, os documentos constituintes do nosso corpus da pesquisa são os provenientes dos Cadernos de Prova resolvidos por esses alunos.

No final do segundo semestre de 2008, recebemos do INEP um CD com a amostra paranaense digitalizada das provas da aferição do PISA/2006, contendo os Cadernos de Prova respondidos pelos trezentos e quarenta e cinco (345) estudantes paranaenses que participaram dessa aferição.

Antes de ter contato com a amostra, todos os membros do GEPEMA, envolvidos em pesquisas relacionadas a essa amostra, tiveram que assinar um termo de sigilo exigido pelo INEP, no qual se comprometiam a não divulgar informações sobre os enunciados das questões.

Analisando boa parte dos *Cadernos de Prova*, percebemos que a amostra era formada por treze (13) Cadernos (numerados de 01 a 13) e que todos continham questões de Ciências, mas nem todos continham questões de Matemática e Leitura, isto porque o tema foco da aferição de 2006 foi Ciências. Dado nosso interesse apenas nas produções escritas referentes a questões de matemática, procuramos identificar os *Cadernos de Prova* que continham essas questões e produções. Foram identificados 10 Cadernos de Prova contendo questões de matemática, sendo eles: 02, 03, 04, 07, 08, 09, 10, 11,12 e 13. Os Cadernos de Prova 01, 05 e 06, portanto, não fizeram parte dos nossos estudos, e, dessa forma, dos 345 *Cadernos de Prova*[46] respondidos pelos alunos da amostra paranaense, apenas 261 compuseram a nossa “amostra paranaense do PISA/2006 contendo questões de matemática”.

Identificadas as provas de nosso interesse, nomeamos cada uma delas com 9 caracteres, da seguinte forma:

- os dois primeiros caracteres identificam de qual amostra (de que estado brasileiro) a prova faz parte, formando a sigla do estado;
- os três caracteres seguintes identificam o tipo de *Caderno de Prova,* formados pela letra C (*Caderno de Prova*) e o número do caderno (02, 03, 04, 07, 08, 09, 10, 11, 12 ou 13);
- os quatro últimos caracteres identificam o estudante que resolveu a prova (de acordo com a sua ordem de impressão), formados pela letra E (estudante) e três dígitos (de 001 a 261).

Assim, a prova identificada, por exemplo, por PRC03E046, corresponde a uma prova da amostra paranaense, é do *Caderno de Prova* 03 e foi resolvida pelo estudante 046.

Os códigos de nomeação foram escritos em cada uma das folhas de cada prova. Isso possibilitou manipular as folhas das provas sem a preocupação de perder sua origem.

Com as provas devidamente nomeadas, pudemos realizar uma primeira exploração e obtivemos a informação de que a amostra contém 31 questões diferentes

[46] Para facilitar a escrita, a partir de agora iremos nos referir a cada Caderno de Prova da amostra apenas por “prova”.

distribuídas nos 10 Cadernos de Prova , sendo que cada questão pode ter de 1 a 4 itens. Identificamos um total de 48 itens.

A fim de obter uma maior familiaridade com as questões e, também, com o intuito de elaborar um "gabarito" para as futuras correções das provas, resolvemos todas as questões, identificamos os conteúdos matemáticos que poderiam ser utilizados para resolver cada uma delas, os possíveis erros e as diferentes estratégias e procedimentos que poderiam ser aplicados.

Como optamos por realizar, primeiramente, correções e leituras horizontais, ou seja, corrigir e analisar as produções escritas de uma mesma questão em todas as provas da amostra, "desmontamos" as provas em questões e agrupamos todas as questões iguais de todas as provas. Dessa maneira, "transformamos" as 261 provas em 31 "blocos de questões", cada um contendo todas as produções dos alunos referentes a cada questão.

Optamos por analisar apenas as questões ligadas com a ideia estruturadora de Mudança e Relações que, de acordo com a classificação por conteúdo do PISA, são as que têm "uma relação mais estreita com a álgebra" (OCDE, 2005, p. 39). O estudo das outras questões está sendo realizado por outros membros do GEPEMA.

Para delimitar o nosso corpus da pesquisa, tivemos que identificar quais questões são classificadas, de acordo com o PISA, como sendo de Mudança e Relações.

O quadro com a "classificação oficial dos itens de cultura matemática do PISA 2003" (FRANÇA, 2007, p. 149-151, tradução nossa)[47] fornece informações sobre a classificação dos itens, segundo aspectos como: formato do item, contexto, conteúdo, ideia estruturadora, competência. Analisando esse quadro, conseguimos identificar os itens que fizeram parte da aferição de 2006 e, assim, foi possível identificar quais itens são classificados como sendo da *ideia estruturadora de Mudança e Relações*. Identificamos 13 itens, relativos a 7 questões.

---

[47] Classification officielle des items de culture mathématique de PISA 2003.

Quadro 1 – Distribuição das questões de Mudança e Relações em relação aos itens.

Questões	Itens			
Q1	-	-	Q1-3.3	-
Q2	Q2-1.3	-	-	-
Q3	Q3-1.2	Q3-2.2	-	-
Q4	Q4-1.1	-	-	-
Q5	Q5-1.3	Q5-2.3	Q5-3.3	-
Q6	Q6-1.4	Q6-2.4	Q6-3.4	Q6-4.4
Q7	Q7-1.1	-	-	-

Como as questões não foram divulgadas e como precisamos manter esse sigilo, tivemos que "nomeá-las" de forma que fosse possível falar sobre elas. Resolvemos listar em ordem alfabética nossas questões e nomeá-las de "Q1", "Q2" ... "Q7", nessa ordem. Como temos questões com mais de um item, tivemos que atribuir a esse nome mais dois dígitos, que dizem respeito a que item, em relação ao total de itens da questão, estamos lidando. Por exemplo, Q5-2.3 significa que se trata do segundo item da quinta questão de Mudança e Relações, sendo que essa questão possui no total três itens.

4.2 Da Exploração do Material ao Tratamento dos Resultados

As correções das questões foram realizadas com base no *Manual para Correção das Provas com Questões Abertas de Matemática* AVA-2002 (BURIASCO; CYRINO; SOARES, 2003) e em documentos utilizados pelo PISA para a correção das provas.

Receberam "crédito completo" (código 2) as resoluções que apresentaram apenas resposta correta ou aquelas em que foi possível identificar a utilização de uma estratégia que resolvia o problema, nas quais os procedimentos referentes à operacionalização da estratégia estavam corretos; "crédito parcial" (crédito 1), as resoluções em que foi possível identificar a utilização de uma estratégia que resolveria o problema, porém com procedimento(s) incorreto(s); "nenhum crédito", as resoluções em que foi possível identificar uma estratégia que não resolveria o problema, independente de os procedimentos de sua operacionalização estarem corretos ou não, aquelas que apenas apresentavam respostas incorretas sem indícios de como foram elaboradas (crédito 0) ou, ainda, aquelas que não apresentavam produção escrita alguma (crédito 9).

Tomamos por **estratégia** o conjunto de ações utilizadas para operacionalizar uma resolução de um problema, e por **procedimento** cada uma dessas ações. Por exemplo, uma estratégia adotada por um dos alunos para abordar um dos itens poderia ter sido “o cálculo de uma quantidade” seguido do “o cálculo de uma porcentagem” e os procedimentos utilizados para operacionalizar essa estratégia poderiam ter sido “resolução de uma divisão e a resolução de uma regra de três” ou “resolução de duas divisões”.

Após essa primeira correção, efetuamos as descrições das resoluções encontradas em cada item, de maneira bem detalhada, de forma que fosse possível “enxergar” a resolução por meio, apenas, das descrições. Para assegurar a legitimidade das descrições, todas elas foram validadas por, pelo menos, mais dois membros do GEPEMA.

De posse de todas as descrições, pudemos, então, realizar a segunda correção. Na primeira correção, o código atribuído a cada uma das resoluções apenas informava se ela estava “correta”, “parcialmente correta”, “incorreta” ou que ela “não apresentava indícios de resolução”, não importando quantos nem quais os diferentes tipos de resoluções que cada uma dessas classificações poderia ter. Na segunda correção, procuramos agrupar as descrições semelhantes e atribuir a elas uma codificação que as identificassem como tal, a fim de facilitar as futuras análises. Para isso, utilizamos códigos, como “2.1”, “2.2”, “2.3”, “1.1”, “1.2”, “0.1”, “0.2”, nos quais o primeiro dígito indica se a resolução estava correta / parcialmente correta / incorreta / em branco, e o segundo dígito indica a que “agrupamento” de descrição ela pertence. Descrições agrupadas com o mesmo código passam a ser consideradas uma só.

Quadro 2 – Exemplo de um agrupamento de descrições semelhantes (parte da descrição da segunda correção da questão Q3-1.2).

Correção 2 – agrupamento de descrições semelhantes – Q3-1.2		
Estudantes	**Código de correção**	**Descrição**
E022; E026; E029; E061; E065; E068; E082; E105; E114; E163; E168; E196; E205; E210; E215; E223; E227	2.1	Apresenta apenas a resposta correta que é 59.
E016; E019; E090; E133; E158; E261	2.2	Arma e efetua corretamente a adição 17+42 obtendo 59. Apresenta a resposta correta que é 59.
E030; E033; E143; E147; E160; E243	2.3	Efetua corretamente a adição 17+42 obtendo 59. Apresenta a resposta correta que é 59.
E006; E007; E043; E046; E048; E051; E054; E059; E071; E072; E081; E101; E108; E117; E132; E136; E137; E139; E146; E149; E150; E166; E174; E175; E182; E187; E207; E212; E220; E235; E239; E248; E255; E258	9	Não há indícios de resolução.

Identificadas e agrupadas as descrições de resoluções semelhantes, começamos um processo de busca por relações entre elas, a fim de realizar agrupamentos que pudessem possibilitar uma melhor compreensão sobre a maneira com que os alunos lidaram com as questões.

4.3 DO TRATAMENTO DOS RESULTADOS À INFERÊNCIA E À INTERPRETAÇÃO

Procuramos agrupar as produções escritas, primeiramente, pelos diferentes procedimentos registrados pelos alunos para operacionalizarem suas estratégias de resolução e, posteriormente, por outras características que se mostraram marcantes nessas produções.

Elaborados os agrupamentos, começamos a examiná-los detalhadamente de maneira a conseguir dar significado para as resoluções dos alunos, procurando compreender o processo de elaboração dessa resolução e, sempre que possível, a razão de ter ocorrido dessa maneira.

Para cada item, foi elaborado um pequeno texto contendo possíveis interpretações e inferências sobre a maneira como as resoluções foram elaboradas, obtidas por meio de intenso exame e "impregnação" das descrições das produções e da relação com a fundamentação teórica apresentada.

De posse de todas as análises, de todos os itens, elaboramos uma discussão e tecemos considerações finais a respeito dessa investigação.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO

Neste capítulo, apresentaremos interpretações que realizamos acerca das sete questões de matemática relacionadas com a ideia estruturadora de Mudança e Relações do PISA/2006, totalizado treze itens analisados. Para cada um dos itens, apresentamos sua classificação em relação ao agrupamento de competências e ao tipo de contexto no qual está inserido (de acordo com o apresentado nos documentos do PISA), uma breve explicação sobre o que ele trata, o que os alunos deveriam fazer para responder corretamente ao item, a porcentagem de erros e acertos, os agrupamentos realizados, e uma análise e discussão das produções.

5.1 QUESTÃO 1 (Q1)

A questão Q1 é apresentada por um enunciado composto por um texto informativo, uma tabela e três itens (Q1-1.3, Q1-2.3 e Q1-3.3), sendo que apenas o item Q1-3.3 está classificado como sendo da ideia estruturadora de Mudança e Relações.

5.1.1 Questão Q1 – Item 3 (Q1-3.3)

Este item está classificado como situado em um contexto pessoal, sua resolução requer a aplicação de processos matemáticos considerados do agrupamento de reflexão (FRANÇA, 2007) e diz respeito à utilização de algumas relações entre duas grandezas para o cálculo de uma quantidade.

O item3 da Questão1 fornece todos os dados necessários para resolver a questão, não necessitando buscar informações no texto informativo e nem na tabela. Fornece a relação entre a unidade de comprimento1 ($u1$) e a unidade de comprimento2 ($u2$), dada pela razão $\frac{6u2}{5u1}$, o valor do comprimento de $u1$ (0,96) e pede para os alunos calcularem a quantidade de $u2$ necessária para se obter certo comprimento.

Esse item pode ser resolvido corretamente por meio de diferentes estratégias, sendo que cada uma delas pode ser operacionalizada por diferentes procedimentos. Elaboramos um quadro contendo alguns procedimentos que podem ser utilizados para a resolução do problema e que, combinados entre si, podem formar estratégias de resolução que resolveriam o problema. A primeira coluna refere-se às “partes” de uma estratégia; a segunda coluna, aos dados necessários para que a “parte” de estratégia possa ser operacionalizada; e a terceira coluna diz respeito a algumas maneiras de operacionalizar essa “parte” de estratégia tendo os dados da segunda coluna. Por exemplo: a estratégia “E1D1+E2D1” é uma estratégia que resolveria o problema, e uma das formas que os alunos poderiam operacionalizá-la seria realizando os procedimentos P1 e P4.

Quadro 3 – Procedimentos que combinados entre si podem gerar uma estratégia de resolução para o item Q1-3.3.

"Partes" da estratégia	**Dados necessários**	**Procedimento**
E1 - Calcular a quantidade de $u1$ necessária	D1 - comprimento total e o comprimento de $u1$	P1 - Divide o comprimento total pelo comprimento de $u1$.
		P2 - Resolve a regra de três comprimento total está para x, assim como comprimento de $u1$está para 1
		P3 - 1 - Resolve uma adição em que as parcelas são o comprimento de $u1$ ou múltiplos dele e que o resultado seja o comprimento total. 2 - Conta quantos comprimentos de $u1$ foram utilizados na soma.
E2 - Calcular a quantidade de $u2.$ necessária	D1 - quantidade de $u1$ e a relação $\frac{6u2}{5u1}$.	P4 - Resolve a regra de três $6u2$ *para* $5u1$*assim, como* x *está para quantidade de* $u1$.
		P5 - multiplica a razão $\frac{6u2}{5u1}$ pela quantidade de $u1$.
		P6 - Estabelece um cálculo proporcional entre $5u1$ e quantidade $u1$, e $6u2$ e quantidade de $u2.$.
	D2 - comprimento de $u2.$ e o comprimento total	P7 - Divide comprimento total pelo comprimento de $u2.$.
		P8 - Resolve a regra de três comprimento total está para x, assim como comprimento de $u2.$ está para 1 .
	D3 - comprimento de uma certa quantidade de $u1$, a relação $6u2{:}\,5u1$ e o comprimento total	P9 - Resolve a regra de três $6u1$ *está para comprimento de uma certa quantidade de* $u1$ *, assim como* x *está para o comprimento total. .*
E3 - Calcular o comprimento de $u2.$	D1 - razão $\frac{6u2}{5u1}$ e o comprimento de $u1$	P10 - Resolve a regra de três $\frac{6u2}{5u1}$ *está para 0,96, assim como 1 está para* x.
		P11 - 1- Multiplica o valor do denominador da razão pelo comprimento de $u1$; 2 - divide o valor encontrado pelo valor do numerador da razão.
E4 - Calcular o comprimento de uma certa quantidade de $u1$	D1 - Quantidade $u1$ e o comprimento de $u1$	P12 - Multiplica a quantidade de $u1$ pelo comprimento de $u1$.
		P13 - Realiza uma soma na qual as parcelas são o comprimento de $u1$ ou múltiplos dele.

A ideia de Mudança e Relações está presente nesse item por relacionar duas grandezas de forma proporcional para o cálculo de uma quantidade.

Dos cento e oito (108) alunos que receberam um caderno de prova que continha essa questão, 62% (67 alunos) não apresentaram registro algum de resolução; 4,6% (5 alunos), uma resolução correta; e 33,4% (36 alunos) apresentaram uma resolução considerada incorreta, sendo que, destes, cinco receberam crédito parcial.

Agrupamos todas as produções escritas desse item pelo tipo de operações registradas pelos alunos para operacionalizar a estratégia que escolheram para resolver o problema, independentemente de terem sido desenvolvidas de forma considerada correta ou não. A seguir, apresentamos um quadro referente a esses agrupamentos.

Quadro 4 – Distribuição dos procedimentos utilizados no item Q1-3.3 por tipo de operações utilizadas.

Agrupamento	Procedimento	Quantidade
G1 - Adição	Resolve $960 + 960 + 960$	1
	Resolve $96 + 192$, $188 + 96$, $384 + 96$, $480 + 96$, $576 + 96$, $672 + 96$, $768 + 96$, $864 + 96$	1
G2 - Subtração	Resolve $960 - 300$	1
G3 - Divisão	Resolve $960{:}\,6$ e $160{:}\,5$	1
	Resolve $960{:}\,3$	1
G4 - Multiplicação	Resolve 96.10	1
	Resolve 480.2	1
	Resolve 3.96	1
	Resolve 960.6	1
G5 - Regra de três	Resolve $960\ está\ para\ 0{,}96$, $assim\ como\ x\ está\ para\ 1$ e e $6\ está\ para\ 5, assim\ como\ y\ está\ para\ 10^3$	1
	Resolve $6\ está\ para\ 4{,}8$, $assim\ como\ x\ está\ para\ 960$	1
	Resolve $6\ está\ para\ 5, assim\ como\ x\ está\ para\ 10$	1
G6 - Multiplicação e adição	Resolve 96.5 e $480 + 480$	1
G7 - Multiplicação e subtração	Resolve 960.6 e $60 - 54$	1
G8 - Multiplicação e regra de três	Resolve 5.96 e $6\ está\ para\ 4{,}8\ assim\ como\ x\ está\ para\ 960$	1
G9 - Multiplicação e divisão	Resolve 96.10 e $960{:}\,96$	1
	Resolve $1000.\,0{,}96$, $960{:}\,5$, 192.6 e 1152.1000	1
G10 - Aplicação de uma fórmula	Substitui a variável da fórmula por 96	1
G11 - Aplicação de uma fórmula, divisão e cálculo proporcional	Substitui a variável dependente por 0,96, resolve 960:3, 0,96:3,14, estabelece cálculo proporcional entre 03 - 960 e 1 - 320	1
G12 - Regra de três, divisão e multiplicação	Resolve $960\ está\ para\ x, assim\ como\ 0{,}96\ está\ para\ 1.$, e $1000{:}\,5$ e 200.6	1
G13 - Regra de três e	Resolve $6\ está\ para\ 5, assim\ como\ x\ está\ para\ 960\ e\ 5760{:}\,5$	1

Agrupamento	Procedimento	Quantidade
divisão	Resolve $960: 0{,}96$ e $6\ está\ para\ x, assim\ como\ 5\ está\ para\ 1000$	1
G14 - Adição, estabelece algum cálculo comparativo e subtração	Resolve $6{,}5 + 6{,}5$, compara o resultado a alguma coisa, diz que diminui algo	1
G15 - Adição e estabelece um cálculo proporcional	Resolve $480 + 480$ e cálculo proporcional	1
G16- Multiplicação e estabelece cálculo proporcional	Resolve 96.10 e cálculo proporcional	1
G17 - Divisão, multiplicação e estabelece cálculo proporcional	Resolve $960: 4{,}80.\ 6: 5.\ 1{,}2.20$ e cálculo proporcional	1
G18	Apresentou uma produção escrita que não conseguimos compreender.	1
G19 - Não registra as operações utilizadas	Apenas apresenta uma resposta	14

No primeiro agrupamento (**G1**), estão as duas (2) produções escritas nas quais os alunos utilizaram adição para operacionalizar a estratégia que escolheram para resolver o problema. Em uma dessas produções escritas, o aluno resolveu corretamente uma adição com três parcelas iguais e apresentou o resultado dessa operação como resposta para o problema. Esse aluno montou a operação utilizando o algoritmo usual da adição, porém não colocou o símbolo “+”ao lado das parcelas[48]. Na outra produção escrita desse agrupamento, o aluno resolveu corretamente oito adições, sendo que armou as operações de maneira que o registro resultado da primeira adição fosse uma das parcelas da segunda adição, o registro resultado da segunda adição fosse um das parcelas da terceira, e assim por diante. Em nenhuma das operações esse aluno colocou o símbolo “+” ao lado das parcelas[49] e, em todas as operações, uma das parcelas correspondia ao “comprimento de $u1$”. Apresentou como resposta para o problema um valor que não parece ter relação com as operações que realizou.

[48] Pelo resultado registrado, inferimos que se tratava de uma adição.
[49] Pelo resultado registrado, inferimos que se tratava de uma adição.

No segundo agrupamento (**G2**), está a produção escrita em que uma subtração foi utilizada para operacionalizar a estratégia escolhida pelo aluno. Nela, o aluno resolveu corretamente uma subtração por meio do algoritmo usual dessa operação e apresentou o resultado como resposta para o problema.

O terceiro agrupamento (**G3**) é formado por duas (2) produções escritas, nas quais os alunos utilizaram divisão para operacionalizar suas estratégias de resolução. Em uma delas, o aluno resolveu corretamente duas divisões, utilizando o algoritmo do "método curto da divisão"[50], sendo que o resultado da primeira divisão deu origem ao dividendo da segunda, e apresentou o resultado da segunda operação como resposta para o problema. Na outra produção escrita desse agrupamento, o aluno resolveu corretamente uma divisão, utilizando o algoritmo usual da divisão[51], e apresentou o resultado dessa operação como resposta para problema.

No quarto agrupamento (**G4**), estão as quatro (4) produções escritas nas quais os alunos utilizaram uma multiplicação para operacionalizar a estratégia que escolheram para resolver o problema. Todos resolveram corretamente a operação, sendo que dois montaram a operação utilizando o algoritmo usual da multiplicação, e dois apenas indicaram a multiplicação. Os alunos que montaram a operação apresentaram o seu resultado como resposta para o problema, e os alunos que apenas indicaram a operação apresentaram um dos fatores como resposta para o problema.

O quinto agrupamento (**G5**) é formado por três (3) produções escritas. Nelas, os alunos utilizaram regra de três para operacionalizar a estratégia escolhida e apresentaram o resultado da operação como resposta para o problema. Todos resolveram corretamente as operações. Pudemos identificar relação entre os registros escritos dos alunos desse agrupamento e alguns dos possíveis procedimentos que poderiam ser utilizados para a resolução correta desse item.

[50] Exemplo de uma divisão resolvida pelo processo "curto" da divisão:

$$\begin{array}{l|l} 45 & 3 \\ \cline{2-2} 15 & 15 \\ 00 & \end{array}$$

[51] Exemplo de uma divisão resolvida pelo algoritmo usual da divisão:

$$\begin{array}{r|l} -45 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{3} & 15 \\ -15 & \\ \underline{15} & \\ 00 & \end{array}$$

Em uma das produções escritas, o aluno parece ter realizado os procedimentos P2 e P4, sugerindo que sua estratégia de resolução para o problema pode ter sido E1D1+E2D1.

Em outra produção escrita, o aluno parece ter realizado o procedimento P9, porém não registra (apenas indica o valor) como calculou o “comprimento de certa quantidade de $u1$”. Sua estratégia de resolução pode ter sido a E2D3.

Na outra produção escrita desse agrupamento, o aluno parece ter realizado o procedimento P4, porém apenas indica incorretamente a quantidade de $u1$ (não possibilitando a inferência sobre o procedimento). A estratégia de resolução desse aluno pode ter sido a E2D1.

No sexto agrupamento (**G6**), a produção escrita mostra que uma multiplicação e uma adição foram utilizadas para operacionalizar a estratégia escolhida. Nela, o estudante montou e resolveu corretamente as operações, porém não colocou os sinais “$\times$” e “$+$” ao lado delas[52]. Apresentou, como resposta para o problema, um valor que aparentemente não tem relação com as operações que realizou. Mesmo assim, parece que esse aluno realizou os procedimentos P12, P3 e P6, sugerindo que sua estratégia de resolução tenha sido E4D1+E1D1+E2D1. Provavelmente, quando realizou o procedimento P3, não levou em consideração a diferença entre as duas unidades de comprimento utilizadas, resultando em uma quantidade de $u1$ equivocada.

No sétimo agrupamento (**G7**), está a produção escrita na qual o aluno utilizou uma multiplicação e uma subtração para operacionalizar a estratégia escolhida. O aluno monta e resolve corretamente as operações, utilizando o algoritmo usual da multiplicação e da subtração, e apresenta o resultado da multiplicação como resposta para o problema. A subtração parece ter sido utilizada para auxiliar a multiplicação. Uma inferência feita a partir de uma interpretação sobre a utilização da subtração “60 - 6” é: no momento de realizar a multiplicação, o aluno precisou saber quanto vale “6.9”, e sabia que “6.10” vale 60; como “6.10” tem “um seis a mais” do que “6.9”, bastaria subtrair 6de 60.

O oitavo agrupamento (**G8**) é formado pela produção escrita do estudante que utilizou uma multiplicação e uma regra de três para operacionalizar sua estratégia de resolução. Nela, o aluno resolveu corretamente as duas operações, utilizando o algoritmo usual da multiplicação e da regra de três, e apresentou o resultado obtido na regra de três

---

[52] Pelo resultado registrado, inferimos que se tratava de uma multiplicação e de uma adição.

como resposta para o problema. Parece que esse aluno realizou os procedimentos P12 e P9, sugerindo que sua estratégia de resolução para o problema possa ter sido E4D1+E2D3.

O nono agrupamento (**G9**) é formado por duas produções escritas nas quais os alunos utilizaram multiplicação e divisão para operacionalizar sua estratégia de resolução. Em uma delas, o aluno montou e resolveu corretamente uma multiplicação e uma divisão, utilizando os algoritmos usuais dessas operações, porém não apresentou resposta para o problema. Uma operação parece ser a "prova real" da outra. Na outra produção escrita desse agrupamento, o aluno montou e resolveu três multiplicações e uma divisão, sendo que em apenas uma das multiplicações colocou o sinal "x" ao lado do fator, e em uma das multiplicações utilizou como um dos fatores o registro do resultado de uma operação anterior. Apresentou o resultado da "última" multiplicação como resposta para o problema. Sabemos que se trata da última multiplicação feita por ele, pois o resultado de cada operação realizada deu origem a um dos elementos da próxima operação, isto é, o resultado da primeira multiplicação deu origem ao dividendo da divisão, o resultado da divisão deu origem a um dos fatores da segunda multiplicação, e o registro do resultado da segunda multiplicação foi tomado como um dos fatores da terceira multiplicação.

O décimo agrupamento (**G10**) é formado pela produção escrita na qual o aluno utilizou uma fórmula para operacionalizar sua estratégia. Nela, o aluno utilizou uma fórmula relacionada a uma medida de comprimento e substituiu o valor da variável por um dos dados numéricos do enunciado da questão. Apresentou o resultado da aplicação da fórmula como resposta para o problema.

No décimo primeiro agrupamento (**G11**), está a produção escrita na qual uma fórmula, divisões e um tipo de cálculo proporcional foram utilizados para operacionalizar a estratégia de resolução do aluno. Nela, o aluno utilizou uma fórmula relacionada a uma medida de comprimento, substituiu o valor da variável dependente por um dos dados numéricos fornecidos na questão e encontrou um valor para "a variável independente". Com esse valor, estabeleceu um tipo de cálculo proporcional com outros dados numéricos da questão e apresentou o resultado desse cálculo como resposta para o problema. As divisões foram realizadas pelo "método curto" e parece que foram utilizadas como cálculos auxiliares para a aplicação da fórmula e o cálculo proporcional.

O décimo segundo agrupamento (**G12**) é formado pela produção escrita na qual o aluno utilizou uma regra de três, uma divisão e uma multiplicação para operacionalizar sua estratégia. O aluno montou e resolveu corretamente todas as operações, utilizando o algoritmo usual da regra de três e da multiplicação e o "método curto" para a divisão, e apresentou o resultado da multiplicação como resposta para o problema. Parece que esse aluno realizou os procedimentos P2 e P5, sugerindo que sua estratégia de resolução para o problema possa ter sido E1D1+E2D1.

O décimo terceiro agrupamento (**G13**) é formado por duas (2) produções escritas. Nelas, os alunos utilizaram uma regra de três e uma divisão para operacionalizar a estratégia de resolução. Em uma delas, o aluno montou e resolveu corretamente as operações, utilizando o algoritmo usual da regra de três e da divisão, e apresentou o resultado da divisão como resposta para o problema. A divisão parece ter sido utilizada como auxílio para a regra de três, porém o aluno não "voltou" à regra de três, já indicando a resposta por meio de um círculo ao redor do resultado da divisão. Na outra produção escrita desse agrupamento, o aluno montou e resolveu a divisão em forma de fração e montou e resolveu a regra de três, utilizando o algoritmo usual dessa regra. Apresentou o resultado da regra de três como resposta para o problema. Parece que esse aluno realizou os procedimentos P1 e P4, sugerindo que sua estratégia de resolução para o problema possa ter sido E1D1+E2D1.

O décimo quarto agrupamento (**G14**) é formado pela produção escrita na qual o aluno utilizou uma adição, uma subtração e algum cálculo comparativo para operacionalizar sua estratégia. Nela, o aluno indica a resolução de uma adição, diz que o resultado dela "passou" e, então, diz que diminuiu a quantidade de $uu2$, resultando no comprimento total. Apresenta como resposta um valor que não aparece em sua resolução.

No décimo quinto agrupamento (**G15**), está a produção escrita em que uma adição e um cálculo proporcional foram utilizados para operacionalizar a estratégia escolhida pelo aluno. Nela, o aluno monta e resolve corretamente uma adição, utilizando o algoritmo usual dessa operação, e indica o resultado como sendo a quantidade de $u1$ Parece que esse aluno realizou os procedimentos P3 e P6, sugerindo que sua estratégia de resolução para o problema possa ter sido E1D1+E2D1. Provavelmente, quando realizou o procedimento P3, não levou em consideração a diferença entre metros e centímetros, resultando em uma quantidade de $u1$ equivocada.

O décimo sexto agrupamento (**G16**) é formado pela produção escrita do aluno que utilizou uma multiplicação e um cálculo proporcional para operacionalizar sua estratégia. Nela, o aluno monta e resolve corretamente uma multiplicação, utilizando o algoritmo usual dessa operação, porém não apresenta nem o resultado da operação nem um dos fatores como resposta para o problema. Parece que esse aluno realizou os procedimentos P12 e P6, sugerindo que sua estratégia de resolução para o problema possa ter sido

E4D1+E2D1. Provavelmente, quando realizou o procedimento, P12 não levou em consideração a diferença entre metros e centímetros, resultando em uma quantidade de $u1$ equivocada.

O décimo sétimo agrupamento (**G17**) é formado pela produção escrita na qual o aluno utilizou divisão, multiplicação e cálculo proporcional para operacionalizar sua estratégia. Nela, o aluno resolveu incorretamente uma divisão, utilizando o "método curto da divisão", indicou corretamente uma divisão e uma multiplicação e estabeleceu algum tipo de cálculo proporcional entre 6, 12, 18 e 5, 10, 15. Apresentou, como resposta para o problema, o resultado da divisão que resolveu incorretamente.

No décimo oitavo agrupamento (**G18**), está a produção escrita do aluno que não conseguimos decifrar/compreender.

O décimo nono agrupamento (**G19**) é formado por quatorze (14) produções escritas. Nelas, os alunos apenas apresentaram uma resposta para o problema, não registrando os procedimentos que escolheram para operacionalizar a estratégia escolhida. Nenhuma delas correspondia a uma resposta correta.

Mesmo sendo considerado um item situado em um contexto pessoal, ou seja, do tipo relacionado a atividades "cotidianas dos estudantes e, por isso, as mais próximas deles", 62% dos alunos não apresentaram indícios de resolução para esse item, e, portanto, podemos considerar que ele não foi de fato acessível para a maioria dos alunos e, provavelmente, não diz respeito a "atividades cotidianas" da maioria desses estudantes.

Temos que, das quarenta e uma (41) produções escritas apresentadas nesse item, vinte e sete (27) apresentaram registro de pelo menos uma operação para desenvolver a estratégia escolhida. As operações utilizadas foram: adição, subtração, divisão, multiplicação, regra de três, aplicação de uma fórmula, cálculo proporcional e cálculo comparativo. De todas as operações realizadas, apenas uma divisão e uma multiplicação foram resolvidas incorretamente pelo mesmo aluno.

Em nove (9), dessas vinte e sete (27) produções, foi possível relacionar os registros apresentados pelos alunos com procedimentos apresentados no quadro 4, podendo até inferir sobre algumas estratégias de resolução escolhidas pelos alunos. As estratégias inferidas foram:

Quadro 5 – Estratégias inferidas a partir das resoluções do item Q1-3.3.

Estratégia inferida	Procedimentos
E1D1+E2D1	P2 e P4
	P2 e P5
	P1 e P4
	P3 e P6
E2D3	P9
E2D1	P4
E4D1+ E2D1	P6 e P12
E4D1+E1D1+E2D1	P3, P6 e P12
E4D1+E2D3	P9 e P12

A estratégia E1D1+E2D1 parece ter sido escolhida por quatro alunos, sendo que cada um deles escolheu procedimentos diferentes para operacionalizá-la.

Quatro desses alunos que escolheram estratégias consideradas corretas para abordarem o problema apresentaram erros em algum dos procedimentos realizados para operacionalizar a estratégia.

Notamos que nem sempre os alunos registram todos os procedimentos que realizaram. Por exemplo, o aluno que realizou a estratégia E2D1 apresentou apenas indícios do procedimento P4, porém, para realizar esse procedimento, era necessária "a quantidade de $u1$" , ou seja, ele teve que realizar algum procedimento para encontrar essa quantidade (provavelmente P1, P2 ou P3), mas não o registrou.

5.2 QUESTÃO 2 (Q2)

A questão *Q2* é apresentada por um enunciado composto por um texto informativo e dois gráficos (*gráfico1 e gráfico2*) e contém três itens (Q2-1.3, Q2-2.3 e Q2-3.3), sendo que apenas o item *Q2-1.3* está classificado como sendo da ideia estruturadora de Mudança e Relações.

5.2.1 Questão Q2 – Item 1 (Q2-1.3)

O *item1 da Questão2* está classificado como situado em um contexto científico, e sua resolução requer a aplicação de processos matemáticos considerados do agrupamento de reprodução (FRANÇA, 2007) e pede para os alunos esboçarem um curva dada do *gráfico2 no gráfico1*, não sendo necessário traçar todos os pontos, apenas os mais importantes para determinar a posição da curva no gráfico.

Para resolver corretamente esse item, os alunos deveriam identificar a curva que deve ser reproduzida, identificar pontos nessa curva que influenciam mais fortemente o seu traçado, marcar esses pontos no *gráfico1* (atentando para o fato de que a escala no gráfico1 é diferente da escala do *gráfico2*), esboçar a curva passando pelos pontos marcados, mantendo similaridade no desenho entre a curva e sua reprodução.

A ideia de *Mudança e Relações* está relacionada com a percepção de mudanças no desenho da curva em relação às diferentes escalas. A relação das coordenadas é também importante aqui, pois, para traçar o esboço, é preciso relacionar os pontos mais marcantes com seus valores no eixo das ordenadas e das abscissas.

Dos cento e onze (111) alunos que receberam um caderno de prova que continha essa questão, 55,9% (62alunos) não apresentaram registro algum de resolução; 9% (10 alunos), uma resolução correta; e 35,1% (39 alunos) apresentaram uma resolução considerada incorreta, sendo que, destes, cinco receberam crédito parcial.

Alguns alunos, ao invés de esboçarem a curva no *gráfico1* da questão, esboçaram a curva no espaço abaixo do *item1*, que, nas provas escritas dadas nas escolas, é geralmente entendido como espaço para a resolução da questão proposta. No entanto, nessa prova do PISA, o espaço existente no item não tinha essa finalidade, já que o esboço deveria ser feito no próprio gráfico fornecido pelo enunciado, e, com isso, ele pode ter sido um distrator[53] para os alunos, pois sua existência pode sugerir que algo deveria ser feito ali. Dessa forma, os alunos que esboçaram a curva nesse espaço, para responder corretamente ao item, deveriam esboçar os eixos das ordenadas e das abscissas, traçar uma curva similar à curva pedida e indicar de alguma forma que mantiveram algumas das coordenadas da curva.

Consideramos tanto as respostas apresentadas no gráfico1 como as apresentadas após o item1. Agrupamos, então, todas as produções escritas desse item, primeiramente, pelo “lugar” onde os alunos esboçaram a curva e, posteriormente, levando em

---

[53] Termo utilizado em avaliação para designar algo equivocado, porém plausível e que chama muito a atenção do aluno.

conta características dos registros que os alunos fizeram. Apresentamos, a seguir, um quadro referente a esse agrupamento.

Quadro 6 – Distribuição dos procedimentos utilizados no item Q2-1.3 pelo lugar no qual a curva foi esboçada

<table>
<tr><th>Agrupamento</th><th colspan="3">Procedimentos</th><th>Quantidade</th></tr>
<tr><td rowspan="8">G1 - Faz o esboço da curva abaixo do item1</td><td colspan="2" rowspan="2">S1 - Não esboça os eixos</td><td>Desenho da curva similar ao da curva pedida</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Desenho da curva não similar ao da curva pedida</td><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="6">S2 - Esboça os eixos</td><td rowspan="2">Valores apenas no eixo das ordenadas</td><td>Desenho da curva similar ao da curva pedida</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Desenho da curva não similar ao da curva pedida</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Valores para os dois eixos</td><td>Desenho da curva similar ao da curva pedida</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Desenho da curva não similar ao da curva pedida</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Não coloca valores nos eixos</td><td>Desenho da curva similar ao da curva pedida</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Desenho da curva não similar ao da curva pedida</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">G2 - Faz o esboço da curva no gráfico1</td><td colspan="3">Desenho da curva similar ao da curva pedida</td><td>11</td></tr>
<tr><td colspan="3">Desenho da curva não similar ao da curva pedida</td><td>6</td></tr>
<tr><td>G3 - Não esboça curva alguma</td><td colspan="3">Apenas apresenta uma resposta</td><td>5</td></tr>
</table>

No primeiro agrupamento (**G1**), estão as vinte e sete (27) produções escritas, distribuídas em dois subgrupos, **S1** e **S2**, nas quais os alunos fazem o esboço da curva abaixo do *item1*. Uma inferência para terem esboçado a curva nesse espaço, e não no *gráfico1*, é simplesmente a existência dele, sugerindo que algo (a resolução do problema) deveria ser feito nesse espaço. Espaços "em branco" após uma questão ou um problema normalmente são destinados e entendidos como locais para elaborar uma resolução e apresentar uma resposta.

O primeiro subgrupo de G1 (**S1**) é constituído por quinze (15) produções escritas. Nelas, os alunos esboçaram uma curva, porém não esboçaram nem o eixo das abscissas nem o eixo das ordenadas, ou seja, registraram apenas o desenho de uma curva "solta". Em apenas oito dessas produções escritas, os alunos esboçaram uma curva com o desenho similar ao da curva pedida no enunciado.

O segundo subgrupo de G1 (**S2**) é formado por doze (12) produções escritas. Nelas, os alunos esboçam os eixos das abscissas e das ordenadas. Em sete dessas produções, os alunos apenas colocaram valores no eixo das ordenadas, não sendo possível identificar se as coordenadas de alguns pontos da curva foram mantidas. Porém, dessas sete, identificamos cinco esboços de curvas que possuíam o desenho similar ao desenho da curva pedida. Em outras três produções desse subgrupo, os alunos colocaram valores tanto para o eixo das ordenadas como para o das abscissas, sendo que:

- em duas delas, os alunos representaram nos eixos os valores de três pontos. Destes, apenas dois pontos estavam de acordo com a curva pedida e, em apenas uma dessas produções, o desenho da curva é similar a ela;
- em uma delas, as coordenadas de um ponto estão de acordo com a curva pedida e o desenho da curva é similar a ela.

Em outras duas produções escritas, os alunos não colocaram valores nos eixos, o que não tornou possível identificar se coordenadas de pontos foram mantidas, mas, em uma delas, o desenho esboçado é similar à curva pedida e, na outra, não.

No segundo agrupamento (**G2**), estão as dezessete (17) produções escritas, nas quais os alunos fazem o esboço da curva no gráfico1. Foi possível identificar, nessas produções, onze curvas similares à curva pedida e, portanto, seis curvas não similares.

Em duas das onze produções escritas nas quais o desenho da curva é similar ao da curva pedida, os alunos apenas reproduziram a curva no gráfico1, sem levarem em consideração a diferença de escala entre os dois gráficos, uma vez que a escala do gráfico em que a curva pedida está desenhada é de "100 em 100", e o gráfico no qual ela deve ser esboçada é de "200 em 200".

Em três das seis produções escritas nas quais o desenho da curva não é similar ao da curva pedida, os alunos marcaram alguns pontos corretamente, porém não tiveram o cuidado de manter o desenho da curva entre os pontos marcados. Parece que esses alunos deram mais importância em marcar os pontos nos quais a curva deveria passar do que em manter o "formato" da curva em si. Nas outras três produções escritas, os alunos traçaram um arco começando perto do zero e terminando na última linha da esquerda do gráfico.

O terceiro agrupamento (**G3**) é formado por cinco (5) produções escritas. Nelas, os alunos não apresentam esboço algum, apenas uma resposta para o problema, por exemplo:

- “A posição das curva [sic] ficaram no sentido horário.”
- “Não tem pontos que ele cai e ele almenta [sic].”
- “800 – 1000 – 1200 – 1400”.

Temos que mais da metade dos alunos (62 alunos, o que corresponde a 55,9%) sequer iniciaram uma formulação de respostas para o problema, e entre aqueles que apresentaram uma resolução (49 alunos), apenas 34,7% (17 alunos) cumpriram a instrução de que o esboço deveria ser feito no gráfico1 (15,3% do total).

A informação de que a resposta poderia ser dada no próprio gráfico não foi apresentada de forma suficientemente clara e, além disso, o espaço “em branco” após o item1 pode ter funcionado como um distrator, uma vez que a maioria dos alunos utilizou esse espaço para registrar a resolução ou a resposta para o problema e isso pode ter influenciado o alto índice de respostas incorretas. O índice de respostas correta foi bem maior no agrupamento em que os alunos esboçaram a curva no gráfico1 (nove respostas consideradas corretas (52,9%) e apenas uma (3,7%) do outro agrupamento).

A maioria dos alunos que apresentou uma resolução apresentou como resposta o esboço de uma curva similar à curva pedida (55,1% dos alunos que, pelo menos, tentaram uma formulação de resposta), mostrando que são capazes de reproduzir o traçado de uma curva. Se uma das intenções do item era obter informações sobre a capacidade dos alunos de reproduzirem o desenho de uma curva, podemos dizer que a maioria foi capaz. Quem sabe se não houvesse o espaço abaixo da questão, teriam sido feitas no gráfico1 e o índice de respostas incorretas teria sido menor.

Provavelmente, a maioria dos alunos que esboçou a curva abaixo do item1 não se preocupou em desenhar também os eixos, as escalas e as coordenadas dos pontos, pois a questão pedia apenas “o esboço da curva”, ou seja, não acharam que fosse necessário o esboço “do gráfico todo”. Não levaram em consideração que a questão solicitava apenas a curva, pois ela deveria ser feita no gráfico1, no qual os eixos, as escalas, etc. já estavam prontos.

Uma outra maneira de considerar o “espaço em branco” é tomá-lo como uma outra possibilidade de abordá-lo, não limitando sua resolução a apenas o esboço no gráfico, podendo o aluno ter a opção de resolver onde achasse melhor. No entanto, essa alternativa de resolução se torna mais complexa, uma vez que o aluno precisaria desenhar, além da curva, os eixos e a escala. Responder a questão no “espaço em branco” exigia mais dos alunos do que respondê-la no próprio gráfico. Possivelmente muitos dos alunos (se não todos) não escolheram resolver o problema no “espaço em branco”, e, sim, acreditavam que a solução deveria ser feita lá.

As informações obtidas por meio da análise da produção escrita não permitiram saber se a grande maioria dos alunos que esboçaram a curva no espaço após o item1 não se preocupou em desenhar eixos, escalas e coordenadas porque acharam que o problema pedia apenas a curva, ou se acreditam que o esboço de uma curva que representa a relação entre variáveis faz sentido mesmo sem relacionar os pontos da curva com valores das variáveis. Podemos afirmar, apenas, que a maioria dos alunos sabe “reproduzir” o desenho de uma curva, e acreditamos que, dentre as intenções da questão, essa seja apenas uma das informações que pretendiam obter.

5.3 Questão 3 (Q3)

A Questão3 apresentada é composta por um pequeno texto informativo, uma figura, e dois itens (Q3-1.2 e Q3-2.2).

5.3.1 Questão 3 – Item 1 (Q3-1.2)

O item1 da Questão3 está classificado como situado em um contexto científico e sua resolução requer a aplicação de processos matemáticos considerados do agrupamento de reprodução (FRANÇA, 2007). Diz respeito a uma maneira de calcular uma medida de temperatura dada em graus Fahrenheit.

Para resolver corretamente a questão, os alunos deveriam interpretar o texto informativo, que contém uma fórmula, compreender o que estava sendo pedido no item1, retirar dele e do texto informativo os números a serem utilizados para efetuar a adição (sem reserva) presente na fórmula e apresentar o resultado dessa operação como resposta ao problema.

O enunciado contém informações explícitas, inclusive uma fórmula matemática, para se calcular uma certa temperatura. Para a resolução do problema, deve ser efetuada uma adição que tem como parcelas a freqüência de eventos em um determinado período (informação contida no item1) e uma constante[54] (informação contida no texto informativo).

[54] Escrevemos as informações sobre o enunciado de forma genérica por causa do termo de sigilo exigido pelo INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

A ideia de Mudança e Relações está presente nessa questão por tratar de um fenômeno que relaciona duas grandezas independentes, a partir de manipulações simples de dados obtidos a partir do enunciado do problema.

Dos cento e onze (111) alunos que receberam um caderno de prova que continha essa questão, 31% (34 alunos) não apresentaram registro algum de resolução; 43% (48 alunos) apresentaram uma resolução considerada incorreta; e 26% (29alunos), uma resolução correta.

Agrupamos todas as produções escritas desse item pelo tipo de operações aritméticas registradas e utilizadas pelos alunos para operacionalizar a estratégia escolhida por eles para resolver o problema, independentemente de terem sido desenvolvidas de forma considerada correta ou não. A seguir, apresentamos um quadro referente a esse agrupamento.

Quadro 7 – Distribuição dos procedimentos utilizados no item Q3-1.2 por tipo de operações utilizadas.

Agrupamento	Subgrupos	Procedimento	Quantidade
G1 - Adição	S1G1-	Resolve 17 + 42	12
	S2G1 -	Resolve 14 + 42	2
G2 - Subtração		Resolve 17 - 14	1
G3 - Adição e Subtração		Resolve 17 + 14 e 31 - 42	1
G4 - Adição e Multiplicação		Resolve 17.14 e 238 + 42	1
G5 - Não registra as operações utilizadas		Apenas apresenta uma resposta	60

No primeiro agrupamento (**G1**), estão as quatorze (14) produções escritas, distribuídas em dois subgrupos (S1G1, S2G1), nas quais os alunos utilizaram uma adição para operacionalizar a estratégia que escolheram para resolver o problema. O primeiro subgrupo de G1 (**S1G1**) é constituído por doze (12) produções escritas. Nelas, os alunos resolveram a adição 17 + 42 e indicaram o resultado dessa operação como resposta para o problema. Todos resolveram corretamente a operação, sendo que cinco (5) montaram a operação utilizando o algoritmo usual da adição[55], um (1) montou a operação, porém não colocou o símbolo “+” ao lado das parcelas[56], e seis (6) apenas indicaram a adição[57]. Esses alunos identificaram corretamente a informação quantitativa necessária, a constante que deveria ser adicionada,

[55] Parcelas uma abaixo da outra, respeitando as ordens das “unidades”, “dezenas”, “centenas”...; e símbolo + que representa a operação ao lado das parcelas.
[56] Pelo resultado registrado, inferimos que se tratava de uma adição.
[57] “Apenas indicar uma adição” significa, por exemplo, indicar: $13 + 49 = 62.$

resolveram corretamente uma adição sem reserva que resolvia o problema e responderam corretamente a questão.

O segundo subgrupo de G1 (**S2G1**) é formado por duas (2) produções escritas. Nelas, os alunos resolveram uma adição sem reserva que não resolvia o problema e indicaram o resultado dessa operação como resposta. Mesmo não solucionando o problema, as operações foram resolvidas corretamente, sendo que um (1) dos estudantes montou a operação, porém não colocou o símbolo que indica qual operação foi efetuada[58], e um (1) indicou a adição. Esses alunos compreenderam que a resposta poderia ser calculada por meio de uma adição com duas parcelas, em que uma delas é a constante fornecida pelo texto informativo desse problema, identificaram-na corretamente, porém, ao invés de utilizarem a frequência em que o evento ocorreu como segunda parcela, utilizaram uma outra informação quantitativa dada tanto no texto informativo quanto no item1, resultando em uma resposta incorreta para o problema. Isso pode ter acontecido pela utilização equivocada ou incompleta de uma informação fornecida no texto informativo, sobre como uma das quantidades é calculada. No texto informativo, temos que a temperatura é dada por meio da frequência de um evento em determinado **período de tempo acrescentado a constante** e esses alunos podem ter compreendido que a maneira de calcular a temperatura é dada apenas pela parte destacada da informação.

No segundo agrupamento (**G2**), está a produção escrita em que uma subtração foi utilizada para operacionalizar a estratégia escolhida pelo aluno. Nela, o estudante resolveu corretamente a operação 17 - 14 por meio do algoritmo usual da subtração[59] e indicou o resultado dessa operação como resposta para o problema. Uma possível inferência para a utilização dos números "17" e "14" é que eles são os únicos dados numéricos fornecidos no item1 e, geralmente, o procedimento necessário para resolver corretamente problemas rotineiros (com os quais os alunos estão acostumados a lidar) é constituído por "uma continha com os números do problema". Esse aluno provavelmente tomou o item1 como "o problema", não atentando para as informações dadas no texto informativo, e realizou "uma continha" com "os números" que apareceram no problema que interpretou. Como não levou em conta o texto informativo, resolveu "uma continha", mas não "uma adição" como era requisitado no problema. Com "uma continha", queremos dizer uma conta qualquer (adição, multiplicação, subtração, divisão), mas afirmar que ele resolveu "uma

[58] Pelo resultado registrado, inferimos que se tratava de uma adição.
[59] Subtraendo abaixo do minuendo, respeitando as ordens "unidades", "dezenas", "centenas"..., e símbolo que representa a operação ao lado dos termos.

adição” pode significar que ele compreendeu que o problema envolvia especificamente essa “continha”.

O terceiro agrupamento (**G3**) é formado pela produção escrita do estudante que utilizou uma adição e uma subtração para operacionalizar sua estratégia de resolução. Esse estudante indicou e resolveu as operações 17 + 14 e 31 - -42 corretamente e utilizou o registro do resultado da primeira como minuendo da segunda, ou seja, escreveu “$17 + 14 = 31 - 42 = -11$”. Apresentou o resultado da subtração como resposta para o problema.

No quarto agrupamento (**G4**), a produção escrita mostra que uma adição e uma multiplicação foram utilizadas para operacionalizar a estratégia escolhida. Nela, o estudante resolveu corretamente as operações 17.14 e 238 + 42 sendo que armou as operações de maneira que o registro do produto da primeira fosse uma das parcelas da segunda. Considerando as operações separadamente, montou a adição de maneira usual e montou e efetuou a multiplicação pelo algoritmo conhecido por “cálculo de produtos parciais”[60]. Apresentou o resultado da adição como resposta para o problema. Pode-se inferir que esse aluno compreendeu que a temperatura pedida é calculada por meio de uma adição em que uma das parcelas é a constante fornecida pelo enunciado, porém a outra parcela não foi identificada corretamente, resultando em uma resposta incorreta para o problema.

O quinto agrupamento (**G5**) é constituído por sessenta (60) produções escritas, separadas em vinte e sete (27) diferentes respostas apresentadas. Nelas, os alunos apenas apresentaram uma resposta para o problema, não registrando os procedimentos que escolheram para operacionalizar a estratégia escolhida. Em apenas dezessete (17) produções desse agrupamento, a resposta apresentada estava correta. As respostas apresentadas estão contidas em um intervalo muito grande de variação, sendo que três alunos apresentaram respostas que pareciam, pelo menos à primeira vista, não ter relação com temperatura. Apresentamos, a seguir, exemplos dessas respostas. Um deles deu como resposta uma porcentagem, e acreditamos que isso possa ter ocorrido por confundir os símbolos utilizados para representar graus $(^\circ)$ e porcentagem (%). Outro respondeu “quente”, uma resposta “vaga”, porém verdadeira, pois a medida correta indica uma temperatura realmente “quente”,

[60] Usando a decomposição e a propriedade distributiva. Exemplo: $25.16 = (25.6) + (25.10) = 400$

	d	u	
	2	5	
×	1	6	
1	5	0	← 25 × 6
+ 2	5	0	← 25 x 10
4	0	0	

levando em consideração o contexto do problema. Algumas das respostas apresentadas em três subgrupos de G5 (S1G5, S3G5 e S9G5) correspondem a respostas apresentadas, também, em outros agrupamentos, mas, mesmo apresentando respostas semelhantes a alunos que registraram as operações que realizaram, não podemos afirmar que esses alunos lidaram com o problema de forma análoga aos outros.

Levando em consideração o contexto do problema, algumas respostas são absurdas, pois indicam temperaturas muito mais elevadas do que a máxima possível na situação proposta. Isso pode ter acontecido por não estarem acostumados a lidar com temperaturas medidas em graus Fahrenheit ou por não terem feito uma relação de correspondência entre suas respostas em Fahrenheit e Celsius. Talvez, se a medida de temperatura nesse problema, com esse contexto, fosse dada em graus Celsius, os alunos não apresentassem esse tipo de respostas.

Consideramos que, para o aluno resolver corretamente esse item, era necessário que ele realizasse pelo menos cinco procedimentos:

1. retirar corretamente os dados – o que depende da interpretação que o aluno realizou do problema;
2. saber o que fazer com os dados – depende de o aluno conhecer e identificar o conteúdo matemático necessário para “montar” uma estratégia que resolva o problema;
3. saber como fazer o que escolheu fazer com os dados – depende de o aluno saber como utilizar o conteúdo matemático que reconheceu necessário para desenvolver os procedimentos para realizar a estratégia escolhida;
4. apresentar uma resposta correta – depende de o aluno identificar, nos procedimentos desenvolvidos para realizar a estratégia escolhida, qual a resposta do problema.

Temos que, dos 17 alunos que apresentaram registros de como operacionalizaram suas estratégias, todos realizaram corretamente as operações aritméticas que se propuseram a efetuar e 16 mostraram ter domínio do conteúdo matemático (saber como fazer uma adição) necessário para responder corretamente a questão. Porém, desses 16, apenas 12 retiraram corretamente os dados do enunciado e mostraram saber o que fazer com eles. Podemos, portanto, inferir que a dificuldade maior apresentada pelos alunos foi na interpretação do problema e não no conhecimento ou na utilização do instrumental matemático necessário.

5.3.2 Questão3 – Item 2 (Q3- 2.2)

Este item está classificado como situado em um contexto científico e sua resolução requer a aplicação de processos matemáticos considerados do agrupamento de reflexão (FRANÇA, 2007). Diz respeito a uma maneira de ajustar uma fórmula para que ela se adapte a uma nova situação.

Para resolver corretamente a questão, os alunos deveriam compreender a fórmula dada no texto informativo, identificar qual componente dela precisa ser modificada de modo a continuar válida para a nova situação, modificá-la corretamente e apresentar a fórmula modificada como resposta para o problema. Nesse caso, os alunos deveriam compreender uma fórmula de *T* em função de *N* do tipo "$T = N + C$" (*T*: temperatura, *N*: frequência do evento, *C*: constante), identificar a variável independente (*N*) como sendo a componente que necessita de ajustes, modificá-la de maneira a obter uma fórmula de *T* em função de *N* do tipo "$T = \frac{t1}{t2}N + C$" ou "$T = \frac{N}{\frac{t2}{t1}} + C$", sendo "$t1$" o período do evento na primeira situação e "$t2$" o período do evento na nova situação (ambos em segundos). De uma situação para a outra, o que muda é justamente o período considerado para a contagem da frequência do evento.

A ideia de Mudança e Relações está presente nessa questão por tratar da reflexão sobre como uma modificação do valor de uma variável influencia um modelo matemático (neste caso, uma fórmula) criado para o estudo de um fenômeno, quais relações são mantidas, quais devem ser modificadas e como devem ser modificadas para que esse modelo se adapte para a nova situação.

Dos cento e onze (111) alunos que receberam um caderno de prova que continha essa questão, 55% (61 alunos) não apresentaram registro algum de resolução e 45% (50 alunos) apresentaram uma resolução considerada incorreta.

Agrupamos todas as produções escritas desse item pelo tipo de operações aritméticas registradas pelos alunos, utilizadas para operacionalizar a estratégia escolhida por eles para resolver o problema, independentemente de terem sido desenvolvidas de forma considerada correta ou não. A seguir, apresentamos um quadro referente a esse agrupamento.

Quadro 8 – Distribuição dos procedimentos utilizados no item Q3-2.2 por tipo de operações utilizadas.

Agrupamento	Tipo de resposta	Quantidade
G1 - Adição	S1 - Apresenta como resposta um valor específico para *T*	2
	S2 - Apresenta como resposta um valor específico para *N*	1
G2 - Subtração	Apresenta como resposta um valor específico para *T*	1
G3 - Divisão	Apresenta como resposta uma fórmula de *T* em função de *N*	1
G4 - Adição e divisão	Apresenta como resposta um valor específico para *T*	1
G5 - Multiplicação e divisão	Apresenta como resposta uma fórmula de *T* em função de *N*	1
G6 - Regra de três e divisão	Apresenta como resposta uma fórmula de *T* em função de *N*	2
G7 - Regra de três e subtração	Apresenta como resposta uma fórmula de *T* em função de *N*	1
G8 - Regra de três, multiplicação e divisão	Apresenta como resposta uma fórmula de *T* em função de *N*	2
G9 - Regra de três, multiplicação, divisão, adição e subtração	Apresenta como resposta uma fórmula de *T* em função de *N*	1
G10 - Multiplicação, divisão e estabelece algum tipo de cálculo proporcional	Apresenta como resposta um valor específico para *T* e para *N*	1
G11 - Estabelece algum tipo de cálculo proporcional e adição	Apresenta como resposta uma fórmula de T em função de *N*	1
G12 - Estabelece algum tipo de cálculo proporcional	Apresenta como resposta um valor específico para *T*	1
G13 - Apresenta apenas uma resposta	S1 - Apresenta como resposta um valor específico para *T*	10
	S2 - Apresenta como resposta um valor específico para *T* e para *N*	5
	S3 - Apresenta como resposta uma fórmula de *T* em função de *N*	13
	S4 - Apresenta como resposta uma fórmula de *T* em função de *N* e de *F*	2
	S5 - Apresenta como resposta uma fórmula de *T* em função de *N* e de *T*	3
	S6 - Não apresenta um valor específico nem uma fórmula como resposta.	1

O primeiro agrupamento (**G1**) é formado por três (3)produções escritas, distribuídas em dois subgrupos (S1 e S2), nas quais os alunos utilizaram **adição** para operacionalizar a estratégia escolhida para resolver o problema.

O primeiro subgrupo de G1 (**S1**) é formado por duas produções escritas nas quais os alunos apresentaram como resposta um valor específico para *T*. Nelas, os alunos indicaram corretamente a adição 60 + 42 e apresentaram o resultado como resposta para o problema. Um desses alunos parece ter entendido primeiramente *T* como tempo, e não como temperatura, pois, antes de realizar a adição, indicou o valor de *T* como sendo $1min$ (60s). Porém, posteriormente, apresentou como resposta *T* = 102, sem perceber que o "mesmo *T*" estava recebendo dois valores distintos, ou que utilizou o "mesmo *T*" para tratar de duas grandezas distintas. Pelos procedimentos apresentados por esses alunos, parece que entenderam que a fórmula para o cálculo da temperatura, nesse item2, é dada pelo tempo adicionado a 42. A resposta apresentada por um desses alunos, para o item1 dessa questão, pode fortalecer essa inferência de que ele tenha compreendido a fórmula dessa maneira incorreta (no item1, ele apresentou uma resposta que condiz com essa interpretação equivocada da fórmula), porém a resposta apresentada pelo outro aluno não corrobora a inferência sobre sua compreensão da fórmula, pois, no item1, ele apresenta uma resposta correta, como se tivesse compreendido corretamente a fórmula. Os dois identificaram corretamente a componente da fórmula que precisava ser modificada para se adaptar à nova situação, porém não a modificaram corretamente.

O segundo subgrupo de G1 (**S2**) é formado pela produção escrita na qual o aluno apresentou como resposta um valor específico para *N*. Nela, primeiramente, o aluno indicou o valor de *N*como sendo "*T*+42" e substituiu o valor de *T* por 1 e, depois, por 60s, sugerindo que estava considerando *T* como tempo. Indicou corretamente a adição 60+42 e apresentou o resultado como resposta para o problema. Parece que esse aluno compreendeu que ele deveria escrever uma fórmula para *T*, porém utilizando "*N* no lugar de *T*", e não "*T* em função de *N*". Isso pode ter ocorrido por uma interpretação equivocada do enunciado, o qual pedia "uma fórmula para *T*, temperatura em Fahrenheit, usando *N*...". Esse aluno identificou corretamente a componente da fórmula que deveria ser modificada, porém não a modificou corretamente.

O segundo agrupamento (**G2**) é formado pela produção escrita na qual uma subtração foi utilizada para operacionalizar a estratégia de resolução do aluno. Nela, o aluno indicou valores para *F* (inferimos que se trate de graus Fahrenheit) e *T* como tempo e não como temperatura, armou e resolveu corretamente a subtração do valor indicado para *T* do valor indicado para *F*, pelo algoritmo usual dessa operação, e apresentou o resultado dessa operação como resposta para o problema, indicando que ela se referia à temperatura (colocou o símbolo de "graus" ao lado da resposta). Esse aluno parece ter apenas manipulado os dados numéricos fornecidos no texto informativo da questão.

No terceiro agrupamento (**G3**), está a produção escrita na qual uma divisão foi utilizada para operacionalizar a estratégia de resolução. Nela, o aluno apresentou como resposta uma fórmula de *T* em função de *N* do tipo $T = k.N + C$, sendo *K* o resultado da divisão 60:14 indicada corretamente pelo aluno e *C* a constante da fórmula dada. Esse aluno identificou corretamente a componente que deveria ser modificada, apresentou uma fórmula de *T* em função de *N* como resposta, porém modificou incorretamente a componente, mesmo tendo realizado uma operação que poderia ser utilizada para modificá-la adequadamente (a operação estaria certa se, ao invés de indicar $k.N$ ele escrevesse N/k).

O quarto agrupamento (**G4**) é formado pela produção escrita do aluno que utilizou adição e divisão para operacionalizar sua estratégia de resolução. Esse aluno armou e resolveu corretamente duas adições, cada uma com quatro parcelas iguais, armou e resolveu incorretamente uma divisão pelo processo curto e apresentou como resposta um valor específico para *T* que parece não ter relação alguma com as operações realizadas. Ele escreveu que "$T = N = 1min = 70$" e circulou "$1min = 70$", o que pode dar a impressão de que queria responder que, em 1min, a temperatura seria $70°$, ou seja, com a nova situação a temperatura seria $70°$.

O quinto agrupamento (**G5**) é formado pela produção escrita na qual multiplicação e divisão foram utilizadas pelo aluno para operacionalizar sua estratégia. Nela, o aluno armou e resolveu corretamente três multiplicações pelo algoritmo usual da multiplicação, e armou e resolveu incorretamente uma divisão pelo processo curto. Dessas quatro operações registradas pelo aluno, apenas uma multiplicação parece ter relação com a resposta apresentada por ele, as outras parecem ter sido apenas manipulações com dados numéricos obtidos no enunciado da questão. Ele resolveu a multiplicação 4.14, obtendo 56, e ao lado da resposta escreveu "+4", dando a impressão que procurava um valor que se aproximasse de 60. Esse aluno apresentou, como resposta, uma fórmula de *T* em função de *N*, do tipo $T = k.N + C$, sendo $k = 14.4$ e $C = 4$. Parece que esse aluno tentou colocar o novo período (60) em função do antigo (14), encontrou o múltiplo do período antigo que mais se aproximava do novo (56) e, como "faltou" 4, compensou adicionando-o na fórmula.

No sexto agrupamento (**G6**), estão duas (2) produções escritas nas quais os alunos utilizaram regra de três e divisão para operacionalizar suas estratégias de resolução. Nelas, os alunos resolveram a regra de três $14 \text{ está para } 42, \text{assim como } 60 \text{ está para } x$ e utilizaram a divisão $2520 : 14$ como cálculo auxiliar para a regra de três. Ambos resolveram a divisão pelo processo curto, porém apenas um deles realizou-o corretamente, implicando apenas um deles ter resolvido corretamente a regra de três. Os dois apresentaram como resposta uma fórmula de *T* em função de *N* do tipo $T = N + C$, sendo *C* o resultado obtido na regra de três. Esses alunos identificaram incorretamente a componente que deveria ser modificada. Parece que eles entenderam que a nova situação modificaria a fórmula de maneira proporcional, ou seja, se em um período de 14s deve-se acrescentar 42, em um período de 60s dever-se-ia acrescentar um valor proporcional.

O sétimo agrupamento (**G7**) é formado pela produção escrita na qual uma regra de três e uma subtração foram utilizadas para operacionalizar a estratégia que o aluno escolheu para resolver o problema. Nela, o aluno armou e resolveu corretamente uma regra de três que relacionava “frequência do evento” e “tempo”/período pelo algoritmo usual dessa operação e indicou corretamente uma subtração entre o valor obtido na regra de três e a resposta que apresentou para o item1 dessa questão. Parece que esse aluno compreendeu o item2 como uma continuação do item1, e não como itens independentes. Como ele encontrou a temperatura no item1 e sabia que a temperatura deveria ser igual, independente da fórmula utilizada, parece que ele procurou criar uma fórmula de *T* em função de *N* que resultaria no mesmo valor encontrado para o item1. A fórmula deveria ser “temperatura em função da frequência do evento”. Então ele, primeiro, calculou a suposta frequência para a situação nova. Considerou a frequência do evento proporcional ao tempo/período e, então, por meio da regra de três, supostamente encontrou a frequência para a nova situação. Como a fórmula precisava ser “*T* em função de *N*” e achou que *T* teria que ter o mesmo valor encontrado no item1, precisou “fazer alguma coisa” com o valor da frequência para que ele “se tornasse” o valor da temperatura, utilizou a subtração “frequência menos temperatura” para isso. Dessa forma, percebeu que o valor da frequência ultrapassava em “*C*” o valor da temperatura e, assim, concluiu sua resposta com a fórmula $T = N - C.$.

O oitavo agrupamento (**G8**) é formado por duas produções escritas nas quais os alunos utilizaram regra de três, multiplicação e divisão para operacionalizar a estratégia que escolheram. Esses alunos armaram e resolveram corretamente a regra de três $14 \text{ está para } 42, \text{assim como } 60 \text{ está para } x$ e apresentaram como resposta uma fórmula de *T* em função de *N* do tipo $T = N + C$, sendo *C* o resultado obtido na regra de três. Esses alunos identificaram incorretamente a componente que deveria ser modificada. Parece que eles entenderam que, se em um período de 14s deve-se acrescentar 42, em um período de 60s dever-se-ia acrescentar um valor proporcional ao acréscimo do tempo. As divisões e as multiplicações efetuadas por esses alunos foram utilizadas como cálculos auxiliares para a resolução da regra de três. Todas as operações foram resolvidas corretamente, sendo que esses alunos utilizaram o registro da resposta da multiplicação 60.40 como dividendo da divisão 2520:14. Um desses alunos resolveu três multiplicações nas quais um dos fatores era o número 14. Provavelmente, ele realizou essas multiplicações como cálculos auxiliares para a divisão 2520:14.

O nono agrupamento (**G9**) é formado pela produção escrita na qual regra de três, adição, subtração, multiplicação e divisão foram utilizadas para operacionalizar a estratégia escolhida pelo aluno. Nela, o aluno armou e resolveu incorretamente uma regra de três que relacionava “frequência do evento” e “tempo” e armou e resolveu corretamente uma subtração entre o valor obtido na regra de três e a resposta que apresentou para o item1 dessa questão. A multiplicação, a divisão e as adições foram utilizadas como cálculos auxiliares para a resolução da regra de três. Esse aluno armou e resolveu corretamente a multiplicação pelo algoritmo usual dessa operação e utilizou o registro do resultado como dividendo para a divisão, que armou e resolveu incorretamente pelo processo curto da divisão. As adições parecem ter sido utilizadas como cálculos auxiliares para a divisão, pois o aluno resolveu sucessivas adições nas quais o registro do resultado de uma das operações era um dos fatores da próxima operação, e a outra parcela sempre foi o valor do divisor da divisão que realizou (parecia procurar por um múltiplo do divisor que mais se aproximasse do valor do dividendo). Realizou incorretamente uma das adições, resultando em uma resposta incorreta para a divisão. Esse aluno apresentou como resposta uma fórmula de T em função de N do tipo $T = N + C$, sendo *C* o resultado obtido na subtração entre o resultado da regra de três e a resposta apresentada no item1 dessa questão. Parece que esse aluno elaborou a mesma estratégia de resolução do aluno do agrupamento G7.

O décimo agrupamento (**G10**) é formado pela produção escrita na qual o aluno utilizou uma divisão, uma multiplicação e um cálculo proporcional para operacionalizar sua estratégia de resolução. Nela, o aluno escreve “14, 28, 42”, dando a impressão que realizou a operação “+14” para obter o próximo número ou operações “14.1, 14.2 e 14.3”. Armou e realizou corretamente a divisão 42:14 e a multiplicação 3.60, apresentando como resposta para o problema a resposta obtida na multiplicação com um valor específico para T e para *N*.

No décimo primeiro agrupamento (**G11**), está a produção escrita na qual o aluno fez um cálculo proporcional e uma adição para operacionalizar sua estratégia de resolução. Nela, parece que o aluno estabeleceu corretamente uma relação entre múltiplos de 14 e “valores que, multiplicados por 14 resultam no valor do múltiplo”, e a adição 74+14 foi usada como cálculo auxiliar para encontrar o último múltiplo de 14 registrado pelo aluno. Esse aluno identificou incorretamente a componente que deveria ser adaptada e parece que considerou o tempo da nova situação ($1min$) como sendo 100, e estava procurando pelo múltiplo de 14 mais próximo de 100 quando estabeleceu a relação. Inferimos isso, pois ele apresentou como resposta uma fórmula de *T* em função de N do tipo $T = C - N$, sendo *C* “100 - 2”, ou seja, o valor do múltiplo de 14 mais próximo do suposto tempo da nova situação, escrito em função do novo tempo.

O décimo segundo agrupamento (**G12**) é formado pela produção escrita na qual o aluno realizou um cálculo proporcional para operacionalizar sua estratégia de resolução. Nela, o aluno indicou “$T = N$” e parece ter considerado *T* como tempo e não como temperatura, pois indica seu valor como sendo $1min$. Esse aluno estabeleceu uma relação entre tempo/período e frequência do evento para os múltiplos de 14 (tempo da situação normal) compreendidos entre 14 e o tempo da nova situação (60), considerando que essa relação permanece proporcional, e a frequência dada no item1 dessa questão. Ele não registra como calculou a frequência para 60s, só indica um “5” e, depois, 73, dando a entender que adicionou 5 ao valor da frequência correspondente a 56s (68), resultando em 73, mas não indica como obteve o número 5. Apresenta como resposta um valor específico para *T*, sendo esse o valor da frequência encontrada para o tempo da nova situação.

No décimo terceiro agrupamento (**G13**), estão trinta e três (33) produções escritas, distribuídas em seis subgrupos (S1, S2, S3, S4, S5 e S6), nas quais os alunos apenas apresentaram uma resposta, não registrando as operações que realizaram.

O primeiro subgrupo de G13 (**S1**) é formado por dez (10) produções escritas nas quais os alunos apresentaram como resposta um valor específico para *T*.

Em cinco delas, os alunos indicaram que o valor apresentado como resposta se referia à temperatura. Identificamos cinco respostas diferentes, sendo que, em uma delas, o aluno escreve “$T + N \ =?$”, traça uma linha poligonal fechada em volta e indica como sendo a fórmula. Parece que esse aluno considerou o *T* da fórmula que elaborou como sendo tempo e não temperatura. Essa indicação da maneira como calculou o valor específico para *T* parece coerente com a resposta que apresentou para o item1 dessa questão, pois, além de apresentar a mesma resposta para ambos os itens, ela pode ser considerada (mesmo não apresentando o registro do cálculo) como a soma do valor do tempo com o valor da frequência do evento, levando em consideração a situação do item1.

Em outras três (3) produções escritas desse subgrupo, os alunos indicaram que o valor apresentando como resposta se referia à frequência do evento. Identificamos três respostas diferentes.

Em uma das produções escritas desse subgrupo, o aluno indicou o valor apresentado como resposta como se referindo a tempo e, na outra produção escrita, o aluno apenas apresentou um valor numérico, não indicando a grandeza a que se referia (provavelmente se referia à temperatura, uma vez que o problema pedia uma fórmula para a temperatura).

O segundo subgrupo de G13 (**S2**) é formado por cinco (5) produções escritas nas quais os alunos apresentaram como resposta um valor específico para *T* e para *N*. Identificamos cinco respostas diferentes. Em duas delas, os alunos indicaram a que grandezas as respostas se referiam, sendo que um deles considerou *T* como sendo tempo e o outro, como sendo temperatura.

No terceiro subgrupo de G13 (**S3**), estão treze (13) produções escritas nas quais os alunos apresentaram como resposta uma fórmula de *T* em função de *N*, sendo uma do tipo "$T = k.N + C$", uma do tipo "$T = k.C$", uma do tipo "$T = N_0\ minuto$" e dez do tipo "$T = N + C$". Nessas últimas, identificamos cinco respostas diferentes. Um das respostas (a com maior frequência nesse subgrupo) corresponde à mesma fórmula dada no enunciado (só que os alunos a escreveram em linguagem matemática).

O quarto subgrupo de G13 (**S4**) é formado por duas produções escritas nas quais os alunos apresentaram como resposta uma fórmula de *T* em função de *N* e de *F*. Os dois alunos apresentaram a mesma resposta, uma fórmula do tipo $T = N + F$..

O quinto subgrupo de G13 (**S5**) é formado por três (3) produções escritas nas quais os alunos apresentaram como resposta uma fórmula de *T* em função de *N* e de *T*. Em duas delas, os alunos utilizaram um "t" minúsculo na fórmula que apresentaram. Pode ser que tenham feito uma diferenciação entre "*T*", para temperatura, e "t", para tempo.

O sexto subgrupo de G13 (**S6**) é formado pela produção escrita na qual o aluno não apresenta um valor específico nem uma fórmula como resposta. Ele apresentou uma resposta do tipo "em um minuto será mais fácil fazer os cálculos...", ou seja, uma justificativa para o porquê de se tentar adaptar a fórmula antiga para a nova situação.

Das cinquenta (50) produções escritas desse item, temos que:

- em vinte e duas (22) delas, os alunos apresentaram um valor específico como resposta, sendo que em seis (6) delas os alunos apresentaram valores específicos para T e para N, em quinze (15) apenas para T, e em uma (1) apenas para N;
- em vinte e sete (27) delas, os alunos apresentaram como resposta um fórmula de T, sendo vinte e duas (22) delas em função de N, duas (2) em função de N e de F, e três (3) em função de N e de T;
- em uma (1) delas, o aluno apresentou como resposta uma justificativa para o porquê de se tentar adaptar a fórmula antiga para a nova situação.

Foi possível identificar dez (10) tipos de fórmulas de T diferentes apresentadas pelos alunos como resposta para o problema. A seguir, apresentaremos um quadro com tais respostas.

Quadro 9 – Diferentes tipos de fórmulas apresentadas como resposta para o item Q3.2-2.

Fórmula de *T*	**Tipo**	**Quantidade**
Em função de *N*	$T = N + C$	14
	$T = k.N + C$	3
	$T = N - C$	2
	$T = C - N$	1
	$T = k.C$	1
	$T = N_0$	1
Em função de *N* e de *F*	$T = N + F$	2
Em função de *N* e de *T*	$T = C.\frac{N}{T}$	1
	$T = T + 51$	1
	$T = N - 13 + T$	1

A maioria desses alunos apresentou uma fórmula de T em função de N, como foi pedido no problema, porém nenhum deles apresentou uma que contivesse a modificação correta. Três alunos apresentaram uma fórmula do mesmo tipo da fórmula corretamente modificada, ou seja, "$T = k.N + C$", se considerarmos k como sendo $\frac{t1}{t2}$, porém os valores apresentados por eles para k não correspondem a essa razão.

Notamos que vários alunos confundiram a que a grandeza *T* estava se referindo, ora tomavam-na como tempo, ora como temperatura. Isso pode ter acontecido com os alunos que escreveram funções de *T* em função de *T* (considerando tempo e temperatura) e em outras produções.

As operações foram utilizadas tanto para calcular valores específicos para as grandezas envolvidas (*T*,*N*), quanto para calcular valores das constantes que faziam parte das fórmulas (*C*,*K*)

O alto índice de alunos que, ao invés de apresentarem uma modificação na fórmula dada, calcularam um valor específico para alguma das variáveis envolvidas na situação pode ter ocorrido porque a maioria dos estudantes está acostumada com a ideia de que "problemas" precisam ter contas e respostas de problemas tem que ser "números". Estão acostumados a calcular e não a pensar sobre as relações existentes na situação.

5.4 QUESTÃO 4 (Q4)

A Questão4 é apresentada por um enunciado e quatro alternativas. Está classificada como situada em um contexto científico, sua resolução requer a aplicação de processos matemáticos considerados do agrupamento de reflexão (FRANÇA, 2007) e diz respeito a uma maneira de ajustar uma função de modo que ela se adapte a uma nova situação indicada no problema.

O enunciado contém uma fórmula e informações sobre ela: é formada pela soma de duas componentes independentes (sendo explicado o que cada uma significa e como calculá-las). Além disso, contém a informação de que, para a nova situação, é necessário fazer ajustes na fórmula dada, explicitando um motivo pelo qual não se pode usá-la sem ajustes, mas não informando como isso influencia a função dada.

Para resolver corretamente a questão, os alunos deveriam compreender a função dada no enunciado do problema, refletir sobre a influência da nova situação sobre a função e sobre cada uma das componentes, identificar em qual das componentes se devem fazer ajustes para que a função dada se adapte à nova situação, modificar corretamente essa componente e assinalar a alternativa correspondente a esse ajuste. Nesse caso, deveriam identificar a componente2 como sendo a que necessita ajustes, e o ajuste que deveria ser feito é o aumento do seu valor.

A ideia de Mudança e Relações está presente nesse item por se tratar da reflexão sobre como uma mudança no estado inicial de uma situação influencia o fenômeno nela inserido, quais relações são mantidas e quais devem ser modificadas para a mudança.

Dos cento e sete (107) alunos que receberam um caderno de prova que continha essa questão, 12% (13 alunos) não assinalaram alternativa alguma; 57% (61 alunos) assinalaram uma alternativa considerada incorreta; e 31% (33 alunos), um alternativa considerada correta.

Agrupamos todas as provas desse item pela alternativa assinalada, levando em consideração a que componente da fórmula ela se referia, independentemente de terem sido consideradas corretas ou não. A seguir, apresentamos um quadro referente a esse agrupamento.

Quadro 10 – Distribuição dos procedimentos utilizados no item Q4-1.1 pela alternativa assinalada.

Agrupamento	Procedimento	Quantidade
G1 - Componente1	Assinala a alternativa A	10
	Assinala a alternativa B	23
G2 - Componente2	Assinala a alternativa C	28
	Assinala a alternativa D	33
G3 - Componentes1 e 2	Assinala as alternativas B e D	1

O primeiro agrupamento (G1) é formado por trinta e três (33) provas, distribuídas em dois subgrupos, nas quais os alunos identificaram incorretamente a componente1 da função como sendo aquela que necessita de ajustes para se adaptar à nova situação problema. No **primeiro subgrupo de G1**, estão dez (10) provas nas quais os alunos assinalaram a alternativa A, resposta que corresponde a uma diminuição da componente1. O **segundo subgrupo de G1** é formado por vinte e três (23) provas nas quais os alunos apresentaram como resposta a alternativa B, que corresponde a um aumento da componente1. Possivelmente, os alunos desse subgrupo perceberam que, com a nova situação, o valor da função aumentaria, porém não identificaram corretamente que componente influenciava essa mudança.

No segundo agrupamento (G2), estão as 51 provas, distribuídas em dois subgrupos, nas quais os alunos identificaram a componente2 da função como sendo aquela que necessita de ajustes para se adaptar a nova situação problema. Esses alunos identificaram corretamente a componente que é influenciada pela nova situação, porém apenas os trinta e três (33) alunos do subgrupo2 que apresentaram a alternativa D como resposta para o problema (alternativa que sugeria aumento na componente2) ajustaram corretamente a componente de modo que ela modificasse a função para que, assim, se adaptasse à nova situação. Os outros vinte e oito (28) alunos que compõem o subgrupo1 de G2 assinalaram a alternativa C, que sugeria diminuição na componente2.

O terceiro agrupamento (G3) é formado pela prova em que o aluno identificou tanto a componente1 como a componente2 como necessitando de ajustes para se adequar à nova situação. Esse aluno assinalou as alternativas em que as componentes são aumentadas (alternativa B corresponde ao aumento da componente1 e alternativa D, ao aumento da componente2). Podemos inferir que esse aluno percebeu que, com a nova situação, a medida dada pela fórmula deveria ser maior, porém não percebeu que a componente1 não recebe influência da nova situação.

Levando em consideração os procedimentos necessários para responder corretamente a questão e o fato de termos apenas as alternativas assinaladas como fonte de inferência sobre como os alunos lidaram com a questão e se realizaram esses procedimentos, inferimos que, dos 98 alunos que apresentaram uma resposta:

- 57 perceberam que, com a nova situação, a medida aumentaria (assinalaram alternativas que indicavam aumento no valor de alguma das componentes), porém apenas 33 deles identificaram corretamente a componente que deveria ser aumentada;
- 51 identificaram corretamente a componente que deveria ser modificada, porém apenas os 33 alunos apresentaram a resposta que corresponde ao ajuste correto (aumento de seu valor).

A quantidade de alunos que parecem ter percebido a influência da nova situação e a de alunos que identificaram a componente que deve ser modificada é quase a mesma, porém a quantidade de alunos que conseguiu relacionar corretamente essas duas informações sobre a nova situação é bem menor. Muitos do que identificaram corretamente a componente não souberam ajustá-la corretamente, e muitos dos que perceberam a influência “geral” não identificaram a componente que exercia essa influência.

Não conseguimos dizer qual desses procedimentos seria “mais importante” para a resolução, ou qual exigia uma maior compreensão do aluno. Se a ênfase for dada a “como a mudança no estado inicial de uma situação influencia o fenômeno nela inserido”, os alunos que assinalaram alternativas que correspondem ao aumento da medida da função estariam em um nível superior de compreensão do que os outros, porém, se a ênfase for dada "nas relações que são mantidas e quais devem ser modificadas", seriam os alunos que assinalaram alternativas que modificam a componente2 que estariam nesse nível. Não conseguimos diferenciar o valor desses procedimentos. O que podemos dizer é que os alunos que conseguiram relacionar os dois tiveram um nível maior de compreensão do que os outros.

5.5 QUESTÃO 5 (Q5)

A questão Q5 é apresentada por um enunciado composto por um pequeno texto informativo, um gráfico e três itens (Q5-1.3, Q5-2.3 e Q5-3.3). O gráfico apresentado na questão é composto por segmentos de reta que indicam funções ora constantes, ora crescentes, ora decrescentes, e que relacionam duas grandezas inversamente proporcionais e remete a um registro simplificado da situação (em relação a essas duas variáveis) apresentada no texto informativo.

A ideia de Mudança e Relações está presente nessa questão por associar um fenômeno a uma representação gráfica na qual é possível analisar o comportamento (e a mudança de comportamento) de algumas variáveis envolvidas no fenômeno e como a relação entre duas variáveis influencia o comportamento de outra.

5.5.1 Questão 5 – Item 1 (Q5-1.3)

O item1 da Questão5 está classificado como situado em um contexto público e sua resolução requer a aplicação de processos matemáticos considerados do agrupamento de reprodução (FRANÇA, 2007). Seu enunciado é formado pelo texto informativo, pelo gráfico e pelo item1 e diz respeito à identificação do valor máximo de uma função por meio da interpretação de um texto simples e de um gráfico referente a ele.

Para resolver corretamente a questão, os alunos deveriam observar o gráfico apresentado na questão, identificar qual (quais) o(s) ponto(s) de valor máximo do traçado do gráfico, identificar qual o valor no eixo das ordenadas correspondente a esse(s) ponto(s) e apresentar esse valor como resposta para o problema.

Dos cento e oito (108) alunos que receberam um caderno de prova que continha essa questão, 83% (9 alunos) não apresentaram registro algum de resolução; 7,4% (8 alunos) apresentaram uma resolução considerada incorreta; e 84,3% (91 alunos), uma resolução correta.

Todos os alunos que resolveram o item apenas apresentaram uma resposta. Foi possível identificar seis (6) respostas diferentes. Três alunos apresentaram como resposta para o problema o maior número da escala do eixo das ordenadas, não percebendo que em momento algum o gráfico atinge esse valor. Um aluno apresentou como resposta um valor que sequer está representado no gráfico.

Temos que a grande maioria dos alunos soube identificar o máximo da função apresentada no gráfico, respondendo corretamente ao problema.

5.5.2 Questão 5 – Item 2 (Q5-2.3)

O item2 da Questão5 está classificado como situado em um contexto público, e sua resolução requer a aplicação de processos matemáticos considerados do agrupamento de conexão (FRANÇA, 2007). Diz respeito à interpretação de um texto simples e de um gráfico referente a ele, de modo a identificar pontos no gráfico correspondentes a fenômenos narrados no texto.

Esse item pede para os alunos identificarem o momento em que um fenômeno específico narrado no texto informativo aconteceu, momento dado pela coordenada da variável independente do ponto identificado no gráfico.

Para resolver corretamente a questão, os alunos deveriam compreender o texto informativo; relacioná-lo com o gráfico; refletir sobre a influência do fenômeno nas variáveis e, consequentemente, no traçado do gráfico; identificar no gráfico o ponto que representa o momento em que o fenômeno aconteceu; relacionar o ponto identificado com seu valor no eixo das abscissas e apresentar esse valor como sendo a resposta para o problema. Nesse caso, o fenômeno influencia a variável dependente de forma a reduzir rápida e bruscamente seu valor no momento em que ocorreu, podendo ser representado graficamente por meio de um segmento de reta que representa uma função decrescente.

Dos cento e oito (108) alunos que receberam um caderno de prova que continha essa questão, 9,3% (10 alunos) não apresentaram registro algum de resolução; 44,4% (48 alunos) apresentaram uma resolução considerada incorreta; e 46,3% (50 alunos), uma resolução correta.

Foi possível identificar doze (12) respostas diferentes, sendo nove (9) delas compreendidas entre os valores inicial e final da escala do eixo das abscissas, duas (2) sem indicação da unidade de medida a que se referem (são valores que, mesmo se forem entendidos como valores relacionados com a unidade de medida requerida no problema, não estão representados no gráfico) e uma (1) apenas com a palavra “sim”.

Dentre as nove (9) diferentes respostas possíveis de serem identificadas no gráfico, duas (2) delas simbolizam momentos em que a “reta decresce” e uma (1) delas sinaliza um intervalo de tempo em que também há uma “reta decrescente”. Podemos inferir que os alunos que apresentaram essas respostas compreenderam a influência que o fenômeno teve sobre as variáveis e a representação gráfica dessa influência.

Porém, no gráfico, há dois momentos em que a “reta decresce”, sendo um relacionado com o fenômeno pedido no item2, e o outro, não, diferenciando-se um do outro pela inclinação da reta (a requerida no problema, bem mais íngreme do que a outra) e, também, pelo momento em que ele ocorreu de acordo com o texto informativo, sendo a compreensão da relação de influência do fenômeno sobre as variáveis necessária, porém não suficiente para responder corretamente a questão.

Apenas duas (2) das três (3) respostas que se referiam a momentos em que a “reta decresceu” sinalizam o momento correto. Como não estava indicado no enunciado do problema que o momento em que o fenômeno ocorreu não poderia ser dado por um intervalo, as duas respostas podem ser consideradas corretas.

Possivelmente, os alunos que apresentaram como resposta um intervalo e não um valor específico fizeram-no porque a escala do eixo das abscissas está indicada apenas com alguns valores, e o fenômeno pedido no item2 aconteceu entre dois valores representados na escala, valores dados como os limites inferiores e superiores do intervalo apresentado como resposta por esses alunos.

Temos que, dos noventa e oito (98) alunos que apresentaram uma resposta para esse item, cinquenta e dois (52) apresentaram como resposta momentos em que a “reta decresceu”, ou seja, inferimos que perceberam a influência do fenômeno nas variáveis; dois (2) alunos identificaram um intervalo em que o fenômeno ocorreu; e quarenta e oito (48) alunos identificaram corretamente o momento “exato” em que o fenômeno ocorreu. Assim, temos que cinquenta (50) alunos mostraram compreensão do texto informativo, compreensão da relação entre o texto e o gráfico, e sobre a influência desse fenômeno específico sobre as variáveis da situação.

5.5.3 Questão 5 – Item 3 (Q5-3.3)

O item3 da Questão5 está classificado como situado em um contexto público, e sua resolução requer a aplicação de processos matemáticos considerados do agrupamento de reflexão (FRANÇA, 2007). Diz respeito à inferência sobre o comportamento de uma grandeza a partir da análise da relação entre outras duas grandezas inversamente proporcionais envolvidas na mesma situação, e a comparação entre as medidas dessas grandezas antes e depois do fenômeno.

Essa questão pede para os alunos responderem se a medida de uma das grandezas (grandeza3) envolvida na situação foi menor após o acontecimento de certo fenômeno do que antes dele e justificarem suas respostas, utilizando informações do gráfico. Essa grandeza não está representada no gráfico, mas seus valores podem ser inferidos a partir da relação entre as outras duas grandezas (grandeza1 e grandeza2) representadas no gráfico.

Para resolver corretamente esse item, os alunos deveriam analisar o gráfico apresentado na questão, refletir sobre as relações entre as três grandezas e comparar suas medidas antes e depois do momento em que ocorreu o fenômeno; responder se a medida da terceira grandeza foi menor ou não após o fenômeno; e apresentar uma justificativa que sustentasse a resposta dada. Nesse caso, os alunos deveriam responder que a medida da grandeza3 foi menor após o fenômeno, e a justificativa deveria ser baseada no fato de que, após o fenômeno, a medida da grandeza1 foi menor, enquanto a medida da grandeza2 foi a mesma.

Dos cento e oito (108) alunos que receberam um caderno de prova que continha essa questão, 32,4% (35 alunos) não apresentaram registro algum de resolução; 10,9% (11 alunos) apresentaram uma resolução considerada correta; e 57,4% (62 alunos) apresentaram uma resolução considerada incorreta, sendo que, destes, dezoito apresentaram uma resposta correta, porém ou apresentaram uma justificativa incorreta ou não justificaram.

Agrupamos todas as produções escritas desse item pelo tipo de justificativa apresentada, independentemente de terem sido desenvolvidas de forma considerada correta ou não. Resolvemos agrupar primeiramente pela justificativa, e não pela resposta, por acreditarmos que a resposta foi concluída pelos alunos após terem analisado os elementos dos argumentos que indicaram nas justificativas. A seguir, apresentamos um quadro referente a esse agrupamento.

Quadro 11 – Distribuição dos procedimentos utilizados no item Q5-3.3 pelo tipo de justificativa apresentada.

Agrupamento	Argumento	Quantidade
G1 - Justificativa baseada na grandeza1 e na grandeza2	S1 - Após o fenômeno, a medida da grandeza1 foi menor, e a medida da grandeza2 foi a mesma	9
	S2 - Após o fenômeno, a medida da grandeza1 foi menor, e a medida da grandeza2 foi praticamente a mesma	2
	S3 - Após o fenômeno, a medida da grandeza1 e da grandeza2 foram menores	4
	S4 - Após o fenômeno, a medida da grandeza1 foi menor, e a medida da grandeza2 foi maior	1
	S5 - A justificativa não está baseada na comparação de suas medidas, antes e depois do fenômeno	1
G2 - Justificativa baseada na grandeza1	S1 - Após o fenômeno, a medida da grandeza1 foi menor	6
	S2 - Após o fenômeno, a medida da grandeza1 teve valor mínimo	1
	S3 - A justificativa não está baseada na comparação de suas medidas, antes e depois do fenômeno	2
G3 - Justificativa baseada na grandeza2	S1 - Após o fenômeno, a medida da grandeza2 foi a mesma	6
	S2 - Após o fenômeno, a medida da grandeza2 foi menor	4
	S3 - A justificativa não está baseada na comparação de suas medidas antes e depois do fenômeno	4
G4 - Justificativa baseada na grandeza3	S1 - Após o fenômeno, a medida da grandeza3 foi a mesma	4
	S2 - Após o fenômeno, a medida da grandeza3 foi menor	3
	S3 - A grandeza3 foi a mesma, antes e depois do fenômeno	5
G5 - Justificativa baseada do gráfico	S1 - Justificativa baseada na quantidade de quadradinhos do gráfico	2

Agrupamento	Argumento	Quantidade
	S2 - Justificativa baseada na observação do gráfico	1
	S3 - Justificativa baseada no desenho do gráfico	3
G6 - Justificativa baseada no fenômeno	Justificativa baseada na influência do fenômeno sobre as grandezas	8
G7- Não apresenta uma justificativa, apenas uma resposta	Apenas apresenta uma resposta	3
G8 - Apresenta apenas uma justificativa	Não apresenta uma resposta para o problema, apenas uma justificativa para a qual não foi possível criar inferências	4

O primeiro agrupamento (G1) é formado por dezoito (18) produções escritas, distribuídas em cinco subgrupos (S1, S1, S3, S4 e S5), nas quais os alunos apresentaram uma justificativa baseada na grandeza1 e na grandeza2. No primeiro subgrupo de G1 (S1), estão nove (9) produções escritas. Nelas, os alunos responderam corretamente que a medida da grandeza3 foi menor após o fenômeno e basearam suas justificativas no argumento: após o fenômeno, a medida da grandeza1 foi menor, e a medida da grandeza2 foi a mesma. Em três produções escritas desse agrupamento, os alunos apresentaram valores das grandezas, sendo que, em duas delas, apresentaram valores tanto para a grandeza1 como para a grandeza2 e, na outra, apenas para a grandeza2. Um dos alunos que apresentou valores para as duas grandezas indicou corretamente valores para a grandeza1, mas incorretamente para a grandeza2. Parece que os alunos do agrupamento G1 perceberam a relação inversamente proporcional entre a grandeza1 e a grandeza2, conseguiram inferir e justificar corretamente sobre a medida da grandeza3 a partir da análise dessa relação.

O segundo subgrupo de G1 (S2) é formado por duas (2) produções escritas, nas quais os alunos basearam suas justificativas no argumento: após o fenômeno, a medida da grandeza1 foi menor, e a medida da grandeza2 foi praticamente a mesma. Um dos alunos apresentou corretamente valor para a grandeza2. Os dois alunos responderam corretamente que a medida da grandeza3 foi menor após o fenômeno e parece que perceberam a relação inversamente proporcional entre as grandezas 1 e 2.

No terceiro subgrupo de G1 (S3), estão as quatro (4) produções escritas nas quais os alunos basearam suas justificativas no argumento: após o fenômeno, as medidas da grandeza1 e da grandeza2 foram menores. Em duas dessas produções escritas, os alunos responderam incorretamente que, após o fenômeno, a medida da grandeza3 não foi menor do que antes dele, sendo que um deles afirmou ainda que a medida da grandeza3 foi a mesma, antes e depois do fenômeno. Esse mesmo aluno indicou corretamente valor para a grandeza2, antes do fenômeno. O outro aluno que respondeu “não” para o problema indicou corretamente valores da grandeza1, antes e depois do fenômeno. Nas outras duas produções escritas desse subgrupo, os alunos responderam corretamente que, após o fenômeno, a medida da grandeza3 foi menor do que antes dele. Um desses alunos pode ter afirmado que a medida da grandeza2 foi também menor após o fenômeno, levando em conta a resposta que apresentou no item2 dessa questão, na qual identificou incorretamente o momento em que o fenômeno aconteceu. Contudo, levando em consideração a resposta que ele deu no item2, a resposta que deu no item3 está correta. Todos os alunos desse subgrupo parecem ter compreendido a relação inversamente proporcional entre as grandezas 1 e 2, porém apenas dois deles responderam corretamente a questão.

O quarto subgrupo de G1 (S4) é formado pela produção escrita na qual o aluno baseou sua justificativa no argumento: após o fenômeno, a medida da grandeza1 foi menor e a medida da grandeza2 foi maior. Esse aluno respondeu corretamente que, após o fenômeno, a medida da grandeza3 foi menor e justificou que a medida da grandeza2 foi maior, porque a medida da grandeza1 foi menor. Esse aluno pode ter afirmado que a medida da grandeza2 foi maior após o fenômeno, levando em conta a resposta que apresentou no item2 dessa questão, na qual identificou incorretamente o momento em que o fenômeno aconteceu. Assim, levando em consideração a resposta que ele deu no item2, nada poderia ser afirmado sobre a grandeza3.

No quinto subgrupo de G1 (S5), está a produções escrita na qual o aluno apresentou uma justificativa baseada nas grandezas 1 e 2, porém a justificativa não está baseada na comparação de suas medidas antes e depois do fenômeno. Nela, parece que o aluno apresentou como resposta apenas sua interpretação da situação, uma narração de como teria acontecido a situação em relação às grandezas 1 e 2, porém não respondeu se a medida da grandeza3 foi menor após o fenômeno. Algumas das informações que utilizou na sua resposta estão incorretas, como, por exemplo, a coordenada de alguns pontos. Além disso, parece que interpretou a inclinação de alguns dos segmentos que formam o gráfico como “subidas”, relacionando o desenho do gráfico com o contexto do problema e não como uma representação da relação entre a grandeza1 e a grandeza2.

O segundo agrupamento (G2) é formado por oito (8) produções escritas, distribuídas em três subgrupos (S1, S2 e S3), nas quais os alunos apresentaram uma justificativa baseada na grandeza1. O primeiro subgrupo de G2 (S1) é formado por seis (6) produções escritas. Nelas, os alunos responderam incorretamente que a medida da grandeza3 não foi menor após o fenômeno e basearam suas justificativas no argumento: após o fenômeno, a medida da grandeza1 foi menor. Um desses alunos apenas apresentou uma justificativa, não respondendo sobre a medida da grandeza3. Sobre as respostas apresentadas, temos:

- um aluno afirmou que a medida da grandeza3 foi maior após o fenômeno;
- um aluno, que a medida foi a mesma;
- três alunos apenas disseram que não foi menor.

O aluno que respondeu que a medida da grandeza3 foi maior escreveu uma fórmula que relaciona a grandeza1 em função da grandeza2, substituiu um valor para a grandeza2 (diferente do valor respondido no item2 da questão) e um para a grandeza1, porém "abandonou" a fórmula depois das substituições. Levando em consideração sua resposta e sua justificativa, parece que ele entendeu a medida da grandeza3 relacionada diretamente com a medida da grandeza2. Pensou a medida da grandeza3 em unidades de medida da grandeza2 e não em unidades da grandeza3. Parece que esse aluno respondeu "mais longo" porque, para ele, o longo ou o curto estão relacionados com o tempo (min) e não com comprimento (m). Ele responde "mais longo" porque demorou mais tempo. Os outros alunos parecem ter respondido que a medida da grandeza3 foi a mesma, antes e depois do fenômeno, só a medida da grandeza1 foi diferente, dando a impressão de que a medida da grandeza3 também havia mudado.

Todos os alunos desse subgrupo identificaram corretamente que a medida da grandeza1 foi menor após o fenômeno, porém apenas essa informação não sustenta inferências corretas sobre a medida da grandeza3.

No segundo subgrupo de G2 (S2), está a produção escrita na qual o aluno respondeu corretamente que a medida da grandeza3 foi menor após o fenômeno e baseou sua justificativa no argumento: após o fenômeno, a medida da grandeza1 teve o valor mínimo. Indicou um valor como sendo o mínimo da grandeza1 e escreveu que isso está representado no gráfico.

O terceiro subgrupo de G2 (S3) é formado por duas (2) produções escritas na quais os alunos mencionaram a grandeza1 em suas justificativas, porém a justificativa não está baseada na comparação de suas medidas, antes e depois do fenômeno. Um desses alunos apenas afirmou que, se a medida da grandeza1 tivesse “12”, o fenômeno teria sido diferente. O outro aluno apenas afirmou que, com uma medida menor da grandeza3, a medida da grandeza1 seria “36” e, com uma medida maior da grandeza3, a medida da grandeza1 seria “60”, porém não relaciona os valores com o fenômeno (não diz quais teriam acontecido antes e quais teriam acontecido depois do fenômeno). Esses dois alunos não responderam se a medida da grandeza3 foi menor após o incidente.

O terceiro agrupamento (G3) é formado por quatorze (14) produções escritas, distribuídas em três subgrupos (S1, S2 e S3), nas quais os alunos apresentaram uma justificativa baseada na grandeza2. O primeiro subgrupo de G3 (S1) é formado por seis (6) produções escritas. Nelas, os alunos responderam incorretamente que a medida da grandeza3 não foi menor após o fenômeno e basearam suas justificativas no argumento: após o fenômeno, a medida da grandeza2 foi a mesma. Quatro alunos desse subgrupo afirmaram que a medida da grandeza3 após o fenômeno foi a mesma e dois apenas disseram que não foi menor. Três alunos apresentaram valores para a grandeza2, sendo que um deles apresentou valores incorretos. Os valores incorretos apresentados por esse aluno podem ter sidos causados pela resposta que apresentou no item2 dessa questão, na qual identificou incorretamente o momento em que o fenômeno aconteceu.

Todos os alunos desse subgrupo identificaram que a medida da grandeza2 foi a mesma, antes e após o fenômeno, e parecem ter concluído incorretamente que, como a medida da grandeza2 foi a mesma, a medida da grandeza3 também tem que ser a mesma.

O segundo subgrupo de G3 (S2) é formado por quatro (4) produções escritas nas quais os alunos basearam suas justificativas no argumento: após o fenômeno, a medida da grandeza2 foi menor. Em três produções escritas desse subgrupo, os alunos responderam corretamente que a medida da grandeza3 foi menor após o fenômeno e, na outra, o aluno respondeu que a medida da grandeza3 foi maior. Três alunos apresentaram valores para a grandeza2, um apresentou valor correto, antes do fenômeno, e incorreto, após o fenômeno, e dois apresentaram valores incorretos após o fenômeno. Levando em consideração as respostas apresentadas por esses quatro alunos no item2 da questão, podemos inferir que dois deles responderam que o valor da grandeza2 foi menor porque identificaram incorretamente o momento em que o fenômeno ocorreu.

A maioria dos alunos desse subgrupo também parece ter relacionado diretamente a medida da grandeza3 com a medida da grandeza2, ou seja, se a medida da grandeza2 foi menor, a medida da grandeza3 também tem que ser menor.

O terceiro subgrupo de G3 (S3) é formado por quatro (4) produções escritas. Nelas, os alunos mencionaram a grandeza2 em suas justificativas, porém a justificativa não estava baseada na comparação de suas medidas antes e depois do fenômeno.

Em duas dessas produções escritas, os alunos responderam corretamente que a medida da grandeza3 foi menor após o incidente. Em uma delas, o aluno apresentou como justificativa uma medida para a grandeza2 após o fenômeno, mas não mencionou medida para antes do fenômeno (não sabemos se considerou que o valor que apresentou foi maior ou menor do que antes do fenômeno). Na outra produção, o aluno apenas diz que a grandeza3 foi menor após o fenômeno por questão de uma diferença pequena na medida da grandeza2, porém não diz se a diferença aumentou ou diminuiu o valor dela. Parece que esses alunos consideraram a medida da grandeza3 em função da grandeza2, como se apenas a grandeza2 influenciasse a medida da grandeza3.

Em uma das produções escritas desse agrupamento, o aluno respondeu incorretamente que a medida da grandeza3 foi maior após o fenômeno. Em sua explicação, o aluno apenas indica alguns valores que a grandeza3 assumiu em alguns momentos da situação.

Na outra produção escrita, o aluno não responde sobre a medida da grandeza3, apenas explica que a medida da grandeza2 deveria ser menor.

No quarto agrupamento (G4), estão as onze (11) produções escritas, distribuídas em três subgrupos (S1, S2 e S3), nas quais os alunos apresentaram uma justificativa baseada na grandeza3. O primeiro subgrupo de G4 (S1) é formado por quatro (4) produções escritas. Nelas, os alunos responderam incorretamente que a medida da grandeza3 não foi menor após o fenômeno e basearam suas justificativas no argumento: após o fenômeno, a medida da grandeza3 foi a mesma. Um dos alunos afirmou que a medida da grandeza3 foi a mesma, pois o fenômeno aconteceu na metade da medida total da grandeza3. Outro, que a medida foi a mesma, pois, levando em consideração o contexto do problema, explica que, como o caminho percorrido foi de ida e volta, a distância tem que ser a mesma, e afirma ainda que o caminho é mais rápido, mas não é mais curto. Um outro aluno afirmou que a medida da grandeza3 foi a mesma, antes e depois do fenômeno, e que a diferença está apenas na grandeza1. E o outro aluno apenas justificou que a medida da grandeza3 não foi menor, porque foi igual.

O segundo subgrupo de G4 (S2) é formado por três (3) produções escritas. Nelas, os alunos responderam corretamente que a medida da grandeza3 foi menor após o fenômeno e basearam suas justificativas no argumento: após o fenômeno, a medida da grandeza3 foi menor. Esses alunos apresentaram justificativas do tipo “Sim. Porque a medida da grandeza3 foi menor após o fenômeno”, ou seja, respostas do tipo “sim, porque sim”.

No terceiro subgrupo de G4 (S3) estão as cinco (5) produções escritas nas quais os alunos basearam suas justificativas no argumento: a grandeza3 foi a mesma, antes e depois do fenômeno. Nelas, os alunos responderam incorretamente que a medida da grandeza3 não foi menor após o fenômeno e justificaram suas respostas afirmando que a grandeza3 foi a mesma antes e depois do fenômeno e, portanto, a sua medida foi a mesma, também. Um dos alunos afirmou ainda que somente a medida da grandeza1 foi menor, “dando a impressão” que a medida da grandeza3 também tivesse diminuído. Em outra produção escrita desse subgrupo, o aluno afirma que a grandeza3 foi a mesma e, portanto, a medida da grandeza1 e da grandeza2 também “seria” a mesma.

O quinto agrupamento (G5) é formado por seis (6) produções escritas, distribuídas em três subgrupos (S1, S2 e S3), nas quais os alunos apresentaram uma justificativa baseada no gráfico. No primeiro subgrupo de G5 (S1), estão duas produções. Nelas, os alunos responderam incorretamente que a medida da grandeza3 não foi maior após o fenômeno e afirmaram ainda que a medida foi a mesma antes e depois do fenômeno, baseando suas justificativas no “número de quadradinhos” utilizados no gráfico, uma vez que o gráfico está desenhado em uma malha quadriculada. Em uma das produções escritas, o aluno apenas diz que o número de quadradinhos do gráfico foi o mesmo e, na outra, o aluno indica a quantidade de quadradinhos no total, antes e depois do fenômeno. Pela quantidade de quadradinhos apresentada pelo aluno, pudemos inferir que ele identificou corretamente o momento em que o fenômeno aconteceu, porém esse mesmo aluno respondeu incorretamente o item2 dessa questão. A estratégia de “contar quadradinhos” poderia ser considerada uma estratégia que resolveria o problema, se os alunos tivessem contado todos os quadradinhos abaixo da reta representada no gráfico e comparado a quantidade de quadradinhos antes e depois do fenômeno. Porém, esses alunos parecem ter contado apenas os quadradinhos com um dos lados pertencente ao eixo das abscissas.

O segundo subgrupo de G5 (S2) é formado pela produção escrita na qual o aluno responde incorretamente que a medida da grandeza3 não foi menor e justifica “está no gráfico que a medida da grandeza3 foi maior” após o fenômeno. A justificativa apresentada por esse aluno pode ter sido construída levando-se em conta a resposta que apresentou no item2 dessa questão, na qual identificou incorretamente o momento em que o fenômeno aconteceu.

No terceiro subgrupo de G5 (S3), estão três (3) produções escritas. Nelas, os alunos basearam suas justificativas no “desenho do gráfico”. Esses alunos consideraram o traçado do gráfico como se fosse o trajeto feito e, então, basearam suas justificativas, por exemplo, no fato de, no caminho de volta, “ter menos subida”, mas a “subida” na verdade é um segmento de reta que está representando um aumento do valor da grandeza1. Em duas dessas produções escritas, não foi possível inferir se os alunos responderam que o valor foi menor ou não. Na outras, os alunos responderam corretamente que a medida da grandeza3 foi menor após o fenômeno e, além de justificarem essa resposta por causa do “desenho do gráfico”, afirmaram que a medida da grandeza2 também foi menor. Exemplos de respostas: “Ela teria voltado para sua casa por outras ruas menos longas do que aquela que ela estava indo. Ela também estava andando em curvas”; “Porque havia menos curvas”; “Era mais curto porque tinha menos subida e demorou uns segundos a menos”.

O sexto agrupamento (G6) é formado por oito (8) produções escritas nas quais os alunos apresentaram uma justificativa baseada no fenômeno. Os alunos apresentam respostas do tipo “o caminho não era mais curto, ela resolveu voltar para casa porque ficou assustada”; “só foi menor porque ela queria voltar logo para casa”. Parece que o fenômeno chamou mais atenção do que o gráfico, e que o fenômeno influenciou, por questões emocionais, a medida da grandeza3. Em três delas, os alunos responderam corretamente que a medida da grandeza3 foi menor após o fenômeno, em duas, que não foi menor e, em três, não foi possível identificar se consideraram a medida maior ou menor.

O sétimo agrupamento (G7) é formado por três (3) produções escritas nas quais os alunos apresentam uma resposta, porém não apresentam uma justificativa. Dois alunos responderam corretamente que a medida da grandeza3 foi menor após o fenômeno e um respondeu que a medida foi maior.

No oitavo agrupamento (G8), estão quatro (4) produções escritas que não se enquadram nos outros agrupamentos. Nelas, os alunos não apresentam uma resposta para o problema, apenas justificativas para as quais não foi possível criar inferências.

Temos que a quantidade de alunos que responderam que a medida da grandeza3 foi menor após o fenômeno foi praticamente igual à quantidade de alunos que responderam que não foi menor (29 e 30, respectivamente). Quatorze alunos não responderam sobre a medida da grandeza3 ou não foi possível identificar se responderam que foi maior ou menor.

Dos vinte e nove alunos que responderam corretamente, apenas onze deles apresentaram uma justificativa que sustentasse essa resposta.

Dos trinta alunos que responderam incorretamente que a medida da grandeza3 não foi menor, dezessete afirmaram ainda que a medida foi a mesma antes e depois, e cinco afirmaram que a medida da grandeza3 foi maior após o fenômeno. Parece que grande parte dos alunos que respondeu incorretamente esse item considerou (equivocadamente) que a medida da grandeza3 dependia unicamente da medida da grandeza2, ou seja, se a medida da grandeza2 permaneceu a mesma, a medida da grandeza3 deveria permanecer a mesma, se a medida da grandeza2 foi maior, a medida da grandeza3 deveria também ser maior, sugerindo que deram mais valor à relação diretamente proporcional entre as grandezas2 e 3 do que à relação inversamente proporcional entre as grandezas1 e 2. Outra inferência sobre a causa dos erros é que alguns alunos parecem ter "carregado" o erro que cometeram no item anterior (Q5-2.3), ou seja, identificaram incorretamente o momento em que o fenômeno ocorreu, obtendo medidas equivocadas sobre as grandezas antes e depois do fenômeno. Parece, ainda, que alguns alunos compreenderam o "menor" como se fosse referido a tempo e não a comprimento, confundindo valores da grandeza2 com a grandeza3 ou considerando novamente que só a grandeza2 influencia a grandeza3, e que, portanto, o que aconteceu com a sua medida vale para a medida da grandeza3, também.

5.6 QUESTÃO 6 (Q6)

A questão Q6 é apresentada por um enunciado composto por um pequeno texto informativo, quatro gráficos, e é formada por quatro itens (Q6-1.4, Q6-2.4, Q6-3.4 e Q6-4.4). Cada um dos gráficos apresentados na questão é constituído por dois histogramas[61] invertidos (quer dizer que, ao contrário da definição, as classes estão representadas na vertical, e as freqüências, na horizontal) em paralelo, ou seja, um ao lado do outro, com o eixo das ordenadas em comum. Todos os gráficos se referem às mesmas variáveis, sendo que cada um deles representa um momento em que a relação entre elas acontece.

A ideia de Mudança e Relações está presente nessa questão por ela solicitar que os alunos reflitam sobre a relação entre duas variáveis representada por meio de gráficos,

[61] Gráfico de barras no qual a escala horizontal representa classes de valores de dados e a escala vertical representa frequências. As alturas das barras correspondem aos valores das frequências, e as barras são desenhadas adjacentes umas às outras (sem separação) (TRIOLA, 2008, p. 41).

que percebam a relação existente entre os quatro gráficos apresentados e façam comparações entre eles, ou seja, que analisem o que mudou e como mudou de um para o outro.

5.6.1 Questão Q6 – Item 1 (Q6-1.4)

O item1 da Questão6 está classificado como situado em um contexto científico, e sua resolução requer a aplicação de processos matemáticos considerados do agrupamento de conexões (FRANÇA, 2007). Diz respeito à identificação e à manipulação de dados obtidos a partir da análise de um gráfico.

Esse item pede que os alunos calculem a quantidade total correspondente a uma das faixas do gráfico4. A faixa é composta tanto pelas quantidades representadas do lado esquerdo como as do lado direito do gráfico, e os alunos deveriam calcular a quantidade total da faixa.

Elaboramos um quadro contendo procedimentos que, combinados entre si, podem formar uma estratégia de resolução que resolveria o problema. Chamamos de:

- "$x1$" o valor da variável dependente no histograma da esquerda do gráfico para a faixa pedida;
- "$x2$" o valor da variável dependente no histograma da direita do gráfico para a faixa pedida;
- "x" o valor que corresponde à soma de $x1$ com $x2$.

Quadro 12 – Procedimentos que, combinados entre si, podem gerar uma estratégia de resolução para o item Q6-1.4.

Partes da estratégia	Dados necessários	Procedimento
E1- Identificar o valor de $x1$	–	P1 - Observar o histograma do lado esquerdo do gráfico4 e identificar o valor da variável dependente para a faixa pedida.
E2 - Identificar o valor de $x2$	–	P2 - Observar o histograma do lado direito do gráfico4 e identificar o valor da variável dependente para a faixa pedida.
E3 - Calcular o valor de x	Valor de $x1$ e valor de $x2$	P3 - Adicionar o valor de $x1$ ao valor de $x2$
E4 - Calcular a quantidade da faixa no lado esquerdo do gráfico	Valor de $x1$ e valor da escala	P4 - Multiplicar o valor de $x1$ pelo valor da escala
E5 - Calcular a quantidade da faixa no lado direito do gráfico	Valor de $x2$ e valor da escala	P5 - Multiplicar o valor de $x2$ pelo valor da escala
E6 - Calcular a quantidade total da faixa pedida	Quantidade da faixa no lado direito do gráfico e quantidade da faixa no lado esquerdo do gráfico	P6 - Somar a quantidade da faixa no lado esquerdo com a quantidade da faixa no lado direito do gráfico
	Valor de x e valor da escala	P7 - Multiplicar o valor de x pelo valor da escala

Elaboramos dois tipos de estratégias que resolveriam corretamente o problema, utilizando-se esses procedimentos. A estratégia1 é composta pelos procedimentos P1, P2, P3 e P7, e a estratégia2, por P1, P2, P4, P5 e P6, e em ambos os casos pode acontecer de o aluno não registrar todos os procedimentos.

Consideramos um intervalo de valores aceitáveis para $x1$ e para $x2$, respectivamente, [3,5; 4] e [4,2; 4,5]. Dessa forma, um intervalo de respostas aceitáveis para o problema seria [770000, 850000]. Isso porque é possível que, na hora de identificar os valores no gráfico, haja pequenas imprecisões que não desqualificam nem a estratégia, nem os procedimentos ou resposta encontrada.

Dos noventa e cinco (95) alunos que receberam um caderno de prova que continha esse item, 37,9% (36 alunos) não apresentaram registro algum de resolução; 22,1% (21 alunos) apresentaram uma resolução correta; e 40% (38 alunos), uma resolução considerada incorreta, sendo que, destes, onze receberam crédito parcial.

Agrupamos todas as produções escritas desse item pelo tipo de operações aritméticas registradas pelos alunos para operacionalizar a estratégia que escolheram na resolução do problema, independentemente de terem sido desenvolvidas de forma considerada correta ou não. A seguir, apresentamos um quadro referente a esses agrupamentos.

Quadro 13 – Distribuição dos procedimentos utilizados no item Q6-1.4 por tipo de operações utilizadas.

Agrupamento	Procedimento	Quantidade
G1- Adição	Resolve $3,8 + 4,35$	1
	Resolve $450000 + 400000$	1
	Resolve $420000 + 390000$	1
	Resolve $400000 + 300000$	1
	Resolve $400000 + 400000$	1
	Explica que realizou uma adição com valores obtidos do lado esquerdo e direito do gráfico	5
	Resolve $4 + 3$	1
	Resolve $1950 + 1990 + 2000 + 2035$	1
G2 - Multiplicação	Resolve $8,5.100000$	1
	Resolve 8.100000	1
	Resolve 4.100000	3
	Resolve $4,5.100000$	2
	Resolve $4,4.100000$	1
	Explica que multiplicou algum valor por 100000	1
	Explica que multiplicou uma quantidade por mil	1
	Resolve 4.4	2
G3 - Adição e Multiplicação	Resolve $3,5 + 4$ e $7,5.100000$	1
	Resolve $4 + 4$ e 8.100000	1
	Resolve $quatro\ e\ pouco$ mais $três\ e\ quase\ quatro$ e 8.100000	1
	Resolve $4 + 3,8$ e $7,8.100000$	1
	Escreve que adicionou quantidades dos dois lados do gráfico e multiplicou por 100000	2
	Resolve $4,3.100000$, $3,8.100000$ e $4,300000 + 3,800000$	1
	Resolve 4.100000 e $400000 + 400000$	1
	Resolve $4,2.100000$, $3,5.100000$ e $420000 + 350000$	2
	Resolve 4.100000 e $400000 + 400000$	1
	Resolve $440000 + 360000$ e $4,4.100000$, $3,6.100000$	1
	Escreve que adicionou valores do lado esquerdo e direito e multiplicou por 1000000	1

Agrupamento	Procedimento	Quantidade
G4 - Expressão numérica	Resolve $3{,}8.100000 + 4{,}2.100000$	1
G5 - não utilizam operações aritméticas	Apresenta uma resposta e uma explicação	14
	Apresenta apenas uma explicação	4
	Apresenta apenas uma resposta	3

O primeiro agrupamento (G1) é formado por doze (12) produções escritas nas quais os alunos utilizaram adição para operacionalizar a estratégia escolhida para resolver o problema.

Em uma dessas produções escritas, parece que o aluno escolheu a estratégia1 para resolver o problema. Nela, o aluno identificou corretamente valores para $x1$ e $x2$ (procedimentos P1 e P2), armou (porém não colocou o sinal "+" ao lado das parcelas)[62] e resolveu corretamente uma adição com esses valores, ou seja, calculou o valor de x (procedimento P3) e apresentou uma resposta que, aparentemente, refere-se à multiplicação do valor de x pela escala (procedimento P7), porém não registra a multiplicação. Assim, parece que ele realizou a estratégia1, porém só registrou os procedimentos P1, P2 e P3.

Em quatro produções escritas desse agrupamento, parece que os alunos utilizaram a estratégia2 para resolver o problema. Em três delas, os alunos indicaram corretamente a adição da quantidade obtida do lado esquerdo do gráfico com a quantidade obtida do lado direito do gráfico (procedimento P6) e apresentaram o resultado dessa adição como resposta para o problema. Mesmo não registrando os outros procedimentos que compõem essa estratégia, podemos inferir que eles a realizaram, pois os valores utilizados na adição foram calculados por meio da identificação dos valores de $x1$ e $x2$ (procedimentos P1 e P2) e pela multiplicação dos valores de $x1$ e $x2$ pela escala (procedimento P4). Um desses alunos parece ter identificado valores fora do intervalo aceitável de valores, tanto para $x1$, quanto para $x2$, mas, mesmo assim, inferimos que ele realizou a estratégia2, pois se trata de um erro no procedimento de identificação dos valores e não falta da realização do procedimento. Assim, parece que esses três alunos realizaram a estratégia2, porém registraram apenas o procedimento P6. Na outra produção escrita que também apresenta indícios de ter sido elaborada com base na estratégia2, o aluno indicou as quantidades obtidas do lado direito e do lado esquerdo do gráfico e apresentou como resultado para o problema

[62] Pelo resultado registrado, inferimos que se tratava de uma adição.

um valor que corresponde à soma dessas quantidades (procedimento P6), porém não registrou essa adição. Mesmo não registrando os procedimentos que compõem a estratégia2, podemos inferir que ele a realizou, pois as quantidades apresentadas para o lado esquerdo e direito foram obtidas por meio da identificação de valores para $x1$ e $x2$ (procedimentos P1 e P2) e da multiplicação desses valores pelo valor da escala (procedimento P4), sendo a resposta alcançada por meio da adição da quantidade obtida do lado esquerdo com a quantidade obtida do lado direito (procedimento P6).

Em outras cinco produções escritas desse agrupamento, parece que os alunos realizaram uma das duas estratégias (estratégia 1 ou 2), porém não foi possível identificar qual das duas, pois eles apenas explicaram que realizaram uma adição com os valores obtidos do lado esquerdo e direito do gráfico (estratégia "geral"), mas, como não as registraram, não podemos afirmar se primeiro encontraram o valor de x para depois multiplicá-lo pelo valor da escala, ou se encontraram os valores de $x1$ e $x2$, multiplicaram-nos pelo valor da escala e os somaram. Apesar de todas as respostas apresentadas por esses alunos serem consideradas corretas (por estarem compreendidas no intervalo aceitável), apenas em uma das produções escritas é possível afirmar que o aluno identificou corretamente um valor para $x2$, e um valor bem próximo ao limite inferior do intervalo aceitável de valores para $x1$ (4,1, sendo 4,2 o limite inferior), pois foi o único que, em sua explicação, indicou esses valores.

Em outra produção escrita, ainda nesse agrupamento, o aluno indica valores para $x1$ e $x2$ (procedimento P1 e P2) que não estão no intervalo aceitável de valores para eles e uma resposta que corresponde à adição dos valores apresentados para $x1$ e $x2$ (procedimento P3). Esse aluno pareceu não levar em consideração a escala do gráfico.

Nesse agrupamento, temos ainda a produção escrita na qual o aluno explica que sua resposta foi obtida por meio da adição de todos os "momentos". Cada gráfico apresentado na Questão6 possui um valor que identifica o momento em que a relação entre as variáveis está sendo analisada, e a estratégia de resolução desse aluno parece ter sido somar todos os valores correspondentes a esses momentos. Chegamos a essa conclusão quando somamos esses valores indicados nos gráficos e obtivemos como resultado a resposta apresentada pelo aluno.

No segundo agrupamento (G2), estão as doze (12) produções escritas em que a operação multiplicação foi utilizada para operacionalizar a estratégia escolhida pelos alunos. Em uma dessas produções escritas, parece que o aluno escolheu a estratégia1 para resolver o problema. Nela, o aluno identificou corretamente um valor para x (procedimento P3) e explicou que realizou uma multiplicação com o valor de x e o da escala (procedimento P7). Como só apresentou diretamente um valor para x, não podemos inferir se ele identificou corretamente valores para $x1$ e $x2$, contudo, podemos afirmar que os valores identificados por ele resultaram em um valor válido para x e que, provavelmente, foram valores que se encaixariam no intervalo de valores aceitáveis. Assim, parece que ele realizou a estratégia1, porém só registrou os procedimentos P3 e P7.

Em sete produções escritas desse agrupamento, os alunos apresentaram registros de operações e/ou explicações que dão a impressão de que eles realizaram uma estratégia que resolveria o problema (todos escreveram que multiplicaram o valor encontrado no gráfico pelo valor da escala), porém apenas um deles apresentou uma resposta considerada correta. Os outros alunos parecem ter identificado incorretamente valores no gráfico, e inferimos, pelas respostas apresentadas por eles, que identificaram valores apenas de um lado do gráfico (não sendo possível afirmar se do lado esquerdo ou direito). Dois deles apresentam erro de procedimento ao realizarem a multiplicação do número identificado no gráfico pelo valor da escala.

Em duas produções escritas, os alunos apresentaram explicações para as quais não foi possível afirmar se utilizaram uma estratégia correta e tiveram erros de procedimento, ou se simplesmente a estratégia que utilizaram não resolveria o problema. Em uma delas, o aluno explica que multiplicou algo pelo valor da escala e, se formos levar em consideração sua resposta, o valor multiplicado pela escala deveria ser oito mil. Porém, pode ser que esse aluno tenha realizado incorretamente a multiplicação do valor que ele encontrou pela escala, ou seja, pode ser que ele tenha identificado corretamente o valor de x e ocorreu um erro ao realizar o procedimento P7. Por isso, não podemos afirmar sobre sua estratégia e nem sobre seu procedimento de resolução do problema. O outro aluno explicou que multiplicou a quantidade encontrada por mil (porém não escreve que valor é esse e nem a que ele se refere) e, levando em consideração sua resposta, o valor encontrado por ele deveria ser oito mil. Não sabemos se o aluno identificou incorretamente o valor da escala (que era cem mil e não mil), ou se identificou incorretamente o valor de x (que poderia ser oito e não oito mil), ou ainda se, ao resolver a multiplicação, teve erros de procedimento. Parece que ele tentou realizar os procedimentos de uma das estratégias que resolveria o problema, porém os realizou de maneira incorreta, o que não podemos afirmar com certeza.

Nas outras duas produções escritas desse agrupamento, não conseguimos identificar procedimentos que poderiam compor um das estratégias que resolveria o problema.

Nelas, os alunos indicaram a multiplicação 4.4, sendo que um deles resolveu corretamente, e o outro, não, e apresentaram a resposta como solução para o problema. Um deles explicou que “dividiu 4.4=20”, podendo ter se confundido na hora de nomear a operação que realizou.

O terceiro agrupamento (G3) é formado por treze (13) produções escritas nas quais os alunos utilizaram adição e multiplicação para operacionalizar a estratégia escolhida.

Em seis dessas produções, parece que os alunos realizaram a estratégia1 para resolver o problema. Quatro deles apresentaram registros de operações e explicações nos quais foi possível identificar todos os procedimentos referentes à estratégia1. Todos eles identificaram valores para $x1$ e $x2$ (procedimentos P1 e P2); três deles indicaram ou explicaram que resolveram a adição dos valores encontrados do lado esquerdo e do lado direito do gráfico (procedimento P3); e todos indicaram ou explicaram que multiplicaram o valor de x pelo valor da escala (procedimento P7) e apresentaram esse resultado como resposta para o problema. Um dos alunos indicou valores corretos tanto para $x1$ quanto para $x2$; um indicou um valor fora do intervalo aceitável para $x1$ e um valor correto para $x2$; outro, um valor correto para $x2$ e um fora do intervalo aceitável para $x1$ e o outro, valores fora do intervalo aceitável tanto para $x1$ como pra $x2$. Mesmo assim, três deles apresentaram respostas consideradas corretas. Todas as operações registradas por eles foram resolvidas corretamente.

Nas outras duas produções escritas que parecem ter sido realizadas com base na estratégia1, os alunos apenas explicaram que realizaram uma adição entre os valores de $x1$ e $x2$ (procedimento P3), porém não indicaram esses valores (um dos alunos apenas indicou o valor resultante da soma), e que multiplicaram o valor encontrado (x) pelo valor da escala (procedimento P7). As respostas apresentadas por esses alunos não estão no intervalo aceitável de respostas.

Em outras sete produções escritas desse agrupamento, parece que os alunos escolheram a estratégia2 para resolver o problema.

Em seis delas, os alunos apresentaram registros de operações e explicações nos quais foi possível identificar todos os procedimentos referentes à estratégia2.

- Todos eles identificaram valores para $x1$ e $x2$ (procedimentos P1 e P2);
- cinco deles multiplicaram corretamente os valores de $x1$ e $x2$ pela escala (procedimentos P4 e P5), sendo que três deles armaram e dois

indicaram a multiplicação, e um deles explicou que realizou as multiplicações porém não as registrou;

- cinco deles registraram a adição das quantidades do lado esquerdo com a quantidade do lado direito, sendo que dois deles indicaram a adição (e um deles resolveu incorretamente) e os outros três armaram a adição, sendo que, em duas delas, armaram de modo que uma das parcelas era o registro do resultado de uma das multiplicações que já havia feito, e um deles apresentou uma explicação na qual disse que realizou essas adições também (procedimento P6); todos eles apresentaram o resultado dessa adição como resposta para o problema;
- quatro desses alunos identificaram valores corretos tanto para $x1$ como para $x2$, e dois deles identificaram valores tanto para $x1$ quanto para $x2$ fora do intervalo aceitável de valores. Mesmo assim, cinco deles apresentaram respostas consideradas corretas, sendo que a resposta que foi considerada incorreta foi resultado do erro de procedimento no qual o aluno adicionou incorretamente os valores que encontrou para o lado esquerdo e para o lado direito. Se tivesse resolvido corretamente essa adição, o resultado também teria sido considerado uma resposta correta para o problema.

Na outra produção escrita na qual, provavelmente, o aluno escolheu a estratégia2 para abordar o item, parece que identificou incorretamente o valor da escala, pois, em sua explicação, ele diz que encontrou sua resposta multiplicando os valores $x1$ e $x2$ por 1000000 (e não por cem mil) (se fosse por cem mil, relacionaríamos esses procedimentos com os procedimentos P4 e P5) e somando as quantidades obtidas nas multiplicações (procedimento P6). Não foi possível inferir sobre os valores que identificou para $x1$ e $x2$, porém, pela resposta apresentada (13000000 bilhões), provavelmente identificou valores incorretos para os dois.

No quarto agrupamento (G4), está a produção escrita do aluno que utilizou uma expressão numérica para operacionalizar a estratégia escolhida para resolver o problema. Nela, o aluno resolve corretamente uma expressão que pode ser relacionada com a estratégia2, ou seja, ela pode ser "traduzida" para a expressão "valor de $x1$ multiplicado pelo valor da escala adicionado ao valor de $x2$ multiplicado pelo valor da escala". Assim, foi possível identificar, nessa produção escrita, a realização dos procedimentos P1, P2, P4, P5 e P6. Esse aluno identificou corretamente valores para $x1$ e $x2$, realizou corretamente as multiplicações e adições que faziam parte da expressão numérica que registrou, respondendo corretamente a questão.

O quinto agrupamento (G5) é formado por vinte e uma (21) produções escritas, distribuídas em três subgrupos (S1, S2 e S3), nas quais os alunos não utilizam operações aritméticas para operacionalizar suas estratégias de resolução.

O primeiro subgrupo de G5 (S1) é formado por quatorze (14) produções escritas. Nelas, os alunos apresentam uma resposta e uma explicação sobre sua resolução, porém, nessa explicação, não há indícios de utilização de operações aritméticas. Em nove delas, os alunos apresentaram explicações relacionadas ao gráfico, como, por exemplo, “encontrei minha resposta ‘analisando o gráfico’”, “nos números abaixo do gráfico”, “no último gráfico”, “por meio da escala do gráfico”, “só olhar a margem de pontuação nos gráficos”, “no gráfico, do lado esquerdo, estão as faixas e, embaixo, as quantidades”. Identificamos oito respostas diferentes, sendo que apenas uma delas foi considerada correta.

Em outras cinco produções escritas desse subgrupo, os alunos apresentaram explicações que não conseguimos compreender, do tipo “sim, eles estão na 2ª parte de baixo para cima”, “a taxa diminuiu”, “pelo dobro do crescimento”.

No segundo subgrupo de G5 (S2), estão quatro (4) produções escritas. Nelas, os alunos não apresentam uma resposta para o problema, apresentam apenas uma explicação. Três deles apresentam explicações relacionadas ao gráfico. Dois desses alunos apenas escrevem que encontraram a resposta no gráfico, e um explica que encontrou a resposta observando o gráfico, pois “o valor de $x1$ é maior do que o valor de $x2$ nesse gráfico”. Na outra produção escrita desse agrupamento, o aluno apresenta uma explicação que, aparentemente, não tem relação alguma com o problema. As explicações apresentadas por esses alunos não possibilitaram inferência sobre a maneira que lidaram com a questão.

O terceiro subgrupo de G5 (S3) é formado por três (3) produções escritas nas quais os alunos apenas apresentam uma resposta. Em duas produções escritas, os alunos apresentaram um valor numérico como resposta, porém nenhuma das duas respostas estava no intervalo considerado aceitável. Na outra produção escrita, o aluno responde “sim, mas com pouca quantidade”. Não foi possível inferir sobre os procedimentos de resolução desses alunos.

Temos que, em trinta e duas (32), das cinquenta e nove (59) produções escritas desse item, foi possível identificar que o aluno realizou ou a estratégia1 ou a estratégia2 para resolver o problema. Identificamos a realização da estratégia1, em oito produções; a utilização da estratégia2, em doze produções; e a utilização de uma das duas, não sendo possível afirmar com certeza qual delas, também em doze produções escritas. Levando em consideração a quantidade de produções nas quais não foi possível afirmar se os registros podiam ser relacionados com a estratégia 1 ou com a 2, não podemos afirmar, de maneira geral, sobre a preferência por uma ou por outra.

Trinta e oito (38) alunos registraram ou mencionaram que realizaram uma ou mais operações aritméticas. As operações utilizadas pelos alunos foram adição, multiplicação e expressão numérica, sendo esta constituída por adições e multiplicações apenas. Acreditamos que, não coincidentemente, essas são as operações necessárias para a operacionalização das estratégias1 e 2.

Na grande maioria das vezes em que foi realizada, a adição foi utilizada para operacionalizar os procedimentos P3 e P6, e a multiplicação, os procedimentos P7, P4 e P5.

A maioria das operações foi resolvida corretamente, sendo possível identificar, em apenas três produções escritas, erros na resolução de uma multiplicação. Porém, acreditamos que mais alunos possam ter cometidos erros ao realizarem uma multiplicação que não registraram, mas que apresentaram valores na resposta ou na resolução que, inferimos, vieram da multiplicação de “uma quantidade” pela escala (por exemplo: 8000000 ao invés de 800000, possivelmente proveniente da multiplicação 8.100000).

5.6.2 Questão Q6 – Item 2 (Q6-2.4)

O item2 da Questão6 está classificado como situado em um contexto científico, e sua resolução requer a aplicação de processos matemáticos considerados do agrupamento de conexões (FRANÇA, 2007). Diz respeito à identificação de faixas nos gráficos que correspondem a momentos específicos narrados no item2.

Para resolver corretamente a questão, os alunos deveriam identificar, no gráfico1, uma faixa pedida no item2 e, no gráfico4, a faixa correspondente à faixa identificada no gráfico1 (cada gráfico representa a relação entre as mesmas variáveis em diferentes momentos). Nesse caso, eles deveriam pintar o lado esquerdo da faixa1, no gráfico1, e o lado esquerdo da faixa18, no gráfico4.

Dos noventa e cinco (95) alunos que receberam um caderno de prova que continha esse item, 27,4% (26 alunos) não apresentaram registro algum de resolução; 34,7%

(33 alunos) apresentaram uma resolução correta; e 37,9% (36 alunos), uma resolução considerada incorreta, sendo que, destes, onze receberam crédito parcial.

Agrupamos todas as produções escritas desse item pelas diferentes faixas pintadas ou assinaladas pelos alunos, independentemente de terem sido consideradas faixas que deveriam ser pintadas ou não. A seguir, apresentamos um quadro referente a esses agrupamentos.

Quadro 14 – Distribuição dos procedimentos utilizados no item Q6-2.4 pelas diferentes faixas pintadas.

Agrupamento	Faixas dos gráficos	Quantidade
G1 - Pinta o lado esquerdo de uma faixa do gráfico1 e o lado esquerdo de uma faixa do gráfico4	S1 - Faixa1 no gráfico1, faixa18 no gráfico4	33
	S2 - Faixa1 no gráfico1, faixa1 no gráfico4	8
	S3 - Faixa1 no gráfico1, faixa17 no gráfico4	4
	S4 - Faixa1 no gráfico1, faixa16 no gráfico4	1
	S5 - Faixa2 no gráfico1, faixa18 no gráfico4	1
	S6 - Faixa18 no gráfico1, faixa9 no gráfico4	1
G2 - Pinta o lado direito de uma faixa do gráfico1 e o lado direito de uma faixa do gráfico4	Faixa1 no gráfico1, faixa1 no gráfico4	1
G3 - Pinta uma faixa do gráfico1 e uma faixa do gráfico4	S1 - Faixa1 no gráfico1, faixa18 no gráfico4	3
	S2 - Faixa1 no gráfico1, faixa16 no gráfico4	1
G4 - Pinta o lado esquerdo de mais de uma faixa do gráfico1 e o lado esquerdo de uma faixa do gráfico4	S1 - Todas as faixas do gráfico1, faixa18 do gráfico4	1
	S2 - Todas as faixas, menos a primeira, do gráfico1, faixa18 no gráfico4	1
G5 - Pinta o lado esquerdo de uma faixa do gráfico1 e uma faixa do gráfico4	Faixa 1 no gráfico1, faixa18 no gráfico4	2
G6 - Pinta o lado esquerdo de mais de uma faixa do gráfico1 e o lado esquerdo de mais de uma faixa do gráfico4	Faixas 1, 2, 4, 6, 8, 10, 13 do gráfico1, faixas 3, 6, 8, 11, 14, 17, 18 do gráfico4	1
G7 - Pinta o lado esquerdo de uma faixa do gráfico1	Faixa 1	2

Agrupamento	Faixas dos gráficos	Quantidade
G8 - Pinta o lado esquerdo de mais de uma faixa do gráfico1	Faixas 1, 18	1
G9 - Pinta o lado esquerdo de uma faixa do gráfico4	Faixa18	1
G10 - Pinta duas faixas no gráfico4	Faixas 15, 12	1
G11 - Pinta o lado esquerdo de uma faixa do gráfico1, uma no gráfico2, uma no gráfico3 e uma no gráfico4	Faixa1 no gráfico1, faixa9 no gráfico2, faixa11 no gráfico3 e faixa18 no gráfico4	1
	Faixa2 no gráfico1, faixa5 no gráfico2, faixa9 no gráfico3, faixa12 no gráfico4	1
G12 - Pinta o lado esquerdo de uma faixa do gráfico2, uma do gráfico3 e uma do gráfico4	Faixa18 no gráfico2, faixa11 no gráfico3, faixa18 no gráfico4	1
G13 - Circula um dado do gráfico4	S1 - Informação da faixa15	1
	S2 - Informação da faixa18	1
G14 - Pinta o lado esquerdo de uma faixa do gráfico1 e circula uma informação do gráfico4	Faixa1 no gráfico1, informação da faixa18 no gráfico4	1

O primeiro agrupamento (G1) é formado por quarenta e oito (48) produções escritas, distribuídas em seis subgrupos (S1, S2, S3, S4, S5, S6), nas quais os alunos pintaram o lado esquerdo de uma faixa do gráfico1 e o lado esquerdo de uma faixa do gráfico4.

O primeiro subgrupo de G1 (S1) é formado por trinta e três (33) produções escritas nas quais os alunos pintaram o lado esquerdo da faixa1 do gráfico1 e o lado esquerdo da faixa18 do gráfico4. Em nove delas, os alunos, além de apresentarem as faixas pintadas, efetuaram alguma operação (sendo que, em todos os casos, os resultados das operações têm relação com as faixas que os alunos pintaram).

Seis deles resolveram corretamente uma subtração, sendo que um deles apenas indicou, e cinco deles armaram e resolveram. Um desses alunos apenas pintou uma parte das faixas da esquerda. Considerando as faixas como retângulos “deitados” (base maior do que a altura), o aluno pintou até um pouco mais que a metade da altura, no gráfico1, e rente à base, no gráfico4.

Três deles resolveram corretamente uma subtração e uma adição, sendo que um deles apenas indicou as operações e utilizou o registro do resultado da subtração como uma das parcelas da soma, e dois deles armaram e resolveram corretamente as operações, sendo que um destes utilizou o registro do resultado da subtração como uma das parcelas da soma.

O segundo subgrupo de G1 (S2) é formado por oito (8) produções escritas, nas quais os alunos pintaram o lado esquerdo da faixa1 do gráfico1 e o lado esquerdo da faixa1 do gráfico4.

Em três delas, os alunos pintaram apenas partes das faixas da esquerda. Dois deles pintaram do eixo das ordenadas até o valor de $x = 3$, nas duas faixas, e dois deles pintaram apenas um risco em cima do valor $x = 3$, também nas duas faixas.

Nas outras quatro produções escritas desse subgrupo, os alunos pintaram toda a faixa da esquerda, nos dois gráficos. Em uma dessas produções, além de apresentar como resposta as faixas pintadas, o aluno armou e resolveu corretamente uma adição pelo algoritmo usual e apresentou o resultado como resposta. Não foi possível inferir sobre a relação de sua resposta "numérica" com as pinturas nos gráficos, e nem a origem dos números utilizados na adição.

O terceiro subgrupo de G1 (S3) é formado por quatro (4) produções escritas nas quais os alunos pintaram o lado esquerdo da faixa1 do gráfico1 e o lado esquerdo da faixa17 do gráfico4. Não apresentaram registros, além das pinturas das faixas.

No quarto subgrupo de G1 (S4), está a produção escrita na qual o aluno pintou o lado esquerdo da faixa1 do gráfico1 e o lado esquerdo da faixa16 do gráfico4. Esse aluno pintou apenas uma parte da faixa da esquerda do gráfico1, do eixo das ordenadas até o valor de $x = 3$, e pintou toda a faixa da esquerda do gráfico4.

O quinto subgrupo de G1 (S5) é formado pela produção escrita na qual o aluno pintou o lado esquerdo da faixa2 do gráfico1 e o lado esquerdo da faixa18 do gráfico4. Não apresentou registros, além das pinturas das faixas.

O sexto subgrupo de G1 (S6) é formado pela produção escrita na qual o aluno pintou o lado esquerdo da faixa18 do gráfico1 e o lado esquerdo da faixa9 do gráfico4. Não apresentou registros, além das pinturas das faixas.

O segundo agrupamento (G2) é formado pela produção escrita na qual o aluno pintou o lado direito de uma faixa do gráfico1 e o lado direito de uma faixa do gráfico4. Nela, o aluno pintou apenas um risco em cima do valor $x = 3$, na faixa1 do gráfico1 e na faixa18 do gráfico4. Não apresentou registros, além das pinturas das faixas.

No terceiro agrupamento (G3), estão quatro (4) produções escritas, distribuídas em dois subgrupos (S1, S2), nas quais os alunos pintaram uma faixa do gráfico1 e uma faixa do gráfico4.

O primeiro subgrupo de G3 (S1) é formado por três produções escritas. Nelas, os alunos pintaram a faixa1 do gráfico1 e a faixa18 do gráfico4. Dois desses alunos pintaram essas faixas completamente, e o outro aluno pintou toda a faixa, no gráfico4, e, no gráfico1, todo o lado esquerdo da faixa, até o $x = 3$ do lado direito.

O segundo subgrupo de G3 (S2) é formado pela produção escrita do aluno que pintou a faixa1 no gráfico1 e a faixa16 no gráfico4. Ele não apresentou registros, além das pinturas das faixas.

O quarto agrupamento (G4) é formado por duas (2) produções escritas, distribuídas em dois subgrupos (S1, S2), nas quais os alunos pintaram o lado esquerdo em mais de uma faixa do gráfico1 e o lado esquerdo de uma faixa do gráfico4.

O primeiro subgrupo de G4 (S1) é formado pela produção escrita do aluno que pintou todas as faixas do lado esquerdo do gráfico1 e o lado esquerdo da faixa18 do gráfico4. No gráfico1, ele não pintou todo o lado esquerdo das faixas, e, sim, fez um risco vertical em $x = 0{,}5$ que passa por todas as faixas; no gráfico4, ele pintou completamente o lado esquerdo da faixa18. Além de apresentar as faixas pintadas, esse aluno armou e resolveu corretamente uma subtração pelo algoritmo usual, e o resultado obtido tem relação com a faixa que pintou no gráfico4.

O segundo subgrupo de G4 (S2) é formado pela produção escrita na qual o aluno pintou o lado esquerdo das faixas 2 a 18 do gráfico1 (ou seja, todas, menos a primeira) e o lado esquerdo da faixa18 do gráfico4. Além disso, esse aluno armou e resolveu corretamente uma subtração pelo algoritmo usual, e o resultado obtido tem relação com a faixa que pintou no gráfico4.

No quinto agrupamento (G5), estão duas (2) produções escritas nas quais os alunos pintaram o lado direito de uma faixa do gráfico1 e uma faixa do gráfico4. Nelas, os alunos pintaram o lado esquerdo da faixa1 do gráfico1 e a faixa18 do gráfico4. Não apresentaram outros registros, além das pinturas das faixas.

O sexto agrupamento (G6) é formado pela produção escrita em que o aluno pintou o lado esquerdo de mais de uma faixa do gráfico1 e, também, do gráfico4. Foram pintados o lado esquerdo das faixas $1, 2, 4, 6, 8, 10$ e 13 do gráfico1 e das faixas

$3, 6, 8, 11, 14, 17$ e 18 do gráfico4. Esse aluno não apresentou outros registros, além das pinturas das faixas.

O sétimo agrupamento (G7) é formado por duas (2) produções escritas nas quais os alunos pintaram o lado esquerdo de uma faixa do gráfico1. Nelas, os alunos pintaram o lado esquerdo da faixa1 do gráfico1, sendo que um deles pintou todo o lado esquerdo dessa faixa, e o outro pintou apenas uma parte da faixa, que vai do eixo das ordenadas até o valor de $x = 4$.

O oitavo agrupamento (G8) é formado pela produção escrita na qual o aluno pintou o lado esquerdo em mais de uma faixa do gráfico1. Nela, o aluno pintou o lado esquerdo das faixas 1 e 18 do gráfico1. Esse aluno não apresentou outros registros, além das pinturas das faixas.

O nono agrupamento (G9) é formado pela produção escrita na qual o aluno pintou o lado esquerdo de uma faixa do gráfico4. Nela, o aluno pintou o lado esquerdo da faixa18 do gráfico4. Esse aluno não apresentou outros registros, além das pinturas das faixas.

No décimo agrupamento (G10), está a produção escrita do aluno que pintou mais de uma faixa do gráfico4. Nela, o aluno pintou as faixas 12 e 16 do gráfico 4. Esse aluno não apresentou outros registros, além das pinturas das faixas.

O décimo primeiro agrupamento (G11) é formado por duas produções escritas, distribuídas em dois subgrupos (S1, S2), nas quais os alunos pintaram o lado esquerdo de uma faixa em cada gráfico. O primeiro subgrupo (S1) é formado pela produção do aluno que pintou o lado esquerdo da faixa1 no gráfico1, da faixa9 no gráfico2, da faixa11 no gráfico3 e da faixa18 do gráfico4. Esse aluno não apresentou outros registros, além das pinturas das faixas. O segundo subgrupo de G11 (S2) é formado pela produção escrita do aluno que pintou o lado esquerdo da faixa2 do gráfico1, da faixa5 do gráfico2, da faixa9 do gráfico3 e da faixa12 do gráfico4. Porém, esse aluno não pintou completamente o lado esquerdo dessas faixas, e, sim, apenas um risco aproximadamente em $x = 4{,}8$ no gráfico1, $x = 6{,}5$ no gráfico2, $x = 6{,}5$ no gráfico3 e $x = 4{,}5$ no gráfico4.

O décimo segundo agrupamento (G12) é formado pela produção escrita do aluno que pintou o lado esquerdo de uma faixa no gráfico2, uma no gráfico3 e uma no gráfico4. Nela, o aluno pintou o lado esquerdo da faixa18 no gráfico2, da faixa11 no gráfico3 e da faixa18 do gráfico4. Esse aluno não apresentou outros registros, além das pinturas das faixas.

O décimo terceiro agrupamento (G13) é formado por duas produções escritas, distribuídas em dois subgrupos (S1, S2), nas quais os alunos circularam algum dado do gráfico4. O primeiro subgrupo (S1) é formado pela produção escrita do aluno que circulou o valor da escala da faixa18 do gráfico4 e indicou como sendo a resposta do problema. Esse aluno não apresentou outros registros, além dessa resposta. O segundo subgrupo (S2) é formado pela produção escrita do aluno que armou e resolveu incorretamente uma subtração e circulou o valor da escala da faixa15 do gráfico4, que corresponde ao resultado da subtração.

O décimo quarto agrupamento (G14) é formado pela produção escrita na qual o aluno pintou o lado esquerdo de uma faixa do gráfico1 e circulou um dado do gráfico4. Nela, o aluno pintou apenas uma parte do lado esquerdo da faixa1 do gráfico1, apenas um risco em cima do valor $x = 3$, e circulou o valor da escala da faixa18 do gráfico4. Esse aluno não apresentou outros registros, além dessa resposta.

Temos que, dos 64 alunos que pintaram no gráfico1:

- 57 pintaram apenas na faixa1, sendo que 52 pintaram apenas do lado esquerdo; 1, do lado direito; e 4, dos dois lados;
- pintaram a faixa1 e mais faixas.

Dos 66 alunos que pintaram no gráfico4, temos que:

- 44 pintaram na faixa18, sendo que 39 pintaram apenas do lado esquerdo e 5 pintaram os dois lados;
- circularam informações referentes à faixa18;
- 1 pintou na faixa 18 e mais faixas.

Dos sessenta e nove (69) alunos que apresentaram uma resolução para esse item, temos que a maioria identificou corretamente a faixa que deveria ser pintada tanto no gráfico1 como no gráfico4, porém menos da metade deles apresentaram uma resposta considerada correta (pintar o lado esquerdo da faixa1, no gráfico1, e o lado esquerdo da faixa18, no gráfico4). Apresentaram maior dificuldade em identificar a faixa do gráfico4 do que a do gráfico1, o que é esperado, já que o valor referente à faixa do grafico1 foi dado, e o valor referente à faixa do gráfico4 deveria ser calculado.

Apenas doze alunos apresentaram, além das faixas pintadas, o registro das operações que realizaram. Em onze delas, parece que os alunos utilizaram-nas para calcular o valor referente à faixa que deveria ser pintada no gráfico4. Oito deles resolveram uma adição, sendo que apenas um deles resolveu-a incorretamente, três deles resolveram corretamente uma subtração e uma adição. Na outra produção escrita, o aluno resolveu corretamente uma adição, porém não foi possível inferir sobre a relação da operação que realizou com as faixas pintadas por ele.

Dez alunos não pintaram completamente as faixas que identificaram. Em nove das respostas, parece que os alunos tomaram os valores do eixo das abscissas como sendo valores da variável dependente e pintaram apenas o valor que ela supostamente receberia nessa faixa, ou até chegar a esse valor (do eixo das ordenadas, o valor dele, no eixo das abscissas). O outro aluno parece ter entendido que era possível separar nas faixas os valores compreendidos no intervalo de valores que a faixa abrange, ou seja, por exemplo, se a faixa compreende valores entre 0 e 5, e tem-se que o valor da variável é 3, para representar essa variável ele pintaria um pouco mais da metade da faixa.

Dos três alunos que pintaram faixa no gráfico2, um deles pintou o lado esquerdo da faixa9. Dos três alunos que pintaram no gráfico3, dois deles pintaram o lado esquerdo da faixa11. Essas faixas correspondem à faixa pedida no gráfico1, nos gráficos2 e 3, ou seja, se o item tivesse a solicitação para que os alunos identificassem, também, a faixa pedida nos gráficos2 e 3, essas faixas seriam as corretas.

5.6.3 Questão Q6 – Item 3 (Q6-3.4)

O item3 da Questão6 está classificado como situado em um contexto científico e sua resolução requer a aplicação de processos matemáticos considerados do agrupamento de reflexão (FRANÇA, 2007). Diz respeito ao cálculo de uma porcentagem.

Para resolver corretamente esse item, os alunos deveriam identificar quais gráficos precisavam ser analisados, calcular a quantidade total da faixa pedida em cada um dos gráficos, calcular a porcentagem correspondente à quantidade total de uma faixa de um dos gráficos em relação à quantidade total do outro.

Elaboramos um quadro contendo os procedimentos que podem ser utilizados para a resolução do problema e que, combinados entre si, formam as estratégias de resolução que resolveriam o problema.

Chamamos de:

- "$x1$" o valor da variável dependente no histograma da esquerda do gráfico1 para a faixa pedida;
- "$x2$" o valor da variável dependente no histograma da direita do gráfico1 para a faixa pedida;

- "x" o valor que corresponde à soma de $x1$ com $x2$,
- "$y1$" o valor da variável dependente no histograma da esquerda do gráfico4 para a faixa pedida;
- "$y2$" o valor da variável dependente no histograma da direita do gráfico4 para a faixa pedida;
- "y" o valor que corresponde à soma de $y1$ com $y2$; ,
- "z" uma incógnita;
- "quantidade1" a quantidade total na faixa pedida no gráfico1;
- "quantidade2" a quantidade total na faixa pedida no gráfico1.

Quadro 15 – Procedimentos que, combinados entre si, podem gerar uma estratégia de resolução para o item Q6-3.4.

Partes da estratégia	Dados necessários	Procedimento
E1 - Identificar o valor de $x1$	–	P1 - Observar o histograma do lado esquerdo do gráfico1 e identificar o valor de $x1$ para a faixa pedida.
E2 - Identificar o valor de $x2$	–	P2 - Observar o histograma do lado direito do gráfico1 e identificar o valor de $x2$ para a faixa pedida.
E3 - Calcular o valor de x	Valor de $x1$ e valor de $x2$	P3 - Somar o valor de $x1$ ao valor de $x2$
E4 - Identificar o valor de $y1$	–	P4 - Observar o histograma do lado esquerdo do gráfico4 e identificar o valor de $y1$ para a faixa pedida.
E5 - Identificar o valor de $y2$	–	P5 - Observar o histograma do lado direito do gráfico4 e identificar o valor de $y2$ para a faixa pedida.
E6 - Calcular o valor de y	Valor de $y1$ e valor de $y2$	P6 - Somar o valor de $y1$ ao valor de $y2$
E7 - Calcular a quantidade da faixa pedida no histograma da esquerda no gráfico1	Valor de $x1$ e valor da escala	P7 - Multiplicar o valor de $x1$ pelo valor da escala
E8 - Calcular a quantidade da faixa pedida no histograma da direita no gráfico1	Valor de $x2$ e valor da escala	P8 - Multiplicar o valor de $x2$ pelo valor da escala
E9 - Calcular a quantidade da faixa pedida no histograma da esquerda no gráfico4	Valor de $y1$ e valor da escala	P9 - Multiplicar o valor de $y1$ pelo valor da escala

Partes da estratégia	Dados necessários	Procedimento
E10 - Calcular a quantidade da faixa pedida no histograma da direita no gráfico4	Valor de $y2$ e valor da escala	P10 - Multiplicar o valor de $y2$ pelo valor da escala
E11 - Calcular a quantidade total na faixa pedida no gráfico1 (quantidade1)	Quantidade da esquerda e quantidade da direita no gráfico1	P11 - Somar a quantidade da faixa pedida do histograma da esquerda à quantidade da faixa pedida do histograma da direita no gráfico1
	Valor de x e valor da escala	P12 - Multiplicar o valor de x pela escala
E12 - Calcular a quantidade total na faixa pedida no gráfico4 (quantidade2)	Quantidade da esquerda e quantidade da direita no gráfico4	P13 - Somar a quantidade da faixa pedida do histograma da esquerda à quantidade da faixa pedida do histograma da direita no gráfico4
	Valor de y e valor da escala	P14 - Multiplicar o valor de y pelo valor da escala
E13 - Calcular a porcentagem que a quantidade2 corresponde da quantidade1	Quantidade1 e quantidade2	P15 - Dividir a quantidade2 pela quantidade1
		P16 - Resolver a regra de três $a\ quantidade1\ está\ para\ 100, assim\ como\ a\ quantidade2\ está\ para\ z$
		P17 - Estabelece um tipo de cálculo comparativo entre a quantidade1 e a quantidade2
	Valor de x e valor de y	P18 - Dividir o valor de y pelo valor de x
		P19 - Resolver a regra de três $x\ está\ para\ 100, assim\ como\ y\ está\ para\ z$
		P20 - Estabelece um tipo de cálculo comparativo entre o valor de x e y

Várias estratégias podem ser elaboradas utilizando esses procedimentos descritos acima. Um exemplo de estratégia que resolveria o problema é a formada pelas partes “E1+E2+E3+E4+E5+E6+E11+E12+E13”. Uma das formas que os alunos poderiam operacionalizá-la seria realizando os procedimentos P1, P2, P3, P4, P5, P5, P6, P12, P14 e P16 (sendo todos os procedimentos registrados ou não).

Dos noventa e cinco (95) alunos que receberam um caderno de prova que continha esse item, 56,8% (54 alunos) não apresentaram registro algum de resolução; 6,3% (6 alunos) apresentaram uma resolução correta; e 36,9% (35 alunos), uma resolução considerada incorreta, sendo que, destes, seis receberam crédito parcial.

Agrupamos todas as produções escritas desse item pelo tipo de operações registradas pelos alunos para operacionalizar a estratégia que escolheram para resolver o problema, independentemente de terem sido desenvolvidas de forma considerada correta ou não. A seguir, apresentamos um quadro referente a esses agrupamentos.

Quadro 16 – Distribuição dos procedimentos utilizados no item Q6-3.4 por tipo de operações utilizadas.

Agrupamento	Procedimento	Quantidade
G1 - Regra de três	Explica que efetuou uma regra de três	1
	Resolve 12.10^5 *está para* $100,$ *assim como* $4{,}5.10^5$ *está para* x	1
	Resolve 1200000 *está para* $100,$ *assim como* 600000 *está para* x	1
	Resolve 6 *está para* $100,$ *assim como* 2 *está* 200000 *está para* x	1
	Resolve 6 *está para* $100,$ *assim como* 2 *está para* x	2
G2 - Divisão	Explica que efetuou uma divisão	3
	Resolve $0{,}5000: 1000$	1
G3 - Subtração	Resolve $100\% - 85$	1
G4 - Regra de três e multiplicação	Resolve 12 *está para* $100,$ *assim como* 4 *está para* x e $400: 12$	1
G5 - Adição, Regra de três e divisão	Resolve $620000 + 590000.\ 200000 +,\ 300000.\ ,$ 1210000 *está para* $100\%,$ *assim como* 500000 *está para* x e $5000: 121$	1
G6 - Estabelece um cálculo comparativo	Apresenta uma explicação que sugere uma comparação de valores	6
G7 - Não registra e nem se refere às operações utilizadas	Apresenta uma resposta e uma explicação	12
	Apresenta apenas uma resposta	10

O primeiro agrupamento (G1) é formado por seis (6) produções escritas nas quais os alunos utilizaram uma regra de três para operacionalizar a estratégia que escolheram para resolver o problema. Em uma dessas produções escritas, o aluno não registrou a operação que utilizou, apenas escreveu que concluiu sua resposta por meio da realização de uma regra de três. Como não foi possível saber quais dados o aluno utilizou para realizar a operação, apenas podemos dizer que ele apresentou uma resposta incorreta para o problema.

Em três produções desse agrupamento, parece que os registros dos alunos referem-se à realização do procedimento P16. Em duas delas, os alunos indicaram as quantidades referentes à faixa do gráfico1 e do gráfico4, sendo que um deles apresentou valores aceitáveis tanto para a quantidade1 quanto para a quantidade2, e o outro, um valor aceitável para a quantidade1 e um valor fora do intervalo para a quantidade2. Resolveram corretamente a regra de três, apresentando o resultado obtido como resposta para o problema, porém apenas uma delas pode ser considerada correta (apenas uma delas se referia a um valor dentro do intervalo aceitável de respostas). Na outra produção escrita, o aluno parece ter identificado incorretamente valores para as quantidades, parecendo que levou em consideração apenas um dos lados dos gráficos (pelos valores apresentados, inferimos que seja o lado esquerdo). Além disso, apresentou um valor para a quantidade2, que pode ter sido obtido por meio do uso incorreto da escala, e relacionou incorretamente o valor obtido na regra de três com uma porcentagem (igualou 3,3 a 30%). Apresentou como resposta um valor fora do intervalo aceitável de respostas corretas.

Nas outras duas produções escritas desse agrupamento, parece que os registros dos alunos referem-se à realização do procedimento P19. Parece que esses alunos identificaram incorretamente valores para x e y, levando em consideração apenas um dos lados dos gráficos, possivelmente valores de $x1$ e $y1$ (ou seja, lado esquerdo do gráfico). Resolveram corretamente a regra de três e apresentaram as respostas obtidas, que não correspondem a um valor dentro do intervalo aceitável, como resposta para o problema.

O segundo agrupamento (G2) é formado por quatro (4) produções escritas nas quais os alunos utilizaram divisão para operacionalizar suas estratégias de resolução. Em três delas, os alunos não registraram a operação que realizaram, porém explicaram que realizaram uma divisão envolvendo a quantidade1 e a quantidade2, sugerindo que realizaram o procedimento P15. Identificamos duas respostas diferentes, sendo que, em apenas uma produção escrita, a resposta apresentada correspondia a um valor pertencente ao intervalo aceitável para respostas corretas. Na outra produção escrita desse agrupamento, o aluno arma e resolve incorretamente uma divisão, aparentemente pelo processo “curto”, e apresenta o resultado obtido como resposta para o problema. Não foi possível inferir sobre a relação dos valores utilizados na operação com a questão.

No terceiro agrupamento (G3), está a produção escrita na qual o aluno utilizou uma subtração para operacionalizar sua estratégia de resolução. Nela, o aluno apenas indica a subtração $100\% - 85 = 15\%$, não sendo possível inferir sobre a relação desses valores utilizados na subtração com a questão.

O quarto agrupamento (G4) é formado pela produção escrita do aluno que utilizou uma regra de três e uma divisão para operacionalizar a estratégia escolhida por ele para resolver o problema. Nela, o aluno indica corretamente um valor para x e para a quantidade1, porém indica para y e para a quantidade2 um valor fora do intervalo aceitável. Armou e resolveu corretamente uma regra de três envolvendo esses valores, sugerindo, então, que tenha registrado o procedimento P19. Armou e resolveu corretamente uma divisão, que parece ter servido como cálculo auxiliar para a regra de três, pelo processo curto da divisão. Apresentou como resposta o valor obtido na regra de três, valor esse que não corresponde a uma resposta aceitável para o problema.

O quinto agrupamento (G5) é formado pela produção escrita na qual o aluno utilizou adição, regra de três e divisão para operacionalizar sua estratégia de resolução. Esse aluno indicou corretamente valores para as quantidades do lado esquerdo e direito dos dois gráficos e indicou a adição da quantidade da esquerda com a da direita para cada gráfico, dessa forma, registrando os procedimentos P11 e P13. Armou e resolveu corretamente uma regra de três, utilizando o registro dos resultados das adições que realizou como elementos da regra de três (P16), e apresentou o resultado obtido nessa operação como resposta para o problema (valor considerado pertencente ao intervalo de respostas aceitáveis). A divisão que armou e resolveu corretamente pelo algoritmo usual da divisão parece ter sido utilizada como cálculo auxiliar para a resolução da regra de três.

No sexto agrupamento (G6), estão seis (6) produções escritas nas quais os alunos estabeleceram um cálculo comparativo para operacionalizar suas estratégias de resolução.

Em cinco produções desse agrupamento, parece que os registros dos alunos referem-se à realização do procedimento P17. Em três delas, os alunos indicaram as quantidades referentes à faixa do gráfico1 e do gráfico4, sendo que um deles apresentou valores aceitáveis tanto para a quantidade1 quanto para a quantidade2, e os outros dois, valores fora do intervalo aceitável para as duas quantidades. O aluno que apresentou valores aceitáveis para as quantidades também apresentou uma resposta considerada aceitável, coerente com a comparação que estabeleceu. Os outros dois alunos apresentaram, como resposta, valores fora do intervalo aceitável, porém um deles apresentou uma resposta coerente com a comparação que estabeleceu entre os valores que indicou como sendo das quantidades das faixas dos gráficos. Nas outras duas produções escritas desse agrupamento, os alunos explicaram que estabeleceram uma comparação entre a quantidade1 e a quantidade2, porém não indicam valores para elas. Apenas um desses alunos apresentou como resposta um valor pertencente ao intervalo de respostas aceitáveis.

Na outra produção escrita desse agrupamento, parece que os registros do aluno referem-se à realização do procedimento P20. Nela, o aluno indica incorretamente valores para x e y (parece que levou em consideração apenas um lado dos gráficos e, pelos valores apresentados, o esquerdo). A resposta que apresentou é coerente com a comparação que estabeleceu entre os valores que indicou, porém não corresponde a um valor considerado aceitável.

O sétimo agrupamento (G7) é formado por vinte e duas (22) produções escritas, distribuídas em dois subgrupos (S1 e S2), nas quais os alunos não registraram as operações utilizadas para operacionalizar suas estratégias de resolução.

O primeiro subgrupo de G7 (S1) é formado por doze (12) produções escritas. Nelas, os alunos apresentaram uma resposta e uma explicação, sendo que essa explicação não se refere às operações.

Em oito delas, os alunos apresentaram explicações aparentemente relacionadas com o gráfico, como "eu vi a porcentagem no gráfico", "olhando no gráfico", "na parte inferior refere à porcentagem", "pelo desenho se tem uma ideia", entre outras. Alguns alunos parecem ter entendido os valores da escala como porcentagens, e valores de $x1$, $x2$, $y1$, $y2$ como a porcentagem correspondente à faixa pedida. Em outra produção escrita desse subgrupo, o aluno escreve "6,2 – 100%" e "5,1 – 89%" e apresenta como resposta "89%", mas não indicou a quais valores e porcentagens se referia. Nas outras três produções escritas, os alunos apresentaram explicações aparentemente sem relação com a pergunta, por exemplo, uma resposta foi "a taxa diminuiu", quando o que a pergunta pedia era uma quantidade.

Em dez delas, os alunos apresentaram como resposta um valor dado em porcentagem. Nelas, identificamos oito respostas diferentes, sendo que apenas uma produção escrita continha uma resposta considerada aceitável (e a explicação que a acompanhava se referia apenas à observação do gráfico4). Nas outras duas produções escritas desse subgrupo, os alunos apresentaram respostas do tipo "sim" ou "no gráfico".

O segundo subgrupo de G7 (S2) é formado por dez (10) produções escritas nas quais os alunos apenas apresentaram uma resposta. Identificamos dez respostas diferentes, sendo que apenas seis delas se referiam a porcentagens (nenhuma delas no intervalo considerado aceitável).

Das quarenta e uma (41) produções escritas desse item, em apenas dezenove (19) delas os alunos fizeram registros referentes às operações realizadas para operacionalizar suas estratégias. As operações identificadas foram adição, regra de três, divisão, subtração e cálculo comparativo.

Foram resolvidas:

- duas adições, sendo uma delas relacionada com o P11, e a outra, com o P13, ou seja, as adições foram utilizadas para calcular as quantidades 1 e 2;
- sete regras de três, sendo quatro delas relacionadas com o P16, e três delas, com o P19, ou seja, as regras de três apresentadas pelos alunos foram utilizadas para o cálculo da porcentagem;
- seis divisões, sendo três delas relacionadas com o P15 (cálculo de porcentagem), e duas delas utilizadas como cálculo auxiliar para a resolução de uma regra de três (não foi possível identificar a outra divisão realizada com algum dos procedimentos apresentados ou com relação a outros procedimentos, mas, pela resposta apresentada, consideramos que ela foi utilizada para o cálculo da porcentagem);
- uma subtração, utilizada incorretamente para o cálculo da porcentagem;
- e seis cálculos comparativos, sendo que cinco deles relacionados com o P17, e um deles, com o P20, ou seja, os cálculos comparativos foram utilizados para o cálculo da porcentagem.

Temos que os alunos escolheram as operações “divisão”, “regra de três”, “cálculo comparativo” e “subtração” para operacionalizarem o cálculo de uma porcentagem, sendo apenas a subtração, nesse caso, uma maneira equivocada de poder realizar esse cálculo.

Notamos uma preferência dos alunos pela regra de três para a realização de um cálculo de porcentagem e, também, que mais alunos realizaram o cálculo da porcentagem utilizando as quantidades 1 e 2 (P16 e P17) do que utilizando os valores de x e y (P19 e P20).

5.6.4 Questão 6 – Item 4 (Q6-4.4)

O item4 da Questão6 está classificado como situado em um contexto científico, e sua resolução requer a aplicação de processos matemáticos considerados do agrupamento de conexão (FRANÇA, 2007). Diz respeito a afirmações referentes aos gráficos apresentados na questão que devem ser julgadas pelos alunos como verdadeiras ou falsas.

Analisamos cada afirmação separadamente.

Para julgar a veracidade da afirmação1 (que é falsa), os alunos deveriam saber o significado de média aritmética e comparar a média dos dados de um gráfico com a média dos dados de outro gráfico, identificando em qual deles a média é maior. Dos noventa e cinco (95) alunos que receberam um caderno de prova que continha esse item, 13,7% (13 alunos) não assinalaram nem verdadeiro nem falso; 11,6% (11 alunos) julgaram a afirmação como sendo verdadeira; e 74,7% (71 alunos), como sendo falsa.

Para julgar a veracidade da afirmação2 (que é verdadeira), os alunos deveriam comparar o total indicado nos dois gráficos e identificar qual deles é maior. Dos noventa e cinco (95) alunos que receberam um caderno de prova que continha esse item, 13,7% (13 alunos) não assinalaram nem verdadeiro nem falso; 74,7% (71 alunos) julgaram a afirmação como sendo verdadeira; e 11,6% (11 alunos), como sendo falsa.

Para julgar a veracidade da afirmação3 (que é verdadeira), os alunos deveriam comparar o corpo do gráfico (uma faixa compreendida no gráfico) entre dois gráficos e identificar em qual dos gráficos o corpo é maior. Dos noventa e cinco (95) alunos que receberam um caderno de prova que continha esse item, 12,6% (12 alunos) não assinalaram nem verdadeiro nem falso; 80% (76 alunos) julgaram a afirmação como sendo verdadeira; e 4,7% (7alunos), como sendo falsa.

Para julgar a veracidade da afirmação4 (que é verdadeira), os alunos deveriam observar cada um dos gráficos, comparando os topos dos histogramas que os formaram, procurando identificar em qual dos dois (do lado direito ou esquerdo) o total é maior. Dos noventa e cinco (95) alunos que receberam um caderno de prova que continha esse item, 14,7% (14 alunos) não assinalaram nem verdadeiro nem falso; 61% (58 alunos) julgaram a afirmação como sendo verdadeira; e 24,3% (23 alunos), como sendo falsa.

A partir das respostas apresentadas nesse item, podemos inferir que a maioria dos alunos soube interpretar corretamente os gráficos em relação aos elementos apontados nas quatro afirmações que formaram o item. Mostraram saber como comparar médias, totais, faixas em cada gráfico e entre gráficos.

5.7 QUESTÃO7 (Q7)

A Questão7 é apresentada por um enunciado composto por um pequeno texto informativo, três figuras (cada uma representando um objeto), seis gráficos, a questão propriamente dita e um local para as respostas (para cada pergunta é destinado um local de resposta).

Esta questão está classificada como situada em um contexto educacional, e sua resolução requer a aplicação de processos matemáticos considerados do agrupamento de conexão (FRANÇA, 2007). Diz respeito à associação de um fenômeno à sua representação gráfica.

Para resolver corretamente a questão, os alunos deveriam, para cada figura, refletir sobre como se dá a relação entre duas variáveis "X" e "Y" relacionadas com o fenômeno narrado no texto informativo; identificar, entre os gráficos apresentados no problema, qual o que melhor representa essa relação; e relacionar a letra (*A, B, C, D, E ou F*) correspondente ao gráfico escolhido com a figura analisada, como resposta para o problema. Para cada objeto, representado pela figura, a relação entre as duas variáveis se dá de forma diferente, e apenas um dos gráficos representa tal relação.

A ideia de Mudança e Relações está presente nesse item por relacionar um fenômeno a suas possíveis representações gráficas, representações essas que podem variar de acordo com o formato dos objetos relacionados ao fenômeno. Os alunos precisam refletir sobre como as mudanças nos formatos dos objetos influenciam as relações entre as variáveis envolvidas no fenômeno.

A primeira figura diz respeito a um objeto para o qual as variáveis "X" e "Y" relacionam-se de forma linear em relação ao fenômeno narrado nesse item, e apenas o gráfico A representa tal relação.

Dos cento e sete (107) alunos que receberam um caderno de prova que continha essa questão, 11,2% (12 alunos) não apresentaram registro algum de resolução; 59,8% (64 alunos) apresentaram uma resolução considerada incorreta; e 29% (31 alunos), uma resolução correta. Foi possível identificar nove (9) respostas diferentes, sendo que, em duas (2) delas, os alunos indicaram mais de um gráfico relacionado com a figura e, em uma(1), o aluno apenas copiou o nome da figura no espaço destinado para a resposta.

A segunda figura diz respeito a um objeto para o qual as variáveis "X" e "Y" relacionam-se de forma linear até certo momento e, depois, de forma exponencial em relação ao fenômeno narrado nesse item, e apenas o gráfico F representa tal relação.

Dos cento e sete (107) alunos que receberam um caderno de prova que continha essa questão, 12,1% (13 alunos) não apresentaram registro algum de resolução; 72,9% (78 alunos) apresentaram uma resolução considerada incorreta; e 15% (16 alunos), uma resolução correta. Foi possível identificar oito (8) respostas diferentes, sendo que, em uma (1) delas, os alunos indicaram mais de um gráfico relacionado com a figura e, em uma (1), o aluno apenas copiou o nome da figura no espaço destinado para a resposta.

A terceira figura diz respeito a um objeto para o qual as variáveis "X" e "Y" relacionam-se de forma logarítmica em relação ao fenômeno narrado nesse item, e apenas o gráfico B representa tal relação.

Dos cento e sete (107) alunos que receberam um caderno de prova que continha essa questão, 14% (15 alunos) não apresentaram registro algum de resolução; 67,3% (72 alunos) apresentaram uma resolução considerada incorreta; e 18,7% (20 alunos), uma resolução correta. Foi possível identificar seis (6) respostas diferentes, sendo que, em uma (1) delas, os alunos indicaram mais de um gráfico relacionado com a figura.

Temos que os alunos apenas apresentaram respostas para as três situações, não indicando os procedimentos realizados para a sua obtenção (muito comum em questões de múltipla escolha).

Pelas respostas apresentadas, temos que a maioria dos alunos não relacionou corretamente as figuras aos gráficos que representam o fenômeno. Não foi possível identificar se a dificuldade maior dos alunos esteve em compreender a situação ou organizá-la graficamente, por exemplo.

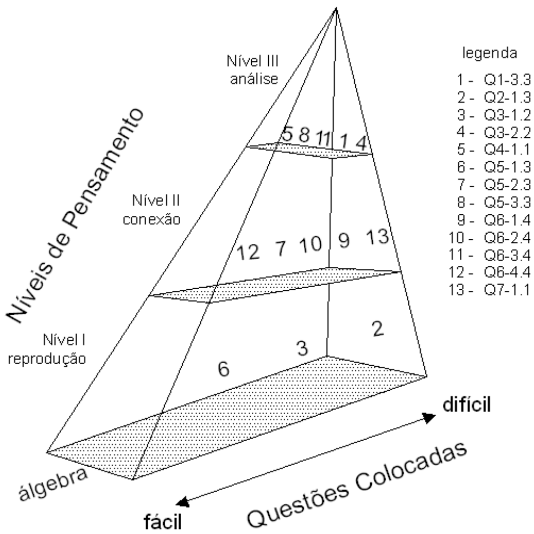
Os alunos apresentaram melhor desempenho quando a situação se tratava de uma relação exclusivamente linear, e isso pode ter acontecido porque, normalmente, é esse tipo de relação o mais abordado em sala de aula (em comparação com as outras).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na perspectiva adotada neste trabalho, para que o objetivo de investigar como os alunos paranaenses lidaram com questões não-rotineiras de matemática relacionadas à Mudança e Relações pudesse ser mais facilmente alcançado, seria desejável que a tarefa de avaliação, no caso a prova do PISA/2006, atendesse a pelo menos alguns[63] dos "Princípios para a avaliação escolar" elencados por De Lange (1999).

Dessa forma, um dos pontos desejáveis seria que a distribuição das questões apresentadas aos alunos cobrisse a parte da pirâmide de avaliação (DE LANGE, 1999) relativa a ideia estruturadora de Mudança e Relações, possibilitando um maior entendimento sobre a compreensão deles em relação a esse tema. Considerando Mudança e Relações como sendo a ideia estruturadora com ligação mais estreita com a álgebra, podemos dispor os itens relacionados a ela na pirâmide de avaliação. Tomando a secção da pirâmide referente à ideia estruturadora em estudo, não fazendo diferenciação de nível de competência dentro do próprio nível e considerando a porcentagem de erros e acertos dos alunos para determinar a "dificuldade" da questão, temos:

Figura 2 – Representação simplificada da distribuição dos itens de Mudança e Relações na pirâmide de avaliação.



---

[63] Dizemos "alguns", pois, o fato de não atender a todos os princípios poderia tornar a avaliação não completamente "boa", mas não dificultaria nossa tarefa de investigar como os alunos paranaenses lidaram com as questões.

Analisando essa representação da distribuição dos itens, temos que os itens referentes à ideia de Mudança e Relações contemplaram um dos quesitos desejáveis para serem considerados uma boa tarefa de avaliação, ou seja, a cobertura de todos os níveis de compreensão em níveis diferentes de dificuldade (avaliação equilibrada).

O preenchimento da pirâmide com itens que exigem diferentes níveis de compreensão e dificuldade é um ponto positivo em relação à qualidade da avaliação, porém não é suficiente. Mais importante que o preenchimento da pirâmide é a escolha dos itens que irão preenchê-la. Van den Heuvel-Panhuizen (1996) e De Lange (1999) enfatizam a importância e a relevância da utilização de problemas/itens ditos interessantes. De acordo com Van den Heuvel-Panhuizen (1996), para serem considerados "bons", "interessantes", os itens deveriam ser informativos, isto é, possibilitar que os alunos mostrassem o que sabem em relação ao conteúdo envolvido na questão, de modo que fosse possível enxergar essas informações sobre seu conhecimento, e significativos, no sentido de serem acessíveis e flexíveis aos alunos, ou seja, possibilitar um envolvimento deles com o problema, garantindo uma oportunidade de, pelo menos, tentarem uma formulação de resposta no nível de compreensão em que se encontram, não tendo uma resolução única, padrão.

Analisando as questões e produções escritas, pudemos perceber que os itens do tipo múltipla escolha, verdadeiro ou falso e resposta de construção fechada foram, no geral, mais acessíveis aos alunos do que os outros itens. Porém, esses tipos de itens foram (e geralmente são) menos flexíveis do que as questões do tipo de construção aberta ou resposta curta (alguns são até mesmo não flexíveis). Por um lado, mais alunos supostamente se envolvem com a questão, mas, por outro, na maioria das vezes perdem-se importantes informações sobre o processo de elaboração da resposta, limitando a avaliação a "resposta certa" ou "resposta errada".

Essa suposta acessibilidade dos itens de múltipla escolha e de verdadeiro ou falso pode ocorrer pela possibilidade do "chute", da seleção arbitrária de uma alternativa, tendo a chance (de geralmente 20% ou 25%, para itens de múltipla escolha, e de 50%, para do tipo verdadeiro ou falso) de apresentar uma resposta correta "por sorte". Não tendo nada a perder, ao invés de deixar o item sem resolução, por não saber como resolvê-lo, o aluno escolhe uma resposta dentre as apresentadas e "arrisca". Porém, uma vez utilizado um item para obter informações sobre os alunos, deve-se considerar a resposta apresentada como o resultado da compreensão que o aluno teve da situação, caso contrário, sua utilização perderia o sentido.

Para os itens fechados, os alunos apenas apresentaram respostas, sem registrar os procedimentos que realizaram para obtê-las. Já para os itens abertos, grande parte dos alunos que apresentou respostas apresentou, também, registros de procedimentos que utilizaram para operacionalizar suas estratégias de resolução.

Analisando as questões como um todo, inferimos que muitos dos itens ou são flexíveis ou são acessíveis, ou seja, não preencheram os quesitos para serem consideradas significativas e informativas para os alunos paranaenses. Por conseguinte, foi pequeno o número de alunos que, de fato, lidaram com as questões, uma vez que a maioria sequer se envolveu com elas. O que podemos afirmar é que os alunos mostram dominar os procedimentos que julgaram necessários utilizar na resolução dos problemas, considerando apenas aqueles alunos para os quais as questões foram acessíveis.

Mesmo esses estudantes que souberam realizar os procedimentos apresentaram pouco rigor na escrita matemática. Como nas provas realizadas na escola é frequente o professor considerar apenas a resposta, esta pode ser a causa do pouco cuidado com a escrita, ou seja, os alunos escreveram para si mesmos, não se preocupando com a possibilidade de outra pessoa precisar entender o que fizeram, possivelmente preocupando-se com o que julgaram mais importante – a resposta.

A maior dificuldade encontrada nessa investigação foi realizar a análise sem poder mencionar o enunciado das questões. Tivemos que focar em o quê os alunos fizeram, e pouco sobre o porquê, até porque o porquê está fortemente ligado à maneira com que a situação foi interpretada, e conhecer a interpretação elaborada por um aluno exige conhecer o enunciado. Essa dificuldade, no entanto, fortalece a ideia da importância da escolha dos problemas a serem utilizados, das situações e fenômenos que eles irão abordar. Condiz com a ideia de que os contextos dos problemas influenciam a maneira como os alunos lidam com as questões, e por isso não devem ser “deixados de lado” e devem ser muito bem selecionados. Se não importasse a que os problemas se referiam, não teríamos dificuldades em fazer a análise, pois o foco estaria nas “contas” que realizaram e não nas possíveis razões pelas quais essas “contas” foram escolhidas para operacionalizar as estratégias de resoluções que escolheram para abordar a situação.

Outra dificuldade foi a restrição imposta pelo fato de que poucos alunos se envolveram com as questões, já que não é possível saber como alunos lidam com questões quando elas não lhes são acessíveis.

Contudo, o fato de nosso campo de análise ter sido reduzido, por não podermos mostrar os enunciado das questões, não diminui o potencial da análise da produção escrita como um meio de obter informações sobre o processo de ensino e aprendizagem de alunos, uma vez que o professor em sala de aula não terá esse obstáculo. Além disso, ele tem acesso aos alunos, podendo perguntar-lhes o que quiseram dizer com sua produção, quando não for possível inferir apenas pelos registros. Em relação ao pensamento algébrico – consideramos que as questões possibilitam a sua utilização, uma vez que a maioria delas focava as relações entre quantidades envolvidas na situação, e não apenas em fazer "contas". Contudo, alguns alunos se preocuparam mais em "fazer contas", talvez porque é o mais cobrado nos problemas de matemática propostos frequentemente na aula.

Então, a análise teria sido mais rica se os problemas fossem, de fato, interessantes (acessíveis, flexíveis, informativos) para, especificamente, esses alunos paranaenses, o que acarretaria uma melhor compreensão de como lidaram e o que mostraram saber por meio deles.

Uma possível causa para o não envolvimento da maioria dos alunos paranaenses com as questões pode ser o fato da aferição do PISA não ser efetivamente uma "avaliação aberta" – como é recomendado em um dos princípios de De Lange(1999) – para esses estudantes, nem para seus professores. E isso não se limita ao estado do Paraná. Os estudantes brasileiros "convocados" a participarem das aferições do PISA, os professores desses alunos, a população em geral, raramente possuem informações suficientes sobre o PISA. Não sabem, por exemplo, o que esse programa significa, quais seus objetivos, que tipo de questões fazem parte da prova, como os alunos serão avaliados, como cada um deles "se saiu" na prova, o que será feito com os resultados, as bases teóricas desse programa de avaliação.

As informações mais comumente divulgadas pela mídia sobre o PISA, geralmente se referem ao mau desempenho dos alunos brasileiros nas aferições já realizadas, e sobre a contínua ocupação das últimas posições no "ranking" de desempenho. Muitas vezes, essas são as únicas informações sobre o PISA que os alunos e professores recebem. Esse único feedback não pode ser considerado fidedigno, pois não traz informações suficientes e necessárias sobre a avaliação, muito menos sobre como melhorar o processo de ensino e aprendizagem. Feedback desse tipo, apresentando apenas "a sentença" final sobre o desempenho geral dos alunos, seria um pouco mais útil se pelo menos quem o recebesse conhecesse os critérios de avaliação utilizados, se tivessem conhecimento de que o que se avalia no PISA não é comumente enfatizado na maioria das salas de aula, e que portanto, não deveria ser surpresa o fato de os alunos brasileiros não se "saírem bem" nas provas.

Mesmo existindo relatórios nacionais, questões disponibilizadas (algumas até com exemplos de como são corrigidas), nem todos os professores tem acesso a esse material, que dirá os alunos e a população. Além do mais, a maioria dos relatórios traz mais dados técnicos (pontuação, classificação em relação a outros países e estados, por exemplo) ou informações gerais, do tipo "houve uma melhora em relação à ideia estruturadora de Mudança e Relações". Contudo, saber que houve melhora em relação a Mudança e Relações não garante que se saiba o que Mudança e Relações significa. O que adianta saber que a média do Paraná em matemática, foi "400" se não se sabe o que significa esse número?

Em se tratando de uma avaliação que pode interferir na prática escolar, como é o caso do PISA, não se pode esperar que a comunidade escolar faça a interpretação desejada dos resultados apresentados, sem que estejam explicitas "todas as regras do jogo".

Dizer apenas que "o Brasil ocupa novamente as últimas posições do ranking mundial" é no mínimo injusto com os estudantes e professores brasileiros. Primeiro: porque são comparados com estudantes que provavelmente conhecem mais sobre o PISA, para os quais provavelmente as questões foram no mínimo acessíveis, coisa que parece não acontecer com os estudantes brasileiros; estudantes cujos professores possivelmente utilizam as mesmas bases teóricas do PISA em suas práticas de ensino e aprendizagem. Dessa forma, os alunos brasileiros e os de outros países que assim como o Brasil não utilizam a mesma base teórica do PISA, sempre estão em desvantagem em relação ao alunos dos países que tomam a mesma base. Segundo: esse tipo de feedback sobre o desempenho dos alunos brasileiros não traz informações sobre o que os alunos mostraram saber, o que foi avaliado, as dificuldades que apresentaram, enfim, não trazem informações suficientes para que se possa pensar em alguma maneira efetiva de melhorar nossa posição no ranking, ou ainda em repensar o que se tem feito a fim de obter melhores resultados não só nas próximas aferições do PISA, como também em quais quer outras avaliações (escolares ou não) pelas quais os alunos terão que se submeter.

Os feedbacks como esses não possibilitam aos professores enxergarem que não basta mudar a maneira como estão ensinando matemática, mas que, para se "sair bem" nas aferições como as do PISA, é necessário também, e principalmente, mudar a "matemática" que estão ensinando. Equivocadamente, os professores podem entender que os alunos não obtiveram bons resultados, porque "treinaram" pouco, por exemplo, e poderão focar o repensar para a melhoria em "mais treino", "mais conteúdos", "mais algoritmos", e no entanto, essas futuras ações não melhorarão o desempenho dos alunos, pois de fato, não é essa matemática "pronta e acabada" que é "cobrada" nas questões PISA.

Para que a avaliação cumpra o seu papel de fornecer informações que possam subsidiar o processo de ensino e aprendizagem é necessário que os feedbacks sejam fidedignos, e para que isso possa acontecer, a avaliação precisa ser “aberta”. Se os professores não tem acesso aos objetivos do PISA, a suas bases teóricas, como é que poderão fazer uma interpretação correta dos resultados divulgados? Se os professores não souberem que as questões utilizadas nas aferições do PISA focam mais o “pensar sobre a situação” e não no “fazer contas”, como pensarão em maneiras diferentes de abordar problemas em sala de aula diferentes do treino de algoritmos em problemas rotineiros? Se os professores não conhecem “a matemática como uma atividade humana” como poderão ensiná-la dessa maneira?

O feedback possível que temos sobre a participação dos alunos brasileiros nas aferições do PISA é o de que eles não estão aptos a lidar com esse formato de avaliação, que provavelmente não estão acostumados a lidar com a matemática da forma apresentada nas questões dessas provas. Sabemos que os brasileiros não se saem bem nas provas (afinal já participaram de quatro aferições sendo que já foram divulgados os resultados de três delas,e para as três tivemos as manchetes “Brasil entre os últimos colocados”), mas o Brasil tem como objetivo se sair bem no PISA? Se tem, o que se tem feito para que isso aconteça? Se não tem esse objetivo, por que participa desse tipo de aferição?

Parece lógico que para o Brasil se sair bem no PISA é necessário que haja uma mudança na concepção de o que é considerado matemática nas escolas brasileiras. Se essa mudança não está sendo estimulada/trabalhada, não se pode esperar que os resultados nessas aferições mudem. Talvez o objetivo não seja se sair bem no PISA, mas sim mostrar, por meio dos resultados ruins, que a maneira como o ensino e aprendizagem tem sido tomados no Brasil precisa ser revista, pois em relação aos países ditos “mais desenvolvidos” estamos ficando “para trás”, e assim, quem sabe, começar uma movimentação para uma possível mudança de atitude em relação à Educação. Mas, se o objetivo fosse apenas constatar que não está bom, para provocar a mudança, seria necessário participar de tantas aferições? Até quando o Brasil precisa se sair mal para que os brasileiros percebam a necessidade de mudança e para que ela comece a acontecer? E afinal, é de quem a vontade política para que isso de fato aconteça?

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, V. L. C. **Questões não-rotineiras**: a produção escrita de alunos da graduação em Matemática. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2009.

ALVES, R. M. F. **Estudo da produção escrita de alunos do ensino médio em questões de matemática**. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2006.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. 3 ed. Lisboa: Edições 70 Ltda., 2004.

BARLOW, M. **Avaliação escolar**: mitos e realidades. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BURIASCO, R. L. C. de. Análise da Produção Escrita: a busca do conhecimento escondido. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO, 12., 2004, Curitiba. **Anais...** Curitiba: Champagnat, 2004. v. 3, p. 243-251.

______. Sobre Avaliação em Matemática: uma reflexão. **Educação em Revista, Belo Horizonte**, n. 36, p. 255-263, dez. 2002.

BURIASCO, R. L. C. de; CYRINO, M. C. de C. T.; SOARES, M. T. C. **Manual para correção das provas com questões abertas de matemática** AVA – 2002. Curitiba: SEED/CAADI, 2003.

BUTTS, T. Formulando problemas adequadamente. In: KRULIK, S.; REYS, R. E**. A resolução de problemas na matemática escolar.** São Paulo: Atual, 1997.

CELESTE, L. B. A Produção Escrita de alunos do Ensino Fundamental em questões de matemática do PISA. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2008.

DALTO, J. O. **A produção escrita em matemática:** análise interpretativa da questão discursiva de matemática comum à 8ª série do ensino fundamental e à 3ª série do ensino médio da AVA/2002. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2007.

DE LANGE, J. **Framework for classroom assessment in mathematics. Madisons**, WI: NICLA/WCER, 1999.

DRISCOLL, M. **Fostering algebraic thinking: a guide for teachers grades 6-10**. Portsmouth, NH: Heinemann, 1999.

FEEDBACK. In: HOUAISS, A. **Dicionário eletrônico da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. CD-ROM.

FERREIRA, P. E. A. **Análise da produção escrita de professores da Educação Básica em questões não-rotineiras de matemática**. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2009.

FIORENTINI , D. et al. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2005, Porto. Actas... Porto, CIBEM, 2005. v. 1, p. 1-18.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting mathematics education**. 2 ed. Netherlands: Kluwer Academic, 1994.

FRANÇA. Ministère de L'Éducation Nationale de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche. Direction de L'Évaluation, de la Prospective et de la Performance. **L'évaluation internationale PISA 2003**: compétences des élèves français en mathématiques, compréhension de l'écrit et sciences (Les Dossier). Paris, 2007.

KAPUT, J. J. Teaching and learning a new algebra with understanding. In FENNEMA, E.; ROMBERG, T. A. (Eds.), **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1999. p. 133-155.

KIERAN, C. The Core of Algebra: reflections on its main activities. In: STACEY, K.; CHICK, H. S.; KENDAL, M. (Org). **The Future of the Teaching and Learning of Algebra**: the 12th ICMI Study. Massachusetts, USA: Kluwer Academic Publishers, 2004, p. 21-33.

KIERAN, C. The Changing Face of School Algebra. In: ALSINA, C.; ALVAREZ, J.; HODGSON, B.; LABORDE, C. & PÉREZ, A. (Ed.). **Selected Lectures**: 8th International Congress on Mathematical Education. Sevilla, Spain: S.A.E.M. Thales, 1996, p. 271-290 .

LINS, R. C. O modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. **Dynamis,** Blumenau, v. 1, n. 7, 1994. p. 29-39.

NAGY-SILVA, M. C. **Do observável ao oculto**: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª série em questões de matemática. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2005.

NCTM. **Princípios e normas para a matemática escolar**. 2 ed. Lisboa: APM, 2008.

NEGRÃO de LIMA. R. C. **Avaliação em matemática**: análise da produção escrita de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental em questões discursivas. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2006.

OCDE. **Aprendendo para o mundo de amanhã**. Primeiros resultados do PISA 2003. São Paulo: Moderna, 2005.

OCDE. **Estrutura de avaliação PISA 2003**: conhecimentos e habilidades em matemática, leitura, ciências e resolução de problemas. Tradução B & C Revisão de textos. São Paulo: Moderna, 2004.

PEREGO, F. O que a produção escrita pode revelar? Uma análise de questões de matemática. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2006.

PEREGO, S. C. **Questões abertas de matemática**: um estudo de registros escritos. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2005.

SANTOS, E. R. dos. **Estudo da produção escrita de estudantes do ensino médio em questões discursivas não rotineiras de matemática**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2008.

SEGURA, R. O. **Estudo da produção escrita de professores em questões discursivas de matemática**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2005.

TRIOLA, Mario F. **Introdução à estatística**. 10 ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2008.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. Realistic Mathematics Education: work in progress. In: BREITEIG, T.; BREKKE, G. (Eds.). **Theory into practice in mathematics education.** Norway: Faculty of Mathematics and Sciences/Hogskolen I Agder, 1998. p.1-38. Disponível em: <http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/4966.pdf>. Acesso em: 05 fev. 2009.

______. **Assessment and realistic mathematics education**. Utrecht: CD-ß Press/Freudenthal Institute, Utrecht University. 1996.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. **O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2007.