Universidade Estadual de Londrina

MICHELLE ANDRADE KLAIBER

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM QUÍMICA: O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO POR MEIO DE UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Londrina

2019

MICHELLE ANDRADE KLAIBER

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM QUÍMICA: O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO POR MEIO DE UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Tese apresentada à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da UEL, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Angela Marta Pereira das Dores Savioli

Londrina
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Klaiber, Michelle Andrade.

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM QUÍMICA : O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO POR MEIO DE UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO / Michelle Andrade Klaiber. - Londrina, 2019.

329 f.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2019.

Inclui bibliografia.

1. Pensamento Matemático Avançado - Tese. 2. Ensino Superior - Tese. 3. Educação Matemática - Tese. 4. Matrizes e Sistemas de Equações Lineares - Tese. I. Pereira das Dores Savioli, Angela Marta. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

MICHELLE ANDRADE KLAIBER

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM QUÍMICA: O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO POR MEIO DE UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Profª. Drª. Angela Marta P. D. Savioli
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Profª. Dra. Barbara Lutaif Bianchini
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC – SP

Prof. Dr. Diego Fogaça Carvalho
Universidade Norte do Paraná - UNOPAR

Profª. Drª. Kátia Socorro Bertolazi
Instituto Federal do Paraná - IFPR

Profª. Drª. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 07 de Agosto de 2019.

Aos meus pais, Paulo e Lucinei, com todo o meu amor e gratidão por estarem ao meu lado na conquista de mais esse sonho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus, que me deu forças para alcançar mais essa conquista e colocou em meu caminho pessoas muito especiais que me ajudaram a vencer todos os obstáculos.

Agradeço aos meus pais, Paulo e Lucinei, e à minha irmã Francielly, que com muito amor me apoiaram e incentivaram, ao meu marido Daniel e ao Byte, que foram meus companheiros em todos os momentos, e aos demais familiares que sempre oraram por meu sucesso.

Agradeço, em especial, à minha orientadora Profª. Drª. Angela Marta Pereira das Dores Savioli, por sua excelente orientação, pela paciência e confiança dedicadas a mim durante a realização desta pesquisa, e pelo exemplo de profissional no qual sempre me espelharei.

Agradeço aos amigos que fiz no PECEM – UEL e, em especial, aos amigos do Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático Avançado (GEPPMat), pelas discussões e contribuições e pelo companheirismo nesta trajetória.

Agradeço aos professores e secretários do PECEM - UEL pelo aprendizado e pela colaboração. Aos colegas professores do Departamento Acadêmico de Matemática e Estatística da UTFPR - Apucarana, por proporcionarem que eu me dedicasse exclusivamente ao doutorado nesses últimos dois anos.

Agradeço aos professores que compuseram a banca, Profª. Drª. Barbara Lutaif Bianchini, Prof. Dr. Diego Fogaça Carvalho, Profª. Drª. Kátia Socorro Bertolazi e Profª. Drª. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino, pelas contribuições e sugestões que aperfeiçoaram este trabalho.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro, que possibilitou minha participação e apresentação em eventos científicos.

Agradeço, enfim, a todos que de alguma forma contribuíram e/ou almejaram pelo meu sucesso na realização desse trabalho.

O que impede de saber não são nem o tempo nem a inteligência, mas somente a falta de curiosidade.

(Agostinho da Silva)

KLAIBER, Michelle Andrade. **Introdução à Álgebra Linear em um curso de licenciatura em química:** o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado por meio de uma Experiência de Ensino. 2019. 329. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

RESUMO

A presente tese tem por objetivo investigar indícios de desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado em produções escritas de estudantes do primeiro semestre de um curso de Licenciatura em Química em uma disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, por meio da realização de uma Experiência de Ensino. Para tanto, construiu-se uma trajetória de aprendizagem, composta por cinco tarefas e dois instrumentos de avaliação, para os conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares. A referida trajetória desenvolveu-se em nove episódios de ensino, durante uma disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, nos quais as interações e discussões entre a professora-pequisadora e os estudantes, bem como a escolha e a condução das tarefas, pautaram-se nas perspectivas do Ensino-Aprendizagem Exploratório de Ponte e do Pensamento Matemático Avançado (PMA). Por meio de uma abordagem predominantemente qualitativa e, à luz da análise de conteúdo, realizou-se a análise de cada um dos episódios, examinando-se as resoluções dos estudantes para cada questão, em busca de indícios da mobilização de processos do PMA, de acordo com Dreyfus e Eisenberg. Identificou-se, por meio das análises que, durante o desenvolvimento da trajetória de aprendizagem, todos os onze estudantes participantes mobilizaram em suas resoluções os seguintes processos do PMA: representação simbólica, representação mental, visualização, intuição, mudança de representação e tradução, analogia, generalização e síntese. Sendo que, no instrumento de avaliação aplicado no primeiro episódio, apenas um estudante mobilizou os processos de analogia e síntese relacionados à abstração, enquanto, no último episódio, esses processos foram mobilizados por seis estudantes. Conclui-se que o ensino de conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares por meio de tarefas investigativas, com uma abordagem exploratória fundamentada em dificuldades e conhecimentos prévios dos estudantes, pode proporcionar o desenvolvimento de processos do PMA e, em especial, dos processos relacionados à abstração.

Palavras-chave: Pensamento Matemático Avançado. Ensino Superior. Educação Matemática. Matrizes. Sistemas de Equações Lineares.

KLAIBER, Michelle Andrade. **Introduction to Linear Algebra in a degree in Chemistry:** the development of Advanced Mathematical Thinking through a Teaching Experiment. 2019. 329p. Thesis (PhD in Science Teaching and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina, 2019.

ABSTRACT

This thesis aims to investigate the development of Advanced Mathematical Thinking in written productions of undergraduate students from the first semester of course in Chemistry in a discipline of Analytical Geometry and Linear Algebra, through the accomplishment of a Teaching Experiment. For that, a learning trajectory was constructed, composed of five tasks and two evaluation instruments, for the contents of Matrices and Linear Equations Systems. This trajectory was developed in nine episodes of teaching, during a discipline of Analytical Geometry and Linear Algebra, in which the interactions and discussions between the professor-researcher and the students, as well as the choice and the conduction of the tasks, were based in the perspectives of Inquiry-Based Learning from Ponte and Advanced Mathematical Thinking (AMT). Through a predominantly qualitative approach, guided by the principles of content analysis, each episode was analyzed, examining the students' resolutions for each question, searching for evidence of the mobilization of AMT processes, according to Dreyfus and Eisenberg. It was identified through the analysis that during the development of the learning trajectory all the eleven participating students mobilized in their resolutions the following AMT processes: symbolic representation, mental representation, visualization, intuition, representations switch and translation, analogy, generalization and synthesis. Since, in the evaluation instrument applied in the first episode, only one student mobilized the processes of analogy and synthesizing related to abstraction, while in the last episode the same processes were mobilized by six students. It is concluded that the teaching of Matrices and Linear Equations Systems contents through investigative tasks, with an exploratory approach based on students' difficulties and previous knowledge, can provide the development of AMT processes and, in particular, processes related to abstraction.

Key words: Advanced Mathematical Thinking. Higher Education. Mathematical Education. Matrices. Linear Equations Systems.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Iniciamos este capítulo discorrendo a respeito das experiências acadêmicas e motivações da pesquisadora, descrevendo a pertinência desta pesquisa e o contexto em que se insere. Na sequência, descrevemos os objetivos e questões que guiaram o processo da investigação. Na última seção, apresentamos a organização desta tese.

1.1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA

Minha trajetória como professora no Ensino Superior teve início em 2008. Desde então, lecionei em diferentes cursos, como Sistemas de Informações, Engenharia de Produção, Engenharia Elétrica, Engenharia Têxtil e outros, em universidades públicas e particulares. Dentre as disciplinas que ministrei, as de Geometria Analítica e de Álgebra Linear estavam sempre presentes, o que me fez desenvolver um interesse especial no ensino dessas disciplinas.

A partir do ano de 2012, comecei a ministrar a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear no curso de Licenciatura em Química, em uma universidade federal do Paraná.

Trabalhar em um curso de licenciatura, proporcionou-me uma visão diferente. Pois, enquanto nas engenharias e bacharelados minha preocupação principal era que os estudantes desses cursos soubessem aplicar tais conhecimentos em suas áreas, na licenciatura passei a ter uma visão menos instrumental do ensino da Geometria Analítica e da Álgebra Linear, refletindo a respeito da importância de que os estudantes compreendessem a construção do conhecimento não apenas para a aplicação, mas para o ensino, em sua prática docente.

Em minha experiência como professora na disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, era comum lidar com a dificuldade que muitos estudantes apresentavam na compreensão de alguns conceitos da Álgebra Linear, e com a dificuldade que eu, como professora, encontrava na tentativa de tornar esses conteúdos compreensíveis por meio de aplicações e de articulações com outros conceitos e com conhecimentos prévios dos estudantes.

A cada semestre, sempre buscava novas formas de abordar os conteúdos dessa disciplina, alterando a sequência dos conteúdos, utilizando outros livros/autores como base para as minhas aulas, discutindo novas possibilidades com outros professores que lecionam também essa disciplina, fazendo uso e por vezes organizando apostilas baseadas nos livros didáticos da disciplina, trabalhos de pesquisa em grupos, resolução de exercícios/problemas em sala de aula, seminários, mas ainda assim compartilhava com meus colegas de profissão o desconforto com as desistências e reprovações ao final do semestre.

Causava-me estranheza como os conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares eram pouco conhecidos pelos estudantes ingressantes do Ensino Superior, estando esses conteúdos presentes em documentos nacionais que orientam o ensino de matemática em nível médio, como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM+) (BRASIL, 2002), as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) e, recentemente, a Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Médio (BNCC) (BRASIL, 2018). Era notável como muitos estudantes estavam acostumados com uma aprendizagem mecânica, memorizando métodos e procedimentos sem fazer muitos questionamentos.

Tais inquietações, juntamente com o ingresso no doutorado em 2016, direcionaram-me para a pesquisa a respeito do ensino e da aprendizagem dos conteúdos de Matrizes e Sistemas Lineares no Ensino Superior, na busca de conhecimento sobre a aprendizagem dos estudantes e de alternativas frutíferas para o ensino desses conteúdos.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, “a forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático” (BRASIL, 2006, p. 69), ou seja, as situações de aprendizagem devem valorizar a argumentação, a dedução, a elaboração e a verificação de conjecturas, a generalização e a abstração. E, ainda, com relação à aprendizagem, consoante à BNCC (BRASIL, 2018), os estudantes devem:

> [...] desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar,

> argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL, 2018, p. 518).

Porém, frequentemente nos depararmos com estudantes que ingressam no Ensino Superior sem ter domínio de conteúdos matemáticos essenciais para a aprendizagem de conteúdos mais avançados durante a graduação, e hesitantes, sentindo-se despreparados quanto à Matemática (LÓPEZ; MENDOZA; SILVA, 2010).

Bertolazi (2012), ao investigar os conhecimentos e compreensões de licenciandos em Matemática a respeito de conteúdos de Sistemas de Equações Lineares, constatou que durante a resolução de algumas tarefas, apenas três dentre os dezessete participantes apresentaram indícios dos processos de generalização e síntese, segundo Dreyfus (2002) – processos esses relacionados à abstração, como será discutido com maiores detalhes no próximo capítulo. A autora conclui, ainda, que muitos estudantes se sentem inseguros, confusos, e afirmam possuir dificuldades para lidar com tais conteúdos.

Algumas pesquisas nacionais (SIMIÃO (2010); FARO (2010); CURY e BISOGNIN (2009))[1] que investigam a mobilização de conteúdos da Álgebra Linear na transição do Ensino Médio para o Ensino Superior e pesquisas internacionais realizadas em Portugal, Espanha e Colômbia (BARROS, FERNANDES e ARAÚJO (2016); LUCAS *et al.* (2014); LÓPEZ, MENDOZA e SILVA (2010) respectivamente) que investigam a *prontidão*[2] dos estudantes e o baixo rendimento em Álgebra Linear, apontam para a não compreensão de conceitos e a falta de conhecimentos prévios para a aprendizagem dessa disciplina.

> Em relação à avaliação de conceitos e conhecimentos prévios para estudar álgebra linear, observa-se que os alunos realmente têm deficiências nos conceitos anteriormente vistos [...]. Isso mostra novamente a necessidade de executar propostas acadêmicas que permitam aos alunos desenvolver estratégias de aprendizagem,

---

[1] Essas e algumas outras pesquisas citadas nessa seção serão discutidas com mais detalhes no capítulo seguinte, no qual será apresentado o levantamento bibliográfico.

[2] O termo *prontidão* foi utilizado por Barros, Fernandes e Araújo (2016) para referir-se ao domínio adequado de conhecimentos e habilidades precedentes para que os estudantes possam enfrentar com êxito novos conteúdos.

> maturidade matemática e adaptação à universidade (LÓPEZ; MENDOZA; SILVA, 2010, p. 291, tradução nossa)[3].

Corroborando com as pesquisas citadas realizadas em Portugal, Espanha e Colômbia, para o pesquisador brasileiro Simião (2010, p. 261), “pode-se considerar que muitas das dificuldades encontradas no Ensino Superior (em Álgebra Linear) estão associadas às deficiências do Ensino Médio”.

Além das dificuldades cognitivas apresentadas pelos estudantes, deve-se mencionar a dificuldade conceitual inerente à Álgebra Linear devido à sua natureza teórica e formal (DORIER; SIERPINSKA, 2001) e as dificuldades dos professores no ensino da Álgebra Linear, como constatado por Moro, Viseu e Siple (2016).

> Observamos que a maior dificuldade que os professores enfrentam no ensino de álgebra linear é lidar com a dificuldade dos alunos em relação à abstração [...]. Alguns professores revelam ter dificuldades em responder aos alunos a finalidade de conteúdos em estudo e também em mostrar aos alunos a importância da abstração (MORO; VISEU; SIPLE, 2016, p. 255).

Decidimos[4], então, investigar essas dificuldades no ensino e na aprendizagem da Álgebra Linear por meio da construção de uma trajetória de aprendizagem, apoiada em uma metodologia de ensino que oportunizasse aos licenciandos ingressantes do Ensino Superior uma aprendizagem efetiva dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, ou ainda, como proposto na BNCC (BRASIL, 2018, p. 528), para que esses estudantes sejam capazes de “resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais”.

Dessa forma, a trajetória de aprendizagem – que consiste em um percurso de aprendizagem guiado por um conjunto de tarefas e objetivos de aprendizagem, elaborados e planejados pelo professor (SIMON, 1995) – é o

---

[3] Do espanhol *“En cuanto a la evaluación de conceptos y conocimientos prévios para cursar álgebra lineal se observa que realmente los alumnos tienen deficiências en los conceptos anteriormente vistos [...]. Esto muestra uma vez más la necesidad de ejecutar propuestas académicas que le permitan al estudiante desarrollar estratégias de aprendizaje, madurez matemática y adaptación a la universidad”*.

[4] Após uma síntese sobre minhas experiências e motivações, deixo de relatar o desenvolvimento da pesquisa no singular, pois contei com a contribuição de várias pessoas.

produto da Experiência de Ensino[5] desenvolvida nesta tese. Tal trajetória nos orientou em um trabalho em sala de aula que priorizasse tarefas exploratórias e investigativas e momentos de reflexão e discussão por parte dos estudantes, caracterizando o trabalho do professor em sala de aula, configurando, segundo Ponte (2005), a perspectiva do Ensino-Aprendizagem Exploratório.

Para a construção e experimentação de tarefas que proporcionassem aos estudantes a retomada e o aprofundamento dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, bem como o desenvolvimento de processos cognitivos que fazem parte da construção desse conhecimento, nos baseamos nas dificuldades encontradas nos processos de ensino e de aprendizagem desses conteúdos – que serão tratadas com pormenores no Capítulo 4 –, na abordagem do Ensino-Aprendizagem Exploratório e sobretudo nos processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) propostos por Dreyfus (2002) e Dreyfus e Eisenberg (1996). Nesse sentido, acreditamos que a compreensão dos processos envolvidos no PMA pode nos auxiliar na identificação de lacunas no conhecimento construído pelos estudantes, e nos direcionamentos de sala de aula para o aprimoramento e desenvolvimento de tais processos nos estudantes.

O ineditismo dessa pesquisa se encontra na associação de duas teorias, uma que nos permite olhar para o ensino, para as ações do professor em sala de aula e a outra que nos permite olhar para a aprendizagem, para os processos cognitivos desenvolvidos pelos estudantes na aprendizagem da matemática. Nesse estudo, essas duas teorias – Ensino-Aprendizagem Exploratório e Pensamento Matemático Avançado, respectivamente – se fundem na construção de um caminho de aprendizagem em Álgebra Linear.

O objetivo é o de proporcionar aos estudantes um ambiente de aprendizagem favorável à mobilização de conhecimentos prévios e a construção de novos conceitos, e que propicie ao professor uma maior compreensão de como se desenvolve a aprendizagem e o pensamento matemático dos estudantes.

---

[5] A Experiência de Ensino consiste em uma abordagem metodológica direcionada para a compreensão do progresso que os estudantes realizam durante períodos de instrução planejada, bem como dos efeitos dessa instrução sobre a atividade mental dos estudantes (KANTOWSKI,1978; STEFFE e THOMPSON, 2000).

Sendo assim, a trajetória de aprendizagem construída neste trabalho atende à necessidade apresentada em diversas pesquisas (BARROS, FERNANDES e ARAÚJO (2016); LUCAS *et al*. (2014); CURY (2015); LÓPEZ, MENDOZA e SILVA (2010); MASOLA (2014)) de que se construam propostas acadêmicas voltadas a esses aspectos, e poderá contribuir com a pesquisa em Educação Matemática ampliando conhecimentos a respeito dos processos de aprendizagem e de como promovê-los, uma vez que "um objetivo de pesquisa abrangente no campo das trajetórias de aprendizagem é gerar conhecimento sobre a aprendizagem e o ensino" (CLEMENTS; SARAMA, 2004, p. 85, tradução nossa)[6].

Na seção seguinte, guiados e motivados pelas pesquisas aqui discutidas, delinearemos os objetivos dessa investigação.

1.2 OBJETIVOS DA PESQUISA

Este estudo foi realizado por meio da implementação de uma Experiência de Ensino, dividida em nove episódios, distribuídos durante um semestre letivo em uma turma do primeiro período do curso de Licenciatura em Química de uma universidade federal do Paraná. Os conteúdos explorados nas tarefas foram os de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, como justificado anteriormente.

A perspectiva de ensino que orientou a atividade[7] em sala de aula, durante os episódios, foi a do Ensino-Aprendizagem Exploratório, que prioriza tarefas exploratórias e investigativas e momentos de reflexão e discussão por parte dos estudantes (PONTE, 2005). Após a realização de cada episódio, foram conduzidas as análises retrospectivas (STEFFE; THOMPSON, 2000) por meio das quais o planejamento para os próximos episódios foi reajustado e as tarefas foram readequadas de forma a atender as necessidades e dificuldades dos estudantes, sempre buscando proporcionar tarefas com contextos significativos ao curso e aos estudantes, e explorar o estudo de

[6] Do inglês *"an overarching research goal in the field of learning trajectories is to generate knowledge of learning and teaching".*
[7] Entendemos o termo atividade, segundo Ponte (2014), como uma ação física ou mental de um indivíduo para realizar algo.

diversos tipos de representações com o auxílio de *softwares*, desenvolvendo assim, processos do Pensamento Matemático Avançado sugeridos por Dreyfus (2002). Como produto dessa Experiência de Ensino, construímos uma trajetória de aprendizagem para os conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares.

Assim, com base nos pressupostos teóricos e nas escolhas metodológicas mencionadas anteriormente, delineamos os objetivos e questões norteadores desta pesquisa.

Objetivo Geral:

Investigar indícios de desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado em produções escritas de estudantes do primeiro semestre de um curso de Licenciatura em Química em uma disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, por meio da realização de uma Experiência de Ensino.

Objetivos Específicos:

- Conhecer construções matemáticas e noções prévias de estudantes por meio de uma avaliação diagnóstica[8], referente aos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares;

- Elaborar uma trajetória de aprendizagem para os conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares;

- Identificar e discutir indícios de processos do PMA na produção escrita de estudantes ao início, durante e ao final da realização de uma trajetória de aprendizagem.

Relacionada com os objetivos enunciados anteriormente, surgiu a seguinte questão para uma reflexão posterior:

Que potencialidades podem ser evidenciadas a partir de uma trajetória de aprendizagem, pautada nas perspectivas do Ensino-Aprendizagem Exploratório e do Pensamento Matemático Avançado, para a compreensão dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares?

[8] A referida avaliação diagnóstica diz respeito à análise e interpretação da produção escrita dos estudantes durante a resolução de uma prova escrita, descrita na seção 4.1.3.

Após descrever os objetivos que nos orientaram no desenvolvimento dessa pesquisa, na seção seguinte, apresentamos a organização textual da tese.

1.3 ORGANIZAÇÃO DA TESE

Este estudo encontra-se organizado em seis capítulos. Nesse primeiro capítulo de introdução, apresentamos nossas motivações e objetivos para esta investigação, bem como sua justificativa e relevância. Na segunda seção, anunciamos os objetivos gerais e específicos que nos guiaram e na última seção do capítulo, apresentamos como esta tese foi estruturada.

No segundo capítulo, iniciamos com um levantamento bibliográfico de pesquisas relacionadas ao nosso tema de investigação: o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado, em estudantes de Licenciatura em Química, em um contexto de Ensino-Aprendizagem Exploratório voltado aos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares. Nas duas seções seguintes discutimos os principais aspectos teóricos que orientaram e fundamentaram a construção desta tese: o Pensamento Matemático Avançado – segundo as perspectivas de Dreyfus (2002) e Dreyfus e Eisenberg (1996) e o Ensino-Aprendizagem Exploratório (PONTE, 2005).

Em seguida, no terceiro capítulo, expomos os procedimentos metodológicos adotados na organização e condução dessa pesquisa que é de natureza qualitativa, segundo Bogdan e Biklen (1994) e constitui uma Experiência de Ensino (STEFFE; THOMPSON, 2000). Além disso, apresentamos as caracterizações do curso e dos sujeitos da pesquisa, e descrevemos os processos de coleta e análise dos dados, segundo Bardin (1977).

No quarto capítulo, inicialmente discutimos os pressupostos teóricos para a construção da Experiência de Ensino. Sequencialmente, apresentamos alguns aspectos relacionados aos conceitos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, sendo eles: as abordagens apresentadas pelos livros didáticos da disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear e; as dificuldades dos estudantes na aprendizagem de tais conceitos, levantadas a partir da pesquisa bibliográfica e de uma prova escrita com função diagnóstica. Finalizamos o capítulo com a descrição da elaboração das tarefas, e com a narrativa dos episódios que compõem a Experiência de Ensino.

Dando continuidade, no quinto capítulo, trazemos a análise detalhada de cada um dos episódios de ensino, destacando os processos do Pensamento Matemático Avançado, segundo o quadro teórico de Dreyfus (2002) e Dreyfus e Eisenberg (1996), evidenciados na produção escrita dos estudantes.

Finalmente, no sexto e último capítulo tecemos nossas reflexões e considerações finais, discutimos os principais resultados retomando os objetivos e questões que guiaram esta investigação, e encerramos apresentando conclusões, delimitações e perspectivas futuras desse estudo.

2. ASPECTOS TEÓRICOS

Neste capítulo apresentamos os fundamentos que orientaram a construção da Experiência de Ensino. Na primeira seção, apresentamos um levantamento bibliográfico no qual discutimos acerca de algumas pesquisas relevantes para o desenvolvimento dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares. Na segunda seção abordamos o Pensamento Matemático Avançado, de acordo com o quadro teórico de Dreyfus (2002) e Dreyfus e Eisenberg (1996), teoria cognitiva segundo a qual analisaremos indícios da aprendizagem dos estudantes. Na última seção do capítulo, tratamos do Ensino-Aprendizagem Exploratório (PONTE, 2005), perspectiva segundo a qual guiamos nossa prática pedagógica visando o desenvolvimento de processos do Pensamento Matemático Avançado.

2.1 PESQUISAS RELACIONADAS

Para o desenvolvimento de um trabalho pautado no cenário educacional atual e que pudesse contribuir para o avanço das pesquisas envolvendo o ensino e a aprendizagem de Matemática, consideramos necessário conhecer e explorar o que tem sido investigado por outros pesquisadores na área de Educação Matemática, bem como os avanços e possibilidades nessa área. Por essa razão, guiados pela análise de conteúdos de Bardin (1977), realizamos o levantamento a seguir, o qual nos orientou na busca de outros aportes teóricos, e nos desvelou possíveis e fecundos caminhos a serem trilhados nesta pesquisa.

O seguinte levantamento foi feito por meio de buscas realizadas, em 2017, no Catálogo de Teses e Dissertações e no Portal de Periódicos, ambos localizados no portal CAPES[9]. No referido portal, os periódicos são classificados por área e por níveis e, para este estudo, buscamos os artigos em periódicos nacionais e internacionais da área de Ensino (que trazem produções relacionadas à Educação Matemática e ao Ensino de Matemática), que fossem

[9] O Portal CAPES pode ser acessado em http://www.capes.gov.br/ .

classificados[10] nos extratos A1, A2, B1 e B2 do Qualis-CAPES. Foram encontrados 34 periódicos, os quais estão listados no Apêndice A.

Nos periódicos selecionados, buscamos artigos que trouxessem expressos no título os termos "Álgebra Linear", "Sistemas Lineares", "Matrizes", "ensino exploratório" ou "pensamento matemático" (em periódicos internacionais utilizamos também esses termos em Espanhol e em Inglês), com data de publicação a partir do ano de 2007 até o ano de 2017.

A escolha dos referidos termos foi feita com a intenção de conhecer as pesquisas a respeito do ensino e da aprendizagem dos conteúdos de Sistemas Lineares e Matrizes, e, além disso, a respeito do desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes nesses conteúdos ou em Álgebra Linear de forma mais geral. Convém mencionar que com a mesma intenção, outras pesquisas que emergiram a partir da leitura e das referências bibliográficas de outros trabalhos, com os quais nos deparamos no percurso deste estudo, foram selecionadas e incluídas neste levantamento.

Apesar de esta pesquisa ser realizada com estudantes do Ensino Superior, não inserimos esse termo na busca para não excluir trabalhos realizados em outros níveis de ensino, uma vez que os conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares são, comumente, estudados no Ensino Médio. Nosso interesse em trabalhos realizados com estudantes do Ensino Médio, está no fato de julgarmos relevante para o desenvolvimento desta pesquisa, entender como se deu o estudo e as dificuldades trazidas na compreensão desses conteúdos na transição do Ensino Médio para o Ensino Superior.

Após essa primeira triagem, foi realizada a leitura dos resumos e dos objetivos de cada trabalho de modo a selecionar os relacionados ao ensino e à aprendizagem de Matrizes e/ou Sistemas Lineares, com enfoque no ensino exploratório desses conteúdos, ou no desenvolvimento do pensamento matemático em conteúdos da Álgebra Linear.

No quadro a seguir, elencamos as 24 pesquisas selecionadas no levantamento. Exibimos, para cada pesquisa, o título; os autores; um resumo

[10] De acordo com o próprio portal, "a classificação de periódicos e eventos é realizada pelas áreas de avaliação e passa por processo anual de atualização. Esses veículos são enquadrados em estratos indicativos da qualidade - A1, o mais elevado; A2; B1; B2; B3; B4; B5; C - com peso zero".

com o objetivo do estudo; a instituição ou periódico de publicação; e as classificamos quanto ao tipo: tese, dissertação ou artigo. Por fim, ordenamos de acordo com o respectivo ano de publicação, do mais antigo ao mais recente.

Quadro 1 – Pesquisas selecionadas no levantamento bibliográfico.

<table>
<tr><th colspan="2">DADOS DO ESTUDO</th><th>OBJETIVO DO ESTUDO</th></tr>
<tr><td>Ano de Publicação</td><td>2007</td><td rowspan="5">[...] uma reforma na disciplina de Álgebra Linear está sendo testada em uma classe de alunos do primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática do IME-USP no corrente ano. Deseja-se, com essa iniciativa, adequar o currículo de Álgebra Linear elementar às necessidades aos conhecimentos prévios dos alunos quando de seu ingresso à universidade. Os objetivos deste projeto consistem, justamente, em analisar e discutir os resultados dessa experiência. (FRATELLI; MONTEIRO, 2007, p. 1)</td></tr>
<tr><td>Título</td><td>Dificuldades do Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear</td></tr>
<tr><td>Autor(es)</td><td>Bianca Cristina Fratelli e Martha Salerno Monteiro</td></tr>
<tr><td>Instituição/ Periódico</td><td>Universidade de São Paulo - IME USP</td></tr>
<tr><td>Tipo</td><td>Artigo</td></tr>
<tr><td>Ano de Publicação</td><td>2008</td><td rowspan="5">Verificar por meio de uma sequência didática para o ensino de Sistemas de Equações Algébricas Lineares se os alunos conseguem realizar a conexão entre o método da substituição e o método do escalonamento, e desenvolver a conversão entre os métodos caracterizando assim, o aprendizado do objeto matemático estudado. (PANTOJA, 2008)</td></tr>
<tr><td>Título</td><td>A conversão de registros de representações semióticas no estudo de sistemas de equações algébricas lineares</td></tr>
<tr><td>Autor(es)</td><td>Lígia Françoise Lemos Pantoja</td></tr>
<tr><td>Instituição/ Periódico</td><td>Universidade Federal do Pará</td></tr>
<tr><td>Tipo</td><td>Dissertação</td></tr>
<tr><td>Ano de Publicação</td><td>2008</td><td rowspan="5">Fazer uma análise qualitativa sobre a abordagem de Sistemas Lineares apresentada por três livros didáticos do Ensino Médio, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM). (BATTAGLIOLI, 2008)</td></tr>
<tr><td>Título</td><td>Sistemas lineares na segunda série do ensino médio: um olhar sobre os livros didáticos</td></tr>
<tr><td>Autor(es)</td><td>Carla dos Santos Moreno Battaglioli</td></tr>
<tr><td>Instituição/ Periódico</td><td>Pontifícia Universidade Católica – PUC/SP</td></tr>
<tr><td>Tipo</td><td>Dissertação</td></tr>
</table>

Ano de Publicação	2009	A investigação teve como objetivos: a) analisar e classificar erros cometidos por alunos ingressantes em disciplinas matemáticas de cursos superiores; b) elaborar e desenvolver atividades de sala de aula, para explorar as dificuldades detectadas; c) avaliar os resultados da experiência e a possibilidade de re-aplicação em diferentes IES. (CURY; BISOGNIN, 2009, p. 3)
Título	Análise de Soluções de um Problema Representado por um Sistema de Equações	
Autor(es)	Helena Noronha Cury e Eleni Bisognin	
Instituição/ Periódico	Centro Universitário Franciscano – Bolema	
Tipo	Artigo	
Ano de Publicação	2010	Analisar os conhecimentos supostos mobilizáveis ou disponíveis pelos estudantes quando ingressam no Ensino Superior, quando se considera as noções de sistemas lineares. (FARO, 2010)
Título	Os conhecimentos supostos disponíveis na transição entre o ensino médio e o ensino superior: o caso da noção de sistemas de equações lineares	
Autor(es)	Sérgio Destácio Faro	
Instituição/ Periódico	Universidade Bandeirante de São Paulo	
Tipo	Dissertação	
Ano de Publicação	2010	O objetivo da pesquisa foi conhecer a atitude e aptidão dos alunos frente à matemática, seus conhecimentos prévios em matemática básica e fundamental, bem como o que os motivou a selecionar a carreira que estão estudando. (LÓPEZ; MENDOZA; SILVA, 2010)
Título	Algunas causas que determinan el bajo rendimiento académico en el curso de álgebra lineal	
Autor(es)	Vivian Libeth Uzuriaga López, Jhon Jairo Arias Mendoza e Deibys Gildardo Manco Silva	
Instituição/ Periódico	Scientia et Technica	
Tipo	Artigo	
Ano de Publicação	2010	Nesta pesquisa consideram-se as organizações matemáticas e didáticas associadas à noção de matriz, suas operações e propriedades, com o objetivo de identificar o que se espera como conhecimento prévio, pelo menos mobilizável, desse conteúdo matemático dos estudantes, na transição entre o Ensino Médio e o Superior. (SIMIÃO, 2010)
Título	A noção de matriz na transição entre o ensino médio e o superior.	
Autor(es)	Fábio Simião	
Instituição/ Periódico	Universidade Bandeirante de São Paulo	
Tipo	Dissertação	

Ano de Publicação	2010	Proporcionar uma análise teórica das construções envolvidas nos distintos conceitos de álgebra linear utilizando a Teoria APOE; validar referida análise para cada conceito mediante pesquisa empírica focando a atenção nos distintos conceitos que a compõe e nas relações entre eles e, com base nos resultados obtidos, fazer sugestões didáticas que contribuam a um ensino fundamentado na pesquisa. (OKTAÇ; TRIGUEIROS, 2010)
Título/	¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal?	
Autor(es)	Asuman Oktaç e María Trigueros	
Instituição/ Periódico	RELIME	
Tipo	Artigo	
Ano de Publicação	2011	Elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que aborda a resolução algébrica e gráfica dos sistemas lineares quadrados com o auxílio do *software* educacional Winplot. (JORDÃO, 2011)
Título	Um Estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio	
Autor(es)	Ana Lúcia Infantozzi Jordão	
Instituição/ Periódico	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP	
Tipo	Dissertação	
Ano de Publicação	2012	[...] investigar os modelos mentais de sistemas lineares existentes entre alunos e professores do Instituto Federal de Minas Gerais (IFMG) Campus Formiga, com a proposta final de fornecer, aos docentes deste conteúdo, parâmetros os quais justifiquem a inserção de outras de formas de ensino e, em consequência, para os alunos, a oportunidade de se construir uma aprendizagem significativa. (PIMENTA *et al*., 2012, p. 2)
Título	Os Modelos Mentais Relacionados ao Aprendizado de Sistemas Lineares no Ensino Superior	
Autor(es)	Gustavo Venancio Pimenta, Graziela Belmira Dias Da Silva, Aparecida Dos Reis Eufrásio, Adeliene Aparecida Porto e Niltom Vieira Júnior	
Instituição/ Periódico	Instituto Federal de Minas Gerais – Alexandria	
Tipo	Artigo	
Ano de Publicação	2012	Destacar quais os erros e dificuldades sentidas pelos estudantes na aprendizagem de conteúdos de sistemas de equações lineares. (BARROS; FERNANDES; ARAÚJO, 2012, p. 334)
Título	Raciocínios desenvolvidos na verificação das soluções de sistemas de equações lineares	
Autor(es)	Paula Maria Barros, José António Fernandes e Cláudia Mendes Araújo	
Instituição/ Periódico	Universidade do Minho - XXIII SIEM	
Tipo	Artigo	

Ano de Publicação	2012	Comprender y analizar desde una postura cognitiva el hecho didáctico de entender los conceptos solución de un sistema de ecuaciones lineales y dependencia e independencia lineal de vectores en los modos de pensamiento Sintético Geométrico, Analítico Aritmético y Analítico Estrutural, para propiciar y orientar la conexión entre ambos conceptos. (GONZÁLES; ORTIZ, 2012, p. 3)
Título	Conexiones entre los Conceptos de Dependencia e Independencia Lineal de Vectores y el de Solución de Sistemas Lineales en R^2 y R^3 desde el punto de vista de los Modos de Pensamiento	
Autor(es)	Marcela Parraguez González e Jorge Bozt Ortiz	
Instituição/ Periódico	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso – REIEC	
Tipo	Artigo	
Ano de Publicação	2012	[...] investigar processos de pensamento matemático avançado manifestados em registros escritos de estudantes de Licenciatura em Matemática em tarefas sobre Sistemas de Equações Lineares. (BERTOLAZI, 2012)
Título	Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de Licenciatura em Matemática sobre Sistemas de Equações Lineares	
Autor(es)	Kátia Socorro Bertolazi	
Instituição/ Periódico	Universidade Estadual de Londrina	
Tipo	Dissertação	
Ano de Publicação	2013	Elaborar atividades matemáticas para o estudo de sistemas lineares, buscando uma correlação entre a Álgebra e a Geometria com a utilização de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC). (RODRIGUES, 2013)
Título	Uma Abordagem para o estudo de Sistemas Lineares integrando diferentes Linguagens	
Autor(es)	Cristiane Dias Rodrigues	
Instituição/ Periódico	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais	
Tipo	Dissertação	
Ano de Publicação	2013	Analisar os processos de raciocínio matemático utilizados por estudantes de graduação em cursos de Ciências Exatas na resolução de situações-problemas que envolvem matrizes. (CARDOSO; KATO; OLIVEIRA, 2013)
Título	Um estudo no campo conceitual de Vergnaud aplicado às Matrizes: uma investigação acerca dos invariantes operatórios	
Autor(es)	Valdinei Cezar Cardoso, Lilian Akemi Kato e Samuel Rocha de Oliveira	
Instituição/ Periódico	REVEMAT	
Tipo	Artigo	

Ano de Publicação	2013	Estudar quais os erros e dificuldades revelados pelos estudantes na aprendizagem de conteúdos sobre matrizes. (BARROS; ARAÚJO; FERNANDES, 2013)
Título	Raciocínios de estudantes do ensino superior na resolução de tarefas sobre matrizes	
Autor(es)	Paula Maria Barros; Cláudia Mendes Araújo e José António Fernandes	
Instituição/ Periódico	Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho	
Tipo	Artigo	
Ano de Publicação	2014	[...] investigar se um experimento de ensino apoiado em diferentes representações semióticas e na utilização de um recurso computacional pode favorecer os processos de ensino e de aprendizagem do objeto matemático Sistemas Lineares. (SILVA, 2014, p. 1)
Título	Sistemas Lineares Uma Proposta Apoiada na Exploração de Registros Semióticos e na Utilização de um Recurso Computacional	
Autor(es)	Thais Michelli Stori da Silva	
Instituição/ Periódico	Universidade Federal de Pernambuco - XVIII EBRAPEM	
Tipo	Artigo	
Ano de Publicação	2014	Estudar em que medida e em que sentido o fenômeno didático matemático de desarticulação e correspondente rigidez das praxiologias matemáticas escolares é generalizável para além das instituições escolares espanholas. (LUCAS *et al*., 2014, p. 8)
Título	Aspectos da rigidez e atomização da matemática escolar nos sistemas de ensino de Portugal e Espanha: Análise de um Questionário	
Autor(es)	Catarina Oliveira Lucas, Cecilio Fonseca Bon, Josep Gascón Pérez e José Manuel Casas	
Instituição/ Periódico	Universidade de Vigo - Educação Matemática Pesquisa	
Tipo	Artigo	
Ano de Publicação	2014	Identificar e discutir que indícios/características de processos do Pensamento Matemático Avançado são manifestados por estudantes do curso de Matemática [...] ao lidarem com tarefas referentes ao conteúdo de transformações lineares. (MARINS, 2014, p. 18)
Título	Pensamento Matemático Avançado em Tarefas envolvendo Transformações Lineares	
Autor(es)	Alessandra Senes Marins	
Instituição/ Periódico	Universidade Estadual de Londrina	
Tipo	Dissertação	

Ano de Publicação	2014	Buscar respostas para a seguinte questão: O que as pesquisas publicadas no X ENEM abordam com relação às dificuldades de aprendizagem, nas disciplinas de Matemática, de alunos ingressantes na Educação Superior? (MASOLA, 2014, p. 13)
Título	Dificuldades de Aprendizagem Matemática dos Alunos Ingressantes na Educação Superior nos Trabalhos do X Encontro Nacional de Educação Matemática	
Autor(es)	Wilson de Jesus Masola	
Instituição/ Periódico	Universidade Cruzeiro do Sul	
Tipo	Dissertação	
Ano de Publicação	2015	Elaboração e aplicação de uma sequência de atividades implantadas num ambiente computacional, com vista a melhorar os processos de ensino e de aprendizagem da álgebra linear, mais precisamente os sistemas de equações lineares, com o tema central a visualização. (SILVA, 2015)
Título	Sistemas de equações lineares: um paralelo entre a álgebra e a geometria	
Autor(es)	Allan Vicente de Macedo Silva	
Instituição/ Periódico	Universidade Severino Sombra - XIX EBRAPEM	
Tipo	Artigo	
Ano de Publicação	2016	[...]conhecer a prática de ensino de álgebra linear na Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC e as dificuldades que os professores enfrentam no ensino dessa disciplina. (MORO; VISEU; SIPLE, 2016)
Título	Ensino de álgebra linear: traços de uma pesquisa	
Autor(es)	Graciela Moro, Floriano Augusto Veiga Viseu e Ivanete Zuchi Siple	
Instituição/ Periódico	UDESC - FAED	
Tipo	Artigo	
Ano de Publicação	2016	[...] estuda-se a prontidão de alunos do ensino superior para a aprendizagem de álgebra linear, salientando a natureza teórica desta área de conhecimento. (BARROS; FERNANDES; ARAÚJO, 2016, p. 1)
Título	Prontidão de alunos do ensino superior para a aprendizagem de Álgebra Linear	
Autor(es)	Paula Maria Barros; José António Fernandes e Cláudia Mendes Araújo	
Instituição/ Periódico	Universidade do Minho - Educação Matemática Pesquisa	
Tipo	Artigo	
Ano de Publicação	2016	Avaliar a potencialidade de uma sequência didática com base na utilização de resolução de problemas como ponto de partida no ensino de matrizes. (SILVA, 2016, p. 19)
Título	O ensino de matrizes a partir da resolução de problemas	
Autor(es)	Hugo Carlos Machado da Silva	
Instituição/ Periódico	Universidade do Estado do Pará	
Tipo	Dissertação	

Fonte: autoria própria.

Após a leitura e interpretação das 24 pesquisas, relacionadas no Quadro 1, as organizamos em quatro agrupamentos: 1) Prontidão e Transição do Ensino Médio para o Ensino Superior (oito pesquisas); 2) Propostas de Ensino e Sequências Didáticas (sete pesquisas); 3) Aspectos Cognitivos da Aprendizagem (seis pesquisas) e 4) Outras Pesquisas Relacionadas (três pesquisas). Por meio dessa organização, foi possível obter uma visão abrangente das contribuições e possibilidades evidenciadas nessas pesquisas para a construção desta tese.

Prontidão e Transição do Ensino Médio para o Ensino Superior

As pesquisas desse agrupamento versam em especial a respeito da prontidão de estudantes que ingressam no Ensino Superior para o estudo de conteúdos matemáticos, ou ainda, a respeito dos conhecimentos prévios, erros e/ou dificuldades em Matemática de estudantes que se encontram na transição entre o Ensino Médio e o Superior. A seguir, discorreremos brevemente sobre essas pesquisas.

Os trabalhos de Cury e Bisognin (2009) e Faro (2010) analisaram os conhecimentos envolvendo Sistemas de Equações Lineares de estudantes calouros de diversos cursos de graduação. Entre outras observações, foram identificadas dificuldades no uso da simbologia necessária para a resolução de Sistemas Lineares e na modelação de problemas.

Quanto aos conteúdos de Matrizes, Barros, Araújo e Fernandes (2013) analisaram os erros e dificuldades apresentados por estudantes ingressantes do Ensino Superior de Portugal e identificaram dificuldades com a multiplicação de Matrizes e a justificação da resposta, entre outros. Já Simião (2010), analisou as organizações didáticas e matemáticas associadas à noção de Matriz, buscando identificar quais os conhecimentos prévios desse conteúdo esperados para estudantes em transição do Ensino Médio para o Superior. O autor concluiu que, apesar de encontrada nas organizações curriculares, a preocupação de que tais noções sejam revisitadas e articuladas com as noções de Álgebra Linear, essa tarefa acaba ficando a cargo do professor ou do próprio estudante.

López, Mendoza e Silva (2010), Lucas *et al.* (2014) e Barros, Fernandes e Araújo (2016) investigaram a prontidão de estudantes ingressantes do Ensino Superior para a aprendizagem da Álgebra Linear. Em suas pesquisas foram detectadas deficiências nos conhecimentos prévios necessários para cursar a Álgebra Linear (LÓPEZ; MENDOZA; SILVA, 2010), elevada fragmentação das tarefas comumente propostas no Ensino Médio, falta de conexão entre conteúdos e de questionamento e justificação das técnicas utilizadas (LUCAS *et al.*, 2014). Barros, Fernandes e Araújo (2016) concluíram que os estudantes não evidenciaram um nível de prontidão adequado para cursar Álgebra Linear.

Ainda com foco na transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior, Masola (2014) analisou os trabalhos publicados na modalidade comunicação científica e relato de experiência, especialmente os inseridos nos grupos da Educação Superior, publicados no X ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. Dentre as pesquisas analisadas pelo autor, todas apontavam o despreparo dos estudantes ingressantes da educação superior, e alegavam, entre outras razões, que tais estudantes são condicionados durante a educação básica a resolver tarefas de forma mecânica, sem valorizar a reflexão dos significados e conceitos, e não são estimulados a serem autônomos em relação à própria aprendizagem.

As pesquisas desse agrupamento mostraram a necessidade da utilização de uma abordagem diferenciada para os conceitos de Matrizes e Sistemas Lineares no Ensino Superior que contemple situações em que o estudante possa discutir, refletir e justificar suas ideias. Além disso, a relevância de retomarmos em nossa trajetória de aprendizagem conceitos e métodos já estudados no Ensino Médio, uma vez que a maioria dos autores relatou em suas investigações a falta de conhecimentos prévios – como a manipulação algébrica e geométrica de equações lineares e a multiplicação de matrizes – dos estudantes para a aprendizagem da Álgebra Linear.

Propostas de Ensino e Sequências Didáticas

Neste agrupamento, as pesquisas elencadas apresentam propostas – propostas curriculares, sequências didáticas ou sequências de atividades – para o ensino de conteúdos de Matrizes e de Sistemas de Equações Lineares.

Fratelli e Monteiro (2007) discutiram os resultados parciais de uma proposta curricular, para o curso de Licenciatura em Matemática, na qual a ordem de apresentação dos conteúdos foi alterada com o intuito de que os estudantes se familiarizassem com situações e conceitos de Álgebra Linear antes mesmo que esses fossem formalizados. Os resultados mostraram uma melhora na compreensão de conceitos abstratos e, em particular, na resolução de Sistemas de Equações Lineares.

Rodrigues (2013), Silva (2014) e Silva (2015) propõem sequências de atividades para o ensino e aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares no Ensino Superior. As três pesquisas basearam suas abordagens na Teoria de Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (DUVAL, 1993), e utilizaram tecnologias de informação e comunicação (TIC) como ferramenta para a exploração de representações. Rodrigues (2013) e Silva (2015) concluíram que os *softwares* matemáticos contribuíram para a assimilação do processo de cálculo de Sistemas Lineares e para o entendimento do conteúdo.

Os trabalhos de Pantoja (2008), Jordão (2011) e Silva (2016) propuseram sequências didáticas voltadas para o Ensino Médio. Pantoja e Jordão basearam-se nos pressupostos da Teoria de Registros de Representações Semióticas (DUVAL, 1993) e elegeram o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares. Como resultado, Pantoja (2008) afirma que os estudantes não atingiram a espontaneidade da atividade cognitiva, ou seja, não transformaram de forma espontânea os registros, como era pretendido. Porém, eles mostraram tomada de consciência de que o método do escalonamento é uma transformação do método da substituição. Já Jordão (2011) concluiu que a sequência, aliada ao ambiente computacional do *software* Winplot, contribuiu para a visualização e compreensão da resolução de Sistemas Lineares em três dimensões e facilitou os processos de simulação, experimentação e visualização, apesar de algumas limitações do *software*. Finalmente, Silva (2016) abordou o conteúdo de Matrizes e pautou-se na resolução de problemas para elaborar tarefas que, segundo o autor, auxiliaram os estudantes no tratamento matemático das questões, e proporcionou avanços em relação à linguagem e à simbologia matemática, que costumam ocasionar dificuldades para o entendimento desse assunto.

Notamos, por meio das pesquisas desse agrupamento, a considerável contribuição dos *softwares* matemáticos para a compreensão, exploração e visualização nas tarefas que envolvem Matrizes e Sistemas de Equações Lineares. Destacamos ainda a relevância de se explorar as diferentes representações de um conceito, favorecendo a sua compreensão. Nesse sentido, os *softwares* matemáticos são apresentados como aliados dos professores.

Aspectos Cognitivos da Aprendizagem

Nesse agrupamento, listamos as pesquisas na quais foram estudados aspectos cognitivos relacionados à aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear por estudantes do Ensino Superior.

As pesquisas de Oktaç e Trigueiros (2010), Pimenta *et al.* (2012), Gonzáles e Ortiz (2012) e Bertolazi (2012) investigaram, segundo aportes teóricos distintos, indícios de como estudantes universitários aprendem conceitos de Sistemas de Equações Lineares.

Oktaç e Trigueiros (2010) apresentaram uma análise, segundo a teoria APOE[11] (Ação-Processo-Objeto-Esquema) de Dubinsky (2002), de construções mentais de estudantes, e concluíram que para a elaboração de um *esquema* para Sistemas de Equações Lineares é fundamental a construção de uma estratégia que inclua a interpretação e a diferenciação dos usos da variável, e a construção da noção de solução de uma equação como um *objeto*.

Pimenta *et al.* (2012) ao investigar os modelos mentais dos estudantes, constataram que a maioria dos estudantes analisados era de "não-modeladores"[12], dentre os quais não foi constatada a presença de modelo mental, e em relação aos "modeladores", estes apresentavam uma definição

---

[11] Também conhecida como teoria APOS (Action – Process – Object – Sucess).

[12] De acordo com Pimenta *et al*. (2012) os indivíduos modeladores apresentam algum (ou mais) modelos mentais; enquanto os não-modeladores possuem algum algoritmo de resolução decorado (ditos "mecânicos") ou desconhecem o conteúdo abordado.

limitada de sistemas lineares e utilizavam modelos mentais mais simples para a resolução de Sistemas Lineares.

Gonzáles e Ortiz (2012) analisaram e concluíram, a partir dos modos de pensar propostos por Sierpinska (2000), que os estudantes apresentam uma forte tendência a pensar os objetos por meio de relações numéricas ao lidarem com os conceitos de Sistemas Lineares. E para Sistemas Lineares em R^2, em geral, conseguem migrar do modo no qual os Sistemas Lineares são apresentados mediante uma representação geométrica, para o modo no qual esses são pensados, por meio de relações numéricas. No caso de Sistemas Lineares em R^3, foi observada a dificuldade dos estudantes em pensar Sistemas de Equações Lineares por meio de representações geométricas.

Bertolazi (2012) investigou os processos do Pensamento Matemático Avançado, propostos por Dreyfus (2002) e Resnick (1987), e construiu um perfil conciso dos participantes a respeito da concepção de Matemática, no sentido de Thompson (1997). De acordo com as análises da autora apenas três, dos dezessete participantes, atingiram o processo de abstração matemática, conforme proposto por Dreyfus (2002). E ainda, a maioria dos participantes apresentou uma visão platônica da Matemática, ou seja, enxergam a Matemática como uma ciência precisa, imutável e livre de contradições ou ambiguidades (THOMPSON, 1997).

Em relação ao conceito de Matrizes, a pesquisa de Cardoso, Kato e Oliveira (2013) analisou, segundo a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990), os processos de raciocínio matemático utilizados por estudantes de graduação na resolução de situações-problema que envolvem tal conteúdo. De acordo com as análises dos autores, os raciocínios utilizados durante as operações que envolvem Matrizes são semelhantes aos utilizados para a resolução de problemas aditivos e multiplicativos com números inteiros.

E ainda relacionada aos aspectos cognitivos da aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear, a pesquisa de Marins (2014) identificou e discutiu os processos do Pensamento Matemático Avançado, segundo Dreyfus (2002), Tall (1995) e Resnick (1987), manifestados por estudantes ao lidarem com tarefas referentes ao conteúdo de transformações lineares. A autora afirma que dos treze estudantes participantes do estudo, seis manifestaram os processos de representação e apenas três os processos de abstração, concluindo que a maioria dos estudantes não evidenciou indícios de processos do PMA.

Observamos que as pesquisas elencadas nesse agrupamento empregaram diferentes teorias cognitivas para analisar os processos mentais desenvolvidos pelos estudantes na aprendizagem de conceitos da álgebra linear. Ainda assim, na maioria dessas pesquisas, é notória a ausência de processos mentais mais avançados em grande parte dos estudantes participantes.

Especificamente nas pesquisas de mestrado de Bertolazi (2012) e Marins (2014), que analisaram os processos do PMA evidenciados pelos estudantes em tarefas envolvendo conteúdos de Álgebra Linear, notamos que apenas 10% do total de participantes dessas pesquisas atingiram o processo mais avançado do pensamento matemático, a abstração.

Tal fato nos preocupa, uma vez que para a aprendizagem de conceitos matemáticos avançados no Ensino Superior, o estudante necessita de uma *maturidade cognitiva*[13] mais desenvolvida. Nesse sentido, na construção da trajetória de aprendizagem desta tese, buscaremos propiciar aos estudantes situações que promovam e desenvolvam processos do PMA.

Outras Pesquisas Relacionadas

Nesse agrupamento trazemos três pesquisas que tratam de assuntos distintos e que, a nosso ver, não se enquadram nos grupos anteriores, porém, estão relacionadas ao tema de nossa pesquisa e apresentam contribuições.

A pesquisa de Barros, Fernandes e Araújo (2012) representa certa continuidade das pesquisas sobre prontidão para a aprendizagem de Sistemas Lineares. Os autores analisaram os erros e dificuldades apresentados por estudantes portugueses de engenharia ao verificarem as soluções de Sistemas de Equações Lineares, conteúdo já estudado no ensino

[13] Utilizamos a expressão *maturidade cognitiva* no sentido de Rappaport (1981) que, em seu estudo sobre o desenvolvimento cognitivo segundo Piaget, afirma que uma vez atingido o grau de maturidade cognitiva no qual se é capaz de realizar operações mentais formais – estágio Operatório Formal –, “seu desenvolvimento posterior consistirá numa ampliação de conhecimentos tanto em extensão como em profundidade [...]” (idem, p. 62).

básico/secundário e superior português, e concluíram que os estudantes ainda demonstram dificuldades consideráveis na resolução da tarefa proposta, uma vez que muitos dos que conseguiram resolvê-la corretamente apresentaram a necessidade de resolver o sistema para poder verificar a sua solução.

Observamos, de acordo com a pesquisa de Barros, Fernandes e Araújo (2012), que mesmo após rever e estudar os conteúdos de Sistemas de Equações Lineares no Ensino Superior, muitos estudantes ainda não dominam tal conteúdo. É possível que a prática de ensino de Álgebra Linear não tenha contribuído para que tais estudantes superassem tais dificuldades, entre outras possibilidades.

Nesse sentido, a pesquisa de Moro, Viseu e Siple (2016) que investigou a prática de ensino de Álgebra Linear em uma universidade de Santa Catarina, analisando as dificuldades apresentadas pelos professores no ensino dessa disciplina, observaram que a maioria dos professores participantes da pesquisa utiliza a metodologia expositiva em suas aulas, e por vezes, recorrem a abordagens diferenciadas para apresentar o conteúdo. Concluíram ainda, que a maior dificuldade enfrentada pelos professores no ensino de Álgebra Linear é a dificuldade dos estudantes no que diz respeito à abstração exigida pelo caráter teórico e formal da disciplina.

A terceira pesquisa deste grupo, Battaglioli (2008), analisou a abordagem do conteúdo de Sistemas de Equações Lineares em três livros didáticos do Ensino Médio, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio[14] (PNLEM) (BRASIL, 2005). Os resultados obtidos pela autora mostraram que o registro gráfico é pouco explorado nos livros analisados, prevalecendo o uso do registro algébrico; e que tais livros enfatizam o uso dos algoritmos para a resolução de Sistemas Lineares, enquanto a análise dos resultados obtidos na resolução ou na classificação dos Sistemas Lineares ainda é pouco explorada.

A pesquisa de Battaglioli (2008), por meio da análise de livros didáticos adotados para o ensino de Sistemas de Equações Lineares, nos ajuda

[14] O PNLEM é um programa do governo federal que prevê a distribuição gratuita de livros didáticos para os estudantes do Ensino Médio público, foi implantado em 2004 e é mantido pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação - FNDE (Fonte: Portal do MEC: http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/31954)

a compreender e supor a origem de dificuldades e lacunas formativas apresentadas pelos estudantes no estudo de tal conteúdo, quando esses ingressam no Ensino Superior.

Esse levantamento bibliográfico desvela a preocupação dos pesquisadores em relação ao ensino e à aprendizagem de Álgebra Linear, e em especial, dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, uma vez que a maioria das pesquisas aqui elencadas analisou o modo como os estudantes aprendem esses conteúdos e/ou propõem diferentes abordagens a fim de contribuir com a aprendizagem.

Nesse sentido, esta pesquisa propõe uma abordagem para os conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares no Ensino Superior, se diferencia das demais aqui apresentadas à medida que constrói e analisa uma trajetória de aprendizagem para esses conteúdos, tendo como base a associação de duas abordagens complementares. Uma que nos permite olhar para o ensino, para as ações do professor em sala de aula – a saber, o Ensino-Aprendizagem Exploratório – e a outra que nos permite olhar para a aprendizagem, para a forma como o estudante constrói o conhecimento e desenvolve processos mentais – a saber, o Pensamento Matemático Avançado.

Em relação aos objetivos desta pesquisa, este levantamento contribui – juntamente com a construção e análise de uma prova escrita – para diagnóstico e investigação das noções prévias dos estudantes e para a construção de uma trajetória de aprendizagem para os conteúdos mencionados, uma vez que aponta erros, dificuldades e possíveis caminhos para tentar superá-los.

Por meio do Pensamento Matemático Avançado, discutido na seção a seguir, buscamos uma maneira de compreender como os estudantes constroem seus conhecimentos matemáticos.

2.2 O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Habitualmente, as disciplinas de Cálculo e Álgebra Linear são citadas como disciplinas do Ensino Superior nas quais os estudantes apresentam muitas dificuldades, por isso, são altos os índices de reprovação. Pesquisas como Barros, Fernandes e Araújo (2016); Lucas *et al.* (2014); López, Mendoza e Silva (2010); Simião (2010) e Faro (2010) apontam para a falta de *maturidade matemática*[15], de conceitos e conhecimentos prévios, de questionamento e justificação de técnicas como alguns dos motivos para o baixo rendimento em Álgebra Linear.

Temos por hipótese que o ensino baseado na reprodução e memorização de conceitos e algoritmos prontos contribua para essa falta de maturidade matemática. Como é possível que um estudante traga para o Ensino Superior uma “bagagem matemática”, rica em reflexões, construções, indagações e transposições cognitivas que lhe auxiliem na resolução de problemas e na abstração de conceitos matemáticos, se o ambiente de ensino e aprendizagem que ele vivenciou concentrou-se em sua maior parte nos resultados, e não nos processos em Matemática?

Nesse sentido, ter conhecimento dos processos mentais desenvolvidos pelos estudantes durante a construção e compreensão do conhecimento matemático se faz necessário para o professor, possibilitando a ele orientar ações pedagógicas e propor tarefas que desenvolvam o raciocínio e o pensamento matemático.

De modo a compreendermos os processos cognitivos que dão origem ao conhecimento matemático para podermos *identificar e discutir indícios de processos do PMA na produção escrita de estudantes ao início, durante e ao final da realização de uma trajetória de aprendizagem* – um de nossos objetivos específicos para esta pesquisa –, apresentaremos, nesta seção, um estudo sobre o PMA.

Desde 1987, quando o termo *Pensamento Matemático Avançado* foi proposto pelo *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, muitos autores se debruçaram a caracterizá-lo e defini-lo. Dentre eles, Gray *et. al* (1999) caracterizam o PMA como um contexto no qual os objetos são criados a partir de propriedades e axiomas, em vez de deduzidos por meio da manipulação de objetos. De acordo com os autores, esta reversão na ordem didática distingue o Pensamento Matemático Elementar (PME) do

---

[15] A maturidade matemática pode ser entendida como uma série de capacidades e habilidades de um indivíduo, que lhe permitem enfrentar adequadamente uma situação matemática (LÓPEZ; MENDOZA; SILVA, 2010).

PMA, sugere a construção de novas estruturas cognitivas e assim, pode acarretar novos tipos de dificuldades cognitivas.

Edwards, Dubinsky e McDonald (2005, p. 17, tradução nossa)[16] definem que o PMA é "um pensamento que requer raciocínio dedutivo e rigoroso sobre noções matemáticas que não nos são inteiramente acessíveis por meio dos nossos cinco sentidos". Assim, de acordo com a definição dos autores, conceitos matemáticos – mesmo que considerados avançados – que exigem do estudante raciocínio dedutivo e rigoroso sobre processos que são acessíveis através de exemplos do mundo físico (ao alcance dos nossos cinco sentidos) não mobilizam o PMA. Ainda consoante a esta teoria, não existe um momento específico no qual ocorra a transição do PME para o PMA, pois, o "PMA reside em um contínuo pensamento matemático que parece transcender, mas não ignora, as experiências processuais ou intuições do pensamento matemático elementar" (EDWARDS, DUBINSKY e MCDONALD, 2005, p. 18, tradução nossa)[17].

Nota-se que os textos citados anteriormente se dedicaram principalmente ao estudo do PMA na atividade de matemáticos profissionais e de estudantes de nível superior, ou seja, na matemática avançada. Distintivamente, Harel e Sowder (2005) defendem que o PMA deve ser visto como um pensamento avançado em matemática, ao invés de como um pensamento em matemática avançada, sendo necessário então estimular nos estudantes pensamentos/crenças como a de que "um conceito pode ter múltiplas interpretações" e "é vantajoso possuir múltiplas interpretações de um conceito" (HAREL; SOWDER, 2005, p. 40, tradução nossa)[18] desde o Ensino Infantil ao Ensino Médio, apoiando outras formas de compreensão e pensamento avançado que serão necessárias na aprendizagem de conteúdos mais avançados.

Harel e Sowder (2005) consideram complexo caracterizar as propriedades do PMA devido à relatividade do termo "avançado", que pode

---

[16] Do inglês *"thinking that requires deductive and rigorous reasoning about mathematical notions that are not entirely accessible to us through our five senses".*
[17] Do inglês *"AMT resides on a continuum of mathematical thought that seems to transcend, but does not ignore, the procedural experiences or intuitions of elementary mathematical thinking".*
[18] Do inglês *"A concept can be understood in different ways"* e *"It is often advantageous to change ways of understanding of a concept when attempting to solve a problem".*

indicar "eficiente", "elegante", "efetivo"... ainda assim, eles definem que o pensamento matemático é avançado se envolve em seu desenvolvimento ao menos uma das situações que constituem um *obstáculo epistemológico*[19], apresentadas por Duroux (1982, apud Brousseau, 1997[20]), a saber: (a) possuir fragmentos na História da Matemática, ou seja, são obstáculos que surgiram durante o desenvolvimento histórico da Matemática mediante limitações da época, portanto, pode ser difícil identificá-los; (b) é um conhecimento que tem validade dentro de um contexto, mas pode ser inútil fora desse mesmo contexto, exigindo a construção de um novo ponto de vista e (c) "resiste às contradições ocasionais e ao estabelecimento de um melhor conhecimento. A posse de um melhor conhecimento não é suficiente para que o anterior desapareça" (BROUSSEAU, 1997, p. 99-100, apud HAREL e SOWDER, 2005, p. 34, tradução nossa)[21].

Para Tall (1995, p. 3, tradução nossa)[22], o PMA "envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas por uma ampla gama de atividades matemáticas para construir novas ideias que desenvolvam e ampliem um sistema cada vez maior de teoremas estabelecidos". Segundo Tall (2002), a transição da matemática elementar (Geometria, Álgebra, Aritmética) para a matemática avançada (prova axiomática) requer reconstruções cognitivas, a abstração por meio de deduções a partir de definições formais, assim, a passagem para o PMA, "envolve uma transição difícil, desde uma posição em que os conceitos têm uma base intuitiva fundada na experiência, até uma em que são especificados por definições formais e suas propriedades reconstruídas

---

[19] Segundo Brousseau (1983) o obstáculo epistemológico é uma forma de interpretar alguns erros recorrentes cometidos pelos estudantes durante a aprendizagem de tópicos da Matemática, uma vez que ele estaria relacionado à resistência de um saber adaptado a um determinado contexto, mas ineficaz fora dele.

[20] BROUSSEAU, G. Theory of didactical situations in mathematics (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds. & Trans.). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic, 1997. DUROUX, A. La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure, *Memoria de D.E.A.*, n. 3, p. 43-67. Bordeaux, 1983.

[21] Do inglês *"withstands both occasional contradictions and the establishment of a better piece of knowledge. Possession of a better piece of knowledge is not sufficient for the preceding one to disappear".*

[22] Do inglês *"involves using cognitive structures produced by a wide range of mathematical activities to construct new ideas that build on and extend an ever-growing system of established theorems".*

através de deduções lógicas" (TALL, 1992, p. 495, tradução nossa)[23]. Consequentemente, na visão do autor, o PMA estaria presente especialmente no Ensino Superior.

Segundo a perspectiva de Dreyfus (2002), a aprendizagem pode ocorrer de forma rápida, como um clique na mente do estudante, mas frequentemente ela advém do desenvolvimento de uma longa sequência de tarefas durante as quais uma grande variedade de processos mentais ocorre e interage. Sendo assim, na definição do autor, o estudo do PMA refere-se ao estudo de processos matemáticos e psicológicos, como a representação, a visualização, a abstração, e a generalização, dentre outros, que ocorrem na mente do estudante e interagem entre si.

Podemos observar que existem diferentes perspectivas quando o assunto é o PMA, não havendo uma definição/caracterização global para esse conceito. No entanto, julgamos que todas as visões apresentadas anteriormente se complementam no sentido em que buscam compreender como o indivíduo aprende e pensa a Matemática, por isso se mostram necessárias para que possamos elaborar o nosso entendimento a respeito do PMA.

Em contrapartida à visão de Tall (1995, 2002), os autores Harel e Sowder (2005) e Dreyfus (2002) partilham da opinião de que o PMA está presente e deve ser estimulado desde a infância. Além disso, para Dreyfus (2002) os processos ocorridos no PMA não estão presentes apenas na matemática avançada, tão somente na Matemática:

> Muitos dos processos mentais da matemática avançada estão já presentes no pensamento das crianças sobre conceitos elementares da matemática, por exemplo, no número e no valor de posição. Os processos mentais não são exclusivamente usados na matemática avançada nem são exclusivamente usados na matemática. Abstrações são feitas em física, representações são usadas em psicologia, análises são usadas em economia e visualização em arte (DREYFUS, 2002, p.26, tradução nossa).[24]

---

[23] Do inglês *"involves a difficult transition, from a position where concepts have an intuitive basis founded on experience, to one where they are specified by formal definitions and their properties reconstructed through logical deductions".*

[24] Do inglês *"Many of the processes to be considered in this chapter are present already in children thinking about elementary mathematics concepts, say number or place value. They are not exclusively used in advanced mathematics, nor, indeed, are they exclusively used in mathematics. Abstractions are made in physics, representations are used in psychology, analysis is used in economics and visualization in art".*

Concordamos com Harel e Sowder (2005) e Dreyfus (2002), e enfatizamos a importância de que não somente os processos do PME como os processos do PMA sejam estimulados e desenvolvidos nas escolas, desde os anos iniciais, diminuindo, assim, o impacto sofrido pelos estudantes – e consequentemente, as dificuldades – quando ingressam no Ensino Superior e precisam lidar frequentemente com definições formais, generalizações, provas e abstrações.

Nesta investigação adotaremos a caracterização do PMA exposta por Dreyfus (2002). Em tal perspectiva, o PME e o PMA se diferenciam de acordo com a complexidade do pensamento envolvido em tarefas matemáticas, pois "é possível pensar em tópicos matemáticos avançados de uma forma elementar [...] e haver um pensamento mais avançado sobre tópicos elementares" (DREYFUS, 2002, p. 26, tradução nossa)[25]. Desta forma, segundo o autor, os processos de representação e abstração possibilitariam a passagem de um nível para outro.

Processos do Pensamento Matemático Avançado

Dreyfus (2002) discute os processos envolvidos no PMA. Para esse autor, tais processos são matemáticos e psicológicos, ou ambos, pois na maioria das vezes os aspectos matemáticos e psicológicos de um processo são indissociáveis. O seguinte exemplo ilustra tal situação:

> [...] quando você cria um gráfico de uma função, você está executando um processo matemático, seguindo certas regras que podem ser indicadas pela linguagem matemática; ao mesmo tempo, no entanto, é muito provável que você tenha a imagem mental desse gráfico; em outras palavras, você está visualizando a função de uma forma que pode mais tarde ajudá-lo a raciocinar sobre a função. As imagens mentais e matemáticas estão estreitamente ligadas aqui. Nem podem surgir uma sem a outra, e são de fato geradas pelo mesmo processo; elas são, respectivamente, os aspectos matemático e psicológico deste processo (DREYFUS, 2002, p. 26, tradução nossa).[26]

---

[25] Do inglês *"It is possible to think about advanced mathematical topics in an elementary way […] and there is rather advanced thinking about elementary topics".*

[26] Do inglês *"[…] when you build a graph of a function, you are executing a mathematical process, following certain rules which can be stated in mathematical language; at the same time, however, you are very likely generating a visual mental image of that graph; in other words, you are visualizing the function in a way that can later help you reason about the function. The mental and the mathematical images are closely linked here. Neither can arise without the other, and they*

Dentre os processos presentes no pensamento matemático apresentados por Dreyfus (2002), a *representação* e a *abstração* são considerados pelo autor como os principais para o PMA. Entretanto, muitos outros processos ocorrem no pensamento matemático – elementar ou avançado – como a descoberta, a visualização, a intuição, a definição, a prova entre outros. Ademais, ele afirma que não é possível distinguir de forma profunda quais estão presentes no PME e quais estão presentes no PMA, já que – como dito anteriormente – é a complexidade com a qual tais processos são tratados que irá distinguir entre os dois tipos de pensamento.

Dreyfus e Eisenberg (1996) afirmam que para expressar qualquer afirmação matemática, conceito ou problema, uma representação deve ser necessariamente usada; essa representação pode ser formal ou informal, visual ou verbal, explícita ou implícita; algumas serão mais adaptadas para expressar a estrutura matemática em um problema ou situação, outras menos.

Dreyfus (2002) apresenta três subprocessos principais do processo de *representação*: a *representação simbólica*, a *representação mental* e a *visualização*.

Segundo o autor, por meio da *representação simbólica*, o indivíduo comunica de forma escrita ou falada, por meio de símbolos e sinais, o seu conhecimento sobre um determinado conceito. Por meio de símbolos o estudante pode explicitar o significado que ele atribui ao conceito e desenvolver o conhecimento pessoal implícito. Mas, é preciso atenção do professor para que esse símbolo esteja realmente associado a um significado, para que o estudante não o memorize apenas. Nesse aspecto, estão presentes também as notações matemáticas, por meio das quais ideias complexas ou processos mentais podem ser fragmentados e representados por notações físicas que, por sua vez, podem ser manipuladas ou refletidas para gerar novas ideias (HAREL; KAPUT, 2002).

A *representação mental*, outro subprocesso relacionado à *representação*, refere-se aos esquemas ou quadros de referências criados internamente pelo indivíduo para lidar com o mundo exterior. Dreyfus (2002, p.

---

are in fact generated by the very same process; they are, respectively the mathematical and the psychological aspects of this process”.

31, tradução nossa) explica que "é o que ocorre na mente quando se pensa naquela parte específica do mundo externo, e podem diferir de pessoa para pessoa"[27]. Por exemplo, quando se pensa em Matrizes, a representação mental de um professor pode ser a de um sistema matricial, muito utilizado na resolução de Sistemas Lineares, já a de um estudante pode ser a de um conjunto de dados obtidos de uma tabela. Para Dreyfus (2002), tais discrepâncias levam às situações em que os estudantes não conseguem entender seus professores, dificultando a aprendizagem.

O autor afirma ainda, que uma mesma pessoa pode possuir diferentes representações mentais para um mesmo conceito, essas representações mentais podem ser geradas por meio da *visualização.*

> Visualizar é um processo pelo qual as representações mentais podem vir a ser. Uma descrição mais geral de como as representações mentais de conceitos matemáticos podem ser geradas foi proposto por Kaput (1987b); segundo sua teoria, o ato de gerar uma representação mental, baseia-se em sistemas de representação, isto é, artefatos concretos, externos, que podem ser materialmente realizados (DREYFUS, 2002, p. 31, tradução nossa).[28]

A *visualização* auxilia na geração e gerenciamento da imagem de uma situação problemática, ela está intimamente ligada à análise e exploração do problema, servindo como uma ferramenta versátil para o raciocínio matemático dos estudantes (DREYFUS; EISENBERG, 1996).

Nesse sentido, um processo que possui estreita relação com a *visualização* é a *intuição*. Consoante a Dreyfus (2002), a aprendizagem pela intuição, ou seja, pela cognição direta imediata, possui papel central em qualquer sequência de processos que começa a partir da descoberta na resolução de um problema matemático. Tall (2002) complementa que a *intuição* é o produto das imagens conceituais dos estudantes, assim, à medida que o estudante adquire mais experiência, ele passa de intuições iniciais, baseadas em suas matemáticas pré-formais, para intuições formais, mais refinadas.

[27] Do inglês *"It is what occurs in the mind when thinking of that particular part of the external world and may differ from person to person".*
[28] Do inglês *"Visualizing is one process by which mental representations can come into being. A more general description of how mental representations of mathematical concepts may be generated has been proposed by Kaput (1987b); according to his theory, the act of generating a mental representation, relies on representation systems, i.e. concrete, external artefacts, which can be materially realized".*

É relevante reforçar que o raciocínio visual não se limita apenas às situações geométricas, e que pode impor limitações na compreensão de uma situação problemática pois, na maioria das vezes, quando resolvemos um problema matemático, necessitamos fazer o uso de várias representações em paralelo.

Por exemplo, quando solicitamos a um estudante que represente uma determinada função quadrática, ele pode escrever uma expressão algébrica do tipo "$f(x) = ax^2$", exibindo a relação entre as variáveis envolvidas; ele pode construir o gráfico de uma parábola, evocando a representação gráfica da função; ou ainda ele pode exibir uma tabela com pares ordenados (x, y) que satisfaçam a igualdade "$y = ax^2$". Entretanto, não é possível afirmar que esse estudante compreenda o conceito de função – que é abstrato – em sua totalidade, que ele reconheça a relação entre essas representações ou até que ele saiba permear de uma para outra. E ainda, se fosse solicitado a ele que encontrasse as raízes da função, se ele saberia qual seria a representação mais adequada para esse contexto. Corroborando com o exposto no exemplo, trazemos a seguinte fala de Dreyfus e Eisenberg (1996)

> O uso flexível do conceito de função na resolução de problemas requer não apenas habilidade com várias representações, mas o estabelecimento de vínculos fortes e detalhados entre essas representações e a capacidade de traduzir e alternar entre elas (DREYFUS; EISENBERG, 1996, p. 270, tradução nossa)[29].

Dessa forma, Dreyfus (2002) aponta outros dois processos relacionados ao processo de *representação:* a *mudança de representações e tradução entre elas,* e a *modelação.* Para o autor, possuir diversas representações de um conceito é necessário, mas não suficiente para que o indivíduo seja capaz de aplicar o conceito de forma flexível em diferentes problemas. É preciso que o indivíduo se movimente entre as diversas representações e saiba mudar de representações em contextos diferentes, escolhendo a(s) representação(ões) mais eficiente(s).

---

[29] Do inglês *"Flexible use of the function concept in problem solving necessitates not only acquaintance with various representations but the establishment of strong and detailed links between these representations and the ability to translate and switch between them".*

Promover experiências nas quais os estudantes possam desenvolver este processo de *mudança de representações* não é uma tarefa fácil, pois envolve estruturas de pensamento muito complexas. Além do mais, só é possível efetuar essa mudança entre representações já existentes (DREYFUS, 2002). Por essa razão, é imprescindível que o professor oportunize ao estudante o trabalho com diferentes representações para um mesmo conceito, por meio de tarefas que estimulem a transferência de informações contidas numa representação para sua utilização em outra representação, ou seja, a *tradução* entre elas.

Nesse sentido, o computador é uma ferramenta notável na construção, mudança e tradução de representações, pois

> • proporciona possibilidades de visualização dinâmica para tornar os contextos geométrico e gráfico muito mais acessíveis e, devidamente explorado, pode ajudar a divulgar as relações necessárias entre representações algébricas e geométricas,
> • se o contexto gráfico se torna mais familiar, a unidade da representação gráfica do objeto funcional que ele fornece pode ajudar a estabelecer a imagem conceitual dos conceitos fundamentais, enriquecendo o estoque de imagens mentais,
> • Através de atividades experimentais com as simulações interativas, os estudantes podem ser iniciados na matemática como uma atividade construtiva e crítica (ARTIGUE, 2002, p. 197, tradução nossa).[30]

Essa possibilidade que o ambiente computacional proporciona de a partir de representações mais simples, avançar para representações mais abstratas, pode se tornar uma estratégia para a construção de representações cognitivas ricas e flexíveis (MASON, 1989), promovendo o desenvolvimento de processos mentais.

No estudo da Matemática, uma situação frequente relacionada à *representação* é a resolução de problemas aplicados, em que é necessário utilizar conceitos e propriedades matemáticas para representar fenômenos físicos, nesses casos, o processo envolvido é a *Modelação.*

---

[30] Do inglês *"• it provides possibilities for dynamic visualization to make the geometric and graphical contexts much more accessible and, properly exploited, it can help to bring out the necessary relations between algebraic and geometric representations,*
• if the graphical context becomes more familiar, the unity of the graphic representation of the functional object which it furnishes can help to establish the concept image of the foundational concepts by enriching the stock of mental images,
• through experimental activities with the interactive simulations, students may be initiated into mathematics as a constructive scientific activity."

De acordo com Dreyfus (2002), o processo de *Modelação* é semelhante ao de *representação mental*. Porém, na modelagem o sistema externo é físico e o modelo matemático é uma estrutura mental, ou seja, consiste na representação matemática de um processo ou objeto não matemático. Dessa forma, os processos de *representação* e *modelação* são de certa forma análogos. O autor ilustra essa analogia no trecho a seguir

> Por exemplo, a equação de Schrödinger modela o comportamento de certos sistemas físicos que obedecem às regras da mecânica quântica; ou um modelo de grupo cristalográfico com as propriedades de simetria de um composto químico. Um modelo matemático tem, assim, o estado de uma representação de uma situação (física); mas para a pessoa pensando, dizer as propriedades de simetria de um cristal de silicato, não é o suficiente; essa pessoa também precisa de uma representação mental de simetria do grupo do silicato. Isto leva a uma interessante ligação entre um modelo e uma representação mental (DREYFUS, 2002, p. 34, tradução nossa).[31]

Os processos do pensamento matemático apresentados até agora – relacionados ao processo de *representação* – estão presentes tanto no PME quanto no PMA, e é possível observar crianças utilizando essas representações em situações matemáticas, como nas representações numéricas, na construção de figuras geométricas, entre outros. No entanto, Dreyfus (2002) reitera que alguns processos, como a *síntese*, se desenvolvem e se fazem presentes quando se tem mais experiências e habilidades matemáticas, ou até mesmo quando o estudante lida com conceitos matemáticos mais avançados.

Na explicitação do autor, um estudante alcança um nível avançado do pensamento matemático quando abstrai situações matemáticas de forma consciente. Assim, dentre tais processos avançados do pensamento matemático, o mais importante, segundo Dreyfus (2002), é a *abstração*.

---

[31] Do inglês *"For example, the Schrödinger equation models the behavior of certain physical systems which obey the rules of quantum mechanics; or a crystallographic group models the symmetry properties of a chemical compound. A mathematical model thus has the status of a representation of a (physical) situation; but for the person thinking about, say the symmetry properties of a silicate crystal, this is not enough; that person also needs a mental representation of the silicate's symmetry group. This leads to an interesting connection between a model and a mental representation."*

Além da *representação*, o autor apresenta mais dois pré-requisitos para que a *abstração* ocorra: os processos de *generalização* e de *síntese.*

A *generalização* consiste na transição de casos particulares para casos gerais, nas palavras do autor “generalizar é derivar ou induzir a partir de casos particulares, para identificar pontos em comum, para expandir domínios de validade” (DREYFUS, 2002, p. 35, tradução nossa)[32].

Tall (2002) propõe que haja uma distinção entre diferentes tipos de generalização de acordo com as atividades cognitivas envolvidas, denominando *generalização expansiva* aquela que expande as estruturas cognitivas dos estudantes sem exigir mudanças nas ideias atuais, sem criar novos conceitos. No entanto, quando a generalização exige uma reconstrução das estruturas cognitivas do estudante, ela é chamada de *generalização reconstrutiva*. Uma terceira situação ocorre quando o estudante apenas memoriza as novas ideias, adicionando-as ao conhecimento atual sem realizar nenhuma integração com as ideias antigas, o que Tall chama de *generalização disjuntiva*. Sendo esse último tipo de generalização o que menos contribui para a compreensão, para o desenvolvimento do PMA.

Corroborando com as ideias de Tall (2002), Dreyfus (2002) afirma que nem sempre as generalizações incluem a formação de um conceito, apresentando o seguinte exemplo que ilustra o processo de *generalização* (expansiva) em um caso em que não é necessária a utilização de novos recursos, nem ocorre a formação de um novo conceito

> Um estudante pode saber por experiência que uma equação linear em uma variável tem uma solução, e que “a maioria” dos sistemas de dois (três) equações lineares em duas (três) variáveis tem uma solução única. Ele(a) pode em seguida generalizar isto para sistemas de n equações lineares em n variáveis. Mais importante ainda, com orientação adequada, ele(a) pode ser levado a examinar o significado de “a maioria” para n = 2 e n = 3 na declaração acima, formulá-lo com uma condição adequada, e generalizar também a condição para n >3. Neste processo, ele precisa fazer a transição a partir dos casos particulares de n = 1, 2, 3 ao caso geral n, é preciso identificar que condições para n = 2 e n = 3 têm em comum, e conjecturar e depois estabelecer que o domínio de validade da conclusão “há uma

[32] Do inglês *“To generalize is to derive or induce from particulars, to identify commonalities, to expand domains of validity”.*

> solução única" pode ser alargado ao caso geral (DREYFUS, 2002, p. 35, tradução nossa).[33]

Nesse exemplo, notamos que o uso de analogias está relacionado à generalização, o estudante, ao encontrar semelhanças entre os casos *n = 1* e *n = 2*, pode abordar o caso *n = 3* de forma análoga, e assim por diante até formular o caso mais geral *n.* Dreyfus e Eisenberg (1996) afirmam que preparar-se para procurar analogias é relevante no desenvolvimento do pensamento matemático, uma vez que a compreensão profunda dessas analogias possibilita aos estudantes transitar em ambos os sentidos – do caso mais geral ao mais específico ou do caso específico ao geral (generalizar) – agregando flexibilidade aos processos de pensamento.

Outro processo essencial à *abstração* é a *síntese*, tal processo consiste em combinar ou compor as partes do conhecimento de forma a constituir um todo que, para Dreyfus (2002), muitas vezes equivale a mais do que a soma de suas partes.

> Por exemplo, na Álgebra Linear, os estudantes geralmente aprendem um grande número de fatos isolados sobre ortogonalização de vetores, diagonalização de matrizes, transformação de bases, solução de sistemas de equações lineares, etc. Mais tarde no processo de aprendizagem, espera-se que todos estes fatos anteriormente não relacionados se fundam em uma única imagem, dentro da qual todos eles são abrangidos e inter-relacionados. Este processo de fusão em uma única imagem é uma síntese. (DREYFUS, 2002, p. 35, tradução nossa)[34]

Segundo Thurston (1990) a Matemática é altamente compressível, mas esse processo não é reversível, "depois de dominar conceitos matemáticos, mesmo depois de muito esforço, torna-se muito difícil colocar-se

---

[33] Do inglês *"A student may know from experience that a linear equation in one variable has one solution, and that "most" systems of two (three) linear equations in two (three) variables have a unique solution. (S)he may then generalize this to systems of n linear equations in n variables. More importantly, with appropriate guidance, (s)he may be led to examine the meaning of "most" for n=2 and n=3 in the above statement, formulate it as an appropriate condition, and generalize also that condition to n>3. In this process, one needs to make the transition from the particular cases of n=1, 2,3 to general n, one needs to identify what the conditions for n=2 and n=3 have in common, and to conjecture and then establish that the domain of validity of the conclusion "there is a unique solution" can be extended to general n."*

[34] Do inglês *"For example, in linear algebra, students usually learn quite a number of isolated facts about orthogonalization of vectors, diagonalization of matrices, transformation of bases, solution of systems of linear equations, etc. Later in the learning process, all these previously unrelated facts hopefully merge into a single picture, within which they are all comprised and interrelated. This process of merging into a single picture is a synthesis."*

de volta ao estado de espírito de alguém a quem eles são misteriosos" (THURSTON, 1990, p. 5, tradução nossa)[35]. Em outras palavras, após estabelecer relações entre determinadas propriedades e conceitos matemáticos, é necessário muito esforço para tornar a pensá-los isoladamente.

Talvez, essa seja uma das razões de a *síntese* ser pouco realizada em sala de aula pelos professores, pois como esses já sintetizaram seu conhecimento matemático, torna-se difícil compreender o pensamento e as dificuldades apresentados pelos estudantes – que ainda não o fizeram – afetando, assim, o desenvolvimento de conexões e relações por parte dos estudantes.

Em suma, a *abstração* está estreitamente relacionada à *generalização* e à *síntese*, porém, demanda por parte dos estudantes um esforço cognitivo mais intenso. É um processo de construção de estruturas mentais a partir das propriedades e das relações existentes entre os objetos matemáticos, desviando a atenção do próprio objeto (DREYFUS, 2002).

O autor afirma que a *abstração* é um processo construtivo que demanda do indivíduo a capacidade de isolar as propriedades e relações do objeto, separando as estruturas que devem fazer parte do conceito abstrato das estruturas irrelevantes para esse contexto, diminuindo, assim, a complexidade da situação.

Nesse sentido, pode emergir uma questão didática sobre como a abstração deve ser desenvolvida em sala de aula: a partir de um único caso ou a partir de muitos casos? O autor defende que muitos exemplos podem contribuir para que o estudante encontre pontos comuns, propriedades e relações significativas para abstrair um conceito, mas podem aumentar a complexidade do processo, confundindo o estudante devido à maior quantidade de informações.

Portanto, caberá ao professor a ponderação de tal situação levando em consideração o conceito a ser abstraído, as noções matemáticas que o aluno possui, ou ainda se as imagens visuais do conceito podem colaborar

---

[35] Do inglês *"After mastering mathematical concepts, even after great effort, it becomes very hard to put oneself back in the frame of mind of someone to whom they are mysterious."*

nesse processo. Trata-se de uma questão aberta, mas que deve fazer parte da reflexão do professor.

A compreensão de como se relacionam os processos de *representação* e *abstração* nos processos de aprendizagem pode contribuir nessa reflexão. Dreyfus (2002) defende que tais processos – a *representação* e a *abstração* – são complementares, mas estão em direções opostas pois, da mesma forma que um conceito é interiorizado a partir de suas várias representações, tais representações representam algum conceito abstrato.

Existe ainda, segundo o autor, uma necessidade cognitiva e matemática de se utilizar estruturas concretas no desenvolvimento de processos do pensamento, o que caracteriza a complementaridade entre as representações matemáticas e mentais.

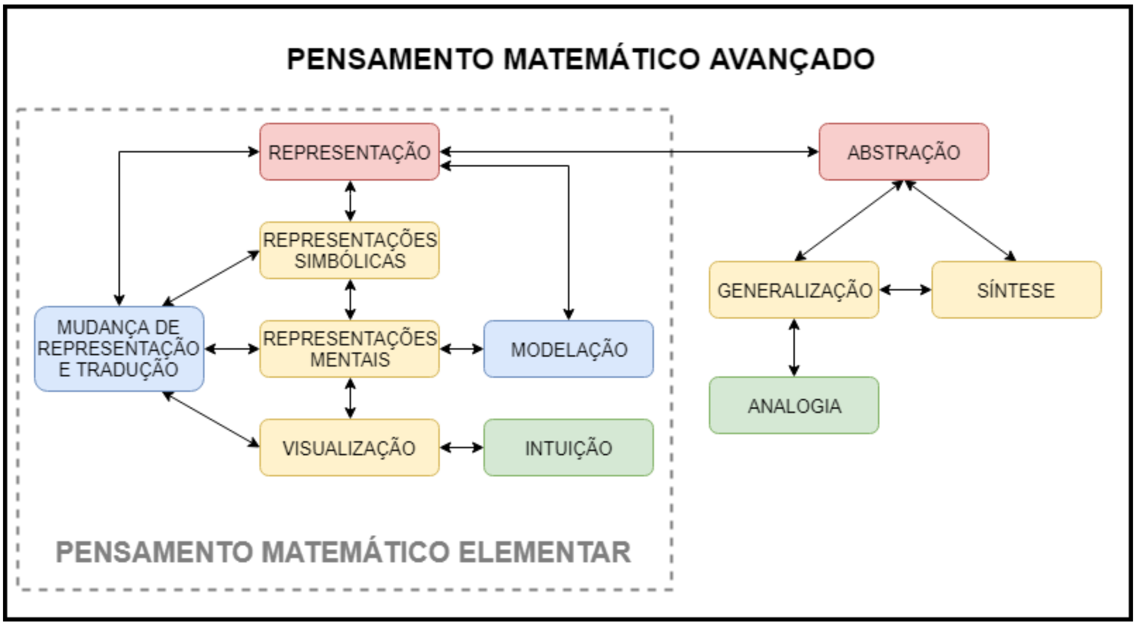
Diante de tais considerações, Dreyfus propõe quatro estágios que compõem o processo de aprendizagem: (i) usar uma única representação; (ii) usar mais de uma representação em paralelo; (iii) fazer ligações entre representações paralelas e (iv) integrar representações e realizar a comutação flexível entre elas.

No primeiro estágio, os processos se iniciam a partir de uma única representação concreta do objeto. No segundo estágio, após reunir várias representações para o mesmo objeto, o estudante as utiliza em paralelo. No terceiro estágio, o estudante constrói relações entre tais representações, e quanto mais fortes essas relações, mais apto o estudante está a alternar entre essas representações. No quarto e último estágio, ocorre o processo de integração entre as diferentes representações – a *síntese* – então o estudante separa as propriedades e relações comuns do objeto dos aspectos específicos da representação para formar o conceito abstrato (DREYFUS, 2002).

Tais estágios favorecem o entendimento de quão relacionados estão os processos de *representação* e *abstração* no desenvolvimento do PMA.

A Figura 1, a seguir, ilustra como se relacionam os processos do PMA propostos por Dreyfus (2002) e Dreyfus e Eisenberg (1996) de acordo com nossas leituras e interpretações.

Figura 1 – Processos do Pensamento Matemático Avançado



Fonte: autoria própria.

Na Figura 1, destacamos em vermelho os dois principais processos envolvidos no PMA propostos por Dreyfus (2002): a *representação* e a *abstração*, logo a seguir, são exibidos em amarelo os subprocessos de cada um.

O quadro pontilhado abrangendo os processos e subprocessos relacionados ao processo de *representação* simboliza que tais processos estão presentes tanto no PME quanto no PMA, e que a fronteira entre estes dois tipos de pensamento não é tão clara e definida, como foi exposto por Dreyfus (2002). Ainda assim, o que distingue os dois tipos de pensamento é o processo de *abstração*, considerado o mais importante no PMA:

> Se um estudante desenvolve a capacidade de fazer conscientemente abstrações de situações matemáticas, ele alcançou um nível avançado de pensamento matemático. Alcançar essa capacidade de abstrair pode muito bem ser o objetivo mais importante de educação matemática avançada (DREYFUS, 2002, p. 34, tradução nossa)[36].

Para a *representação* temos os subprocessos: *representações simbólicas, representações mentais* e *visualização.* Tais subprocessos estão

[36] Do inglês *"If a student develops the ability to consciously make abstractions from mathematical situations, he has achieved an advanced level of mathematical thinking. Achieving this capability to abstract may well be the single most important goal of advanced mathematical education".*

interligados, visto que se complementam e contribuem para a compreensão de um conceito, porém, compreendemos que não existe uma hierarquia entre eles. De acordo com Dreyfus (2002), enquanto as *representações mentais* – que podem ser concebidas a partir do processo de *visualização* – compreendem os esquemas internos utilizados pelos indivíduos para se relacionar com o mundo externo, as *representações simbólicas* são externalizadas pelo indivíduo por meio da fala ou da escrita, auxiliando na comunicação a respeito de um conceito.

O autor afirma ainda que, possuir várias representações de um conceito é necessário, mas não suficiente para que o indivíduo possa aplicar o conceito de forma flexível, é preciso que o indivíduo saiba mudar de representações quando conveniente. Nesse sentido, é apresentado o processo de *mudança de representações* e *tradução* interligado aos subprocessos da *representação*.

Outro processo associado à *representação* é a *modelação* – exibida interligada à *representação mental* por ser tratada pelo autor como um caso análogo dessa última. Tais processos inerentes à *representação (mudança de representações* e *tradução,* e *modelação)* são exibidos em azul na Figura 1, e não em amarelo, por compreendermos que esses não são subprocessos do processo de *representação*.

Ainda inter-relacionado à *representação,* temos o processo de *intuição* que, segundo o autor, possui uma estreita relação com a *visualização*. Tal processo é exibido em verde na Figura 1.

Para a *abstração* temos os subprocessos: *generalização* e *síntese*. Consoante a Dreyfus, tais processos são indissociáveis no desenvolvimento da *abstração*, portanto, estão interligados na Figura 1.

Para Dreyfus e Eisenberg (1996) a *analogia* possui uma forte relação com a *generalização*, pois possibilita ao estudante transitar de casos mais específicos para casos mais gerais e vice-versa, justificando assim a interligação dos dois processos na Figura 1.

Acreditamos que todos os processos exibidos na Figura 1 interagem de alguma forma e de forma recíproca, mais ainda, corroboramos com a afirmação de Dreyfus sobre a existência de muitos outros processos envolvidos no PMA, como a classificação, a indução, a verificação, e a definição. Porém, exibimos aqui apenas os processos e as relações que, segundo nossas interpretações de Dreyfus (2002) e Dreyfus e Eisenberg (1996), se mostram mais relevantes para a compreensão do PMA.

A aprendizagem da matemática por meio da representação e da abstração torna-se uma atividade criativa, que promove a reflexão crítica a respeito dos conhecimentos, e não apenas a reprodução de métodos e esquemas prontos transmitidos pelo professor.

Utilizaremos os processos descritos por Dreyfus (2002) e Dreyfus e Eisenberg (1996) como base para a análise do desenvolvimento do PMA nos estudantes durante os episódios da Experiência de Ensino relatada no Capítulo 4 desta investigação.

Na próxima seção, abordaremos o Ensino-Aprendizagem Exploratório, metodologia de ensino segundo a qual desenvolveremos nossa trajetória de aprendizagem, e apresentaremos uma discussão, relacionando-a com o Pensamento Matemático Avançado.

2.3 ENSINO-APRENDIZAGEM EXPLORATÓRIO DA MATEMÁTICA

De acordo com Dreyfus (2002), a aprendizagem, frequentemente, decorre do desenvolvimento de uma sequência de tarefas durante as quais vários processos mentais ocorrem e interagem. Na concepção de Ponte (2005), a aprendizagem ocorre, principalmente, por meio da reflexão realizada pelo estudante a respeito da atividade que realizou, e não das exposições do professor ou da realização de determinada atividade prática.

Consideramos a relevância dos processos internos do indivíduo durante a aprendizagem, mas acreditamos que a aprendizagem possui também um aspecto social. Nesse sentido, compartilhamos da ideia de Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), de que a aprendizagem não é apenas um processo individual, no qual o estudante interage com a tarefa produzindo conhecimento, mas é um processo coletivo, no qual a interação entre estudantes e professores, no contexto de uma atividade matemática, desempenha um papel essencial na construção do conhecimento.

Na perspectiva do Ensino-Aprendizagem Exploratório o professor deixa de assumir o papel central de transmissor do conhecimento em suas aulas para priorizar o trabalho com tarefas exploratórias e investigativas, por meio das quais os próprios estudantes serão protagonistas na descoberta e construção do conhecimento (PONTE, 2005).

Isso não significa que o professor não trará a atenção para si em alguns momentos da aula, nos quais ele precisará fazer a exposição e sistematização de conceitos; conforme Ponte (2005), em uma aula pautada no Ensino-Aprendizagem Exploratório esses momentos são essenciais para direcionar as discussões e reflexões dos estudantes.

Ponte *et al.* (2015) complementam ainda que, na abordagem exploratória da matemática, valoriza-se o desenvolvimento do raciocínio matemático por meio de tarefas desafiantes e de um ambiente de sala de aula no qual os estudantes possam construir ou aprofundar a compreensão de conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas.

O planejamento de tal ambiente, nessa abordagem, torna o trabalho docente por vezes imprevisível e desafiante, constituindo uma importante faceta da prática profissional do professor (PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013).

Sendo assim, para a organização de uma aula baseada no Ensino-Aprendizagem Exploratório da Matemática, Ponte (2005) sugere três fases que podem orientar o professor: (i) introdução da tarefa; (ii) realização da tarefa; e (iii) discussão e síntese final.

Dada a introdução da tarefa, o autor recomenda ao professor observar alguns aspectos como: a compreensão da tarefa pelos estudantes, a adequabilidade dos materiais e recursos utilizados, e a necessidade da introdução ou suspensão de algum elemento, informação ou estratégia de trabalho.

Durante a realização da tarefa, espera-se que o professor explore as situações que se desenvolvem em sala de aula e as intervenções dos estudantes, aproveitando as oportunidades oferecidas para a introdução ou discussão de conceitos e procedimentos matemáticos. Nessa fase, Ponte (2005) recomenda que o professor reformule seus objetivos e estratégias, em função dos acontecimentos na aula.

As discussões, consoante ao autor, constituem um importante aspecto da comunicação em sala de aula, pois pressupõem um maior equilíbrio na participação do professor e dos estudantes. Enquanto os estudantes intervêm influenciando, individual e coletivamente, os acontecimentos durante a aula, o professor assume um papel moderador, gerenciando e orientando as intervenções dos estudantes.

Assim, na fase de discussão e síntese final, “o professor aproveita para procurar que se clarifiquem os conceitos e procedimentos, se avalie o valor dos argumentos e se estabeleçam conexões dentro e fora da Matemática” (PONTE, 2005, p. 16). Este constitui um momento fundamental para a construção de novos conhecimentos e para a negociação de significados matemáticos a partir das tarefas exploradas, segundo o autor.

Notamos então, que um ponto relevante para uma abordagem exploratória da matemática, é a escolha das tarefas que serão trabalhadas em sala de aula, essas devem ser elaboradas levando em consideração diversos elementos:

> Alguns desses elementos são de ordem curricular (nomeadamente, as indicações constantes nos documentos curriculares oficiais), outros têm a ver com os alunos com que trabalha, outros ainda com as condições e recursos da escola e da comunidade, incluindo os materiais curriculares, manual escolar e outros materiais e, finalmente, outros dizem respeito a factores do contexto escolar e social (PONTE, 2005, p. 12).

Para auxiliar o professor na escolha e elaboração das tarefas, Ponte (2005) propõe duas dimensões fundamentais: o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. O primeiro refere-se à percepção da dificuldade e esforço despendidos pelo estudante na resolução de uma questão, e pode oscilar entre *reduzido* e *elevado*; enquanto o segundo relaciona-se à clareza dos objetivos da tarefa, entre o que é dado e o que é pedido na tarefa e ao que tem aspecto indeterminado na mesma, oscilando entre tarefa *fechada* e *aberta*.

Considerando esses parâmetros, Ponte (2005) apresenta a figura seguinte que relaciona, de acordo com suas características, alguns tipos de tarefas conhecidas pelos professores de matemática: o exercício, o problema, a investigação e a exploração.

Figura 2 – Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura

Fonte: Ponte (2005, p. 8).

As tarefas de desafio reduzido – exercício e exploração – distinguem-se de acordo com os conhecimentos prévios do estudante. Uma tarefa na qual o estudante conheça quais procedimentos deve utilizar, trata-se de um mero exercício, uma tarefa fechada, por outro lado, uma tarefa na qual o estudante necessite intuir para desenvolver uma estratégia de resolução trata-se de uma exploração, uma tarefa aberta (PONTE, 2005). Ponte e Quaresma (2015) recomendam a utilização dos exercícios para a consolidação de conhecimentos, enquanto as explorações são uteis, principalmente, para a construção de novos conceitos.

Já as tarefas de desafio elevado – problema e investigação – diferenciam-se especialmente pelo nível de envolvimento dos estudantes. Enquanto os problemas são tarefas fechadas que visam a aplicação de conhecimentos que o estudante já possui, as investigações são tarefas abertas que objetivam, além do uso criativo de conceitos já conhecidos, o desenvolvimento de novos conceitos (PONTE, 2005; PONTE e QUARESMA, 2015).

Embora a utilização de tarefas abertas, de caráter exploratório e investigativo, seja uma característica marcante do Ensino-Aprendizagem

Exploratório, tarefas distintas são necessárias, pois proporcionam diferentes experiências para os alunos:

> - As tarefas de natureza mais *fechada* (exercícios e problemas) são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados.
> - As tarefas de natureza mais *acessível* (explorações e exercícios), pelo seu lado, possibilitam a todos os alunos um elevado grau de sucesso, contribuindo para o desenvolvimento da sua auto-confiança.
> - As tarefas de natureza mais *desafiante* (investigações e problemas), pela sua parte, são indispensáveis para que os alunos tenham uma efectiva experiência matemática.
> - As tarefas de cunho mais *aberto* (explorações e investigações) são essenciais para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas, etc. (PONTE, 2005, p. 17).

Outras dimensões relacionadas à diversificação das tarefas trazidas por Ponte (2005) são a duração e o contexto da tarefa. Quanto à duração da tarefa, o autor afirma que as tarefas de longa duração – como os projetos – podem ser mais interessantes por permitirem aprendizagens mais profundas. Porém, podem se tornar maçantes para os estudantes, fazendo com que percam o interesse em resolvê-las. O autor ainda classifica os exercícios como tarefas de curta duração; e os problemas, investigações e explorações como tarefas de duração média.

Quanto ao contexto, Ponte (2005) elenca os contextos de *realidade,* como em tarefas de aplicação e de modelação; de *matemática pura,* que se referem apenas aos aspectos da própria matemática e de *semi-realidade,* mais comuns em problemas e exercícios matemáticos que buscam referências em situações cotidianas, mas muitas vezes utilizam valores exatos e desconsideram variáveis que poderiam ser relevantes na situação real. Ele enfatiza que os exercícios, os problemas e as investigações podem emergir de qualquer um desses contextos.

Em suma, Ponte declara que:

> O problema da selecção e articulação das tarefas não se esgota, no entanto, na sua diversificação. É preciso que as tarefas, no seu conjunto, proporcionem um percurso de aprendizagem coerente, que permita aos alunos a construção dos conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos matemáticos, o domínio das

> notações e formas de representação relevantes, bem como das conexões dentro e fora da Matemática (PONTE, 2005, p. 18).

Sendo assim, além da diversidade de tarefas que se pode realizar em sala de aula, o professor pode optar por diferentes modos de trabalho. No trabalho *coletivo*, o professor dialoga e discute com todos os estudantes, e eles entre si. Já no trabalho em *grupos* ou em *pares* existem dois momentos, as discussões ocorrem primeiro nos grupos para depois serem socializadas com toda a sala; e por fim o professor pode lançar mão do trabalho *individual*, que desenvolve no estudante as capacidades de concentração e reflexão (PONTE; QUARESMA, 2015).

Após a definição da tarefa, cabe então ao professor a organização e a condução das discussões de forma a explorar da melhor maneira possível a atividade dos estudantes e o tempo de aula disponível. Tendo em vista facilitar ao professor a orquestração dessas discussões, Stein *et al.* (2008) propõem cinco práticas que nos orientarão no trabalho em sala de aula, são elas:

(i) antecipar as respostas prováveis do estudante a tarefas matemáticas cognitivamente exigentes;
(ii) monitorar as respostas dos estudantes às tarefas durante a fase de exploração;
(iii) selecionar determinados estudantes para apresentar suas respostas matemáticas durante a fase de discussão e síntese;
(iv) sequenciar as respostas dos estudantes que serão exibidas; e
(v) estabelecer conexões matemáticas entre as respostas dos diferentes estudantes e entre as respostas dos estudantes e as ideias-chave.

A prática de *antecipar* ocorre durante o planejamento da aula, quando o professor estabelece os objetivos de aprendizagem, seleciona as tarefas, tenta prever os possíveis modos que os estudantes podem abordar matematicamente tais tarefas, e antecipa respostas, erros e dificuldades. Na aula, durante a realização da tarefa, a próxima prática do professor será a de *monitorar* as atividades dos estudantes, o que “[...] envolve prestar muita atenção ao pensamento matemático no qual os estudantes se empenham enquanto trabalham em um problema durante a fase de exploração” (STEIN *et al*., 2008, p. 326, tradução nossa)[37].

Apoiado pelas observações das práticas anteriores, o professor segue para as práticas de *selecionar* e *sequenciar* estudantes para que apresentem as resoluções mais interessantes – corretas ou incorretas – em relação ao conteúdo matemático selecionado para a discussão, com vistas a proporcionar uma maior diversidade de estratégias matemáticas apresentadas. E por fim, a última das cinco práticas propostas por Stein *et al.* (2008), que ocorre durante a discussão das resoluções da tarefa, é a de *estabelecer conexões* entre as diferentes representações e estratégias utilizadas pelos estudantes.

Segundo Stein *et al.* (2008), cada uma das práticas do professor é uma extensão da prática anterior e usufrui de seus resultados, portanto, para usá-las de forma bem-sucedida, é necessária a escolha de uma tarefa cognitivamente exigente, que seu objetivo instrucional seja bem conhecido e que o professor compreenda o pensamento e as práticas matemáticas dos estudantes.

Em vista disso, trazemos a seguir uma discussão entre o Ensino-Aprendizagem Exploratório e o Pensamento Matemático Avançado no sentido de evidenciar as potencialidades do primeiro no desenvolvimento do segundo, e de relacionar os tipos de tarefas propostos por Ponte (2005) com os processos do PMA propostos por Dreyfus (2002).

Ensino-Aprendizagem Exploratório e Pensamento Matemático Avançado

Em relação aos processos mentais envolvidos na aprendizagem de conceitos matemáticos, já apresentados e discutidos neste capítulo, Dreyfus (2002) apresenta dois principais processos – a *representação* e a *abstração* – necessários para que os estudantes desenvolvam o PMA. De acordo com o autor, tais processos que o professor espera provocar no estudante não ocorrem por si mesmos, ou por intermédio de exemplos e simples exercícios de repetição,

[37] Do inglês *“[…] involves paying close attention to the mathematical thinking in which students engage as they work on a problem during the explore phase.”*

eles devem ser desenvolvidos pelo próprio estudante por meio de descobertas e reflexões.

Desse modo, o ambiente das aulas precisa priorizar a atividade matemática do estudante, proporcionando momentos de reflexão e discussão coletiva fundamentais à troca de experiências e à justificação de ideias; e o professor, neste contexto, deve mediar as discussões entre os estudantes e direcionar suas aprendizagens.

Compreendemos então, que além de conhecer os processos mentais envolvidos na aprendizagem da Matemática, é preciso que o professor interaja com os estudantes, compreenda e estimule seu raciocínio; para que assim o “estudar matemática” não se limite a realizar um grande número de procedimentos e algoritmos memorizados, cheios de formalismos, e sem significado para o estudante.

Nessa perspectiva dialógica sobre a aprendizagem da Matemática o Ensino-Aprendizagem Exploratório emerge como uma abordagem profícua para o ensino da Matemática, permitindo intensificar o desenvolvimento do pensamento matemático e, consequentemente, os processos mentais relacionados; uma vez que essa abordagem prioriza o trabalho em sala de aula com tarefas abertas, de cunho exploratório e investigativo, e momentos de discussão nos quais os estudantes “apresentam o seu trabalho, relatam as suas conjecturas e conclusões, apresentam as suas justificações e questionam-se uns aos outros” (PONTE, 2005, p. 16).

Consoante a Bussmann, Klaiber e Silva (2017),

> essa perspectiva traz uma discussão importante quanto à necessidade de reflexão sobre a escolha das tarefas a serem trabalhadas com os estudantes. Neste contexto, nessa escolha sistemática e repleta de critérios e intenções também fica evidente o caráter de proporcionar aos estudantes diferentes formas de operar com a matemática, bem como de utilizar diferentes representações, podendo levar à construção e reflexão de outros processos mentais, por exemplo, a *Abstração*, favorecendo assim, o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado (BUSSMANN; KLAIBER; SILVA, 2017, p. 11).

A escolha e elaboração das tarefas assumem então importância na construção da trajetória de aprendizagem que almejamos para esta tese, uma vez que as atividades estudantis devem ser concebidas pelo professor, tendo em mente as características dos processos do PMA, de tal forma que os estudantes possam realizá-las (DREYFUS, 2002).

O quadro a seguir (Quadro 2), proposto por Bussmann, Klaiber e Silva (2017) elenca as potencialidades de cada um dos tipos de tarefas abordados por Ponte (2005) em relação aos processos e subprocessos do PMA discutidos por Dreyfus (2002). Os autores enfatizam que tal quadro indica possibilidades para a utilização de diferentes tarefas com foco no desenvolvimento do PMA, não implicando que cada tarefa possa desenvolver apenas os processos/subprocessos indicados.

Quadro 2 – Relação entre as Tarefas de Ponte (2005) e os Processos do PMA de Dreyfus (2002).

Ensino Aprendizagem Exploratório (PONTE, 2005)	**Pensamento Matemático Avançado (DREYFUS, 2002)**	**Relações entre Tarefa e Processo/Subprocesso**
Tarefa	**Processo/ Subprocesso**	
Exercícios	Representação/ Representação Simbólica	Possibilitam que o aluno desenvolva o raciocínio matemático, reforce procedimentos e desenvolva habilidades como a utilização de símbolos e sinais matemáticos.
Explorações	Representação/ Representação Mental, Visualização e Dedução	Fazem com que os alunos utilizem a intuição para desenvolver uma estratégia de resolução, propiciando a criação de esquemas e quadros de referências (representação mental).
	Representação/ Tradução	Por meio da apresentação de diferentes contextos auxiliam para que o aluno explore e relacione diferentes representações (como tabular, gráfica e geométrica) de um conceito. O computador pode ser uma ferramenta muito útil para as explorações.
Problemas	Representação e Abstração/ Generalização	Possibilitam que os alunos estabeleçam relações entre dados e resultados (pois são *fechados*) e iniciem a transição de casos particulares para casos gerais, assim como podem desenvolver

		subprocessos da Representação como, por exemplo, a tradução de um enunciado em linguagem natural para linguagem matemática.
Investigações	Representação e Abstração/ Sintetização	Estimulam a formulação de questões (pois são *abertas*) e exigem um maior esforço cognitivo para que partes do conhecimento sejam combinadas formando o conceito como um todo. Nesse caso, essas tarefas podem contemplar todos os processos do PMA.

Fonte: Bussmann, Klaiber e Silva, 2017, p. 12.

Com base no que foi exposto, salientamos a importância do papel do professor, de suas reflexões e ações em sala de aula, para que esse possa proporcionar e mobilizar intervenções com o objetivo de intensificar a aprendizagem dos estudantes. Nesse contexto, o conhecimento acerca de teorias que investigam como os indivíduos aprendem e como os processos de ensino e aprendizagem se relacionam e se desenvolvem, constituem o alicerce da atividade docente.

O próximo capítulo discorrerá sobre os procedimentos metodológicos adotados nessa pesquisa.

3. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Neste capítulo, descrevemos e justificamos as opções metodológicas desta investigação. Na primeira seção, dissertamos a respeito da Experiência de Ensino e estabelecemos relações entre esse caminho metodológico e o objetivo desta pesquisa. Na segunda seção do capítulo, abordamos o contexto no qual este estudo se desenvolveu, elaborando o perfil do curso e dos estudantes que dele participaram. Por fim, nas duas últimas seções, apresentamos as técnicas utilizadas para a coleta e análise dos dados, a saber, as notas de campo da professora-investigadora e a produção escrita dos estudantes.

3.1 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Este é um estudo qualitativo, consoante à perspectiva de Bogdan e Biklen (1994), visto que a investigação dos processos de ensino e aprendizagem se deram em sua maior parte em ambiente natural – no caso, a própria sala de aula – onde foram coletados os dados, e além do mais, as análises foram feitas de forma descritiva e priorizaram o desenvolvimento desses processos, e não o produto final da interação entre a professora-pesquisadora, os estudantes e as tarefas.

Outra característica do estudo qualitativo, segundo os autores, é que o investigador constitui o instrumento principal da pesquisa, estando sempre que possível no local do estudo para não perder de vista o significado propiciado pelo contexto. Assim, neste estudo, a pesquisadora é também a professora que conduz as discussões em sala de aula, dado que os:

> [...] professores, ao agirem como investigadores, não só desempenham os seus deveres, mas também se observam a si próprios, dão um passo atrás e distanciam-se dos conflitos imediatos, tornam-se capazes de ganhar uma visão mais ampla do que se está a passar. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 286)

Assumindo as características acima mencionadas, esta pesquisa objetiva *investigar indícios de desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado em produções escritas de estudantes do primeiro* *semestre de um curso de Licenciatura em Química em uma disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, por meio da realização de uma Experiência de Ensino.*

Para isso, selecionados os conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, planejamos tarefas e discussões em sala de aula, antecipamos erros e dificuldades dos estudantes, e orquestramos as relações entre esses elementos orientados pelas perspectivas teóricas do Ensino-Aprendizagem Exploratório e do PMA, discutidas no capítulo anterior.

Deste modo, esta pesquisa constituiu "um meio de abordar a complexidade que é uma característica marcante dos ambientes educacionais" (COBB *et al.*, 2003, tradução nossa)[38], o que a insere na perspectiva de *design research*[39]*.* Segundo Molina, Castro e Castro (2007),

> *[...] design research* pode ser definida como um conjunto de abordagens metodológicas nas quais o *design* instrucional e a investigação são interdependentes. [...] Este paradigma visa analisar a aprendizagem no seu contexto, concebendo e estudando sistematicamente formas particulares de aprendizagem, estratégias e instrumentos educativos de uma forma sensível à natureza sistêmica da aprendizagem, educação e avaliação (MOLINA; CASTRO; CASTRO, 2007, p. 1, tradução nossa)[40].

Nesse contexto, a abordagem metodológica Experiência de Ensino adotada neste estudo é tida como um tipo particular de *design research*.

As Experiências de Ensino tiveram sua origem na extinta União Soviética, por volta de 1930, mas somente por volta de 1970 é que ganharam visibilidade no campo da Educação Matemática, quando começaram a ser estudadas por pesquisadores norte-americanos como Mary Grace Kantowski (KANTOWSKI, 1978; THOMPSON, 1979). Dois motivos notáveis para o seu surgimento foram a falta de modelos de investigação voltados especificamente

---

[38] Do inglês *"[…] a means of addressing the com-plexity that is a hallmark of educational settings."*

[39] Os termos *design experiments* (COBB *et al.*, 2003; COLLINS, JOSEPH e BIELACZYC, 2004), *design studies* (KELLY, 2014) e *design-based research* (Design-Based Research Collective, 2003) são utilizados por outros autores para se referirem a *design research.*

[40] Do inglês *"[…] design research can be defined as a set of methodological approaches in which instructional design and research are interdependent. […] This paradigm aims to analyze learning in its context by designing and systematically studying particular forms of learning, strategies and educative tools in a way that is sensitive to the systemic nature of learning, education and evaluation."*

para a Educação Matemática, e a grande lacuna presente entre a prática da pesquisa e a prática do ensino nesta área (STEFFE; THOMPSON, 2000).

Segundo Kantowski (1978), tais métodos de investigação deveriam incluir a observação longitudinal e a avaliação, permitindo que o pesquisador estudasse mudanças na atividade mental, bem como os efeitos da instrução planejada sobre tal atividade, ou ainda, como definida por Steffe e Thompson (2000):

> a experiência de ensino é uma ferramenta conceitual que os pesquisadores usam na organização de suas atividades. É principalmente uma ferramenta exploratória, derivada da entrevista clínica de Piaget e destinada a explorar a matemática dos estudantes. [...] Considerando que a entrevista clínica tem como objetivo compreender os conhecimentos atuais dos alunos, a experiência de ensino é direcionada para a compreensão do progresso que os alunos realizam durante longos períodos (STEFFE; THOMPSON, 2000, p. 273, tradução nossa)[41].

Tendo em vista tais objetivos, uma Experiência de Ensino apresenta as seguintes características elencadas por Thompson (1979):

- a orientação para os processos pelos quais ocorre a aprendizagem dos conceitos escolares;
- a natureza longitudinal da investigação;
- a intervenção do pesquisador nos processos de aprendizagem dos estudantes;
- a interação constante entre as observações recolhidas e o planejamento de ações futuras; e
- os dados são prioritariamente qualitativos, os dados quantitativos, quando coletados, são usados principalmente de maneira descritiva.

E essencialmente, envolve alguns elementos, a saber: uma sequência de episódios de ensino que abrangem um longo período de tempo, um agente de ensino (no caso, a professora-pesquisadora), um ou mais estudantes, possíveis testemunhas e um método de gravação ou registro do que

---

[41] Do inglês *"the teaching experiment is a conceptual tool that researchers use in the organization of their activities. It is primarily an exploratory tool, derived from Piaget's clinical interview and aimed at exploring students' mathematics. […] Whereas the clinical interview is aimed at understanding students' current knowledge, the teaching experiment is directed toward understanding the progress students make over extended periods."*

ocorreu durante os episódios. Por meio de tais registros podem ser preparados os episódios seguintes e realizada a análise retrospectiva da Experiência de Ensino (COBB e STEFFE, 1983; STEFFE e THOMPSON, 2000).

Essa Experiência de Ensino é composta por 9 episódios[42] de ensino, que ocorreram entre os meses de março e abril do ano de 2017, durante um período de seis semanas, em uma turma de ingressantes de um curso de Licenciatura em Química, na disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear.

O primeiro episódio desenvolveu-se em dois momentos, o primeiro momento consistiu na apresentação dos objetivos da pesquisa, na explicação de como essa se desenvolveria aos estudantes da turma selecionada; e na assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice B) – autorizando a coleta, análise e publicação das atividades de sala de aula. E no segundo momento, ocorreu a aplicação de uma prova escrita com questões que visavam conhecer o perfil pessoal e educacional dos estudantes, bem como suas noções e conhecimentos prévios a respeito dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares. Para enriquecer e ampliar a qualidade do instrumento, as questões da referida prova foram validadas no GEPPMat - Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático[43], grupo do qual a autora deste trabalho faz parte.

Os demais episódios, foram desenvolvidos mediante a resolução de tarefas e explorações em sala de aula e em laboratório de informática, utilizando o *software* livre GeoGebra[44]. No último episódio, foi realizada uma reavaliação com questões da prova escrita elaborada para a avaliação diagnóstica, por meio da qual pretendemos realizar um comparativo

---

[42] Todos os episódios de ensino, tarefas e avaliações mencionados nesta seção serão narrados e tratados com pormenores no capítulo seguinte.

[43] O GEPPMat -, sob orientação da professora Dra. Angela Marta P. D. Savioli, integra os grupos de estudo do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL. Desenvolve estudos e pesquisas a respeito do pensamento matemático na perspectiva dos teóricos Tall (2002), Resnick (1987), Dreyfus (2002), Dubinsky (2002) entre outros. São questões centrais nas discussões e pesquisas do grupo: caracterizações do pensamento matemático (avançado e elementar), em especial do pensamento algébrico; processos envolvidos no desenvolvimento deste pensamento; dificuldades na aprendizagem de conceitos matemáticos; características de pensamento algébrico evidenciadas por estudantes da Educação Básica.

[44] O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica, gratuito, que combina aspectos da geometria e da álgebra numa mesma aplicação. O GeoGebra está disponível em https://www.geogebra.org/download.

com foco nos indícios de processos do PMA apresentados pelos estudantes ao início e ao final da Experiência de Ensino.

Ao término de cada episódio, foram realizadas análises retrospectivas que oportunizaram aos pesquisadores um momento de conscientização e interpretação da atividade dos estudantes em sala de aula, fornecendo informações sobre suas ações e interações que não foram percebidas ou não estavam disponíveis ao professor-pesquisador no momento em que aconteceram, promovendo a modificação ou estabilização das interpretações originais (STEFFE; THOMPSON, 2000).

No que concerne à importância da análise retrospectiva, Steffe e Thompson (2000) afirmam que

> [...] o que os pesquisadores estão tentando fazer é construir elementos dos modelos de construção dos estudantes ao longo do experimento de ensino. É uma vantagem distinta entender essas mentes construtoras como sendo ocasionadas pelas próprias formas e meios de operação do professor-pesquisador, porque essa compreensão tem o potencial de preencher a lacuna entre pesquisa e prática que nos afligiu anteriormente (STEFFE; THOMPSON, 2000, p.293, tradução nossa)[45].

Desta forma, por meio de tais análises a professora-pesquisadora pôde replanejar os próximos episódios de ensino em relação à sua prática e readequar as tarefas de modo a atender às necessidades dos estudantes.

Como mencionado anteriormente, a professora – no caso, a autora deste estudo – desempenhou durante os episódios de ensino os papéis de professora e pesquisadora, o que possibilitou a elaboração das anotações de campo, com informações a respeito das ações de ensino no contexto interativo, bem como das dificuldades e construções matemáticas dos estudantes.

Além das anotações de campo, outro tipo de registro obtido foram as produções escritas dos estudantes, recolhidas ao final de cada episódio. Por meio de tais registros, analisou-se como os estudantes justificam

---

[45] Do inglês *"[…] what the researchers are trying to do is to construct elements of the models of the constructing students over the course of the teaching experiment. It is a distinct advantage to understand these constructing minds as being occasioned by the teacher-researcher's own ways and means of operating because that understanding holds the potential of bridging the gap between research and practice that plagued us earlier on."*

seus raciocínios matemáticos, estudar os processos mentais envolvidos na aprendizagem dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares e as concepções prévias apresentadas em relação a esses conteúdos.

Dentre todas essas demandas na preparação e análise dos episódios e na coleta dos registros, segundo Steffe e Thompson (2000), aprender a interagir com os estudantes, como agir e fazer perguntas, é um problema central em qualquer Experiência de Ensino. Sendo assim, neste estudo, o planejamento de todos os episódios de ensino foi realizado aspirando a construção de uma *trajetória de aprendizagem*[46], ou seja, de um percurso de aprendizagem guiado por um conjunto de tarefas e objetivos de aprendizagem elaborados pela professora, como proposto por Clements e Sarama (2004), que será pormenorizado no capítulo seguinte. Nesse percurso, as ações da professora-pesquisadora relacionadas ao ensino foram orientadas pela perspectiva do Ensino-Aprendizagem Exploratório.

A primeira destas ações, segundo Stein *et al*. (2008), ocorre durante a fase de planejamento da aula, e consiste na antecipação das respostas prováveis dos estudantes às tarefas matemáticas. Ao início do Experimento, como a professora-pesquisadora não conhecia os estudantes ainda, a antecipação foi realizada por meio da avaliação diagnóstica mencionada anteriormente, dos erros e dificuldades verificados no levantamento bibliográfico e da experiência em sala de aula da própria professora-pesquisadora. No decorrer dos episódios, as análises retrospectivas forneceram informações para a fase de antecipação.

Na segunda ação – a de monitorar as respostas dos estudantes às tarefas durante a fase de exploração (STEIN *et al*., 2008) – foram realizadas algumas das anotações de campo da professora-pesquisadora, sendo essas uma das formas de registro para as análises retrospectivas, outras anotações foram realizadas ao final de cada episódio, a fim de complementação.

A terceira e a quarta ações, que envolvem a seleção e sequenciação das respostas dos estudantes para serem apresentadas e discutidas coletivamente (STEIN *et al*., 2008), foram realizadas de acordo com

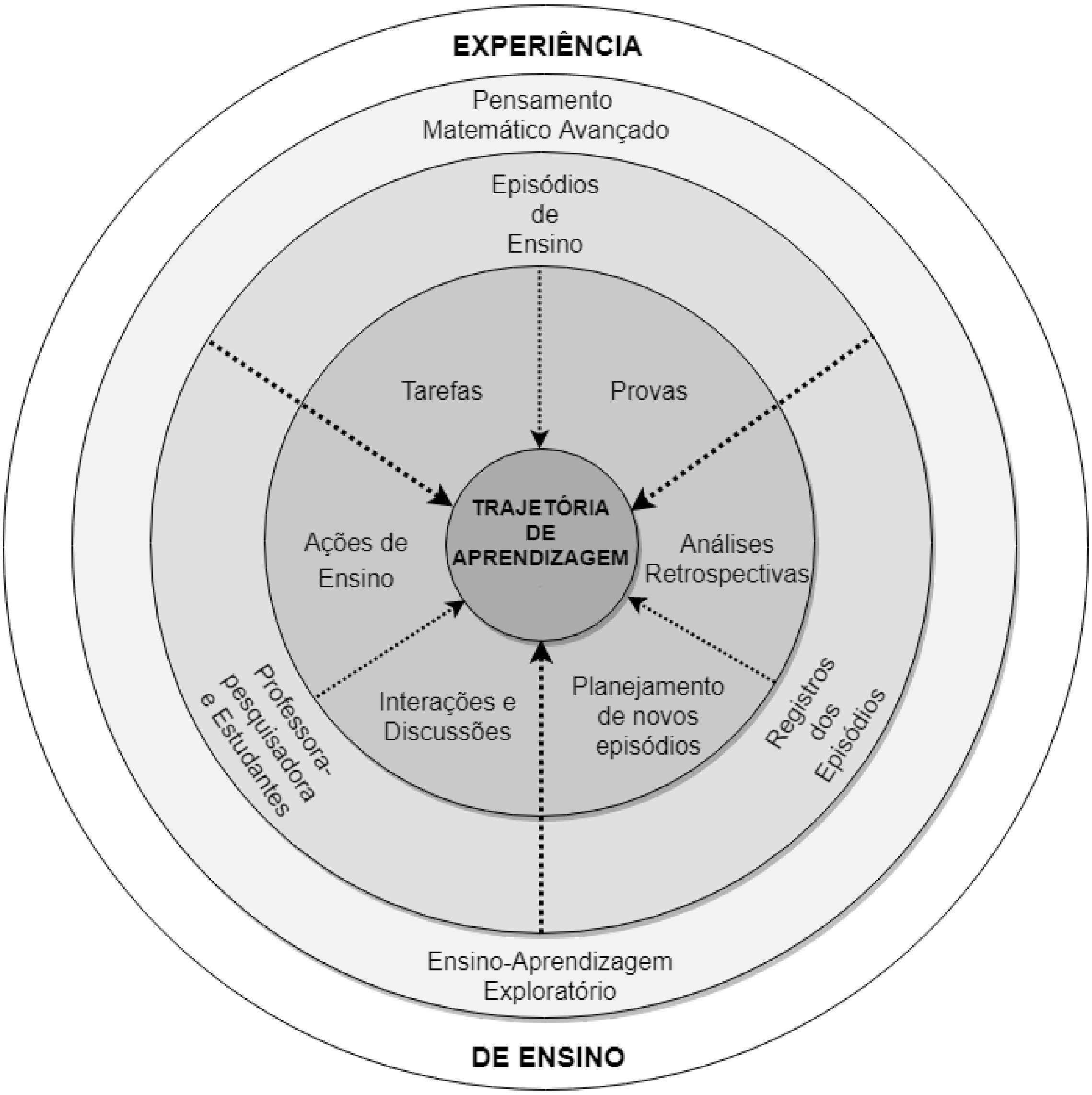
[46] Ou trajetória hipotética de aprendizagem, como proposto por Simon (1995).

as resoluções que oportunizaram discussões produtivas para a sistematização das aprendizagens matemáticas.

Na sequência, foram estabelecidas conexões entre as diferentes respostas dos estudantes e as ideias centrais, sendo essa a quinta ação da professora-pesquisadora relacionada ao ensino, conforme proposto por Stein *et al.* (2008).

Relacionando os aportes teóricos e metodológicos discutidos até aqui, o esquema a seguir (Figura 3) sintetiza como foi concebida a Experiência de Ensino construída neste estudo.

Figura 3 – Síntese da Experiência de Ensino construída neste estudo



Fonte: autoria própria.

Como sintetizado na Figura 3, a Experiência de Ensino desenvolvida nesta tese é fundamentada nas abordagens do PMA e do Ensino-Aprendizagem Exploratório, sendo composta essencialmente pelos três seguintes elementos: os episódios de ensino, os registros dos referidos episódios, a professora-pesquisadora e os estudantes.

Os episódios de ensino foram baseados nas tarefas e nas provas escritas, que foram elaboradas tendo em vista principalmente, as dificuldades dos estudantes, a análise dos livros didáticos adotados na disciplina, as experiências da professora-pesquisadora, e os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem dos estudantes.

A professora-pesquisadora e os estudantes desenvolveram ações de ensino, interações e discussões que priorizaram uma abordagem exploratória da Matemática e o desenvolvimento de processos mentais durante a aprendizagem da Matemática.

E por fim, os registros dos episódios, compostos pelas notas de campo da professora-pesquisadora e pela produção escrita dos estudantes participantes, serviram de subsídio para as análises retrospectivas e para o replanejamento dos próximos episódios.

Todos esses elementos inter-relacionados, deram origem a uma trajetória de aprendizagem para o estudo dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, voltada para estudantes ingressantes de um curso de Licenciatura em Química.

Tendo em vista que as Experiências de Ensino são feitas para testar e gerar hipóteses e conjecturas sobre os processos de ensino e aprendizagem, tanto durante os episódios como no processo global de pesquisa (STEFFE; THOMPSON, 2000), partimos de uma hipótese inicial de que *o ensino dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares por meio de tarefas investigativas, com uma abordagem exploratória fundamentada em dificuldades e conhecimentos prévios dos estudantes, pode proporcionar o desenvolvimento dos processos do PMA, e em especial, dos processos relacionados à abstração*, necessários no estudo da Álgebra Linear.

Salientamos que tal hipótese pode ser reformulada ou abandonada após a análise de um ou vários episódios, e que novas hipóteses poderão condicionar o planejamento das próximas intervenções em sala de aula, como proposto por Steffe e Thompson (2000), pois na Experiência de Ensino os estudantes guiam os pesquisadores.

Com a finalidade de conhecer melhor o curso e os estudantes participantes desta Experiência de Ensino, na seção seguinte elaboramos um perfil de ambos.

3.2 CONTEXTO DA PESQUISA

3.2.1 Perfil do Curso de Licenciatura em Química

A Experiência de Ensino foi desenvolvida em uma universidade pública federal situada no estado do Paraná, no curso de Licenciatura em Química, que entrou em atividade no início do ano de 2011.

A escolha dessa instituição ocorreu pelo fato de a professora-pesquisadora, autora desta tese, trabalhar como docente na disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear no curso de Licenciatura em Química desde o ano de 2013 até o período de desenvolvimento deste estudo. Tal fato facilitou o acesso à turma e, somado à experiência da professora-pesquisadora no curso, contribuiu para a elaboração de tarefas e a coleta de dados desta pesquisa.

O referido curso é ofertado no período noturno, tem a duração de oito semestres, e uma carga horária total de 3135 horas, distribuídas entre disciplinas obrigatórias teóricas e práticas, disciplinas optativas, estágio curricular obrigatório e atividades complementares.

A disciplina Geometria Analítica e Álgebra Linear, na qual se desenvolve este estudo, conta com uma carga horária de 90 horas, e está alocada no primeiro semestre do curso de Licenciatura em Química. De acordo com o projeto político-pedagógico, a disciplina analisada tem por objetivos: “utilizar o conhecimento matemático para realizar a leitura e a representação da realidade, procurando agir sobre ela; compreender os conceitos de álgebra e geometria analítica para solucionar problemas do cotidiano” (APUCARANA, 2013).

Em relação aos conteúdos contemplados na disciplina, o projeto político-pedagógico do curso apresenta a seguinte ementa: Reconhecer os vários sistemas de coordenadas. Realizar operações de mudanças de coordenadas. Resolver operações envolvendo vetores. Identificar as equações da reta e do plano no R^2 e no R^3. Utilizar o conceito de matrizes e determinantes para modelar e resolver problemas; identificar características e técnicas de resolução de sistemas lineares. Aplicar os conceitos da Álgebra Linear na resolução de problemas e no estudo das cônicas e quádricas.

Dentre tais conteúdos, para este estudo, optamos por trabalhar com os conteúdos referentes a Matrizes e Sistemas de Equações Lineares devido à importância desses no estudo dos conteúdos avançados da Álgebra Linear e da Geometria Analítica, e por serem conteúdos já estudados no Ensino Fundamental e Médio, que são aprofundados no Ensino Superior.

Salientamos que, mediante solicitação prévia, a coordenação do curso autorizou e incentivou o desenvolvimento desta pesquisa.

3.2.2 Perfil da Turma de Licenciatura em Química

Este estudo foi realizado com estudantes ingressantes no Ensino Superior, logo, a professora-pesquisadora não os conhecia. Assim, no primeiro encontro com a turma, ela se apresentou e solicitou aos estudantes que fizessem o mesmo. Na sequência, os estudantes foram convidados a participar da pesquisa, foram explicados os objetivos da investigação e a forma como ela seria desenvolvida. Foi mencionado o compromisso da pesquisadora com relação ao anonimato e foi solicitada a assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido pelos participantes (Apêndice B), permitindo a análise e divulgação das atividades realizadas em sala de aula, caso concordassem em participar da pesquisa.

Inicialmente, a turma era constituída por 25 estudantes, todos se prontificaram a participar da pesquisa e assinaram o termo. Após três semanas de aula, devido ao procedimento de segunda chamada[47], mais 18 alunos foram matriculados na disciplina. No entanto, como esses não participaram de momentos importantes da experiência de ensino, como a prova escrita e as duas primeiras tarefas, foram desconsiderados nas análises das avaliações e dos episódios.

Assim, as narrativas dos episódios de ensino e os dados da prova escrita são apresentados considerando os 25 estudantes mencionados inicialmente, pois o planejamento e a construção das tarefas e episódios foram realizados com o propósito de atender às especificidades desses estudantes.

A fim de podermos analisar a produção escrita dos estudantes em cada episódio e a forma como progrediram em relação ao PMA na Experiência de Ensino como um todo, selecionamos para o *corpus*[48] da pesquisa apenas os estudantes que, além de assinarem o termo e estarem matriculados desde o início da disciplina, participaram de todos os episódios de ensino. Desta forma, o recorte selecionado para as análises no Capítulo 5 deste estudo, de acordo com os critérios mencionados, é formado por 11 estudantes.

Para conhecer um pouco mais os 25 estudantes que constituem a turma selecionada, foi proposta a resolução de uma prova escrita (detalhada no próximo capítulo), na qual as primeiras seis questões eram destinadas a construir um perfil pessoal do estudante, fazendo com que esse refletisse e escrevesse sobre suas experiências, suas motivações e suas perspectivas pessoais e profissionais. A partir das respostas dos estudantes a tais questões, trazemos as informações a seguir.

Os estudantes envolvidos têm em média 18 anos, sendo quatorze mulheres e onze homens. Vinte e três estudantes estão frequentando a graduação pela primeira vez, um estudante cursou dois anos do curso de Bacharelado em Química, e um estudante cursou dois anos e meio do curso de Ciências Econômicas, ambos em outras instituições. Nenhum possui experiência na docência.

---

[47] Procedimento no qual as vagas eventualmente não ocupadas na primeira chamada são preenchidas mediante utilização de lista de espera, seguindo a ordem de classificação no processo de seleção.

[48] "O *corpus* é o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos" (BARDIN, 1977, p. 96).

Após essa caracterização dos estudantes participantes da pesquisa, na próxima seção descrevemos os métodos de coleta dos dados utilizados.

3.3 COLETA DOS DADOS

Os dados de uma investigação qualitativa, segundo Bogdan e Biklen (1994), são os elementos que formam a base da análise, incluem registros feitos pelos investigadores, como transcrições de entrevistas e notas de campo, e aquilo que foi produzido por terceiros e é encontrado pelo investigador, como fotografias, diários, documentos oficiais, entre outros.

Molina, Castro e Castro (2007) afirmam que em uma Experiência de Ensino a coleta de dados pode ser uma tarefa exaustiva, pois deve proporcionar a descrição precisa das interações em sala de aula, do desempenho e evolução dos estudantes e das reflexões e decisões dos investigadores ao longo da pesquisa. Por essa razão, os autores recomendam o uso de múltiplos métodos de coleta de dados.

Neste estudo, como dito anteriormente, os dados coletados e analisados compreenderam às notas de campo e a produção escrita dos estudantes. Optamos por esses métodos de coleta por entender que, além de fornecer as informações necessárias às análises, eles são mais naturais ao ambiente de sala de aula, já que a utilização de câmeras de vídeo, por exemplo, poderia causar constrangimento ou diminuir a participação dos estudantes.

As notas de campo, ou seja, "o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 150), foram elaboradas pela professora-pesquisadora durante e após os episódios de ensino, descrevendo as abordagens, discussões e atitudes dos participantes, bem como suas reflexões sobre cada episódio. A elaboração desses dados permitiu à professora-pesquisadora acompanhar o desenvolvimento da Experiência de Ensino, fazer alterações no planejamento dos episódios e refletir a respeito da influência de suas ações nos processos de ensino e de aprendizagem.

Complementando as notas de campo, a produção escrita de todos os estudantes da turma, resultante da resolução das tarefas propostas, foi coletada ao final de cada episódio de ensino mediante autorização; e para que os estudantes pudessem consultar suas resoluções posteriormente, fizemos fotocópias de todo o material e entregamos a eles. Por meio da análise dos registros escritos dos estudantes, em tarefas de Matemática, poderemos conhecer características e particularidades do Pensamento Matemático dos estudantes, e ainda, como argumentam Nagy-Silva e Buriasco (2005),

> "[...] a partir das informações sobre a produção escrita dos alunos, que apresentam tanto as suas dificuldades quanto as suas possibilidades, é possível realizar uma intervenção que de fato contribua para o desenvolvimento dos alunos" (NAGY-SILVA; BURIASCO, 2005, p. 510).

Deste modo, os dados recolhidos com os procedimentos destacados "são designados por *qualitativos,* o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas [...]" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 16), e compõem o material descritivo para as análises, cujos procedimentos serão descritos na próxima seção.

3.4 PROCEDIMENTOS PARA A ANÁLISE DOS DADOS

A investigação da produção escrita dos estudantes e das notas de campo da professora-pesquisadora, coletados durante os episódios da Experiência de Ensino, se deram por meio de uma metodologia predominantemente qualitativa, a qual "reflete uma espécie de diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos, dado estes não serem abordados por aqueles de uma forma neutra" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 51).

Dessa forma, na busca de um instrumento para a interpretação dos dados, nos orientamos pelas técnicas da Análise de Conteúdo apresentadas por Bardin (1977), que compreendem três fases principais: a pré-análise; a exploração do material; e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

A pré-análise é a fase de organização e esquematização das ideias iniciais, nessa fase, Bardin (1977) recomenda a realização da *leitura* *flutuante*[49], buscando um primeiro contato com os dados, um momento para primeiras impressões e orientações, para em seguida selecionar o universo dos documentos a serem analisados, chamado de *corpus* da pesquisa. Dando continuidade, deve-se formular as hipóteses, estabelecer os objetivos, escolher os índices e construir indicadores precisos e seguros, finalizando com a edição do material.

A fase de exploração do material, de acordo com Bardin (1977), trata-se das operações de codificação, desconto ou enumeração dos dados em função das regras previamente estabelecidas. Na terceira e última fase ocorre o tratamento dos dados, podendo ser aplicadas análises estatísticas para a apresentação de resultados e então propor inferências.

Inicialmente, fizemos fotocópias de toda a produção escrita dos estudantes para que tivessem seus registros guardados para futuras consultas, assim pudemos ficar com os originais para as análises. Estes foram codificados de forma a manter o anonimato dos estudantes, adotamos a letra E, em referência à palavra estudante, e um número para diferenciá-los (E1, E2, ...).

Após a organização e *leitura flutuante* dos dados coletados, selecionamos como *corpus* de análise a produção escrita dos estudantes que participaram de todos os episódios da Experiência de Ensino e assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice B), sendo assim, dos 25 estudantes participantes apenas 11 foram selecionados para as análises que estão no Capítulo 5. Tais critérios de seleção foram adotados com a intenção de podermos analisar a influência de cada tarefa, bem como das discussões em sala de aula, na aprendizagem e no desenvolvimento do PMA durante a Experiência de Ensino em sua totalidade.

Por meio dos dados coletados, objetivamos identificar indícios dos processos do PMA nas resoluções dos estudantes, e assim, comparando e analisando os episódios, estudar a superação de dificuldades e a evolução na aprendizagem dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares. Para isso, iniciamos a exploração dos dados olhando para cada episódio,

---

[49] A *leitura flutuante*, segundo Bardin (1977, p. 96), "consiste em estabelecer contato com os documentos a analisar e em conhecer o texto deixando-se invadir por impressões e orientações".

fazemos uma análise minuciosa de todas as resoluções para cada questão, e por fim, realizamos a categorização dos dados.

A categorização, definida por Bardin (1977, p. 117) como "uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o gênero (analogia), com os critérios previamente definidos", foi realizada com base no referencial teórico do PMA apresentado no capítulo anterior, sendo assim, as categorias de análise foram elaboradas de acordo com os processos e subprocessos desse pensamento, propostos por e Dreyfus (2002) e Dreyfus e Eisenberg (1996).

Na fase de tratamento dos resultados, as análises aconteceram com foco nos processos do PMA. Analisamos em cada episódio de ensino as produções escritas dos estudantes participantes, buscando indícios de processos do PMA; semelhanças e regularidades nas atividades e raciocínios dos estudantes – considerando seus caminhos percorridos na resolução das tarefas, suas justificações e dificuldades – e relacionando-as às ações da professora-pesquisadora.

No capítulo seguinte, serão apresentadas as etapas da Experiência de Ensino, bem como a construção das tarefas e a narrativa dos episódios que a compõem.

4. A EXPERIÊNCIA DE ENSINO

O presente capítulo descreve a Experiência de Ensino realizada, bem como o processo de concepção de uma trajetória de aprendizagem para os conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares.

Na primeira seção, integramos os aspectos teóricos abordados no Capítulo 2 com a hipótese que elaboramos sobre os processos de ensino e de aprendizagem dos referidos conteúdos. Em seguida, discorremos a respeito dos conteúdos de Matrizes e Sistemas Lineares, começando com as definições e métodos apresentados por alguns autores, seguindo com as Orientações Curriculares para a sua abordagem em sala de aula. Sequencialmente, identificamos as dificuldades apresentadas pelos estudantes na compreensão dos referidos conteúdos, segundo as pesquisas do levantamento bibliográfico e a avaliação diagnóstica, realizadas no início da Experiência de Ensino. Prosseguimos com a construção das tarefas e a indicação dos respectivos objetivos de aprendizagem.

Na segunda seção, trazemos a narrativa de cada um dos episódios de ensino, segundo o ponto de vista da professora-pesquisadora.

4.1 PRESSUPOSTOS GERAIS DA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

A presente Experiência de Ensino foi idealizada com a intenção de propiciar a investigação de indícios de desenvolvimento do PMA em produções escritas de estudantes do primeiro semestre de um curso de Licenciatura em Química, em uma disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, caracterizando assim o objetivo geral desta pesquisa.

Sendo a Experiência de Ensino um instrumento destinado à exploração da matemática dos estudantes (STEFFE; THOMPSON, 2000), apresentamos nesse trabalho teorias e abordagens que nos orientaram e fundamentaram essa exploração, e que nos ampararam na compreensão do processo de aprendizagem da matemática.

Assim como Simon (1995) e Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), entendemos a aprendizagem como um processo de construção social e individual. Um processo social no sentido de ser coletivo, de proporcionar a construção de conhecimentos por meio de interações entre estudantes, e entre estudantes e professores, no contexto de uma atividade matemática. E um processo individual no sentido de ser um processo cognitivo, que intercorre da interação do estudante com a tarefa para a produção do conhecimento.

Nesse cenário, a perspectiva de Dreyfus (2002) – que aborda processos relacionados ao PMA, como a abstração e a representação – nos orientou para a compreensão dos processos cognitivos desenvolvidos durante a aprendizagem da Matemática, e em especial, na aprendizagem dos conceitos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, focos desta pesquisa.

Já a perspectiva do Ensino-Aprendizagem Exploratório da Matemática (PONTE, 2005), nos proporcionou vislumbrar a importância das interações entre estudantes e professores; organizar e planejar cada episódio de ensino, desde a escolha dos conteúdos e construção das tarefas até as ações da professora-pesquisadora na organização das discussões em sala de aula.

Tais entendimentos foram delineando e deram origem ao que consideramos produto dessa Experiência de Ensino: uma *trajetória de aprendizagem*[50] para os conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, voltada para estudantes ingressantes de um curso de Licenciatura em Química.

O termo *trajetória hipotética de aprendizagem* foi utilizado pela primeira vez por Simon (1995):

> Uso o termo “trajetória hipotética de aprendizagem” para me referir à previsão do professor quanto ao caminho pelo qual a aprendizagem pode prosseguir. É hipotética porque a trajetória real de aprendizagem não é conhecida antecipadamente. Ela caracteriza uma tendência esperada. A aprendizagem individual dos estudantes procede ao longo de caminhos idiossincráticos, embora frequentemente semelhantes (SIMON, 1995, p. 135, tradução nossa)[51].

---

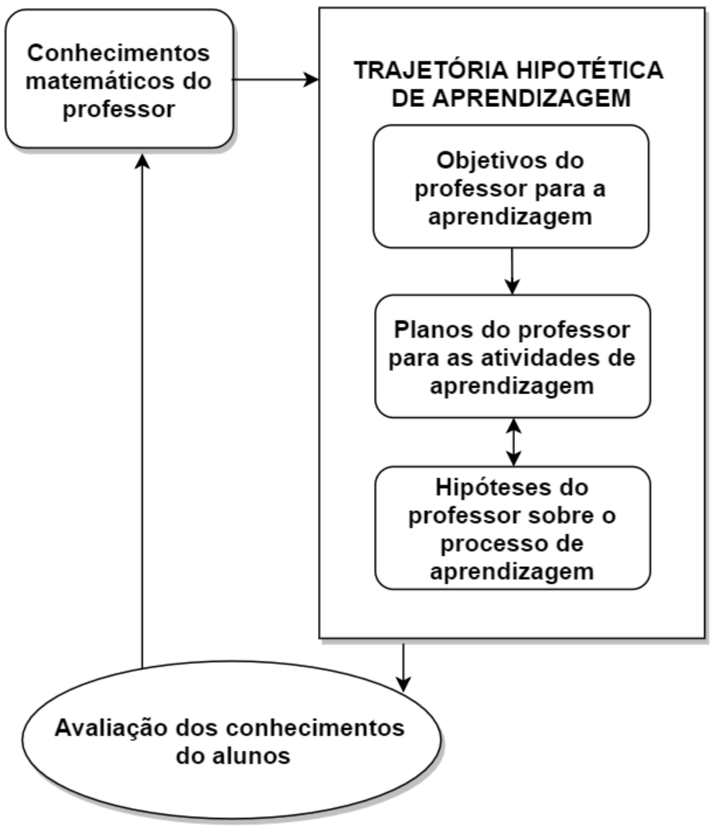
[50] Ou *trajetória de aprendizado emergente*, como denominado por Weber, Walkington e McGalliard (2015), pois, segundo os autores tal trajetória reflete o desenvolvimento da compreensão do estudante após a instrução real e a interpretação dos dados. Sendo gerada comumente após uma experiência de aprendizagem.

[51] Do inglês *“I use the term “hypothetical learning trajectory” to refer to the teacher’s prediction as to the path by which learning might proceed. It is hypothetical because the actual learning trajectory is not knowable in advance. It characterizes an expected tendency. Individual students’ learning proceeds along idiosyncratic, although often similar, paths.”*

Desde então, muitos pesquisadores têm conduzido suas pesquisas utilizando como base a construção de “trajetórias de aprendizagem”, surgindo assim, diferentes interpretações. Após discussões e esclarecimentos a respeito dessas interpretações, recentemente, pesquisadores chegaram a um consenso quanto ao que compõe uma trajetória de aprendizagem, a saber: a) um objetivo de aprendizagem; b) um caminho ao longo do qual os estudantes desenvolvem o pensamento e a aprendizagem para alcançar esse objetivo; e c) um conjunto de atividades instrucionais, ou tarefas, combinadas com cada um dos níveis de pensamento nesse caminho, que auxiliam os estudantes no desenvolvimento de níveis mais elevados de pensamento (CLEMENTS; SARAMA, 2004).

Esses três componentes, de acordo com Simon (1995), são moldados com base nos conhecimentos matemáticos do professor e nas compreensões dos estudantes, sendo que tais compreensões podem possuir fontes diversas, como pré-testes, experiências com grupos similares e dados de pesquisa. Assim, tal processo de construção possui uma natureza hipotética em que o professor está constantemente envolvido na modificação dessas componentes, de forma que a criação e modificação contínua da trajetória de aprendizagem é ponto central no modelo proposto por Simon (1995), observado na Figura 4.

Figura 4 – Ciclo de ensino de Matemática (abreviado[52])



Fonte: Simon (1995, p. 136, tradução nossa).

Como representado no diagrama da Figura 4, os objetivos de aprendizagem do professor, em relação ao conteúdo matemático a ser trabalhado, fornecem uma direção para a trajetória de aprendizagem, para a elaboração das tarefas e para a previsão de como o pensamento e a compreensão dos estudantes evoluirão nesse contexto (SIMON, 1995). Segundo Simon e Tzur (2004). Enquanto os objetivos de aprendizagem fornecem uma direção para os demais componentes da trajetória de aprendizagem, as tarefas e as hipóteses a respeito do caminho de pensamento e aprendizagem dos estudantes são interdependentes, uma vez que “as tarefas são selecionadas com base em hipóteses sobre o processo de aprendizagem; a hipótese do processo de aprendizagem baseia-se nas tarefas envolvidas” (SIMON; TZUR, 2004, p. 93, tradução nossa)[53].

[52] A referida abreviação foi realizada pelo próprio autor.
[53] Do inglês *“The tasks are selected based on hypotheses about the learning process; the hypothesis of the learning process is based on the tasks involved”.*

No presente estudo, o objetivo e o planejamento dos episódios foram baseados na revisão de literatura realizada e no relacionamento de dois fatores apresentados por Simon (1995): a compreensão matemática da professora-pesquisadora – que se apoiou em suas experiências na docência dos conteúdos em questão para o referido curso – e as hipóteses da professora-pesquisadora sobre o conhecimento dos estudantes – nesse sentido, muitas informações foram obtidas acerca das dificuldades levantadas por meio da pesquisa bibliográfica, apresentadas na Seção 4.1.2, e da avaliação diagnóstica, cuja prova escrita, utilizada nessa avaliação, será detalhada na Seção 4.1.3.

Sobre as hipóteses do professor quanto à aprendizagem de determinado tópico matemático pelos estudantes, – ou ainda, quanto ao caminho de desenvolvimento do pensamento e da aprendizagem desses com relação aos objetivos do professor – estão relacionadas com a progressão nos níveis de pensamento, cada vez mais sofisticados, descrevendo uma trajetória pela qual os estudantes seguem para desenvolver compreensão e habilidade sobre tal tópico matemático (CLEMENTS; SARAMA, 2004). Nesse sentido, a teoria do PMA (DREYFUS, 2002) discutida nessa pesquisa, também se fez presente na construção das hipóteses de aprendizagem da trajetória proposta, no estudo e na compreensão do pensamento matemático e dos processos cognitivos envolvidos na aprendizagem dos estudantes.

Em relação às tarefas instrucionais, ou atividades de aprendizagem como são nomeadas por Simon (1995), constituem um meio eficaz de promover o desenvolvimento de conceitos matemáticos específicos ocupando, portanto, papel fundamental no processo instrucional (SIMON; TZUR, 2004). Porém, é preciso que o estudante esteja engajado e seja encorajado na reflexão sobre tais tarefas, já que "um professor pode propor uma tarefa. No entanto, é o que os estudantes fazem dessa tarefa e sua experiência com ela que determina o potencial de aprendizado" (SIMON, 1995, p. 133, tradução nossa)[54].

Destacamos que a discussão sobre o papel desempenhado pelas tarefas propostas aos estudantes, no processo de aprendizagem da

[54] Do inglês *"A teacher may pose a task. However, it is what the students make of that task and their experience with it that determines the potential for learning".*

Matemática, é um ponto comum entre as abordagens anteriormente mencionadas, relacionadas ao PMA, ao Ensino-Aprendizagem Exploratório da matemática e às trajetórias de aprendizagem.

Nesse sentido, Dreyfus (2002) ressalta a relevância de se estabelecer critérios e intenções na escolha das tarefas, a fim de que essas proporcionem aos estudantes diferentes maneiras de trabalhar com a Matemática, bem como o uso de diferentes representações que possibilitem a construção de diferentes processos mentais, como os processos de representação e abstração, presentes no PMA.

Já Ponte (2005) pondera que o problema da seleção de tarefas não se encerra em sua diversificação, pois é preciso que as tarefas proporcionem, além de outras coisas, um percurso de aprendizagem coerente, o domínio de notações e o estabelecimento de conexões dentro e fora da matemática; sendo assim, o autor apresenta diferentes tipos de tarefas e formas de trabalhar em sala de aula, que podem contribuir para a aprendizagem da matemática.

E, corroborando com tais afirmações, Clements e Sarama (2004) concluem que, devemos projetar tarefas visando construções mentais específicas, que incluam objetos externos e ações que se assemelhem a atividade hipotética dos estudantes, tanto quanto possível.

Por fim, cabe salientar que, quando utilizamos os termos “tarefa” e “atividade” nessa pesquisa, estamos nos referindo a conceitos distintos, mas inter-relacionados, como exposto por Ponte (2014):

> [...] a atividade, que pode ser física ou mental, diz respeito essencialmente ao aluno e refere-se àquilo que ele faz num dado contexto. Pelo seu lado, a tarefa representa apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é exterior ao aluno (embora possa ser decidida por ele). Na verdade, as tarefas são usualmente (mas não necessariamente) propostas pelo professor, mas, uma vez propostas, têm de ser interpretadas pelo aluno e podem dar origem a atividades muito diversas (ou a nenhuma atividade). (PONTE, 2014, p. 15).

Quanto aos termos “questão”, “exercício”, “problema”, “exploração” e “investigação”, esses são entendidos segundo as ideias de Ponte (2005), discutidas na Seção 2.3.

Nas subseções seguintes, detalhamos etapas fundamentais que perfazem a trajetória de aprendizagem dessa pesquisa: a análise dos livros didáticos adotados na disciplina; a identificação das dificuldades dos estudantes, realizada por meio da pesquisa bibliográfica e da prova escrita – cruciais para a definição dos objetivos de aprendizagem e para a inferência sobre o processo de aprendizagem dos estudantes participantes –; e a construção das tarefas, que representam o eixo central do percurso de aprendizagem.

Considerando que, segundo Steffe e Thompson (2000), as Experiências de Ensino visam gerar e testar hipóteses sobre os processos de ensino e aprendizagem, e que as trajetórias de aprendizagem articulam tais hipóteses em um caminho fecundo de aprendizagem e de ensino (CLEMENTS; SARAMA, 2004), hipotetizamos inicialmente que *o ensino dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares por meio de tarefas investigativas, com uma abordagem exploratória fundamentada em dificuldades e conhecimentos prévios dos estudantes, pode proporcionar o desenvolvimento dos processos do PMA, e em especial, dos processos relacionados à abstração*, necessários no estudo da Álgebra Linear.

Contudo, esta trajetória de aprendizagem não tem a pretensão de servir como um guia ou de fornecer um material completo para o ensino dos conteúdos de matrizes e sistemas de equações lineares para o curso de Licenciatura em Química. Nossa proposta com esta pesquisa é apresentar e discutir algumas ideias e tarefas que poderão contribuir para o ensino e a aprendizagem de tais conteúdos, proporcionando aos estudantes um ambiente de aprendizagem em que possa ocorrer a mobilização de conhecimentos prévios e a construção de novos conceitos, e ao professor uma maior compreensão de como se desenvolve a aprendizagem e o Pensamento Matemático Avançado dos estudantes.

Na próxima seção, discutiremos algumas abordagens de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, dada a relevância do conteúdo a ser estudado e de suas particularidades no planejamento da aula.

4.1.1 Algumas Abordagens de Matrizes e Sistemas Lineares

Nesta seção faremos uma análise dos livros adotados como referência bibliográfica para a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear do curso de Licenciatura em Química – na qual esta pesquisa foi desenvolvida – quanto ao modo como os conteúdos de Matrizes e de Sistemas de Equações Lineares são abordados. Em seguida, dissertaremos a respeito das dificuldades dos estudantes na aprendizagem desses conteúdos, de acordo com os estudos apresentados no levantamento bibliográfico desta pesquisa e com avaliação diagnóstica realizada no início da Experiência de Ensino.

No Projeto Político-Pedagógico do Curso de Licenciatura em Química no qual esta investigação ocorreu, as referências bibliográficas das disciplinas são compostas por três títulos para a bibliografia básica e cinco títulos para a bibliografia complementar.

Para a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, os títulos adotados no Plano de Ensino (Apêndice J), que contemplam os conteúdos de Matrizes e Sistemas Lineares, são Introdução à Álgebra Linear com aplicações (KOLMAN; HILL, 2013)[55], Álgebra Linear (BOLDRINI, 1980), Álgebra Linear (POOLE, 2009) e Vetores e Matrizes: uma introdução à álgebra linear (SANTOS, 2007).

A seguir traremos uma discussão e análise sobre como os conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares são abordados por esses autores em seus livros. Essa análise, em conjunto às dificuldades e outros aspectos examinados no levantamento bibliográfico (Seção 2.1), orientarão o planejamento e a construção de tarefas que complementem as tarefas propostas nos livros didáticos, oportunizando aos estudantes situações de aprendizagem ricas, que serão desenvolvidas nos episódios de ensino desse estudo.

Bernard Kolman e David Ross Hill (2013) – Introdução à Álgebra Linear com Aplicações

Esse livro destina-se a estudantes do primeiro ou segundo ano de cursos de graduação em geral e, segundo os autores, sua abordagem

[55] Este título pertence a bibliografia básica da disciplina em estudo, enquanto os outros três fazem parte da bibliografia complementar.

enfatiza os aspectos computacionais e geométricos dos assuntos tratados e mantém a abstração em um nível mínimo.

Os capítulos que compõem o livro são: 1. Equações Lineares e Matrizes; 2. Aplicações de Equações Lineares e Matrizes; 3. Determinantes; 4. Vetores em R^n; 5. Aplicações de Vetores em R^2 e R^3; 6. Espaços Vetoriais Reais; 7. Aplicações de Espaços Vetoriais Reais; 8. Autovalores, Autovetores e Diagonalização; 9. Aplicações de Autovalores e Autovetores; 10. Transformações Lineares e Matrizes; 11. Programação Linear e 12. MATLAB para Álgebra Linear. Os capítulos 2, 5, 7, 9 e 11 são sinalizados pelo autor como opcionais e em sua maioria trazem aplicações dos conteúdos estudados nos demais capítulos.

O capítulo 1 se inicia com as definições de equação linear e solução de uma equação linear para então introduzir a definição de sistema de equações lineares (Figura 5).

Figura 5 – Definição de sistemas de equações lineares e solução de um sistema de equações lineares

De maneira mais geral, um **sistema de *m* equações lineares a *n* incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$**, ou simplesmente um **sistema linear**, é um conjunto de *m* equações lineares, cada uma com *n* incógnitas. Um sistema linear pode ser convenientemente representado na forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \quad \vdots \qquad \qquad \quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{2}$$

Os dois índices *i* e *j* são utilizados como a seguir. O primeiro índice *i* indica que estamos lidando com a *i*-ésima equação, enquanto o segundo índice *j* está associado à *j*-ésima variável, x_j. Dessa maneira, a *i*-ésima equação é

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

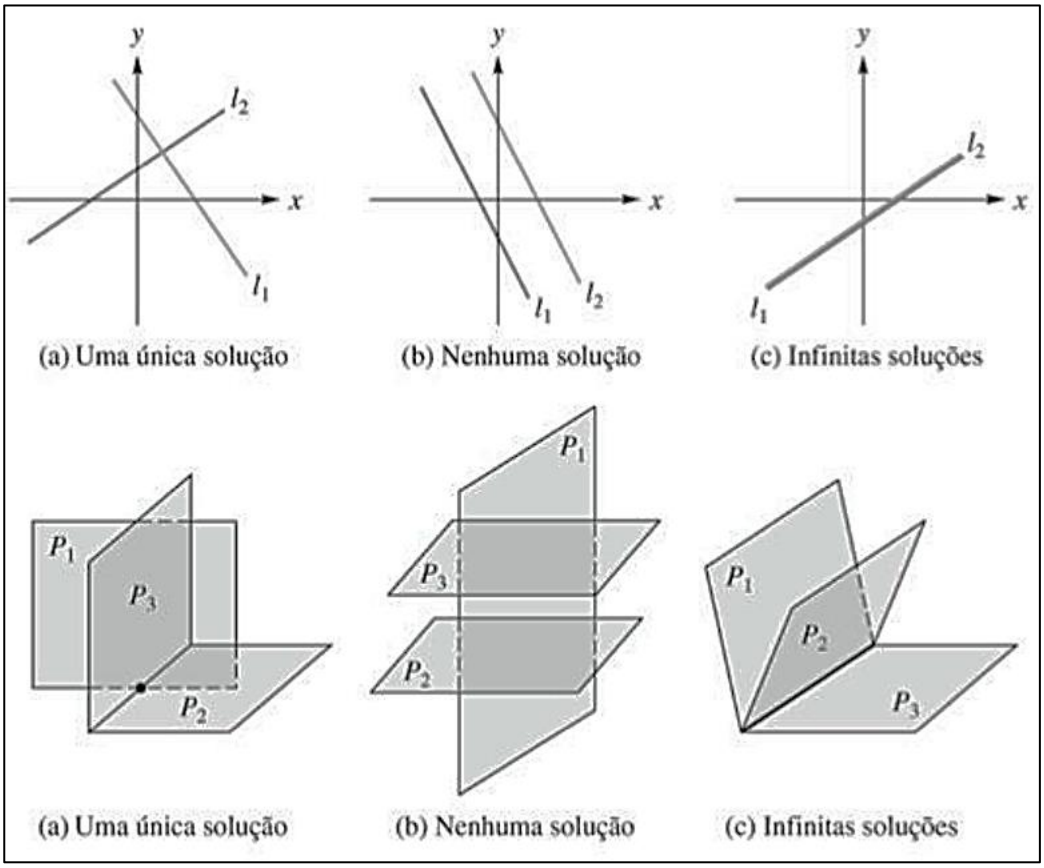
Em (2), os coeficientes a_{ij} são constantes de valor conhecido. Dados os valores de $b_1, b_2, \ldots, b_m$ queremos encontrar os valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfaçam cada uma das equações em (2).

Uma **solução** de um sistema linear (2) é uma seqüência de *n* números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ que têm como propriedade o fato de que cada equação em (2) é satisfeita quando $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$ são substituídos em (2).

Fonte: Kolman e Hill (2013, p. 1).

O primeiro método apresentado para a resolução de um sistema de equações lineares é o método da eliminação, que é ilustrado a partir de diversos exemplos em que são contemplados os três tipos de solução de um sistema linear – determinada, indeterminada e impossível –, a representação geométrica dessas soluções para sistemas 2x2 e 3x3 (Figura 6), e algumas aplicações.

Figura 6 – Representação geométrica das soluções de Sistemas Lineares 2x2 e 3x3



Fonte: Kolman e Hill (2013, p. 5-6).

A seção seguinte traz o conceito de matriz que é discutido a partir do método da eliminação, devido à notação conveniente que as Matrizes fornecem, e exibindo outros aspectos do conceito. A Figura 7 exibe a definição de matriz segundo os autores.

Figura 7 – Definição de matriz

Uma **matriz** A $m \times n$ é um arranjo retangular de mn números reais (ou complexos) distribuídos em m **linhas** horizontais e n **colunas** verticais:

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-ésima linha} \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow\ j\text{-ésima coluna} & \end{array} \qquad (1)$$

A ***i*-ésima linha** de A é

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \qquad (1 \leq i \leq m);$$

e a ***j*-ésima coluna** de A é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad (1 \leq j \leq n).$$

Fonte: Kolman e Hill (2013, p. 9).

Na sequência, são apresentados diversos exemplos e problemas aplicados, dentre os quais estão inseridas as definições dos diferentes tipos de Matrizes e as operações com Matrizes, como a adição definida na Figura 8.

Figura 8 – Adição de Matrizes

Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são matrizes $m \times n$, então a **soma** de A e B é a matriz $C = [c_{ij}]$, $m \times n$, definida por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n).$$

Portanto, C é obtida pela adição dos elementos correspondentes de A e B.

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & -2+2 & 4+(-4) \\ 2+1 & -1+3 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Deve-se notar que a soma das matrizes A e B é definida somente quando A e B têm o mesmo número de linhas e de colunas, isto é, apenas quando A e B são do mesmo tamanho.

Devemos agora definir a convenção de que quando $A + B$ é formada, ambas A e B são do mesmo tamanho.

Fonte: Kolman e Hill (2013, p. 12).

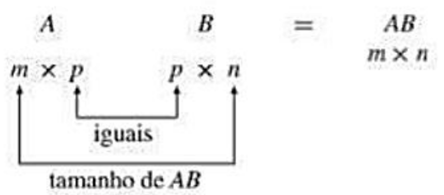
A seção seguinte é dedicada à multiplicação de Matrizes, que é definida em termos do somatório (Figura 9) – ao final da seção esse assunto é tratado com maiores detalhes. O caso particular da multiplicação entre Matrizes e vetores também é comentado para introduzir a notação matricial de Sistemas de Equações Lineares, e a seguir são apresentadas as propriedades das operações entre Matrizes.

Figura 9 – Multiplicação de Matrizes

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $m \times p$ e $B = [b_{ij}]$ é uma matriz $p \times n$, então o **produto** de A e B, representado por AB, é a matriz $m \times n$ $C = [c_{ij}]$, definida por

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \quad (1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n). \end{aligned} \tag{2}$$

Observe que o produto de A e B é definido apenas quando o número de linhas de B é exatamente igual ao número de colunas de A, como indica a Figura 1.5.



Fonte: Kolman e Hill (2013, p. 20).

Algumas definições são trazidas como opcionais pelos autores, como a de Matrizes em blocos e Matrizes de *bits*, e ao final de cada seção são trazidos exercícios teóricos e aplicados, e exercícios para serem realizados em *softwares* computacionais, bem como uma aplicação à teoria dos grafos.

A seguir, a seção sobre transformações matriciais apresenta exemplos e ilustra as transformações: reflexão, projeção, dilatação/contração e rotação, trazendo uma aplicação desse conteúdo na computação gráfica.

Figura 10 – Definição de transformação matricial

Se A é uma matriz $m \times n$ e **u** é um vetor de dimensão n, então o produto matricial A**u** é um vetor de dimensão m. Uma função f que leva R^n a R^m é representada por f: $R^n \rightarrow R^m$.* Uma **transformação matricial** é uma função f: $R^n \rightarrow R^m$ definida por f(**u**) = A**u**. O vetor f(**u**) em R^m é chamado **imagem** de **u** e o conjunto de todas as imagens dos vetores em R^n é denominado **variação** de f.

Fonte: Kolman e Hill (2013, p. 50).

Na sequência, são apresentados alguns outros métodos de resolução de sistemas de equações lineares, como o escalonamento (eliminação de Gauss), e a eliminação de Gauss-Jordan (Figura 11).

Figura 11 – Métodos de resolução de um sistema de equações lineares

O procedimento de redução de Gauss–Jordan para resolução do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é descrito a seguir.

Passo 1. Forme a matriz aumentada $\left[A \;\vdots\; \mathbf{b}\right]$.

Passo 2. Obtenha a forma escalonada reduzida por linhas $\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}\right]$ da matriz aumentada $\left[A \;\vdots\; \mathbf{b}\right]$ utilizando as operações elementares nas linhas.

Passo 3. Para cada linha não-nula da matriz $\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}\right]$, resolva a equação correspondente para a incógnita associada ao primeiro elemento não-nulo naquela linha. As linhas com todos os elementos iguais a zero podem ser ignoradas, pois a equação correspondente será satisfeita por quaisquer valores das incógnitas.

O procedimento de eliminação gaussiana para resolução do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é descrito a seguir.

Passo 1. Forme a matriz aumentada $\left[A \;\vdots\; \mathbf{b}\right]$.

Passo 2. Obtenha a forma escalonada reduzida por linhas $\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}\right]$ da matriz aumentada $\left[A \;\vdots\; \mathbf{b}\right]$ utilizando as operações elementares nas linhas.

Passo 3. Resolva o sistema linear correspondente a $\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}\right]$ por **substituição de baixo para cima** (ilustrada no Exemplo 11). As linhas com todos os elementos iguais a zero podem ser ignoradas, pois a equação correspondente será satisfeita por quaisquer valores das incógnitas.

Fonte: Kolman e Hill (2013, p. 65).

Baseado neste último método, é introduzido o cálculo da matriz inversa (Figura 12), definições e teoremas relacionados e a resolução de Sistemas de Equações Lineares a partir da matriz inversa da matriz dos coeficientes do sistema. O capítulo se encerra com uma seção opcional sobre o método da fatoração *Lower Upper* (LU), muito utilizado na computação.

Figura 12 – Método para o cálculo da matriz inversa

O método prático para calcular a inversa da matriz A é o seguinte.

Passo 1. Forme a matriz $[A \mid I_n]$ $n \times 2n$ obtida juntado-se a matriz identidade I_n e a matriz A dada.

Passo 2. Calcule a forma escalonada reduzida por linhas da matriz obtida no Passo 1 utilizando operações elementares nas linhas. Lembre-se de que o que fizer em uma linha de A você também deverá fazer na linha correspondente de I_n.

Passo 3. Suponha que o Passo 2 produziu a matriz $[C \mid D]$ na forma escalonada reduzida por linhas.

(a) Se $C = I_n$, então $D = A^{-1}$.
(b) Se $C \neq I_n$, então C tem uma linha nula. Neste caso, A é singular e A^{-1} não existe.

Fonte: Kolman e Hill (2013, p. 88).

O capítulo 2 traz uma discussão mais aprofundada a respeito das aplicações de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares em diversas áreas, como na probabilidade e na computação gráfica, já comentados no capítulo anterior.

Este livro apresenta uma grande variedade de exemplos e aplicações por meio dos quais vários conceitos são explorados. Os aspectos geométricos e computacionais permeiam os capítulos analisados, e apesar de não os explorar muito em alguns casos – como nas soluções de um sistema linear 3x3, em que são apresentadas apenas uma interpretação geométrica para sistemas com solução indeterminada ou impossível – traz como ponto positivo o estudo das transformações matriciais. Como pré-requisito para a leitura deste título, os autores assumem que o leitor possua conhecimentos prévios sobre funções lineares, vetores, retas e planos.

José Luiz Boldrini (1980) - Álgebra Linear

Este livro, segundo o autor, é destinado a um curso de Álgebra Linear, após um curso de Geometria Analítica, e seu conteúdo foi elaborado de forma a se enquadrar ao programa de diversos cursos. Ele conta com 14 capítulos, sendo eles: 1. Matrizes; 2. Sistemas de Equações Lineares; 3. Determinantes e Matriz Inversa; 4. Espaço Vetorial; 5. Transformações Lineares; 6. Autovalores e Autovetores; 7. Diagonalização de Operadores; 8. Produto

Interno; 9. Tipos Especiais de Operadores Lineares; 10. Formas Lineares; Bilineares e Quadráticas; 11. Classificação de Cônicas e Quádricas; 12. Resolução de Sistemas de Equações Diferenciais Lineares; 13. Processos Iterativos e Álgebra Linear e 14. Conjuntos Convexos e Programação Linear.

O capítulo 1 se inicia com um exemplo (Figura 13) em que o conceito de Matrizes e algumas notações são inseridos a partir de uma tabela de dados.

Figura 13 – Operações elementares sobre as linhas de uma matriz

Chamamos de *matriz* uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas. Por exemplo, ao recolhermos os dados referentes a altura, peso e idade de um grupo de quatro pessoas, podemos dispô-los na tabela:

	Altura (m)	*Peso (kg)*	*Idade (anos)*
Pessoa 1	1,70	70	23
Pessoa 2	1,75	60	45
Pessoa 3	1,60	52	25
Pessoa 4	1,81	72	30

Fonte: Boldrini (1980, p. 1).

Na sequência, são definidos os tipos de Matrizes seguidos por exemplificações. As operações com Matrizes são introduzidas a partir de um exemplo em um contexto de semi-realidade, seguidas das definições e propriedades de cada operação.

O capítulo é finalizado com uma seção de exercícios; uma seção de aplicação, em que o conceito de Matrizes é aplicado à probabilidade junto às respostas dos exercícios.

No capítulo seguinte, os Sistemas de Equações Lineares são introduzidos a partir de um problema de balanceamento de equações químicas, modelado por um sistema 2x2, assumindo que a resolução deste tipo de sistema já seja conhecida pelo leitor.

Na sequência, é introduzido o método do escalonamento de um sistema 3x3 de forma informal, por meio da obtenção de sistemas equivalentes, porém, sem definir ou mencionar as operações elementares, as quais são apresentadas após a resolução do referido sistema.

As seções seguintes relacionam Matrizes e Sistemas Lineares, apresentando a representação matricial, a definição formal de conceitos relacionados, e a solução de um Sistema de Equações Lineares, os sistemas equivalentes (Figura 14) e as operações elementares (Figura 15).

Figura 14 – Definição de sistemas equivalentes

Dois sistemas de equações lineares são *equivalentes* se, e somente se toda solução de qualquer um dos sistemas também é solução do outro.

Fonte: Boldrini (1980, p. 33).

Figura 15 – Operações elementares sobre as linhas de uma Matriz

São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

i) Permuta da i-ésima e j-ésima linhas. ($L_i \leftrightarrow L_j$)
Exemplo: $L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

ii) Multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo *k*. ($L_i \longrightarrow kL_j$)
Exemplo: $L_2 \longrightarrow -3L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

iii) Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais *k* vezes a j-ésima linha.
($L_i \longrightarrow L_i + kL_j$)
Exemplo: $L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Fonte: Boldrini (1980, p. 35).

Na sequência são definidos conceitos como o de *matriz linha reduzida à forma de escada*[56], posto de uma matriz, e são trazidos teoremas que relacionam esses conceitos.

Logo após, são abordadas as soluções de um sistema de equações lineares (Figura 16), e a representação geométrica de tais soluções são trazidas apenas para o caso 2x2.

[56] O autor utiliza essa expressão para se referir à matriz escalonada.

Figura 16 – Solução de um sistema de equações lineares

2.5.3 Caso Geral: Consideremos um sistema de m equações lineares com n incógnitas $x_1, \dots, x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

cujos coeficientes a_{ij} e termos constantes b_i são números reais (ou complexos). Este sistema poderá ter

i) uma única solução: $\begin{cases} x_1 = k_1 \\ \vdots \quad\;\; \vdots \\ x_n = k_m \end{cases}$

ii) infinitas soluções

iii) nenhuma solução.

No primeiro caso, dizemos que o sistema é *possível* (compatível) e determinado. No segundo caso, dizemos que o sistema é *possível* e *indeterminado*. E no terceiro caso, dizemos que o sistema é *impossível* (incompatível)

Fonte: Boldrini (1980, p. 44).

Por fim, são apresentados mais alguns exemplos resolvidos, uma seção com exercícios e problemas, e a última seção do capítulo traz as demonstrações dos teoremas enunciados.

O terceiro capítulo, traz essencialmente definições, teoremas e métodos de cálculo para os determinantes e, ao final, o conteúdo de Matrizes é retomado para a definição e cálculo da matriz inversa. Nesta seção, o autor menciona o grande número de operações necessárias para o cálculo da matriz inversa por meio dos determinantes e apresenta então o cálculo desta por meio das operações elementares vistas no capítulo anterior. O capítulo é finalizado com uma seção contendo exercícios e problemas diversos.

Este livro aborda os conceitos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares de um modo mais superficial, pois apesar de utilizar uma abordagem intuitiva para introduzir o conteúdo (o que pode favorecer o estudo do leitor), faz poucas formalizações e as explorações geométricas e aplicações são escassas. Para o estudo dos Sistemas de Equações Lineares o autor assume que o leitor conheça as operações elementares que podem ser efetuadas em um sistema linear e saiba resolver Sistemas de Equações Lineares 2x2.

David Poole (2009) - Álgebra Linear

Esse livro é composto pelos seguintes capítulos: 1. Vetores; 2. Sistemas de Equações Lineares; 3. Matrizes; 4. Autovalores e Autovetores; 5. Ortogonalidade; 6. Espaços Vetoriais e 7. Distância e Aproximação. Segundo o autor, a Álgebra Linear trata essencialmente do estudo de vetores, sendo assim o livro se inicia com esse assunto, dando ênfase a uma abordagem mais concreta, em um cenário geométrico, para conceitos essenciais da Álgebra Linear, para nos próximos capítulos revisitar tais conceitos com generalidade.

O capítulo sobre Sistemas de Equações Lineares se inicia com um exemplo de sistema de equações lineares de duas equações e duas incógnitas, ao qual é proposta a abordagem por meio de diferentes problemáticas, desde a representação geométrica das retas que compõe o sistema até a resolução algébrica, mostrando as diferentes formas de se encontrar a solução do sistema, assumindo que o leitor possua alguns conhecimentos prévios sobre funções lineares e álgebra vetorial.

Na sequência, são introduzidas de forma resumida as definições de equação linear, solução de uma equação linear, sistemas de equações lineares e solução de um sistema de equações lineares (Figura 17).

Figura 17 – Definição de sistema de equações lineares e conjunto solução

> Um ***sistema de equações lineares*** é um conjunto finito de equações lineares, cada uma com as mesmas variáveis. Uma ***solução*** de um sistema de equações lineares é um vetor que é *simultaneamente* solução de cada uma das equações do sistema. O ***conjunto solução*** de um sistema de equações lineares é o conjunto de *todas* as soluções do sistema. Vamos nos referir ao processo de encontrar o conjunto solução de um sistema de equações lineares como “resolver o sistema”.

Fonte: Poole (2009, p. 57).

E são apresentadas as classificações de um sistema linear de acordo com o seu número de soluções, juntamente à interpretação geométrica desses tipos de solução para sistemas 2x2.

Em relação aos métodos de resolução de um Sistema de Equações Lineares o livro apresenta o conceito de sistemas de equações lineares equivalentes para introduzir a estratégia de escalonamento, introduzindo informalmente o conceito de Matriz, apenas para o desenvolvimento do escalonamento (Figura 18).

Figura 18 – Definição de forma escalonada

Definição Uma matriz está na *forma escalonada por linhas* quando satisfaz as seguintes propriedades:

1. Todas as linhas que consistem inteiramente em zeros estão na parte inferior da matriz.
2. Em cada linha não nula, o primeiro elemento não nulo (chamado de *elemento líder*) está em uma coluna à esquerda de qualquer outro elemento líder abaixo dele.

Fonte: Poole (2009, p. 65).

Dando prosseguimento, é apresentado o método de eliminação de Gauss por meio de aspectos históricos do método e de exemplos resolvidos. E o método de Gauss-Jordan, uma modificação do primeiro método que reduz ainda mais a matriz do sistema de equações lineares. Por meio de um exemplo resolvido, em que o método é utilizado, é apresentada a solução obtida do sistema por meio da representação geométrica, utilizando planos.

Na sequência, são definidos os sistemas homogêneos, enunciados alguns resultados e teoremas sobre como se caracterizam suas soluções, bem como a noção de corpo e de solução de um sistema de equações lineares sobre outros corpos.

A seção seguinte aborda o estudo dos Sistemas de Equações Lineares voltado para os vetores e combinações lineares, introduzindo conceitos como o de conjuntos geradores, e vetores linearmente independentes e linearmente dependentes. Novamente são evocados conhecimentos prévios, sobre geometria euclidiana e determinantes, supostos disponíveis aos estudantes.

O capítulo mescla seções com aplicações de Sistemas de Equações Lineares na área computacional, em alocação de recursos, balanceamento de equações químicas, entre outros, e traz o significado de algumas palavras-chave que surgem durante o desenvolvimento dos conteúdos, além de vários exemplos resolvidos e exercícios propostos.

Ao final do capítulo são apresentados métodos iterativos para a resolução de Sistemas de Equações Lineares, como o método de Gauss-Seidel e noções sobre a convergência desse método.

As Matrizes, tema do capítulo seguinte, são abordadas pelo autor dando ênfase para a sua potencialidade em transformar vetores, de representar funções e suas propriedades algébricas. Sendo assim, inicialmente são introduzidas noções da aritmética matricial por meio de problemas envolvendo Sistemas de Equações Lineares.

Na sequência, são definidas as operações de adição e multiplicação por escalar com matrizes, suas propriedades e alguns tipos especiais de matrizes. Os conceitos de conjunto gerador e de vetores linearmente independentes e linearmente dependentes são retomados nessa seção em termos das matrizes.

Ainda em relação às operações com matrizes, é definida e explorada a multiplicação de matrizes e as matrizes inversas, bem como alguns resultados pertinentes (Figura 19).

Figura 19 – Teorema inversão de matrizes e sistemas de equações lineares

♦ **TEOREMA 2**

Se A é uma matriz invertível nxn, o sistema de equações lineares dado por $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma única solução $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ para todo $\mathbf{b}$ em $\mathbb{R}^n$.

Fonte: Poole (2009, p. 153).

O determinante de uma matriz é apresentado no contexto da inversão de matrizes (Figura 20). Porém, o método utilizado pelo autor para a inversão de matrizes é o escalonamento de Gauss-Jordan.

Figura 20 – Teorema matriz inversa e sistema de equações lineares

♦ **TEOREMA 3**

Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então A será invertível se $ad - bc \neq 0$, caso em que

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Se $ad - bc = 0$, A não será invertível.

A expressão $ad - bc$, chamada de ***determinante*** de A, é denotada por det A.

Fonte: Poole (2009, p. 153).

A seguir são introduzidos conceitos como subespaços, base, dimensão e transformações lineares, que serão tratados com pormenores nos capítulos seguintes. Ao final do capítulo são apresentadas aplicações de matrizes no cálculo numérico, e na probabilidade.

Este livro parte de um estudo mais intuitivo por meio de exemplos e situações para posteriormente trazer as definições formais dos conteúdos, é enriquecido com exercícios resolvidos, aplicações, aspectos históricos e glossários que facilitam o trabalho do leitor, porém, exige desse conhecimentos prévios sobre determinantes, vetores, funções lineares, retas e planos. Um diferencial desse título está na forma como diversos conceitos da Álgebra Linear são abordados de forma conectada, sendo retomados e aprofundados à medida que novos conceitos são apresentados.

Nathan Moreira dos Santos (2007) – Vetores e matrizes: uma introdução à álgebra linear

Este livro é indicado pelo autor especialmente para disciplinas introdutórias de Geometria Analítica e Álgebra Linear em cursos de graduação diversos. Os temas abordados se dividem em 8 capítulos, sendo: 1. Vetores; 2. Retas e Planos; 3. Cônicas e Quádricas; 4. Espaços Euclidianos; 5. Matrizes e Sistemas de Equações Lineares; 6. Funções Lineares; 7. Noções de Álgebra Linear Computacional e 8. Exercícios Suplementares.

O autor inicia o capítulo sobre Matrizes e Sistemas de Equações Lineares a partir da definição de corpo e do espaço K^n de todas as n-uplas ordenadas de números do corpo K, sobre o qual ele estabelece a soma, o produto escalar e o produto interno.

Introduzidas tais definições, as matrizes são definidas como generalizações das n-uplas de K^n, como pode ser observado na Figura 21.

Figura 21 – Definição de matriz

As matrizes são generalizações naturais das n-uplas. Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e m, n inteiros positivos. Uma matriz $m \times n$, com elementos no corpo $\mathbb{K}$, é um quadro A da forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix},$$

em que os números $A_{ij}\,(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ pertencem ao corpo $\mathbb{K}$. O número A_{ij} chama-se o elemento de ordem ij de A.

Fonte: Santos (2007, p. 112).

A seguir são apresentados e definidos os tipos de matrizes (quadrada, nula, transposta, simétrica...) e as operações entre matrizes com suas propriedades, e finalmente são abordadas as matrizes inversas e suas propriedades.

Na seção seguinte, são definidos os Sistemas de Equações Lineares, os sistemas lineares homogêneos e a solução de um sistema linear (Figura 22) e são apresentados alguns resultados/teoremas sobre esses.

Figura 22 – Definições envolvendo Sistemas de Equações Lineares

Se $\mathbb{K}$ é um corpo, vamos considerar o seguinte problema: determinar o conjunto S das n-uplas $X = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ cujas coordenadas satisfazem às equações:

$$\begin{aligned} &A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n = b_1 \\ &A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n = b_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \dots + A_{mn}x_n = b_m, \end{aligned} \qquad \textbf{(5.2)}$$

onde b_i e A_{ij}, $1 \le i \le m$; $1 \le j \le n$ são escalares em $\mathbb{K}$. O conjunto de equações (5.2) chama-se *sistema de m equações lineares com n incógnitas*. Os vetores de S são as *soluções* do sistema (5.2) e o conjunto S chama-se o *espaço das soluções* desse sistema. O sistema (5.2) é dito *homogêneo* se $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$.

Fonte: Santos (2007, p. 122).

Tais definições são permeadas por conceitos como o de combinação linear, espaços vetoriais, entre outros, tratados nos capítulos anteriores. Na sequência, após introduzir os sistemas equivalentes a próxima seção trata dos métodos de resolução de um sistema de equações lineares.

O primeiro método apresentado é o método da substituição, por meio do qual são introduzidas as operações elementares (Figura 23) e resultados que comprovam que a solução de Sistemas de Equações Lineares obtidos, por meio de um número finito de operações elementares, a partir de um dado sistema de equações lineares possuem a mesma solução.

Figura 23 – Operações elementares sobre as linhas de uma matriz

Nosso objetivo nesta seção é estudar as operações sobre linhas de uma matriz A, que correspondem a formar combinações lineares das equações do sistema $AX = B$. Consideraremos três tipos de operações elementares:

1. multiplicação de uma linha A_r por um escalar não-nulo c do corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ é o menor corpo que contém todos os elementos de A);

2. substituição da linha A_r por $A_r + cA_s$, onde c é um escalar qualquer de $\mathbb{K}$ e $r \neq s$;

3. permutação de duas linhas de A, isto é, substituição da linha A_r pela linha A_s e da linha A_s pela linha A_r.

Mais precisamente, uma operação elementar sobre linhas é uma função (correspondência) e que a cada matriz A faz corresponder uma matriz $e(A)$.

Fonte: Santos (2007, p. 126).

Na seção seguinte são introduzidas as matrizes escalonadas (Figura 24) e o método do escalonamento para a resolução de sistemas de equações lineares homogêneos e não homogêneos.

Figura 24 – Definição de matriz escalonada

Definição 5.4 Uma matriz E, $m \times n$, com elementos em um corpo $\mathbb{K}$, reduzida por linhas, chama-se *escalonada* se:

a) as linhas nulas de E ocorrem abaixo de todas as linhas não-nulas de E;

b) $E_1, \ldots, E_k$ são as linhas não-nulas de E, e se E_{ik_i} é o primeiro elemento não-nulo da linha E_i, $1 \leq i \leq r$, então $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$.

Em outras palavras, a matriz E é escalonada se:

1. $E_i = 0$, para $i > r$; $E_{ij} = 0$ se $j < k_i$.

2. $E_{ik_j} = 0$, se $i \neq j$; $E_{ik_i} = 1$ para $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq r$. $E_{ik_i} = 1$ é o elemento líder da i-ésima linha.

3. $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$.

Fonte: Santos (2007, p. 134).

Na última seção do capítulo, as matrizes inversas são retomadas para que se trate da inversão de matrizes por meio da realização de operações elementares. Durante as seções, são apresentados alguns exemplos, demonstrações de teoremas e corolários relacionados à inversão de matrizes e às matrizes semelhantes e, ao final de cada seção, há uma lista de exercícios propostos.

O autor faz uma abordagem algébrica dos conteúdos com generalidade, não trazendo exemplos ou discussões geométricas sobre os conteúdos abordados no capítulo, o que pode exigir dos estudantes uma grande quantidade de conhecimentos prévios e maior esforço durante a leitura do livro. Não são trazidas aplicações interdisciplinares desses conteúdos no capítulo.

O estudo das Matrizes nos títulos comentados acima difere-se especialmente pela ordem em que são apresentadas em relação aos Sistemas de Equações Lineares, os livros de Boldrini (1980) e Santos (2007) introduzem inicialmente as Matrizes, sendo que no primeiro as definições e operações envolvendo Matrizes são discutidas a partir de exemplos num contexto de *semi-realidade* (PONTE, 2005), enquanto em Santos (2007) o contexto utilizado é o de *matemática pura* (PONTE, 2005). Já os livros de Poole (2009) e Kolman e Hill (2013) abordam inicialmente os Sistemas Lineares, para a partir desses inserir o conceito de Matriz, trazendo também diversas aplicações de Matrizes na Matemática e em outras áreas do conhecimento.

Os conteúdos relacionados às Matrizes (tipos de matrizes, operações e notações) exibidos nos livros são praticamente os mesmos, porém Poole (2009) os desenvolve de forma mais conectada, retomando conceitos já apresentados da Álgebra Linear à medida que novos conceitos são introduzidos, enquanto Kolman e Hill (2013) investem em uma diversidade de aplicações para favorecer a compreensão do conteúdo apresentando, por exemplo, as transformações matriciais, que fornecerão compreensões relacionadas às transformações lineares para os próximos capítulos do livro.

Em relação aos Sistemas de Equações Lineares, podemos observar que nos quatro títulos prevalecem as abordagens algébricas, e as representações geométricas ainda são pouco exploradas. Enquanto o livro de Santos (2007) não discute tais representações e o livro de Boldrini (1980) traz as representações geométricas apenas para as soluções de sistemas 2x2; os livros de Poole (2009) e Kolman e Hill (2013) trazem breves discussões sobre tais representações para sistemas lineares 3x3, porém sem contemplar todos os casos possíveis de interseção entre planos ou explorar a representação algébrica a partir da representação geométrica.

Tal fato foi observado também por Battaglioli (2008) ao analisar três coleções de livros aprovadas pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (BRASIL, 2005) quanto à abordagem dos conteúdos de sistemas de equações lineares no Ensino Médio. A autora afirma que – ainda que em documentos oficiais que norteiam a educação nacional (BRASIL, 2002; 2006) seja recomentado o estudo dos sistemas de equações sob o olhar da geometria – em apenas dois dos três livros analisados estão presentes o registro gráfico para sistemas de equações lineares de três equações e três incógnitas, sendo timidamente explorados em exercícios resolvidos ou propostos.

Quanto aos métodos de resolução apresentados pelos quatro títulos aqui mencionados, o escalonamento (ou método de eliminação de Gauss) e suas variações (eliminação de Gauss-Jordan) são os mais explorados, consoante a uma tendência que pode ser observada no Ensino Médio nacional

> A resolução de sistemas 2 X 3 ou 3 X 3 também deve ser feita via operações elementares (o processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução). Quanto à resolução de sistemas de equação 3 X 3, a regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. Dessa forma, fica também dispensado o estudo de determinantes (BRASIL, 2006, p. 78).

Entendemos que os títulos aqui apresentados se complementam de certa forma, e podem contribuir para o ensino dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, uma vez que trazem diversas aplicações e diferentes modos de definir e trabalhar tais conteúdos. Porém, cabe ao professor selecionar e organizar da melhor maneira as definições, os exemplos e as aplicações presentes nesses livros – e às vezes até preencher lacunas – de forma a torná-los mais acessíveis aos estudantes e proporcionar a superação de suas dificuldades.

Nesse sentido, buscamos considerar particularidades dos livros didáticos – como a carência de explorações a respeito das representações geométricas para a solução de Sistemas Lineares 3x3 – e as dificuldades dos estudantes, que serão discutidas nas próximas seções, para a construção e o desenvolvimento das tarefas da trajetória de aprendizagem dessa pesquisa.

4.1.2 Dificuldades dos Estudantes com os Conteúdos de Matrizes e Sistemas Lineares

Para fundamentar a construção da trajetória de aprendizagem desta pesquisa, quanto ao desenvolvimento dos processos cognitivos envolvidos na aprendizagem da Matemática e às ações do professor e suas relações com os estudantes, foram apresentadas as teorias do PMA (DREYFUS, 2002) e do Ensino-Aprendizagem Exploratório da Matemática (PONTE, 2005), respectivamente.

Nesse contexto, além da compreensão dos aspectos mencionados acima, julgamos fundamental conhecer qual o conhecimento prévio que o estudante traz consigo ao ingressar no Ensino Superior e iniciar seus estudos em Álgebra Linear. Desta forma, olhamos para as dificuldades dos estudantes na aprendizagem dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, identificadas no levantamento bibliográfico do Capítulo 2, como ponto de partida para o ensino de tais conteúdos e também como uma direção na identificação de indícios dos processos de representação e abstração na produção escrita desses estudantes.

O termo “dificuldade” é definido, segundo o dicionário Michaelis[57], como “2. aquilo que é difícil ou torna difícil uma coisa [...]; 3. aquilo que é custoso de compreender, que é obscuro, de difícil intelecção”. Em relação ao ensino e à aprendizagem de Matemática, Cury (2015, p. 359) considera que “são “dificuldades” aqueles conteúdos, procedimentos ou estratégias de resolução que não vêm à mente do aluno quando ele precisa resolver um problema e que, assim, impedem a resolução”.

---

[57] Link da pesquisa do termo “dificuldade” no dicionário on-line Michaelis: http://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/dificuldade/

Trata-se de um conceito subjetivo, visto que o que é tido como difícil para um estudante pode ser fácil para outro (CURY, 2015). Além do mais, a causa de uma dificuldade pode possuir origens distintas, como na natureza dos conceitos matemáticos; na natureza do ensino; ou nos processos cognitivos do estudante (TEIXEIRA, 2004).

Em sua pesquisa, Campos (2009) considera que uma dificuldade pode estar relacionada tanto aos aspectos subjetivos do sujeito quanto a conceitos matemáticos, e pode ser identificada por meio dos raciocínios incompletos ou incorretos e dos erros cometidos por várias pessoas.

Acreditamos que determinar a origem de uma dificuldade não seja uma tarefa trivial e nem pertinente aos objetivos desta investigação, assim, com base nos entendimentos de Cury (2015) e Campos (2009), consideramos como uma dificuldade um conceito, procedimento ou habilidade necessário à realização de uma tarefa matemática que não é compreendido pelo estudante, podendo provocar erros, exigir um esforço cognitivo elevado, ou até mesmo impedir a sua realização.

Dentre as pesquisas apresentadas no levantamento bibliográfico desta tese (Seção 2.1), trazemos para essa discussão as que abordam as dificuldades de aprendizagem apresentadas por estudantes ingressantes no Ensino Superior em disciplinas de Matemática.

A pesquisa de Masola (2014), que destaca as dificuldades na aprendizagem de Matemática abordadas nos trabalhos de um evento nacional de Educação Matemática, traz as dificuldades com o traçado de gráficos e com a compreensão da linguagem matemática como as mais frequentes entre os estudantes.

Em relação aos conteúdos de Matrizes, as pesquisas de Barros, Araújo e Fernandes (2013) e Cardoso, Kato e Oliveira (2013) apontam dificuldades com a multiplicação entre matrizes, envolvendo situações como determinar a condição para a multiplicação, efetuar a potenciação de matrizes e o próprio algoritmo de multiplicação; incompreensão dos conceitos de matriz transposta, matriz quadrada e dimensão de uma matriz. Outro tipo de dificuldade encontrado foi lidar com contradições e com a validação de afirmações envolvendo matrizes, atribuídas pelos autores às dificuldades no âmbito da lógica clássica.

Por fim, as pesquisas de Cury e Bisognin (2009), Gonzáles e Ortiz (2012), Barros, Fernandes e Araújo (2012) e Pantoja (2008) abordam as dificuldades referentes à aprendizagem dos conteúdos de Sistemas de Equações Lineares. Dentre as dificuldades encontradas estão: a dificuldade de interpretar a solução gráfica de um sistema linear de três equações e três incógnitas; a dificuldade na verificação das soluções; a dificuldade no uso da simbologia matemática; a dificuldade nas manipulações algébricas envolvendo as operações elementares; dificuldades na interpretação de problemas matemáticos; e a dificuldade em converter o registro escrito em língua natural para o registro algébrico do Sistema de Equações Lineares.

Para elaboração e planejamento das tarefas e dos episódios da Experiência de Ensino desenvolvida nessa tese, além das dificuldades elencadas nessa seção, identificamos as dificuldades dos estudantes participantes evidenciadas na prova escrita, descrita na próxima seção.

4.1.3 Avaliação Diagnóstica

Iniciamos a realização da Experiência de Ensino com a aplicação de uma prova escrita (Apêndice C), cujo objetivo inicial é possibilitar conhecer o perfil dos vinte e cinco estudantes envolvidos (ingressantes do curso de Licenciatura em Química), promovendo a reflexão desses estudantes a respeito de sua experiência matemática. Tal reflexão, segundo Dreyfus (2002), é um importante aspecto do meta conhecimento e uma característica do PMA. A partir da análise dessa prova, buscaremos flexibilizar as estratégias pedagógicas e adaptar as tarefas de acordo com as dificuldades, necessidades e interesses dos estudantes, e com os objetivos de aprendizagem propostos pela professora-pesquisadora.

A prova escrita foi elaborada com base na Proposta de Avaliação Reflexiva para o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares construída por Bertolazi (2012), na qual a intenção da autora era a de promover “revelações sobre alguns conceitos e situações que envolvem tal conteúdo matemático, e que também suscite reflexões pessoais a respeito de algumas situações inerentes ao processo de ensino e de aprendizagem” (BERTOLAZI, 2012, p. 85). Desse modo, a autora investigou os processos de Pensamento Matemático Avançado evidenciados por estudantes do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática.

O instrumento foi composto por 18 questões divididas em três seções: perfil pessoal do estudante (seis questões); aspectos conceituais e didáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares (quatro questões) e aspectos matemáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares (oito questões). Antes de ser aplicado, esse instrumento foi validado pelo GEPPMat - Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático, do qual a professora-pesquisadora é integrante, para a readequação ou complementação das questões.

Perfil Pessoal do Estudante

As questões numeradas de 1 a 6 no referido instrumento (Figura 25), dizem respeito ao perfil pessoal do estudante. São questões de natureza aberta, proporcionando ao estudante liberdade para expressar o que deseja, refletir e ressaltar aspectos que considere relevante em relação às suas experiências de aprendizagem, motivações, e perspectivas pessoais e profissionais, uma vez que, segundo Bertolazi (2012), “o sujeito precisa tomar consciência de si mesmo, de suas potencialidades e carências, para que se sinta sujeito autônomo perante sua própria aprendizagem”.

Figura 25 – Questões da seção Perfil Pessoal do Estudante – Prova escrita

1. Nome:

   Idade:

   Possui outra graduação? Se sim, qual?

   Tem alguma experiência com o exercício da docência? Se sim, em qual nível de ensino já atuou e por quanto tempo?

2. Por que você escolheu o curso de Licenciatura em Química? Comente.

3. Você acredita que a Matemática será um empecilho em seus estudos durante o curso de Licenciatura em Química? Fale um pouco sobre seus estudos em relação aos conceitos matemáticos.

4. O que você espera de sua formação neste curso?

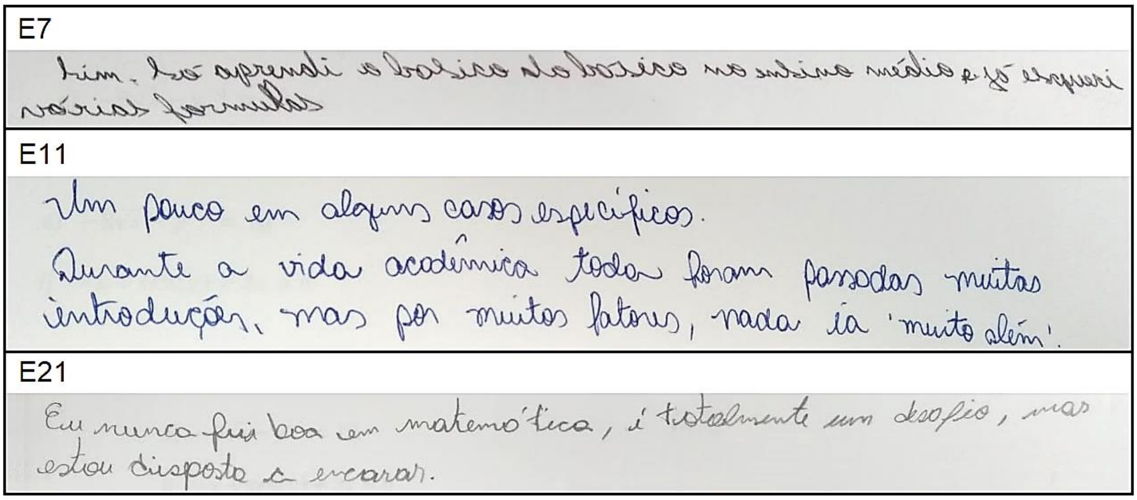
5. Quais os seus hábitos de estudo e como eles interferem em sua aprendizagem da Química e da Matemática?

6. Você já teve alguma dificuldade com alguns conteúdos matemáticos? Quais?

Fonte: autoria própria.

Analisando as respostas dos estudantes, especificamente as duas primeiras questões, traçamos o perfil da turma, apresentado na Seção 3.2.2. Nas demais questões da seção, dentre os aspectos mais relevantes observados, está o sentimento de despreparo, apresentado pela maioria dos estudantes participantes, em relação ao estudo da Matemática. Visto que mais da metade desses, quando questionados sobre suas experiências anteriores no estudo da Matemática, e se essa última poderia ser um empecilho em seus estudos no curso (Questão 3 do instrumento), mencionaram apresentar dificuldades no estudo ou não terem tido uma boa formação durante o Ensino Médio, como pode ser observado na Figura 26, nas respostas dos estudantes E7, E11 e E21.

Figura 26 – Respostas dos Participantes E7, E11 e E21 – Questão 3


E7

Sim. Só aprendi o básico do básico no ensino médio e já esqueci várias formulas

E11

Um pouco em alguns casos específicos.
Durante a vida acadêmica toda foram passadas muitas introduções, mas por muitos fatores, nada ia 'muito além'.

E21

Eu nunca fui boa em matemática, é totalmente um desafio, mas estou disposta a encarar.

Fonte: produção escrita dos estudantes E7, E11 e E21.

E ainda com relação a esse sentimento de despreparo evidenciado, quando os estudantes foram questionados a respeito dos conteúdos matemáticos com os quais tiveram dificuldades em sua vida acadêmica (Questão 6 do instrumento), a minoria mencionou nenhum conteúdo, os demais citaram funções, logaritmos, vetores, geometria, matrizes, probabilidade e estatística, ou ainda, todos os conteúdos matemáticos que já estudaram.

Observamos assim, a relevância de oportunizarmos nas tarefas propostas, assim como nos episódios da Experiência de Ensino, momentos de revisão e retomada de conteúdos já vistos anteriormente por esses estudantes, para que eles possam se sentir mais seguros e aptos no aprofundamento de tais conteúdos e na aprendizagem de novos conteúdos relacionados. Nesse sentido, as demais questões desse instrumento que tratam dos aspectos conceituais, didáticos e matemáticos dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, serão importantes para a elaboração das tarefas dos próximos episódios, pois nos fornecerão mais informações a respeito dos conhecimentos e processos de aprendizagem desses estudantes.

Dentre os demais aspectos relacionados ao perfil pessoal dos participantes, explorados na primeira seção da prova escrita, estão o porquê da escolha pelo curso de Licenciatura em Química (Questão 2); as expectativas quanto à formação nesse curso (Questão 4); e os hábitos de estudo desses estudantes (Questão 5).

Analisando as respostas atribuídas às Questões 2 e 4, identificamos que onze estudantes escolheram o referido curso por gostarem de Química e por terem o desejo de serem professores, os demais, não manifestaram o interesse pela docência, e desses, alguns disseram que pretendiam outro curso. No entanto, todos os participantes afirmaram ter expectativas positivas em relação ao curso de Licenciatura em Química e anseiam uma boa formação para o mercado de trabalho. Esperamos que o trabalho proposto nessa experiência, com tarefas contextualizadas na área de atuação desses futuros profissionais, possa motivá-los de modo a despertar o interesse daqueles que ainda se mostram em dúvida quanto à escolha do curso.

Em relação à Questão 5, a maioria dos estudantes declarou possuir hábitos de estudo, sendo que nove desses afirmaram estudar diariamente, ou com muita frequência, por meio de resumos, revisões, leituras e resoluções de exercícios. Tal hábito é significativo para a aprendizagem na disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, visto que o tempo em sala de aula é escasso para a quantidade de conteúdos que são propostos no plano de ensino, sendo recomendado que os estudantes dediquem algum tempo extraclasse para o estudo e revisão do que foi discutido durante a aula. Assumimos então o desafio de, durante os episódios de ensino, fomentar esse hábito nos estudantes.

Aspectos Conceituais e Didáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

As Questões 7, 9, 10 e 11 da prova escrita, dizem respeito aos aspectos conceituais e didáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares. Por meio dessas, buscaremos compreender os entendimentos dos estudantes a respeito de tais conteúdos, investigar suas construções, noções prévias, dificuldades e limitações na compreensão de conceitos relacionados.

Além disso, tais questões foram elaboradas com a intenção de propiciar, por meio da análise das respostas dos estudantes, reflexões a respeito da forma como este conteúdo foi ensinado e/ou aprendido em experiências escolares anteriores ao Ensino Superior, quais os obstáculos ou dificuldades apresentados por esses estudantes e como tentar superá-los por meio de uma trajetória de aprendizagem voltada à formação de licenciandos em Química.

Na Questão 7 (Figura 27), foi solicitado ao estudante que assinalasse os conteúdos que ele já havia estudado, dentre os conteúdos mais assinalados pelos estudantes estavam: Matrizes, operações com matrizes, Sistemas Lineares, equação linear, retas, planos e balanceamento de equações químicas. Conteúdos como ordem de uma matriz, matriz identidade, sistemas possíveis determinados e indeterminados, sistemas impossíveis, método da substituição, regra de Cramer e combinações lineares foram assinalados por cerca de metade dos estudantes.

Figura 27 – Questão 7 da seção Aspectos Conceituais e Didáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares – Prova escrita

7. Quanto aos conteúdos, assinale aqueles que você estudou:

( ) Soma de vetores
( ) Matrizes
( ) Sistemas possíveis determinados
( ) Ordem de uma matriz
( ) Representação geométrica de vetores
( ) Operações com matrizes
( ) Equação Linear
( ) Balanceamento de equações químicas
( ) Método da Substituição
( ) Matriz identidade
( ) Sistemas lineares
( ) Combinações lineares
( ) Regra de Cramer
( ) Resolução de sistemas lineares
( ) Sistemas possíveis indeterminados
( ) Retas
( ) Sistemas impossíveis
( ) Planos

Fonte: autoria própria.

Podemos observar que, apesar de a maioria se recordar de ter estudado Matrizes e Sistemas Lineares, nem todos os participantes se recordaram de ter estudado conteúdos relacionados, como métodos de resolução de sistemas lineares e tipos de matrizes.

A Questão 9 (Figura 28) indagava se, e como, era possível estabelecer relações entre Matrizes e Sistemas de Equações Lineares. Esta questão foi respondida por menos da metade da turma (9 estudantes).

Figura 28 – Questão 9 da seção Aspectos Conceituais e Didáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares – Prova escrita

9. É possível estabelecer relações entre os conteúdos de Matrizes e os de Sistemas de Equações Lineares? Comente.

Fonte: autoria própria.

Dentre os estudantes que responderam à questão, todos afirmaram que era possível estabelecer tais relações, porém, três mencionaram não se lembrar como tais conteúdos se relacionavam. Dos seis estudantes que justificaram suas respostas, todos disseram que a relação entre os dois conteúdos estava no fato de se poder resolver Sistemas Lineares utilizando Matrizes, e ainda, dois estudantes mencionaram métodos de resolução de Sistemas Lineares que utilizam Matrizes: a regra de Cramer e o escalonamento.

Podemos notar que aproximadamente um sexto da turma soube responder tal questão, o que consideramos uma quantidade muito baixa, visto que metade dos estudantes afirmou ter estudado esses conteúdos. Salientando assim, a importância de abordarmos esse assunto nas tarefas propostas.

A Questão 10 (Figura 29) tratava das formas de se representar a solução de um sistema linear, e solicitava alguns exemplos. Essa foi uma das questões que mais foi deixada em branco pelos estudantes, apenas cinco dos vinte e cinco participantes a responderam, isto é, 20% dos participantes. E dentre as cinco respostas, nenhuma apresentou indícios de alguma forma de representação da solução de um sistema linear, algumas apontavam formas de se obter a solução de um sistema linear, como o escalonamento, e outra dizia não se recordar.

Figura 29 – Questão 10 da seção Aspectos Conceituais e Didáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares – Prova escrita

10. Comente sobre algumas formas de representar a solução de um Sistema de Equações Lineares. Se possível, apresente exemplos.

Fonte: autoria própria.

Tal fato corrobora com o observado na análise dos livros didáticos da disciplina (Seção 4.1.1) e na pesquisa de Battaglioli (2008), ou seja, as abordagens algébricas prevalecem no estudo dos Sistemas de Equações Lineares e as representações geométricas ainda são pouco exploradas.

E por fim, a Questão 11 (Figura 30), última dessa seção, questionava a respeito dos métodos de resolução de um sistema linear e solicitava que se comentasse sobre esses métodos.

Figura 30 – Questão 11 da seção Aspectos Conceituais e Didáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares – Prova escrita

11. No estudo dos Sistemas de Equações Lineares são apresentados alguns métodos de resolução, cite os que você conhece e faça um breve comentário sobre cada um eles.

Fonte: autoria própria.

Essa questão também não foi resolvida pela maioria dos estudantes. As sete respostas obtidas apresentaram alguns métodos de resolução, dentre eles os mais citados são o método de adição, o de substituição, e a regra de Cramer, citados três vezes, sendo que alguns estudantes deram exemplos de resoluções usando esses métodos. O escalonamento foi citado por dois estudantes, mas esses não apresentaram comentários sobre o método.

Concluímos a discussão das respostas dessa seção – sobre os aspectos conceituais e didáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares – com certa preocupação quanto ao número de questões não respondidas pois, por meio das poucas respostas obtidas, não se pode extrair muitas informações a respeito dos erros e dificuldades da turma, a não ser, que se sentem inseguros em relação a esses conteúdos.

Aspectos Matemáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

As questões 8, 12, 13, 14, 15, 16, 17 e 18 do instrumento foram elaboradas com a intenção de conhecer os processos mentais desenvolvidos pelos estudantes durante a construção do conhecimento matemático relacionado aos conceitos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares. Por meio dessas, buscaremos, nas análises, identificar indícios dos processos do pensamento matemático avançado, segundo Dreyfus (2002) e Dreyfus e Eisenberg (1996), mobilizados pelos estudantes.

Na Questão 8 (Figura 31), adaptada de Poole (2004), foram apresentadas equações para que os estudantes analisassem se eram ou não lineares.

Figura 31 – Questão 8 da seção Aspectos Matemáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares – Prova escrita

8. (POOLE, 2004, adaptado) Nos itens de *a* até *f*, considere as equações nas variáveis *x*, *y* e *z*. Assinale se a equação dada é ou não linear, e então justifique o motivo de sua escolha.

a) $5x - y^2 + 2z = 0$

b) $\sqrt{3}x + 7y + z = cos(1)$

c) $\frac{1}{5}x + 9y - 13z = -6$

d) $xy - y + 2z = 5$

e) $-8\sqrt{x} - y^{-1} = 10$

f) $-x + sen(y) + 3z = 0$

Fonte: autoria própria.

Essa questão foi resolvida por apenas sete estudantes, dentre os quais, apenas um analisou corretamente todas as equações, os demais acertaram algumas equações, e na maioria dos casos apresentaram justificativas equivocadas para que uma equação não fosse linear, como por exemplo, o resultado não ser zero. Ou ainda, ignoravam as funções trigonométricas, e as julgaram como lineares.

Salientamos que, como observado na seção anterior (Questão 7), a maioria dos estudantes disse ter estudado as equações lineares, porém, não souberam identificá-las nessa questão.

A Questão 12 (Figura 32), envolvia a interpretação de um problema com Matrizes, no qual era necessário que o estudante identificasse os elementos de uma matriz.

Figura 32 – Questão 12 da seção Aspectos Matemáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares – Prova escrita

12. (FGVRJ-2003, adaptado) A organização econômica Merco é formada pelos países 1, 2 e 3. O volume anual de negócios realizados entre os três parceiros é representado em uma matriz A, com 3 linhas e 3 colunas, na qual o elemento da linha i e coluna j informa quanto o país i exportou para o país j, em bilhões de dólares.

Se $A=\begin{bmatrix} 0 & 1{,}2 & 3{,}1 \\ 2{,}1 & 0 & 2{,}5 \\ 0{,}9 & 3{,}2 & 0 \end{bmatrix}$ então qual foi o país que mais exportou no Merco?

E o que mais importou?

Fonte: autoria própria.

Tal questão não exigia cálculos ou métodos elaborados para a sua resolução, tratava-se de uma questão de interpretação do enunciado e conhecimento da notação matricial, ela foi resolvida por treze estudantes, que não apresentaram maiores dificuldades em encontrar a solução correta.

Na Questão 13 (Figura 33) havia a proposta da construção de um sistema de equações lineares de duas incógnitas expresso na forma matricial.

Figura 33 – Questão 13 da seção Aspectos Matemáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares – Prova escrita

13. Qual o sistema de equações lineares expresso pela equação matricial $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$?

Fonte: autoria própria.

A questão foi resolvida por apenas seis estudantes, desses, quatro chegaram a uma resposta correta. Os demais erraram o algoritmo da multiplicação de matrizes, não conseguindo obter o sistema linear.

Acreditamos que o pequeno número de resoluções obtidos para essa questão seja consequência da dificuldade observada na Questão 9 da seção anterior, na qual os estudantes deveriam estabelecer relações entre as Matrizes e os Sistemas Lineares. De fato, quatro dos seis estudantes que responderam à Questão 13 responderam também a Questão 9.

Na Questão 14 (Figura 34), foi proposta a resolução de um sistema de equações lineares 2x2 por meio de dois métodos distintos.

Figura 34 – Questão 14 da seção Aspectos Matemáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares – Prova escrita

14. Resolva o seguinte sistema de equações lineares utilizando dois métodos distintos:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ -x + 7y = -9 \end{cases}$$

Fonte: autoria própria.

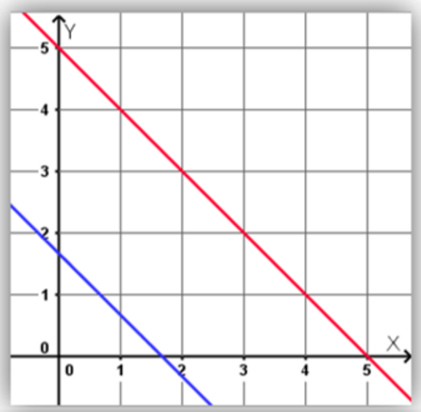
Mais da metade da turma não resolveu essa questão (15 estudantes). Dentre os estudantes que resolveram a questão, dois apresentaram a resolução do sistema linear pelos métodos da substituição e da adição, seis utilizaram apenas um desses dois métodos, e dois estudantes fizeram alguns cálculos e anotações, sem chegar a nenhuma resposta. Cabe salientar que, em duas resoluções pelo método da adição, os estudantes fizeram o uso da notação utilizada no escalonamento, demonstrando reconhecer que os dois métodos coincidem para Sistemas Lineares 2x2.

A Questão 15 (Figura 35) propunha relacionar três Sistemas Lineares 2x2 – um possível determinado (SPD), um possível indeterminado (SPI) e um impossível (SI) – com três soluções representadas graficamente.

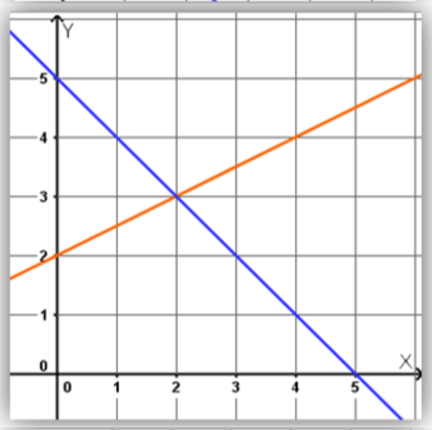
Figura 35 – Questão 15 da seção Aspectos Matemáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares – Prova escrita

15. Quanto à resolução de Sistemas de Equações Lineares, estabeleça uma relação entre os sistemas de equações lineares e as soluções apresentadas abaixo. Justifique suas escolhas.

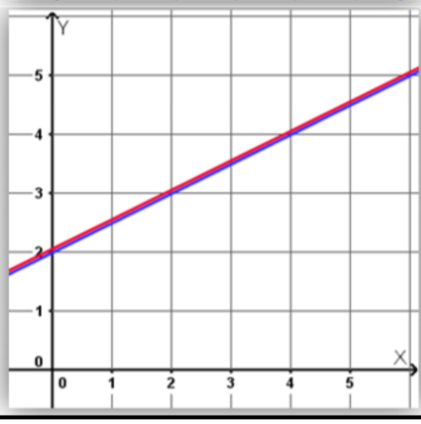
(a) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ x + y = 5 \end{cases}$ ( )



(b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = -2 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$ ( )



(c) $\begin{cases} -2x - 2y = -10 \\ 3x + 3y = 5 \end{cases}$ ( )



Fonte: autoria própria[58].

Essa foi uma das questões menos respondidas na seção, apenas cinco estudantes identificaram os gráficos que representavam os

58 Salientamos que os Sistemas Lineares e os gráficos apresentados foram elaborados no GeoGebra.

Sistemas Lineares, sendo que desses, dois identificaram apenas o sistema possível indeterminado com a solução gráfica correta.

A notável dificuldade dos estudantes em pensar os Sistemas de Equações Lineares por meio de representações geométricas, verificada na resolução dessa questão, também foi observada no estudo de Gonzáles e Ortiz (2012). Tal dificuldade nos direciona a elaborar mais tarefas que explorem as representações gráficas dos Sistemas de Equações Lineares, nesse sentido, as pesquisas de Jordão (2011), Rodrigues (2013) e Silva (2015) apontam que os *softwares* matemáticos podem ser uma ferramenta útil para a visualização e a compreensão do processo de resolução desses sistemas.

A Questão 16 (Figura 36) trazia um problema que envolvia um sistema de equações lineares com duas equações e duas incógnitas, escrito em linguagem natural, o qual deveria ser formulado e resolvido pelos estudantes, pelo método que escolhessem.

Figura 36 – Questão 16 da seção Aspectos Matemáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares – Prova escrita

16. Considere um produto químico produzido a partir de dois ingredientes diferentes A e B, que têm que ser dissolvidos em água separadamente antes que eles interajam para formar o referido produto.
Suponha que a solução contendo A a 2,8 g/cm³ combinada com a solução contendo B a 1,5 g/cm³ produza 23 g do produto químico. Se a proporção de A e B nestas soluções for alterada para 3,2 g/cm³ e 4,5 g/cm³, respectivamente, então são produzidas 43 g do produto químico. Quais serão os volumes (em centímetros cúbicos) das soluções contendo A e B?

Fonte: autoria própria[59].

Nessa questão, que foi respondida por oito estudantes, apenas dois modelaram o problema adequadamente, sendo que desses, apenas um resolveu o sistema e apresentou a solução para o problema. Os outros seis estudantes apresentaram alguns cálculos, ou tentaram utilizar proporção para resolver o problema, sendo que nenhum desses chegou a uma solução.

---

[59] A situação-problema apresentada nessa questão foi elaborada pela autora dessa tese com base em leituras e pesquisas em livros didáticos da área de Química.

A dificuldade com a modelagem, observada nessa questão, é uma das dificuldades elencadas na pesquisa de Cury e Bisognin (2009). Pretendemos trabalhá-la por meio da resolução de problemas contextualizados na Química, já que a utilização de um contexto familiar pode colaborar na compreensão do problema (PONTE, 2005).

A Questão 17 (Figura 37) apresentava quatro resoluções distintas de uma equação matricial, para serem comentadas.

Figura 37 – Questão 17 da seção Aspectos Matemáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares – Prova escrita

17. Comente cada uma das resoluções, apresentadas por quatro alunos distintos, para a questão:

Sejam A, B e X matrizes tais que $A \cdot X = B$. Determine a matriz X.

Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4
$A \cdot X = B$ $X = \frac{B}{A}$	$A \cdot X = B$ $A^{-1} \cdot A \cdot X$ $= A^{-1} \cdot B$ $I \cdot X = A^{-1} \cdot B$ $X = A^{-1} \cdot B$	$A \cdot X = B$ $X = A^{-1} \cdot B$ $X = -A \cdot B$	$A \cdot X = B$ $A \cdot X \cdot A^{-1}$ $= B \cdot A^{-1}$ $X \cdot I = B \cdot A^{-1}$ $X = B \cdot A^{-1}$

Fonte: autoria própria [60].

Apenas quatro estudantes responderam essa questão, dos quais, dois acertaram parcialmente a questão. Dentre as dificuldades apresentadas pelos quatro estudantes observamos a dificuldade em reconhecer a simbologia para a matriz inversa, e a dificuldade com os conceitos de matriz identidade e de multiplicação de matrizes.

Finalmente, a Questão 18 (Figura 38), que é uma adaptação de uma questão[61] do vestibular da PUC-RJ, traz o conceito de balanceamento de equações químicas, uma aplicação para Sistemas Lineares na Química. O item *a* questiona se o estudante poderia resolver o problema por meio de sistemas

---

[60] As resoluções apresentadas nessa questão são hipotéticas, e foram elaboradas pela autora dessa tese com base em sua experiência docente.

[61] A questão original (Anexo A) foi modificada pela autora de forma que fossem introduzidas algumas explicações a respeito do balanceamento de equações químicas.

lineares, e o item *b* questiona os valores dos coeficientes estequiométricos[62] que balanceiam a equação.

Figura 38 – Questão 18 da seção Aspectos Matemáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares – Prova escrita

18. (PUC-RJ modificado) Segundo a Lei de Conservação de Massas de Lavoisier, "na natureza nada se cria e nada se perde, tudo se transforma". Essa lei nos mostra que quando ocorrem reações químicas o número de átomos permanece inalterado, estes átomos apenas se rearranjam originando novos produtos. Portanto, a quantidade de átomos de cada elemento em uma equação química que representa uma reação deve ser a mesma nos reagentes e nos produtos. Garantimos essa igualdade por meio do balanceamento dos coeficientes da equação, os chamados coeficientes estequiométricos.

Um antiácido comumente utilizado é o bicarbonato de cálcio ($NaHCO_3$) que reage no estômago segundo a equação $NaHCO_3 + HCl \rightarrow NaCl + H_2O + CO_2$ liberando cloreto de sódio, água e gás carbônico (por isso a sua efervescência). O óxido de alumínio (Al_2O_3) é também utilizado como antiácido. Ele reage com o ácido clorídrico (HCl) presente no estômago produzindo cloreto de alumínio e água. A equação desta reação é: $x\ Al_2O_3 + y\ HCl \rightarrow z\ AlCl_3 + w\ H_2O$, onde *x*, *y*, *z* e *w* são os coeficientes estequiométricos da reação.

a) Você conseguiria resolver este problema utilizando sistemas de equações lineares?

b) Calcule os valores de *x*, *y*, *z* e *w* para que a reação fique balanceada.

Fonte: autoria própria.

A questão foi resolvida por nove estudantes, dos quais, cinco disseram não lembrar se era possível resolver o problema utilizando Sistemas Lineares, porém, obtiveram os coeficientes estequiométricos corretamente e dentre esses, apenas um resolveu o problema por meio de Sistemas Lineares. Dois estudantes disseram que não é possível resolver o problema utilizando Sistemas Lineares, mas também obtiveram a solução do problema. E dois

[62] Os coeficientes estequiométricos são os menores números inteiros e positivos que aparecem à esquerda da fórmula das substâncias nas equações químicas.

estudantes fizeram apenas algumas anotações, não apresentando nenhuma conclusão.

Notamos que apesar de a maioria dos estudantes mencionar, na seção anterior, que estudou balanceamento de equações químicas, poucos estudantes tentaram resolver o problema. Quanto ao fato de nenhum estudante conseguir vislumbrar a possibilidade de se resolver o problema utilizando Sistemas Lineares, tal fato pode ser justificado pela dificuldade na modelagem de problemas, verificada na Questão 16, na qual apenas dois estudantes obtiveram a formulação algébrica para o problema.

Assim como na seção anterior, concluímos a discussão dessa seção – sobre os aspectos matemáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares – preocupados com o pequeno número de respostas obtidos. Apenas três estudantes resolveram mais da metade das questões que compunham as seções 2 e 3, o restante resolveu, em média, de três a quatro questões, de um total de doze questões.

Tal fato reforça o despreparo dos estudantes, ingressantes do Ensino Superior, para o estudo da Geometria Analítica e da Álgebra Linear, como defendido por López, Mendoza e Silva (2010), Lucas *et al*. (2014), Masola (2014) e Barros, Fernandes e Araújo (2016).

4.1.4 Construção das Tarefas

A apresentação e a promoção de reflexões sobre tarefas, são entendidas por Simon (1995) como um dos principais meios de se desenvolver conceitos matemáticos de forma eficaz.

Nesse sentido, a construção das tarefas não ocorreu anteriormente ao início da Experiência de Ensino, pois, ainda que algumas tarefas tenham sido selecionadas previamente com base nos objetivos de aprendizagem da professora-pesquisadora e no desenvolvimento dos processos do PMA, somente no decorrer dos episódios de ensino, observando a atividade dos estudantes, é que essas puderam ser finalizadas ou readequadas de acordo com as necessidades e dificuldades da turma. Constituindo, ao final dessa investigação, uma trajetória de aprendizagem para os conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares.

Tarefa 1

A Tarefa 1, intitulada “Gerenciando os insumos de uma rede laboratorial” (Apêndice D), foi elaborada com base na atividade investigativa proposta em Appel e Luiz (2009), voltada para estudantes do Ensino Médio.

A tarefa é constituída por dez questões, foi desenvolvida durante o segundo episódio de ensino, com os estudantes dispostos em duplas ou trios, e teve a duração de três horas aula (150 minutos). Os conteúdos previstos para serem abordados com essa tarefa foram: definição, operações e conceitos relacionados às matrizes.

Tais conteúdos estão previstos na ementa da disciplina, visto que servirão de base para o estudo dos conteúdos subsequentes, e são contemplados pelos livros didáticos adotados.

Por se tratarem de conteúdos que provavelmente foram estudados no Ensino Médio – já que estão presentes em documentos como as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2016) –, é comum que esses sejam trabalhados no Ensino Superior como uma breve revisão. Porém, pesquisas como a de Barros, Araújo e Fernandes (2013) e Cardoso, Kato e Oliveira (2013) apontam dificuldades, apresentadas por estudantes ingressantes do Ensino Superior, com conceitos como o de matriz quadrada e o de ordem de uma matriz e com a multiplicação de matrizes, envolvendo situações como determinar a condição para a multiplicação entre duas matrizes ou até mesmo com o uso do algoritmo da multiplicação.

Com a intenção de trabalhar tais dificuldades, que também foram observadas na avaliação diagnóstica, as cinco primeiras questões (Figura 39) do instrumento foram elaboradas com o objetivo de resgatar noções como a representação de tabelas por meio de matrizes, a identificação e nomenclatura de elementos dessas matrizes, tipos de matrizes, e a própria definição de matriz.

Figura 39 – Questões a*, b, c, d* e *e* da Tarefa 1

Uma rede laboratorial possui quatro filiais LA, LB, LC e LD, nas quais a quantidade dos insumos I, II e III é a seguinte:

Filial \ Insumo	I	II	III
LA	12	35	45
LB	10	100	20
LC	36	56	60
LD	20	30	95

a) Escreva a matriz Q que representa a quantidade dos insumos dessa rede laboratorial.

b) O que cada linha da matriz representa? E cada coluna?

c) Qual é o elemento que representa a quantidade de insumos do tipo II que o laboratório LC possui?

d) Qual é o elemento que representa a quantidade que o laboratório LB possui do insumo III?

Considere que o fornecedor desta rede laboratorial fez uma entrega a essas filiais com as seguintes quantidades de cada insumo:

Filial \ Insumo	I	II	III
LA	120	10	65
LB	15	0	70
LC	90	50	10
LD	20	0	35

e) Represente essa entrega na forma matricial pela matriz E.

Fonte: autoria própria.

As últimas cinco questões (Figura 40), apresentam problemáticas nas quais os estudantes precisam realizar operações entre as matrizes, e foram elaboradas com o objetivo de discutir, definir e efetuar tais operações. Essas questões exigem maior nível de envolvimento dos estudantes, dado que são questões abertas, não informam no enunciado o tipo de operação que deve ser realizado, estimulando assim, o raciocínio e a reflexão na busca de um procedimento de resolução.

Figura 40 – Questões *f, g, h, i* e *j* da Tarefa 1

f) Com essa entrega, o que aconteceu com a quantidade de insumos? Construa uma matriz com as quantidades atualizadas e chame essa matriz de N.

Suponha que os valores unitários desses insumos sejam: R$10,00 para o insumo I, R$35,00 para o insumo II e R$20,00 para o insumo III.

g) Represente esses preços por uma matriz P.

h) Qual é o valor total em insumos nessas quatro filiais? Represente sua resposta na forma matricial e chame essa matriz de T.

Após um semestre, a quantidade de insumos dessas filiais pode ser representada pela matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 32 & 10 & 30 \\ 15 & 100 & 35 \\ 36 & 41 & 24 \\ 18 & 12 & 40 \end{pmatrix}$$

i) Calcule e represente pela matriz S a quantidade de insumos consumidos pelas filiais.

j) Se no próximo semestre o consumo de insumos triplicar, quais serão as quantidades de insumos que deverão ser encomendadas com o fornecedor para que não haja falta nas filiais?

Fonte: autoria própria.

Como sugerido por Masola (2014), correlacionar as atividades de sala de aula com o cotidiano profissional do estudante pode ser uma abordagem frutífera para a aprendizagem, nesse sentido, a tarefa compreende uma situação-problema na qual se gerencia insumos de uma rede laboratorial. Trata-se de um contexto de semi-realidade, no qual utilizamos valores exatos e desconsideramos possíveis variáveis da situação real (PONTE, 2005) – visto que tais elementos poderiam desviar o objetivo da questão ou tomar muito tempo durante a resolução da tarefa com operações matemáticas simples, porém trabalhosas – e buscamos referências em situações cotidianas que um licenciado em Química poderia vivenciar.

Quanto à natureza das questões dessa tarefa, essa oscila entre exercícios, explorações e investigações. As questões *a, b, c, d* e *e*, por exemplo, são exercícios, questões de desafio reduzido, pois hipotetizamos – a partir dos resultados obtidos com análises a avaliação diagnóstica e das dificuldades levantadas – que a maioria dos estudantes participantes conhecem quais procedimentos de resolução utilizar para respondê-las. No entanto, tais exercícios se fazem essenciais, pois auxiliam na recordação de conceitos, notações e símbolos, possibilitam o desenvolvimento do raciocínio matemático e a consolidação desses conhecimentos (PONTE; QUARESMA, 2015; BUSSMANN; KLAIBER; SILVA, 2017).

Já as questões *f*, *g*, *h*, *i* e *j*, constituem explorações, visto que essas proporcionam a aplicação de conceitos e estratégias que hipotetizamos que os estudantes participantes conheçam, ou seja, os algoritmos e as operações de adição, subtração, multiplicação e multiplicação de uma matriz por um escalar.

Com base no Quadro 2, no qual Bussmann, Klaiber e Silva (2017) relacionam os processos do PMA propostos por Dreyfus (2002) com os tipos de tarefas matemáticas propostos por Ponte (2005), acreditamos que tais tarefas podem proporcionar o desenvolvimento e/ou a mobilização nos estudantes de processos do PMA, como a representação mental, a representação simbólica, a tradução entre representações, a visualização e a intuição.

Tarefa 2

A Tarefa 2, intitulada “Transformações Geométricas no GeoGebra” (Apêndice E), foi elaborada com base na atividade investigativa proposta em Souza *et al.* (2014), voltada para estudantes do Ensino Médio.

A tarefa, constituída por quatro questões, foi desenvolvida durante o terceiro e o quarto episódios de ensino, no laboratório de informática, e teve a duração total de seis horas-aula (300 minutos). Os conteúdos previstos para serem abordados com essa tarefa foram: tipos de matrizes, operações com matrizes e transformações no plano.

Essa tarefa foi elaborada com o objetivo de relacionar os conceitos de tipos de matrizes e operações com matrizes com transformações geométricas no plano. Nesse sentido, o *software* GeoGebra foi utilizado como um instrumento para a visualização e a investigação de tais transformações. Além disso, acreditamos que essa tarefa pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio geométrico e de habilidades como o reconhecimento de padrões nos estudantes, e no estudo das Transformações Lineares, no decorrer da disciplina.

A Questão 1 (Figura 41) da referida tarefa explora a reflexão de um polígono em relação aos eixos x e y, e em relação à origem.

Figura 41 – Questão 1 da Tarefa 2

1- REFLEXÃO: Utilizando a ferramenta polígono, construa um trapézio escaleno no primeiro quadrante.

- **a)** Construa a matriz R que representa os vértices da figura.
- **b)** Utilizando a ferramenta reflexão em relação a uma reta, faça a reflexão da figura em relação ao eixo x.
- **c)** Construa a matriz X que representa os vértices da figura refletida.
- **d)** Compare as matrizes R e X e comente sobre suas observações. Há algum padrão?
- **e)** Refaça os itens b, c e d agora considerando o eixo y para a reflexão. Chame a matriz obtida de Y.
- **f)** Agora faça a reflexão da figura em relação à origem.
- **g)** Analisando os três casos responda: é possível construir uma operação entre matrizes que faça a reflexão em relação ao eixo x? E em relação ao eixo y? E em relação à origem? Explique direitinho!
- **h)** Desafio: Faça a reflexão em relação às retas y=x e y=-x e comente os resultados.

Fonte: autoria própria.

Trabalhando com a matriz dos vértices do polígono e observando as modificações ocorridas nessa matriz a cada reflexão, a questão propõe ao estudante investigar uma operação entre matrizes que efetue a transformação reflexão (no caso, a multiplicação), e qual a matriz que representa essa transformação. Ainda, como desafio para o final da aula, o item *h* dessa questão propõe que os estudantes realizem e reflitam sobre a reflexão em relação às retas $y = x$ e $y = -x$.

A Questão 2 (Figura 42), aborda a transformação translação. Seguindo uma sequência de passos, o estudante deve construir um polígono e um vetor que forneça a direção da translação desse polígono.

Figura 42 – Questão 2 da Tarefa 2

2- TRANSLAÇÃO: Construa um novo polígono e utilizando a ferramenta vetor construa um vetor fora do polígono.

a) Construa a matriz P que representa os vértices do polígono.

b) Utilize a ferramenta translação por um vetor para transladar a figura e construa a matriz T, chamada matriz de translação, que representa os vértices da figura transladada.

c) Compare as matrizes P e T, você encontrou algum padrão? Qual?

d) Construa uma operação entre matrizes que represente a translação feita.

e) Obtenha a matriz de translação obtida ao transladar a figura na direção do vetor com ponto inicial em (3,1) e final em (5,-3).

Fonte: autoria própria.

Após explorar essa transformação no GeoGebra, é proposto ao estudante que investigue e construa a operação entre matrizes (no caso, adição ou subtração) que realiza a translação do referido polígono na direção de um vetor dado.

A Questão 3 (Figura 43) aborda a transformação homotetia de centro na origem, que é explorada por meio de uma sequência de passos e reflexões sobre os resultados obtidos para que, em seguida, o estudante construa uma operação entre matrizes (como, por exemplo, a multiplicação por um escalar) que represente a transformação geométrica realizada.

Figura 43 – Questão 3 da Tarefa 2

3- HOMOTETIA: Construa um triângulo com um dos vértices na origem do sistema cartesiano.

a) Obtenha a matriz V com seus vértices.

b) Crie um controle deslizante e utilize a ferramenta <u>homotetia</u> usando como centro a origem.

c) Mova o controle deslizante e observe o que acontece. Pare o controle deslizante no número 3 e obtenha a matriz H com os vértices do novo triângulo.

d) Qual a relação entre as matrizes V e H?

e) Construa uma operação entre matrizes que represente a dilatação feita no triângulo.

f) E se o controle deslizante fosse parado no número 1, o que aconteceria com a figura? E como ficaria a operação construída no item anterior?

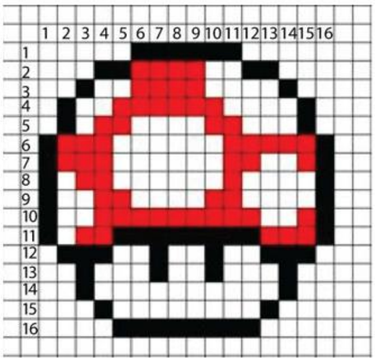
Fonte: autoria própria.

Por fim, a Questão 4 (Figura 44) traz uma aplicação da relação entre as matrizes e as transformações geométricas, na área da computação gráfica.

Figura 44 – Questão 4 da Tarefa 2

4- COMPUTAÇÃO GRÁFICA:

a) Na imagem abaixo, trocando os elementos da posição a_{ij} com os da posição a_{ji} (onde i e j são números que variam de 1 a 16) qual a transformação ocorrida?



b) Se o desenho na imagem fosse de um quadrado ao invés de um cogumelo, qual seria a transformação ocorrida ao aplicarmos a mesma troca do item anterior? A imagem foi modificada?

Fonte: autoria própria.

Por meio de uma imagem dada, na qual os *pixels* poderiam ser identificados e relacionados aos elementos de uma matriz, os estudantes são instruídos a refletir sobre o efeito da matriz transposta na referida imagem e sobre o conceito de simetria, que remete às matrizes simétricas.

Tais questões, além de propiciarem o desenvolvimento de processos do PMA como a representação simbólica e a mudança de representação e tradução, instigam o estudante a realizar processos mais avançados, relacionados à abstração, como a generalização – ao deduzir um método para efetuar a reflexão de um polígono qualquer –, e a síntese – ao reconhecer, a partir de um método algébrico para se obter as matrizes das reflexões, as matrizes de transformação para cada um dos tipos de reflexão estudados. Constituem investigações, ou seja, são questões abertas que possuem um nível elevado de desafio (PONTE, 2005), e como tais,

> estimulam a formulação de questões, [...] exigem um maior esforço cognitivo para que partes do conhecimento sejam combinadas formando o conceito como um todo. Nesse caso, essas tarefas podem contemplar todos os processos do PMA. (BUSSMANN; KLAIBER; SILVA, 2017, p. 12)

Como observado durante a realização da tarefa 1 (ver a narração do Episódio 2), os estudantes não evidenciaram possuir muitas dificuldades com as operações entre matrizes, que são conceitos importantes para a resolução da tarefa 2. Portanto, hipotetizamos que a maioria conseguirá relacionar tais operações com as transformações geométricas no plano, e por meio dessas relações, talvez apresentar indícios de processos avançados do PMA, como a generalização.

Tarefa 3

A Tarefa 3, intitulada “Explorando equações e Sistemas Lineares” (Apêndice F), foi desenvolvida durante o quinto episódio de ensino e teve a duração de três horas-aula (150 minutos). Para resolvê-la, os estudantes foram dispostos em duplas e receberam folhas milimetradas para a construção dos gráficos.

A referida tarefa é constituída por três questões, por meio das quais objetivamos explorar os conceitos de equação linear, Sistemas de

Equações Lineares e de solução e representação geométrica da solução de um sistema de equações lineares de duas equações e duas incógnitas.

A Questão 1 (Figura 45) propõe nos itens *a, b* e *c* a construção de uma tabela com alguns valores de x, e os respectivos valores de y, que satisfaçam a equação dada; a representação gráfica e interpretação dos pontos encontrados no plano cartesiano. O item *d* propõe que o estudante multiplique a equação dada por três e refaça os itens *a, b* e *c*. E o item *e* propõe que o estudante altere o termo independente da equação e refaça os itens *a, b* e *c*.

Figura 45 – Questão 1 da Tarefa 3

1- Dada a equação linear $-2x + y = 3$:

a) Construa uma tabela com ao menos três valores de x e de y que satisfaçam a equação linear.
b) Represente graficamente, num plano cartesiano com eixos x e y os valores encontrados no item a.
c) O que, geometricamente, representa o gráfico desta equação linear?
d) Multiplique a equação dada por 3 e refaça os itens a, b e c. Compare os resultados obtidos.
e) Agora, levando em consideração a equação inicial, altere o número 3 por 5 e refaça os itens a, b e c. Compare os resultados obtidos.

Fonte: autoria própria.

Essa questão foi elaborada com a intenção de resgatar o conceito de equação linear que, como observado nas resoluções da Questão 8 da prova escrita, não é compreendido pela maioria dos estudantes participantes; e também de minimizar a dificuldade dos estudantes, observada no estudo de Masola (2014), com o traçado de gráficos. Além disso, as explorações propostas na questão proporcionam ao estudante o reconhecimento de equações de retas paralelas distintas e paralelas coincidentes, uma habilidade que pode auxiliar na interpretação da representação geométrica da solução de um sistema de equações lineares 2x2.

Ainda trabalhando com equações lineares, a Questão 2 (Figura 46) da tarefa propõe que os estudantes encontrem pares (x,y) que satisfaçam as duas equações dadas e as represente em um mesmo plano coordenado.

Figura 46 – Questão 2 da Tarefa 3

2- Dadas as equações lineares I) $2x + 3y = 5$ e II) $-x + 4y = 14$ faça o que se pede:

a) Construa uma tabela para I e uma tabela para II com ao menos quatro possíveis valores de x e de y que satisfaçam as respectivas equações lineares.

b) Represente graficamente (num mesmo plano cartesiano com eixos x e y) os valores encontrados no item a para as equações I e II.

c) O que representa cada par (x,y) encontrado no item a)?

d) O que, geometricamente, representa o gráfico de cada uma dessas equações lineares?

e) Existe algum valor de x e de y, ou seja, um par (x,y) que satisfaça as duas equações? Caso exista, qual?

f) Represente o ponto (-2, 3) no gráfico construído no item b. O que este ponto significa?

Fonte: autoria própria.

Em seguida, são propostos alguns questionamentos para que os estudantes percebam que cada equação representa uma reta do plano cartesiano, e que essas se interceptam em um determinado ponto.

A Questão 3 (Figura 47), última questão da tarefa, propõe a resolução gráfica de três sistemas lineares distintos, um possível determinado, um possível indeterminado e um impossível e solicita ao estudante que explique cada etapa de sua resolução. Por meio dessa questão, é possível discutir algébrica e graficamente a classificação da solução de um sistema linear.

Figura 47 – Questão 3 da Tarefa 3

3- Agora tente resolver os sistemas lineares abaixo, ou seja, tente encontrar qual(is) valor(es) de x e de y que satisfazem as equações do sistema linear. Explique cada etapa da sua resolução!

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -x + 4y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -4x - 6y = -10 \end{cases}$

Fonte: autoria própria.

As Questões 2 e 3, além das dificuldades mencionadas na Questão 1, também possibilitam abordar as dificuldades dos estudantes, observadas no estudo de Barros, Fernandes e Araújo (2012), em verificar as soluções de um sistema de equações lineares, pois relacionam a solução de um sistema de equações lineares com a(s) interseção(ões) de suas retas, por meio da representação geométrica.

A tarefa 3, explora o registro gráfico de Sistemas de Equações Lineares, bem como a análise das soluções desses sistemas, visando complementar a abordagem, predominantemente algébrica, dos livros didáticos adotados na disciplina e de livros didáticos adotados no Ensino Médio (BATTAGLIOLI, 2008).

As questões da tarefa constituem explorações e investigações, uma vez que são questões abertas, que se distinguem apenas pelo seu grau de desafio (PONTE, 2005), proporcionando aos estudantes o desenvolvimento e/ou a mobilização de processos relacionados à representação, como a visualização e a mudança de representação e tradução, e de processos relacionados à abstração, como a generalização e a síntese, presentes no PMA (DREYFUS, 2002 e BUSSMANN; KLAIBER; SILVA, 2017).

Tarefa 4

A Tarefa 4, intitulada “Representação Geométrica da solução de sistemas lineares” (Apêndice G), foi desenvolvida no laboratório de informática, durante o sexto episódio de ensino, com a duração de três horas-aula (150 minutos). As oito questões que compõem a tarefa abordam os conteúdos: classificação e interpretação geométrica da solução de um sistema linear.

Tais questões foram elaboradas com o objetivo de oportunizar ao estudante o trabalho com diferentes representações para o conceito de Sistemas Lineares, pois a exploração dessas por meio de um ambiente computacional (no caso, o *software* GeoGebra) possibilita ao estudante partir de representações simples e avançar para representações abstratas, promovendo a construção de representações cognitivas ricas e flexíveis (MASON, 1989) e contribuindo para a assimilação do processo de cálculo de Sistemas de Equações Lineares (RODRIGUES, 2013; SIVA, 2015).

Além do mais, buscamos com essa tarefa suprir a escassez de abordagens geométricas, observada na análise dos livros didáticos da disciplina, e trabalhar a dificuldade de pensar Sistemas de Equações Lineares por meio de representações geométricas, verificada na pesquisa de Jordão (2011) e também na avaliação diagnóstica, na qual a Questão 15 da prova escrita – que explorava tais representações – foi a questão menos respondida.

A Questão 1 (Figura 48) traz a indagação sobre o que significa resolver um sistema linear, objetivamos que, por meio dessa questão, que os estudantes reflitam e organizem suas compreensões a respeito do assunto ao redigirem suas respostas.

Figura 48 – Questão 1 da Tarefa 4

1- Responda: O que significa resolver um sistema linear?

Fonte: autoria própria.

As Questões 2 e 3 (Figura 49) propõem a exploração, no GeoGebra, da representação gráfica dos sistemas lineares dados na Questão 3 da tarefa 3, para que em seguida comentem a solução e a classificação desses.

Figura 49 – Questões 2 e 3 da Tarefa 4

2- Construa duas retas no GeoGebra seguindo as instruções:

a) Crie seis controles deslizantes (por exemplo **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**), configure para que eles sejam números “inteiros” e variem de -30 a 30.

b) Digite no campo “entrada” a equação **a**x+**b**y=**c**. Note que **a**, **b** e **c** (chamados coeficientes da equação) são os controles deslizantes criados.

c) Digite no campo “entrada” a equação **e**x+**d**y=**f**. Note que **e**, **d** e **f** (chamados coeficientes da equação) são os controles deslizantes criados.

3- Utilizando as retas construídas acima, verifique e comente a solução e a classificação de cada um dos sistemas lineares trabalhados na aula passada:

a) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ -x+4y=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x+y=3 \\ 6x-3y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ -4x-6y=-10 \end{cases}$

Fonte: autoria própria.

Optamos por utilizar os mesmos sistemas lineares da tarefa anterior, uma vez que muitos estudantes não conseguiram concluir a resolução desses (como narrado no episódio 5).

A Questão 4 (Figura 50) fornece instruções para que os estudantes construam três planos no GeoGebra utilizando a ferramenta “controles deslizantes”, de forma que os coeficientes desses planos possam ser alterados como conveniente, alterando a visualização gerada na *janela de visualização 3D* do *software*. A partir desses planos, são desenvolvidas as questões seguintes, que exploram as representações geométricas de Sistemas de Equações Lineares 2x3 e 3x3.

Figura 50 – Questão 4 da Tarefa 4

4- Abra um novo documento no GeoGebra, vá em “exibir” e selecione “janela de visualização 3D”. Construa três planos seguindo as instruções:

a) Crie doze controles deslizantes com as mesmas configurações usadas no exercício 2.

b) Digite no campo “entrada” a equação **a**x+**b**y+**c**z=**d**. Note que **a**, **b**, **c** e **d** (chamados coeficientes da equação) são os controles deslizantes criados.

c) Repita o procedimento anterior para criar os outros dois planos, lembre-se de mudar os nomes dos controles deslizantes para cada plano.

Fonte: autoria própria.

Na Questão 5 (Figura 51), é solicitado ao estudante que mova os controles deslizantes de modo a obter três planos paralelos distintos e compare as suas equações, espera-se que o estudante perceba que os coeficientes que acompanham as variáveis x, y e z são múltiplos aos respectivos coeficientes dos outros planos, ou seja, que os vetores normais dos planos são paralelos. Na sequência, são questionados o tipo de solução e a classificação desse sistema linear, composto pelas três equações do plano.

Figura 51 – Questão 5 da Tarefa 4

5- Mova os controles deslizantes de forma que os três planos fiquem paralelos distintos.
a) Anote as equações desses três planos e compare-as.
b) Que tipo de solução temos para este sistema de três equações lineares?
c) Como podemos classificar esse sistema?

Fonte: autoria própria.

Na Questão 6 (Figura 52), é solicitado ao estudante que mova os controles deslizantes até que as três equações fiquem múltiplas, obtendo planos coincidentes. Então são feitas as mesmas indagações da questão anterior quanto ao tipo de solução e à classificação do sistema linear obtido.

Figura 52 – Questão 6 da Tarefa 4

6- Mova os controles deslizantes de forma que as três equações fiquem múltiplas.
a) O que aconteceu com os planos, qual a posição deles?
b) Que tipo de solução temos para este sistema de três equações?
c) Como podemos classificar esse sistema?

Fonte: autoria própria.

Na Questão 7 (Figura 53), é solicitado ao estudante que mova os controles deslizantes até obter as equações de um sistema linear de três equações e três incógnitas que seja possível determinado, ou seja, que possua uma única solução.

Figura 53 – Questão 7 da Tarefa 4

7- Mova os controles deslizantes de forma que obtenhamos as equações de um sistema linear com 3 equações e 3 incógnitas com uma única solução, ou seja, um Sistema Possível Determinado. Anote o sistema obtido.

Fonte: autoria própria.

Por meio dessa questão, espera-se que os estudantes visualizem e explorem as possíveis configurações entre três planos, e os diferentes tipos de solução possíveis.

Por fim, a Questão 8 (Figura 54) explora a representação gráfica da solução de um sistema de duas equações e três incógnitas. É solicitado ao estudante que delete um dos três planos, e avalie quais as possíveis soluções para um sistema linear composto por duas equações de um plano.

Figura 54 – Questão 8 da Tarefa 4

8- Delete um dos planos construídos no GeoGebra. Se formássemos um sistema linear com as equações desses dois planos que restaram, quais tipos de solução poderíamos obter para esse sistema?

Fonte: autoria própria.

As questões dessa tarefa constituem explorações e investigações, que estimulam, dentre outros processos do PMA, a mudança e tradução entre representações, pois, uma vez que o estudante compreende e interioriza diferentes representações, é possível que a tarefa estimule a transferência de informações contidas em uma representação para a sua utilização em outra representação (DREYFUS, 2002).

Hipotetizamos que, por meio dessa tarefa, o estudante possa também apresentar indícios dos processos de abstração, como na generalização das possíveis soluções que diferentes Sistemas Lineares podem ter. Por exemplo, um sistema de duas equações e três incógnitas nunca apresentará uma única solução.

Tarefa 5

A Tarefa 5, intitulada "Aplicações e problemas de formulação" (Apêndice H), foi desenvolvida durante o oitavo episódio de ensino e teve a duração de três horas aula (150 minutos). Os conteúdos previstos para serem abordados com essa tarefa foram: modelação e resolução de Sistemas de Equações Lineares.

A tarefa, constituída por cinco questões, foi elaborada com o objetivo de trabalhar a dificuldade dos estudantes em modelar e resolver situações-problema que envolvam Sistemas Lineares. Essa dificuldade foi observada na análise das respostas da Questão 16 da prova escrita, na qual apenas dois estudantes modelaram o problema proposto adequadamente; e na pesquisa de Cury e Bisognin (2009), na qual as autoras identificaram também dificuldades no uso da simbologia necessária para a resolução de problemas.

Todas as questões dessa tarefa apresentam problemas que abordam diferentes contextos, inclusive na área da Química, pois segundo Ponte (2005) contextos familiares podem colaborar na compreensão do problema. Tais problemas, escritos em linguagem natural, devem ser formulados como Sistemas de Equações Lineares e resolvidos pelos estudantes por meio do método que julgarem conveniente.

A Questão 1 (Figura 55) traz como contexto o cálculo do pagamento recebido por um jogador de basquete após uma partida, segundo as quantidades de acertos e erros em seus arremessos, ou seja, um problema que pode ser modelado por meio de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas.

Figura 55 – Questão 1 da Tarefa 5

1. Um jogador de basquete fez o seguinte acordo com o seu clube: cada vez que ele convertesse um arremesso, receberia R$10,00 do clube e, caso errasse, pagaria R$5,00 ao clube. Ao final de uma partida em que arremessou 20 vezes, recebeu a quantia de R$50,00. Quantos arremessos ele acertou?

Fonte: autoria própria.

A Questão 2 (Figura 56) envolve a modelação de um sistema linear com três equações e três incógnitas, adaptado a partir de uma questão[63] proposta por Boldrini (1980), trazendo como contexto o cálculo da quantidade de

[63] A referida questão (Anexo B) que aborda um Sistema Linear com solução possível e indeterminada foi adaptada pela autora para a obtenção de um Sistema linear com solução possível e determinada.

alimentos que devem ser ingeridos diariamente, para que se tenha uma alimentação equilibrada em vitaminas.

Figura 56 – Questão 2 da Tarefa 5

2. Sabe–se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades (u) de vitamina A, 180 u de vitamina B e 140 u de vitamina C. Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados 3 alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) de cada alimento, determinou-se que: (i) o alimento I tem 1 u de vitamina A, 10 u de vitamina B e 1 u de vitamina C. (ii) o alimento II tem 9 u de vitamina A, 1 u de B e 0 u de C. (iii) o alimento III tem 2 u de vitamina A, 2 u de B e 5 u de C. Quantos gramas de cada um dos alimentos I, II e III devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja equilibrada em vitaminas?

Fonte: adaptado de Boldrini (1980, p. 50).

Essas duas primeiras questões abordam Sistemas Lineares quadrados, ou seja, com o mesmo número de equações e incógnitas, com solução possível determinada, podendo ser resolvidos por qualquer um dos métodos discutidos na aula anterior (episódio 7). O contexto utilizado em ambas é o de semi-realidade, pois buscam referências em situações cotidianas (PONTE, 2005).

As Questões 3, 4 e 5 (Figura 57) trazem problemas[64] relacionados ao balanceamento de equações químicas, nos quais os estudantes devem modelar um sistema de equações lineares relacionando os coeficientes estequiométricos da reação química dada, resolver o referido sistema, e encontrar os coeficientes que balanceiam a equação.

[64] Tais problemas foram elaborados pela autora a partir da leitura de livros didáticos.

Figura 57 – Questões 3, 4 e 5 da Tarefa 5

3. A reação $CO_2 + H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$ ocorre quando uma planta verde converte dióxido de carbono e água em glicose e oxigênio durante a fotossíntese. Balanceie esta equação.

4. Encontre uma reação balanceada para a reação química

Amônia (NH_3) + Óxido de Cobre (CuO) $\rightarrow$ Nitrogênio (N_2) + Cobre (Cu) + Água (H_2O)

5. A combustão de amônia (NH_3) em oxigênio produz nitrogênio (N_2) e água. Como encontrar uma equação química balanceada para esta reação?

$$\mathbf{w}NH_3 + \mathbf{x}O_2 \rightarrow \mathbf{y}N_2 + \mathbf{z}H_2O$$

Fonte: autoria própria.

Tal contexto é classificado por Ponte (2005) como um contexto de realidade, por meio do qual se estabelecem conexões dentro e fora da Matemática.

Os Sistemas Lineares estudados nessas questões não são quadrados, e possuem solução possível indeterminada. Sendo assim, para a resolução desses, os estudantes precisarão escolher um método mais conveniente, já que nem todos os métodos estudados permitem a resolução de sistemas desse tipo.

Segundo a definição de Ponte (2005), as questões dessa tarefa constituem problemas, ou seja, são questões fechadas que visam a aplicação de conhecimentos que o estudante já possui. E devido à sua natureza mais desafiante, “são indispensáveis para que os alunos tenham uma efectiva experiência matemática” (p. 17).

Portanto, conjecturamos que as questões dessa tarefa possam desenvolver nos estudantes os processos de representação e generalização – relacionados ao PMA, segundo Dreyfus (2002) – pois possibilitam

> [...] que os alunos estabeleçam relações entre dados e resultados (pois são *fechados*) e iniciem a transição de casos particulares para casos gerais, assim como podem desenvolver subprocessos da Representação como, por exemplo, a tradução de um enunciado em linguagem natural para linguagem matemática. (BUSSMANN; KLAIBER; SILVA, 2017, p. 12)

Outras habilidades que podem ser desenvolvidas por meio dessa tarefa são a verificação e validação dos resultados obtidos, pois os estudantes podem compará-los com os resultados obtidos pelos métodos da “tentativa e erro” e da “oxirredução”[65], aprendidos pela maioria durante o Ensino Médio.

4.2 NARRATIVA DOS EPISÓDIOS

Nesta seção, apresentaremos os episódios que compreendem essa Experiência de Ensino. A narrativa de cada episódio de ensino foi elaborada com a intenção de trazer informações sobre o planejamento e sua execução, bem como ilustrar a dinâmica de sala de aula, baseada no Ensino-Aprendizagem Exploratório (PONTE, 2005).

Diante da inviabilidade de transcrever todas as discussões ocorridas e, de modo a não estender as narrativas tornando-as cansativas, buscamos destacar as discussões mais significativas para a compreensão dos erros e dificuldades dos estudantes, bem como dos processos mentais envolvidos na aprendizagem dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares.

4.2.1 Episódio 1

O primeiro episódio de ensino foi realizado no dia sete de março do ano de 2017, com a duração de 150 minutos (três horas aula) e desenvolveu-se em dois momentos: o primeiro momento consistiu na apresentação dos objetivos da pesquisa e na explicação de como essa se desenvolveria aos estudantes da turma selecionada. Na sequência, a professora-pesquisadora discorreu sobre a necessidade de que os estudantes autorizassem a coleta e reprodução dos dados, garantindo o anonimato dos participantes. Houve, então,

[65] Método para realizar o balanceamento de uma reação química de oxirredução, no qual a determinação dos coeficientes estequiométricos é feita a partir da determinação dos números de oxidação e todos os átomos e íons da reação.

a assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice B) pelos estudantes que desejassem participar da pesquisa.

No segundo momento, ocorreu a aplicação de uma prova escrita com questões que visavam conhecer o perfil pessoal e educacional dos estudantes, bem como suas concepções e conhecimentos prévios a respeito dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares (tal avaliação foi detalhada na Seção 4.1.3).

A professora-pesquisadora, primeiramente, entregou as questões a todos os estudantes, explicando que se tratava de um instrumento por meio do qual ela poderia conhecê-los melhor, saber a respeito dos conhecimentos trazidos do Ensino Fundamental e Médio e, assim, planejar melhor as aulas. Desta forma, era necessário que as resoluções fossem feitas individualmente, sem nenhuma espécie de consulta. Logo de imediato surgiram perguntas do tipo “vai valer nota?”, então a professora-pesquisadora disse que não valeria nota, mas que mesmo assim era de suma importância que todos os estudantes respondessem a maior quantidade de questões possíveis, pois isso contribuiria para sua própria aprendizagem.

Os estudantes tiveram aproximadamente 120 minutos para a resolução da prova, mas a maioria entregou o instrumento antecipadamente, deixando muitas questões em branco, sem nenhuma anotação. Durante a aplicação, ao caminhar pela sala, a professora-pesquisadora percebeu que muitos estudantes comentaram não se lembrar de nada, estavam receosos de escrever coisas sem sentido, havia comentários do tipo: “professora, não tenho certeza se está certo” e, em seguida, o estudante apagava toda a resolução. Ou também, comentários do tipo: “não vou conseguir resolver a questão, melhor não escrever besteira”. Nesse momento, a professora-pesquisadora pediu para que eles ficassem à vontade, que escrevessem tudo o que viesse à cabeça, sem se preocuparem se estava certo ou não, pois seriam essas anotações que dariam a ela informações sobre as dificuldades e entendimentos da turma.

Durante a resolução, uma questão do instrumento chamou a atenção dos estudantes, a Questão 8, na qual era solicitado que se avaliasse se as equações listadas eram lineares ou não. Tal questão os deixou curiosos, diziam que não faziam ideia de como se resolvia, alguns estudantes queriam encontrar a solução das equações e questionavam a professora-pesquisadora se era isso mesmo o que deveria ser feito. A professora-pesquisadora respondia a tal tipo de pergunta sempre de forma evasiva, dizendo para que resolvessem da forma de julgassem pertinente, para assim não influenciar nos resultados.

Ao final da aplicação, um estudante solicitou à professora-pesquisadora para levar uma cópia do instrumento para casa, para que pudesse tentar resolver as questões que não conseguiu resolver em sala. Nesse caso, como a professora-pesquisadora pretendia reutilizar o instrumento ao final da Experiência de Ensino, ela disse a ele que nesse momento não seria possível, mas que ao final do semestre poderia fornecer as cópias e resoluções se ele assim desejasse.

4.2.2 Episódio 2

O segundo episódio de ensino ocorreu no dia 10 de março de 2017, com a duração de 150 minutos (três horas aula), no qual foi realizada a Tarefa 1 sobre Matrizes.

Inicialmente, a professora-pesquisadora dividiu a turma em grupos de dois ou três estudantes, a composição dos grupos foi escolhida de acordo com algumas observações feitas pela professora-pesquisadora, a partir da avaliação diagnóstica ocorrida no episódio anterior. Dessa forma, tentou-se colocar em um mesmo grupo estudantes que resolveram poucas questões da segunda e terceira seção do instrumento, com estudantes que tivessem resolvido mais questões dessas seções. O intuito dessa seleção, foi o de tornar as discussões nos grupos mais frutíferas, para que os estudantes com menos dificuldades pudessem compartilhar conhecimentos com os demais estudantes.

Após os grupos se organizarem, a professora-pesquisadora entregou para cada estudante uma cópia da tarefa e explicou como seria a dinâmica da aula.

A saber, os grupos teriam disponíveis 70 minutos, nos quais iriam discutir e tentar resolver as questões da tarefa, anotando as resoluções individualmente – pois as resoluções dos membros dos grupos não precisariam ser iguais – enquanto isso, a professora-pesquisadora passaria pelos grupos verificando o andamento das atividades, porém, sem fazer correções, fornecer respostas, ou contribuições que diminuíssem o desafio cognitivo da tarefa, e selecionando algumas resoluções para serem apresentadas e discutidas com a turma toda. Finalizado esse momento, os grupos apresentariam as resoluções selecionadas pela professora-pesquisadora, seriam realizadas algumas discussões e sistematizações, e os estudantes entregariam suas anotações.

Logo de início, muitos estudantes fizeram perguntas do tipo: “Está certo?”, “É dessa forma que é para resolver?”. Nesses casos a professora-pesquisadora respondeu que, como explicado no início da aula, essas discussões seriam feitas em um segundo momento da aula. Alguns estudantes se sentiram incomodados com essa conduta da professora-pesquisadora, demonstravam certa insegurança, então ela pediu para que eles tivessem calma e seguissem com as resoluções, pois esse tempo trabalhando entre eles seria importante para que pudesses relembrar conceitos, discutir métodos e ideias.

Alguns estudantes acharam as primeiras questões muito fáceis, o que não surpreendeu a professora-pesquisadora, pois tais questões eram exercícios que visavam a retomada de alguns conceitos básicos, como nomenclaturas, notações entre outros, já que nem todos recordavam esses conceitos sobre matrizes.

Um dos grupos, após construir a matriz solicitada na primeira questão, estava discutindo se deveriam somar todos os elementos dessa matriz. Nesse momento a professora-pesquisadora lançou uma pergunta ao grupo: “o que significaria essa soma no contexto do exercício?”, e saiu de perto do grupo para que eles pudessem refletir e discutir sobre a resposta. A intenção com essa pergunta, era de que os estudantes percebessem que tal soma não fazia sentido, já que cada elemento na matriz significava a quantidade de um tipo de insumo do laboratório, e não era questionada a quantidade total de insumos nesse laboratório.

Outro grupo apresentou dúvidas quanto à Questão F da tarefa 1: “é preciso calcular a média?”. Tal questão envolvia a soma de duas matrizes de mesma ordem, que representavam quantidades dos mesmos insumos, para a obtenção de uma nova matriz. Durante as discussões do grupo, um dos estudantes argumentou com os demais que o cálculo da média não seria necessário, pois, segundo o enunciado da tarefa, os insumos não seriam divididos, só acrescentados, o que convenceu os demais.

Na Questão H, a maioria dos grupos conseguiu efetuar a multiplicação entre as matrizes, um grupo apresentou dificuldade na utilização do algoritmo da multiplicação, mesmo com o contexto da questão eles não conseguiram relacionar os elementos das matrizes e realizar a multiplicação adequadamente.

No decorrer da atividade, a professora-pesquisadora percebeu que alguns grupos de estudantes esperavam que os outros membros do grupo resolvessem as questões, não participando das discussões. Nesses casos, a professora-pesquisadora se direcionava a esses grupos e conversava com esses estudantes, encorajando-os a exporem suas ideias, a tentarem resolver a tarefa proposta.

Ao término do tempo destinado para essa etapa, a professora-pesquisadora notou que nem todos haviam conseguido terminar suas resoluções, então algumas resoluções foram selecionadas para serem apresentadas e discutidas no quadro com o restante da turma. A seleção de tais resoluções foi realizada priorizando resoluções com erros, métodos diferentes dos usados pela maioria da turma ou resoluções incompletas, em alguns casos foram selecionadas mais de uma resolução para a mesma questão.

Após a resolução de todas as questões serem colocadas no quadro, houve uma discussão coletiva sobre cada uma.

As Questões A, B e E foram resolvidas adequadamente pela maioria dos estudantes, houve algumas divergências quanto à notação para representar a matriz (usar parênteses, colchetes ou chaves?). Na Questão B, houve estudantes que confundiram linha com coluna. Essas pequenas “confusões” foram discutidas e os estudantes chegaram em um consenso sobre as resoluções corretas. Em alguns momentos, quando pertinente à discussão, a professora-pesquisadora intervinha apresentando definições ou inserindo alguns conceitos e notações sobre matrizes.

As Questões C e D foram resolvidas sem maiores dificuldades, a maioria dos grupos não utilizou nenhuma notação para indicar os elementos das matrizes, então a professora-pesquisadora solicitou que fosse apresentada a resolução de um grupo que utilizou a notação se referindo à linha e à coluna do elemento da matriz, para poder discutir com a sala toda.

Alguns estudantes perguntaram se as resoluções apresentadas no quadro estavam corretas, a professora-pesquisadora respondeu que nem todas elas, por isso, solicitou que aguardassem as discussões coletivas para depois fazerem as anotações no caderno.

As Questões F, H e I envolviam a adição, a multiplicação e a subtração de matrizes, respectivamente, a maioria da turma resolveu tais questões adequadamente, pois o contexto da tarefa contribuiu na realização de tais operações. Então, a professora-pesquisadora selecionou para apresentação uma resolução em que estivesse evidenciado os algoritmos da adição e da multiplicação, para que esses fossem relembrados e discutidos por todos.

Nesse momento, a professora-pesquisadora aproveitou para trazer à discussão as condições para que tais operações pudessem ser realizadas, em relação à ordem das matrizes, então um estudante comentou: “construí a matriz da Questão G invertida”. O estudante referia-se a ordem da matriz para que essa pudesse ser multiplicada pela matriz da questão anterior, mas para que isso ficasse mais claro para os demais, a professora-pesquisadora solicitou que ele explicasse melhor, então ele disse: “a matriz dos valores deve ter três linhas e uma coluna, e não o contrário”. A partir daí, a professora-pesquisadora apresentou a condição para a multiplicação entre duas matrizes quaisquer e aproveitou para discutir a resolução da Questão G.

A Questão J foi a que gerou mais discussões, pois muitos estudantes apresentaram dificuldades na interpretação de seu enunciado, mas no geral, não houve dificuldades na realização das operações necessárias, no caso, a multiplicação por um escalar e a subtração.

Após essa etapa, que durou aproximadamente 40 minutos, a professora-pesquisadora iniciou a síntese das aprendizagens, ou seja, a formalização de todos os conceitos discutidos na tarefa. E ao final da aula, recolheu as resoluções dos estudantes e informou a eles que seriam disponibilizados, no ambiente virtual de aprendizagem da disciplina, uma apostila elaborada pela professora-pesquisadora com os conceitos e definições abordados na aula e com tarefas extras para serem realizadas em casa.

Durante a sistematização do conteúdo, muitos estudantes começaram a se retirar da aula, que terminava às 23 horas, ao serem questionados pela professora-pesquisadora, eles disseram que devido ao horário do ônibus precisariam sair por volta das 22h30min.

Diante dessa situação, julgamos necessário adiantar a sistematização das aprendizagens nos próximos episódios. Assim, no próximo episódio anteciparemos a sistematização e, para os estudantes que permanecerem até o final da aula, proporemos alguma tarefa complementar, uma espécie de desafio, sobre o conteúdo da aula.

4.2.3 Episódio 3

O terceiro episódio de ensino ocorreu no dia 14 de março de 2017, com a duração de 150 minutos (três horas aula), no qual foram estudados conceitos de transformações geométricas e matrizes, por meio de explorações realizadas no *software* GeoGebra, propostas na Tarefa 2.

Nesse episódio, realizado no laboratório de informática, os estudantes se sentaram individualmente, um por computador porém, podiam conversar e discutir ideias com os colegas, alguns até se levantavam para isso.

Inicialmente, a professora-pesquisadora explicou aos estudantes algumas noções sobre o *software* GeoGebra, já que a maioria deles não o conhecia, e se disponibilizou a tirar dúvidas sobre como utilizá-lo durante a resolução das tarefas. A seguir, foram entregues as questões impressas, e os estudantes foram instruídos a anotar todos os passos e estratégias utilizados na resolução. O tempo disponibilizado para as resoluções foi de 80 minutos.

A primeira questão da tarefa abordou a transformação reflexão, no item *a*, o estudante deveria construir um trapézio escaleno no primeiro quadrante do plano cartesiano e anotar a matriz que representava os vértices desse polígono. Logo de início, alguns estudantes questionaram a professora-pesquisadora sobre qual seria a forma de um trapézio escaleno, então a professora-pesquisadora fez a pergunta para turma, buscando alguém que soubesse a resposta. Alguns estudantes responderam desenhando no ar um trapézio qualquer, mas não sabiam dizer se era escaleno ou não, a professora-pesquisadora interveio e explicou que um trapézio escaleno era aquele em que os lados não paralelos apresentavam medidas diferentes e, na sequência, perguntou se ainda havia dúvidas sobre o polígono. Diante da negativa dos estudantes, prosseguiram as resoluções.

Já no item *b*, alguns estudantes apresentaram dificuldade na utilização, no *software,* da ferramenta “reflexão em relação a uma reta”, então a professora-pesquisadora foi caminhando pelo laboratório e auxiliando-os individualmente, conforme a necessidade.

A resolução dos demais itens da tarefa seguiu sem muitos questionamentos, com a professora-pesquisadora auxiliando no uso do GeoGebra, até chegarem ao item *g*, no qual foi preciso descobrir as matrizes de reflexão e multiplicar pela matriz dos vértices do polígono. Nesse momento, a maioria dos estudantes apresentou dificuldades, alguns estudantes tentavam encontrar uma matriz que somada a matriz dos vértices resultasse na matriz dos vértices da reflexão, então a professora-pesquisadora fez perguntas do tipo: “essa matriz vai servir para a reflexão de qualquer outro trapézio como, por exemplo, o do seu colega?”. A intenção da professora-pesquisadora nesse momento era fazer com que os estudantes refletissem sobre a possibilidade de generalização do método utilizado, para que então tentassem um método diferente. Outros estudantes confundiram a ordem das matrizes para que o produto pudesse ser realizado ou não se recordavam do algoritmo de multiplicação de matrizes, então utilizaram procedimentos e estratégias incorretos para chegar ao resultado que queriam.

Quanto aos estudantes que se lembraram do algoritmo da multiplicação de matrizes, foram observadas algumas estratégias, como a utilização de matrizes diagonais para serem multiplicadas pelas matrizes dos vértices. Outra estratégia incomum foi a de um estudante que tentou multiplicar a matriz dos vértices, que era de ordem 2x4 por uma matriz 4x4 para realizar a reflexão, nesse caso, ele avaliou a dimensão das matrizes, mas estranhou a quantidade de cálculos necessários para verificar se a matriz escolhida estava correta. Após algumas tentativas, percebeu que poderia realizar a multiplicação de uma matriz 2x2, facilitando os cálculos. Houve ainda, um estudante que encontrou uma matriz específica que forneceu o resultado desejado da multiplicação, mas que não serviria para realizar a reflexão em uma matriz que representasse um polígono qualquer.

Observamos que, apesar de no episódio anterior a maioria dos estudantes ter realizado a multiplicação entre matrizes corretamente, muitos não dominavam e não compreendiam o algoritmo da multiplicação. A falsa ideia de compreensão do método pode ter ocorrido devido à questão do episódio anterior (Tarefa 1) apresentar um contexto no qual os estudantes se orientaram para realizar as multiplicações.

A Questão 2 da tarefa abordou a transformação translação, essa questão foi resolvida pelos estudantes sem maiores dificuldades com relação ao cálculo matricial, já que envolvia a adição ou subtração de matrizes e os estudantes compreendiam essas operações. Com relação ao GeoGebra, a professora-pesquisadora precisou auxiliar os estudantes no uso da ferramenta “vetor”.

Apesar de o tempo estipulado para a resolução da tarefa ter sido de 80 minutos, devido às dificuldades apresentadas na resolução da Questão 1 e na utilização do *software* GeoGebra, esse tempo precisou ser estendido, pois havia se passado 100 minutos e os estudantes ainda estavam finalizando a Questão 2.

Diante da preocupação dos estudantes com o término da aula, por terem resolvido apenas metade das questões propostas, a professora-pesquisadora comunicou à turma que eles poderiam continuar com as resoluções e que, ao término da aula, deveriam entregar suas anotações pois, na aula seguinte, eles retornariam ao laboratório de informática e teriam suas anotações devolvidas para a conclusão das resoluções.

Sendo assim, a continuação da resolução da tarefa 2, bem como as discussões a respeito da mesma e a sistematização das aprendizagens ficaram para o próximo episódio de ensino.

4.2.4 Episódio 4

O quarto episódio[66] de ensino ocorreu no dia 17 de março de 2017, com a duração de 150 minutos (três horas aula), no qual foi continuada a Tarefa 2 sobre matrizes.

Como mencionado no episódio anterior, essa tarefa foi elaborada para ser desenvolvida em um único episódio de ensino, porém, devido ao andamento das atividades, o episódio foi replanejado e a tarefa foi realizada parcialmente até a Questão 2.

No início da aula a professora-pesquisadora devolveu as anotações dos estudantes, recolhidas no episódio anterior, para que esses pudessem anotar as demais resoluções. E informou que, para a finalização da tarefa, seria disponibilizado 60 minutos, para que, em seguida, iniciassem as discussões com a sala toda.

A Questão 3 da tarefa abordou a transformação homotetia, o item *a* da questão instruía o estudante a construir um triângulo com um dos vértices na origem do plano cartesiano e obter a matriz com os vértices desse triângulo. Após os estudantes lerem o enunciado da questão, a professora-pesquisadora foi ao quadro explicar o uso das ferramentas “controle deslizante” e “homotetia” para que os estudantes dessem continuidade às explorações.

Nos itens seguintes da questão, os estudantes não apresentaram dúvidas quanto à operação utilizada para se obter a referida transformação, que poderia ser a multiplicação por um escalar, por exemplo, e relacionar essa operação com a transformação homotetia de centro na origem.

A Questão 4 abordou uma aplicação de matrizes na computação gráfica. Para essa questão, os estudantes não precisaram utilizar o GeoGebra, apenas elaboraram conjecturas e esboços sobre a imagem dada (como pintar outros quadrados da figura) para responder ao item *a* da questão. Enquanto a professora-pesquisadora caminhava pela sala, notou que alguns estudantes identificaram a matriz transposta, utilizada no item *a*, porém, não relacionaram a ação dessa sobre a imagem com a transformação reflexão.

---

[66] Neste episódio compareceram à aula dezoito novos estudantes que ingressaram por meio da chamada nominal. A professora-pesquisadora instruiu para que esses se sentassem e dividissem o computador com os demais estudantes, para que pudessem acompanhar melhor o andamento da aula. Como mencionado anteriormente, tais estudantes serão desconsiderados nas narrativas e análises.

No item *b* da Questão 4 a maioria dos estudantes não recordou o conceito de matriz simétrica, envolvido na modificação da imagem, apenas notou que essa não sofreria alterações devido à sua simetria. A professora-pesquisadora, então, anotou essas observações e selecionou algumas resoluções para serem discutidas, com o restante da turma.

Para a discussão coletiva e para a sistematização das aprendizagens foram reservados 60 minutos, 30 minutos para cada etapa.

Durante as discussões foram apresentadas as resoluções selecionadas pela professora-pesquisadora. Para a primeira questão, havia duas resoluções diferentes para o item *g*. Na primeira, o estudante multiplicou pela matriz dos vértices uma matriz específica, diferente da matriz da transformação reflexão para o eixo x, obtendo o resultado desejado. Nesse caso, um estudante interveio ao ver a resolução: “mas essa matriz ficou diferente da minha, pode acontecer isso?”, no que a professora-pesquisadora respondeu com outra pergunta: “é possível que uma única matriz resulte na reflexão, em relação ao eixo x, de um polígono qualquer?”. Nesse instante, outro estudante apontou para a segunda resolução apresentada, na qual foi utilizada a matriz da reflexão para o eixo x, e disse: “minha matriz ficou igual à da segunda resolução, e deu certo também, mesmo com a minha matriz dos vértices sendo diferente”. E a professora-pesquisadora concluiu: “então, se fôssemos utilizar uma matriz para representar a reflexão em relação ao eixo x, para um polígono qualquer, essa matriz seria $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Está correto?” E os estudantes concordaram com a afirmação. Na sequência, a professora-pesquisadora pediu para a turma que concluísse quais seriam as matrizes para as demais reflexões da questão (em relação ao eixo y, e à origem).

Durante a sistematização das aprendizagens, a professora-pesquisadora retomou as operações entre matrizes, relacionando-as com cada uma das transformações geométricas estudadas e com as respectivas matrizes de cada transformação. Nesse momento, a professora-pesquisadora apresentou novamente o algoritmo da multiplicação de matrizes, chamando a atenção para o fato da propriedade comutativa não ser satisfeita e para a condição de multiplicação entre duas matrizes. E perguntou: “se utilizássemos a matriz identidade na multiplicação, o que aconteceria com os vértices da figura?”.

Alguns estudantes responderam: “não mudariam”, “ficariam iguais”, e a professora-pesquisadora complementou: “vocês percebem que a matriz identidade é o elemento neutro na multiplicação de matrizes? Ou seja, qualquer matriz multiplicada por ela permanece igual.”

Em seguida, a professora-pesquisadora apresentou alguns *slides* com as definições e exemplos dos tipos de matrizes, e informou a todos que esse material, assim como os enunciados da tarefa e alguns exercícios, estaria disponível no ambiente virtual de aprendizagem para que, após a aula, os estudantes pudessem rever e repensar a relação de tais conteúdos com as explorações realizadas no GeoGebra.

Nesse episódio, foi possível realizar a sistematização com todos os estudantes na sala, antes que começassem a ir embora devido ao horário do transporte. Então, como planejado anteriormente, nos minutos restantes de aula a professora-pesquisadora solicitou aos estudantes que resolvessem o desafio proposto no item *h* da Questão 1, e sanou algumas dúvidas, individualmente.

Observamos que os estudantes, nesse episódio, mostraram-se mais familiarizados com a dinâmica de sala de aula, na qual a professora-pesquisadora orientou as aprendizagens, sem fornecer respostas ou diminuir o desafio da tarefa, e os estudantes configuram-se protagonistas na construção do conhecimento, explorando, refletindo e conjecturando.

4.2.5 Episódio 5

O quinto episódio de ensino ocorreu no dia 21 de março de 2017, com a duração de 150 minutos (três horas aula), no qual foi realizada a Tarefa 3 sobre Sistemas de Equações Lineares.

Inicialmente, a professora-pesquisadora solicitou aos estudantes que se organizassem em duplas e entregou a cada um uma cópia da tarefa e uma folha milimetrada para a construção dos gráficos. Apesar de os estudantes se mostrarem familiarizados com a dinâmica da aula, a professora-pesquisadora reforçou que a aula iniciaria com as duplas resolvendo as questões da tarefa, e que nesse momento ela acompanharia a atividade das duplas sem corrigir resoluções ou fornecer informações que diminuíssem o desafio da questão, para essa etapa foram disponibilizados 80 minutos. Na sequência, explicou que seriam apresentadas e discutidas algumas resoluções para que ao final da aula fossem formalizados os conteúdos explorados na tarefa.

Observando as resoluções das duplas para a primeira questão, a professora-pesquisadora percebeu que alguns estudantes acreditavam que a reta precisaria passar pela origem, ou seja, eles entendiam que o gráfico seria de uma reta, mas unindo os pontos encontrados com a origem do plano cartesiano não obtinham uma reta. Nesse momento, a professora-pesquisadora instruiu que esses estudantes verificassem se os valores de x e y para a origem eram válidos na equação, e se afastou das duplas para que eles refletissem sobre os resultados.

A professora-pesquisadora observou, também, que uma dupla não conseguia encontrar valores de x e y que satisfizessem a equação, e quando o fizeram se confundiram com a multiplicação de números reais negativos, obtendo pontos incorretos e não conseguindo construir o gráfico da reta. Essa dupla apresentou muita dificuldade em algumas operações e conceitos mais básicos da matemática, como as operações entre frações. Então, a professora-pesquisadora deu uma orientação adicional a essa dupla, explicando tais conceitos.

Ainda com relação à primeira questão, no item *d* os estudantes eram instruídos a multiplicar a equação por três, alguns se mostraram em dúvida, sem saber se a multiplicação deveria ocorrer apenas em parte da equação (lado esquerdo ou direito) ou nela inteira. Nesse momento, a professora-pesquisadora observou em uma das duplas uma discussão na qual um dos estudantes argumentava que se a equação era uma igualdade, então tinha que multiplicar ambos os membros da igualdade pelo mesmo termo. Em outras duplas a dúvida permaneceu, e em alguns casos a questão foi resolvida inadequadamente. Esse tipo de resolução foi selecionado pela professora-pesquisadora para a discussão coletiva, por permitir que os estudantes argumentem sobre o que é uma equação linear.

O segundo exercício explorava duas equações lineares ao mesmo tempo, levando-os a comparar os gráficos e buscar pontos comuns entre as retas (conceitos prévios para Sistemas Lineares), alguns estudantes apresentaram dúvidas devido ao aparecimento de frações nos cálculos, então a professora-pesquisadora precisou interferir, explicando a eles como operar com frações. Outros estudantes não conseguiram obter algebricamente a interseção das duas retas, apenas estimaram pelo gráfico. No geral não houve maiores dificuldades, com exceção da dupla mencionada na questão anterior, que apresentou dificuldades com conceitos mais básicos de Matemática.

O terceiro exercício explorava a resolução de Sistemas Lineares 2x2. Haviam três sistemas lineares, um SPD, um SPI e um SI. Esse exercício foi resolvido por cerca de metade da turma, pois como demoraram muito na construção dos gráficos das primeiras questões, o tempo estimado para as resoluções acabou. Então, a professora-pesquisadora pediu que os estudantes finalizassem suas resoluções para poderem fazer a discussão e a formalização do conteúdo.

Para a discussão, foram apresentados os casos problemáticos (dificuldades), selecionados pela professora-pesquisadora enquanto os estudantes resolviam a tarefa. Na resolução da Questão 1, o estudante havia anotado a origem como ponto pertencente à representação gráfica da equação dada, nesse momento, surgiram discussões a respeito da equação ser satisfeita ou não com os valores x=0 e y=0. Um estudante comentou: “a equação não passa pela origem, pois a equação fica errada com esses valores, por isso a origem não pertence ao gráfico”. Então, outro estudante disse: “o gráfico tem que ser uma reta, pelo tipo da equação, por isso a origem não pertence ao gráfico, pois não seria uma reta”. Então a professora-pesquisadora acrescentou: “podemos concluir que a representação gráfica de uma equação linear sempre será uma reta, mas nem sempre essa reta passará pela origem. Em qual caso ela passaria pela origem?”. O primeiro estudante respondeu: “quando o resultado for zero”. “Que resultado?” perguntou a professora-pesquisadora, e o estudante indicou o lado direito da equação.

A resolução apresentada para a Questão 2 foi a de um estudante que estimou o ponto de interseção das retas por meio do gráfico, sem indicar o valor exato de x e y que satisfazia as duas equações, simultaneamente. Após exibir tal resolução no quadro, a professora-pesquisadora perguntou à turma: “esses valores encontrados para x e y satisfazem as duas equações?”. Após fazer alguns cálculos no caderno, um estudante respondeu: “não, não estão corretos”, então outros estudantes responderam: “o ponto de interseção aparece no item *f* da questão, é o (-2, 3), ele passa pelas duas retas”, e outro estudante acrescentou: “é só resolver o sistema que encontra o ponto (-2, 3), essa é a resposta”. A professora-pesquisadora havia observado que alguns estudantes resolveram a questão apenas geometricamente, outros, recorreram também à forma algébrica para efetuarem os cálculos, então ela apresentou a resolução algébrica do sistema, efetuada por outro estudante e comentou: “estão vendo como o cálculo algébrico é importante? Nem sempre é uma tarefa fácil encontrar valores exatos na representação gráfica, por outro lado, ela nos orienta na visualização e localização da interseção, caso ela exista”.

As discussões referentes à Questão 3 foram uma extensão da discussão da Questão 2, como nem todos os estudantes conseguiram terminar suas resoluções, a professora-pesquisadora apresentou no quadro as resoluções gráficas de três estudantes, todas construídas adequadamente, e questionou a turma: “no que diferem as representações gráficas dos três sistemas lineares?”, e um estudante respondeu: “na disposição das retas”, e a professora-pesquisadora continuou: “por que elas diferem?”, e outro estudante disse: “porque os sistemas são diferentes, têm aqueles nomes SPD, SPI...”. A professora-pesquisadora acrescentou: “nos três casos, as duas retas possuem algum ponto em comum?” e a turma respondeu em coro: “não, no segundo as retas não se encontram”. Então as discussões seguiram no sentido de compreender a classificação dos sistemas lineares de acordo com sua representação gráfica.

Ainda em relação à Questão 3, alguns estudantes utilizaram os métodos da adição e substituição para a resolução dos sistemas. Porém, no caso dos sistemas SI e SPI a maioria se atrapalhou nos cálculos, não chegando a nenhuma conclusão sobre a solução desses sistemas. Então, a professora-pesquisadora apresentou, abaixo de cada resolução gráfica, a resolução algébrica feita por alguns estudantes, e promoveu discussões na direção de relacioná-las.

Por fim, a professora-pesquisadora explicou os métodos da adição e da substituição para a resolução dos sistemas, pois foram os que surgiram nas resoluções, e formalizou as definições de equação linear, Sistemas de Equações Lineares e a classificação de Sistemas de Equações Lineares.

Dando sequência a esse episódio, no próximo episódio de ensino retomaremos a Questão 3, explorando a interpretação geométrica da solução de sistemas lineares 2x2 e 3x3 no GeoGebra, bem como a classificação de acordo com o tipo de solução.

Como nos demais episódios, ao final da aula os estudantes ficaram com os enunciados das tarefas e foram encorajados pela professora-pesquisadora a refazer os exercícios que tiveram maior dificuldade ou que não conseguiram resolver em sala. E também a estudar as apostilas com os conteúdos e definições vistos em sala de aula e resolver os exercícios propostos disponibilizados no ambiente virtual de aprendizagem. Lembrando que todas as resoluções são xerocopiadas e devolvidas aos estudantes na aula seguinte para que possam rever suas resoluções.

4.2.6 Episódio 6

O sexto episódio de ensino ocorreu no dia 24 de março de 2017, com a duração de 150 minutos (três horas aula), no qual foi realizada a Tarefa 4 sobre Sistemas de Equações Lineares.

Inicialmente, a professora-pesquisadora conduziu os estudantes ao laboratório de informática, entregou uma cópia da tarefa para cada um, e solicitou que resolvessem as questões com o auxílio do *software* GeoGebra quando necessário, sempre anotando seus raciocínios e cálculos para serem entregues ao final da aula. Para a fase das resoluções, foi disponibilizado o tempo de 80 minutos.

A Questão 1 propôs uma reflexão: “O que significa resolver um sistema linear?” Após as explorações do episódio anterior envolvendo Sistemas de Equações Lineares, a turma não apresentou dificuldades para responder a essa questão.

Para a resolução da Questão 2, os estudantes deveriam utilizar a ferramenta “controle deslizante” e seguir as instruções para a construção de duas retas, as quais poderiam ser movidas de forma a possibilitar a análise das diferentes configurações possíveis (retas paralelas, concorrentes...). Apesar de a ferramenta ter sido utilizada anteriormente, muitos tiveram dificuldade em sua utilização, então a professora-pesquisadora precisou auxiliar esses estudantes com o uso do *software*.

A Questão 3 retomou a resolução de três sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas (um SPD, um SPI e um SI), explorada no episódio anterior por meio da resolução algébrica e gráfica. Como muitos estudantes não conseguiram finalizar essa questão e/ou apresentaram dificuldades na construção da representação gráfica desses sistemas, para esse episódio foi proposta a exploração da resolução gráfica utilizando o GeoGebra, relacionando as soluções obtidas com as classificações de um sistema linear, por meio das retas construídas na Questão 2. Não foram observadas dificuldades na resolução dessa questão.

Para as Questões 4 a 8, os estudantes trabalharam com a “janela de visualização 3D”. Na Questão 4, os estudantes foram instruídos a construir três planos, por meio de equações onde cada coeficiente era representado por um “controle deslizante”, possibilitando assim a manipulação e a comparação entre as modificações algébricas e gráficas realizadas.

A Questão 5 solicitou no item *a* que os três planos construídos fossem movidos de forma a se tornarem paralelos e distintos e que suas equações fossem comparadas. Após isso, nos itens *b* e *c* os estudantes deveriam analisar e classificar a solução do sistema linear obtido a partir das equações dos três planos.

Durante a resolução dessa questão, a professora-pesquisadora observou uma dificuldade nos estudantes em perceber um padrão entre as equações de planos paralelos distintos, no entanto, nos itens *b* e *c* a maioria não apresentou dificuldades em visualizar a solução do sistema linear.

Na Questão 6, ainda utilizando os três planos construídos anteriormente, foi proposto que os coeficientes fossem ajustados de forma que as três equações se tornassem múltiplas, então, os estudantes analisaram a posição relativa entre os planos, o tipo de solução e a classificação do sistema linear obtido.

Já na Questão 7, foi proposto o ajuste dos coeficientes das três equações para a obtenção de um sistema possível determinado. Não foram observadas dúvidas na resolução dessas questões.

Por fim, na Questão 8 foi proposto que o estudante excluísse uma das três equações, obtendo um sistema linear de duas equações e três incógnitas, e analisasse a solução desse sistema. Essa questão despertou muitas dúvidas, pois a representação gráfica do sistema obtido apresentava uma reta como interseção dos dois planos. Caminhando entre os grupos a professora-pesquisadora ouviu um comentário: “não é SPI, pois os planos não são paralelos, e também não é SPD, pois não tem um ponto em comum...”

Encerrado o tempo destinado às resoluções, nem todos haviam terminado a última questão, porém, para não reduzir o tempo destinado às discussões e à sistematização, a professora-pesquisadora pediu para que os estudantes finalizassem e entregassem suas anotações.

Durante a discussão coletiva, a questão que mais despertou interesse da pesquisadora foi a 8, já que muitos não conseguiram terminá-la e a representação geométrica do sistema causou dúvidas na interpretação da sua solução. Nesse momento, a professora-pesquisadora, ao retomar a Questão 1 e o comentário que ouviu em um dos grupos sobre a Questão 8, perguntou: “o que significa resolver um sistema linear? E no caso do sistema linear que vocês obtiveram?”. Um estudante respondeu: “buscamos um ponto em comum nos planos, esse ponto é a solução do sistema”. A professora-pesquisadora continuou: “e no caso dos planos coincidentes, o que aconteceu?” O estudante respondeu: “todos os pontos eram iguais, infinitos pontos em comum”, e outro estudante complementou: “a solução era indeterminada”. “E nesse caso o que aconteceu?”, perguntou a professora-pesquisadora, no que o primeiro estudante respondeu: “tem pontos em comum e tem pontos diferentes”. Ela perguntou: “quantos pontos em comum?” E ele respondeu: “não sei, infinitos? Então o sistema é possível indeterminado”, e a professora-pesquisadora concordou.

Ao final do episódio, a professora pesquisadora destinou apenas 15 minutos para a sistematização das aprendizagens, já que as discussões – que estavam muito produtivas – ocuparam um tempo maior que o previsto. Durante a sistematização, a professora retomou a classificação da solução de um sistema linear, relacionando-a com as respectivas representações geométricas. E encerrou o episódio avisando à turma que foram disponibilizadas, no ambiente virtual de aprendizagem, a tarefa trabalhada nessa aula e uma lista com questões para serem exploradas no GeoGebra, para que possam praticar em casa.

4.2.7 Episódio 7

O sétimo episódio de ensino ocorreu no dia 28 de março de 2017, com a duração de 150 minutos (três horas aula), no qual foi realizado um Seminário sobre métodos de resolução de Sistemas de Equações Lineares.

Previamente, a professora-pesquisadora selecionou os métodos de resolução para serem apresentados e discutidos no seminário, considerando alguns métodos já identificados nas resoluções dos estudantes, durante os episódios anteriores: adição, substituição e regra de Cramer; e métodos que estavam previstos no planejamento da disciplina: escalonamento e método matricial.

Assim, foram formados quinze grupos com três integrantes cada, a cada qual foi designado um método de resolução e um tipo de Sistema Linear – possível determinado, possível indeterminado ou impossível – distintos. Foi solicitado também que os Sistemas Lineares apresentados pelos grupos não fossem 2x2, para que os métodos pudessem ser explorados com mais profundidade.

As instruções para o seminário bem como o tema de cada grupo foram disponibilizados para os estudantes com sete dias de antecedência à apresentação, no ambiente virtual de aprendizagem da disciplina.

No início do episódio, a professora explicou à turma que cada grupo teria disponível cerca de sete minutos para a apresentação, e que ao final das apresentações seriam destinados 45 minutos para a discussão coletiva sobre os métodos estudados e a sistematização das aprendizagens.

As apresentações foram sequenciadas por método de resolução, iniciando pelos métodos mais conhecidos/utilizados pelos estudantes. Então, foram apresentados os três tipos de resolução para cada método.

O método da adição foi o primeiro a ser apresentado. O grupo 1 elaborou a resolução, pelo referido método, de um sistema linear 2x3, obtendo uma solução possível indeterminada, no entanto, apresentou dificuldade em exibir tal solução, então a professora-pesquisadora orientou que a solução deve ser exibida em função das variáveis não determinadas na resolução. Os outros dois grupos apresentaram a resolução de Sistemas Lineares 3x3 adequadamente, nenhum estudante fez algum questionamento.

O método da substituição foi apresentado por outros três grupos, e uma dúvida levantada por um deles foi quanto à ordem para a substituição nas equações, pois, enquanto um dos integrantes do grupo resolvia o sistema no quadro, outro integrante o indagou: “não seria mais fácil você substituir na primeira equação?”. Nesse momento o primeiro questionou a professora-pesquisadora: “importa a ordem, professora?”, no que esta respondeu: “não importa, desde que todas as equações do sistema sejam utilizadas, porém, dependendo da escolha, os cálculos podem se tornar mais ou menos fáceis... é intuitivo.”

Outra dúvida que surgiu ainda nas apresentações do método da substituição foi quanto à resolução do sistema impossível. O grupo que apresentou tal resolução não demonstrou entender a conclusão da resolução, efetuou todos os cálculos corretamente, mas ao chegar em uma igualdade falsa (0=5) afirmou não saber qual a solução do sistema. Nesse momento, a professora-pesquisadora interveio explicando que era justamente a desigualdade falsa que indicava a inexistência de valores para as incógnitas do sistema de forma que todas as equações fossem satisfeitas, ou seja, o sistema era impossível. Aproveitando a discussão, a professora-pesquisadora indagou à turma: “se pensarmos na representação geométrica desse sistema linear, o que temos?”, no que um estudante respondeu: “temos três planos”, e ela prosseguiu: “qual a disposição desses três planos?”, então o estudante respondeu: “eles não se cruzam”, e a professora-pesquisadora concluiu: “percebem, não existem pontos em comum, logo...”, o estudante complementou: “não existe solução!”.

O próximo método foi o escalonamento, os sistemas lineares apresentados eram 3x3, e todos foram resolvidos adequadamente. Surgiram algumas dúvidas quanto à notação empregada para indicar as operações efetuadas na triangularização dos sistemas e quanto à ordem em que essas devem ser efetuadas, tais dúvidas foram sanadas pela professora-pesquisadora sem maiores discussões. Então, um estudante observou: “professora, esse método é quase igual ao da adição, não é?”, e a professora-pesquisadora confirmou: “na verdade sim, o método da adição pode ser compreendido como um caso particular do escalonamento, utilizado para sistemas lineares 2x2 principalmente. Mas, no escalonamento utilizamos uma notação mais organizada e realizamos as operações com vistas a cancelar algumas variáveis em posições específicas”.

Ainda sobre o método do escalonamento, o grupo que resolveu o sistema impossível mencionou que não havia conseguido interpretar o resultado obtido, mas que, a partir da explicação do sistema impossível pelo grupo anterior, compreenderam a solução do sistema.

O método abordado na sequência foi o da regra de Cramer. Para esse método todos os estudantes apresentaram sistemas lineares 3x3. O grupo que apresentou o sistema possível determinado obteve a solução do sistema adequadamente. Os outros dois grupos, após calcularem os determinantes, apresentaram dificuldades em obter a solução do sistema; o primeiro concluiu que a solução do sistema era a solução nula (quando, na verdade, o sistema resolvido era possível indeterminado) e o segundo cometeu o mesmo erro para o sistema impossível. Nesses casos, a professora solicitou aos grupos que resolvessem o sistema utilizando um método diferente, e em seguida, explicou sobre as divisões $\frac{0}{0}$ (indeterminada) e $\frac{x}{0}$ (impossível).

O último método abordado foi o método matricial. Apesar de a professora-pesquisadora não ter o objetivo de aprofundar esse método, ele foi proposto no seminário para que os estudantes pudessem compreender melhor como se relacionam as Matrizes e os Sistemas Lineares.

Dos três grupos que apresentariam esse método, um faltou, e os outros dois disseram não conseguir compreendê-lo para apresentar no seminário. Sendo assim, apresentaram a resolução dos seus sistemas lineares utilizando o método do escalonamento, conforme solicitado pela professora-pesquisadora, que formalizou o referido método durante a sistematização do conteúdo.

Finalizadas as apresentações dos métodos, a professora-pesquisadora iniciou a discussão com a pergunta: “qual método de resolução vocês preferem, e por quê?” Os métodos mais citados pelos estudantes foram o da adição e o de Cramer, com justificativas como “esse é mais fácil” ou “os cálculos por esse método são mais simples”. A professora-pesquisadora prosseguiu com perguntas do tipo: “e se o sistema a resolver for 4x4 ou de ordem superior?”, “e se o sistema possuir infinitas soluções, como encontrar essas soluções por meio da Regra de Cramer?”, por meio de tais indagações a professora-pesquisadora discutiu com os estudantes quais as vantagens e desvantagens de cada método.

Na sequência, ocorreu a sistematização das aprendizagens, momento no qual a professora-pesquisadora retomou as particularidades de cada método exposto, explicou o método matricial, resolveu e discutiu alguns exemplos de sistemas lineares não quadrados.

4.2.8 Episódio 8

O oitavo episódio de ensino ocorreu no dia 31 de março de 2017, com a duração de 150 minutos (três horas aula), no qual foi realizada a Tarefa 5 sobre Sistemas de Equações Lineares.

No início da aula, a professora-pesquisadora solicitou aos estudantes que se organizassem em duplas, então entregou a todos cópias da tarefa e explicou que em todas as questões os estudantes poderiam escolher qual método de resolução utilizar. Para a etapa de resolução foram disponibilizados 90 minutos.

Na Questão 1 foi proposta uma situação-problema que poderia ser formulada e resolvida como um sistema de equações lineares de duas equações e duas incógnitas. Ao caminhar pela sala, a professora-pesquisadora não observou dificuldades com a interpretação e a resolução da questão.

A Questão 2, na qual foi abordada a formulação e a resolução de um sistema linear 3x3, despertou muitas dúvidas nos estudantes, principalmente quanto à formulação do problema. Ao observar a atividade de uma das duplas, a professora-pesquisadora percebeu que estavam formulando o problema em função da quantidade de cada vitamina, e não da quantidade de cada alimento; demonstravam insegurança em suas análises. Nesse momento, ela tentou orientar a dupla com a instrução: “leiam qual a pergunta que o problema traz para entenderem o que deve ser calculado”. Então a dupla voltou a ler o enunciado comparando-o com suas esquematizações.

Nas Questões 3, 4 e 5 foi proposto o balanceamento de equações químicas, como muitos estudantes sabiam resolver esse tipo de problema por outros métodos, e não por sistemas lineares, a professora-pesquisadora orientou para que eles pesquisassem em livros ou até mesmo na *internet*, e buscassem sobre o assunto, caso julgassem necessário. Alguns estudantes solicitaram a professora para irem à biblioteca buscar livros, outros preferiram utilizar a internet em seus celulares.

Após fazerem suas buscas, os estudantes partiram para as resoluções, demonstrando compreenderem a formulação de Sistemas Lineares a partir das equações químicas fornecidas. Surgiram algumas dúvidas e comentários dos estudantes quanto à resolução desses sistemas, que possuíam solução possível indeterminada. Um estudante questionou: “professora, qual variável deixo na resolução?”, outro perguntou: “precisa ficar em função de uma variável só a solução?”, no que a professora-pesquisadora respondeu: “a variável que aparecerá na solução vai depender das substituições que vocês fizerem, vocês escolhem. A ideia é que a solução apresente o menor número de variáveis possível.”

O tempo reservado para essa etapa foi insuficiente para que a maioria dos estudantes terminasse suas resoluções, já que eles precisaram de um tempo extra para pesquisarem sobre o balanceamento de equações químicas. Sendo assim, a professora-pesquisadora disponibilizou mais 20 minutos para que fossem finalizadas e entregues as anotações.

Na sequência, foram realizadas a discussão coletiva e a sistematização dos conteúdos. A professora-pesquisadora decidiu unir as duas etapas, pois a tarefa não trazia conteúdos novos a sistematizar, e sim diferentes contextos e aplicações para o conteúdo estudado sobre Matrizes e Sistemas de Equações Lineares.

Durante as discussões/sistematizações foram debatidos os métodos de resolução utilizados em cada questão. Para isso, a professora-pesquisadora selecionou resoluções que apresentassem diferentes estratégias.

Na discussão da Questão 1, os métodos apresentados pelos estudantes foram o da adição e o da substituição. Todos chegaram a um consenso de que esses seriam os melhores métodos a serem utilizados, já que o sistema obtido tinha apenas duas variáveis.

Para a Questão 2, os métodos apresentados foram a regra de Cramer e o escalonamento, os estudantes não apresentaram dificuldades na compreensão dos métodos apresentados, então a professora-pesquisadora indagou: “poríamos ter utilizado outros métodos de resolução nessa questão? Quais?” E um estudante respondeu: “podia ter utilizado qualquer um dos métodos estudados, mas escolhi o que pareceu mais simples para o problema”, e a professora-pesquisadora acrescentou: “esse é o segredo, olhar para o Sistema Linear que temos que resolver e descobrir qual será o método mais conveniente, por isso é interessante que vocês resolvam outros Sistemas Lineares, de outras ordens, para desenvolverem essa habilidade”.

A dúvida que suscitou muitas discussões nessa questão foi quanto à formulação do problema, então a professora-pesquisadora, com os estudantes, foram lendo e organizando os dados do problema no quadro, e um estudante comentou: “eu havia entendido que A, B e C eram as variáveis, mas são as vitaminas, as quantidades de vitaminas já são conhecidas...”, e a professora-pesquisadora complementou: “uma dica sobre isso estava no final do enunciado, que perguntava ‘quantos gramas de cada alimento devemos ingerir...’, percebe-se pela pergunta que as variáveis são as quantidades dos alimentos, não as das vitaminas.”

Na discussão das resoluções para as Questões 3, 4 e 5, o único método apresentado foi o da substituição. A professora-pesquisadora então questionou a turma sobre essa escolha, e um estudante respondeu: “porque muitas equações já forneciam alguns resultados”, e outro complementou: “tinham poucas variáveis nas equações, ficava mais fácil”.

Outro tópico discutido sobre essas questões foi quanto à exibição da solução do problema, a professora-pesquisadora ressaltou a importância de se concluir a resolução exibindo a resposta para o problema, no caso, a equação balanceada, o que muitos estudantes não fizeram.

Essa discussão findou por abordar também alguns conceitos de química relativos ao balanceamento, como a importância de que os coeficientes estequiométricos fossem números inteiros. A professora-pesquisadora, por não dominar tais conceitos da Química, não pode contribuir muito; assim, sugeriu que os estudantes levassem essas discussões também para a aula de Química Geral, em que poderiam aprofundá-las.

Finalizando o episódio, a professora-pesquisadora avisou aos estudantes sobre as tarefas disponibilizadas no ambiente virtual de aprendizagem e solicitou que fizessem o possível para não faltar na próxima aula, pois havia planejado uma tarefa importante.

4.2.9 Episódio 9

O nono episódio de ensino ocorreu no dia sete de abril de 2017, com a duração de 150 minutos (três horas aula), no qual foi aplicado um instrumento de reavaliação sobre os conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares. O instrumento foi composto por oito questões, extraídas da prova escrita, apresentada no primeiro episódio.

As questões selecionadas para essa reavaliação foram as da terceira seção da prova escrita (8, 12, 13, 14, 15, 16, 17 e 18), que abordou *aspectos matemáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares*.

O objetivo da reaplicação de tais questões foi o de comparar os processos do PMA mobilizados pelos estudantes no início da Experiência de Ensino com os mobilizados ao final, bem como analisar a evolução na aprendizagem dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações lineares em um contexto de sala de aula baseado no Ensino-Aprendizagem Exploratório da Matemática.

Inicialmente, a professora-pesquisadora entregou as questões aos estudantes e explicou que a reavaliação não visava atribuir uma nota a seus conhecimentos a respeito de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, e sim proporcionar a todos uma reflexão e até mesmo uma autoavaliação de suas aprendizagens durante todo o processo. Na sequência, foram dadas instruções para que os estudantes resolvessem a reavaliação individualmente, justificando suas resoluções e raciocínios.

A participação dos estudantes nesse episódio foi melhor que no primeiro. A professora-pesquisadora notou que houve uma atitude positiva entre eles, pois se dedicaram mais e permaneceram mais tempo – alguns estudantes demoraram 130 minutos para concluir a tarefa – tentando resolver as questões. E ainda, alguns comentaram: “agora parecem mais fáceis os exercícios”.

Ao finalizarem as resoluções, a professora-pesquisadora recolheu a produção escrita dos estudantes, dispôs-se a sanar eventuais dúvidas sobre os conteúdos estudados e avisou a turma que todas as tarefas e provas realizadas até então estariam disponíveis para consulta no ambiente virtual de aprendizagem.

No capítulo seguinte, analisaremos a produção escrita dos estudantes em cada um dos nove episódios de ensino, identificando os processos do PMA mobilizados em suas resoluções.

5. ANÁLISES

Como exposto anteriormente no Capítulo 3, a análise dos dados recolhidos – a saber, a produção escrita dos estudantes e as notas de campo da professora-pesquisadora – foi realizada com o propósito de identificar indícios dos processos do PMA nas resoluções e justificações dos estudantes, visto que o objetivo geral dessa investigação é *investigar indícios de desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado em produções escritas de estudantes do primeiro semestre de um curso de Licenciatura em Química, em uma disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, por meio da realização de uma Experiência de Ensino*.

Para tanto, faremos inicialmente uma análise de cada episódio de ensino, examinando a resolução dos estudantes para cada questão, em busca de semelhanças, diferenças e regularidades nas estratégias e raciocínios dos estudantes, considerando seus caminhos percorridos na resolução das tarefas, suas justificativas e dificuldades.

No Quadro 3, apresentamos algumas características de cada um dos processos do PMA, segundo os autores Dreyfus e Eisenberg (1996) e Dreyfus (2002), e listamos habilidades e procedimentos que consideramos estarem relacionados a esses processos, para assim inferir sobre indícios do PMA na produção escrita dos estudantes.

Sequencialmente, exibiremos ao final da análise de cada episódio um quadro síntese com os processos do PMA evidenciados na resolução de cada questão, no qual destacamos em negrito os estudantes que, em suas resoluções, mobilizaram ou apresentaram indícios dos respectivos processos indicados. Cabe informar que consideramos como resolvida a questão para a qual o estudante apresentou qualquer tipo de anotação, tentativa de resolução ou resposta.

Quadro 3 – Critérios para a identificação dos processos do PMA.

PROCESSOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO		
	Características segundo Dreyfus e Eisenberg (1996) e Dreyfus (2002)	**Habilidades/Procedimentos esperados/examinados/ considerados nas resoluções**
Representação Simbólica	- Comunicação de forma escrita ou falada, por meio de símbolos e sinais, do conhecimento sobre um determinado conceito matemático. - Notações matemáticas, por meio das quais ideias complexas ou processos mentais podem ser fragmentados e representados por notações físicas.	- Utilizar símbolos e/ou notações matemáticas para representar conceitos ou objetos matemáticos; e/ou - Compreender o significado de símbolos ou notações matemáticas na representação/interpretação de uma situação matemática.
Representação Mental	- Esquemas ou quadros de referências criados internamente pelo indivíduo para lidar com o mundo exterior. - Forma como o indivíduo enxerga um conceito. - Pode ser gerada por meio da visualização.	- Associar conceitos ou objetos matemáticos com operações algébricas ou aritméticas e métodos de resolução.
Visualização	- Imagem mental de um conceito. - Processo pelo qual as representações mentais podem vir a ser. - Auxilia na geração e gerenciamento da imagem de uma situação problemática, ela está intimamente ligada à análise e exploração do problema.	- Gerar alguma imagem mental de um conceito e externalizá-la por meio de esboços ou esquemas para representar e/ou compreender situações matemáticas, analisar e explorar problemas.
Intuição	- É o produto das imagens conceituais dos estudantes, assim, à medida que o estudante adquire mais experiência, ele passa de intuições iniciais, baseadas em suas matemáticas pré-formais, para intuições formais, mais refinadas.	- Utilizar conhecimentos matemáticos prévios para examinar situações matemáticas desconhecidas.
Mudança de representação e tradução	- O indivíduo se movimenta entre as diversas representações e sabe mudar de representações em contextos diferentes, escolhendo a(s) representação(ões) mais eficiente(s).	- Transitar entre diferentes representações matemáticas de um mesmo conceito ou objeto matemático e escolher a(s) representação(ões) mais eficiente(s).

Modelação	- Na modelagem o sistema externo é físico e o modelo matemático é uma estrutura mental, ou seja, consiste na representação matemática de um processo ou objeto não matemático. - Semelhante ao processo de representação mental (análogos).	- Construir ou adequar um modelo matemático a partir dos dados do enunciado da questão para estudar o comportamento de um processo.
Generalização	- Consiste na transição de casos particulares para casos gerais, é derivar ou induzir a partir de casos particulares, identificar pontos em comum, expandir domínios de validade. - Nem sempre inclui a formação de um conceito.	- Reconhecer conceitos e objetos matemáticos obtidos a partir de resultados gerais; e/ou - Induzir, a partir de casos particulares, obtendo resultados/métodos genéricos.
Analogia	- Encontrar semelhanças entre casos específicos, abordando outros casos de forma análoga, até formular casos mais gerais. - a compreensão profunda de analogias possibilita aos estudantes transitar de casos mais gerais aos mais específicos ou de casos específicos aos gerais.	- Abordar situações matemáticas semelhantes de forma análoga; e/ou - Encontrar semelhanças entre casos específicos.
Síntese	- Consiste em combinar ou compor as partes do conhecimento de forma a constituir um todo que, muitas vezes, equivale a mais do que a soma de suas partes. - Separar as propriedades e relações comuns do objeto dos aspectos específicos da representação para formar o conceito abstrato.	- Utilizar conceitos e conteúdos matemáticos diversos para analisar e interpretar uma situação matemática; e - Estabelecer relações entre propriedades e conceitos matemáticos.

Fonte: autoria própria.

Ao final do capítulo, faremos uma discussão comparativa entre o primeiro e o último episódios de ensino focando, especialmente, na mobilização de processos do PMA e na aprendizagem dos conteúdos propostos pelos estudantes.

5.1 EPISÓDIO 1

Durante o primeiro episódio de ensino, ocorreu a resolução de uma prova escrita (Apêndice C) composta por três seções, uma voltada ao perfil pessoal do estudante, outra aos aspectos conceituais e didáticos dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, e a última, aos aspectos matemáticos envolvendo tais conteúdos.

Por meio das oito questões (8, 12, 13, 14, 15, 16, 17 e 18) que compõem a terceira seção dessa prova, buscamos indícios dos conhecimentos prévios com relação a conceitos referentes a Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, bem como identificar indícios de processos do PMA, segundo Dreyfus (2002) e Dreyfus e Eisenberg (1996), mobilizados por esses estudantes.

Questão 8

Iniciando pela Questão 8 – que propunha a identificação de equações lineares dentre diversos tipos de equações – dos onze estudantes que constituem o *corpus* dessa análise, apenas dois justificaram de alguma forma sua resposta.

O estudante E14 justificou de forma inadequada que a equação do item *e* não é linear por possuir um coeficiente negativo. Os demais itens da questão não foram classificados pelo estudante.

O estudante E25 sinalizou, de forma inadequada, que as equações dos itens *a* e *f* são lineares, e justificou que ambas são lineares porque “o resultado dá 0”, ou seja, o termo independente é igual a zero.

Por meio das justificativas apresentadas e pela quantidade de estudantes que não responderam a essa questão, inferimos que o conceito de equação linear é desconhecido ou incompreendido pelos estudantes. Tal fato pode influenciar diretamente na resolução e identificação dos Sistemas de Equações Lineares já que, para resolvê-los, o estudante precisa primeiramente reconhecer a linearidade das equações do sistema para então buscar um método de resolução conveniente.

Portanto, identificamos nas resoluções dos estudantes, indícios dos processos de:

- intuição, pois, apesar de não resolverem adequadamente a questão, utilizaram conhecimentos matemáticos prévios para examinar uma situação matemática desconhecida; e

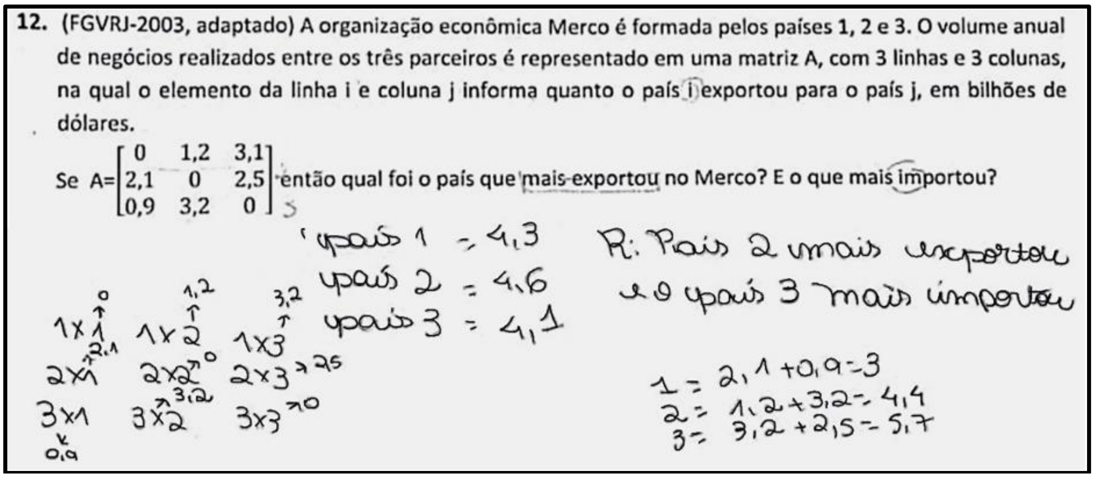
- representação simbólica, para a compreensão da simbologia matemática utilizada na representação das equações.

Questão 12

A Questão 12, que abordava a interpretação e identificação dos elementos de uma matriz quadrada, segundo um contexto dado, foi resolvida por sete estudantes. Desses, dois estudantes, E7 e E15, tentaram resolver utilizando determinantes, não chegando a conclusão alguma.

Três estudantes, E2, E11 e E16, responderam à questão adequadamente e demonstraram, por meio de suas anotações, compreenderem os índices utilizados para a indicação dos elementos de uma matriz (Figuras 58 e 59).

Figura 58 – Resolução do estudante E2 – Questão 12



12. (FGVRJ-2003, adaptado) A organização econômica Merco é formada pelos países 1, 2 e 3. O volume anual de negócios realizados entre os três parceiros é representado em uma matriz A, com 3 linhas e 3 colunas, na qual o elemento da linha i e coluna j informa quanto o país i exportou para o país j, em bilhões de dólares.

Se $A=\begin{bmatrix} 0 & 1{,}2 & 3{,}1 \\ 2{,}1 & 0 & 2{,}5 \\ 0{,}9 & 3{,}2 & 0 \end{bmatrix}$ então qual foi o país que mais exportou no Merco? E o que mais importou?

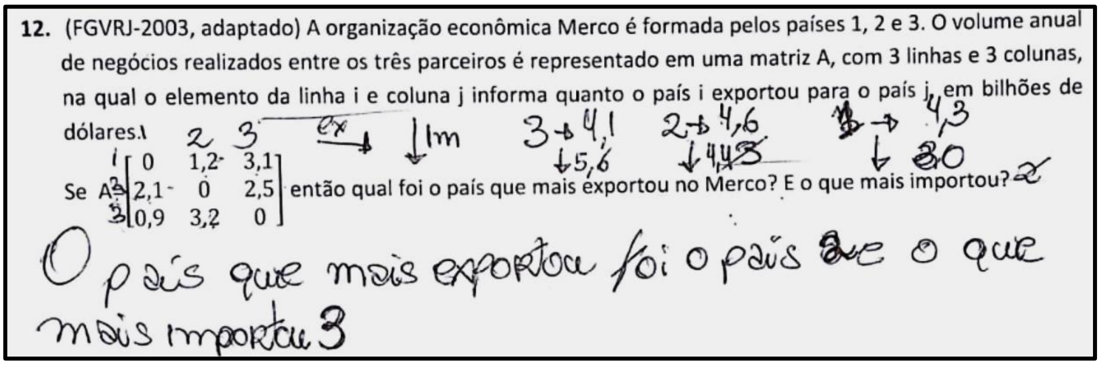
país 1 = 4,3
país 2 = 4,6
país 3 = 4,1

R: País 2 mais exportou e o país 3 mais importou

1 = 2,1 + 0,9 = 3
2 = 1,2 + 3,2 = 4,4
3 = 3,2 + 2,5 = 5,7

Fonte: produção escrita do estudante E2.

Figura 59 – Resolução do estudante E16 – Questão 12



12. (FGVRJ-2003, adaptado) A organização econômica Merco é formada pelos países 1, 2 e 3. O volume anual de negócios realizados entre os três parceiros é representado em uma matriz A, com 3 linhas e 3 colunas, na qual o elemento da linha i e coluna j informa quanto o país i exportou para o país j, em bilhões de dólares.

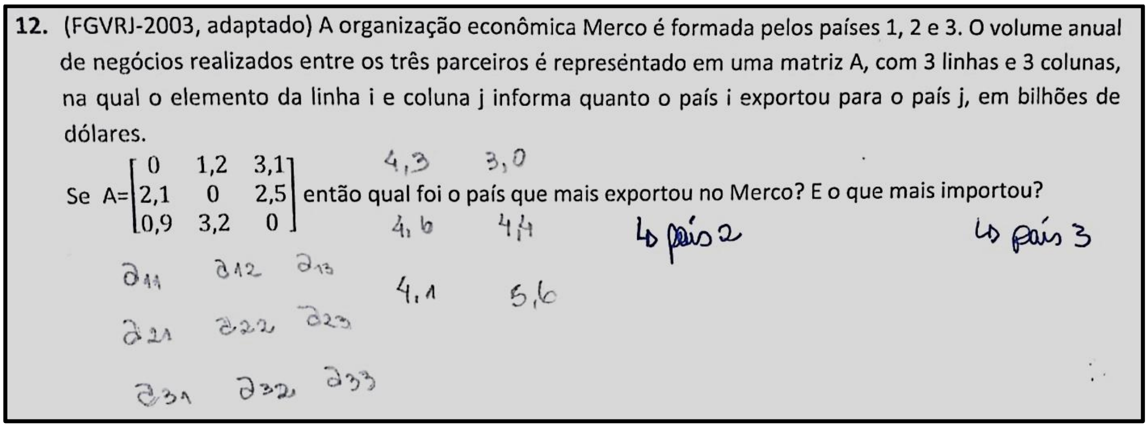
Se $A=\begin{bmatrix} 0 & 1{,}2 & 3{,}1 \\ 2{,}1 & 0 & 2{,}5 \\ 0{,}9 & 3{,}2 & 0 \end{bmatrix}$ então qual foi o país que mais exportou no Merco? E o que mais importou?

O país que mais exportou foi o país 2 e o que mais importou 3

Fonte: produção escrita do estudante E16.

Desses, o estudante E11 demonstrou o uso adequado de tal notação, como pode ser observado na Figura 60.

Figura 60 – Resolução do estudante E11 – Questão 12



12. (FGVRJ-2003, adaptado) A organização econômica Merco é formada pelos países 1, 2 e 3. O volume anual de negócios realizados entre os três parceiros é represéntado em uma matriz A, com 3 linhas e 3 colunas, na qual o elemento da linha i e coluna j informa quanto o país i exportou para o país j, em bilhões de dólares.

Se $A=\begin{bmatrix} 0 & 1,2 & 3,1 \\ 2,1 & 0 & 2,5 \\ 0,9 & 3,2 & 0 \end{bmatrix}$ então qual foi o país que mais exportou no Merco? E o que mais importou?

4,3 3,0

4,6 4,4 → país 2 → país 3

a_{11} a_{12} a_{13} 4,1 5,6

a_{21} a_{22} a_{23}

a_{31} a_{32} a_{33}

Fonte: produção escrita do estudante E11.

Já os estudantes E14 e E25 apresentaram apenas a resposta para a questão, sem a indicação de algum cálculo ou raciocínio utilizado. Sendo que E14 respondeu a questão corretamente, e E25 incorretamente.

Assim, podemos inferir por meio das resoluções apresentadas para a Questão 12 e dos critérios descritos no Quadro 3, que os estudantes E2, E11 e E16 mobilizaram os processos:

- representação simbólica, pois, compreenderam e utilizaram símbolos e notações matemáticas referentes ao conceito de matriz para responder à situação-problema proposta;

- representação mental, pois, associaram as operações algébricas necessárias para a resolução da questão; e

- visualização, pois, externalizaram por meio de esboços a imagem mental gerada para a compreensão do problema.

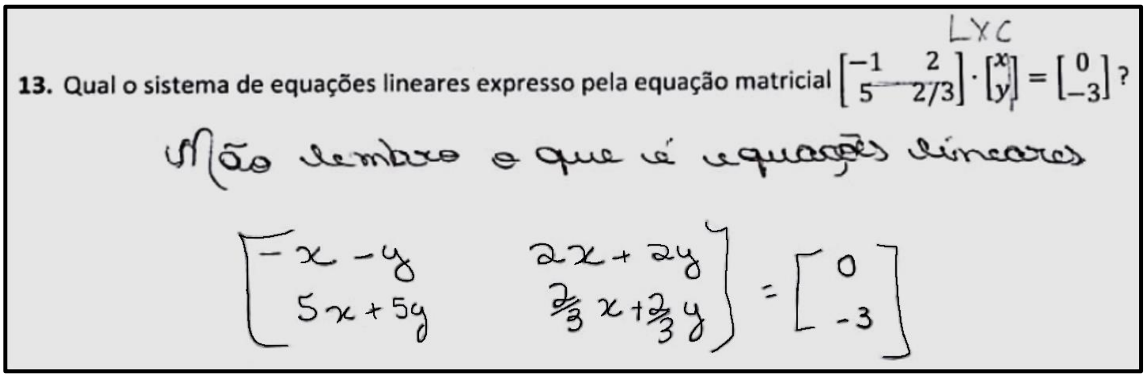
Além desses processos, inferimos que todos os estudantes que apresentaram resoluções para a questão mobilizaram o processo de:

- intuição, pois, fizeram o uso de conhecimentos prévios para abordar a situação matemática proposta.

Questão 13

A Questão 13, que propunha a obtenção do Sistema de Equações Lineares expresso por uma equação matricial, foi resolvida por apenas três estudantes. Desses, o estudante E2 resolveu a questão inadequadamente, demonstrando em sua resolução dificuldade com o termo “equações lineares” e com o algoritmo de multiplicação de matrizes, como ilustrado na Figura 61.

Figura 61 – Resolução do estudante E2 – Questão 13



LXC

13. Qual o sistema de equações lineares expresso pela equação matricial $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$?

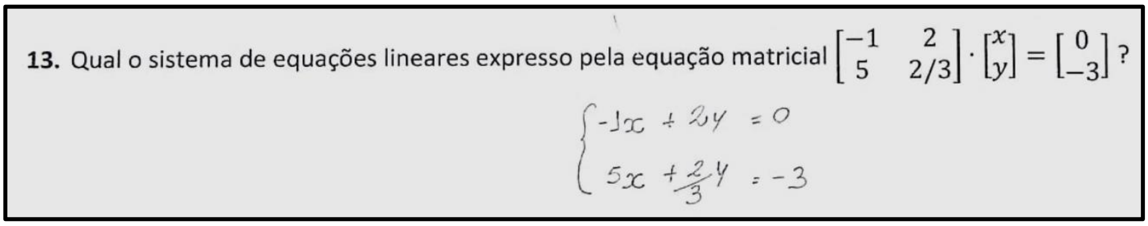
Não lembro o que é equações lineares

$$\begin{bmatrix} -x - y & 2x + 2y \\ 5x + 5y & \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Fonte: produção escrita do estudante E2.

Os estudantes E9 e E14 resolveram a questão adequadamente, obtendo o sistema linear proposto, sendo que o estudante E9 ainda resolveu o sistema linear obtido (o que não era solicitado no enunciado da questão), como pode ser observado nas Figuras 62 e 63.

Figura 62 – Resolução do estudante E14 – Questão 13



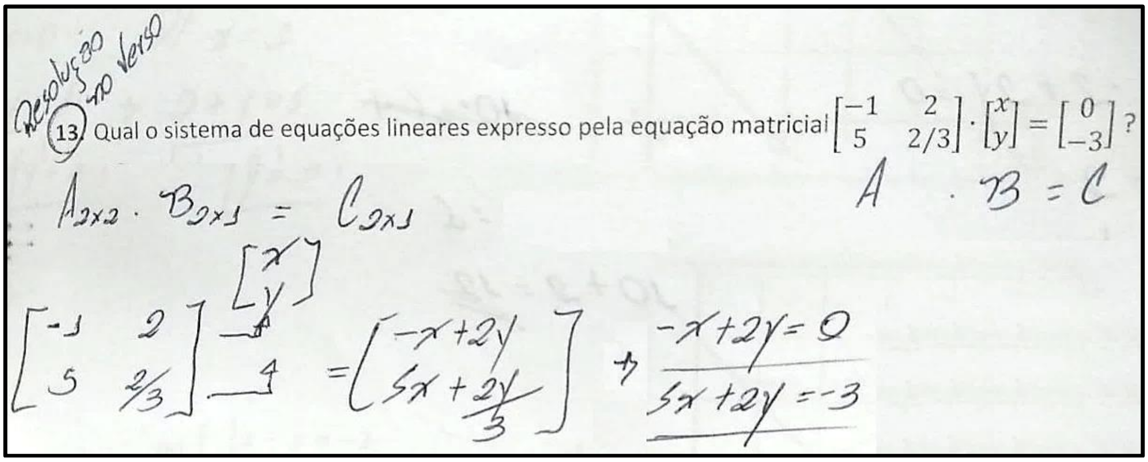
13. Qual o sistema de equações lineares expresso pela equação matricial $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$?

$$\begin{cases} -1x + 2y = 0 \\ 5x + \frac{2}{3}y = -3 \end{cases}$$

Fonte: produção escrita do estudante E14.

Na Figura 63, a resolução do estudante E9 apresenta indicativos de que ele compreende a operação de multiplicação de matrizes, bem como a condição para que essa possa ser realizada, apesar de não utilizar a notação adequada para indicar o Sistema Linear obtido.

Figura 63 – Resolução do estudante E9 – Questão 13



Fonte: produção escrita do estudante E9.

Observamos na resolução desses três estudantes, de acordo com o Quadro 3, indícios dos processos:

- representação simbólica, pois, utilizaram símbolos e notações para representar o sistema linear proposto na questão;

- representação mental, pois, associaram o conceito de matriz à operação de multiplicação entre matrizes para a resolução da questão; e

- intuição, pois, demonstraram o uso de conhecimentos prévios a respeito da multiplicação de matrizes para obter o sistema linear.

Além desses processos, compreendemos que os estudantes E9 e E14 apresentaram em suas resoluções indícios do processo de:

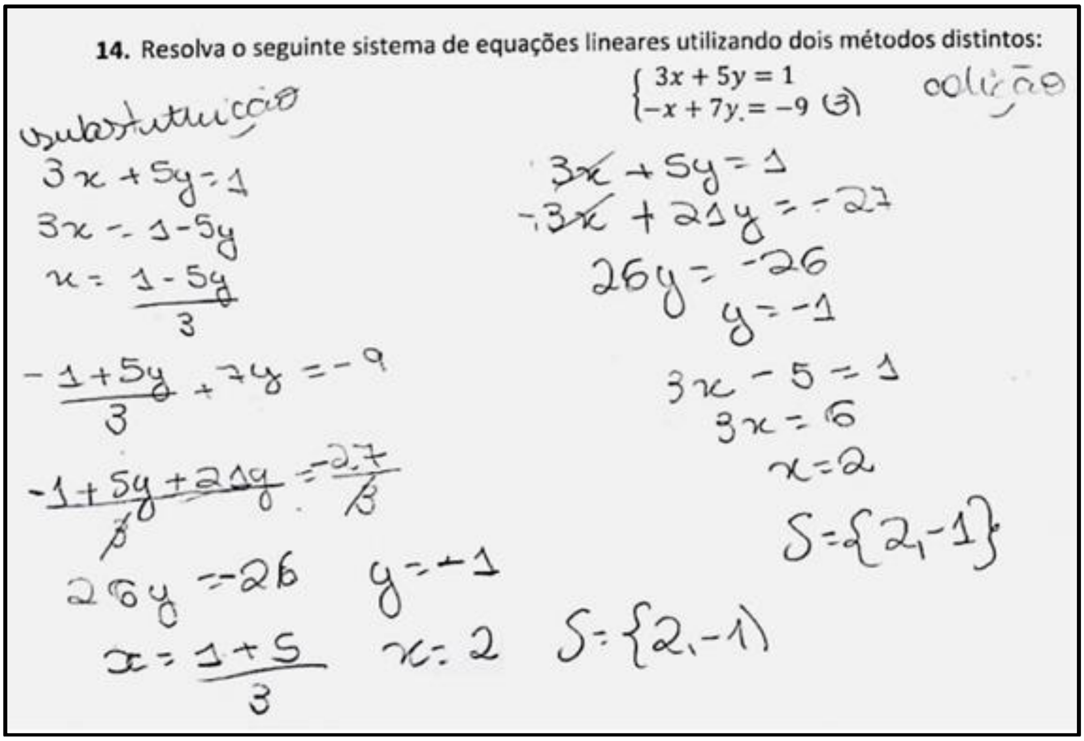
- mudança de representação e tradução, pois, transitaram entre dois tipos de representações, algébrica e matricial, de um Sistema Linear.

Questão 14

A Questão 14, que propunha a resolução de um sistema linear 2x2 utilizando dois métodos distintos, foi resolvida por cinco estudantes. Desses, apenas o estudante E2 apresentou a resolução correta do referido sistema pelos métodos da substituição e da adição (Figura 64).

Ressaltamos que, apesar de o estudante E2 não utilizar a notação adequada para indicar a solução dos Sistemas Lineares, entendemos que tal fato não afetou a sua compreensão dos métodos, nem a mobilização de processos do PMA.

Figura 64 – Resolução do estudante E2 – Questão 14



14. Resolva o seguinte sistema de equações lineares utilizando dois métodos distintos:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ -x + 7y = -9 \ (3) \end{cases}$$

substituição

$3x + 5y = 1$

$3x = 1 - 5y$

$x = \frac{1-5y}{3}$

$-\frac{1+5y}{3} + 7y = -9$

$\frac{-1+5y+21y}{\cancel{3}} = \frac{-27}{\cancel{3}}$

$26y = -26 \quad y = -1$

$x = \frac{1+5}{3} \quad x = 2 \quad S = \{2, -1\}$

solução

$\cancel{3x} + 5y = 1$

$-\cancel{3x} + 21y = -27$

$26y = -26$

$y = -1$

$3x - 5 = 1$

$3x = 6$

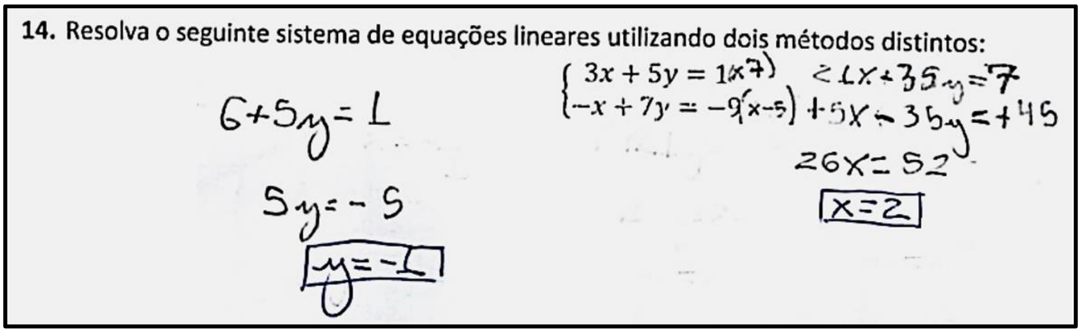
$x = 2$

$S = \{2, -1\}$

Fonte: produção escrita do estudante E2.

Os estudantes E7, E9, E16 e E25 (Figura 65) utilizaram apenas o método da adição ou do escalonamento (que, no caso de sistemas lineares 2x2, são semelhantes) para a resolução da questão, logo, classificamos suas resoluções como parcialmente adequadas. Dentre esses, os estudantes E7 e E9 (Figura 66) não chegaram à solução do sistema por errarem o sinal de subtração durante os cálculos e, não utilizaram a notação adequada para representar a solução da questão.

Figura 65 – Resolução do estudante E25 – Questão 14



14. Resolva o seguinte sistema de equações lineares utilizando dois métodos distintos:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ -x + 7y = -9 \end{cases}$$

$6+5y=1$

$5y=-5$

$\boxed{y=-1}$

$21x+35y=7$

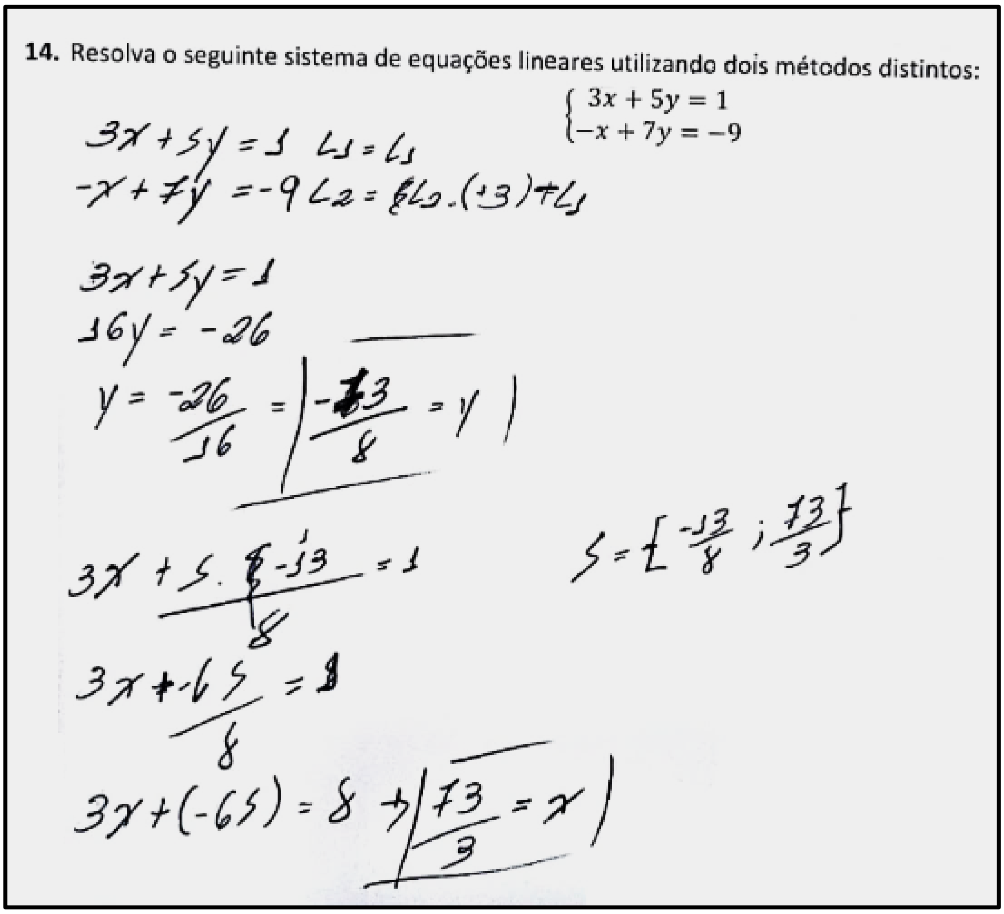
$+5x-35y=+45$

$26x=52$

$\boxed{x=2}$

Fonte: produção escrita do estudante E25.

Figura 66 – Resolução do estudante E9 – Questão 14



14. Resolva o seguinte sistema de equações lineares utilizando dois métodos distintos:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ -x + 7y = -9 \end{cases}$$

$3x+5y=1 \quad L_1=L_1$

$-x+7y=-9 \quad L_2=L_2.(3)+L_1$

$3x+5y=1$

$16y=-26$

$y=\frac{-26}{16}=\frac{-13}{8}=y$

$3x+5.\frac{-13}{8}=1$

$3x+\frac{-65}{8}=1$

$3x+(-65)=8 \quad \frac{73}{3}=x$

$S=\{\frac{-13}{8};\frac{73}{3}\}$

Fonte: produção escrita do estudante E9.

Apesar de apenas um estudante resolver a questão por completo, os cinco estudantes mencionados demonstraram compreender ao menos um método para a resolução de Sistemas Lineares 2x2, mobilizando em suas resoluções os seguintes processos do PMA:

- representação simbólica, pois, compreenderam e utilizaram os símbolos e notações matemáticas para a interpretação e resolução da questão;

- representação mental, pois, associaram o método da adição e/ou o método da substituição como método(s) para a resolução do Sistema Linear dado; e

- intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos prévios a respeito de Sistemas Lineares para resolver a questão.

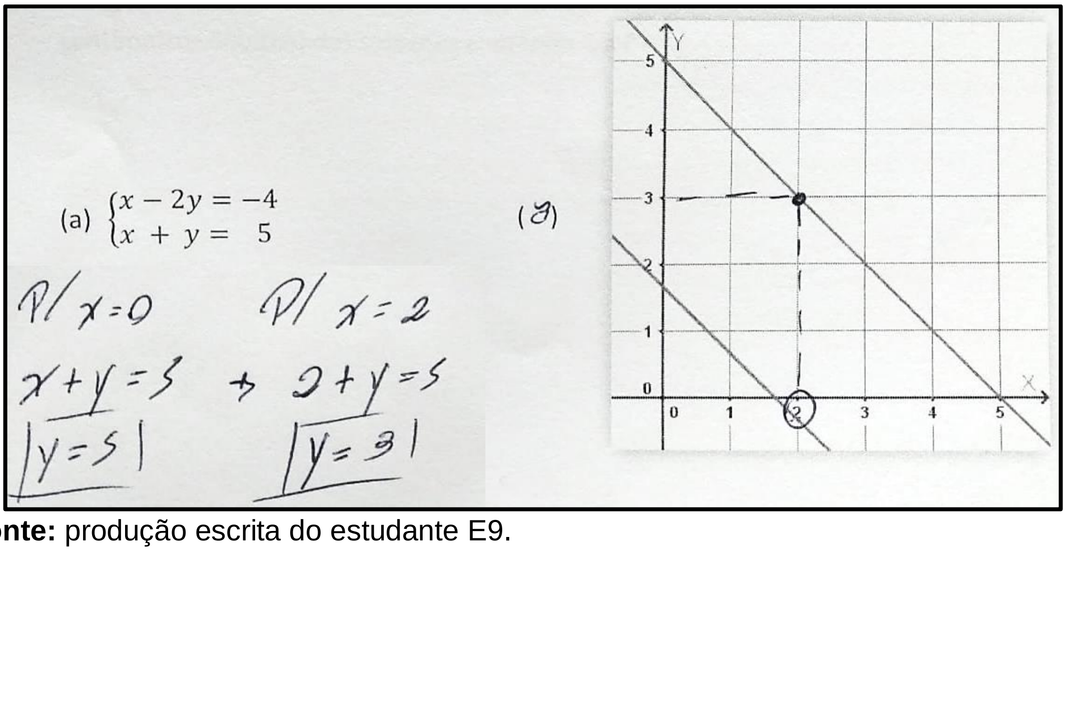
Questão 15

A Questão 15 propunha ao estudante relacionar sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas com suas respectivas representações geométricas. Para essa questão apenas dois estudantes apresentaram tentativas de resolução E9 e E25.

O estudante E25 demonstrou não compreender o enunciado da questão, uma vez que apenas sinalizou todos os itens como falsos.

O estudante E9 calculou pontos de uma das equações e os identificou no gráfico imediatamente ao lado, não analisando as duas equações de cada sistema com a respectiva representação geométrica, como pode ser observado na resolução do item *a*, apresentada na Figura 67.

Figura 67 – Resolução do estudante E9 – Questão 15



Fonte: produção escrita do estudante E9.

Logo, inferimos que os estudantes E9 e E25 mesmo não resolvendo adequadamente a questão, mobilizaram o processo de:

- intuição, ao utilizarem seus conhecimentos prévios a respeito da representação gráfica de um Sistema Linear para examinar a questão.

Além desse processo, o estudante E9 apresentou em sua resolução indícios dos processos de:

- representação simbólica, pois, demonstrou compreender a representação geométrica das equações lineares e representou graficamente pontos obtidos a partir das equações;

- representação mental, pois, associou conceitos e objetos matemáticos com operações algébricas ao atribuir valores para a variável x da equação de modo a calcular os valores respectivos da variável y e, assim, obter pontos pertencentes à reta que representa a equação; e

- mudança de representação e tradução, pois, revelou a capacidade de transitar entre as representações algébrica e geométrica de uma equação linear.

Podemos observar, pelas resoluções das Questões 14 e 15 que, apesar de cinco estudantes conseguirem resolver o Sistema Linear algebricamente, nenhum desses soube relacionar a solução de Sistemas Lineares 2x2 com a sua representação geométrica, corroborando com as dificuldades identificadas na Seção 4.1.2.

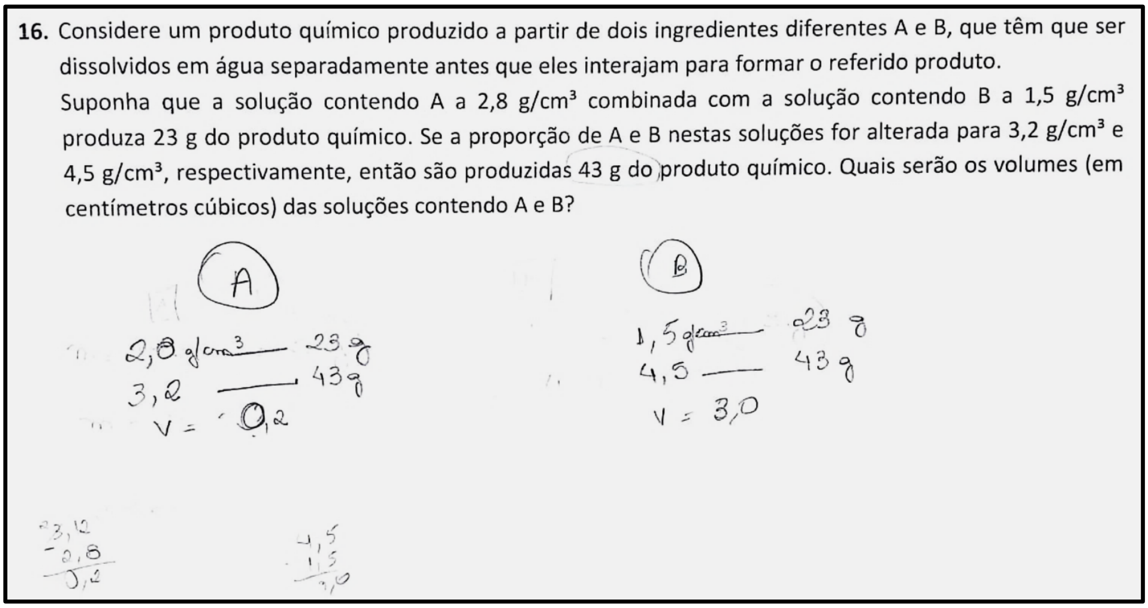
Segundo Dreyfus (2002), um dos pré-requisitos para que o estudante atinja o processo de abstração no PMA, é o desenvolvimento de processos relacionados à representação, como a modelação e a mudança e tradução entre representações. Porém, isso só é possível quando o estudante já possui diferentes representações mentais para um mesmo conceito (DREYFUS, 2002).

Dessa forma, detectamos nas produções analisadas a importância de priorizar o trabalho com tarefas que oportunizem aos estudantes a visualização e a exploração de diferentes representações para os conceitos de Sistemas de Equações Lineares.

Questão 16

A Questão 16, que abordava a formulação e a resolução de um Sistema de Equações Lineares 2x2, foi resolvida por quatro dos onze estudantes participantes. Dentre esses, os estudantes E2 e E15, não conseguiram modelar o problema, sendo que E2 apenas rascunhou cálculos somando os valores dados. O estudante E15 tentou relacionar os dados do problema por meio de uma regra de três simples (Figura 68).

Figura 68 – Resolução do estudante E15 – Questão 16

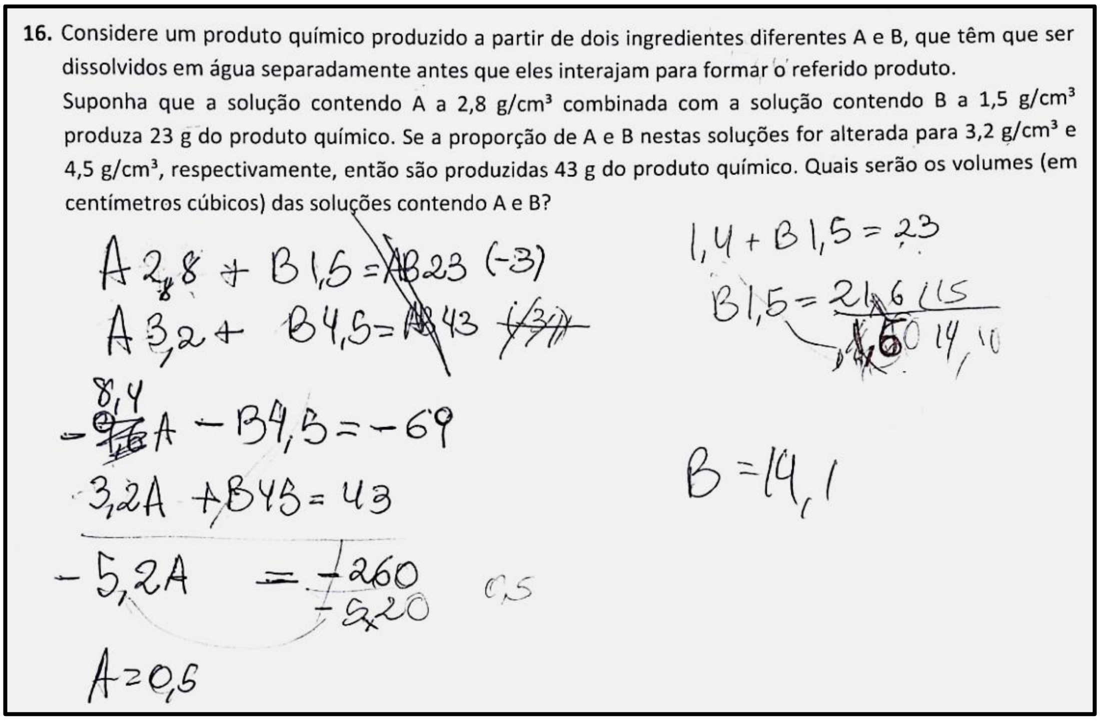


16. Considere um produto químico produzido a partir de dois ingredientes diferentes A e B, que têm que ser dissolvidos em água separadamente antes que eles interajam para formar o referido produto.
Suponha que a solução contendo A a 2,8 g/cm³ combinada com a solução contendo B a 1,5 g/cm³ produza 23 g do produto químico. Se a proporção de A e B nestas soluções for alterada para 3,2 g/cm³ e 4,5 g/cm³, respectivamente, então são produzidas 43 g do produto químico. Quais serão os volumes (em centímetros cúbicos) das soluções contendo A e B?

Fonte: produção escrita do estudante E15.

O estudante E16 obteve a formulação do problema adequadamente e utilizou o método da adição para a resolução do sistema linear, porém, cometeu um erro nos cálculos para a obtenção do valor de “A”, o que resultou em um valor inadequado também para “B” (Figura 69).

Figura 69 – Resolução do estudante E16 – Questão 16

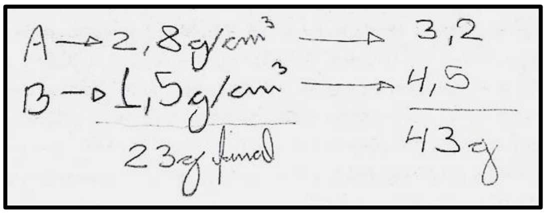


16. Considere um produto químico produzido a partir de dois ingredientes diferentes A e B, que têm que ser dissolvidos em água separadamente antes que eles interajam para formar o referido produto.
Suponha que a solução contendo A a 2,8 g/cm³ combinada com a solução contendo B a 1,5 g/cm³ produza 23 g do produto químico. Se a proporção de A e B nestas soluções for alterada para 3,2 g/cm³ e 4,5 g/cm³, respectivamente, então são produzidas 43 g do produto químico. Quais serão os volumes (em centímetros cúbicos) das soluções contendo A e B?

Fonte: produção escrita do estudante E16.

Por fim, o estudante E25 esboçou uma organização adequada dos dados do problema para a obtenção do sistema linear correspondente, no entanto, não equacionou os dados, como pode ser observado na Figura 70.

Figura 70 – Resolução do estudante E25 – Questão 16



Fonte: produção escrita do estudante E25.

Sendo assim, de acordo com o Quadro 3, inferimos que os processos do PMA mobilizados nas resoluções apresentadas foram:

- intuição, pois, os quatro estudantes intuíram e associaram conceitos diversos, como o de proporcionalidade, para resolver o problema proposto;

- visualização, pois, os estudantes E2, E5 e E25 externalizaram por meio de esboços ou esquemas alguma imagem mental para explorar a situação proposta;

- representação mental, pois, os quatro estudantes associaram a situação matemática proposta com operações algébricas ou aritméticas e métodos de resolução; e

- modelação, pois, o estudante E16 modelou, a partir dos dados do enunciado, um Sistema de Equações Lineares para estudar o problema.

Como observado anteriormente, parte dos estudantes demonstra conhecimentos em relação à resolução e à representação algébrica de Sistemas Lineares 2x2. No entanto, quando tais sistemas são explorados por meio de outras representações, graficamente ou em linguagem natural, evidenciaram dificuldades em trabalhar com essas representações ou em traduzir essas para outras representações.

Questão 17

A Questão 17 apresenta quatro resoluções diferentes para uma equação matricial e pede para que o estudante comente cada uma delas. Essa questão foi resolvida apenas pelo estudante E2, que demonstrou dificuldades com a compreensão do conceito de matriz identidade (ao julgar incorreta a substituição de $A^{-1} \cdot A$ por I na equação) e com o conceito de matriz inversa (ao considerar $A^{-1} = -A$), como pode ser observado na resolução da Figura 71.

Figura 71 – Resolução do estudante E2 – Questão 17

17. Comente cada uma das resoluções, apresentadas por quatro alunos distintos, para a questão:

Sejam A, B e X matrizes tais que $A \cdot X = B$. Determine a matriz X.

Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4
$A \cdot X = B$ $X = \frac{B}{A}$	$A \cdot X = B$ $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$ $\cancel{I \cdot X = A^{-1} \cdot B}$ $X = A^{-1} \cdot B$	$A \cdot X = B$ $X = A^{-1} \cdot B$ $X = -A \cdot B$	$A \cdot X = B$ $A \cdot X \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$ $X \cdot \cancel{I} = B \cdot A^{-1}$ $X = B \cdot A^{-1}$

não divide matriz

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ acho que não está certo devido ao I

acho que está certo

acho que não está certo devido ao I

Fonte: produção escrita do estudante E2.

Desta forma, de acordo com o Quadro 3, identificamos na resolução do estudante a mobilização dos processos:

- representação simbólica, pois, o estudante demonstra compreender o significado de notações utilizadas para operações entre matrizes;

- intuição, pois, utiliza conhecimentos matemáticos prévios para examinar situações matemáticas desconhecidas;

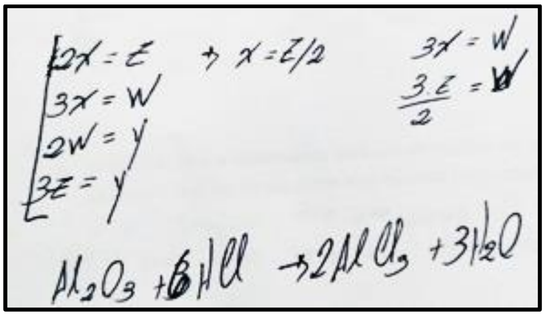
- analogia, pois, aborda situações matemáticas semelhantes, no caso, as resoluções "Aluno 2" e "Aluno 4", de forma análoga; e

- síntese, pois, ao argumentar sobre a impossibilidade de se realizar a operação de divisão entre matrizes para qualquer matriz dada, o estudante estabelece relações entre propriedades e o conceito de matriz.

Questão 18

A Questão 18, que propunha a modelagem e resolução de um problema envolvendo balanceamento de reações químicas, foi resolvida por oito estudantes (E2, E3, E7, E9, E11, E15, E16 e E25). Dentre esses, nenhum respondeu afirmativamente ao item *a*, o qual questionava a capacidade do estudante de resolver o problema utilizando Sistemas de Equações Lineares. No entanto, o estudante E9, mesmo afirmando não se lembrar de como resolver o problema por meio de Sistemas Lineares, obteve os coeficientes estequiométricos da equação química (item *b* da questão) por esse método, como pode ser observado na resolução do estudante (Figura 72).

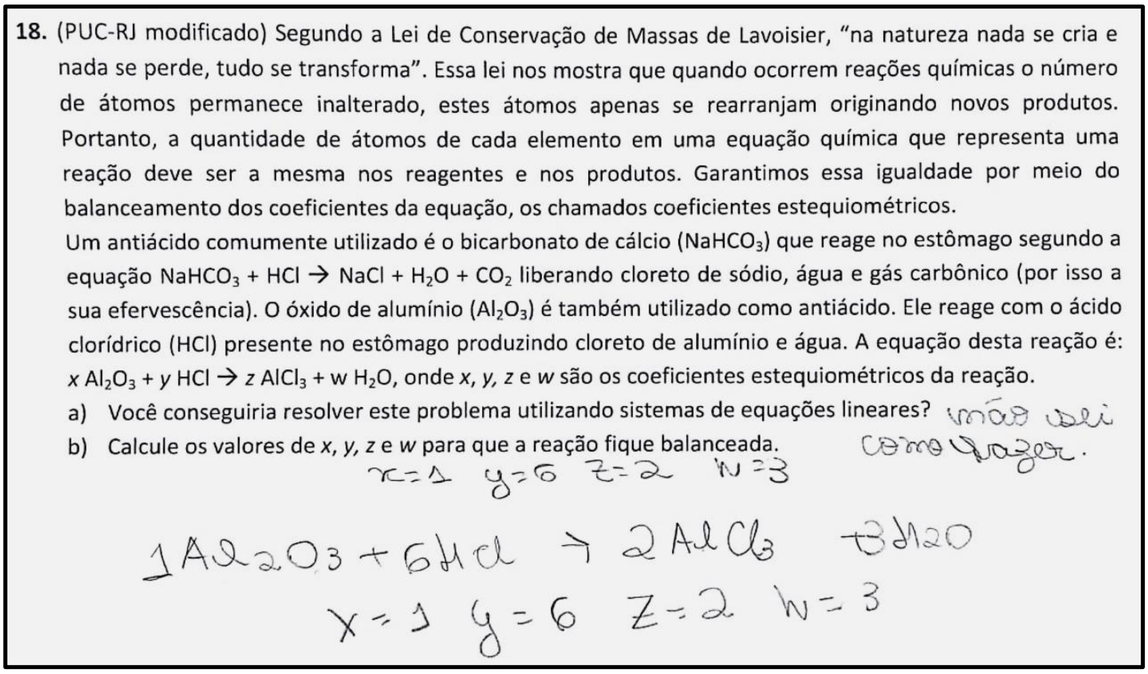
Figura 72 – Resolução do estudante E9 – Questão 18



Fonte: produção escrita do estudante E9.

Os estudantes E2 e E11, no item *b* da questão, obtiveram coeficientes estequiométricos que balanceiam a equação (Figura 73). No entanto, não exibiram o método utilizado, possivelmente utilizaram o método da “tentativa e erro” comumente aprendido na disciplina de Química, no Ensino Médio.

Figura 73 – Resolução do estudante E2 – Questão 18



18. (PUC-RJ modificado) Segundo a Lei de Conservação de Massas de Lavoisier, “na natureza nada se cria e nada se perde, tudo se transforma”. Essa lei nos mostra que quando ocorrem reações químicas o número de átomos permanece inalterado, estes átomos apenas se rearranjam originando novos produtos. Portanto, a quantidade de átomos de cada elemento em uma equação química que representa uma reação deve ser a mesma nos reagentes e nos produtos. Garantimos essa igualdade por meio do balanceamento dos coeficientes da equação, os chamados coeficientes estequiométricos.
Um antiácido comumente utilizado é o bicarbonato de cálcio ($NaHCO_3$) que reage no estômago segundo a equação $NaHCO_3 + HCl \rightarrow NaCl + H_2O + CO_2$ liberando cloreto de sódio, água e gás carbônico (por isso a sua efervescência). O óxido de alumínio (Al_2O_3) é também utilizado como antiácido. Ele reage com o ácido clorídrico (HCl) presente no estômago produzindo cloreto de alumínio e água. A equação desta reação é: $x\,Al_2O_3 + y\,HCl \rightarrow z\,AlCl_3 + w\,H_2O$, onde *x, y, z* e *w* são os coeficientes estequiométricos da reação.

a) Você conseguiria resolver este problema utilizando sistemas de equações lineares? não sei como fazer.

b) Calcule os valores de *x, y, z* e *w* para que a reação fique balanceada.

$x=1 \quad y=6 \quad z=2 \quad w=3$

$1Al_2O_3 + 6HCl \rightarrow 2AlCl_3 + 3H_2O$

$x=1 \quad y=6 \quad z=2 \quad w=3$

Fonte: produção escrita do estudante E2.

Os estudantes E7, E15 e E16 não obtiveram os valores corretos para os coeficientes estequiométricos, e ainda, o estudante E16 tentou resolver o problema igualando cada membro da equação a zero, não concluindo o problema.

Por fim, os estudantes E3 e E25 responderam ao item *b* da questão com os comentários “não sei resolver, mas já vi essa matéria” e “não me lembro”, respectivamente.

Sendo assim, na análise da Questão 18, identificamos indícios de processos do PMA nas resoluções dos estudantes E2, E7, E9, E11, E15 e E16, a saber, os processos de:

- representação simbólica, pois, compreenderam o significado de símbolos ou notações matemáticas na representação de uma situação matemática;

- representação mental, pois, associaram objetos matemáticos com operações algébricas ou aritméticas e, em alguns casos, com métodos de resolução;

- visualização, pois, geraram esboços ou esquemas para representar, compreender e explorar o problema.

- intuição, pois, intuíram e associaram conceitos matemáticos (e não matemáticos, no caso dos elementos químicos e reações) para a resolução de problemas matemáticos; e

- modelação, pois, no caso do estudante E9, adequou os dados do enunciado do problema para estudar o balanceamento da reação química.

No Quadro 4 apresentamos uma síntese dos processos identificados nas resoluções dos estudantes para as oito questões da Seção 3 da avaliação diagnóstica, aplicada durante o primeiro episódio de ensino.

Quadro 4 – Síntese das análises do Episódio 1.

Questão	Resoluções adequadas/ corretas	Resoluções parcialmente corretas	Resoluções inadequadas/ incorretas	Em branco	Processos do PMA evidenciados
8	-	-	**E14** e **E25**	E2, E3, E5, E7, E9, E11, E15, E16 e E21	Intuição e Representação simbólica
12	**E2**, **E11**, **E14** e **E16**	-	**E7**, **E15** e **E25**	E3, E5, E9, E21	Representação simbólica, Representação mental, Visualização e Intuição
13	**E9** e **E14**	-	**E2**	E3, E5, E7, E11, E15, E16, E21 e E25	Representação simbólica, Representação mental, Intuição, Mudança de representação e tradução
14	**E2**	**E7**, **E9**, **E16** e **E25**	-	E3, E5, E11, E14, E15 e E21	Representação simbólica, Representação mental e Intuição
15	-	-	**E9** e **E25**	E2, E3, E5, E7, E11, E14, E15, E16 e E21	Representação simbólica, Representação mental, Intuição, e Mudança de representação e tradução
16	-	**E16** e **E25**	**E2** e **E15**	E3, E5, E7, E9, E11, E14 e E21	Representação mental, Visualização, Intuição e Modelação
17	-	**E2**	-	E3, E5, E7, E9, E11, E14, E15, E16, E21 e E25	Representação simbólica, Intuição, Analogia e Síntese
18	**E9**	**E2** e **E11**	E3, **E7**, **E15**, **E16** e E25	E5, E14 e E21	Representação simbólica, Representação mental, Visualização, Intuição e Modelação

Fonte: autoria própria.

Como discutido na Seção 4.1.3, devido à grande quantidade de questões não respondidas, pouco pudemos inferir sobre os processos mentais desenvolvidos pela turma, como um todo, durante a resolução da prova escrita. Quanto aos processos do PMA, encontramos indícios de oito, dentre os nove processos discutidos nesse estudo, sendo eles: a visualização, a intuição, a representação simbólica, a representação mental, a modelação, a mudança de representação e tradução, a analogia e a síntese.

Ao mobilizarem tais processos, esses estudantes demonstraram possuir um dos pré-requisitos para que desenvolvam o processo de abstração (DREYFUS, 2002). No entanto, o estudante E2 foi o único que mobilizou, nesse episódio, os processos de analogia e síntese, relacionados à abstração.

Destacamos que não encontramos indícios do processo de generalização na produção escrita dos estudantes para esse primeiro episódio, o que indica a necessidade de enfatizarmos o desenvolvimento desse processo nas tarefas dos próximos episódios.

Como pode ser observado no Quadro 4, apenas os estudantes E2, E9, E14 e E25 mobilizaram o processo de mudança de representação e tradução. Dessa forma, ressaltamos a importância de oportunizar aos estudantes a exploração de tarefas que envolvam diferentes tipos de representações para um mesmo conceito, bem como a transição de uma para a outra.

Concluímos a análise desse episódio constatando que as resoluções apresentadas (ou até mesmo as não realizadas) pelos estudantes, em sua maioria, refletem uma aquisição de conhecimentos de forma fragmentada, sem estabelecer relações entre as diferentes representações de um mesmo conceito, ou ainda, priorizando a memorização de técnicas e algoritmos que se tornam sem significado diante de diferentes situações-problema.

5.2 EPISÓDIO 2

Durante o segundo episódio de ensino ocorreu a resolução da tarefa 1 (Apêndice D). Os conteúdos abordados nesse episódio foram: definição e conceitos relacionados a matrizes e operações com matrizes.

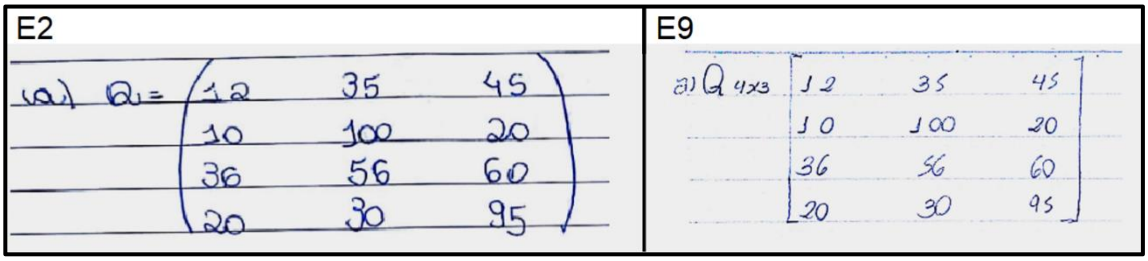
As dez questões que compõem a tarefa desenvolvem-se de modo sequencial, tendo como pano de fundo um contexto de semi-realidade (PONTE, 2005). Por meio dessas, buscou-se resgatar conceitos relacionados a matrizes, bem como o próprio conceito de matriz, que possivelmente já foram estudados pelos participantes durante o Ensino Médio.

A seguir, buscaremos identificar nas resoluções dos estudantes indícios de processos do PMA, segundo os autores Dreyfus e Eisenberg (1996) e Dreyfus (2002).

Questão A

A primeira questão da tarefa propunha representar os dados da tabela fornecida por meio de uma matriz. Essa questão foi resolvida adequadamente por nove (E2, E7, E9, E11, E14, E15, E16, E21 e E25) dos onze estudantes participantes. A Figura 74 exibe algumas das resoluções consideradas adequadas para a questão.

Figura 74 – Resoluções dos estudantes E2 e E9 – Questão A



Fonte: produção escrita dos estudantes E2 e E9.

Dois estudantes, a saber E3 e E5, não utilizaram a notação apropriada para representar a matriz, usando chaves ao invés de parênteses ou colchetes. Suas resoluções foram classificadas como parcialmente adequadas.

Inferimos que os processos do PMA mobilizados na resolução dessa questão foram:

- intuição, pois, os estudantes utilizaram seus conhecimentos matemáticos prévios a respeito de tabelas e matrizes para examinar a questão;

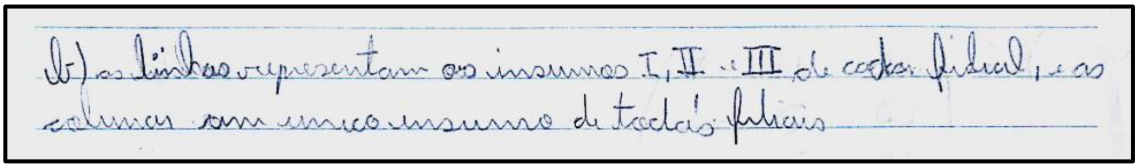
- representação simbólica, visto que os estudantes explicitaram por meio de símbolos seus entendimentos a respeito do significado atribuído a Matrizes; e

- mudança de representação e tradução, ao transitarem entre a representação tabular e a representação matricial para representar os dados do enunciado.

Questão B

A Questão B questionava o que representam as linhas e as colunas, com relação ao contexto apresentado, da matriz obtida na Questão A. Essa questão foi resolvida adequadamente e sem dificuldades por dez estudantes (E2, E3, E5, E7, E9, E11, E14, E16, E21 e E25). Apresentamos na Figura 75 uma das resoluções consideradas adequadas para a questão.

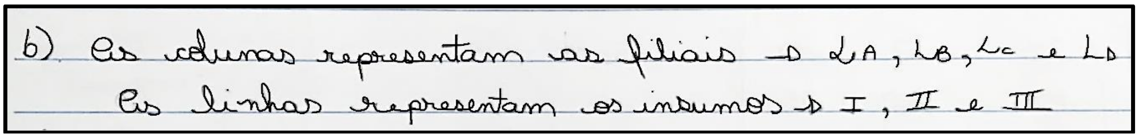
Figura 75 – Resolução do estudante E25[67] – Questão B


b) as linhas representam os insumos I, II e III de cada filial, e as colunas um único insumo de todas filiais

Fonte: produção escrita do estudante E25.

Porém, um estudante (E15) confundiu os termos “linha” e “coluna”, como exibido na Figura 76. Tal resolução foi classificada como inadequada para a questão.

Figura 76 – Resolução do estudante E15 – Questão B


b) As colunas representam as filiais → L_A, L_B, L_C e L_D
As linhas representam os insumos → I, II e III

Fonte: produção escrita do estudante E15.

A resolução de tal questão envolvia o reconhecimento de notações simbólicas, seu propósito era de que os estudantes interpretassem matematicamente o contexto da situação-problema, relacionando-a com a representação matricial. Dessa forma, entendemos que os processos mobilizados nas resoluções apresentadas foram:

[67] Transcrição da resolução do estudante: “as linhas representam os insumos I, II e III, de cada filial, e as colunas um único insumo de todas filiais”.

- intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos prévios para examinar a situação matemática; e

- representação simbólica, na compreensão do significado da notação matemática utilizada para a interpretação da situação proposta.

Questões C e D

As Questões C e D, que propunham a identificação de alguns elementos da matriz, foram resolvidas adequadamente por cinco estudantes, E3, E7, E9, E11 e E16, como exibido na resolução da Figura 77.

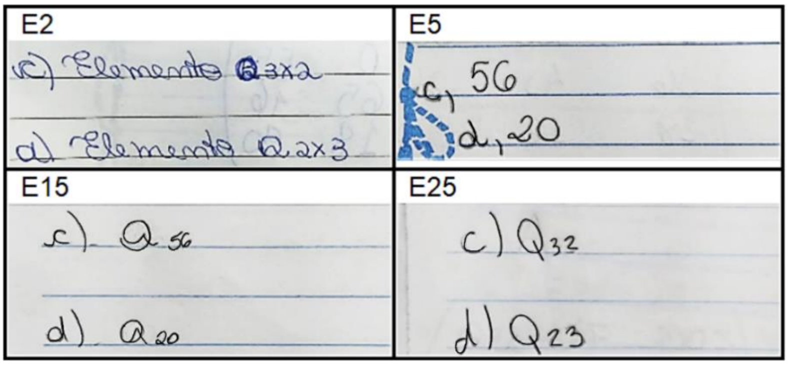
Figura 77 – Resolução do estudante E3 – Questões C e D

Fonte: produção escrita do estudante E3.

Observamos ainda, na resolução dos estudantes E3 e E16, a troca da letra “q” utilizada na matriz da Questão A pela letra “a” para indicar elementos da matriz Q, apesar dessa confusão os índices foram utilizados adequadamente.

Seis estudantes, E2, E5, E14, E15, E21 e E25, identificaram os elementos da matriz adequadamente, possivelmente orientando-se pelo contexto do problema, porém, não utilizaram a notação matemática de forma adequada para representá-los. Na Figura 78, exibimos quatro dessas resoluções, as outras duas eram semelhantes às apresentadas.

Figura 78 – Resoluções dos estudantes E2, E5, E15 e E25 – Questões C e D



Fonte: produção escrita dos estudantes E2, E5, E15 e E25.

Podemos observar que esses estudantes recordaram algo sobre as notações utilizadas no estudo das matrizes. Porém, não souberam diferenciar a notação utilizada para a representação de uma matriz da utilizada para representar os elementos dessa matriz.

Essa dificuldade pode ocasionar outras na compreensão do conteúdo, como pode ser observado no caso do estudante E15, que ao confundir linha e coluna na Questão B (Figura 76), não soube indicar a posição dos elementos da matriz, indicando apenas o próprio elemento (Figura 78).

Inferimos que os processos mobilizados pelos estudantes em suas resoluções para a questão foram:

- intuição, pois, examinaram a situação proposta utilizando seus conhecimentos prévios a respeito de matrizes.

- representação simbólica, pois, utilizaram a notação matricial para indicar os elementos segundo a linha e a coluna as quais pertenciam na matriz.

Questão E

A Questão E da tarefa, assim como a Questão A, propunha representar os dados de uma tabela fornecida por meio de uma matriz. Essa foi resolvida adequadamente por oito dos estudantes (E2, E7, E9, E11, E14, E16, E21 e E25); os outros três, a saber E3, E5 e E15, não utilizaram a notação apropriada para representar a matriz. No caso de E15, cabe salientar que esse havia representado a matriz adequadamente na primeira questão. Porém, nessa, passa a usar barras verticais no lugar dos colchetes.

Consideramos, de acordo com o Quadro 3, que os estudantes que resolveram essa questão, ainda que com alguns equívocos, mobilizaram os processos:

- intuição, pois, os estudantes utilizaram seus conhecimentos matemáticos prévios a respeito de tabelas e matrizes para examinar a questão;

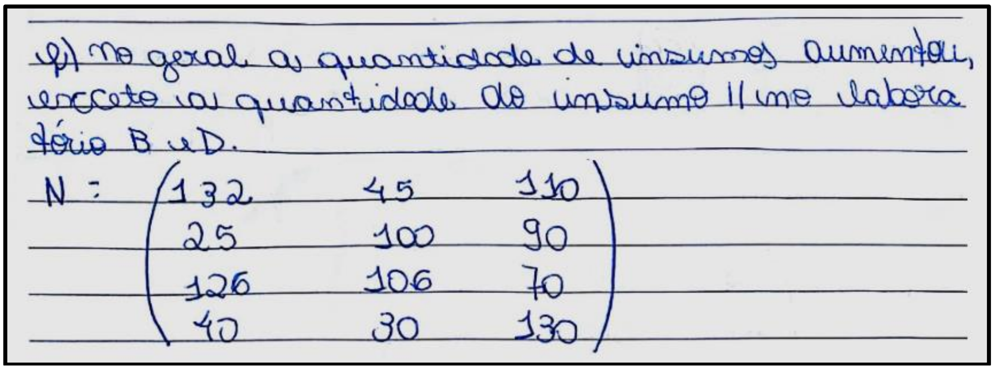
- representação simbólica, visto que os estudantes explicitaram por meio de símbolos seus entendimentos a respeito do significado atribuído a Matrizes; e

- mudança de representação e tradução, ao transitarem entre a representação tabular e a representação matricial para representar os dados do enunciado.

Questão F

A Questão F apresentava uma situação em que as matrizes das Questões A e E deveriam ser operadas para fornecer a quantidade de cada tipo de insumo em cada laboratório, e ainda questionava o que significava essa operação. Tal operação tratava-se da adição das matrizes, que foi identificada e realizada adequadamente por oito estudantes, E2 (Figura 79), E3, E7, E9, E11, E14, E16 e E25. Já os estudantes E5 e E21 somaram as duas matrizes corretamente, porém, sem justificar sua resolução. Portanto, classificamos suas resoluções como parcialmente corretas.

Figura 79 – Resolução do estudante E2 – Questão F

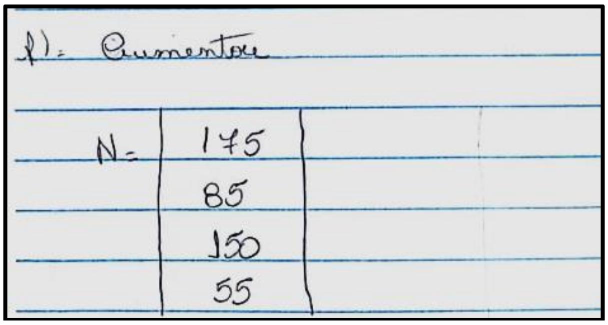

f) no geral a quantidade de insumos aumentou, exceto a quantidade do insumo II no laboratório B e D.

$$N = \begin{pmatrix} 132 & 45 & 110 \\ 25 & 100 & 90 \\ 126 & 106 & 70 \\ 40 & 30 & 130 \end{pmatrix}$$

Fonte: produção escrita do estudante E2.

Por fim, o estudante E15 justificou o "aumento" dos valores dos insumos, porém, desconsiderou a segunda matriz com as quantidades de cada insumo somando apenas as colunas da matriz inicial, e não utilizou a notação matemática adequada para representar a matriz obtida (Figura 80), apresentando uma resolução inadequada para a questão.

Figura 80 – Resolução do estudante E15 – Questão F



Fonte: produção escrita do estudante E15.

Interpretamos que os estudantes apresentaram em suas resoluções indícios dos processos de:

- intuição, pois, utilizaram conhecimentos matemáticos prévios a respeito da adição e de matrizes para examinar e resolver a questão;

- representação simbólica, pois, representaram a soma obtida utilizando notações matemáticas; e

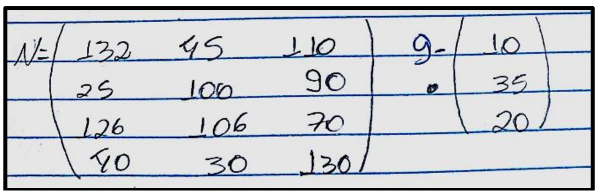
- representação mental, ao associarem a operação de adição ao conceito de matrizes.

Questão G

Essa questão solicitava que o estudante representasse os valores unitários dos três insumos apresentados no problema por meio de uma matriz. Essa matriz, na questão seguinte, deveria ser multiplicada pela matriz das quantidades de insumos de cada laboratório, sendo assim, deveria ser de ordem 3x1, uma matriz coluna.

O estudante E21 (Figura 81) resolveu a questão adequadamente, enquanto o estudante E2 inverteu a ordem da matriz, apresentando uma solução parcialmente correta.

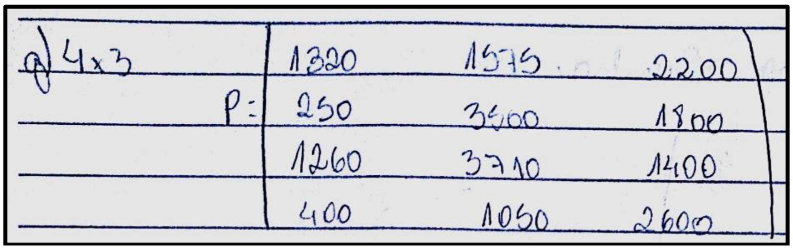
Figura 81 – Resolução do estudante E21 – Questão G



Fonte: produção escrita do estudante E21.

Quanto aos demais estudantes, todos apresentaram como solução uma matriz 4x3, a qual representava os preços multiplicados por cada uma das quantidades, como pode ser observado na Figura 82, diferentemente do que foi solicitado na questão. Tais resoluções foram classificadas como inadequadas.

Figura 82 – Resolução do estudante E11 – Questão G



a) 4x3	1320	1575	2200
P:	250	3500	1800
	1260	3710	1400
	400	1050	2600

Fonte: produção escrita do estudante E11.

Inferimos que, nessa questão, todos os estudantes mobilizaram em suas resoluções os processos de:

- intuição, pois, intuíram e associaram conceitos para a resolução da situação-problema;

- representação mental, pois, associaram por meio da operação de multiplicação os valores unitários dos insumos com as respectivas quantidades; e

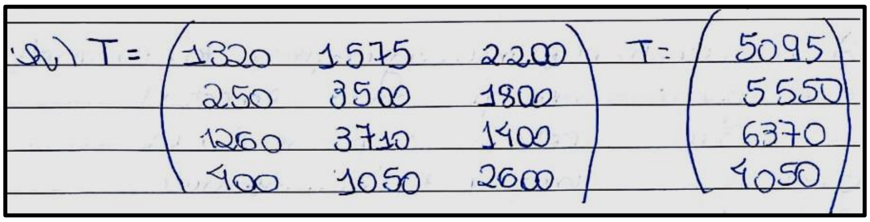
- visualização, pois, geraram uma imagem mental da situação matemática proposta e a externalizaram por meio de esboços ou esquemas utilizados para explorar a questão.

Os erros cometidos nessa questão podem ter sido ocasionados por interpretações equivocadas do enunciado, pois, como as questões se desenvolvem dando continuidade uma à outra, é possível que alguns estudantes tenham relacionado a questão anterior com a atual e já tenham efetuado as multiplicações dos valores pelas quantidades, porém, não encontramos evidências desse tipo de raciocínio.

Questão H

A Questão H propunha o cálculo do valor total de insumos em cada laboratório, os estudantes E2, E3, E5, E7, E9, E11, E16, E21 e E25 obtiveram adequadamente uma matriz 4x1 em suas resoluções, construindo previamente uma matriz 4x3 com as multiplicações individuais de cada quantidade pelo seu respectivo preço, como pode ser observado na resolução do estudante E2 (Figura 83).

Figura 83 – Resolução do estudante E2 – Questão H



Fonte: produção escrita do estudante E2.

Os estudantes E14 e E15 apresentaram resoluções inadequadas para o problema, sendo que E14 obteve o total da quantidade de insumos por laboratório, e não o valor desses, como solicitado no enunciado. Enquanto E15 obteve os valores de cada insumo para todos os laboratórios, apresentando uma matriz 3x1.

Inferimos, de acordo com o Quadro 3, que os processos do PMA mobilizados pelos estudantes na resolução dessa questão foram:

- intuição, pois, associaram conhecimentos matemáticos prévios para examinar a situação matemática;

- visualização, pois, externalizaram por meio de esquemas, utilizados para representar a operação de multiplicação, a imagem mental gerada do conceito de multiplicação de matrizes; e

- representação mental, associaram o conceito de matriz à operação de multiplicação para a resolução da questão.

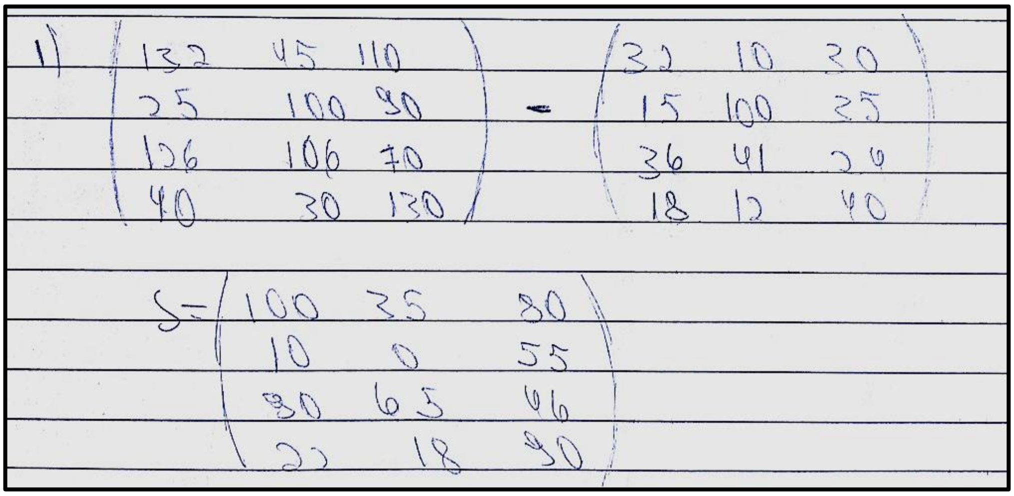
Cabe salientar que em nenhuma das resoluções observamos indícios do uso do algoritmo de multiplicação de Matrizes.

Questão I

A Questão I abordava o cálculo do consumo de cada insumo, para cada laboratório, que poderia ser realizado por meio da subtração de duas matrizes.

Todos os estudantes apresentaram uma solução adequada para essa questão. Percebemos, nas resoluções dos estudantes, indícios de que esses relacionaram o enunciado com a operação de subtração de Matrizes, como pode ser observado na resolução da Figura 84.

Figura 84 – Resolução do estudante E7 – Questão I



Fonte: produção escrita do estudante E7.

Portanto, entendemos que na resolução dessa questão, assim como na questão anterior, os processos do PMA mobilizados foram:

- intuição, pois, associaram conhecimentos matemáticos prévios para examinar a situação matemática;

- visualização, pois, externalizaram por meio de esquemas, utilizados para representar a operação de subtração, a imagem mental gerada do conceito de subtração de matrizes; e

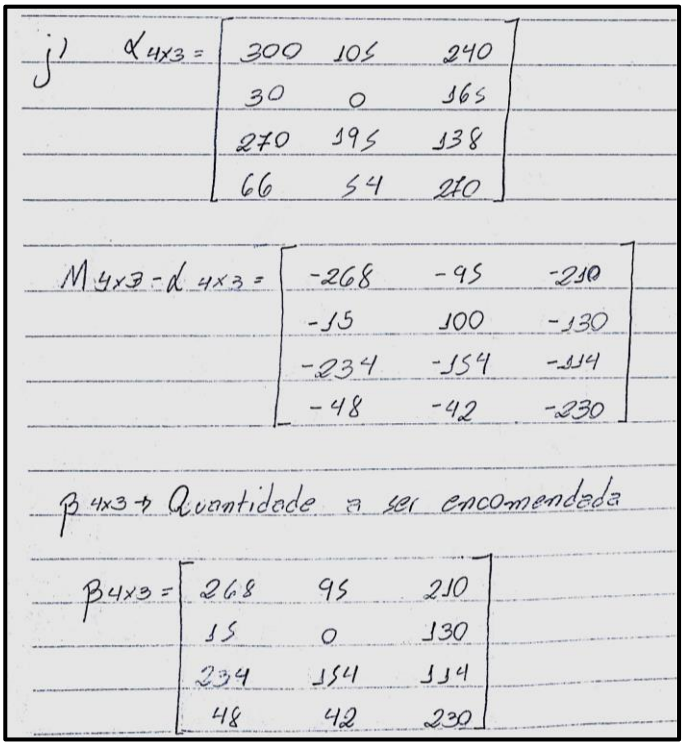
- representação mental, pois, associaram o conceito de matriz à operação de subtração para a resolução da questão.

Questão J

A Questão J propunha o cálculo da quantidade de insumos que deveria ser encomendada para que não ocorresse a falta desses nos laboratórios, considerando que o consumo triplicaria no semestre seguinte. Dessa forma, o estudante deveria multiplicar por três a matriz que representa o consumo desses laboratórios e subtrair pela matriz que representa a quantidade atual de insumos.

Tal questão foi resolvida adequadamente pelos estudantes: E2, E3, E9, E11, E14 e E16, que interpretaram o enunciado e efetuaram as operações adequadamente, verificando a solução obtida para apresentar a solução do problema, como pode ser observado na resolução da Figura 85.

Figura 85 – Resolução do estudante E9 – Questão J

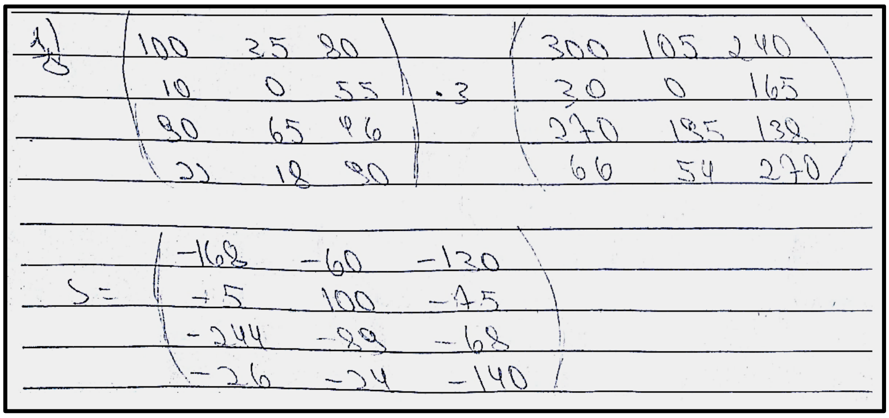


Fonte: produção escrita do estudante E9.

Já as resoluções dos estudantes E5, E7, E21 e E25 foram consideradas parcialmente adequadas, pois, esses efetuaram corretamente apenas a multiplicação da matriz pelo escalar, não interpretando a resolução para a conclusão.

Um exemplo desse tipo de resolução foi a do estudante E7 (Figura 86), que realizou a multiplicação da matriz do consumo adequadamente, mas não subtraiu da matriz que representava as quantidades atuais dos insumos, nem verificou sua resolução para a construção da resposta.

Figura 86 – Resolução do estudante E7 – Questão J



Fonte: produção escrita do estudante E7.

Por fim, a resolução apresentada pelo estudante E15 foi considerada inadequada, pois, ele não identificou quais eram as Matrizes e as operações que deveriam ser utilizadas segundo o enunciado da questão, realizando apenas um esboço com alguns valores.

Inferimos que os estudantes que apresentaram resoluções adequadas ou parcialmente adequadas mobilizaram os processos:

- intuição, pois, utilizaram conhecimentos matemáticos prévios para examinar a situação matemática;

- visualização, pois, externalizaram por meio de esquemas a imagem mental gerada do conceito de multiplicação escalar e subtração de matrizes; e

- representação mental, associaram o conceito de matriz às operações de multiplicação e subtração para a resolução da questão.

No Quadro 5 trazemos uma síntese das resoluções e dos processos do PMA mobilizados pelos estudantes na Tarefa 1.

Quadro 5 – Síntese das análises do Episódio 2.

Questão	Resoluções adequadas/ corretas	Resoluções parcialmente corretas	Resoluções inadequadas/ incorretas	Em branco	Processos do PMA evidenciados
A	**E2**, **E7**, **E9**, **E11**, **E14**, **E15**, **E16**, **E21** e **E25**	**E3** e **E5**	-	-	Representação simbólica, Intuição e Mudança de representação e tradução
B	**E2**, **E3**, **E5**, **E7**, **E9**, **E11**, **E14**, **E16**, **E21** e **E25**	-	**E15**	-	Representação simbólica e Intuição.
C	**E3**, **E7**, **E9**, **E11** e **E16**	**E2, E5, E14, E15, E21** e **E25**	-	-	Representação simbólica e Intuição.
D	**E3**, **E7**, **E9**, **E11** e **E16**	**E2, E5, E14, E15, E21** e **E25**	-	-	Representação simbólica e Intuição.
E	**E2**, **E7**, **E9**, **E11**, **E14**, **E16**, **E21** e **E25**	**E3, E5** e **E15**	-	-	Representação simbólica, Intuição e Mudança de representação e tradução
F	**E2**, **E3**, **E7**, **E9**, **E11**, **E14**, **E16** e **E25**	**E5** e **E21**	**E15**	-	Representação simbólica, Representação mental e Intuição
G	**E21**	**E2**	**E3**, **E5**, **E7**, **E9**, **E11**, **E14**, **E15**, **E16** e **E25**	-	Representação mental, Intuição e Visualização
H	**E2**, **E3**, **E5**, **E7**, **E9**, **E11**, **E16**, **E21** e **E25**	-	**E14** e **E15**	-	Representação mental, Intuição e Visualização
I	**Todas**	-	-	-	Representação mental, Intuição e Visualização
J	**E2**, **E3**, **E9**, **E11**, **E14**, e **E16**	**E5**, **E7**, **E21** e **E25**	E15	-	Representação mental, Intuição e Visualização

Fonte: autoria própria.

Como previsto na construção da Tarefa 1 (Seção 4.1.4), as questões exploradas nesse episódio de ensino proporcionaram aos estudantes o resgate de noções relacionadas ao conceito de matriz, como o uso da notação, os tipos de Matrizes e suas representações, e as operações entre Matrizes.

Por se tratar de uma tarefa introdutória e que abordou conceitos previstos para o Ensino Médio, e também possivelmente devido à distribuição das duplas – realizada previamente pela professora-pesquisadora, considerando os resultados da avaliação diagnóstica – todas as questões foram resolvidas por todos os estudantes, demonstrando que possuíam algum conhecimento prévio a respeito dos conceitos explorados e, ainda, que o trabalho em grupos contribuiu para as discussões e reflexões a respeito do conteúdo.

As resoluções apresentadas pelos estudantes para a Questão G corroboram com dificuldades relatadas por Kato e Oliveira (2013) na compreensão de propriedades como a ordem de uma matriz e a determinação da condição para a multiplicação de duas Matrizes, já que a maioria dos estudantes não conseguiu construir nessa questão a matriz dos valores que deveria ser multiplicada pela matriz das quantidades.

Verificamos que os estudantes compreendem o conceito de multiplicação de Matrizes, porém, demonstram dificuldades na utilização e compreensão do algoritmo de multiplicação de Matrizes, pois, nenhuma das resoluções apresentadas para a Questão H, que abordava tal operação, estava incorreta. Além disso, não encontramos evidências do uso do algoritmo de multiplicação nas resoluções analisadas, já que o contexto da tarefa possibilitava, intencionalmente, a resolução da questão sem a utilização do algoritmo.

A dinâmica de sala de aula, que seguiu a abordagem do Ensino-Aprendizagem Exploratório, em princípio, causou estranheza e um pouco de insegurança aos estudantes durante a resolução dessa primeira tarefa. Acreditamos que esse comportamento pode ser justificado pela falta de experiência desses estudantes com esse tipo de metodologia durante a vida escolar, uma vez que eles não se mostravam confiantes em resolver as questões sem o auxílio da professora-pesquisadora para verificar os algoritmos e estratégias utilizadas.

Nesse sentido, as ações da professora-pesquisadora na direção de encorajar os estudantes, desafiá-los com perguntas e incentivar as discussões em grupo, visaram contribuir para o desenvolvimento de uma maior autonomia nos estudantes, tornando-os responsáveis por sua aprendizagem. Além disso, na fase de síntese das resoluções, ao final da aula, foi possível aprofundar as discussões e formalizações a respeito do conteúdo e das resoluções.

Quanto aos processos do PMA, encontramos indícios dos processos de visualização, intuição, representação simbólica, representação mental, e de mudança de representação e tradução – todos relacionados ao processo de representação – nas resoluções da maioria dos estudantes participantes.

Os processos de generalização e síntese, relacionados à abstração, não foram identificados nessa tarefa, porém, tal fato era esperado, visto que as questões não foram elaboradas com o objetivo de propiciar o desenvolvimento desses processos.

5.3 EPISÓDIOS 3 e 4

A resolução da tarefa 2 (Apêndice E) ocorreu durante o terceiro e o quarto episódios de ensino, devido a um replanejamento da aula, como mencionado na narrativa dos episódios (Seções 4.2.3 e 4.2.4). Desse modo, faremos a análise desses dois episódios em conjunto.

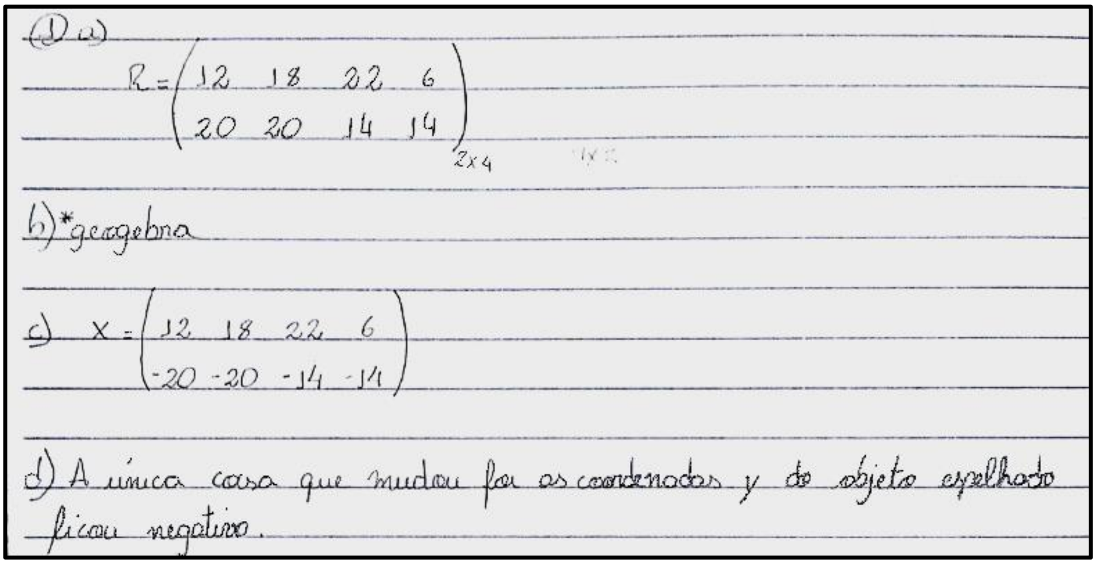
Os conteúdos abordados com as quatro questões que compõem a tarefa foram: tipos de matrizes, operações com matrizes e transformações no plano. Analisaremos a seguir cada uma das questões.

Questão 1

A Questão 1, composta por sete itens, abordava a reflexão de um polígono irregular em relação a cada um dos eixos coordenados, em relação à origem do sistema cartesiano e às retas $y = x$ e $y = -x$.

Os itens *a, b, c* e *d* propunham ao estudante uma sequência de passos para construir um polígono no GeoGebra, realizar a reflexão em relação ao eixo x e comparar a matriz dos vértices obtida com a matriz original do polígono, buscando um padrão entre elas com relação à mudança do sinal nas coordenadas em y. Esses itens foram resolvidos adequadamente por todos os onze estudantes, como pode ser observado, por exemplo, na resolução do estudante E14 (Figura 87).

Figura 87 – Resolução do estudante E14 – Questão 1 itens *a, b, c* e *d*



(1) a) $R = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 22 & 6 \\ 20 & 20 & 14 & 14 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$

b) *geogebra

c) $X = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 22 & 6 \\ -20 & -20 & -14 & -14 \end{pmatrix}$

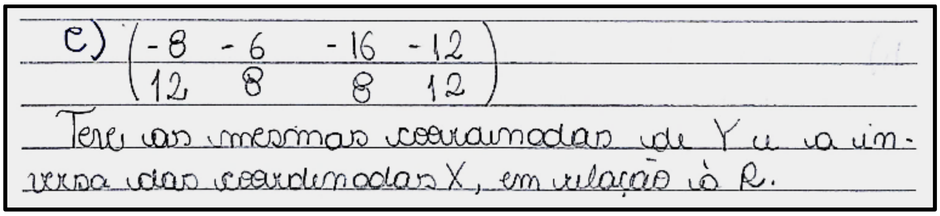
d) A única coisa que mudou foi as coordenadas y do objeto espelhado ficou negativo.

Fonte: produção escrita do estudante E14.

O item *e*, que propunha realizar os passos anteriores (itens *a, b, c* e *d*) para refletir o polígono em relação ao eixo coordenado y, foi resolvido por todos os estudantes. Porém, os estudantes E2, E5, E7 e E21 apresentaram resoluções parcialmente adequadas, uma vez que não relataram qual o padrão encontrado entre as matrizes.

Observamos na resolução do estudante E3 (Figura 88) que ele confundiu os termos “inverso” e “oposto”, o que aparentemente não o prejudicou na compreensão da matriz da reflexão, como pode ser observado posteriormente na resolução do item *g*.

Figura 88 – Resolução do estudante E3 – Questão 1 item *e*



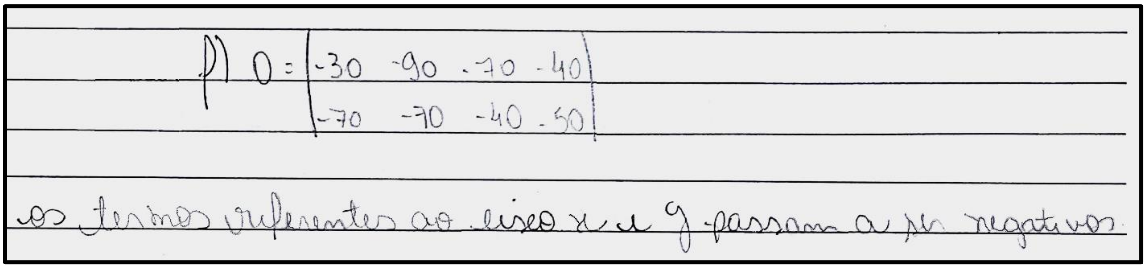
e) $\begin{pmatrix} -8 & -6 & -16 & -12 \\ 12 & 8 & 8 & 12 \end{pmatrix}$

Terei as mesmas coordenadas de Y e a inversa das coordenadas X, em relação à R.

Fonte: produção escrita do estudante E3.

O item *f*, que propunha refletir o polígono em relação à origem do sistema cartesiano e obter a matriz da reflexão, também foi realizado adequadamente por todos os estudantes, como pode ser observado, por exemplo, na resolução do estudante E11 (Figura 89).

Figura 89 – Resolução do estudante E11 – Questão 1 item *e*



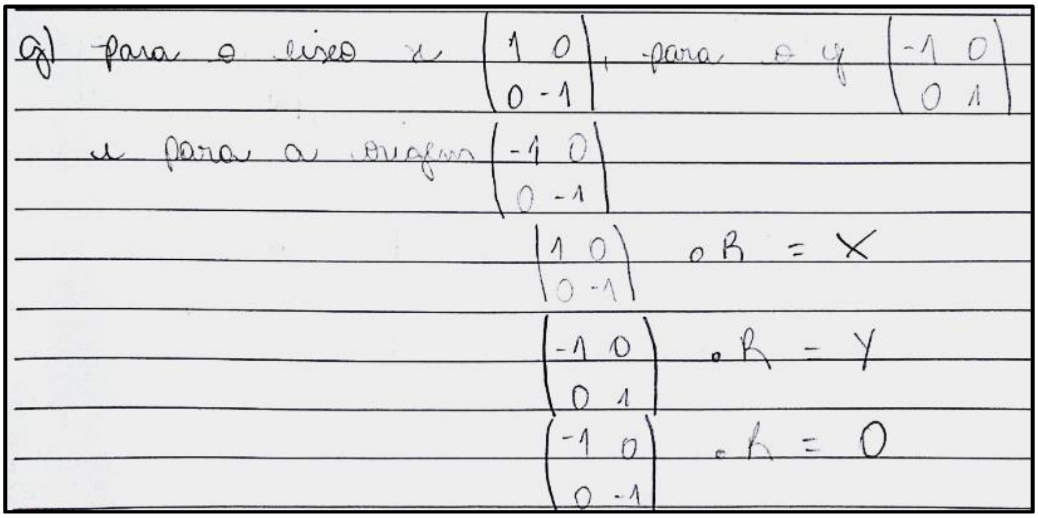
f) $O = \begin{vmatrix} -30 & -90 & -70 & -40 \\ -70 & -70 & -40 & -50 \end{vmatrix}$

os termos referentes ao eixo x e y passam a ser negativos.

Fonte: produção escrita do estudante E11.

No item *g*, analisando os três casos de reflexão anteriores, o estudante deveria obter uma operação entre matrizes que efetuasse cada uma das reflexões, para um polígono qualquer. Esse item foi resolvido adequadamente pelos estudantes E5, E7, E9, E11 e E25, os quais obtiveram uma matriz genérica que, multiplicada pela matriz dos vértices do polígono construído, realizasse a reflexão desejada. Na Figura 90 apresentamos uma dessas resoluções.

Figura 90 – Resolução do estudante E11 – Questão 1 item *g*



g) para o eixo x $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, para o y $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e para a origem $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot R = X$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot R = Y$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot R = O$

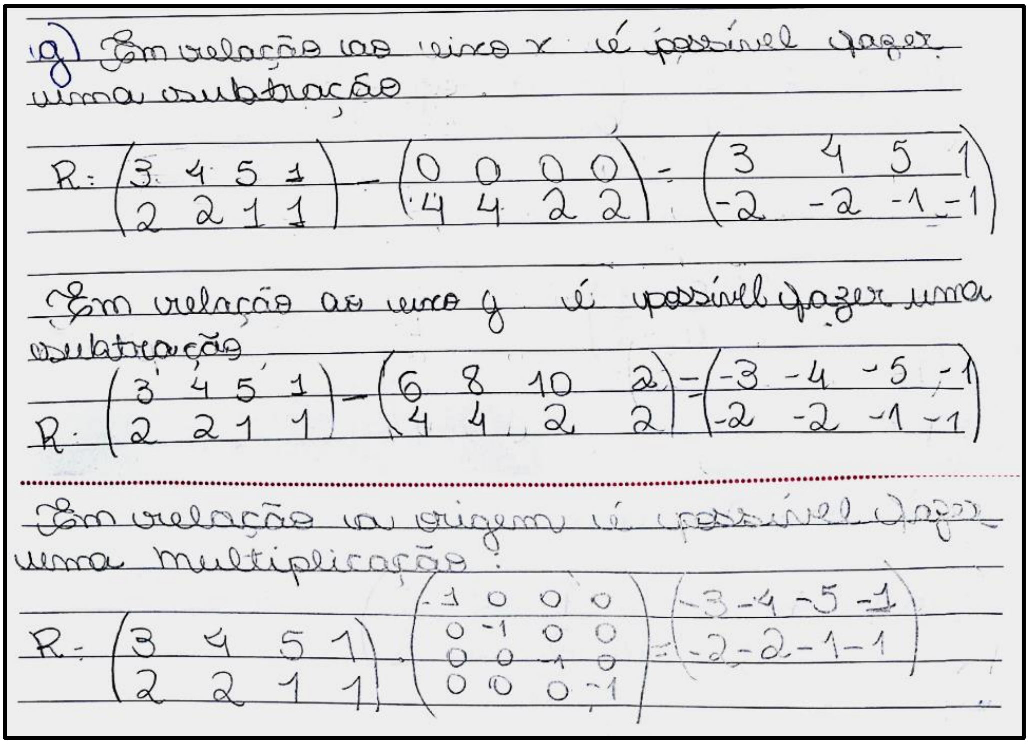
Fonte: produção escrita do estudante E11.

Os demais estudantes apresentaram resoluções parcialmente adequadas.

Desses, E2 e E3 tentaram obter as reflexões nos eixos x e y por meio da operação de subtração de matrizes, não encontrando um método genérico para essas reflexões. No entanto, ambos construíram adequadamente uma operação para a realização da reflexão de um polígono qualquer em relação à origem do sistema cartesiano.

Sendo que o estudante E2 utilizou a multiplicação de matrizes, como pode ser observado na Figura 91.

Figura 91 – Resolução do estudante E2 – Questão 1 item *g*



g) Em relação ao eixo x é possível fazer uma subtração

R: $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Em relação ao eixo y é possível fazer uma subtração

R: $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

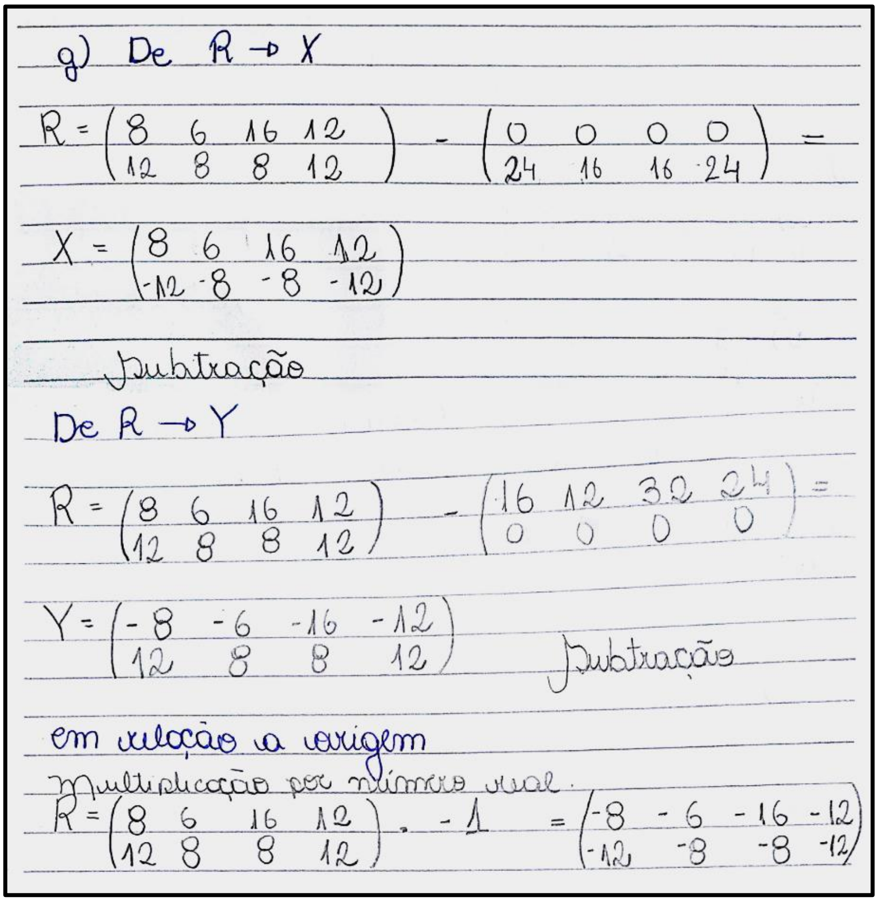
Em relação a origem é possível fazer uma multiplicação:

R: $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Fonte: produção escrita do estudante E2.

E o estudante E3 utilizou a multiplicação de uma matriz por um escalar, como pode ser observado na Figura 92.

Figura 92 – Resolução do estudante E3 – Questão 1 item *g*



g) De $R \to X$

$$R = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 16 & 12 \\ 12 & 8 & 8 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 24 & 16 & 16 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$X = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 16 & 12 \\ -12 & -8 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

Subtração

De $R \to Y$

$$R = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 16 & 12 \\ 12 & 8 & 8 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 12 & 32 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$Y = \begin{pmatrix} -8 & -6 & -16 & -12 \\ 12 & 8 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Subtração

em relação a origem

Multiplicação por número real.

$$R = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 16 & 12 \\ 12 & 8 & 8 & 12 \end{pmatrix} \cdot -1 = \begin{pmatrix} -8 & -6 & -16 & -12 \\ -12 & -8 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

Fonte: produção escrita do estudante E3.

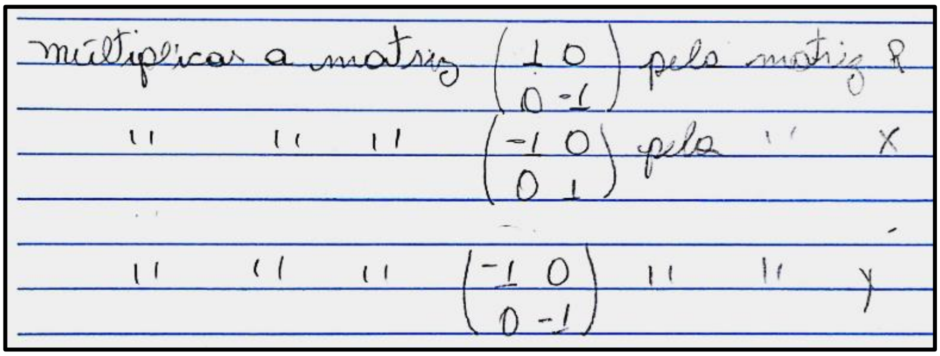
O estudante E16 utilizou a multiplicação de matrizes para tentar obter os três tipos de reflexão, porém, conseguiu obter apenas a matriz para a reflexão em relação à origem.

Em resumo, os estudantes E2, E3 e E16 conseguiram encontrar um método geral para realizar a reflexão em relação à origem apenas.

Já os estudantes E14 e E15 resolveram a questão parcialmente, apresentando uma operação genérica para a reflexão em relação ao eixo x apenas (E14), ou para a reflexão em relação aos eixos x e y apenas (E15).

E por fim, o estudante E21 obteve todas as matrizes da transformação em relação aos eixos x, y e à origem, porém, ao elaborar a resposta final trocou o nome das matrizes, apresentando uma resolução parcialmente adequada, como é possível observar na Figura 93 a seguir:

Figura 93 – Resolução do estudante E21 – Questão 1 item *g*


multiplicar a matriz $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ pela matriz R

" " " $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ pela " X

" " " $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ " " Y

Fonte: produção escrita do estudante E21.

Analisando todos os itens da Questão 1 quanto aos processos do PMA mobilizados encontramos, nas resoluções dos itens *a, c, d, e, f* e *g*, indícios dos processos de:

- intuição, pois, os estudantes utilizaram seus conhecimentos matemáticos prévios para examinar situações matemáticas desconhecidas;

- representação simbólica, pois, os estudantes utilizaram símbolos e notações matemáticas para representar as matrizes das reflexões;

- visualização, visto que os estudantes geraram, a partir das representações geométricas das reflexões, alguma imagem mental para a compreensão das transformações geométricas realizadas, externalizando-a por meio de esboços ou esquemas; e

- mudança de representação e tradução, pois, os estudantes transitaram entre as representações algébrica e geométrica das transformações geométricas.

Nas resoluções dos itens *d, e* e *g* os estudantes mobilizaram, além dos processos relacionados à representação, a:

- analogia, ao encontrarem semelhanças entre duas matrizes buscando evidenciar um padrão para a matriz de cada uma das reflexões realizadas (itens *d* e *e*), e ao abordarem os casos de reflexão de forma análoga para formular cada operação (item *g*).

Nas resoluções do item *g*, além dos processos já mencionados, encontramos também indícios dos processos:

- representação mental, pois, os estudantes associaram as reflexões visualizadas no GeoGebra com as operações algébricas correspondentes;

- generalização, visto que a maioria dos estudantes induziu, a partir da reflexão de um polígono específico, um método para realizar algebricamente a reflexão de qualquer polígono dado;

- síntese, pois, os estudantes estabeleceram relações, a partir de um método algébrico para se obter as reflexões dos polígonos, entre as matrizes e as respectivas transformações geométricas.

O item *b* foi realizado por meio da ferramenta reflexão no GeoGebra, logo, não foram coletados registros escritos para a análise de processos do PMA nesse item da questão.

Por fim, o item *h* tratava de um desafio proposto para os estudantes que já tivessem terminado as demais questões, tal item abordava as reflexões em relação às retas $y = x$ e $y = -x$. Dentre os estudantes participantes, apenas E3 apresentou uma resolução para esse item, porém, não realizou as reflexões adequadamente. Com base no registro escrito do estudante, não pudemos compreender o raciocínio por ele utilizado nem inferir algum processo do PMA para o item *h*.

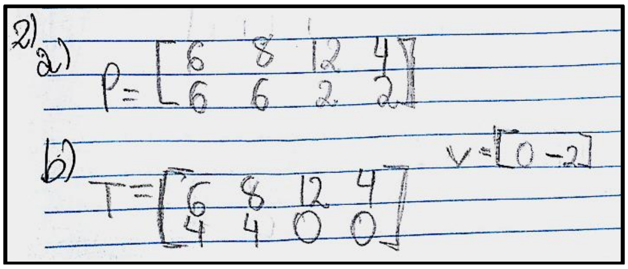
Questão 2

A Questão 2, composta por cinco itens, abordava a translação de um polígono na direção de um vetor.

Os itens *a* e *b* propunham que o estudante construísse um polígono e um vetor no GeoGebra, extraísse a matriz dos vértices desse polígono e o transladasse na direção do vetor, obtendo uma nova matriz com os vértices do polígono transladado.

Esses itens foram resolvidos adequadamente por todos os estudantes. Na Figura 94 apresentamos como exemplo a resolução do estudante E16.

Figura 94 – Resolução do estudante E16 – Questão 2 itens *a* e *b*



Fonte: produção escrita do estudante E16.

Inferimos, de acordo com o Quadro 3, que os estudantes mobilizaram em suas resoluções para os itens *a* e *b,* os processos de:

- intuição, pois, os estudantes utilizaram seus conhecimentos matemáticos prévios para examinar situações matemáticas desconhecidas;

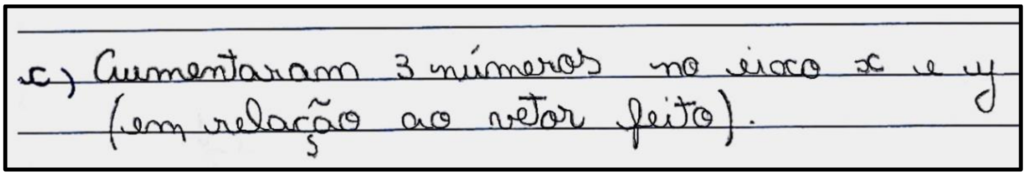
- representação simbólica, pois, os estudantes utilizaram símbolos e notações matemáticas para representar as matrizes da translação;

- visualização, visto que os estudantes geraram, a partir da representação geométrica, alguma imagem mental para a compreensão da translação realizada, externalizando-a por meio de esboços ou esquemas; e

- mudança de representação e tradução, pois, os estudantes transitaram entre as representações algébrica e geométrica das transformações geométricas.

No item *c* da questão, os estudantes deveriam comparar as matrizes obtidas buscando algum padrão com relação à translação efetuada. Este item foi resolvido adequadamente pelos estudantes E3, E5 e E21 apenas, os quais identificaram a influência do vetor na obtenção da matriz da translação, como pode ser observado na resolução do estudante E5 (Figura 95).

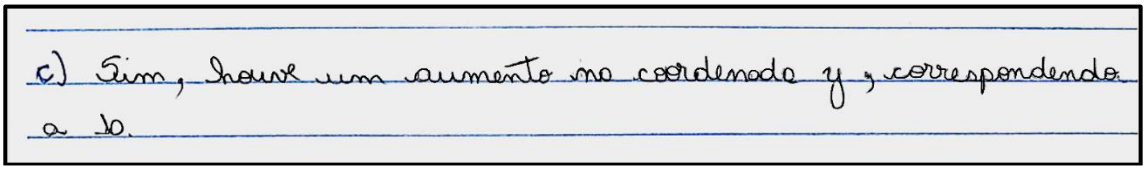
Figura 95 – Resolução do estudante E5 – Questão 2 item *c*



Fonte: produção escrita do estudante E5.

Os estudantes E9, E15 e E16 identificaram em suas resoluções a soma de valores na matriz das coordenadas do polígono, porém, não associaram esses valores às coordenadas do vetor segundo o qual a translação foi realizada. Classificamos essas resoluções como parcialmente adequadas (Figura 96).

Figura 96 – Resolução do estudante E15 – Questão 2 item *c*


c) Sim, houve um aumento na coordenada y, correspondendo a 10.

Fonte: produção escrita do estudante E15.

Ressaltamos que, no item anterior, o estudante E15 utilizou o vetor $(0, 10)$ para a translação do polígono.

Inferimos, para esse item da questão, que os processos do PMA mobilizados pelos estudantes nas resoluções adequadas ou parcialmente adequadas foram:

- intuição, pois, os estudantes utilizaram seus conhecimentos matemáticos prévios para examinar situações matemáticas desconhecidas;

- representação simbólica, pois, os estudantes compreenderam o significado de símbolos e notações matemáticas na representação da matriz da translação; e

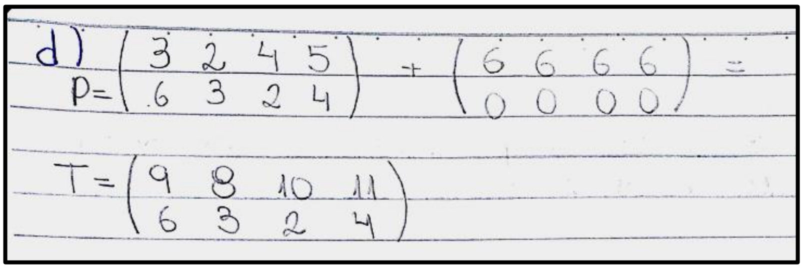
- analogia, ao compararem as duas matrizes encontrando semelhanças entre elas.

Os estudantes E2, E11, E14 e E25, ao comparar as duas matrizes, não encontraram algum padrão referente à translação realizada, mencionaram semelhanças quanto à ordem das matrizes e/ou compararam os elementos de uma mesma matriz, mobilizando apenas os processos de intuição e representação simbólica.

O estudante E7 não apresentou resolução para o item, portanto, não encontramos em sua resolução indícios da mobilização de processos do PMA.

Para o item *d*, os estudantes deveriam construir uma operação entre matrizes que representasse a translação efetuada. Sete estudantes (E2, E3, E5, E9, E11, E21 e E25) apresentaram resoluções adequadas para esse item, construindo uma adição entre a matriz dos vértices do polígono e uma matriz (de mesma ordem) com as coordenadas do vetor, segundo o qual a translação foi realizada, como ilustrado pela resolução da Figura 97.

Figura 97 – Resolução do estudante E3 – Questão 2 item *d*



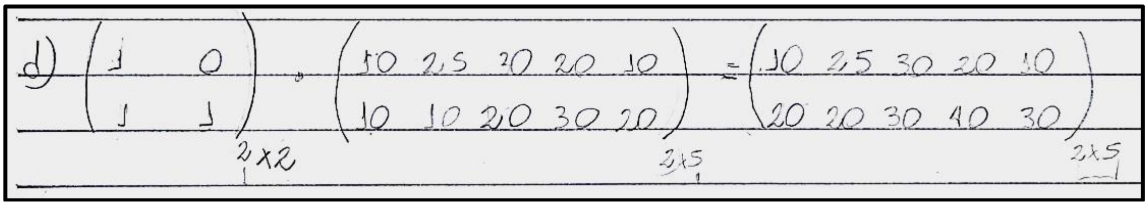
d) $P=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$T=\begin{pmatrix} 9 & 8 & 10 & 11 \\ 6 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Fonte: produção escrita do estudante E3.

Salientamos que o estudante E3 utilizou o vetor $(6, 0)$ para a translação do polígono. Os estudantes E14, E15 e E16 construíram uma multiplicação de matrizes que não resultou na matriz da translação, apresentando resoluções inadequadas para o item, como, por exemplo, mostrado na resolução do estudante E14 (Figura 98).

Figura 98 – Resolução do estudante E14 – Questão 2 item *d*



d) $\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 5}{\begin{pmatrix} 10 & 2{,}5 & 20 & 20 & 10 \\ 10 & 10 & 20 & 30 & 20 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 5}{\begin{pmatrix} 10 & 2{,}5 & 30 & 20 & 10 \\ 20 & 20 & 30 & 40 & 30 \end{pmatrix}}$

Fonte: produção escrita do estudante E14.

Destacamos que o estudante E14 utilizou o vetor $(0, 10)$ para a translação do polígono no GeoGebra.

O estudante E7 não apresentou resolução para o item *d* da Questão 2.

Nas resoluções do item *d* encontramos, de acordo com o Quadro 3, indícios dos processos de:

- intuição, pois, os estudantes utilizaram seus conhecimentos matemáticos prévios para examinar uma situação matemática desconhecida;

- visualização, pois, os estudantes geraram uma imagem mental por meio da translação visualizada no GeoGebra e a externalizaram por meio de esquemas;

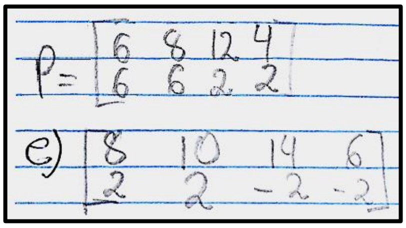
- representação mental, pois, os estudantes associaram a translação realizada com uma operação algébrica;

- representação simbólica, pois, os estudantes utilizaram símbolos e notações matemáticas para representar a operação construída; e

- mudança de representação e tradução, pois, os estudantes transitaram entre as representações geométrica e algébrica da translação realizada.

O último item da questão, item *e*, que propunha ao estudante realizar a translação do polígono inicial na direção do vetor determinado pelos pontos inicial $(3, 1)$ e final $(5, -3)$, foi resolvido adequadamente por cinco estudantes (E2, E3, E9, E11 e E16). Apresentamos como exemplo a resolução do estudante E16 (Figura 99).

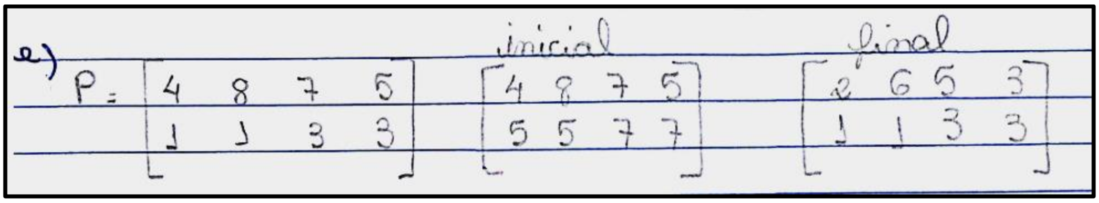
Figura 99 – Resolução do estudante E16 – Questão 2 item *e*



Fonte: produção escrita do estudante E16.

Os demais estudantes, com exceção do E7 que não apresentou resolução para o item, não conseguiram construir a matriz do polígono transladado na direção do vetor dado. Dentre eles, os estudantes E5 e E21 apresentaram dificuldades em obter as coordenadas do vetor a partir dos pontos dados, exibindo duas matrizes como resposta, como pode ser observado na Figura 100.

Figura 100 – Resolução do estudante E5 – Questão 2 item *e*



Fonte: produção escrita do estudante E5.

Destacamos que esses dois estudantes construíram a operação para a translação do item *d* adequadamente, porém, não identificaram no item c o padrão a respeito da soma das coordenadas do vetor às coordenadas dos vértices do polígono, o que pode justificar a confusão na resolução do item *e*.

Portanto, inferimos a partir das resoluções apresentadas para esse item, que os processos do PMA mobilizados pelos estudantes foram:

- intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos matemáticos prévios para examinar uma situação matemática desconhecida;

- representação simbólica, evidenciada a partir da utilização e compreensão dos símbolos e notações para vetores e matrizes;

- representação mental, evidenciada na associação do conceito de vetor e da adição de matrizes às operações algébricas; e

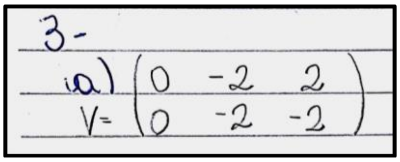
- analogia, na abordagem dos casos de translação de forma análoga para realização da operação e obtenção do polígono transladado.

Questão 3

A Questão 3, composta por seis itens, abordava a transformação homotetia de um triângulo. O item *a* propunha que o estudante construísse um triângulo no GeoGebra, com um dos vértices na origem, e obtivesse a matriz dos vértices desse triângulo.

Esse item foi resolvido adequadamente por todos os estudantes, com exceção de E7, que não apresentou resolução para a Questão 3. Na Figura 101 apresentamos como exemplo a resolução do estudante E3 para o item *a*.

Figura 101 – Resolução do estudante E3 – Questão 3 item *a*



Fonte: produção escrita do estudante E3.

Os processos do PMA mobilizados pelos estudantes E2, E3, E5, E9, E11, E14, E15, E16, E21 e E25 na resolução desse item foram:

- intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos matemáticos prévios para examinar situações matemáticas desconhecidas;

- representação simbólica, pois, utilizaram símbolos e notações matemáticas para a representação da matriz dos vértices do triângulo; e

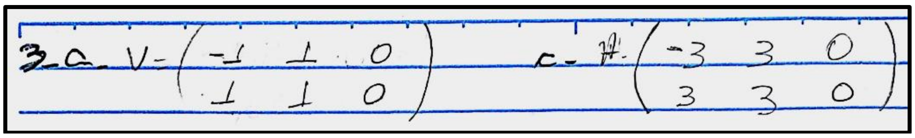
- mudança de representação e tradução, pois, os estudantes transitaram entre as representações algébrica e geométrica.

O item *b* fornecia instruções para que o estudante realizasse a transformação homotetia utilizando como centro a origem do sistema cartesiano e como razão um valor variável obtido a partir do controle deslizante, portanto, não há produção escrita para analisarmos nesse item.

Na sequência, o item *c* solicitava que o estudante movesse o controle deslizante observando as alterações produzidas, e realizasse a transformação homotetia do triângulo com a razão igual a três, obtendo uma nova matriz com os vértices do triângulo ampliado.

Esse item foi resolvido adequadamente por oito estudantes (E3, E5, E9, E11, E15, E16, E21 e E25), que obtiveram a matriz do triângulo transformado segundo a razão da homotetia solicitada (Figura 102).

Figura 102 – Resolução do estudante E21 – Questão 3 item *c*



Fonte: produção escrita do estudante E21.

Inferimos, de acordo com o Quadro 3, que os processos do PMA mobilizados nas resoluções adequadas foram os de:

- intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos matemáticos prévios para examinar situações matemáticas desconhecidas;

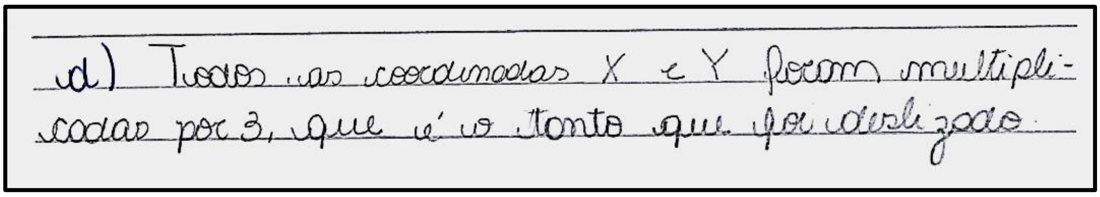
- representação simbólica, pois, utilizaram símbolos e notações matemáticas para a representação da matriz dos vértices do triângulo; e

- mudança de representação e tradução, pois, os estudantes transitaram entre as representações algébrica e geométrica da transformação homotetia.

Os estudantes E2 e E14 obtiveram valores aproximados para os vértices do triângulo, não correspondentes à transformação proposta. Portanto, identificamos apenas os processos de representação simbólica e intuição em suas resoluções.

No item *d* os estudantes deveriam relacionar as duas matrizes obtidas nos itens *a* e *c*. Esta questão foi resolvida adequadamente pelos estudantes E2, E3, E5, E9, E11, E16, E21 e E25, que identificaram o fator da homotetia multiplicado pelos vértices do triângulo transformado, como pode ser observado na produção escrita do estudante E3 (Figura 103).

Figura 103 – Resolução do estudante E3 – Questão 3 item *d*


d) Todos as coordenadas X e Y foram multipli-
cadas por 3, que é o tanto que foi deslizado.

Fonte: produção escrita do estudante E3.

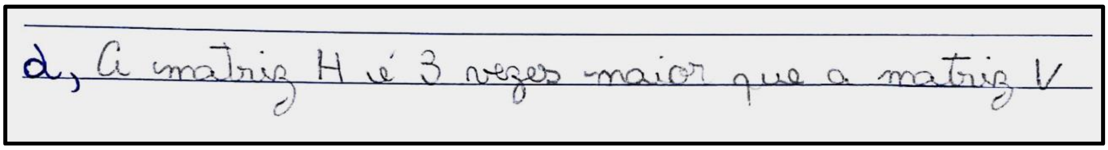
Em algumas resoluções, como na apresentada pelo estudante E5 (Figura 104), apesar de reconhecerem a multiplicidade entre as matrizes, anunciaram essa relação por meio de expressões informais, inadequadas do ponto de vista matemático. No entanto, identificamos em todas as resoluções apresentadas para esse item, os processos de:

- intuição, mobilizados a partir da utilização de conhecimentos matemáticos prévios para examinar e relacionar as matrizes;

- representação mental, pois, associaram a transformação homotetia com a operação de multiplicação; e

- visualização, pois, os estudantes geraram uma imagem mental do conceito de multiplicidade e a externalizaram por meio de esboços para compreender a situação matemática.

Figura 104 – Resolução do estudante E5 – Questão 3 item *d*

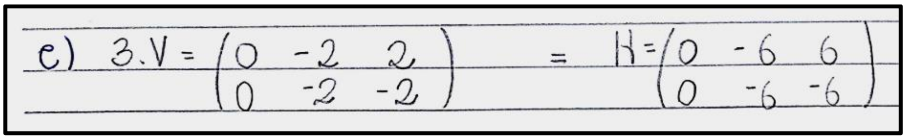

d, A matriz H é 3 vezes maior que a matriz V

Fonte: produção escrita do estudante E5.

Os estudantes E7, E14 e E15 não apresentaram resolução para os itens *d* e *e* da Questão 3.

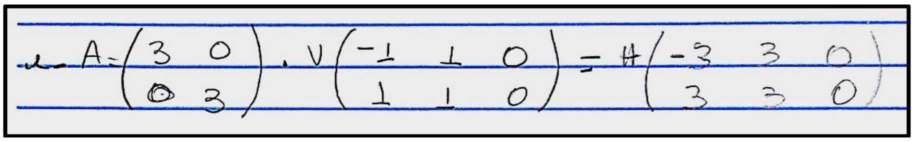
No item *e*, o estudante deveria construir uma operação que representasse a transformação realizada no triângulo. Apresentaram resoluções adequadas para esse item os estudantes E3, E5, E9, E11, E16, E21 e E25, que utilizaram as operações de multiplicação de uma matriz por um escalar (Figura 105) e multiplicação entre matrizes (Figura 106) e obtiveram a matriz transformada.

Figura 105 – Resolução do estudante E5 – Questão 3 item *e*


e) $3.V = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = H = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix}$

Fonte: produção escrita do estudante E5.

Figura 106 – Resolução do estudante E21 – Questão 3 item *e*


e $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} . V \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Fonte: produção escrita do estudante E21.

A resolução do estudante E2 foi classificada como parcialmente adequada, pois, apesar de construir a operação adequadamente, o estudante errou alguns cálculos durante a multiplicação.

Evidenciamos, na produção escrita dos estudantes para esse item, os processos de:

Nas resoluções do item *d* encontramos, de acordo com o Quadro 3, indícios dos processos de:

- intuição, pois, os estudantes utilizaram seus conhecimentos matemáticos prévios para examinar uma situação matemática desconhecida;

- visualização, pois, os estudantes geraram uma imagem mental por meio da transformação visualizada no GeoGebra e a externalizaram por meio de esquemas;

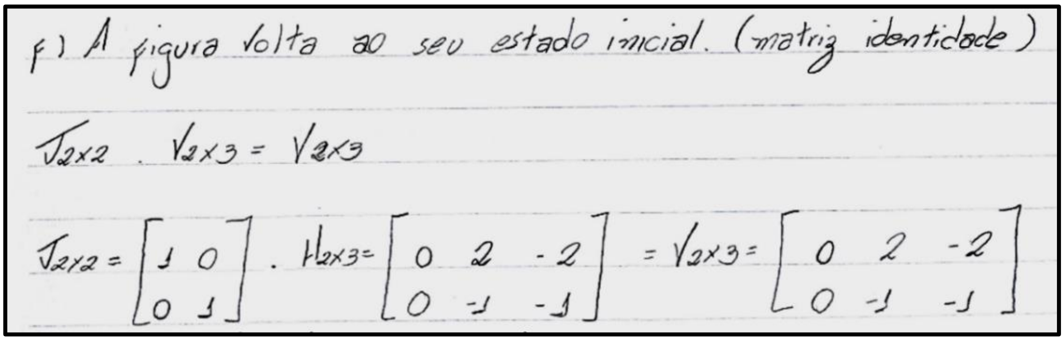
- representação mental, pois, os estudantes associaram a transformação homotetia realizada com uma operação algébrica;

- representação simbólica, pois, os estudantes utilizaram símbolos e notações matemáticas para representar a operação construída; e

- mudança de representação e tradução, pois, os estudantes transitaram entre as representações geométrica e algébrica da transformação.

E por fim, o item *e* instruía que o estudante utilizasse razão igual a 1 na homotetia, analisasse quais as modificações geométricas no triângulo e construísse uma representação algébrica para essa transformação. Todas as resoluções apresentadas para o item (E2, E3, E5, E9, E11, E15, E16, E21 e E25) foram classificadas como adequadas (Figura 107).

Figura 107 – Resolução do estudante E9 – Questão 3 item *f*


f) A figura volta ao seu estado inicial. (matriz identidade)

$J_{2x2} \cdot V_{2x3} = V_{2x3}$

$J_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot H_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = V_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Fonte: produção escrita do estudante E9.

Os estudantes E7 e E14 não apresentaram resolução para esse item da questão.

Inferimos que os estudantes que resolveram esse item apresentaram em suas resoluções indícios dos processos de:

- intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos matemáticos prévios para examinar uma situação matemática desconhecida;

- representação simbólica, evidenciada a partir da utilização e compreensão dos símbolos e notações matemáticas;

- representação mental, evidenciada na associação da transformação homotetia à operações algébricas e aritméticas; e

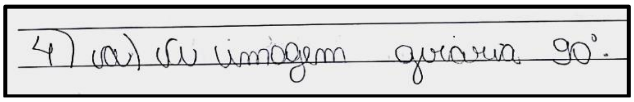
- analogia, ao abordar as transformações solicitadas na questão de forma análoga.

Questão 4

A quarta questão da tarefa abordava a representação de uma imagem por meio de uma matriz de *pixels*. No item *a* da questão o estudante era instruído a manipular essa matriz trocando os elementos da posição ij com os da posição ji (conceito de matriz transposta) e a analisar qual a modificação observada na imagem.

Nenhum estudante apresentou resolução adequada para esse item, sendo que oito resoluções (E2, E3, E5, E9, E11, E16, E21 e E25) apontaram apenas que a imagem sofreria uma rotação segundo o ângulo de 90°, sem mencionar em qual sentido (horário ou anti-horário), como mostrado na Figura 108. Classificamos esse tipo de resolução como inadequada.

Figura 108 – Resolução do estudante E2 – Questão 4 item *a*



Fonte: produção escrita do estudante E2.

Analisando essas resoluções, encontramos indícios dos processos de:

- intuição, pois, os estudantes intuem e associam conceitos para compreender, analisar e explorar a situação matemática proposta;

- representação simbólica, pois, os estudantes compreendem o significado de símbolos e notações matemáticas na interpretação de uma situação matemática;

- representação mental, pois, os estudantes associam a transformação realizada uma operação aritmética, no caso, a rotação; e

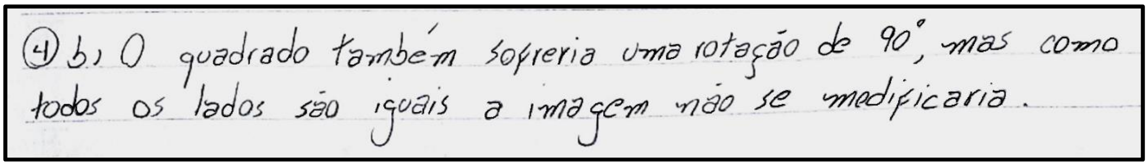
- visualização, uma vez que os estudantes geram uma imagem mental para a transformação realizada na imagem e a externaliza por meio de esboços com o propósito de compreender a situação matemática em questão.

O estudante E15 também apresentou uma resolução classificada como inadequada para a questão, não mencionando nenhum tipo de alteração na imagem dada, mobilizando apenas o processo de intuição. Enquanto os estudantes E7 e E14 não apresentaram resoluções para a Questão 4, nesse caso, não foram encontrados indícios de processos do PMA.

O item *b* solicitava ao estudante que realizasse a mesma análise proposta no item *a*, porém, para a imagem de um quadrado. Nesse caso, a matriz dos *pixels* seria uma matriz simétrica, o que não resultaria em mudança visual após a transformação.

Em todas as resoluções apresentadas (E2, E3, E5, E9, E11, E15, E16, E21 e E25) os estudantes mencionaram que a imagem, no caso, o quadrado, não sofrera alterações visualmente, pois, a figura é simétrica (Figura 109). Porém, demonstram utilizar o mesmo raciocínio utilizado no item anterior, obtendo a transposta da matriz dos *pixels* de forma inadequada.

Figura 109 – Resolução do estudante E9 – Questão 4 item *b*


4) b) O quadrado também sofreria uma rotação de 90°, mas como todos os lados são iguais a imagem não se modificaria.

Fonte: produção escrita do estudante E90.

Portanto, classificamos essas resoluções como parcialmente adequadas e, encontramos nas mesmas indícios dos processos de:

- intuição, pois, os estudantes intuem e associam conceitos para compreender, analisar e explorar a situação matemática proposta;

- representação simbólica, pois, os estudantes compreendem o significado de símbolos e notações matemáticas na interpretação de uma situação matemática;

- representação mental, pois, os estudantes associam a transformação realizada uma operação aritmética, no caso, a rotação;

- visualização, uma vez que os estudantes geram uma imagem mental para a transformação realizada na imagem e a externaliza por meio de esboços com o propósito de compreender a situação matemática em questão; e

- analogia, pois, os estudantes abordaram situações matemáticas semelhantes de forma análoga.

No Quadro 6 exibimos uma síntese das resoluções apresentadas pelos estudantes para cada item das quatro questões propostas na Tarefa 2, aplicada durante o terceiro e quarto episódios de ensino.

Quadro 6 – Síntese das análises dos Episódios 3 e 4.

Questão	Resoluções adequadas/ corretas	Resoluções parcialmente corretas	Resoluções inadequadas/ incorretas	Em branco	Processos do PMA evidenciados
1a	**Todas**	-	-	-	Representação simbólica, Intuição, Visualização, Mudança de representação e tradução
1b	**-**	-	-	-	-
1c	**Todas**	-	-	-	Representação simbólica, Intuição, Visualização, Mudança de representação e tradução
1d	**Todas**	-	-	-	Representação simbólica, Intuição, Visualização, Mudança de representação e tradução e Analogia

1e	**E3, E9, E11, E14, E15, E16** e **E25**	**E2, E5, E7** e **E21**	-	-	Representação simbólica, Intuição, Visualização, Mudança de representação e tradução e Analogia
1f	**Todas**	-	-	-	Representação simbólica, Intuição, Visualização, Mudança de representação e tradução
1g	**E5, E7, E9, E11** e **E25**	**E2, E3, E14, E15, E16** e **E21**	-	-	Representação simbólica, Representação mental, Intuição, Visualização, Mudança de representação e tradução, Analogia, Generalização e Síntese
1h	-	-	E3	E2, E5, E7, E9, E11, E14, E15, E16, E21 e E25	Nenhum
2a	**Todas**	-	-	-	Representação simbólica, Intuição, Visualização, Mudança de representação e tradução
2b	**Todas**	-	-	-	Representação simbólica, Intuição, Visualização, Mudança de representação e tradução
2c	**E5, E3** e **E21**	**E9, E15** e **E16**	**E2, E11, E14** e **E25**	E7	Representação simbólica, Intuição e Analogia
2d	**E2, E3, E5, E9, E11, E21** e **E25**	-	E14, E15 e E16	E7	Representação simbólica, Representação mental, Visualização, Intuição e Mudança de representação e tradução

2e	**E2, E3, E9, E11** e **E16**	-	E5, E14, E15, E21 e E25	E7	Representação simbólica, Representação mental, Intuição e Analogia
3a	**E2, E3, E5, E9, E11, E14, E15, E16, E21** e **E25**	-	-	E7	Representação simbólica, Intuição, Mudança de representação e tradução
3b	-	-	-	-	-
3c	**E3, E5, E9, E11, E15, E16, E21** e **E25**	-	E2 e E14	E7	Representação simbólica, Intuição e Mudança de representação e tradução
3d	**E2, E3, E5, E9, E11, E16, E21** e **E25**	-	-	E7, E14 e E15	Representação mental, Visualização e Intuição
3e	**E3, E5, E9, E11, E16, E21** e **E25**	**E2**	-	E7, E14 e E15	Representação simbólica, Representação mental, Visualização, Intuição e Mudança de representação e tradução
3f	**E2, E3, E5, E9, E11, E15, E16, E21** e **E25**	-	-	E7 e E14	Representação simbólica, Representação mental, Intuição e Analogia
4a	-	-	**E2, E3, E5, E9, E11, E15 E16, E21** e **E25**	E7 e E14	Representação simbólica, Representação mental, Visualização e Intuição
4b	-	-	**E2, E3, E5, E9, E11, E15, E16, E21** e **E25**	E7 e E14	Representação simbólica, Representação mental, Visualização, Intuição e Analogia

Fonte: autoria própria.

Os episódios 3 e 4 exploraram aspectos geométricos relacionados aos conceitos de matriz, tipos de matrizes e operações, dando continuidade ao segundo episódio de ensino, e complementando a abordagem, predominantemente algébrica, adotada pelos livros didáticos da disciplina (Seção 4.1.1).

As questões que compunham a Tarefa 2, desenvolvida nesses episódios com o uso do GeoGebra, proporcionaram aos estudantes estabelecer relações entre as representações algébrica e geométrica, bem como a discussão, reflexão e justificação de ideias matemáticas.

No entanto, retomando a pesquisa de Barros, Araújo e Fernandes (2013), na qual analisaram erros e dificuldades de estudantes do Ensino Superior na resolução de uma tarefa sobre matrizes, os autores identificaram dificuldades com contradições e com a validação de afirmações envolvendo matrizes.

Observamos, nesse episódio, dificuldades semelhantes nas resoluções estudantes na justificação de suas respostas, apresentando argumentos inválidos e análises por vezes superficiais para as situações matemáticas abordadas.

A respeito da dinâmica de sala de aula, que priorizou a atividade dos estudantes e a ação da professora-pesquisadora apenas no direcionamento das discussões, contribuiu para que as reflexões e discussões fossem mais frutíferas, proporcionando aos estudantes liberdade para explorar diferentes possibilidades para a resolução da tarefa, como pode ser observado pela diversidade de estratégias adotadas em suas resoluções.

Durante a formalização dos conceitos e definições trabalhados, foi possível estabelecer e ampliar relações que pudessem ter passado despercebidas, como no caso da Questão 4, na qual os estudantes não relacionaram a transformação realizada na figura com os conceitos de matriz transposta, matriz diagonal e matriz simétrica.

Percebemos que o uso de uma abordagem exploratória, como proposto por Ponte (2005), favoreceu a compreensão dos conceitos e operações envolvendo matrizes, evidenciada, por exemplo, na compreensão da operação de multiplicação entre matrizes; e no uso adequado da simbologia matemática ao representar uma matriz.

Quanto aos processos do PMA relacionados à representação, encontramos indícios dos processos de representação simbólica, representação mental, visualização, intuição e mudança de representação e tradução na produção escrita da maioria dos estudantes participantes.

Os processos de generalização, analogia e síntese, relacionados à abstração, foram mobilizados pela maioria dos estudantes, especialmente, na resolução da Questão 1, por se tratar de uma questão de investigação.

5.4 EPISÓDIO 5

A resolução da tarefa 3 (Apêndice F) ocorreu durante o quinto episódio de ensino. Nesse episódio, foram explorados os conceitos de Equação Linear, Sistemas de Equações Lineares e representação geométrica da solução de um Sistema de Equações Lineares com duas equações e duas incógnitas.

A tarefa foi composta por três questões que foram elaboradas com a intenção de retomar os conceitos de Equação Linear e Sistemas de Equações Lineares, bem como de explorar e relacionar as representações algébrica e geométrica.

A seguir, analisaremos a produção escrita para cada item das questões, buscando identificar nas resoluções dos estudantes indícios de processos relacionados ao PMA.

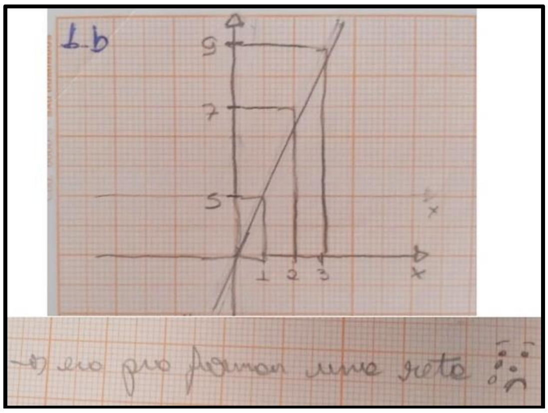
Questão 1

A Questão 1 explorava as representações algébrica, geométrica e tabular de uma Equação Linear.

No item *a* da questão, era solicitado que o estudante construísse uma tabela com ao menos três pontos que satisfizessem a equação linear dada. Esse item foi resolvido adequadamente por todos os onze estudantes.

O item *b* solicitava que o estudante representasse graficamente a equação e os pontos obtidos no item anterior. O estudante E21 apresentou uma resolução classificada como parcialmente adequada para esse item, pois, ao representar graficamente a equação, assumiu que a origem deveria fazer parte da reta obtida, como pode ser observado na Figura 110.

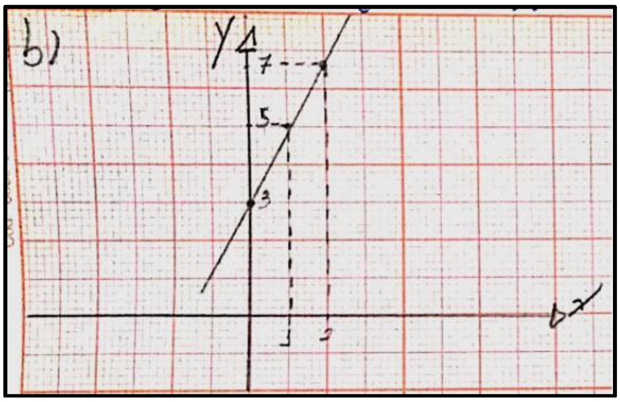
Figura 110 – Resolução do estudante E21 – Questão 1 item *b*



Fonte: produção escrita do estudante E21.

Os demais estudantes resolveram o item adequadamente, como apresentado na resolução do estudante E9 (Figura 111).

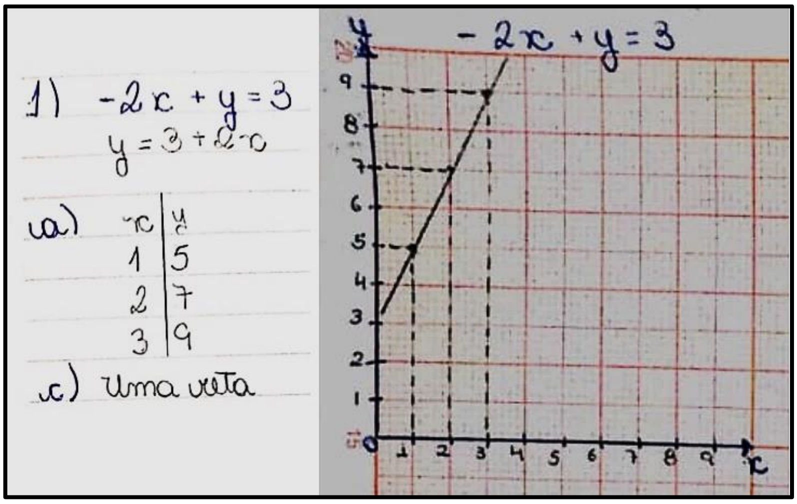
Figura 111 – Resolução do estudante E9 – Questão 1 item *b*



Fonte: produção escrita do estudante E9.

O item *c* questionava sobre qual a forma geométrica obtida na construção do gráfico da equação linear. Novamente, todos os estudantes resolveram o item adequadamente, identificando que o gráfico representava uma reta. Na Figura 112 apresentamos a produção escrita do estudante E3 para os três primeiros itens da Questão 1.

Figura 112 – Resolução do estudante E3 – Questão 1 itens *a, b* e *c*



Fonte: produção escrita do estudante E3.

Analisando a produção escrita para os itens *a* e *b* da questão, inferimos que os estudantes mobilizaram em suas resoluções os processos de:

- intuição, pois, utilizaram conhecimentos matemáticos prévios para a resolução da situação matemática proposta;

- representação simbólica, pois, compreenderam e utilizaram a simbologia matemática adequadamente;

- representação mental, pois, associaram a equação linear dada com operações algébricas ou geométricas e métodos de resolução; e

- mudança de representação e tradução, pois, transitaram entre diferentes representações da equação linear.

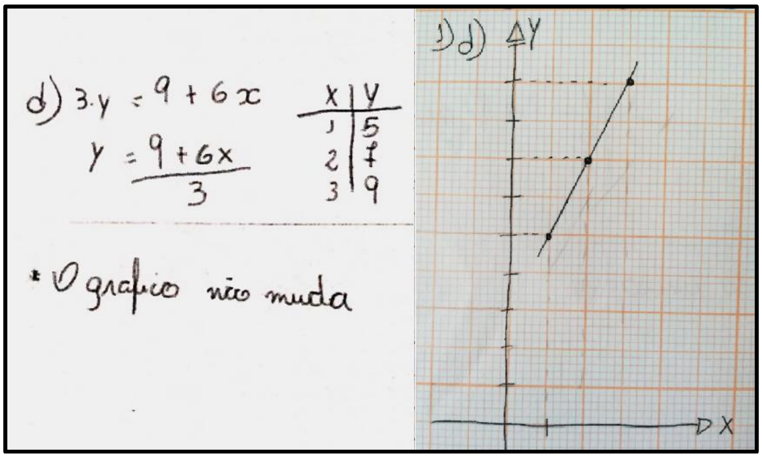
Na resolução do item *c* encontramos indícios dos processos de:

- intuição, pois, os estudantes intuíram e associaram conceitos para a resolução da situação matemática; e

- representação mental, visto que para identificar a figura geométrica representada no gráfico os estudantes associaram as informações obtidas – equação linear, tabela e gráfico – com o objeto matemático reta, conhecido da geometria.

O item *d* solicitava ao estudante que multiplicasse a equação dada por três, refizesse os itens *a, b* e *c* e comparasse os resultados obtidos. Sete estudantes, sendo eles E3, E5, E9, E11, E14, E15 e E25, apresentaram resoluções adequadas para esse item da questão, como ilustrado na Figura 113.

Figura 113 – Resolução do estudante E14 – Questão 1 item *d*

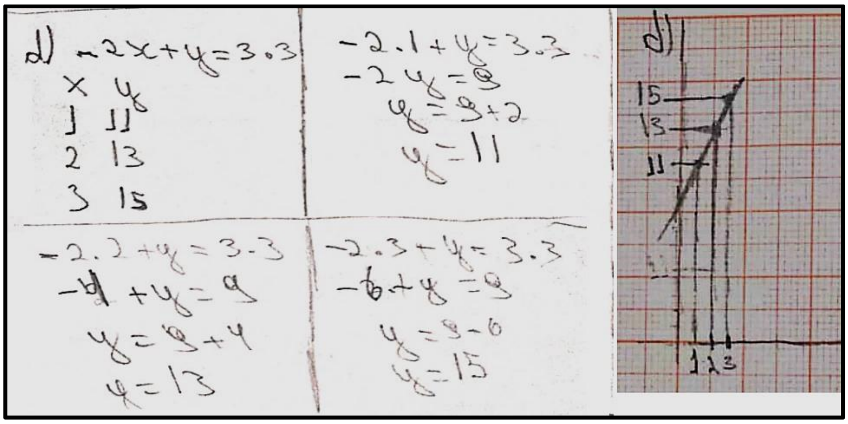


Fonte: produção escrita do estudante E14.

As resoluções apresentadas pelos estudantes E2, E16 e E21 para o item *d* foram classificadas como parcialmente adequadas, pois, E2 e E16 resolveram a questão parcialmente, não realizando a comparação dos dois casos; e E21, como nos itens anteriores, assumiu que a origem deveria fazer parte da reta obtida.

E por último, o estudante E7 apresentou uma resolução inadequada para o item, visto que multiplicou apenas o lado direito da equação dada obtendo uma reta diferente da anterior, como exibido na Figura 114.

Figura 114 – Resolução do estudante E7 – Questão 1 item *d*



Fonte: produção escrita do estudante E7.

Nesse item, entendemos que os processos do PMA mobilizados pelos estudantes em suas resoluções foram:

- intuição, pois, utilizaram conhecimentos matemáticos prévios para a resolução da situação matemática proposta;

- representação simbólica, pois, compreenderam e utilizaram a simbologia matemática adequadamente;

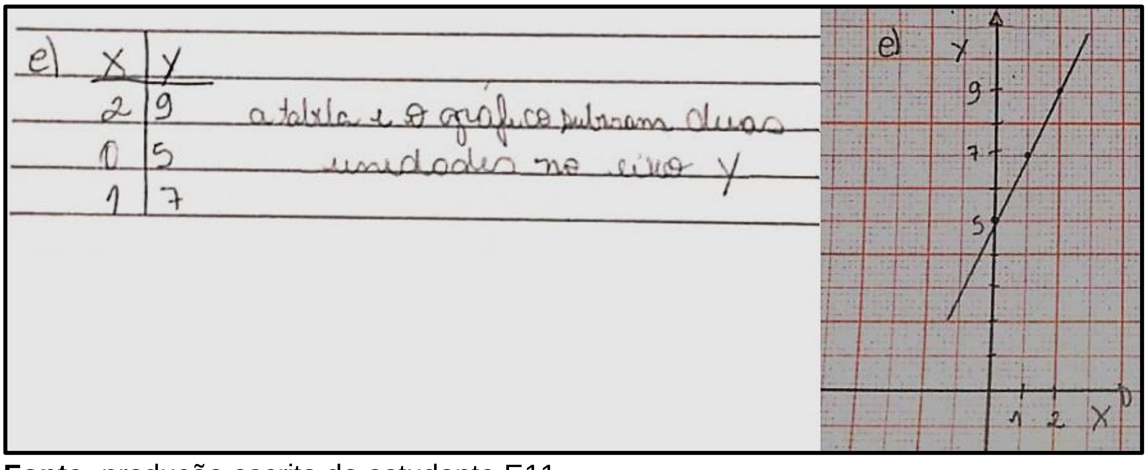
- representação mental, visto que para identificar a figura geométrica representada no gráfico os estudantes associaram as informações obtidas – equação linear, tabela e gráfico – com o objeto matemático reta, conhecido da geometria;

- mudança de representação e tradução, pois, transitaram entre diferentes representações da equação linear; e

No último item da questão, item *f*, o estudante deveria substituir o termo independente da equação dada pelo número cinco, refazer os itens *a, b* e *c* e comparar os resultados obtidos.

Esse item foi resolvido adequadamente pelos estudantes E2, E3, E9, E11, E14, E15 e E25. Todos eles identificaram o aumento de duas unidades nos valores de y, para os mesmos valores de x utilizados anteriormente, como observado na resolução do estudante E11 (Figura 115). E ainda, o estudante E25 identificou também o paralelismo entre todas as retas construídas no exercício.

Figura 115 – Resolução do estudante E11 – Questão 1 item *e*



Fonte: produção escrita do estudante E11.

Os estudantes E5, E16 e E21 apresentaram resoluções parcialmente adequadas para o item, visto que E15 e E16 não realizaram a comparação entre os resultados, e E21 representou graficamente a equação de forma inadequada, assumindo que a origem do sistema cartesiano pertencesse à reta.

E por fim, o estudante E7 resolveu a questão inadequadamente, pois, ao invés de substituir o termo independente por cinco, como solicitado no enunciado da questão, ele multiplicou o termo independente por cinco.

Portanto, de acordo com o Quadro 3, identificamos nas resoluções dos estudantes para esse item da questão, os processos de:

- intuição, pois, utilizaram conhecimentos matemáticos prévios para a resolução da situação matemática proposta;

- representação simbólica, pois, compreenderam e utilizaram a simbologia matemática adequadamente;

- representação mental, visto que para identificar a figura geométrica representada no gráfico os estudantes associaram as informações obtidas – equação linear, tabela e gráfico – com o objeto matemático reta, conhecido da geometria; e

- mudança de representação e tradução, pois, transitaram entre diferentes representações da equação linear.

Nesse sentido, entendemos que o processo de representação mental foi mobilizado apenas pelos estudantes E2, E3, E9, E11, E14, E15, E21 e E25 na comparação dos resultados obtidos entre as equações exploradas.

E ainda, inferimos que o estudante E25 mobilizou, além dos processos mencionados, o processo de:

- síntese, ao estabelecer relações entre a representação gráfica das retas e o conceito de paralelismo.

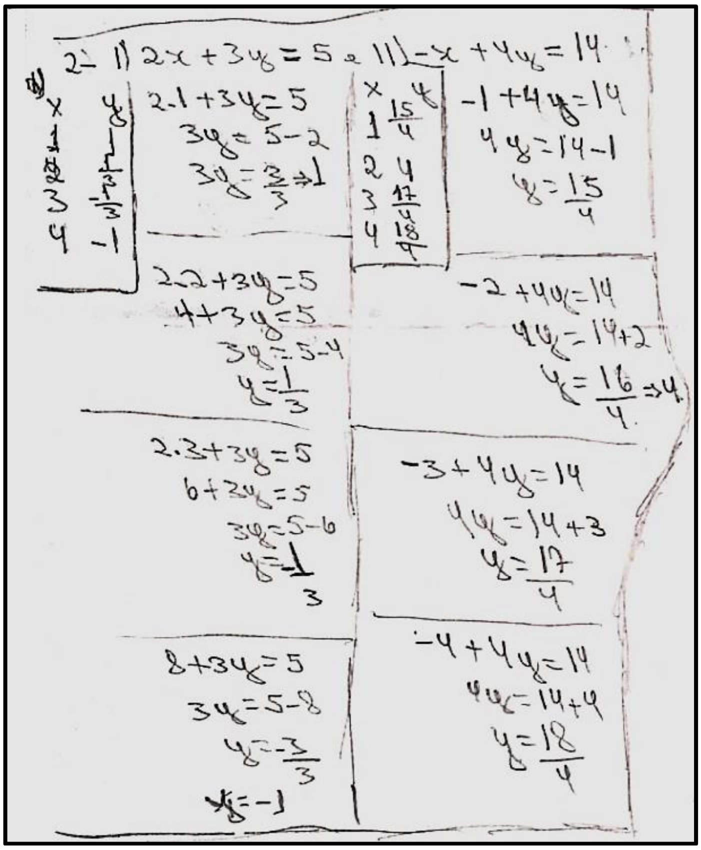
Questão 2

Na Questão 2 foram dadas duas equações lineares, as quais deveriam ser exploradas de acordo com cada um dos seis itens a seguir.

O item *a* solicitava que o estudante construísse duas tabelas com ao menos quatro pares (x, y) que satisfizessem cada uma das equações.

Esse item foi resolvido adequadamente por todos os onze estudantes participantes. Como exemplo de resolução adequada para o item, a Figura 116 mostra a resolução do estudante E7.

Figura 116 – Resolução do estudante E7 – Questão 2 item *a*



Fonte: produção escrita do estudante E7.

Analisando a produção escrita para o item, inferimos que os estudantes mobilizaram em suas resoluções os processos de:

- intuição, pois, utilizaram conhecimentos matemáticos prévios para a resolução da situação matemática proposta;

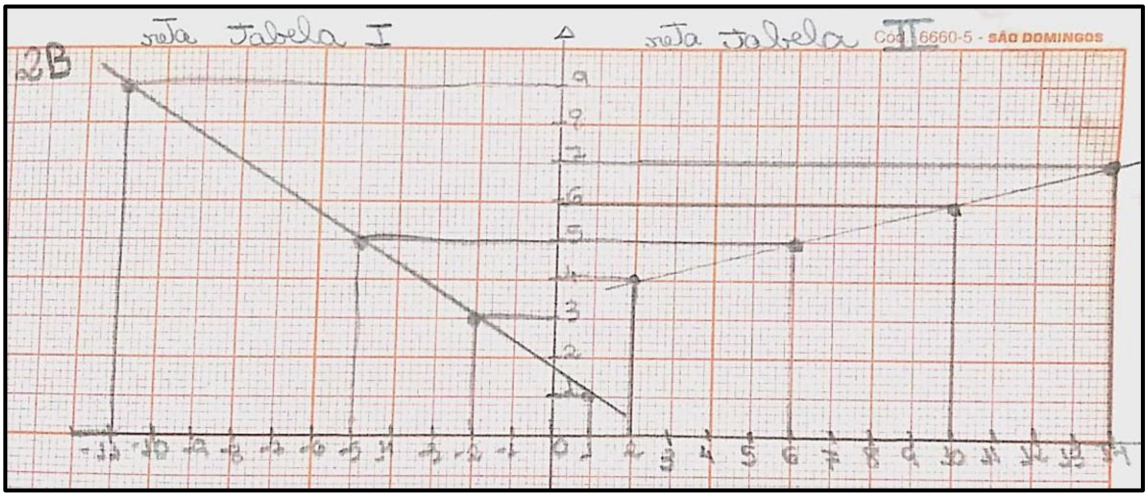
- representação simbólica, pois, compreenderam e utilizaram a simbologia matemática adequadamente;

- representação mental, pois, associaram a equação linear dada com operações algébricas ou geométricas e métodos de resolução; e

- mudança de representação e tradução, pois, transitaram entre diferentes representações da equação linear.

O item *b* solicitava ao estudante que representasse graficamente, em um mesmo plano cartesiano, os valores encontrados no item *a*. Esse item foi resolvido adequadamente por oito estudantes, a saber, E5, E7, E9, E11, E14, E15, E16 e E25. Na Figura 117 apresentamos a resolução do estudante E5 para o item *b*.

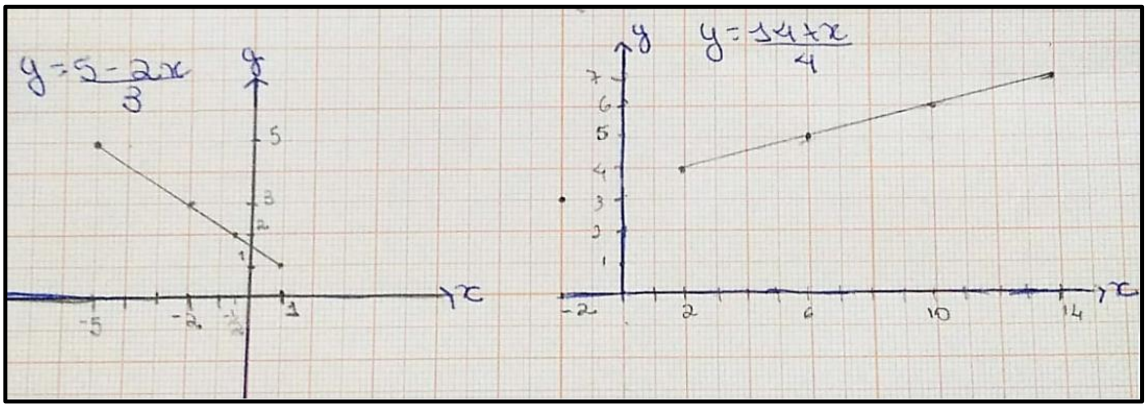
Figura 117 – Resolução do estudante E5 – Questão 2 item *b*



Fonte: produção escrita do estudante E5.

Os estudantes E2, E3 e E21 apresentaram resoluções parcialmente adequadas para o item, visto que representaram cada equação em um plano cartesiano distinto, como mostrado na Figura 118.

Figura 118 – Resolução do estudante E2 – Questão 2 item *b*



Fonte: produção escrita do estudante E2.

Compreendemos que para a resolução do item *b* os estudantes mobilizaram em suas resoluções os processos de:

- intuição, pois, utilizaram conhecimentos matemáticos prévios para a resolução da situação matemática proposta;

- representação simbólica, pois, compreenderam e utilizaram a simbologia matemática adequadamente;

- representação mental, pois, associaram a equação linear dada com operações algébricas ou geométricas e métodos de resolução; e

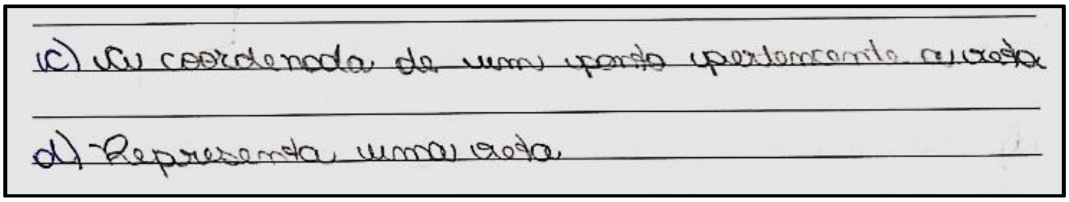
- mudança de representação e tradução, pois, transitaram entre diferentes representações da equação linear.

Para o item *c* da questão os estudantes deveriam escrever o que representa cada par (x,y) calculado no item *a*. Os estudantes E5 e E21 não apresentaram resoluções para o item, os demais estudantes responderam ao item adequadamente, identificando os pares (x,y) como coordenadas das equações e/ou pontos das retas das equações, como ilustrado na resolução do estudante E2 (Figura 119).

Já para o item *d* da questão, foi solicitado aos estudantes que identificassem qual a figura geométrica representada no gráfico de cada uma das equações dadas.

Novamente, os estudantes E5 e E21 não apresentaram resoluções para esse item, e os demais estudantes responderam adequadamente que a figura geométrica representada era uma reta (Figura 119).

Figura 119 – Resolução do estudante E2 – Questão 2 itens *c* e *d*


(c) As coordenada de uma ponto pertencente a reta

d) Representa uma reta.

Fonte: produção escrita do estudante E2.

De acordo com o Quadro 3, entendemos que os processos do PMA mobilizados pelos estudantes E2, E3, E7, E9, E11, E14, E15, E16 e E25 nesses dois itens (*c* e *d*) da tarefa foram:

- intuição, pois, os estudantes intuíram e associaram conceitos para a resolução da situação matemática; e

- representação mental, visto que, para identificar a figura geométrica representada no gráfico os estudantes associaram as informações obtidas – equação linear, tabela e gráfico – com o objeto matemático reta, conhecido da geometria.

Além dos processos mencionados, inferimos que no item *c* houve também a mobilização do processo de:

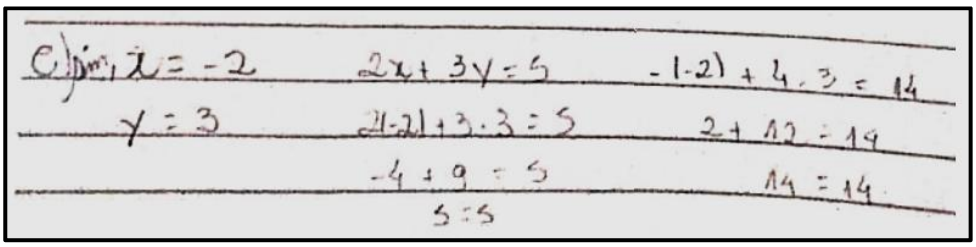
- síntese, dado que os estudantes relacionaram os valores das variáveis x e y, obtidos a partir de uma equação dada, com os pares ordenados (x,y), identificados como coordenadas dos pontos que compõem a reta dessa equação.

O item *e* da Questão 2 solicitava aos estudantes que verificassem a existência de um par (x, y) que satisfizesse as duas equações dadas anteriormente. Os estudantes E5 e E21 não apresentaram resoluções para esse item.

Quanto aos demais estudantes, todos resolveram a questão adequadamente, exibindo o par ordenado $(-2{,}3)$ em suas respostas, sendo que a maioria encontrou o par comum às duas equações por meio da representação gráfica construída no item *b*.

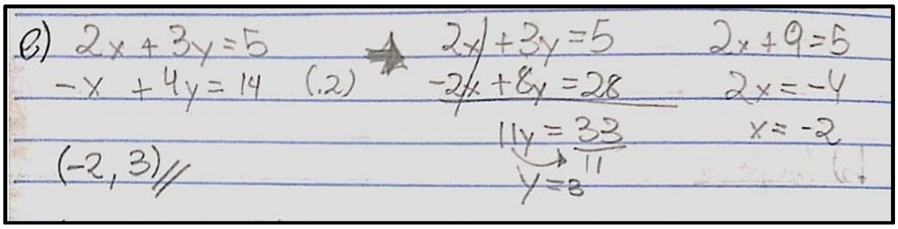
No entanto, destacamos a resolução do estudante E11, que verificou algebricamente que os valores obtidos geometricamente satisfaziam as equações, como exibido na Figura 120; e a resolução do estudante E16, que encontrou o ponto comum às duas equações por meio da resolução de um Sistema Linear (Figura 121).

Figura 120 – Resolução do estudante E11 – Questão 2 item *e*



Fonte: produção escrita do estudante E11.

Figura 121 – Resolução do estudante E16 – Questão 2 item *e*



Fonte: produção escrita do estudante E16.

Identificamos nas resoluções apresentadas pelos estudantes indícios dos processos de:

- intuição, pois, utilizaram conhecimentos matemáticos prévios para a resolução da situação matemática proposta;

- representação simbólica, pois, compreenderam e utilizaram símbolos e notações matemáticas para representar a situação matemática; e

- mudança de representação e tradução, visto que os estudantes obtêm informações a partir do enunciado da questão e as relacionam com a representação geométrica da situação matemática proposta, transitando entre as representações algébrica e geométrica das equações lineares dadas.

Além dos processos mencionados, na análise das resoluções dos estudantes E11 e E16, entendemos que esses mobilizaram outros processos do PMA, sendo eles:

- representação mental, pois, associaram uma operação algébrica para a verificação do ponto encontrado geometricamente, relacionando conceitos e objetos matemáticos; e

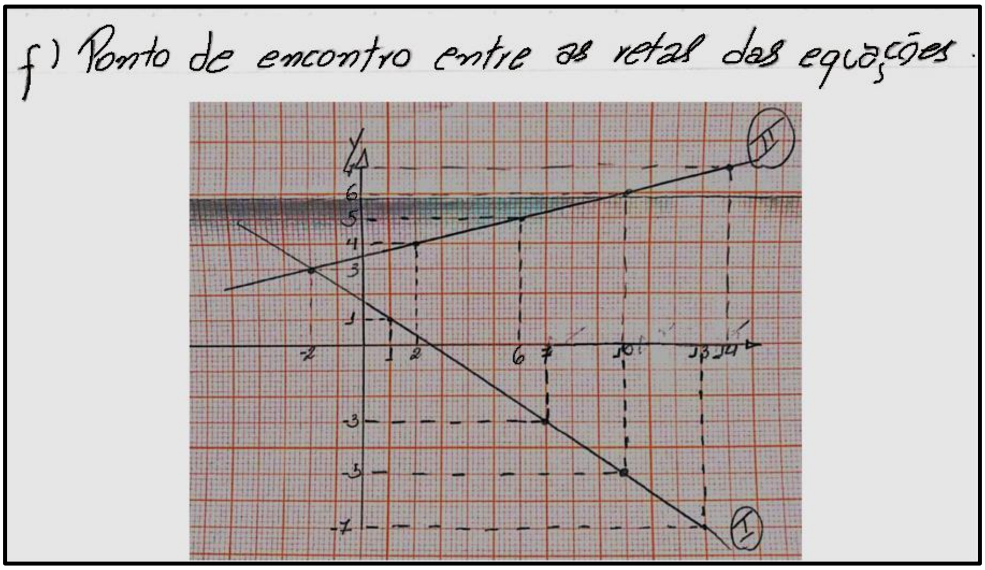
- síntese, mobilizado por E16, que utilizou o conceito de Sistema de Equação Linear para analisar a situação proposta e encontrar o par ordenado comum às duas equações.

Finalizando a Questão 2, o item *f* propunha ao estudante que representasse o ponto $(-2,3)$ no gráfico do item *b* e interpretasse qual o significado desse ponto.

Como discutido no item *e*, todos os estudantes que resolveram esse item encontraram – seja algebricamente, seja geometricamente – que o par $(-2,3)$ satisfazia as duas equações lineares dadas, assim, a maioria não teve dificuldades em identificar (no item *f*) que esse par representava o ponto de interseção das duas retas, como mostrado na Figura 122.

É possível que, após resolverem o item *f*, alguns estudantes tenham refeito a resolução do item *e*, o que justificaria o grande número que resoluções que se basearam apenas na representação gráfica das retas para encontrar o ponto (-2,3), porém, não encontramos indícios que comprovem essa possibilidade.

Figura 122 – Resolução do estudante E9 – Questão 2 item *f*



Fonte: produção escrita do estudante E9.

Os estudantes E3, E5 e E21 não apresentaram resoluções para esse item da questão, assim, nada pudemos inferir sobre os processos do PMA mobilizados. Para os demais estudantes, inferimos que os processos mobilizados foram:

- intuição, pois, utilizaram conhecimentos matemáticos prévios para examinar situações matemáticas desconhecidas; e

- representação simbólica, pois, compreenderam o significado de símbolos e notações matemáticas na representação/interpretação de uma situação matemática.

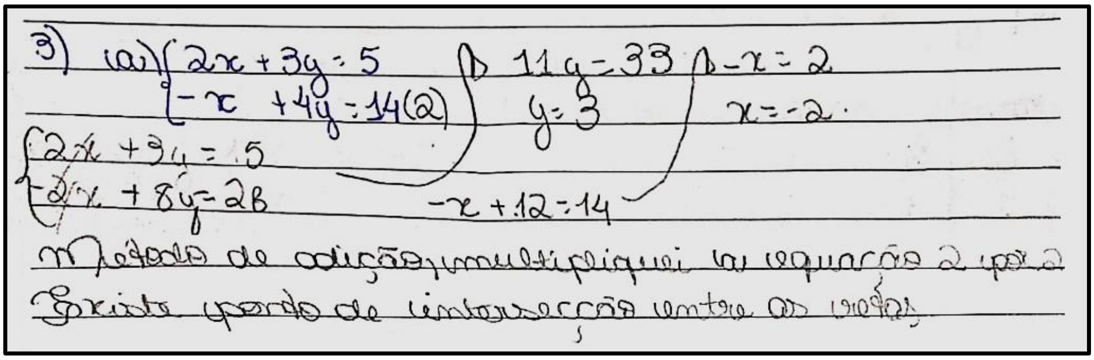
Questão 3

Após a exploração das equações lineares proposta pelas Questões 1 e 2, a Questão 3 relacionou a ação de tentar encontrar pares (x, y) que satisfaçam duas equações lineares dadas com a ação de resolver um Sistema de Equações Lineares, e solicitou que os estudantes resolvessem cada um dos três sistemas lineares propostos, justificando cada etapa da resolução.

Para o item *a*, foi proposto um Sistema de Equações Lineares possível e determinado (o sistema era composto pelas duas equações exploradas na Questão 2 da tarefa).

Esse item foi resolvido adequadamente apenas pelos estudantes E2 e E3 que utilizaram o método da adição para a resolução do sistema, explicaram as etapas da resolução e concluíram a existência de um ponto de interseção entre as retas (Figura 123).

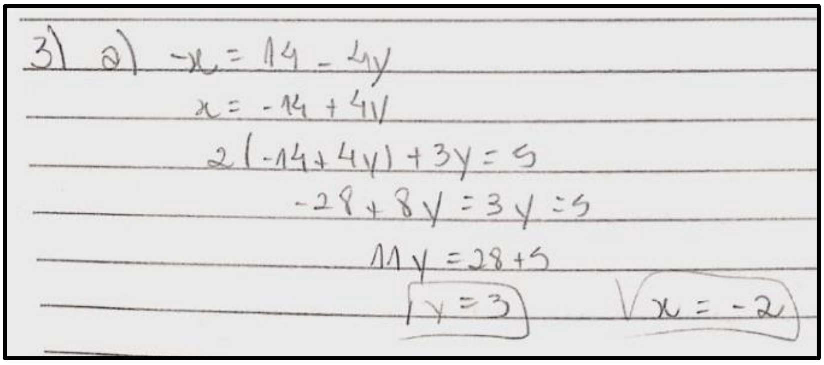
Figura 123 – Resolução do estudante E2 – Questão 3 item *a*



Fonte: produção escrita do estudante E2.

Os estudantes E9, E11, E16 e E25 apresentaram resoluções parcialmente adequadas para o item, dado que não explicaram as estratégias utilizadas. Desses, E9 e E11 (Figura 124) utilizaram o método da substituição e E16 e E25 utilizaram o método da adição para a resolução do sistema linear.

Figura 124 – Resolução do estudante E11 – Questão 3 item *a*



3) a) $-x = 14 - 4y$

$x = -14 + 4y$

$2(-14+4y)+3y=5$

$-28+8y=3y=5$

$11y=28+5$

$y=3$ $\quad x=-2$

Fonte: produção escrita do estudante E11.

Os estudantes E5, E7, E14, E15 e E21 não apresentaram resoluções para o item *a*.

Os processos mobilizados nas resoluções dos seis estudantes que resolveram esse item foram:

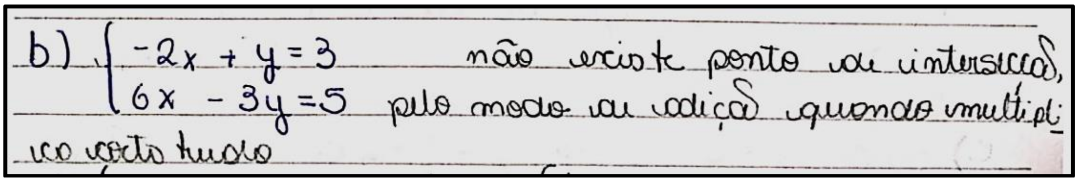
- intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos prévios a respeito de Sistemas Lineares para resolver a questão;

- representação simbólica, pois, compreenderam e utilizaram os símbolos e notações matemáticas para a interpretação e resolução da questão; e

- representação mental, pois, associaram o método da adição e/ou o método da substituição como método(s) para a resolução do Sistema Linear dado.

No item *b*, foi proposta a resolução de um Sistema de Equações lineares impossível. Os estudantes E2 e E3 apresentaram resoluções adequadas para o item. Ambos utilizaram o método da adição e explicaram a solução obtida, como ilustrado na produção escrita do estudante E3 (Figura 125).

Figura 125 – Resolução do estudante E3 – Questão 3 item *b*

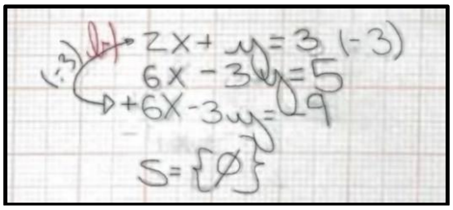


b) $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}$ não existe ponto de intersecção, pelo modo de adição quando multipli-co corta tudo

Fonte: produção escrita do estudante E3.

Os estudantes E16 e E25 apresentaram soluções parcialmente adequadas para o item. Sendo que o primeiro apenas sinalizou que o sistema era impossível, sem apresentar cálculos ou anotações que justificassem sua resposta. O segundo resolveu o sistema utilizando o método da adição e apresentou como conjunto solução o conjunto vazio – fazendo uso inadequado da notação de conjuntos – como mostrado na Figura 126.

Figura 126 – Resolução do estudante E25 – Questão 3 item *b*



Fonte: produção escrita do estudante E25.

Os demais estudantes não apresentaram resoluções para o item *b* da questão.

Inferimos, de acordo com o Quadro 3, que os estudantes E2, E3 e E25 mobilizaram em suas resoluções os processos de:

- intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos prévios a respeito de Sistemas Lineares para resolver a questão;

- representação simbólica, pois, compreenderam e utilizaram os símbolos e notações matemáticas para a interpretação e resolução da questão; e

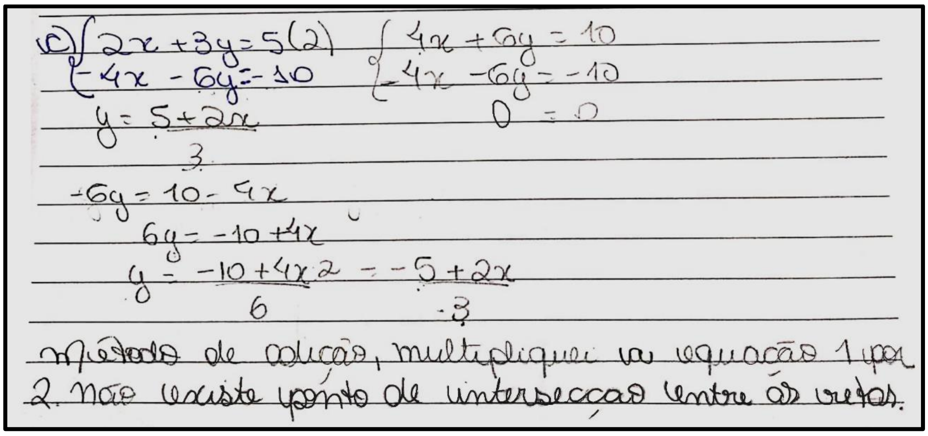
- representação mental, pois, associaram o método da adição como método para a resolução do Sistema Linear dado.

Ressaltamos que na resolução do estudante E16 encontramos apenas indícios do processo de intuição, visto que ele não apresentou esboços, esquemas ou cálculos, para o item.

O último item da questão, item *c*, propôs a resolução de um sistema possível indeterminado.

Os estudantes E2, E16 e E25 apresentaram resoluções parcialmente adequadas para esse item. O estudante E2 utilizou primeiramente o método da adição e, ao notar que as equações se anularam, utilizou o método da substituição para encontrar uma relação entre as variáveis, porém, concluiu que não existia ponto em comum entre as retas (Figura 127).

Figura 127 – Resolução do estudante E2 – Questão 3 item *c*

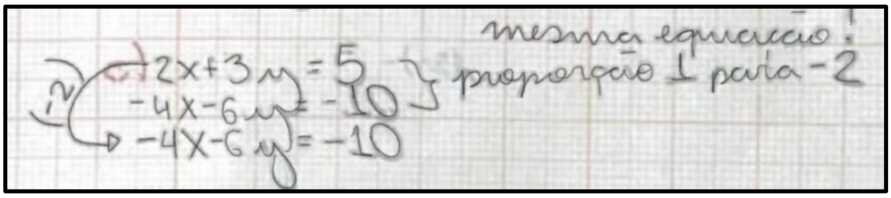


Fonte: produção escrita do estudante E2.

O estudante E16 apenas respondeu que o sistema possuía uma solução possível indeterminada, mas não exibiu nenhuma justificativa para a afirmação.

Já o estudante E25 resolveu o sistema pelo método da adição, e identificou que as duas equações eram equivalentes, como ilustrado na Figura 128, porém, o estudante não exibiu a solução do sistema linear.

Figura 128 – Resolução do estudante E25 – Questão 3 item *c*



Fonte: produção escrita do estudante E25.

O estudante E3 apresentou uma resolução inadequada para o item, pois, após utilizar o método da adição, concluiu que não existiria ponto de interseção entre as duas retas representadas pela equação. Os demais estudantes não apresentaram resoluções para o item *c* da Questão 3.

Entendemos que, nesse item da questão, os estudantes apresentaram em suas resoluções indícios dos processos de:

- intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos prévios a respeito de Sistemas Lineares para resolver a questão;

- representação simbólica, pois, compreenderam e utilizaram os símbolos e notações matemáticas para a interpretação e resolução da questão; e

- representação mental, pois, associaram um método de resolução apropriado para a obtenção da solução do sistema linear dado.

Quanto ao estudante E16, ainda que ele tenha resolvido adequadamente os sistemas lineares propostos nas questões anteriores, podemos inferir apenas a mobilização do processo de intuição em sua resolução para esse item, visto que ele apenas classificou o sistema linear dado.

Exibimos no Quadro 7 uma síntese das resoluções apresentadas pelos estudantes para cada item das três questões propostas na Tarefa 3, aplicada durante o quinto episódio de ensino.

Quadro 7 – Síntese das análises do Episódio 5.

Questão	**Resoluções adequadas/ corretas**	**Resoluções parcialmente corretas**	**Resoluções inadequadas/ incorretas**	**Em branco**	**Processos do PMA evidenciados**
1a	**Todas**	-	-	-	Representação simbólica, Representação mental, Intuição e Mudança de representação e tradução
1b	**E2, E3, E5, E7, E9, E11, E14, E15, E16** e **E25**	**E21**	-	-	Representação simbólica, Representação mental, Intuição e Mudança de representação e tradução
1c	**Todas**	-	-	-	Representação mental e Intuição
1d	**E3, E5, E9, E11, E14, E15** e **E25**	**E2, E16** e **E21**	**E7**	-	Representação simbólica, Representação mental, Intuição e Mudança de representação e tradução

1e	**E2, E3, E9, E11, E14, E15** e **E25**	**E5, E16** e **E21**	E7	-	Representação simbólica, Representação mental, Intuição, Mudança de representação e tradução e Síntese
2a	**Todas**	-	-	-	Representação simbólica, Representação mental, Intuição, e Mudança de representação e tradução
2b	**E5, E7, E9, E11, E14, E15, E16** e **E25**	**E2, E3** e **E21**	-	-	Representação simbólica, Representação mental, Intuição, e Mudança de representação e tradução
2c	**E2, E3, E7, E9, E11, E14, E15, E16** e **E25**	-	-	E5 e E21	Representação mental e Intuição
2d	**E2, E3, E7, E9, E11, E14, E15, E16** e **E25**	-	-	E5 e E21	Representação mental, Intuição e Síntese
2e	**E2, E3, E7, E9, E11, E14, E15, E16** e **E25**	-	-	E5 e E21	Representação mental, Representação Simbólica, Intuição, Mudança de representação e tradução, e Síntese
2f	**E2, E7, E9, E11, E14, E15, E16** e **E25**	-	-	E3, E5 e E21	Representação simbólica e Intuição
3a	**E2** e **E3**	**E9, E11, E16** e **E25**	-	E5, E7, E14, E15 e E21	Representação Simbólica, Representação mental e Intuição
3b	**E2** e **E3**	**E16** e **E25**	-	E5, E7, E9, E11, E14, E15 e E21	Representação Simbólica, Representação mental e Intuição
3c	-	**E2, E16** e **E25**	**E3**	E5, E7, E9, E11, E14, E15 e E21	Representação Simbólica, Representação mental e Intuição

Fonte: autoria própria.

O episódio 5 explorou as representações algébrica e geométrica de Equações Lineares e de Sistema de Equações Lineares de duas equações e duas incógnitas. As questões que compunham a Tarefa 3 conduziram o desenvolvimento dessas representações em paralelo, propondo a reflexão sobre os resultados obtidos.

Analisando quais processos do PMA foram mobilizados na resolução da tarefa, encontramos indícios dos processos de representação mental, representação simbólica, intuição, mudança de representação e tradução, e síntese na produção escrita da maioria dos estudantes.

Assim, uma das potencialidades da abordagem exploratória dos conteúdos de Sistemas de Equações Lineares, proposta nesse episódio da Experiência de Ensino, é a de proporcionar aos estudantes experiências com diferentes representações de um mesmo conceito, incitando-os a relacionar as representações algébrica e gráfica dos Sistemas de Equações Lineares e utilizá-las na sua resolução.

No entanto, notamos nas resoluções da Questão 3 que nenhum dos estudantes recorreu à representação gráfica para a verificação da solução de um sistema linear, dificuldade observada na avaliação diagnóstica e também no estudo de Barros, Fernandes e Araújo (2012). Destacamos ainda, que muitos estudantes deixaram essa questão em branco por não conseguirem finalizar as resoluções no tempo disponibilizado.

Nesse sentido, a professora-pesquisadora promoveu, durante a etapa de discussão da tarefa, momentos de debate e reflexão sobre as contribuições de cada representação e de cada método de resolução para o estudo dos Sistemas Lineares, e planejou as tarefas do episódio seguinte visando explorar ainda mais essas contribuições, como detalhado nas Seções 4.1.4 e 4.2.5.

5.5 EPISÓDIO 6

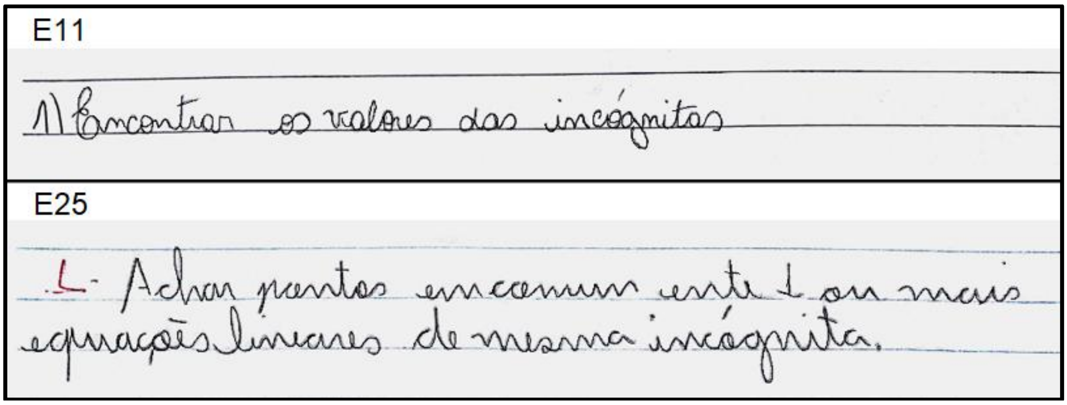
Durante o sexto episódio de ensino ocorreu a resolução da tarefa 4 (Apêndice G). Por meio das oito questões que compõem a tarefa, buscou-se explorar a classificação, a verificação e a representação geométrica da solução de Sistemas Lineares de duas e três variáveis.

A seguir, identificamos nas resoluções dos estudantes indícios de processos do PMA, segundo os autores Dreyfus e Eisenberg (1996) e Dreyfus (2002).

Questão 1

A Questão 1 indagava: “O que significa resolver um sistema linear?”. Setes estudantes (E7, E9, E11, E14, E15, E16 e E25) responderam, de maneira geral, que resolver um sistema linear consiste em encontrar o valor das incógnitas desse sistema, como exibido na Figura 129. Classificamos esse tipo de resposta como adequada.

Figura 129 – Resoluções dos estudantes E11 e E25 – Questão 1


E11

1) Encontrar os valores das incógnitas

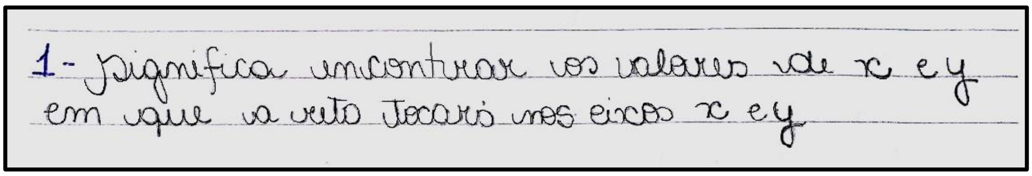
E25

1- Achar pontos em comum entre 1 ou mais equações lineares de mesma incógnita.

Fonte: produção escrita dos estudantes E11 e E25.

Os estudantes E2, E3, E5 e E21, apresentaram resoluções que classificamos como inadequadas, pois, refletem uma interpretação geométrica equivocada do conceito de solução de um sistema linear, como mostra a resposta do estudante E3 (Figura 130).

Figura 130 – Resolução do estudante E3 – Questão 1


1- significa encontrar os valores de x e y em que a reta tocará nos eixos x e y

Fonte: produção escrita do estudante E3.

Inferimos, de acordo com o Quadro 3, que em todas as resoluções apresentadas para essa questão, foram mobilizados os seguintes processos do PMA:

- intuição, pois, os estudantes utilizam conhecimentos matemáticos prévios para examinar a situação matemática proposta; e

- generalização, pois, os estudantes induzem, a partir de casos particulares, obtendo resultados/métodos genéricos, no caso, como resolver um Sistema Linear qualquer.

Questão 2

A Questão 2 fornecia instruções para que os estudantes construíssem duas retas no GeoGebra, utilizando controles deslizantes, para que pudessem analisar os Sistemas Lineares da questão seguinte.

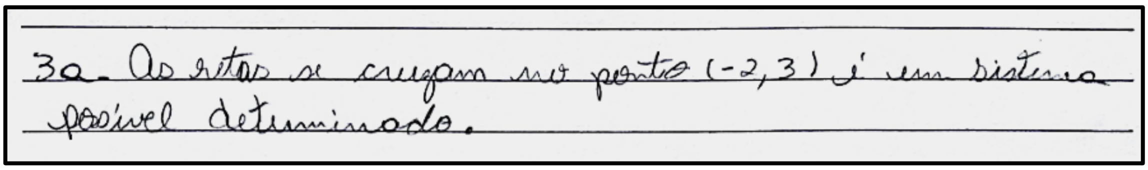
Assim, não há produção escrita para analisarmos nessa questão.

Questão 3

Na Questão 3 os estudantes deveriam verificar geometricamente a solução e classificar três Sistemas Lineares de duas equações e duas incógnitas (no episódio anterior foi proposta a resolução desses mesmos sistemas).

Nove estudantes (E2, E5, E9, E11, E14, E15, E16, E21 e E25) apresentaram resoluções adequadas para o item *a* da questão, o qual abordava um Sistema Linear possível determinado (Figura 131).

Figura 131 – Resolução do estudante E21 – Questão 3 item *a*


3a- As retas se cruzam no ponto (-2, 3) é um sistema possível determinado.

Fonte: produção escrita do estudante E21.

Identificamos nas resoluções adequadas do item indícios do processo de:

- intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos prévios a respeito de Sistemas Lineares para resolver a questão;

- representação simbólica, pois, compreenderam os símbolos e notações matemáticas para a interpretação e resolução da questão; e

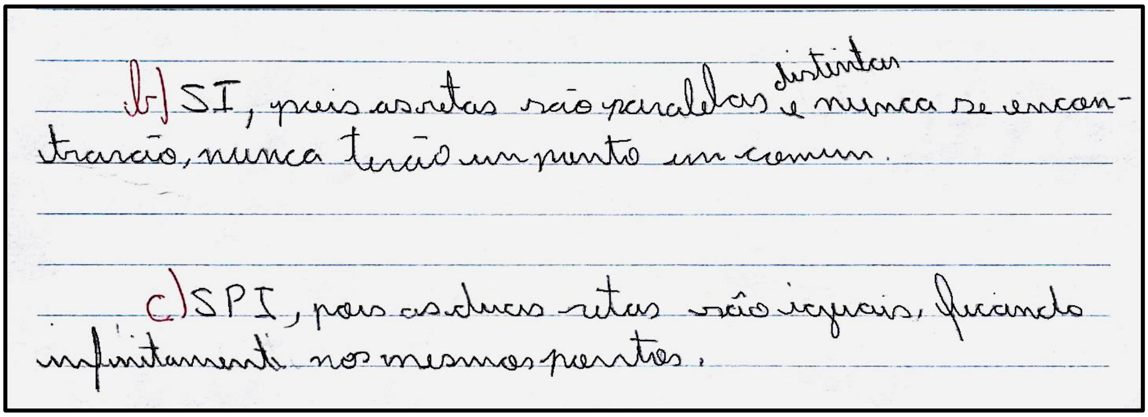
- mudança de representação e tradução, visto que, os estudantes transitam entre as representações algébrica e geométrica do Sistema Linear dado para classificá-lo de acordo com o tipo de solução obtida.

Os estudantes E3 e E7 apresentaram resoluções parcialmente adequadas para o item, pois, não classificaram nem exibiram a solução do Sistema Linear, apenas descreveram a posição relativa das retas. Sendo assim, inferimos que eles mobilizaram apenas os processos de intuição e representação simbólica em suas resoluções.

Os itens *b* e *c* abordaram um sistema impossível e um sistema possível indeterminado, respectivamente. Tais itens foram resolvidos adequadamente por nove estudantes (E2, E5, E9, E11, E14, E15, E16, E21 e E25).

Mostramos na Figura 132, por exemplo, a resolução do estudante E25 para os itens *b* e *c* da Questão 3.

Figura 132 – Resolução do estudante E25 – Questão 3 itens *b* e *c*


b) SI, pois as retas são paralelas distintas e nunca se encontrarão, nunca terão um ponto em comum.

c) SPI, pois as duas retas são iguais, ficando infinitamente nos mesmos pontos.

Fonte: produção escrita do estudante E25.

O estudante E7 apresentou resoluções parcialmente adequadas para esses itens, não classificando os Sistemas Lineares. Quanto ao estudante E3, obteve a solução dos sistemas e os classificou inadequadamente.

Assim como no item *a* da questão, inferimos que os processos do PMA mobilizados nas resoluções dos itens *b* e *c* são:

- intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos prévios a respeito de Sistemas Lineares para resolver a questão;

- representação simbólica, pois, compreenderam os símbolos e notações matemáticas para a interpretação e resolução da questão; e

- mudança de representação e tradução, visto que, os estudantes transitam entre as representações algébrica e geométrica do Sistema Linear dado para classificá-lo de acordo com o tipo de solução obtida.

Questão 4

A Questão 4 fornecia instruções para que os estudantes construíssem três planos no GeoGebra, utilizando controles deslizantes para os coeficientes, por meio dos quais foram realizadas as explorações propostas nas Questões 5, 6, 7 e 8.

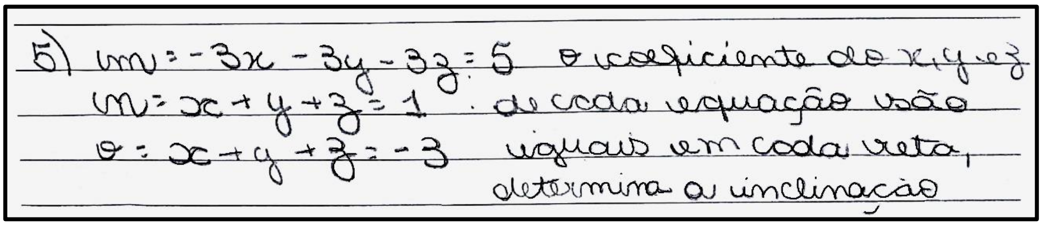
Assim, não há produção escrita para analisarmos nessa questão.

Questão 5

Para a Questão 5 os estudantes deveriam mover os controles deslizantes de forma a obter três planos paralelos distintos.

O item *a* solicitava ao estudante o Sistema Linear obtido a partir das equações dos planos e uma comparação entre essas equações. Apenas os estudantes E2, E9 e E11 resolveram esse item adequadamente, como ilustrado pela resolução do estudante E2 (Figura 133).

Figura 133 – Resolução do estudante E2 – Questão 5 item *a*



Fonte: produção escrita do estudante E2.

Os demais estudantes apresentaram resoluções parcialmente adequadas para o item, pois, apesar de terem obtido as três equações adequadamente, não as compararam.

Inferimos, de acordo com o Quadro 3, que as resoluções desse item apresentam indícios dos processos de:

- intuição, pois, os estudantes utilizam seus conhecimentos matemáticos prévios para examinar a questão;

- representação simbólica, pois, compreendem o significado de símbolos e notações matemáticas na representação/interpretação da situação matemática; e

- mudança de representação e tradução, pois, os estudantes transitaram entre as representações geométrica e algébrica de um Sistema Linear, relacionando-as.

Nas resoluções dos estudantes E2, E9 e E11 inferimos, ainda, que houve a mobilização do processo de:

- síntese, pois, estabeleceram relações entre conceitos e propriedades matemáticas ao compararem as retas e identificarem os coeficientes como determinantes na inclinação dos planos.

Nos itens *b* e *c* os estudantes deveriam explicar qual o tipo de solução para o Sistema Linear obtido e classificá-lo.

Todos os onze estudantes apresentaram resoluções adequadas para esses itens, mobilizando os processos de:

- intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos prévios a respeito de Sistemas Lineares para resolver a questão;

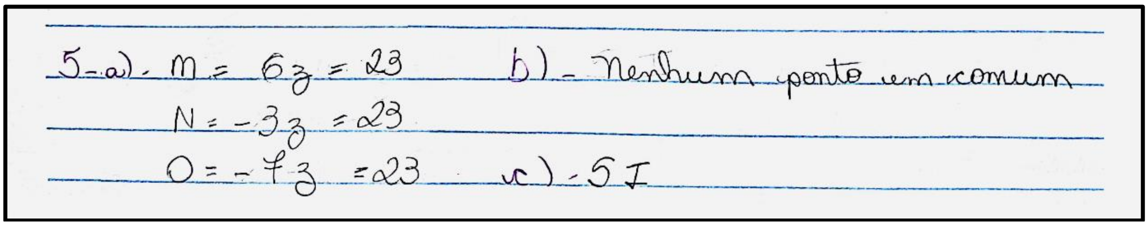
- representação simbólica, pois, compreenderam o significado de símbolos ou notações matemáticas na representação e interpretação da situação matemática;

- representação mental, pois, associaram o conceito de solução de um sistema linear com o tipo de solução representada geometricamente;

- analogia, pois, abordaram de forma análoga as soluções de sistemas lineares 2x2 e 3x3.

Na Figura 134 exibimos a resolução do estudante E15 para a Questão 5.

Figura 134 – Resolução do estudante E15 – Questão 5


5-a) - m = 6z = 23   b) - Nenhum ponto em comum
N = -3z = 23
O = -7z = 23   c) - SI

Fonte: produção escrita do estudante E15.

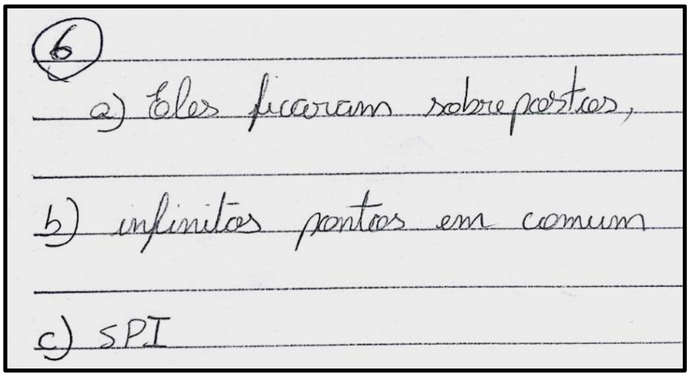
Questão 6

Na Questão 6 os estudantes deveriam mover os controles deslizantes de modo a tornar as três equações múltiplas, para então analisar a solução do Sistema Linear obtido.

O item *a* questionou qual a posição entre os planos, o item *b* qual o tipo de solução para o Sistema Linear formado pelas três equações e, por fim, o item *c* questionou qual a classificação desse Sistema Linear.

Os três itens foram resolvidos adequadamente por todos os onze estudantes. Exibimos na Figura 135 a resolução do estudante E14 para a questão.

Figura 135 – Resolução do estudante E14 – Questão 6


6
a) Eles ficaram sobrepostos,
b) infinitos pontos em comum
c) SPI

Fonte: produção escrita do estudante E14.

Inferimos que para a resolução dos itens *a, b e c* dessa questão foram mobilizados os processos de:

- intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos prévios a respeito de Sistemas Lineares para resolver a questão;

- representação simbólica, pois, compreenderam o significado de símbolos ou notações matemáticas na representação e interpretação da situação matemática;

- representação mental, pois, associaram o conceito de solução de um sistema linear com o tipo de solução representada geometricamente;

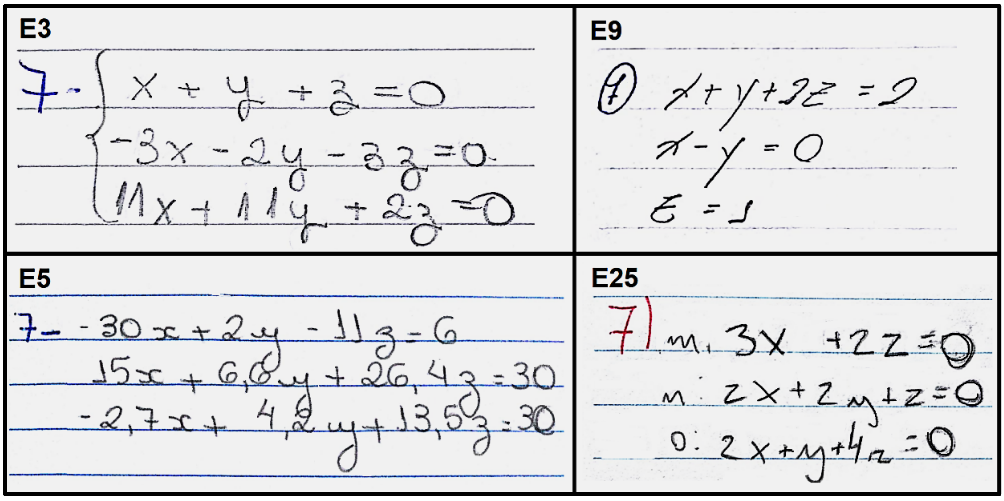
- analogia, pois, abordaram de forma análoga as soluções de sistemas lineares 2x2 e 3x3.

Questão 7

A Questão 7 solicitou aos estudantes que movessem os controles deslizantes de modo a obter um sistema possível determinado.

Oito estudantes, E3, E5, E7, E9, E11, E16, E21 e E25, resolveram a questão adequadamente, como mostrado em algumas resoluções na Figura 136.

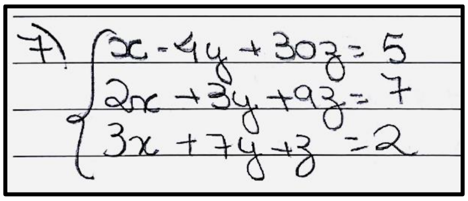
Figura 136 – Resoluções dos estudantes E3, E5, E9 e E25 – Questão 7



Fonte: produção escrita dos estudantes E3, E5, E9 e E25.

O estudante E2 apresentou uma resolução inadequada para a questão, pois, obteve um sistema impossível (Figura 137), no qual os planos possuíam interseção dois a dois apenas.

Figura 137 – Resolução do estudante E2 – Questão 7



Fonte: produção escrita do estudante E2.

Os estudantes E14 e E15 não apresentaram resoluções para essa questão.

Inferimos, de acordo com o Quadro 3, que os processos mobilizados pelos estudantes em suas resoluções foram:

- intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos prévios a respeito de Sistemas Lineares para resolver a questão;

- representação simbólica, pois, compreenderam o significado de símbolos ou notações matemáticas na representação e interpretação da situação matemática;

- representação mental, pois, associaram o conceito de solução de um sistema linear com o tipo de solução representada geometricamente;

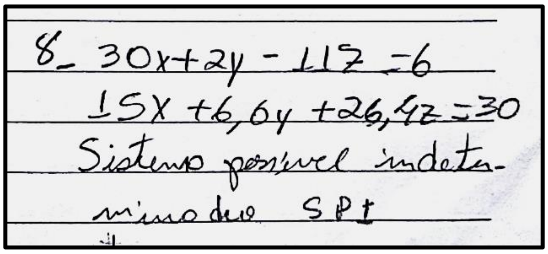
- analogia, pois, abordaram de forma análoga as soluções de sistemas lineares 2x2 e 3x3.

Questão 8

A Questão 8 propôs aos estudantes a exclusão de uma das equações do Sistema Linear construído na questão anterior (Questão 7), e questionou quais tipos de solução poderiam ser obtidos a partir desse novo Sistema Linear de duas equações e três incógnitas.

Apenas os estudantes E5 e E21 resolveram essa questão adequadamente. Esses estudantes, ao excluírem uma das equações, obtiveram um sistema possível indeterminado, como mostrado na Figura 138.

Figura 138 – Resolução do estudante E21 – Questão 8


8- $30x+2y-11z=6$
$15x+6,6y+26,4z=30$
Sistema possível indeterminado SPI

Fonte: produção escrita do estudante E21.

As resoluções dos estudantes E7, E9, E11 e E16 foram classificadas como inadequadas, pois, apenas apresentam as possíveis classificações para um Sistema Linear qualquer.

Os demais estudantes não apresentaram resoluções para essa questão.

Inferimos, de acordo com o Quadro 3, que os processos mobilizados pelos estudantes que resolveram adequadamente essa questão foram:

- intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos prévios a respeito de Sistemas Lineares para resolver a questão;

- representação simbólica, pois, compreenderam o significado de símbolos ou notações matemáticas na representação e interpretação da situação matemática;

- representação mental, pois, associaram o conceito de solução de um sistema linear com o tipo de solução representada geometricamente;

- analogia, pois, abordaram de forma análoga as soluções de sistemas lineares 2x2 e 3x3.

Entendemos que os estudantes que resolveram a questão de forma inadequada mobilizaram somente o processo de intuição, pois, apenas listaram as possíveis classificações para um Sistema Linear.

No Quadro 8 apresentamos uma síntese dos processos do PMA identificados nas produções escritas da Tarefa 4, aplicada durante o sexto episódio de ensino.

Quadro 8 – Síntese das análises do Episódio 6.

<table>
<tr><th>Questão</th><th>Resoluções adequadas/ corretas</th><th>Resoluções parcialmente corretas</th><th>Resoluções inadequadas/ incorretas</th><th>Em branco</th><th>Processos do PMA evidenciados</th></tr>
<tr><td>1</td><td>E7, E9, E11, E14, E15, E16 e E25</td><td>-</td><td>E2, E3, E5 e E21</td><td>-</td><td>Intuição e Generalização</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>3a</td><td>E2, E5, E9, E11, E14, E15, E16, E21 e E25</td><td>E3 e E7</td><td>-</td><td>-</td><td>Representação Simbólica, Intuição e Mudança de representação e tradução</td></tr>
<tr><td>3b</td><td>E2, E5, E9, E11, E14, E15, E16, E21 e E25</td><td>E7</td><td>E3</td><td>-</td><td>Representação Simbólica, Intuição e Mudança de representação e tradução</td></tr>
<tr><td>3c</td><td>E2, E5, E9, E11, E14, E15, E16, E21 e E25</td><td>E7</td><td>E3</td><td>-</td><td>Representação Simbólica, Intuição e Mudança de representação e tradução</td></tr>
<tr><td>4</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>5a</td><td>E2, E9 e E11</td><td>E3, E5, E7, E14, E15, E16, E21 e E25</td><td>-</td><td>-</td><td>Representação Simbólica, Intuição, Mudança de representação e tradução e Síntese</td></tr>
<tr><td>5b</td><td rowspan="2">Todas</td><td rowspan="2">-</td><td rowspan="2">-</td><td rowspan="2">-</td><td rowspan="2">Representação mental, Representação Simbólica, Intuição e Analogia</td></tr>
<tr><td>5c</td></tr>
<tr><td>6a</td><td rowspan="3">Todas</td><td rowspan="3">-</td><td rowspan="3">-</td><td rowspan="3">-</td><td rowspan="3">Representação mental, Representação Simbólica, Intuição e Analogia</td></tr>
<tr><td>6b</td></tr>
<tr><td>6c</td></tr>
<tr><td>7</td><td>E3, E5, E7, E9, E11, E16, E21 e E25</td><td>-</td><td>E2</td><td>E14, E15</td><td>Representação mental, Representação Simbólica, Intuição e Analogia</td></tr>
<tr><td>8</td><td>E5 e E21</td><td>-</td><td>E7, E9, E11 e E16</td><td>E2, E3, E14, E15 e E25</td><td>Representação mental, Representação Simbólica, Intuição e Analogia</td></tr>
</table>

Fonte: autoria própria.

O sexto episódio explorou a representação geométrica de Sistemas Lineares de duas e três incógnitas e a classificação da solução por meio do *software* GeoGebra, dando sequência ao trabalho do episódio 5, no qual foram estudadas a resolução e a construção (em folha milimetrada) da representação geométrica de Sistemas Lineares 2x2.

A manipulação e visualização das retas e dos planos no GeoGebra proporcionaram aos estudantes relacionar as representações algébrica e geométrica de Sistemas Lineares, e superar dificuldades identificadas pela professora-pesquisadora com a construção (manual) dessas representações.

Além disso, a resolução da tarefa e as discussões em sala de aula promoveram o desenvolvimento de processos do PMA relacionados à representação: representação simbólica, representação mental, intuição, mudança de representação e tradução, e processos relacionados à abstração: analogia, generalização e síntese, mobilizados pela maioria dos estudantes nesse episódio.

A condução das discussões pela professora-pesquisadora segundo a perspectiva do Ensino-Aprendizagem Exploratório contribuiu, em especial, para que fossem evidenciadas dúvidas e situações matemáticas que não foram notadas pelos estudantes.

Como no caso da Questão 8, que foi deixada em branco por parte da turma, foi possível discutir outras situações em que um Sistema Linear poderia ter infinitas soluções (além do caso trivial em que os planos representados são paralelos coincidentes), e também realizar conexões com alguns conceitos da Geometria Analítica, para posterior estudo de retas e planos.

5.6 EPISÓDIO 7

No sétimo episódio de ensino foi realizado um Seminário sobre métodos de resolução de Sistemas de Equações Lineares.

Para a apresentação do seminário foram formados quinze grupos, para cada qual foi designado um método de resolução (adição, substituição, escalonamento, regra de Cramer ou matricial) e um tipo de solução (possível determinada, possível indeterminada ou impossível), e disponibilizado o tempo aproximado de sete minutos para resolução e explicação do Sistema Linear no quadro.

Os métodos da adição, substituição e escalonamento, no caso SPD, foram apresentados sem maiores dificuldades pelos estudantes. Nos casos SI e SPI os grupos apresentaram dificuldades na interpretação dos resultados obtidos a partir dos métodos mas, durante a discussão, sinalizaram compreender e justificar a solução obtida, o que auxiliou também os próximos grupos que se apresentariam.

Nessa situação a professora-pesquisadora, em consonância com a abordagem do Ensino-Aprendizagem Exploratório da Matemática, proporcionou aos estudantes um momento de descoberta, no qual puderam negociar significados e argumentar coletivamente sobre as estratégias de resolução para Sistemas Lineares.

Outros aspectos positivos observados pela professora-pesquisadora, durante o desenvolvimento do episódio, foram as percepções, por parte dos estudantes, das relações entre os métodos da adição e o escalonamento, já que o primeiro é um caso particular do segundo, e de que as resoluções por meio desses métodos não possuem um caminho único, dependendo do raciocínio de quem as realiza.

Para o método de Cramer novamente os estudantes apresentaram dificuldades com os casos SI e SPI, nesse momento a professora-pesquisadora, ao invés de ensinar diretamente os procedimentos para o uso da regra de Cramer, incentivou os estudantes a utilizarem outros métodos (como o escalonamento) para resolver o mesmo Sistema Linear e comparar as resoluções obtidas, deixando a formalização do método para o final da aula.

O último método a ser apresentado seria o matricial, no entanto, um dos grupos não compareceu à apresentação e os outros dois disseram não compreender o método. Sendo assim, os grupos apresentaram a resolução do sistema linear escolhido por meio de outro método, e a professora-pesquisadora apresentou, no lugar do grupo ausente, a resolução de um sistema linear pelo método matricial, aproveitando para realizar a formalização desse método e iniciar as discussões dos demais.

A interação entre os pares e os desafios propostos pela professora-pesquisadora favoreceram a análise e a reflexão para a escolha de qual método utilizar na resolução de um Sistema Linear e, além disso, possibilitaram o desenvolvimento de habilidades de comunicação oral e inquirição, pois, durante as discussões, os estudantes questionaram as soluções e estratégias dos colegas e argumentaram em favor de suas ideias.

Ressaltamos, nesse episódio, a importância do planejamento da aula e da escolha das tarefas pelo professor, como mencionado por Ponte (2005), uma vez que a professora-pesquisadora, mesmo deixando livre a escolha do Sistema Linear pelo grupo, fez exigências quanto à ordem e à classificação desses, o que propiciou evidenciar durante as discussões noções mal formuladas ou incompletas dos estudantes com relação aos métodos de resolução, e construir coletivamente ideias matemáticas mais precisas e produtivas.

Nesse episódio não foi proposta uma tarefa para a resolução em papel, sendo assim, não houve produção escrita para a análise de indícios de processos do PMA.

5.7 EPISÓDIO 8

No oitavo episódio de ensino foi realizada a Tarefa 5 (Apêndice H). As cinco questões que compõem a tarefa abordaram a modelação de situações-problema que podem ser resolvidas por meio de Sistemas de Equações Lineares.

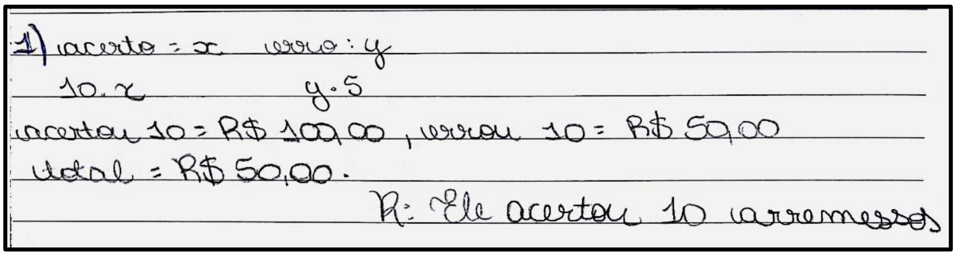
A seguir, buscaremos identificar nas resoluções dos estudantes indícios de processos do PMA, conforme propostos pelos autores Dreyfus e Eisenberg (1996) e Dreyfus (2002).

Questão 1

A Questão 1 propôs uma situação-problema que poderia ser modelada e resolvida como um sistema de equações lineares de duas equações e duas incógnitas.

Essa questão foi resolvida adequadamente por todos os onze estudantes participantes, sendo que um deles (E2) a resolveu por meio de tentativa e erro, como mostra a Figura 139.

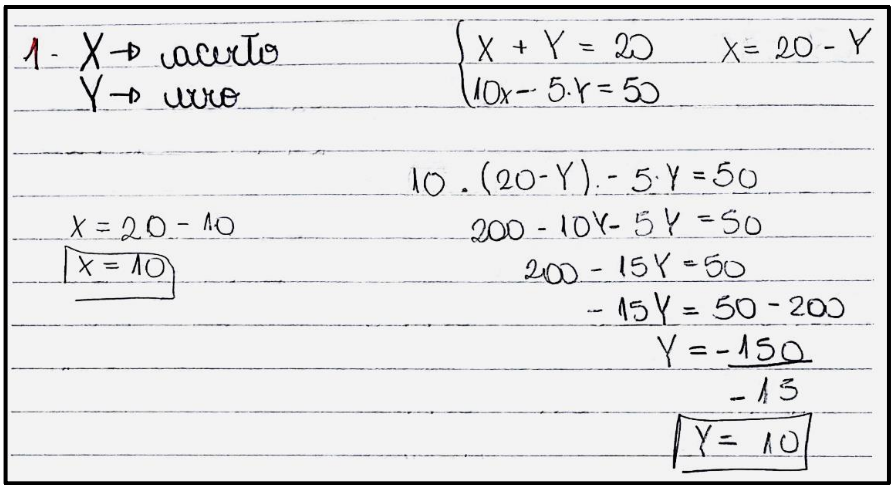
Figura 139 – Resolução do estudante E2 – Questão 1



Fonte: produção escrita do estudante E2.

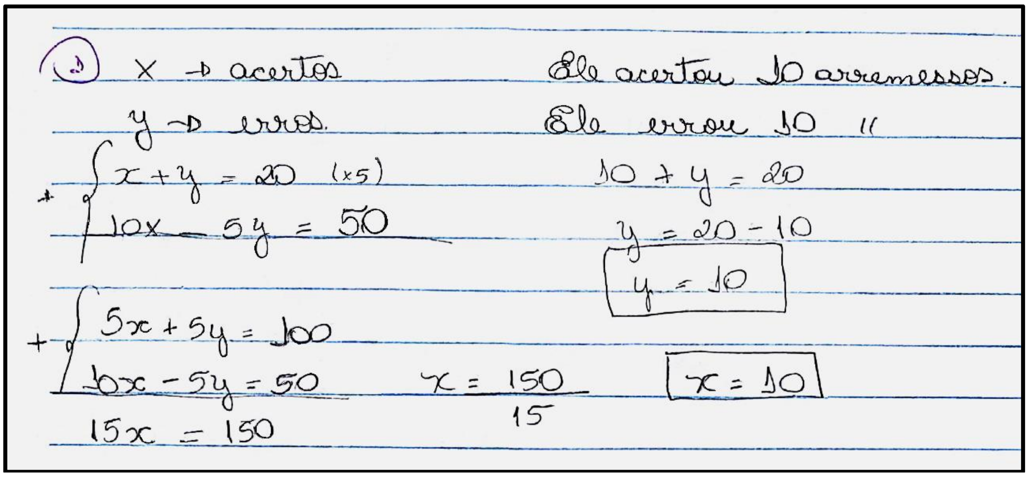
Entre os demais estudantes, os métodos utilizados foram o da substituição (Figura 140) por quatro estudantes, e o da adição (Figura 141) por seis estudantes.

Figura 140 – Resolução do estudante E3 – Questão 1



Fonte: produção escrita do estudante E3.

Figura 141 – Resolução do estudante E15 – Questão 1



Fonte: produção escrita do estudante E15.

Durante as discussões do episódio os estudantes argumentaram sobre a escolha de tais métodos e, segundo eles, ela foi realizada considerando a ordem do Sistema Linear obtido e a familiaridade com tais métodos.

Inferimos, de acordo com o Quadro 3, que os processos do PMA mobilizados pelos estudantes na resolução dessa questão foram:

- intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos matemáticos prévios para resolver a questão;

- representação simbólica, pois, compreenderam e utilizaram os símbolos e notações matemáticas para a interpretação e resolução da questão;

- representação mental, pois, associaram um método para a resolução do Sistema Linear dado;

- visualização, ao gerar alguma imagem mental do conceito de Sistemas Lineares e externalizá-la por meio de esboços ou esquemas para representar e/ou compreender situações matemáticas, analisar e explorar problemas;

- modelação, pois, construíram ou adequaram um modelo matemático a partir dos dados do enunciado da questão para estudar o comportamento de um processo; e

- mudança de representação e tradução, pois, transitaram entre as representações em linguagem natural e em linguagem algébrica do problema.

Dentre esses, entendemos que os estudantes E3, E5, E7, E9, E11, E14, E15, E16, E21 e E25 mobilizaram os processos: intuição, representação simbólica, representação mental, modelação e mudança de representação e tradução. E o estudante E2 mobilizou os processos: intuição, representação simbólica e visualização.

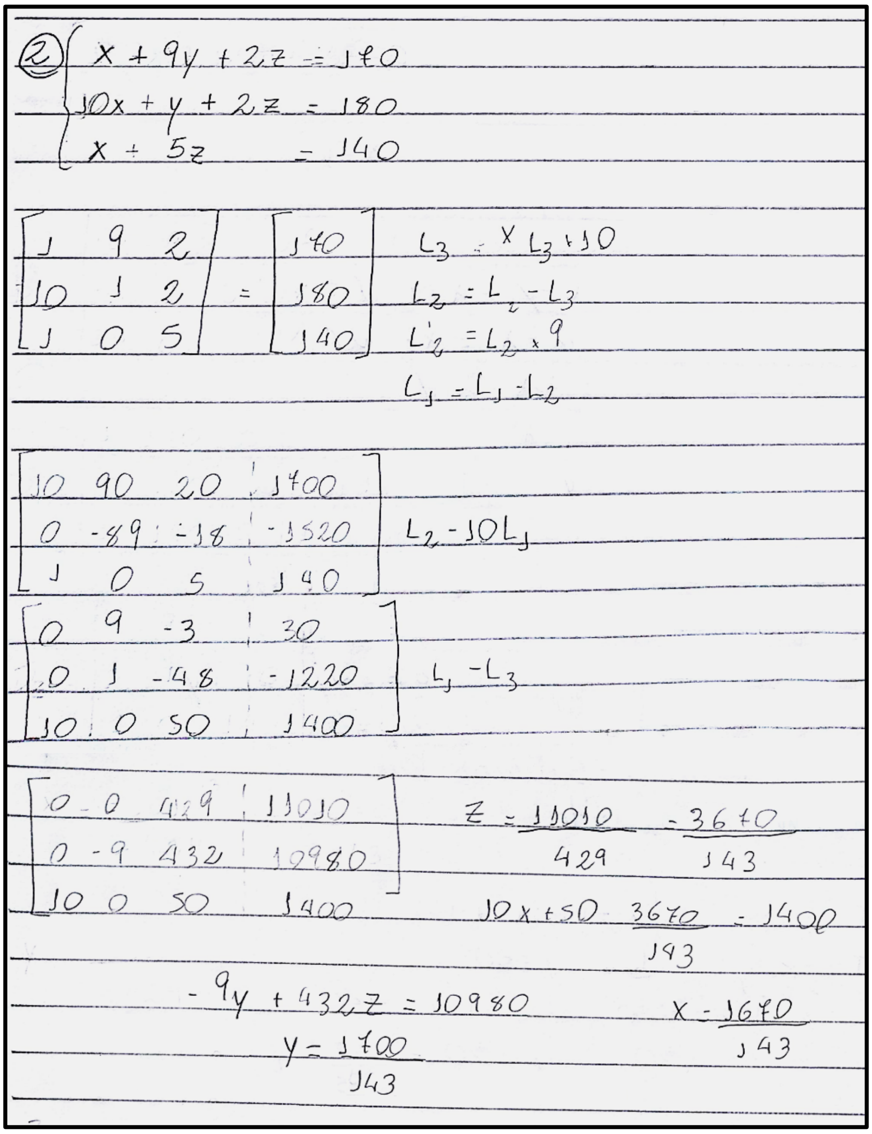
Questão 2

A Questão 2 abordou a modelação e a resolução de um Sistema Linear 3x3, em um contexto de semi-realidade.

Durante a resolução dessa questão foi observada a dificuldade dos estudantes quanto à modelação do problema e, especialmente, na identificação das incógnitas.

Sete estudantes apresentaram resoluções para essa questão. Desses, E14 e E16 resolveram a questão adequadamente, utilizando o método de escalonamento (Figura 142) e o método de Cramer (Figura 143), respectivamente.

Figura 142 – Resolução do estudante E14 – Questão 2



2)
$$\begin{cases} x + 9y + 2z = 170 \\ 10x + y + 2z = 180 \\ x + 5z = 140 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 10 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 170 \\ 180 \\ 140 \end{bmatrix}$$

$L_3 = x\,L_3 + 10$

$L_2 = L_2 - L_3$

$L'_2 = L_2 \times 9$

$L_1 = L_1 - L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 10 & 90 & 20 & 1700 \\ 0 & -89 & -18 & -1520 \\ 1 & 0 & 5 & 140 \end{array}\right] \quad L_2 - 10L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 9 & -3 & 30 \\ 0 & 1 & -48 & -1220 \\ 10 & 0 & 50 & 1400 \end{array}\right] \quad L_1 - L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 429 & 11010 \\ 0 & -9 & 432 & 10980 \\ 10 & 0 & 50 & 1400 \end{array}\right]$$

$z = \frac{11010}{429} = \frac{3670}{143}$

$10x + 50\,\frac{3670}{143} = 1400$

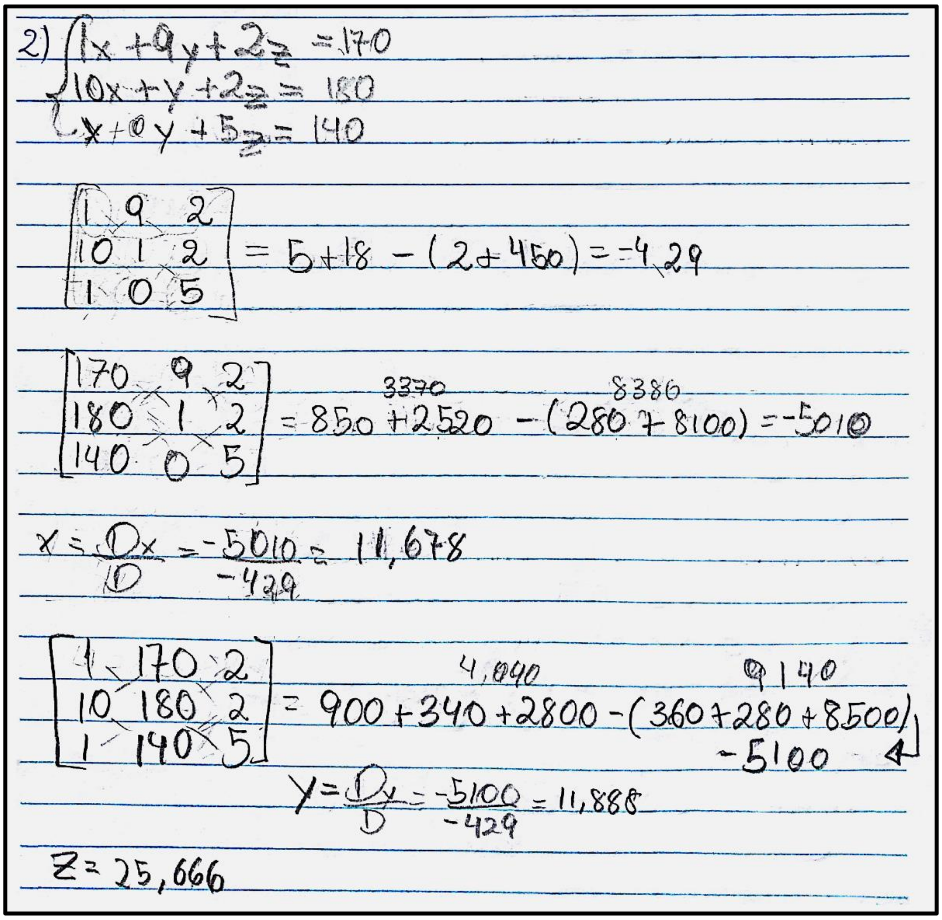
$-9y + 432z = 10980$

$x = \frac{1670}{143}$

$y = \frac{1700}{143}$

Fonte: produção escrita do estudante E14.

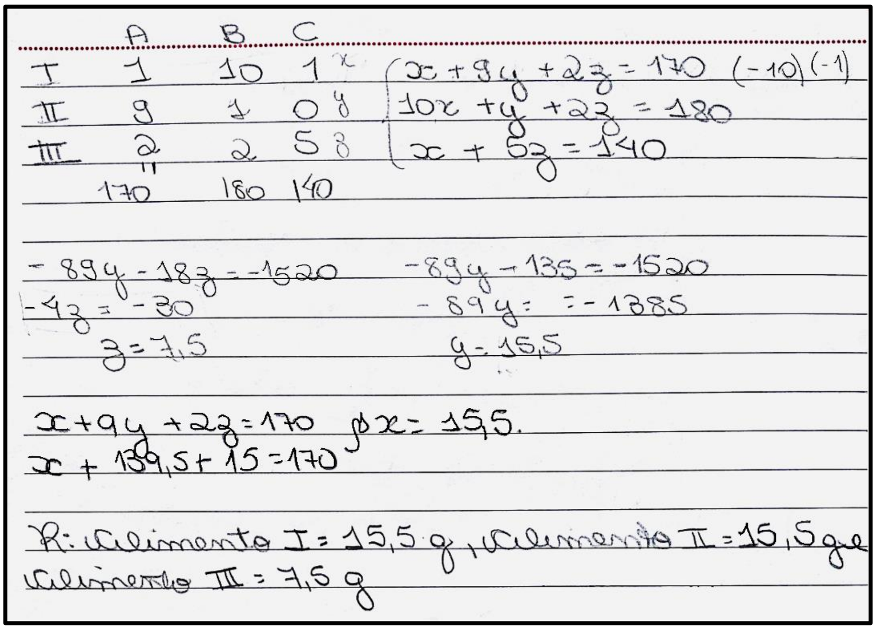
Figura 143 – Resolução do estudante E16 – Questão 2



Fonte: produção escrita do estudante E16.

Os estudantes E2, E3 e E7 apresentaram resoluções parcialmente adequadas para o problema, visto que E3 apenas modelou o problema. Os demais apresentaram erros nos cálculos, como exemplificado pela resolução do estudante E2 (Figura 144) que errou a subtração das equações para a obtenção do valor de z, o que influenciou no resultado das demais incógnitas.

Figura 144 – Resolução do estudante E2 – Questão 3



	A	B	C	
I	1	10	1	x
II	9	1	0	y
III	2	2	5	z
	170	180	140	

$$\begin{cases} x + 9y + 2z = 170 \quad (-10)(-1) \\ 10x + y + 2z = 180 \\ x + 5z = 140 \end{cases}$$

$-89y - 18z = -1520$ $\qquad$ $-89y - 135 = -1520$

$-4z = -30$ $\qquad$ $-89y = -1385$

$z = 7{,}5$ $\qquad$ $y = 15{,}5$

$x + 9y + 2z = 170$ $\qquad$ $x = 15{,}5.$

$x + 139{,}5 + 15 = 170$

R: alimento I = 15,5 g, alimento II = 15,5 g e alimento III = 7,5 g

Fonte: produção escrita do estudante E2.

Os estudantes E9 e E11 apresentaram resoluções inadequadas para a questão, pois, ao modelarem o problema, interpretaram a quantidade de vitaminas (ao invés da quantidade de alimentos) como incógnitas.

Os processos do PMA mobilizados pelos estudantes nas resoluções apresentadas, de acordo com o Quadro 3, foram:

- intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos prévios a respeito de Sistemas Lineares para resolver a questão;

- representação simbólica, pois, compreenderam e utilizaram os símbolos e notações matemáticas para a interpretação e resolução da questão;

- representação mental, pois, associaram um método de resolução para o Sistema Linear dado;

- modelação, pois, construíram ou adequaram um modelo matemático a partir dos dados do enunciado da questão para estudar o comportamento de um processo; e

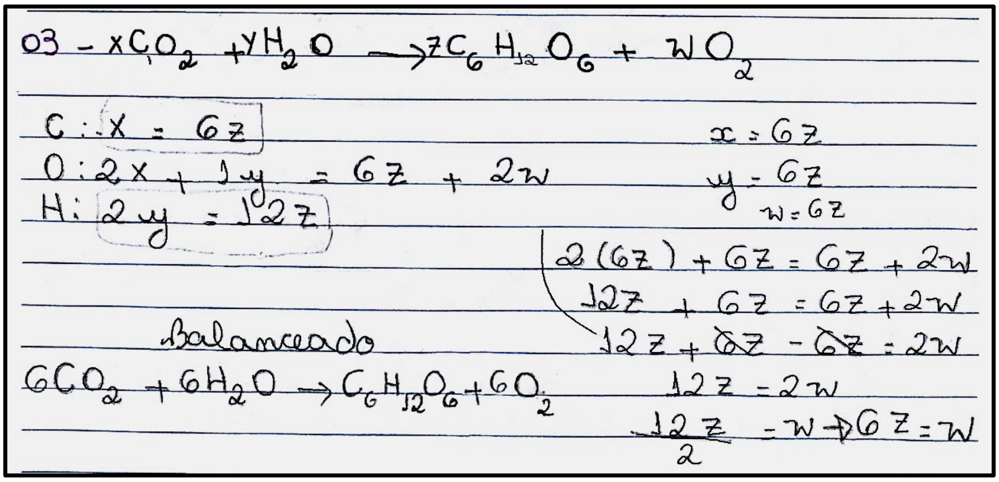
- mudança de representação e tradução, pois, transitaram entre as representações em linguagem natural e em linguagem algébrica do problema.

Questões 3, 4 e 5

As Questões 3, 4 e 5 propuseram o balanceamento de equações químicas por meio de Sistema Lineares.

O sistema que modela a situação-problema da Questão 3 possui três equações e quatro incógnitas. Essa questão foi resolvida adequadamente por dez estudantes (E2, E3, E5, E7, E9, E11, E14, E15, E16, E25), que modelaram o problema, selecionaram um método de resolução e apresentaram a equação química balanceada, como mostrado, por exemplo, na resolução do estudante E5 (Figura 145).

Figura 145 – Resolução do estudante E5 – Questão 3



03 - $xCO_2 + yH_2O \rightarrow zC_6H_{12}O_6 + wO_2$

$C: \boxed{x = 6z}$

$O: 2x + 1y = 6z + 2w$

$H: \boxed{2y = 12z}$

$x = 6z$

$y = 6z$

$w = 6z$

$2(6z) + 6z = 6z + 2w$

$12z + 6z = 6z + 2w$

$12z + \cancel{6z} - \cancel{6z} = 2w$

$12z = 2w$

$\frac{12z}{2} = w \rightarrow 6z = w$

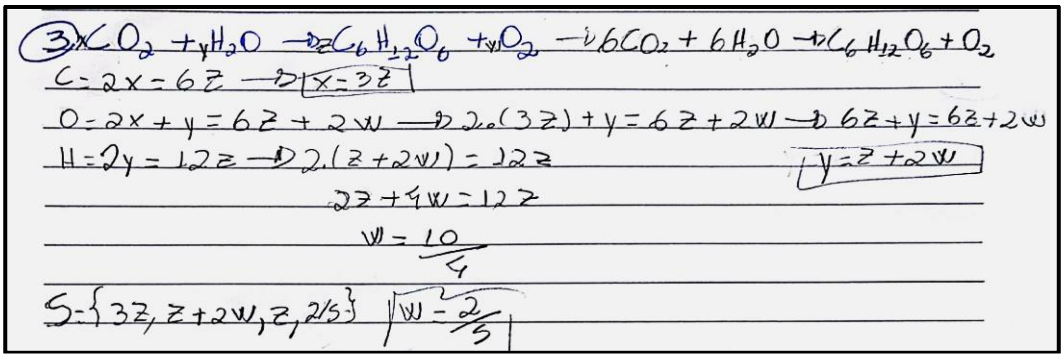
Balanceado

$6CO_2 + 6H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + 6O_2$

Fonte: produção escrita do estudante E5.

O estudante E21 apresentou uma resolução parcialmente adequada para a Questão 3, pois, cometeu um erro na construção da primeira equação do modelo, como mostrado na Figura 146.

Figura 146 – Resolução do estudante E21 – Questão 3



3) $xCO_2 + yH_2O \rightarrow zC_6H_{12}O_6 + wO_2 \rightarrow 6CO_2 + 6H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$

$C: 2x = 6z \rightarrow \boxed{x = 3z}$

$O: 2x + y = 6z + 2w \rightarrow 2.(3z) + y = 6z + 2w \rightarrow 6z + y = 6z + 2w$

$H: 2y = 12z \rightarrow 2.(z + 2w) = 12z$ $\boxed{y = z + 2w}$

$2z + 4w = 12z$

$w = \frac{10}{4}$

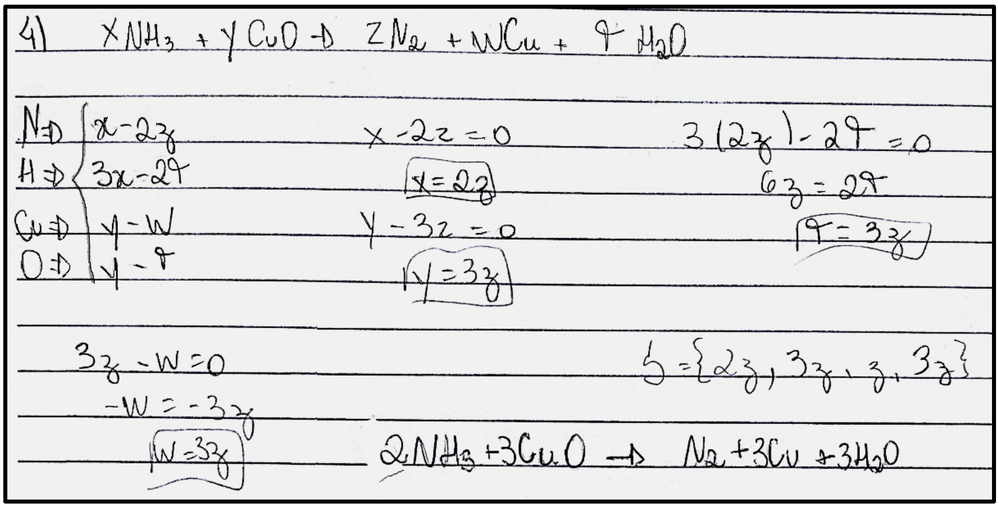
$S: \{3z, z + 2w, z, 2/5\}$ $\boxed{w = \frac{2}{5}}$

Fonte: produção escrita do estudante E21.

No entanto, entendemos que o estudante compreendeu a questão e como resolvê-la mobilizando assim, como os demais estudantes, processos do PMA.

O balanceamento da reação química proposta na Questão 4 é modelado por um Sistema de Equações Lineares de quatro equações e cinco incógnitas. Tal questão foi resolvida adequadamente por seis estudantes (E2, E3, E9, E11, E15 e E16), todos utilizaram como método de resolução o método da substituição, como mostra a resolução do estudante E11 (Figura 147).

Figura 147 – Resolução do estudante E11 – Questão 4



Fonte: produção escrita do estudante E11.

Os estudantes E5, E14, E21 e E25 apresentaram resoluções parcialmente adequadas para a Questão 4, pois, apesar de modelarem o problema adequadamente, apresentaram dificuldades na resolução do Sistema Linear obtido.

Na Figura 148 exibimos a resolução do estudante E21 que obteve as equações corretamente, porém, não realizou as substituições adequadamente.

Figura 148 – Resolução do estudante E21 – Questão 4

4) $xNH_3 + yCuO \rightarrow zN_2 + wCu + lH_2O \rightarrow 2NH_3 + CuO \rightarrow N_2 + Cu + 3H_2O$

$N: x = 2z \rightarrow \boxed{x = 2z}$

$H: 3x = 2l \rightarrow 3.(2z) = 2l \rightarrow 6z = 2l \rightarrow \boxed{z = 0,\bar{3}l}$

$Cu: \boxed{y = w}$

$O: y = l \rightarrow \boxed{w = l}$ $\quad S: \{2z, w, 0,\bar{3}, l\}$

Fonte: produção escrita do estudante E21.

Ainda a respeito da Questão 4, classificamos a resolução apresentada pelo estudante E7 como inadequada, visto que não obteve um modelo adequado ao problema.

Para a Questão 5, o Sistema Linear que modela a reação química proposta possui três equações e quatro incógnitas. Essa questão foi resolvida adequadamente por oito estudantes (E2, E3, E7, E9, E11, E14, E15 e E16), os quais modelaram o balanceamento da reação química adequadamente e utilizaram o método da substituição para a obtenção da solução (Figura 149).

Figura 149 – Resolução do estudante E3 – Questão 5

5- $wNH_3 + xO_2 \rightarrow yN_2 + zH_2O$

$N: w = 2y$

$H: 3w = 2z$

$O: 2x = z$

$$\begin{cases} w - 2y = 0 \\ 3w - 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

$4NH_3 + 3O_2 \rightarrow 2N_2 + 6H_2O$

$S = \{2y; 3y/2; y; 3y\}$

$\boxed{w = 2y}$

$3.2y = 2z$

$6y = 2z$

$\frac{6y}{2} = z$

$2x = 3y$

$\boxed{x = \frac{3y}{2}}$

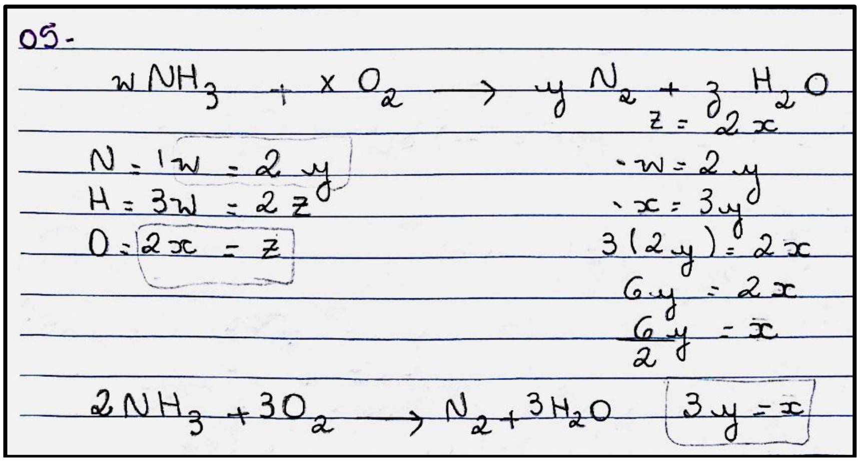
$\boxed{y = y}$

$\boxed{3y = z}$

Fonte: produção escrita do estudante E3.

As resoluções dos estudantes E5 (Figura 150), E21 e E25 foram classificadas como parcialmente adequadas para a questão, pois, apesar de modelarem a situação-problema adequadamente, apresentam erros na realização das substituições para a obtenção dos coeficientes estequiométricos da reação química (assim como ocorreu nas resoluções desses estudantes para a Questão 4).

Figura 150 – Resolução do estudante E5 – Questão 5



Fonte: produção escrita do estudante E5.

Analisando as resoluções das Questões 3, 4 e 5, inferimos que os processos do PMA mobilizados pelos estudantes em suas resoluções foram:

- intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos matemáticos prévios para resolver a questão;

- representação simbólica, pois, compreenderam e utilizaram os símbolos e notações matemáticas (e químicas) para a interpretação e resolução da questão;

- representação mental, pois, associaram um método para a resolução do Sistema Linear dado;

- modelação, pois, construíram ou adequaram um modelo matemático a partir dos dados do enunciado da questão para estudar o comportamento de um processo; e

- mudança de representação e tradução, pois, transitaram entre as representações em linguagem natural e em linguagem algébrica do problema.

No Quadro 9 trazemos uma síntese dos processos do PMA identificados nas produções escritas dos estudantes para a Tarefa 5.

Quadro 9 – Síntese das análises do Episódio 8.

Questão	**Resoluções adequadas/ corretas**	**Resoluções parcialmente corretas**	**Resoluções inadequadas/ incorretas**	**Em branco**	**Processos do PMA evidenciados**
1	**E2, E3, E5, E7, E9, E11, E14, E15, E16, E21** e **E25**	-	-	-	Representação simbólica, Representação mental, Intuição, Visualização Modelação e Mudança de representação e tradução.
2	**E14** e **E16**	**E2, E3** e **E7**	**E9** e **E11**	E5, E15, E21 e E25	Representação simbólica, Representação mental, Intuição, Modelação, Mudança de representação e tradução.
3	**E2, E3, E5, E7, E9, E11, E14, E15, E16** e **E25**	**E21**	-	-	Representação simbólica, Representação mental, Intuição, Modelação, Mudança de representação e tradução.
4	**E2, E3, E9, E11, E15** e **E16**	**E5, E14, E21** e **E25**	**E7**	-	Representação simbólica, Representação mental, Intuição, Modelação, Mudança de representação e tradução.
5	**E2, E3, E7, E9, E11, E14, E15** e **E16**	**E5, E21** e **E25**	-	-	Representação simbólica, Representação mental, Intuição, Modelação, Mudança de representação e tradução.

Fonte: autoria própria.

O oitavo episódio de ensino explorou a modelação de situações-problema por meio de Sistemas de Equações Lineares, visando amenizar as dificuldades dos estudantes em modelar tais situações e em utilizar a simbologia necessária para a resolução de problemas, observadas na análise da prova diagnóstica e na pesquisa de Cury e Bisognin (2009).

Nesse sentido, entendemos que as tarefas e o seminário planejados pela professora-pesquisadora se mostraram significativos para que tal propósito fosse alcançado, pois, na maioria das resoluções analisadas, os estudantes além de conseguirem modelar e resolver adequadamente as questões propostas, escolheram um método de resolução apropriado para o Sistema Linear obtido.

Assim, a resolução da tarefa e as discussões em sala de aula possibilitaram a mobilização dos seguintes processos do PMA: representação simbólica, representação mental, intuição, visualização, mudança de representação e tradução, e modelação, mobilizados por todos os estudantes nesse episódio.

Julgamos importante ressaltar algumas dificuldades identificadas na produção escrita desse episódio, na interpretação do enunciado da Questão 2, que era mais extenso e possuía mais variáveis para relacionar; e na obtenção de soluções possíveis indeterminadas, nas questões 3, 4 e 5. A condução das discussões pela professora-pesquisadora ao final da aula seguiu na direção de tentar amenizar tais dificuldades.

5.8 EPISÓDIO 9

Durante o nono episódio de ensino, foi aplicado um instrumento de reavaliação (Apêndice I) sobre os conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares. O instrumento era composto por oito questões extraídas da prova escrita com função diagnóstica, aplicada no primeiro episódio.

Por meio da análise da resolução dessas questões, compararemos os processos do PMA, segundo Dreyfus (2002) e Dreyfus e Eisenberg (1996), mobilizados pelos estudantes no início da Experiência de

Ensino com os mobilizados ao final, bem como discutiremos possíveis progressos na aprendizagem de conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares em um contexto de sala de aula baseado no Ensino-Aprendizagem Exploratório da Matemática.

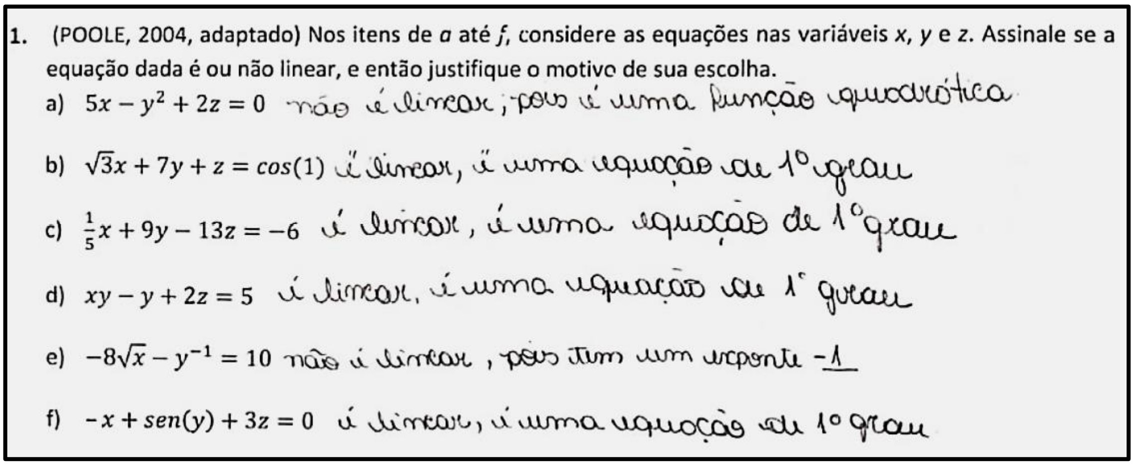
A seguir, orientados pelo Quadro 3, buscaremos identificar nas resoluções indícios de processos do PMA e, sequencialmente, teceremos alguns comentários a respeito do percurso de aprendizagem dos estudantes.

Questão 1

A Questão 1 propôs a identificação de equações lineares entre diversos tipos de equações. Dentre os onze estudantes participantes, nenhum classificou todas as equações adequadamente, sendo que dez estudantes (E2, E3, E5, E9, E11, E14, E15, E16, E21 e E25) apresentaram resoluções parcialmente adequadas.

Observamos nessas resoluções que a maioria dos estudantes equivocou-se na classificação das equações *d* e *f*, que foram classificadas como lineares apesar de conterem os termos xy e $sen(y)$, respectivamente, como ilustrado na resolução do estudante E3 (Figura 151).

Figura 151 – Resolução do estudante E3 – Questão 1


1. (POOLE, 2004, adaptado) Nos itens de *a* até *f*, considere as equações nas variáveis *x*, *y* e *z*. Assinale se a equação dada é ou não linear, e então justifique o motivo de sua escolha.

a) $5x - y^2 + 2z = 0$ não é linear, pois é uma função quadrática

b) $\sqrt{3}x + 7y + z = cos(1)$ é linear, é uma equação de 1º grau

c) $\frac{1}{5}x + 9y - 13z = -6$ é linear, é uma equação de 1º grau

d) $xy - y + 2z = 5$ é linear, é uma equação de 1º grau

e) $-8\sqrt{x} - y^{-1} = 10$ não é linear, pois tem um expoente -1

f) $-x + sen(y) + 3z = 0$ é linear, é uma equação de 1º grau

Fonte: produção escrita do estudante E3.

O estudante E7 resolveu a questão inadequadamente, pois, apenas assinalou uma das equações e não forneceu justificativa.

Inferimos que os processos do PMA mobilizados pelos estudantes que apresentaram resoluções parcialmente adequadas para essa questão foram:

- intuição, pois, utilizaram conhecimentos matemáticos prévios para examinar as equações dadas;

- representação simbólica, para a compreensão da simbologia matemática utilizada na representação das equações; e

- síntese, para estabelecer relações entre propriedades e conceitos matemáticos (como funções trigonométricas e funções raiz) na classificação das equações.

No Quadro 10 exibimos uma síntese das resoluções apresentadas pelos estudantes no primeiro e no último episódio de ensino, por meio da qual podemos observar uma significativa melhora no desempenho dos estudantes na Questão 1.

Quadro 10 – Síntese das resoluções para a Questão 1 nos Episódios 1 e 9.

Questão 1					
Episódio	**Resoluções adequadas/ corretas**	**Resoluções parcialmente corretas**	**Resoluções inadequadas/ incorretas**	**Em branco**	**Processos do PMA evidenciados**
1	-	-	**E14** e **E25**	E2, E3, E5, E7, E9, E11, E15, E16 e E21	Intuição e Representação simbólica
9	**-**	**E2, E3, E5, E9, E11, E14, E15, E16**, **E21** e **E25**	E7	-	Intuição, Representação simbólica e Síntese

Fonte: autoria própria.

Enquanto no primeiro episódio de ensino nenhum estudante conseguiu resolver a questão adequadamente, sendo que a maioria a deixou em branco, no último episódio todos a resolveram e souberam classificar a maior parte das equações dadas.

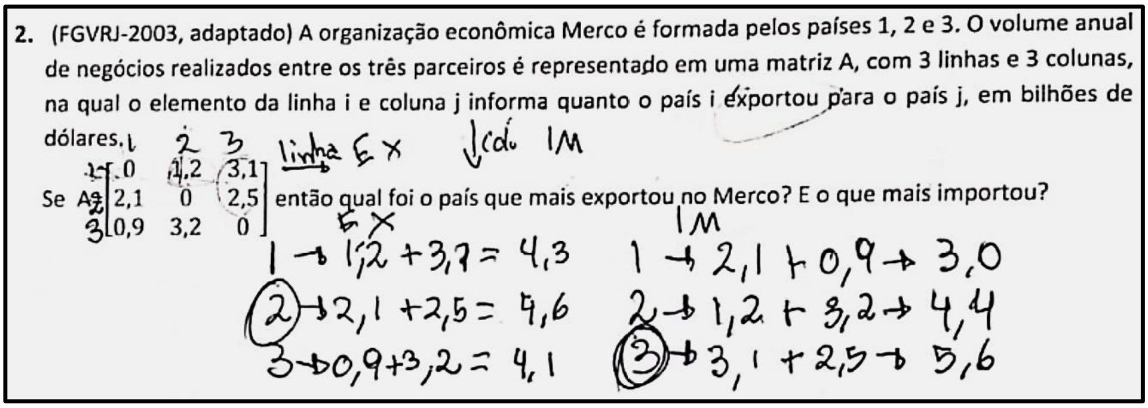
Tal fato evidencia que, no desenvolvimento da Experiência de Ensino, houve alguma compreensão do conceito de equação linear, e ainda, houve a mobilização de processos do PMA relacionados à abstração, no caso, a síntese.

Questão 2

A Questão 2 abordou a interpretação e identificação dos elementos de uma matriz quadrada, segundo um contexto dado.

Tal questão foi resolvida por oito estudantes, dos quais cinco (E2, E3, E9, E11 e E16) apresentaram resoluções adequadas para a questão, como exemplificado na resolução da Figura 152, e três (E7, E15, E25) apresentaram resoluções parcialmente adequadas, pois, responderam apenas uma das duas perguntas propostas na questão.

Figura 152 – Resolução do estudante E16 – Questão 2



2. (FGVRJ-2003, adaptado) A organização econômica Merco é formada pelos países 1, 2 e 3. O volume anual de negócios realizados entre os três parceiros é representado em uma matriz A, com 3 linhas e 3 colunas, na qual o elemento da linha i e coluna j informa quanto o país i exportou para o país j, em bilhões de dólares.

linha EX   col. IM

$$\text{Se } A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1{,}2 & 3{,}1 \\ 2{,}1 & 0 & 2{,}5 \\ 0{,}9 & 3{,}2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

então qual foi o país que mais exportou no Merco? E o que mais importou?

EX
1 → 1,2 + 3,1 = 4,3
2 → 2,1 + 2,5 = 4,6
3 → 0,9 + 3,2 = 4,1

IM
1 → 2,1 + 0,9 → 3,0
2 → 1,2 + 3,2 → 4,4
3 → 3,1 + 2,5 → 5,6

Fonte: produção escrita do estudante E16.

Os estudantes E5, E14 e E21 não apresentaram resoluções para a Questão 2.

Podemos inferir, por meio das resoluções apresentadas, que os estudantes mobilizaram os processos de:

- intuição, pois, fizeram o uso de conhecimentos prévios para abordar a situação matemática proposta;

- representação simbólica, pois, compreenderam e utilizaram símbolos e notações matemáticas referentes ao conceito de matriz para responder à situação-problema proposta;

- representação mental, pois, associaram as operações algébricas necessárias para a resolução da questão; e

- visualização, pois, externalizaram por meio de esboços a imagem mental gerada para a compreensão do problema.

No Quadro 11 trazemos uma síntese das resoluções dos estudantes para a Questão 2 nos episódios de ensino 1 e 9.

Quadro 11 – Síntese das resoluções para a Questão 2 nos Episódios 1 e 9.

Questão 2					
Episódio	**Resoluções adequadas/ corretas**	**Resoluções parcialmente corretas**	**Resoluções inadequadas/ incorretas**	**Em branco**	**Processos do PMA evidenciados**
1	**E2**, **E11**, **E14** e **E16**	-	**E7**, **E15** e **E25**	E3, E5, E9, E21	Representação simbólica, Representação mental, Visualização e Intuição
9	**E2, E3, E9, E11** e **E16**	**E7, E15** e **E25**	-	E5, E14 e E21	Representação simbólica, Representação mental, Visualização e Intuição

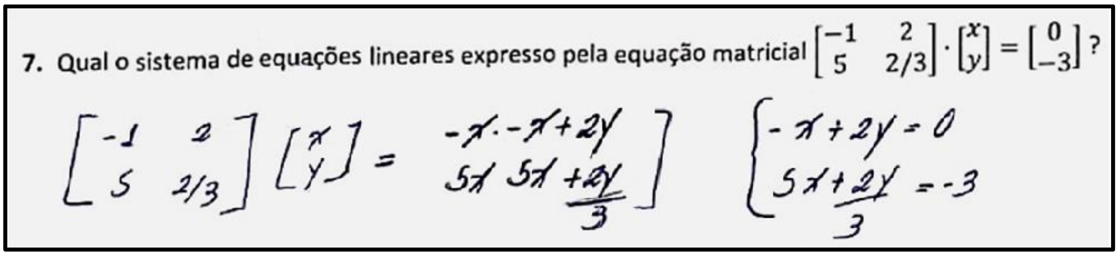
Fonte: autoria própria.

De acordo com o Quadro 11, o número de resoluções adequadas/parcialmente adequadas dobrou do primeiro para o último episódio. Dessa forma, observamos um avanço na compreensão do conceito e notações referentes à Matriz pelos estudantes no decorrer da Experiência de Ensino proposta.

Questão 3

A Questão 3 propôs a obtenção de um Sistema Linear expresso por uma equação matricial. Oito estudantes (E2, E5, E9, E14, E15, E16, E21 e E25) resolveram a questão adequadamente, demonstrando compreender o algoritmo de multiplicação de matrizes e conhecer as representações algébrica e matricial para Sistemas Lineares. Na Figura 153 exibimos a resolução do estudante E9 para a Questão 3.

Figura 153 – Resolução do estudante E9 – Questão 3



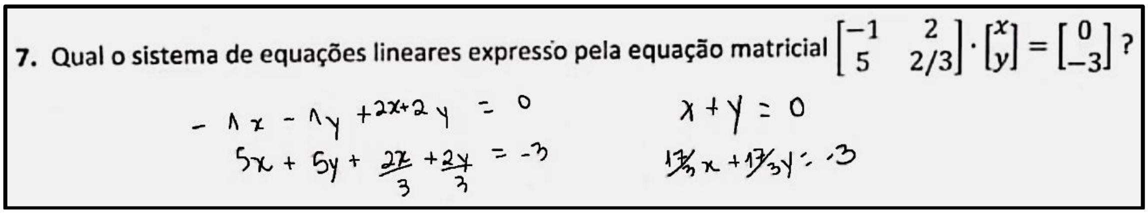
7. Qual o sistema de equações lineares expresso pela equação matricial $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 5 & 2/3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -3\end{bmatrix}$?

$$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 5 & 2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-x \cdot -x+2y\\ 5x \;\; 5x+\frac{2y}{3}\end{bmatrix} \qquad \begin{cases}-x+2y=0\\ 5x+\frac{2y}{3}=-3\end{cases}$$

Fonte: produção escrita do estudante E9.

Dois estudantes resolveram a questão inadequadamente, E3 apenas discutiu a ordem das matrizes para que a multiplicação pudesse ser realizada e, E11 não soube multiplicar as matrizes adequadamente, como mostrado na Figura 154. O estudante E7 não apresentou resolução para a questão.

Figura 154 – Resolução do estudante E11 – Questão 3



7. Qual o sistema de equações lineares expresso pela equação matricial $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 5 & 2/3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -3\end{bmatrix}$?

$$-1x-1y+2x+2y=0 \qquad x+y=0$$
$$5x+5y+\frac{2x}{3}+\frac{2y}{3}=-3 \qquad \frac{17}{3}x+\frac{17}{3}y=-3$$

Fonte: produção escrita do estudante E11.

Identificamos nas resoluções adequadas apresentadas pelos estudantes a mobilização dos processos de:

- representação simbólica, pois, utilizaram símbolos e notações para representar o sistema linear proposto na questão;

- representação mental, pois, associaram o conceito de matriz à operação de multiplicação entre matrizes para a resolução da questão; e

- mudança de representação e tradução, pois, transitaram entre dois tipos de representações, algébrica e matricial, de um Sistema Linear.

Além desses processos, compreendemos que todos os estudantes que resolveram a questão apresentaram indícios do processo de:

- intuição, pois, demonstraram o uso de conhecimentos prévios a respeito da multiplicação de matrizes para obter o sistema linear.

No quadro a seguir exibimos uma síntese das resoluções dos estudantes para a Questão 3, extraídas a partir dos episódios 1 e 9 dessa Experiência de Ensino.

Quadro 12 – Síntese das resoluções para a Questão 3 nos Episódios 1 e 9.

Questão 3					
Episódio	**Resoluções adequadas/ corretas**	**Resoluções parcialmente corretas**	**Resoluções inadequadas/ incorretas**	**Em branco**	**Processos do PMA evidenciados**
1	**E9** e **E14**	-	**E2**	E3, E5, E7, E11, E15, E16, E21 e E25	Representação simbólica, Representação mental, Intuição, Mudança de representação e tradução
9	**E2, E5, E9, E14, E15, E16**, **E21** e **E25**	-	**E3** e **E11**	E7	Representação simbólica, Representação mental, Intuição, Mudança de representação e tradução

Fonte: autoria própria.

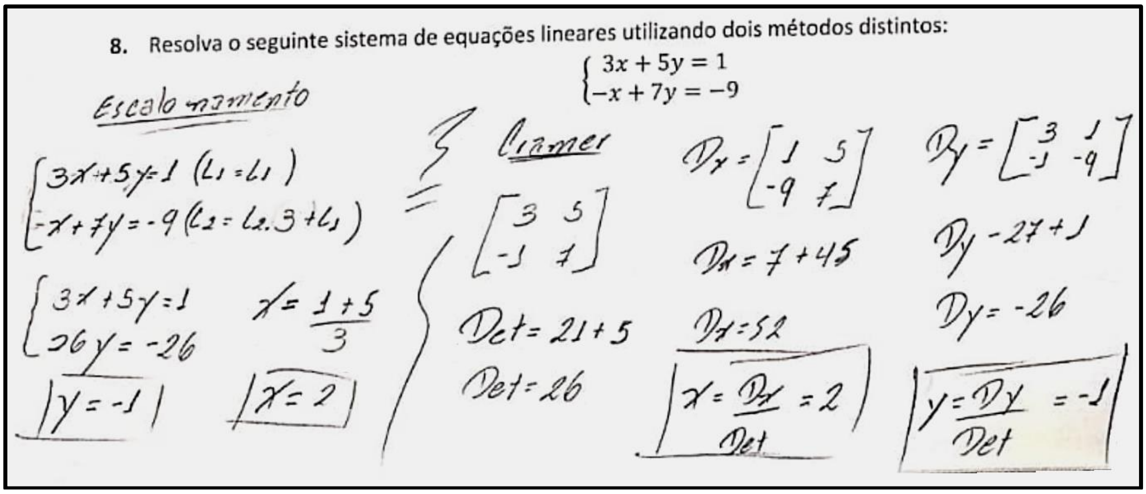
Como exibido no Quadro 12, o número de estudantes que deixaram a Questão 3 em branco foi significativamente menor, e o número de resoluções adequadas quadruplicou do primeiro para o último episódio de ensino, o que evidencia que os estudantes desenvolveram a capacidade de estabelecer alguma relação entre Matrizes e Sistemas de Equações Lineares e de aplicar o algoritmo de multiplicação de matrizes adequadamente.

Questão 4

A Questão 4 propôs a resolução de um Sistema Linear de duas equações e duas incógnitas por meio de dois métodos distintos, à escolha dos estudantes.

Os estudantes E2, E5, E9 e E16 apresentaram resoluções adequadas para questão. Desses, E2, E5 e E16 optaram pelos métodos de adição e de substituição para a resolução do Sistema Linear proposto e, o estudante E9 optou pelos métodos do escalonamento e da regra de Cramer, como exibido na Figura 155.

Figura 155 – Resolução do estudante E9 – Questão 4



Fonte: produção escrita do estudante E9.

Os demais estudantes apresentaram resoluções parcialmente adequadas para a questão, dado que resolveram o Sistema Linear por meio de um método apenas. Dentre esses, cinco optaram pelo método da adição, um pelo método da substituição e um pela regra de Cramer.

Nesse episódio, inferimos que todos os estudantes apresentaram em suas resoluções indícios dos processos de:

- intuição, pois, utilizaram seus conhecimentos prévios a respeito de Sistemas Lineares para resolver a questão;

- representação simbólica, pois, compreenderam e utilizaram os símbolos e notações matemáticas para a interpretação e resolução da questão; e

- representação mental, pois, associaram o método da adição e/ou o método da substituição como método(s) para a resolução do Sistema Linear dado.

No Quadro 13 apresentamos uma síntese das resoluções da Questão 4, desenvolvidas nos episódios 1 e 9 da Experiência de Ensino.

Quadro 13 – Síntese das resoluções para a Questão 4 nos Episódios 1 e 9.

Questão 4					
Episódio	**Resoluções adequadas/ corretas**	**Resoluções parcialmente corretas**	**Resoluções inadequadas/ incorretas**	**Em branco**	**Processos do PMA evidenciados**
1	**E2**	**E7**, **E9**, **E16** e **E25**	-	E3, E5, E11, E14, E15 e E21	Representação simbólica, Representação mental e Intuição
9	**E2, E5, E9** e **E16**	**E3, E7, E11, E14, E15, E21** e **E25**	-	-	Representação simbólica, Representação mental e Intuição

Fonte: autoria própria.

Verificamos, de acordo com o Quadro 13, que maioria dos estudantes deixou a questão em branco no primeiro episódio, enquanto que no último, todos apresentaram resoluções adequadas/parcialmente adequadas para a mesma. Além disso, notamos nas resoluções do último episódio uma maior variedade de métodos de resolução utilizados.

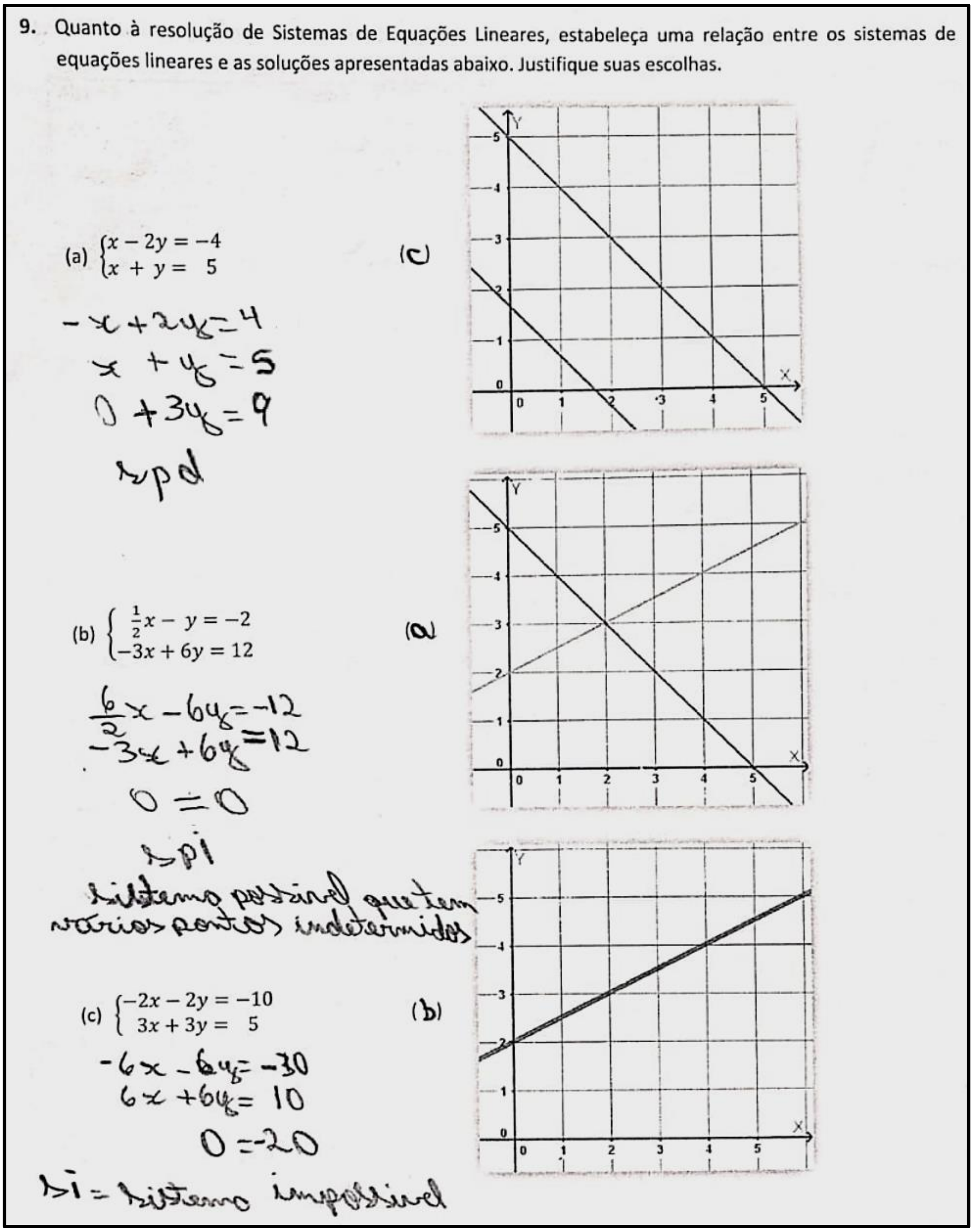
Tal fato nos possibilita afirmar que os estudantes desenvolveram noções a respeito da diversidade e da aplicação de métodos para a resolução de Sistemas de Equações Lineares 2x2.

Questão 5

A Questão 5 propôs ao estudante relacionar Sistemas Lineares de duas equações e duas incógnitas (SPD, SPI e SI) com suas respectivas representações geométricas.

Dez estudantes (E2, E3, E5, E7, E9, E11, E14, E15, E16 e E21) resolveram a questão adequadamente. A estratégia de resolução utilizada pela maioria foi a resolução dos Sistemas Lineares dados e a comparação das soluções obtidas com as representações geométricas fornecidas, como mostrado na resolução do estudante E7 (Figura 156).

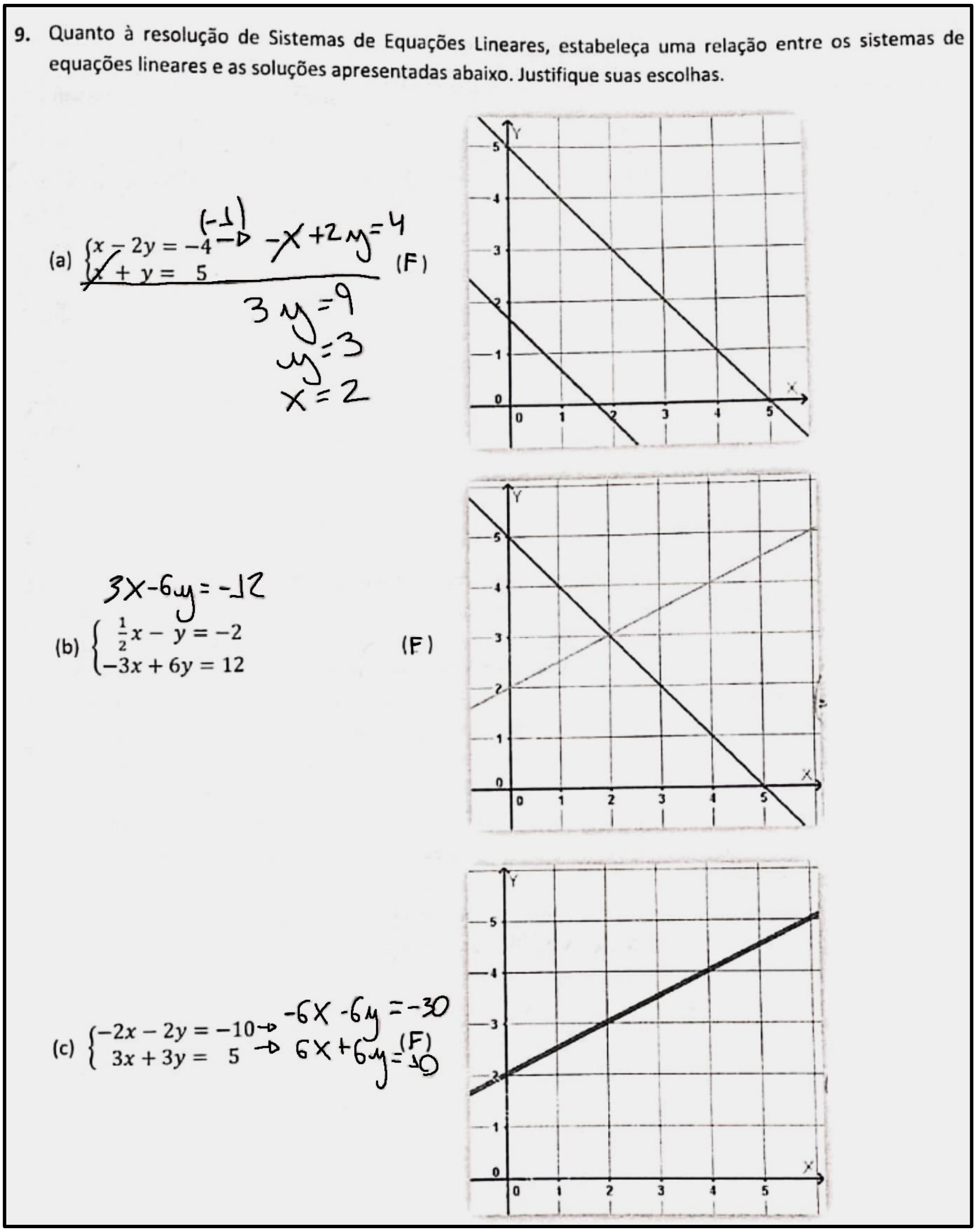
Figura 156 – Resolução do estudante E7 – Questão 5



Fonte: produção escrita do estudante E7.

O estudante E25 resolveu a questão inadequadamente, pois, apesar de esboçar a resolução de cada um dos sistemas lineares, não fez as associações com as respectivas representações geométricas, como exibido na Figura 157.

Figura 157 – Resolução do estudante E25 – Questão 5



9. Quanto à resolução de Sistemas de Equações Lineares, estabeleça uma relação entre os sistemas de equações lineares e as soluções apresentadas abaixo. Justifique suas escolhas.

(a) $\begin{cases} x - 2y = -4 \xrightarrow{(-1)} -x + 2y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$ (F)

$3y = 9$

$y = 3$

$x = 2$

$3x - 6y = -12$

(b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = -2 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$ (F)

(c) $\begin{cases} -2x - 2y = -10 \rightarrow -6x - 6y = -30 \\ 3x + 3y = 5 \rightarrow 6x + 6y = 10 \end{cases}$ (F)

Fonte: produção escrita do estudante E25.

Inferimos que os estudantes que resolveram a Questão 5 adequadamente mobilizaram os processos de:

- intuição, ao utilizarem seus conhecimentos prévios a respeito da representação gráfica de um Sistema Linear para examinar a questão;

- representação simbólica, pois, compreenderam e utilizaram a representação geométrica dos Sistemas Lineares para interpretar a situação matemática;

- representação mental, pois, associaram conceitos ou objetos matemáticos com operações algébricas e aritméticas e métodos de resolução; e

- mudança de representação e tradução, pois, transitaram entre as representações algébrica e geométrica dos Sistemas Lineares.

Quanto ao estudante E25, inferimos que ele não mobilizou o processo de mudança de representação e tradução, visto que apenas resolveu algebricamente os Sistemas Lineares.

No Quadro 14 sintetizamos as resoluções obtidas por meio da Questão 5 nos episódios de ensino 1 e 9.

Quadro 14 – Síntese das resoluções para a Questão 5 nos Episódios 1 e 9.

Questão 5					
Episódio	**Resoluções adequadas/ corretas**	**Resoluções parcialmente corretas**	**Resoluções inadequadas/ incorretas**	**Em branco**	**Processos do PMA evidenciados**
1	-	-	**E9** e **E25**	E2, E3, E5, E7, E11, E14, E15, E16 e E21	Representação simbólica, Representação mental, Intuição, e Mudança de representação e tradução
9	**E2, E3, E5, E7, E9, E11, E14, E15, E16** e **E21**	-	**E25**	-	Representação simbólica, Representação mental, Intuição, e Mudança de representação e tradução

Fonte: autoria própria.

Comparando os dois episódios, identificamos um significativo aumento no número de resoluções apresentadas para a questão e, além disso, de duas resoluções inadequadas houve um avanço para dez resoluções adequadas.

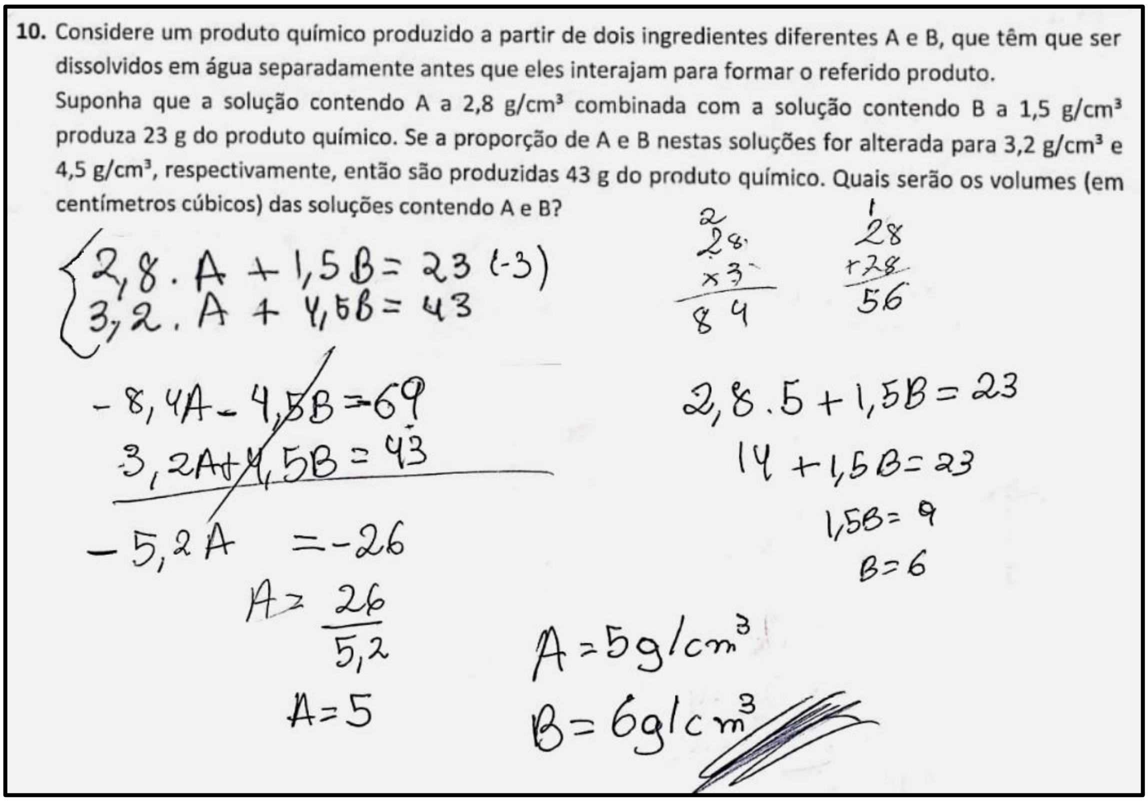
Entendemos esse avanço como reflexo da habilidade de representar e interpretar geometricamente Sistemas de Equações Lineares 2x2, desenvolvida durante os episódios da Experiência de Ensino.

Questão 6

A Questão 6 abordou a formulação e a resolução de um Sistema de Equações Lineares 2x2 em um contexto de semi-realidade da área de Química.

Tal questão foi resolvida adequadamente por quatro estudantes (E2, E9, E11 e E16), que optaram pelo método da adição para a resolução do sistema obtido, como ilustrado na Figura 158.

Figura 158 – Resolução do estudante E16 – Questão 6



10. Considere um produto químico produzido a partir de dois ingredientes diferentes A e B, que têm que ser dissolvidos em água separadamente antes que eles interajam para formar o referido produto.
Suponha que a solução contendo A a 2,8 g/cm³ combinada com a solução contendo B a 1,5 g/cm³ produza 23 g do produto químico. Se a proporção de A e B nestas soluções for alterada para 3,2 g/cm³ e 4,5 g/cm³, respectivamente, então são produzidas 43 g do produto químico. Quais serão os volumes (em centímetros cúbicos) das soluções contendo A e B?

$$\begin{cases} 2{,}8 \cdot A + 1{,}5B = 23 \; (-3) \\ 3{,}2 \cdot A + 4{,}5B = 43 \end{cases}$$

$-8{,}4A - \cancel{4{,}5B} = -69$

$3{,}2A + \cancel{4{,}5B} = 43$

$-5{,}2A = -26$

$A = \frac{26}{5{,}2}$

$A = 5$

$28 \times 3 = 84$

$28 + 28 = 56$

$2{,}8 \cdot 5 + 1{,}5B = 23$

$14 + 1{,}5B = 23$

$1{,}5B = 9$

$B = 6$

$A = 5g/cm^3$

$B = 6g/cm^3$

Fonte: produção escrita do estudante E16.

Os demais estudantes (E3, E5, E7, E14, E15, E21 e E25) não apresentaram resoluções para a Questão 6.

Inferimos, de acordo com o Quadro 3, que os estudantes que resolveram a questão mobilizaram em suas resoluções os processos:

- intuição, pois, intuíram e associaram conceitos matemáticos prévios para examinar o problema proposto;

- representação mental, pois, associaram a situação matemática proposta com operações algébricas ou aritméticas e métodos de resolução; e

- modelação, pois, construíram a partir dos dados do enunciado um Sistema de Equações Lineares para estudar o problema.

No quadro a seguir trazemos uma síntese das resoluções apresentadas para a Questão 6 nos episódios 1 e 9 da Experiência de Ensino.

Quadro 15 – Síntese das resoluções para a Questão 6 nos Episódios 1 e 9.

Questão 6					
Episódio	**Resoluções adequadas/ corretas**	**Resoluções parcialmente corretas**	**Resoluções inadequadas/ incorretas**	**Em branco**	**Processos do PMA evidenciados**
1	-	**E16** e **E25**	**E2** e **E15**	E3, E5, E7, E9, E11, E14 e E21	Representação mental, Visualização, Intuição e Modelação
9	**E2, E9, E11** e **E16**	-	-	E3, E5, E7, E14, E15, E21 e E25	Representação mental, Intuição e Modelação

Fonte: autoria própria.

Comparando o desempenho dos estudantes na resolução da Questão 6, no primeiro e no último episódios, percebemos uma discreta melhora com relação às resoluções apresentadas – antes, duas parcialmente adequadas e duas inadequadas, e agora, quatro resoluções adequadas – no entanto, o número de estudantes que não resolveu a questão permaneceu igual, sete estudantes.

A respeito dos processos do PMA mobilizados nesse episódio, destacamos que não encontramos indícios do processo de visualização, o qual havia sido mobilizado no primeiro episódio pelos estudantes que esboçaram uma tentativa de resolução para o problema.

A respeito da formulação de Sistemas Lineares a partir da linguagem natural, observamos que essa permanece sendo uma dificuldade dos estudantes, e/ou ainda, uma deficiência dos materiais e abordagens didáticos (como mostrado na análise dos livros didáticos adotados na disciplina – Seção 4.1.1 – e em pesquisas do levantamento bibliográfico – Seção 2.1).

Questão 7

A Questão 7 propunha quatro diferentes resoluções para uma equação matricial, para que fossem analisadas e comentadas pelos estudantes.

Oito estudantes que resolveram a questão, sendo que seis apresentaram resoluções parcialmente adequadas. Dentre esses, E2, E5, E14 e E15 julgaram a resolução do “aluno 2” como incorreta e a do “aluno 3” como correta, revelando dificuldades com a compreensão do conceito de matriz identidade (ao julgar incorreta a substituição de $A^{-1} \cdot A$ por I na equação) e com o conceito de matriz inversa (ao considerar $A^{-1} = -A$), como pode ser observado na resolução do estudante E14 (Figura 159).

Figura 159 – Resolução do estudante E14 – Questão 7

11. Comente cada uma das resoluções, apresentadas por quatro alunos distintos, para a questão:

Sejam A, B e X matrizes tais que $A \cdot X = B$. Determine a matriz X.

Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4
$A \cdot X = B$ $X = \frac{B}{A}$	$A \cdot X = B$ $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$ $I \cdot X = A^{-1} \cdot B$ $X = A^{-1} \cdot B$	$A \cdot X = B$ $X = A^{-1} \cdot B$ $X = -A \cdot B$	$A \cdot X = B$ $A \cdot X \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$ $X \cdot I = B \cdot A^{-1}$ $X = B \cdot A^{-1}$

* O Aluno 1 errou porque não tem como dividir matrizes

* Aluno 2 : errado ; nada a ver essa I

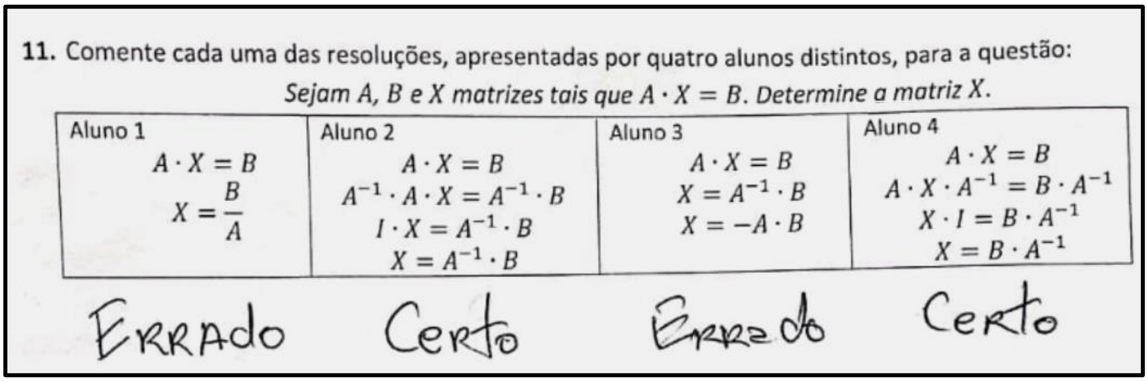
* Aluno 3 : certo

* Aluno 4 : errado; por causa da I

Fonte: produção escrita do estudante E14.

Os estudantes E9 e E16 (Figura 160), apesar de julgarem as três primeiras resoluções adequadamente, assinalaram inadequadamente que a resolução do “aluno 4” estava correta, desconsiderando a não comutatividade da multiplicação de matrizes. Ambos não exibiram justificativas para suas respostas.

Figura 160 – Resolução do estudante E16 – Questão 7



11. Comente cada uma das resoluções, apresentadas por quatro alunos distintos, para a questão:

Sejam A, B e X matrizes tais que $A \cdot X = B$. Determine a matriz X.

Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4
$A \cdot X = B$ $X = \frac{B}{A}$	$A \cdot X = B$ $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$ $I \cdot X = A^{-1} \cdot B$ $X = A^{-1} \cdot B$	$A \cdot X = B$ $X = A^{-1} \cdot B$ $X = -A \cdot B$	$A \cdot X = B$ $A \cdot X \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$ $X \cdot I = B \cdot A^{-1}$ $X = B \cdot A^{-1}$
ERRADO	CERTO	ERRADO	CERTO

Fonte: produção escrita do estudante E16.

Os estudantes E7 e E11 apresentaram resoluções inadequadas para todas as resoluções, sem justificativas ou comentários que nos dessem pistas do raciocínio utilizado. E por fim, os estudantes E3, E21 e E25 deixaram a questão em branco.

Identificamos nas resoluções apresentadas, de acordo com o Quadro 3, indícios do processo de:

- intuição, pois, os estudantes utilizam conhecimentos matemáticos prévios para examinar situações matemáticas desconhecidas.

Além desse processo, inferimos que nas resoluções parcialmente adequadas houve a mobilização dos processos:

- representação simbólica, pois, os estudantes demonstraram compreender o significado de parte das notações utilizadas;

- analogia, pois, abordam situações matemáticas semelhantes, como, as resoluções “Aluno 2” e “Aluno 4”, de forma análoga; e

- síntese, pois, ao argumentarem sobre a impossibilidade de se realizar a operação de divisão entre matrizes, para qualquer matriz dada e estabelecendo relações entre as propriedades e o conceito de matriz.

No Quadro 16 exibimos uma síntese das resoluções apresentadas para a Questão 7, desenvolvida nos episódios de ensino 1 e 9.

Quadro 16 – Síntese das resoluções para a Questão 7 nos Episódios 1 e 9.

Questão 7					
Episódio	**Resoluções adequadas/ corretas**	**Resoluções parcialmente corretas**	**Resoluções inadequadas/ incorretas**	**Em branco**	**Processos do PMA evidenciados**
1	-	**E2**	-	E3, E5, E7, E9, E11, E14, E15, E16, E21 e E25	Representação simbólica, Intuição, Analogia e Síntese
9	**-**	**E2, E5, E9, E14, E15** e **E16**	**E7** e **E11**	E3, E21 e E25	Representação simbólica, Intuição, Analogia e Síntese

Fonte: autoria própria.

Como pode ser observado no Quadro 16, não houve resolução adequada para a Questão 7 no último episódio de ensino, tal fato pode ser justificado pela escolha da professora-pesquisadora em abordar superficialmente o conceito de matriz identidade durante a trajetória de aprendizagem.

Ressaltamos que a referida escolha foi realizada devido ao pouco tempo disponível para atender toda a ementa da disciplina durante o semestre e, à avaliação da professora-pesquisadora quanto à relevância do conceito de matriz identidade para a aprendizagem dos demais conteúdos previstos,

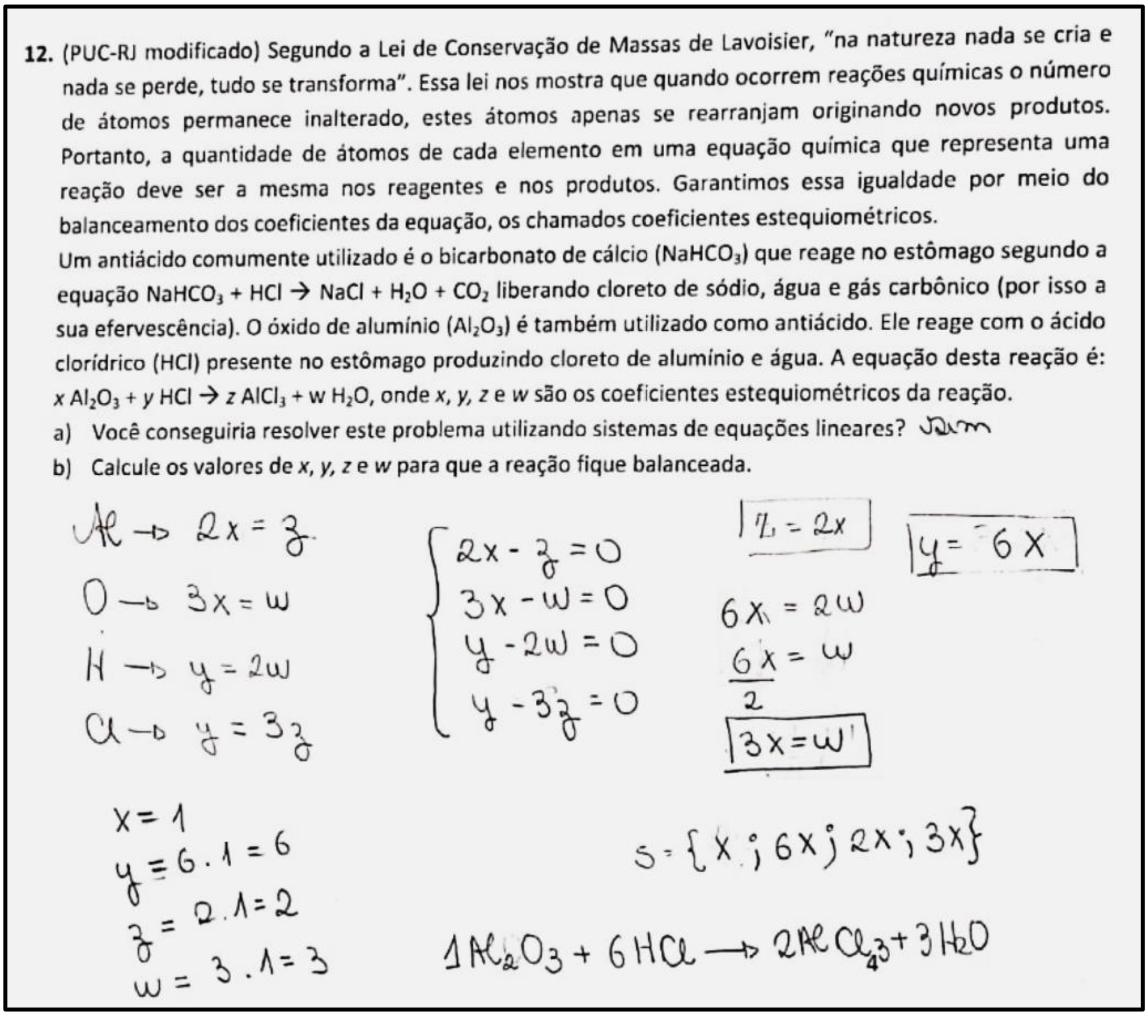
Examinando os dois episódios de ensino (1 e 9) observamos um aumento no número de resoluções para a Questão 7, que havia sido deixada em branco por dez estudantes no primeiro episódio, revelando alguma compreensão da questão por esses estudantes.

No entanto, verificamos nas resoluções do Episódio 9 que a maioria dos estudantes possui dificuldades com os conceitos de matriz inversa e de matriz identidade. E mesmo o estudante E2, que havia resolvido a questão no primeiro episódio, exibiu em sua resolução realizada no último episódio de ensino as mesmas dificuldades identificadas anteriormente.

Questão 8

A Questão 8, propôs a modelagem e resolução de um problema envolvendo balanceamento de reações químicas. Tal questão foi resolvida adequadamente por nove estudantes (E2, E3, E5, E9, E11, E14, E15, E16 e E21), que optaram pelo método da substituição para a Resolução do sistema Linear formulado, como exibido na Figura 161.

Figura 161 – Resolução do estudante E3 – Questão 8



12. (PUC-RJ modificado) Segundo a Lei de Conservação de Massas de Lavoisier, "na natureza nada se cria e nada se perde, tudo se transforma". Essa lei nos mostra que quando ocorrem reações químicas o número de átomos permanece inalterado, estes átomos apenas se rearranjam originando novos produtos. Portanto, a quantidade de átomos de cada elemento em uma equação química que representa uma reação deve ser a mesma nos reagentes e nos produtos. Garantimos essa igualdade por meio do balanceamento dos coeficientes da equação, os chamados coeficientes estequiométricos.

Um antiácido comumente utilizado é o bicarbonato de cálcio ($NaHCO_3$) que reage no estômago segundo a equação $NaHCO_3 + HCl \rightarrow NaCl + H_2O + CO_2$ liberando cloreto de sódio, água e gás carbônico (por isso a sua efervescência). O óxido de alumínio (Al_2O_3) é também utilizado como antiácido. Ele reage com o ácido clorídrico (HCl) presente no estômago produzindo cloreto de alumínio e água. A equação desta reação é: $x\,Al_2O_3 + y\,HCl \rightarrow z\,AlCl_3 + w\,H_2O$, onde *x, y, z* e *w* são os coeficientes estequiométricos da reação.

a) Você conseguiria resolver este problema utilizando sistemas de equações lineares? Sim

b) Calcule os valores de *x, y, z* e *w* para que a reação fique balanceada.

Al → $2x = z$

O → $3x = w$

H → $y = 2w$

Cl → $y = 3z$

$$\begin{cases} 2x - z = 0 \\ 3x - w = 0 \\ y - 2w = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

$\boxed{z = 2x}$ $\boxed{y = 6x}$

$6x = 2w$

$\frac{6x}{2} = w$

$\boxed{3x = w}$

$x = 1$

$y = 6 \cdot 1 = 6$

$z = 2 \cdot 1 = 2$

$w = 3 \cdot 1 = 3$

$S = \{x; 6x; 2x; 3x\}$

$1\,Al_2O_3 + 6\,HCl \rightarrow 2\,AlCl_3 + 3\,H_2O$

Fonte: produção escrita do estudante E3.

O estudante E7 não conseguiu formular o Sistema Linear, logo, classificamos sua resolução como inadequada; e o estudante E25 não apresentou resolução para a questão.

Inferimos que os processos mobilizados pelos estudantes que resolveram a questão adequadamente foram a:

- intuição, pois, utilizaram conhecimentos matemáticos prévios para examinar situações matemáticas desconhecidas;

- representação simbólica, pois, compreenderam o significado de símbolos ou notações matemáticas na representação de uma situação matemática;

- representação mental, pois, associaram objetos matemáticos com operações algébricas ou aritméticas e com métodos de resolução; e

- modelação, pois, adequaram os dados do enunciado do problema a um modelo para estudar o balanceamento da reação química.

Entendemos que o estudante E7, que não conseguiu modelar o problema, mobilizou apenas os processos:

- intuição, pois, utilizou conhecimentos matemáticos prévios para examinar situações matemáticas desconhecidas; e

- visualização, pois, gerou alguma imagem mental do problema e a externalizou por meio esboços ou esquemas para representar, compreender e explorar o problema.

No quadro a seguir exibimos uma síntese das resoluções apresentadas para a Questão 8, no primeiro e no último episódios de ensino.

Quadro 17 – Síntese das resoluções para a Questão 8 nos Episódios 1 e 9.

Questão 8					
Episódio	**Resoluções adequadas/ corretas**	**Resoluções parcialmente corretas**	**Resoluções inadequadas/ incorretas**	**Em branco**	**Processos do PMA evidenciados**
1	**E9**	**E2** e **E11**	E3, **E7**, **E15**, **E16** e E25	E5, E14 e E21	Representação simbólica, Representação mental, Visualização, Intuição e Modelação
9	**E2, E3, E5, E9, E11, E14, E15, E16** e **E21**	-	**E7**	E25	Representação simbólica, Representação mental, Visualização, Intuição e Modelação

Fonte: autoria própria.

Verificamos no Quadro 17 um aumento significativo no número de resoluções adequadas do primeiro para o último episódio de ensino, o que exprime o aperfeiçoamento de habilidades como a interpretação e a construção de modelos para situações em um contexto de balanceamento de reações químicas, além do desenvolvimento de processos do PMA pela maioria da turma.

No Quadro 18 sintetizamos as resoluções dos estudantes, bem como os processos do PMA identificados nessas resoluções, para as oito questões do instrumento de reavaliação, aplicado no último episódio de ensino.

Quadro 18 – Síntese das análises do Episódio 9.

Questão	**Resoluções adequadas/ corretas**	**Resoluções parcialmente corretas**	**Resoluções inadequadas/ incorretas**	**Em branco**	**Processos do PMA evidenciados**
1	**-**	**E2, E3, E5, E9, E11, E14, E15, E16**, **E21** e **E25**	E7	-	Representação simbólica, Intuição e Síntese
2	**E2, E3, E9, E11** e **E16**	**E7, E15** e **E25**	-	E5, E14 e E21	Representação simbólica, Representação mental, Intuição e Visualização
3	**E2, E5, E9, E14, E15, E16**, **E21** e **E25**	-	**E3** e **E11**	E7	Representação simbólica, Representação mental, Intuição, Mudança de representação e tradução
4	**E2, E5, E9** e **E16**	**E3, E7, E11, E14, E15, E21** e **E25**	**-**	-	Representação simbólica, Representação mental e Intuição
5	**E2, E3, E5, E7, E9, E11, E14, E15, E16** e **E21**	-	**E25**	-	Representação simbólica, Representação mental, Intuição, e Mudança de representação e tradução
6	**E2, E9, E11** e **E16**	-	-	E3, E5, E7, E14, E15, E21 e E25	Representação mental, Intuição e Modelação
7	**-**	**E2, E5, E9, E14, E15** e **E16**	**E7** e **E11**	E3, E21 e E25	Representação simbólica, Intuição, Analogia e Síntese
8	**E2, E3, E5, E9, E11, E14, E15, E16** e **E21**	-	**E7**	E25	Representação simbólica, Representação mental, Intuição, Visualização e Modelação

Fonte: autoria própria.

De acordo com o Quadro 18, encontramos indícios de processos associados ao processo de representação do PMA na produção escrita de todos os estudantes. Sendo que os processos de representação simbólica, representação mental, visualização, intuição e mudança de representação e tradução foram mobilizados por todos os onze estudantes, e o processo de modelação foi mobilizado por dez estudantes.

Quanto aos processos associados à abstração, encontramos indícios de analogia e de síntese na produção escrita de seis estudantes. Ao mobilizarem tais processos, esses estudantes demonstraram possuir, de acordo com Dreyfus (2002), os pré-requisitos para que desenvolvam/mobilizem o processo de abstração.

Finalizadas as análises dos episódios de ensino, tecemos alguns comentários gerais e comparações a respeito das análises do primeiro e do último episódios.

Segundo Dreyfus (2002), apreender pela intuição tem um papel central em qualquer sequência de processos que começa a partir da descoberta. Considerando que em todos os episódios de ensino ocorreu primeiro a resolução da tarefa pelos estudantes, por meio da descoberta, e depois a formalização e síntese dos conteúdos, entendemos que houve a utilização de conhecimentos prévios, por parte dos estudantes, para a exploração de todas as questões. Logo, inferimos que o processo de intuição foi mobilizado pelos estudantes em todas as suas resoluções.

Constatamos no último episódio um maior envolvimento da turma no desenvolvimento das resoluções, explícito tanto pela atitude dos estudantes em sala de aula – despendendo mais tempo para as resoluções –, quanto pela natureza de suas resoluções – maioritariamente adequadas ou parcialmente adequadas.

Além disso, identificamos nas análises do último episódio a mobilização de processos do PMA pela maioria dos estudantes, nas resoluções de sete dentre as oito questões propostas. Enquanto, no primeiro episódio, apenas três estudantes mobilizaram a maior parte dos processos identificados, dos quais, apenas um mobilizou os processos de analogia e síntese, essenciais para a abstração, segundo Dreyfus (2002).

Em vista disso, verificamos que o trabalho em grupos, por meio da exploração e discussão de tarefas cuidadosamente escolhidas pela professora-pesquisadora, tenha sido um fator determinante para o avanço dos estudantes na aprendizagem de conteúdos de Matrizes e Sistemas Lineares e no desenvolvimento do PMA, durante essa Experiência de Ensino.

No próximo capítulo, retomamos os objetivos e a hipótese dessa pesquisa e apresentamos nossas considerações e reflexões finais.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na presente tese investigamos indícios de desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado em produções escritas de estudantes do primeiro semestre de um curso de Licenciatura em Química em uma disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, por meio da realização de uma Experiência de Ensino. Alicerçados nesse objetivo geral, delineamos os seguintes objetivos específicos para o estudo:

- Conhecer construções matemáticas e noções prévias de estudantes por meio de uma avaliação diagnóstica, referente aos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares;

- Elaborar uma trajetória de aprendizagem para os conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares;

- Identificar e discutir indícios de processos do PMA na produção escrita de estudantes ao início, durante e ao final da realização de uma trajetória de aprendizagem.

Considerando os objetivos e questionamentos definidos, essa investigação, de natureza qualitativa, está inserida na perspectiva metodológica de Experiência de Ensino, sendo composta essencialmente pelos três seguintes elementos: nove episódios de ensino, registros dos referidos episódios, a professora-pesquisadora e os estudantes.

No primeiro episódio de ensino investigamos as construções e noções prévias de estudantes por meio de uma avaliação diagnóstica, referente aos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, contemplando o primeiro objetivo específico da pesquisa.

Nessa avaliação, identificamos aspectos relacionados ao perfil do estudante: como o sentimento de despreparo apontado pela maioria em relação ao estudo da Matemática e, as dificuldades citadas na aprendizagem de conteúdos como funções, logaritmos, vetores, geometria, matrizes, probabilidade e estatística. Identificamos também aspectos conceituais, didáticos e matemáticos relacionados aos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, tais como: dificuldades com o conceito de Equação Linear, com a transição e tradução entre diferentes representações para Sistemas de

Equações Lineares (representação em linguagem natural, representação matricial, representação algébrica e representação geométrica) e com a justificação de estratégias e procedimentos.

Tais aspectos evidenciaram o despreparo desses estudantes, ingressantes do Ensino Superior, para o estudo da Geometria Analítica e da Álgebra Linear, corroborando com os resultados de pesquisas como López, Mendoza e Silva (2010), Lucas *et al*. (2014), Masola (2014) e Barros, Fernandes e Araújo (2016).

Nos demais episódios de ensino ocorreram a exploração e a resolução de tarefas, as quais foram elaboradas tendo em vista, principalmente: abordar as dificuldades dos estudantes detectadas na avaliação diagnóstica (Seção 4.1.3) e nas pesquisas relacionadas (Seção 2.1); preencher as lacunas na abordagem dos conteúdos propostos, evidenciadas na análise dos livros didáticos adotados na disciplina (Seção 4.1.1); e desenvolver processos cognitivos envolvidos na aprendizagem dos estudantes, no caso, os processos do PMA propostos por Dreyfus (2002) (Seção 2.2).

Desse modo, os episódios de ensino; as interações e discussões entre a professora-pesquisadora e os estudantes – orquestradas segundo as perspectivas do Ensino-Aprendizagem Exploratório e do Pensamento Matemático Avançado –; e os registros de cada episódio, fundamentaram o desenvolvimento de uma trajetória de aprendizagem para os conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares, cumprindo o segundo objetivo específico proposto.

A seguir, discutiremos indícios de processos do PMA evidenciados na produção escrita dos estudantes ao início, durante e ao final da realização da trajetória de aprendizagem, contemplando o terceiro objetivo específico dessa pesquisa.

No episódio inicial da trajetória de aprendizagem (Episódio 1), no qual ocorreu a aplicação de uma prova diagnóstica, as questões da terceira seção desse instrumento abordaram aspectos matemáticos envolvendo Matrizes e Sistemas de Equações Lineares. Por meio da análise das resoluções dessas questões, encontramos indícios dos processos de visualização, intuição, representação simbólica, representação mental, modelação, mudança de representação e tradução, analogia e síntese, ou seja, de oito dentre os nove processos elencados no Quadro 3.

No entanto, apenas quatro estudantes mobilizaram em suas resoluções o processo de mudança de representação e tradução, dos quais, apenas um mobilizou processos relacionados à abstração. Destacamos que grande parte dos estudantes não apresentou resoluções para seis, dentre as oito questões analisadas, como pode ser observado no Quadro 4.

Nos episódios de ensino seguintes o número de questões deixadas em branco diminuiu consideravelmente, fato que pode ser reflexo das explorações e discussões oportunizadas em sala de aula, do trabalho realizado em grupos e da aprendizagem dos conteúdos propostos.

Identificamos nas resoluções das tarefas desses episódios, de modo geral, a mobilização de todos os processos do PMA estudados nessa pesquisa. Considerando cada episódio, encontramos indícios dos seguintes processos:

- Episódio 2: representação simbólica, representação mental, visualização, intuição e mudança de representação e tradução.

- Episódios 3 e 4: representação simbólica, representação mental, visualização, intuição, mudança de representação e tradução, analogia, generalização e síntese.

- Episódio 5: representação simbólica, representação mental, intuição, mudança de representação e tradução e síntese.

- Episódio 6: representação simbólica, representação mental, intuição, mudança de representação e tradução, analogia, generalização e síntese.

- Episódio 8[68]: representação simbólica, representação mental, visualização, intuição, mudança de representação e tradução e modelação.

Constatamos por meio das análises, que cada tarefa elaborada permitiu que os estudantes mobilizassem diferentes processos do PMA, sendo que, em nenhuma delas encontramos indícios da mobilização de todos os processos. Tal fato pode ser justificado pela natureza das questões e pela

---

[68] Como mencionado, no Episódio 7 não houve produção escrita para a identificação de processos do PMA.

atividade individual dos estudantes, assim, as mesmas tarefas desenvolvidas com outros estudantes poderiam provocar a mobilização de diferentes processos.

Outra observação decorrente das análises é que, embora todos os estudantes não tenham mobilizado os mesmos processos – e ainda, que eles possam ter mobilizado tais processos em questões diferentes e de maneiras distintas –, os processos evidenciados na análise de cada episódio foram mobilizados pela maioria dos estudantes.

No último episódio de ensino (Episódio 9) da trajetória de aprendizagem aconteceu a aplicação de um instrumento de reavaliação com questões semelhantes às aplicadas no Episódio 1. Analisando tal episódio, encontramos indícios de processos associados à representação, a saber: representação simbólica, representação mental, visualização, intuição e mudança de representação e tradução, nas resoluções de todos os estudantes.

Quanto aos processos associados à abstração, encontramos indícios de analogia e de síntese na produção escrita de seis dentre os onze estudantes que constituíram o *corpus* dessa pesquisa. O processo de generalização foi mobilizado por sete estudantes no sexto episódio de ensino, no entanto, não encontramos indícios do mesmo nos demais episódios.

Tal fato aponta para a necessidade de enfatizarmos, por meio da elaboração de tarefas e discussões, o desenvolvimento do processo de generalização nas aplicações e readequações futuras da trajetória de aprendizagem.

Traçando um paralelo entre o início e o final da aplicação da trajetória de aprendizagem, verificamos um progresso na quantidade e na qualidade das resoluções, visto que, o número de questões deixadas em branco e de resoluções incorretas/inadequadas diminuiu significativamente do primeiro para o último episódio de ensino.

Além disso, em contraste com as análises do primeiro episódio, encontramos nas análises do último episódio indícios de processos relacionados à representação e à abstração na resolução da maioria dos estudantes.

Assim, concluímos que a trajetória de aprendizagem desenvolvida confirma nossa hipótese inicial para a Experiência de Ensino, de que o ensino dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares por meio de tarefas investigativas, com uma abordagem exploratória fundamentada em dificuldades e conhecimentos prévios dos estudantes, pode proporcionar o desenvolvimento dos processos do PMA e, em especial, dos processos relacionados à abstração.

Relacionada aos objetivos dessa investigação foi proposta a seguinte questão, sobre a qual realizaremos algumas reflexões: “que potencialidades podem ser evidenciadas a partir de uma trajetória de aprendizagem, pautada nas perspectivas do Ensino-Aprendizagem Exploratório e do Pensamento Matemático Avançado, para a compreensão dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares?”

Verificamos que o trabalho com diferentes representações para os conceitos de Matrizes e Sistemas Lineares proporcionado pelas tarefas beneficiou os estudantes na utilização e na tradução entre diferentes representações, bem como na escolha pela(s) mais adequada(s) a determinadas situações matemáticas.

Nesse sentido, destacamos que uso do GeoGebra se mostrou uma alternativa eficaz, pois, permitiu o estudo e a visualização de uma variedade de casos envolvendo as representações geométricas de Sistemas Lineares e a exploração de aplicações do conceito de Matrizes. Utilizando o quadro ou o papel para construir essas representações o tempo gasto com tais tarefas seria significativamente maior.

Nas análises dos episódios 3 e 4, por exemplo, observamos que o *software* proporcionou a construção do registro gráfico e a análise dos resultados obtidos na resolução e na classificação de Sistemas Lineares, complementando a abordagem, predominantemente algébrica, de livros didáticos do Ensino Médio – como analisado por Battaglioli (2008) – e do Ensino Superior – como analisado na Seção 4.1.1.

Ainda que o uso de diferentes representações para a exploração de uma situação matemática não tenha se tornado uma prática recorrente dos estudantes durante a trajetória de aprendizagem, percebemos, por meio das discussões em sala de aula, que os estudantes se conscientizaram da importância de tal prática na resolução de tarefas de matemática. Defendemos que tal prática deva ser estimulada pelos professores desde as séries iniciais, para que os estudantes se habituem a ela.

A dificuldade com a modelagem de situações-problema por meio de Sistemas Lineares não foi superada, como pode ser percebido, por exemplo, pelo número de estudantes que não modelaram a situação proposta na Questão 6 (Episódio 9). Porém, observamos um avanço nessa direção, visto que o número de resoluções adequadas para a questão foi maior no último episódio de ensino e que a maioria dos estudantes resolveu adequadamente outra questão que abordava a modelação (Questão 8 – Episódio 9).

Nesse sentido, a elaboração de tarefas utilizando um contexto formativo em Química colaborou para despertar o interesse e motivar os estudantes na resolução das tarefas, como observado, por exemplo, na resolução das questões que abordavam o balanceamento de reações químicas, no oitavo episódio. Defendemos, dessa forma, que o uso de práticas docentes que dialoguem de forma direta com as necessidades profissionais de cada curso podem colaborar na aprendizagem da Matemática.

Situações de aprendizagem que enfatizaram o processo de resolução, e não apenas o resultado das questões, como o seminário sobre métodos de resolução para Sistemas Lineares (Episódio 7), e a investigação sobre transformações geométricas (Episódios 3 e 4), contribuíram para que os estudantes pudessem considerar e reconhecer a existência de diferentes estratégias para a resolução de uma tarefa.

Observamos no decorrer da trajetória de aprendizagem, estudantes que inicialmente se mostravam inseguros em resolver questões sem o auxílio da professora-pesquisadora para verificar os algoritmos e estratégias utilizadas, questionarem as resoluções e estratégias dos colegas e argumentarem em favor de suas ideias.

De fato, ao longo dos episódios, a forma como a professora-pesquisadora conduziu a exploração das tarefas provocou alterações no ambiente de sala de aula e nas rotinas de trabalho dos estudantes, exigindo desses uma participação ativa em seu processo de aprendizagem e favorecendo a formulação de conjecturas e a justificação.

Nessa perspectiva, reconhecemos o trabalho em grupo como um facilitador da aprendizagem, possibilitando aos estudantes compartilhar diferentes estratégias para facilitar a compreensão de uma questão bem como o planejamento de sua resolução.

Além disso, as discussões e sínteses realizadas ao final das aulas se revelaram fundamentais para o aprofundamento dos processos e conceitos matemáticos envolvidos e para a introdução de novos conceitos. Os incentivos, desafios e questionamentos feitos pela professora-pesquisadora, bem como a interação com os pares, permitiram que os estudantes desenvolvessem habilidades como a comunicação oral e a argumentação.

Portanto, acreditamos que a trajetória de aprendizagem desenvolvida nessa Experiência de Ensino apresentou potencialidades não só para a compreensão dos conteúdos abordados, mas também para o desenvolvimento de habilidades importantes na aprendizagem da Matemática.

Finalmente, entendemos que os resultados obtidos a partir dessa pesquisa não são passíveis de generalização, dadas as especificidades do contexto de sala de aula, do curso e dos participantes, porém, permitem ampliar o conhecimento disponível a respeito do ensino e da aprendizagem da Álgebra Linear e, em particular, dos conteúdos de Matrizes e Sistemas de Equações Lineares.

Nesse sentido, o desenvolvimento de uma trajetória de aprendizagem para toda a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear pode potencializar evidências do PMA. Dessa forma, esperamos que a trajetória de aprendizagem construída possa ser testada, adaptada e aperfeiçoada para outros contextos, conteúdos e sujeitos, e que esse estudo possa provocar novas pesquisas e propostas para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado.

Por último, considero importante destacar as contribuições dessa investigação para o meu desenvolvimento como professora e como pesquisadora. O percurso até aqui foi marcado por muito trabalho para desempenhar os papéis de estudante, professora e pesquisadora, mas também me proporcionou muito aprendizado e amadurecimento. Como estudante, percebi que ainda há muito o que aprender; como professora, pude refletir amplamente sobre a minha prática e suas implicações na aprendizagem dos estudantes; e como pesquisadora da área de Educação Matemática, entendi que minha missão está apenas começando.

REFERÊNCIAS

APPEL, E. M.; LUIZ, E. A. J. Uma experiência no Ensino Médio com investigação matemática e resolução de problemas. In: *ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10*., 2009. Guarapuava. *Anais...* Guarapuava: Unicentro, 2009. p. 787-798.

APUCARANA. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curso de Licenciatura em Química. *Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Química* – 2013. Apucarana, 2013. 179 p. Disponível em: <http://www.utfpr.edu.br/apucarana/cursos/licenciaturas/Ofertados-neste-Campus/licenciatura-em-quimica/ppc-projeto-pedagogico-do-curso-de-licenciatura-em-quimica/view>. Acesso em 10 jan. 2017.

BARDIN, L. Análise de Conteúdo. Lisboa: Edições 70, 1977.

BARROS, P. M.; FERNANDES, J. A.; ARAÚJO, C. M. Raciocínios desenvolvidos na verificação das soluções de sistemas de equações lineares. In: *XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM, 2012. p. 333-347.

______. Prontidão de alunos do ensino superior para a aprendizagem de álgebra linear. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 43-59, 2016.

BARROS, P. M.; ARAÚJO, C. M.; FERNANDES, J. A. Raciocínios de estudantes do ensino superior na resolução de tarefas sobre matrizes. In FERNANDES, J. A.; MARTINHO, M. H.; TINOCO, J.; VISEU, F. (Orgs.). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática.* Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho, 2013, p. 295-308.

BATTAGLIOLI, C. S. M. Sistemas lineares na segunda série do ensino médio: um olhar sobre os livros didáticos. 2008. 102 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica – PUC/SP, São Paulo. 2008.

BERTOLAZI, K. S. Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de Licenciatura em Matemática sobre Sistemas de Equações Lineares. 2012. 227 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2012.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto Editora, 1994.

BOLDRINI, J. L. *et al*. Álgebra linear. 3. ed. ampl. e rev. São Paulo: Harper, 1980.

BRAATHEN, P. C. Aprendizagem Mecânica e Aprendizagem Significativa no processo de ensino-aprendizagem de Química. Revista *Eixo*, Brasília, v. 1, n. 1, p. 63-69, 2012.

BRASIL. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Química. Parecer CNE/CES n.º 1.303, de 6 de novembro de 2001. Publicado no D.O.U de 7 dez. 2001, Seção 1, p. 25.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: MEC, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em 18 jun. 2016.

______. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio – Matemática (PNLEM). Brasília: MEC, 2005. Disponível em <ftp://ftp.fnde.gov.br/web/livro_didatico/guia_livro_didatico_pnlem_2006_mg.pdf>. Acesso em 08/08/2019.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Orientações curriculares para o ensino médio – Volume 2: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: MEC, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 18 jun. 2016.

______. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular – Ensino Médio*. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/bncc-ensino-medio>. Acesso em: 15 dez. 2018.

BROUSSEAU, G. Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 4, n. 2, p. 165-198. Grenoble, 1983.

______. Theory of didactical situations in mathematics (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds. & Trans.). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic, 1997.

BUSSMANN, C. J. C.; KLAIBER, M. A.; SILVA, D. P. Processos mentais de Dreyfus e o Ensino Exploratório: discussão e possível intervenção em sala de aula. In: *ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14*., 2017. Cascavel. *Anais...* Cascavel: Unioeste, 2017. p. 1-13.

CAMPOS, E. A noção de congruência algébrica no curso de matemática: uma análise das respostas dos estudantes. 2009. 207 f. Tese (Doutorado em

Educação) – Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2009.

CANAVARRO, A. P. Ensino Exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática,* Lisboa, 11-17, 2011.

CARDOSO, V. C; KATO, L. A.; OLIVEIRA, S. R. de. Um estudo no campo conceitual de Vergnaud aplicado às Matrizes: uma investigação acerca dos invariantes operatórios. *REVEMAT*. Florianópolis, v. 8, Ed. Especial, p. 95-116, 2013.

CLEMENTS, D. H. e SARAMA, J. Learning Trajectories in Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning,* v. 6, n. 2, p. 81-89, 2004.

COBB, P. Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In: A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p. 307-334.

COBB, P; STEFFE, L. P. The Constructivist Researcher as Teacher and Model Builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 14, n. 2, p. 83-94, 1983.

COBB, P. *et al.* Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*. New York, v. 32, n. 1, p. 9-13, jan./fev. 2003. Disponível em: < http://www.jstor.org/stable/3699928>. Acesso em: 18 fev. 2017.

COLLINS, A.; JOSEPH, D.; BIELACZYC, K. Design research: theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, v. 13, n. 1, p. 15-42, 2004.

CURY, H. N.; BISOGNIN, E. Análise de Soluções de um Problema Representado por um Sistema de Equações. *Bolema,* Rio Claro, v. 22, n. 33, p. 1-22, 2009.

CURY, H. N. Erros, dificuldades e obstáculos no ensino e na aprendizagem de Matemática: um levantamento de trabalhos em anais. *Acta Scientiae,* Canoas, v. 17, n. 2, p. 357-370, 2015.

CYRINO, M. C. de C. T.; TEIXEIRA, B. R. O Ensino Exploratório e a Elaboração de um Framework para os Casos Multimídia. In: CYRINO, Márcia C. de C. T. (Org.) *Recurso Multimídia para a Formação de Professores que Ensinam Matemática*, Londrina: Eduel, 2016. p. 81-99.

DORIER, J.; SIERPINSKA, A. Research into the teaching and learning of linear algebra. In: HOLTON, Derek *et al.* (Eds.). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: an ICMI Study.* Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2001. p. 255-273.

DREYFUS, T.; EISENBERG, T. On Different Facets of Mathematical Thinking. In: STERNBERG, R. J.; BEN-ZEEV; T. (Eds.). *The nature of mathematical thinking.* USA: Lawrence Erlbaum Associates, 1996. p. 253-284.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Org.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 25-41.

Design-Based Research Collective. Design-Based Research: an emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, v. 32, n. 1, p. 5-8, 2003.

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Org.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 95-123.

DUROUX, A. La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure, *Memoria de D.E.A.*, n. 3, p. 43-67. Bordeaux, 1983.

DUVAL, R. Registre de représéntation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Anais de Didactique et Sciences Cognitives. Strasbourg: IREM – ULP, v. 5, p. 37-65. 1993.

EDWARDS, B. E.; DUBINSKY, E. & McDONALD, M. A. Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning,* v. 7, n. 1, p. 15-25, 2005.

FARO, S. D. Os conhecimentos supostos disponíveis na transição entre o ensino médio e o ensino superior: o caso da noção de sistemas de equações lineares. 2010. 224 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo. 2010.

FRATELLI, B. C.; MONTEIRO, M. S. Dificuldades do Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear. São Paulo. 2007. Disponível em: <www.ime.usp.br/~cpq/main/arquivos/outros/Bianca%2520Cristina%2520Fratelli.pdf+ &cd=2&hl=pt-BR&ct=clnk&gl=br> Acesso em: 20 jan. 2017.

GRAY, E.; PINTO, M.; PITTA, D.; TALL, D. Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary & Advanced Mathematics**.** *Educational Studies in Mathematics*, v. 38, n. 1-3, p. 111-133, Springer, 1999.

GONZÁLES, M. P.; ORTIZ, J. B. Conexiones entre los Conceptos de Dependencia e Independencia Lineal de Vectores y el de Solución de Sistemas Lineales en R^2 y R^3 desde el punto de vista de los Modos de Pensamiento. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, v. 7, n. 1, p. 1-24, 2012.

HAREL, G.; KAPUT J. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Org.), *The role of conceptual entities and their symbols in building advanced* *mathematical concepts*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 82-94.

HAREL, G.; SOWDER, L. Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and its Development. In: *Mathematical Thinking and Learning.* USA: Lawrence Eribaum Associates, Inc, v. 1, n. 7, 2005. p. 27-50.

JORDÃO, A. L. I. Um Estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio. 2011. 193 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica – PUC/SP, São Paulo. 2011.

KANTOWSKI, M. G. The teaching experiment and Soviet studies of problem solving. In: L. L. Hatfield & D. A. Bradbard (Eds.) *Mathematical problem solving: Paper from a research workshop.* Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, 1978.

KELLY, A. Design Research in Education: Yes, but Is It Methodological? *The Journal of the Learning Sciences*, v. 13, n. 1, p.115-128, 2004.

KOLMAN, B.; HILL, D. R. Introdução à álgebra linear: com aplicações. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

LÓPEZ, V. L. U.; MENDOZA, J. J. A.; SILVA, D. G. M. Algunas causas que determinan el bajo rendimiento académico en el curso de álgebra lineal. *Scientia et Technica*, n. 44, p. 286-291, 2010.

LUCAS, C. O. *et al*. Aspectos da rigidez e atomização da matemática escolar nos sistemas de ensino de Portugal e Espanha: Análise de um Questionário. *Educação Matemática Pesquisa,* São Paulo, v.16, n.1, p.1-24, 2014.

MARINS, A. S. Pensamento Matemático Avançado em Tarefas envolvendo Transformações Lineares. 2014. 170 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

MASOLA, W. J. Dificuldades de Aprendizagem Matemática dos Alunos Ingressantes na Educação Superior nos Trabalhos do X Encontro Nacional de Educação Matemática. 2014. 153 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2014.

MASON, J. Mathematical Abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics*, v. 9, n. 2, p. 2-8, 1989.

MOLINA, M.; CASTRO, E.; CASTRO, E. Teaching experiments within design research. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences*, v. 2, n. 4, p. 435-440, 2007.

MOREIRA, M. A. Aprendizaje significativo critico*. Indivisa, Boletin de Estúdios e*

Investigación, Lisboa, n. 6, p. 83-101, 2005.

MORO, G.; VISEU, F. A. V.; SIPLE, I. Z. Ensino de álgebra linear: traços de uma pesquisa. In: Colóquio Luso-Brasileiro de Educação, II, 2016, UDESC - FAED, Anais do II COLBEDUCA, Joinville, 2016. p. 243-256.

NAGY-SILVA, M. C.; BURIASCO, R. L. C. Análise da produção escrita em matemática: algumas considerações. *Ciência e Educação.* Bauru, v. 11, n. 3, p. 499-511, 2005.

OLIVEIRA, H.; MENEZES L. e CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Revista Quadrante*. Lisboa, v. 22, n. 2, p. 29-53, 2013.

OKTAÇ, A.; TRIGUEIROS, M. ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, v. 13, n. 4, p. 373-385, 2010.

PANTOJA, L. F. L. A conversão de registros de representações semióticas no estudo de sistemas de equações algébricas lineares. 2008. 105 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará, Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Belém, 2008.

PIMENTA, G. V. *et al*. Os Modelos Mentais Relacionados ao Aprendizado de Sistemas Lineares no Ensino Superior. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*. Florianópolis, v. 5, n. 1, p. 205-226, 2012.

PONTE, J. P. Gestão Curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular.* Lisboa: APM, 2005. p.11-34.

______. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. (Org). *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática.* Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. P. 13-30.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M. A. F. As discussões matemáticas na aula exploratória como vertente da prática profissional do professor. *Revista da Faculdade de Educação*. Mato Grosso, v. 23, n. 1, p. 131-150, 2015.

PONTE, J. P. *et al.* Exercícios, problemas e explorações: Perspectivas de professoras num estudo de aula. *Revista Quadrante.* Lisboa, v. 24, n. 2, p. 111-134, 2015.

POOLE, D. Álgebra linear. São Paulo: Thomson Learning: Cengage Learning, 2009.

RAPPAPORT, C. R. *Modelo piagetiano*. In: RAPPAPORT C. R.; FIORI, W. R.; DAVIS, C. *Teorias do Desenvolvimento: conceitos fundamentais* - Vol. 1. São Paulo: EPU, 1981. p. 51-75.

RESNICK, L. B. Education and learning to think. Washington: National Academy Press, 1987. 62 p.

RODRIGUES, C. D. Uma Abordagem para o estudo de Sistemas Lineares integrando diferentes Linguagens. 2013. 154 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte. 2013.

SANTOS, N. M. Vetores e matrizes: uma introdução à álgebra linear. 4. ed. rev. e ampl. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

SIERPINSKA, A. On some aspects of student's thinking in linear algebra. In: Dorier (Eds.), *On the Teaching of Linear Algebra.* Dortrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 209-246.

SILVA, T. M. S. Sistemas Lineares: uma Proposta Apoiada na Exploração de Registros Semióticos e na Utilização de um Recurso Computacional. In: *Anais Eletrônicos do XVIII EBRAPEM – GD 6*. Recife: UFPE, 2014. p. 1-12.

SILVA, A. V. M. Sistemas de equações lineares: um paralelo entre a álgebra e a geometria. In: *Anais Eletrônicos do XIX EBRAPEM – GD 4*. Minas Gerais: UFJF, 2015. p. 1-12.

SILVA, H. C. M. O ensino de matrizes a partir da resolução de problemas. 2016. 244 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém. 2016.

SIMIÃO, F. A noção de matriz na transição entre o ensino médio e o superior. 2010. 323 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo. 2010.

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 26, n. 2, p. 114-145, 1995.

SIMON, M. A.; TZUR, R. Explicating the Role of Mathematical Tasks in conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*. v. 6, n. 2, p. 91-104, 2004.

SOUZA, P. de A. *et al.* Transformações Geométricas: uma investigação matemática por meio do GeoGebra. In: *SIMPÓSIO NACIONAL DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA, 4*., 2014. Ponta Grossa. *Anais...* Ponta Grossa: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2014. p. 1-10.

STEFFE, L. P. The constructivist teaching experiment: illustrations and implications. In: E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 177-194.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2000, p. 267-306.

STEIN, M. K. *et al*. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, v. 10, n. 4, p. 313-340, 2008.

TALL, D. The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. In D. A. Grouws (Ed.), *NCTM handbook of research on mathematics teaching and learning,* New York: Macmillan, 1992, p. 495-511.

______. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: *Proceedings of 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Brasil, v. 1, p. 61-75, 1995.

______. Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers. A. J. Bishop, Cambridge, U. K, 2002.

TEIXEIRA, L. R. M. Dificuldades e erros na Aprendizagem da Matemática. In: VII EPEM - ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, São Paulo. Anais. Disponível em: <http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Anais_VII_EPEM/mr.html>. Acesso em: 25 fev. 2018.

THOMPSON, A. G. A relação entre concepções de matemática e de ensino de matemática de professores na prática pedagógica. *Zetetike*. Campinas, v. 5, n. 8, p. 11-44, 1997.

THOMPSON, P. W. The constructivist teaching experiment in mathematics education. Paper presented at the Annual Meeting of the National Council of Teacher of Mathematics, Boston, 1979.

THURSTON, W. P. Mathematical Education. *Notices of the American Mathematical Society,* USA, v. 7, n. 37, p. 844-850, 1990.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques*, v. 10, n. 23, p.133-170, 1990.

WEBER, E.; WALKINGTON, C.; McGALLIARD, W. Expanding Notions of “Learning Trajectories” in Mathematics Education, Mathematical Thinking and Learning, v. 17, n. 4, p. 253-272, 2015.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Periódicos selecionados para o levantamento bibliográfico

ISSN	Nome do Periódico	Qualis
2178-7727	Acta Scientiae: Revista de Ensino de Ciências e Matemática	A2
2317-5125	Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas (online)	A2
1980-4415	Bolema: Boletim de Educação Matemática (online)	A1
2357-724X	Boletim Online de Educação Matemática	B1
2358-4750	Caminhos da Educação Matemática em Revista (online)	B2
1980-850X	Ciência & Educação (online)	A1
1659-2573	Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática (Costa Rica)	B2
1678-4634	Educação e Pesquisa (online)	A1
2317-904X	Educação Matemática em Revista	A2
1518-8221	Educação Matemática em Revista – RS	A2
1983-3156	Educação Matemática Pesquisa (online)	A2
2177-9309	Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana	B1
2526-2386	Hipátia - Revista Brasileira de História, Educação e Matemática	B2
2176-5634	Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática	A2
2359-2842	Perspectivas da Educação Matemática	B1
1980-6248	Pro-posições (Unicamp. Online)	A1
0872-3915	Quadrante (Portugal)	B1
1850-6666	REIEC - Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (EN LÍNEA)	A2
2014-3621	REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education	A2
2007-6819	RELIME - Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa	A2
1980-3141	REMATEC - Revista de Matemática, Ensino e Cultura (UFRN)	B2
1981-1322	REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática	A2
2238-2380	Revista de Educação, Ciências e Matemática	A2
0102-4981	Revista do Professor de Matemática	B2
1022-6508	Revista Iberoamericana de Educación (Espanha)	B1
2238-0345	Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (RIPEM)	B2
2525-5444	Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática	B2
2179-426X	RENCIMA - Revista de Ensino de Ciências e Matemática	A2
2238-5800	Revista Paranaense de Educação Matemática	B1
2238-2380	Revista de Educação, Ciências e Matemática	A2
1130-488X	SUMA: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas	B2
1815-0640	Unión (Federação Iberoamericana de Educação Matemática)	B1
2176-4603	Vidya (online)	A2
2176-1744	Zetetike	A2

APÊNDICE B – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Com o objetivo de realizar um estudo sobre a aprendizagem de conceitos matemáticos no curso de Licenciatura em Química, solicito sua colaboração no preenchimento dos questionários que serão aplicados, bem como sua autorização para análise e divulgação das atividades desenvolvidas em sala de aula, na disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Com esta pesquisa, pretendo aprimorar minha prática pedagógica e contribuir no processo de ensino aprendizagem dos conteúdos desta disciplina. Comprometo-me a manter sua identidade em sigilo, garantindo o anonimato no relato da pesquisa. Obrigada!

Professora Michelle Andrade Klaiber.

Apucarana, 07 de Março de 2017.

Consentimento:

Mediante compromisso ético de manter preservada minha identidade, concordo em participar desta pesquisa e autorizo a divulgação dos dados coletados.

Nome	Assinatura	Nº RG ou CPF

APÊNDICE C – Prova Escrita para a Avaliação Diagnóstica

1. Nome:

   Idade:

   Possui outra graduação? Se sim, qual?

   Tem alguma experiência com o exercício da docência? Se sim, em qual nível de ensino já atuou e por quanto tempo?

2. Por que você escolheu o curso de Licenciatura em Química? Comente.

3. Você acredita que a Matemática será um empecilho em seus estudos durante o curso de Licenciatura em Química? Fale um pouco sobre seus estudos em relação aos conceitos matemáticos.

4. O que você espera de sua formação neste curso?

5. Quais os seus hábitos de estudo e como eles interferem em sua aprendizagem da Química e da Matemática?

6. Você já teve alguma dificuldade com alguns conteúdos matemáticos? Quais?

7. Quanto aos conteúdos, assinale aqueles que você estudou:
   ( ) Soma de vetores
   ( ) Matrizes
   ( ) Sistemas possíveis determinados
   ( ) Ordem de uma matriz
   ( ) Representação geométrica de vetores
   ( ) Operações com matrizes
   ( ) Equação Linear
   ( ) Balanceamento de equações químicas
   ( ) Método da Substituição
   ( ) Matriz identidade
   ( ) Sistemas lineares
   ( ) Combinações lineares
   ( ) Regra de Cramer
   ( ) Resolução de sistemas lineares
   ( ) Sistemas possíveis indeterminados
   ( ) Retas
   ( ) Sistemas impossíveis
   ( ) Planos

8. (POOLE, 2004, adaptado) Nos itens de *a* até *f*, considere as equações nas variáveis *x*, *y* e *z*. Assinale se a equação dada é ou não linear, e então justifique o motivo de sua escolha.

a) $5x - y^2 + 2z = 0$

b) $\sqrt{3}x + 7y + z = cos(1)$

c) $\frac{1}{5}x + 9y - 13z = -6$

d) $xy - y + 2z = 5$

e) $-8\sqrt{x} - y^{-1} = 10$

f) $-x + sen(y) + 3z = 0$

9. É possível estabelecer relações entre os conteúdos de Matrizes e os de Sistemas de Equações Lineares? Comente.

10. Comente sobre algumas formas de representar a solução de um Sistema de Equações Lineares. Se possível, apresente exemplos.

11. No estudo dos Sistemas de Equações Lineares são apresentados alguns métodos de resolução, cite os que você conhece e faça um breve comentário sobre cada um eles.

12. (FGVRJ-2003, adaptado) A organização econômica Merco é formada pelos países 1, 2 e 3. O volume anual de negócios realizados entre os três parceiros é representado em uma matriz A, com 3 linhas e 3 colunas, na qual o elemento da linha i e coluna j informa quanto o país i exportou para o país j, em bilhões de dólares.

Se A=$\begin{bmatrix} 0 & 1{,}2 & 3{,}1 \\ 2{,}1 & 0 & 2{,}5 \\ 0{,}9 & 3{,}2 & 0 \end{bmatrix}$ então qual foi o país que mais exportou no Merco? E o que mais importou?

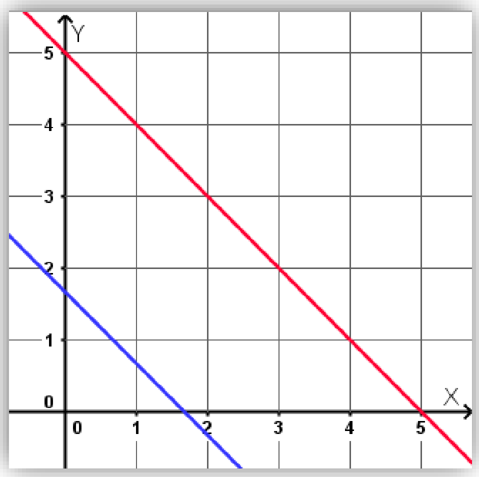
13. Qual o sistema de equações lineares expresso pela equação matricial $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$?

14. Resolva o seguinte sistema de equações lineares utilizando dois métodos distintos:

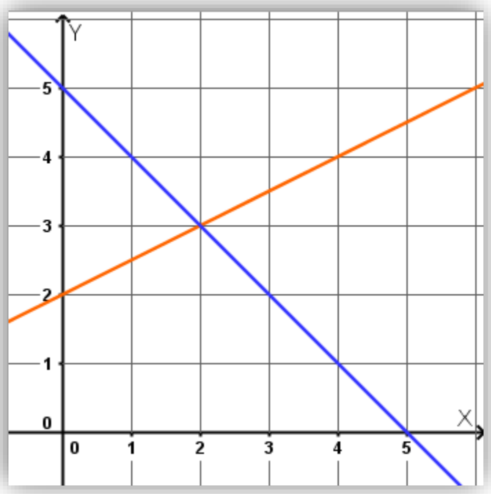
$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ -x + 7y = -9 \end{cases}$$

15. Quanto à resolução de Sistemas de Equações Lineares, estabeleça uma relação entre os sistemas de equações lineares e as soluções apresentadas abaixo. Justifique suas escolhas.

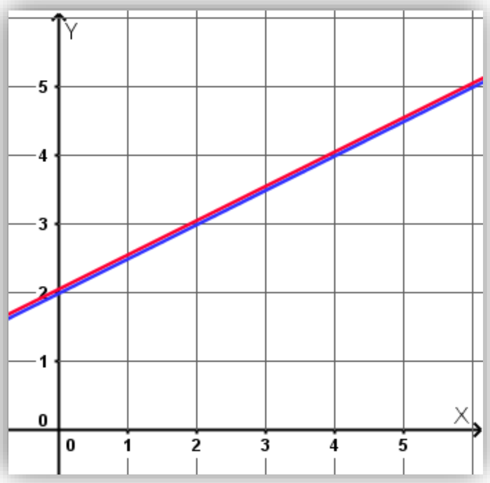
(a) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ x + y = 5 \end{cases}$ ( )



(b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = -2 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$ ( )



(c) $\begin{cases} -2x - 2y = -10 \\ 3x + 3y = 5 \end{cases}$ ( )



16. Considere um produto químico produzido a partir de dois ingredientes diferentes A e B, que têm que ser dissolvidos em água separadamente antes que eles interajam para formar o referido produto.

Suponha que a solução contendo A a 2,8 g/cm³ combinada com a solução contendo B a 1,5 g/cm³ produza 23 g do produto químico. Se a proporção de A e B nestas soluções for alterada para 3,2 g/cm³ e 4,5 g/cm³, respectivamente, então são produzidas 43 g do produto químico. Quais serão os volumes (em centímetros cúbicos) das soluções contendo A e B?

17. Comente cada uma das resoluções, apresentadas por quatro alunos distintos, para a questão:

Sejam A, B e X matrizes tais que $A \cdot X = B$. Determine a matriz X.

Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4
$A \cdot X = B$ $X = \frac{B}{A}$	$A \cdot X = B$ $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}$ $\cdot B$ $I \cdot X = A^{-1} \cdot B$ $X = A^{-1} \cdot B$	$A \cdot X = B$ $X = A^{-1} \cdot B$ $X = -A \cdot B$	$A \cdot X = B$ $A \cdot X \cdot A^{-1}$ $= B \cdot A^{-1}$ $X \cdot I = B \cdot A^{-1}$ $X = B \cdot A^{-1}$

18. (PUCRJ-2013, modificado) Segundo a Lei de Conservação de Massas de Lavoisier, "na natureza nada se cria e nada se perde, tudo se transforma". Essa lei nos mostra que quando ocorrem reações químicas o número de átomos permanece inalterado, estes átomos apenas se rearranjam originando novos produtos. Portanto, a quantidade de átomos de cada elemento em uma equação química que representa uma reação deve ser a mesma nos reagentes e nos produtos. Garantimos essa igualdade por meio do balanceamento dos coeficientes da equação, os chamados coeficientes estequiométricos.

Um antiácido comumente utilizado é o bicarbonato de cálcio ($NaHCO_3$) que reage no estômago segundo a equação $NaHCO_3 + HCl \rightarrow NaCl + H_2O + CO_2$ liberando cloreto de sódio, água e gás carbônico (por isso a sua efervescência). O óxido de alumínio (Al_2O_3) é também utilizado como antiácido. Ele reage com o ácido clorídrico (HCl) presente no estômago produzindo cloreto de alumínio e água. A equação desta reação é: $x\ Al_2O_3 + y\ HCl \rightarrow z\ AlCl_3 + w\ H_2O$, onde *x*, *y*, *z* e *w* são os coeficientes estequiométricos da reação.

a) Você conseguiria resolver este problema utilizando sistemas de equações lineares?

b) Calcule os valores de *x*, *y*, *z* e *w* para que a reação fique balanceada.

APÊNDICE D – Tarefa 1

TAREFA 1 – MATRIZES

GERENCIANDO OS INSUMOS DE UMA REDE LABORATORIAL

Uma rede laboratorial possui quatro filiais LA, LB, LC e LD, nas quais a quantidade dos insumos I, II e III é a seguinte:

Filial \ Insumo	I	II	III
LA	12	35	45
LB	10	100	20
LC	36	56	60
LD	20	30	95

a) Escreva a matriz Q que representa a quantidade dos insumos dessa rede laboratorial.
b) O que cada linha da matriz representa? E cada coluna?
c) Qual é o elemento que representa a quantidade de insumos do tipo II que o laboratório LC possui?
d) Qual é o elemento que representa a quantidade que o laboratório LB possui do insumo III?

Considere que o fornecedor desta rede laboratorial fez uma entrega a essas filiais com as seguintes quantidades de cada insumo:

Filial \ Insumo	I	II	III
LA	120	10	65
LB	15	0	70
LC	90	50	10
LD	20	0	35

e) Represente essa entrega na forma matricial pela matriz E.
f) Com essa entrega, o que aconteceu com a quantidade de insumos? Construa uma matriz com as quantidades atualizadas e chame essa matriz de N.

Suponha que os valores unitários desses insumos sejam: R$10,00 para o insumo I, R$35,00 para o insumo II e R$20,00 para o insumo III.

g) Represente esses preços por uma matriz P.
h) Qual é o valor total em insumos nessas quatro filiais? Represente sua resposta na forma matricial e chame essa matriz de T.

Após um semestre, a quantidade de insumos dessas filiais pode ser representada pela matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 32 & 10 & 30 \\ 15 & 100 & 35 \\ 36 & 41 & 24 \\ 18 & 12 & 40 \end{pmatrix}$$

i) Calcule e represente pela matriz S a quantidade de insumos consumidos pelas filiais.
j) Se no próximo semestre o consumo de insumos triplicar, quais serão as quantidades de insumos que deverão ser encomendadas com o fornecedor para que não haja falta nas filiais?

APÊNDICE E – Tarefa 2

TAREFA 2 – MATRIZES

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO GEOGEBRA

1- REFLEXÃO: Utilizando a ferramenta polígono, construa um trapézio escaleno no primeiro quadrante.

- **a)** Construa a matriz R que representa os vértices da figura.
- **b)** Utilizando a ferramenta reflexão em relação a uma reta, faça a reflexão da figura em relação ao eixo x.
- **c)** Construa a matriz X que representa os vértices da figura refletida.
- **d)** Compare as matrizes R e X e comente sobre suas observações. Há algum padrão?
- **e)** Refaça os itens b, c e d agora considerando o eixo y para a reflexão. Chame a matriz obtida de Y.
- **f)** Agora faça a reflexão da figura em relação à origem.
- **g)** Analisando os três casos responda: é possível construir uma operação entre matrizes que faça a reflexão em relação ao eixo x? E em relação ao eixo y? E em relação à origem? Explique direitinho!
- **h)** Desafio: Faça a reflexão em relação às retas y=x e y=-x e comente os resultados.

2- TRANSLAÇÃO: Construa um novo polígono e utilizando a ferramenta vetor construa um vetor fora do polígono.

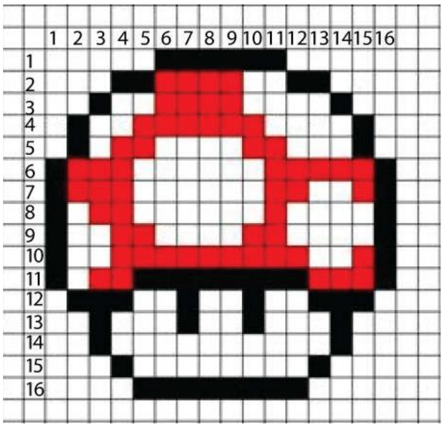
- **a)** Construa a matriz P que representa os vértices do polígono.
- **b)** Utilize a ferramenta translação por um vetor para transladar a figura e construa a matriz T, chamada matriz de translação, que representa os vértices da figura transladada.
- **c)** Compare as matrizes P e T, você encontrou algum padrão? Qual?
- **d)** Construa uma operação entre matrizes que represente a translação feita.
- **e)** Obtenha a matriz de translação obtida ao transladar a figura na direção do vetor com ponto inicial em (3,1) e final em (5,-3).

3- HOMOTETIA: Construa um triângulo com um dos vértices na origem do sistema cartesiano.

- **a)** Obtenha a matriz V com seus vértices.
- **b)** Crie um controle deslizante e utilize a ferramenta homotetia usando como centro a origem.
- **c)** Mova o controle deslizante e observe o que acontece. Pare o controle deslizante no número 3 e obtenha a matriz H com os vértices do novo triângulo.
- **d)** Qual a relação entre as matrizes V e H?
- **e)** Construa uma operação entre matrizes que represente a dilatação feita no triângulo.
- **f)** E se o controle deslizante fosse parado no número 1, o que aconteceria com a figura? E como ficaria a operação construída no item anterior?

4- COMPUTAÇÃO GRÁFICA:

a) Na imagem abaixo, trocando os elementos da posição a_{ij} com os da posição a_{ji} (onde i e j são números que variam de 1 a 16) qual a transformação ocorrida?



b) Se o desenho na imagem fosse de um quadrado ao invés de um cogumelo, qual seria a transformação ocorrida ao aplicarmos a mesma troca do item anterior? A imagem foi modificada?

APÊNDICE F – Tarefa 3

TAREFA 3 – SISTEMAS LINEARES

EXPLORANDO EQUAÇÕES E SISTEMAS LINEARES

1- Dada a equação linear $-2x + y = 3$:

a) Construa uma tabela com ao menos três valores de x e de y que satisfaçam a equação linear.

b) Represente graficamente, num plano cartesiano com eixos x e y os valores encontrados no item a.

c) O que, geometricamente, representa o gráfico desta equação linear?

d) Multiplique a equação dada por 3 e refaça os itens a, b e c. Compare os resultados obtidos.

e) Agora, levando em consideração a equação inicial, altere o número 3 por 5 e refaça os itens a, b e c. Compare os resultados obtidos.

2- Dadas as equações lineares I) $2x + 3y = 5$ e II) $-x + 4y = 14$ faça o que se pede:

a) Construa uma tabela para I e uma tabela para II com ao menos quatro possíveis valores de x e de y que satisfaçam as respectivas equações lineares.

b) Represente graficamente (num mesmo plano cartesiano com eixos x e y) os valores encontrados no item a para as equações I e II.

c) O que representa cada par (x,y) encontrado no item a)?

d) O que, geometricamente, representa o gráfico de cada uma dessas equações lineares?

e) Existe algum valor de x e de y, ou seja, um par (x,y) que satisfaça as duas equações? Caso exista, qual?

f) Represente o ponto (-2, 3) no gráfico construído no item b. O que este ponto significa?

3- Agora tente resolver os sistemas lineares abaixo, ou seja, tente encontrar qual(is) valor(es) de x e de y que satisfazem as equações do sistema linear. Explique cada etapa da sua resolução!

$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -x + 4y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -4x - 6y = -10 \end{cases}$

APÊNDICE G – Tarefa 4

TAREFA 4 – SISTEMAS LINEARES

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DA SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

1- Responda: O que significa resolver um sistema linear?

2- Construa duas retas no GeoGebra seguindo as instruções:

a) Crie seis controles deslizantes (por exemplo **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**), configure para que eles sejam números "inteiros" e variem de -30 a 30.

b) Digite no campo "entrada" a equação **a**x+**b**y=**c**. Note que **a**, **b** e **c** (chamados coeficientes da equação) são os controles deslizantes criados.

c) Digite no campo "entrada" a equação **e**x+**d**y=**f**. Note que **e**, **d** e **f** (chamados coeficientes da equação) são os controles deslizantes criados.

3- Utilizando as retas construídas acima, verifique e comente a solução e a classificação de cada um dos sistemas lineares trabalhados na aula passada:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -x + 4y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -4x - 6y = -10 \end{cases}$

4- Abra um novo documento no GeoGebra, vá em "exibir" e selecione "janela de visualização 3D". Construa três planos seguindo as instruções:

a) Crie doze controles deslizantes com as mesmas configurações usadas no exercício 2.

b) Digite no campo "entrada" a equação **a**x+**b**y+**c**z=**d**. Note que **a**, **b**, **c** e **d** (chamados coeficientes da equação) são os controles deslizantes criados.

c) Repita o procedimento anterior para criar os outros dois planos, lembre-se de mudar os nomes dos controles deslizantes para cada plano.

5- Mova os controles deslizantes de forma que os três planos fiquem paralelos distintos.

a) Anote as equações desses três planos e compare-as.

b) Que tipo de solução temos para este sistema de três equações lineares?

c) Como podemos classificar esse sistema?

6- Mova os controles deslizantes de forma que as três equações fiquem múltiplas.

a) O que aconteceu com os planos, qual a posição deles?

b) Que tipo de solução temos para este sistema de três equações?

c) Como podemos classificar esse sistema?

7- Mova os controles deslizantes de forma que obtenhamos as equações de um sistema linear com 3 equações e 3 incógnitas com uma única solução, ou seja, um Sistema Possível Determinado. Anote o sistema obtido.

8- Delete um dos planos construídos no GeoGebra. Se formássemos um sistema linear com as equações desses dois planos que restaram, quais tipos de solução poderíamos obter para esse sistema?

APÊNDICE H – Tarefa 5

TAREFA 5 – SISTEMAS LINEARES

APLICAÇÕES E PROBLEMAS DE FORMULAÇÃO

1. Um jogador de basquete fez o seguinte acordo com o seu clube: cada vez que ele convertesse um arremesso, receberia R$10,00 do clube e, caso errasse, pagaria R$5,00 ao clube. Ao final de uma partida em que arremessou 20 vezes, recebeu a quantia de R$50,00. Quantos arremessos ele acertou?

2. Sabe–se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades (u) de vitamina A, 180 u de vitamina B e 140 u de vitamina C. Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados 3 alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) de cada alimento, determinou-se que: (i) o alimento I tem 1 u de vitamina A, 10 u de vitamina B e 1 u de vitamina C. (ii) o alimento II tem 9 u de vitamina A, 1 u de B e 0 u de C. (iii) o alimento III tem 2 u de vitamina A, 2 u de B e 5 u de C. Quantos gramas de cada um dos alimentos I, II e III devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja equilibrada em vitaminas?

3. A reação $CO_2 + H_2O \to C_6H_{12}O_6 + O_2$ ocorre quando uma planta verde converte dióxido de carbono e água em glicose e oxigênio durante a fotossíntese. Balanceie esta equação.

4. Encontre uma reação balanceada para a reação química
Amônia (NH_3) + Óxido de Cobre (CuO) → Nitrogênio (N_2) + Cobre (Cu) + Água (H_2O)

5. A combustão de amônia (NH_3) em oxigênio produz nitrogênio (N_2) e água. Como encontrar uma equação química balanceada para esta reação?

$$\mathbf{w}NH_3 + \mathbf{x}O_2 \to \mathbf{y}N_2 + \mathbf{z}H_2O$$

APÊNDICE I – Instrumento da Reavaliação

Nome:

1. (POOLE, 2004, adaptado) Nos itens de *a* até *f*, considere as equações nas variáveis *x*, *y* e *z*. Assinale se a equação dada é ou não linear, e então justifique o motivo de sua escolha.

g) $5x - y^2 + 2z = 0$

h) $\sqrt{3}x + 7y + z = cos(1)$

i) $\frac{1}{5}x + 9y - 13z = -6$

j) $xy - y + 2z = 5$

k) $-8\sqrt{x} - y^{-1} = 10$

l) $-x + sen(y) + 3z = 0$

2. (FGVRJ-2003, adaptado) A organização econômica Merco é formada pelos países 1, 2 e 3. O volume anual de negócios realizados entre os três parceiros é representado em uma matriz A, com 3 linhas e 3 colunas, na qual o elemento da linha i e coluna j informa quanto o país i exportou para o país j, em bilhões de dólares.

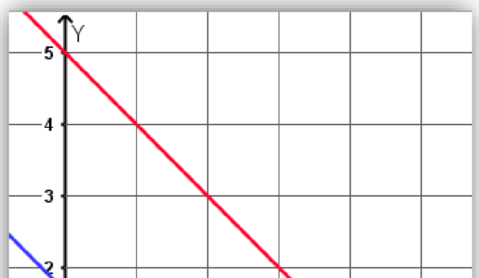
Se A=$\begin{bmatrix} 0 & 1,2 & 3,1 \\ 2,1 & 0 & 2,5 \\ 0,9 & 3,2 & 0 \end{bmatrix}$ então qual foi o país que mais exportou no Merco? E o que mais importou?

3. Qual o sistema de equações lineares expresso pela equação matricial $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$?

4. Resolva o seguinte sistema de equações lineares utilizando dois métodos distintos:

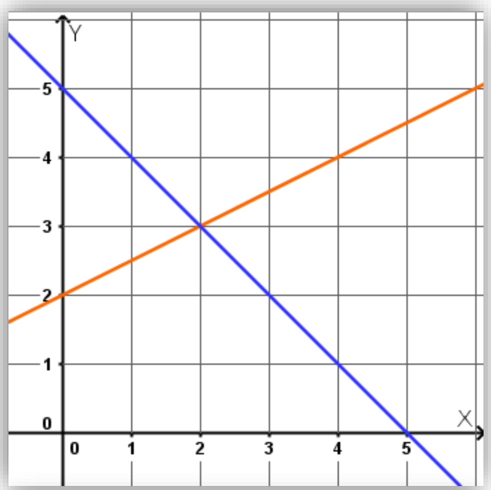
$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ -x + 7y = -9 \end{cases}$$

5. Quanto à resolução de Sistemas de Equações Lineares, estabeleça uma relação entre os sistemas de equações lineares e as soluções apresentadas abaixo. Justifique suas escolhas.

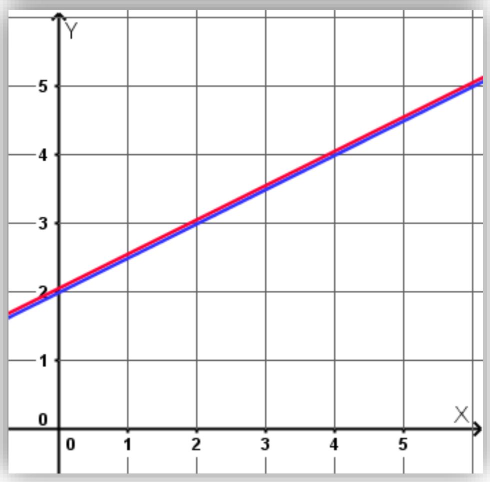


(d) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ x + y = \ \ 5 \end{cases}$ ( )

(e) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = -2 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$ ( )



(f) $\begin{cases} -2x - 2y = -10 \\ 3x + 3y = \ \ 5 \end{cases}$ ( )



6. Considere um produto químico produzido a partir de dois ingredientes diferentes A e B, que têm que ser dissolvidos em água separadamente antes que eles interajam para formar o referido produto.

Suponha que a solução contendo A a 2,8 g/cm³ combinada com a solução contendo B a 1,5 g/cm³ produza 23 g do produto químico. Se a proporção de A e B nestas soluções for alterada para 3,2 g/cm³ e 4,5 g/cm³, respectivamente, então são produzidas 43 g do produto químico. Quais serão os volumes (em centímetros cúbicos) das soluções contendo A e B?

7. Comente cada uma das resoluções, apresentadas por quatro alunos distintos, para a questão:

Sejam A, B e X matrizes tais que $A \cdot X = B$. Determine a matriz X.

Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4
$A \cdot X = B$ $X = \frac{B}{A}$	$A \cdot X = B$ $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$ $I \cdot X = A^{-1} \cdot B$ $X = A^{-1} \cdot B$	$A \cdot X = B$ $X = A^{-1} \cdot B$ $X = -A \cdot B$	$A \cdot X = B$ $A \cdot X \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$ $X \cdot I = B \cdot A^{-1}$ $X = B \cdot A^{-1}$

8. (PUC-RJ modificado) Segundo a Lei de Conservação de Massas de Lavoisier, "na natureza nada se cria e nada se perde, tudo se transforma". Essa lei nos mostra que quando ocorrem reações químicas o número de átomos permanece inalterado, estes átomos apenas se rearranjam originando novos produtos. Portanto, a quantidade de átomos de cada elemento em uma equação química que representa uma reação deve ser a mesma nos reagentes e nos produtos. Garantimos essa igualdade por meio do balanceamento dos coeficientes da equação, os chamados coeficientes estequiométricos.

Um antiácido comumente utilizado é o bicarbonato de cálcio ($NaHCO_3$) que reage no estômago segundo a equação $NaHCO_3 + HCl \rightarrow NaCl + H_2O + CO_2$ liberando cloreto de sódio, água e gás carbônico (por isso a sua efervescência). O óxido de alumínio (Al_2O_3) é também utilizado como antiácido. Ele reage com o ácido clorídrico (HCl) presente no estômago produzindo cloreto de alumínio e água. A equação desta reação é: $x\,Al_2O_3 + y\,HCl \rightarrow z\,AlCl_3 + w\,H_2O$, onde *x*, *y*, *z* e *w* são os coeficientes estequiométricos da reação.

c) Você conseguiria resolver este problema utilizando sistemas de equações lineares?

d) Calcule os valores de *x*, *y*, *z* e *w* para que a reação fique balanceada.

APÊNDICE J – Plano de ensino da disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear

Ministério da Educação

PLANO DE ENSINO

CURSO	Licenciatura Química	MATRIZ	009

FUNDAMENTAÇÃO LEGAL	

DISCIPLINA/UNIDADE CURRICULAR	CÓDIGO	PERÍODO	CARGA HORÁRIA						
			Aulas						Horas
			AT	AP	APS	AD	APCC	Total	Total
Geometria Analítica e Álgebra Linear	GL61A	1	90		06		12	108	90

AT: Atividades Teóricas, AP: Atividades Práticas, APS: Atividades Práticas Supervisionadas, AD: Atividades a Distância, APCC: Atividades Práticas como Componente Curricular.

PRÉ-REQUISITO	NÃO EXISTE
EQUIVALÊNCIA	NÃO EXISTE

OBJETIVOS

Utilizar o conhecimento matemático para realizar a leitura e a representação da realidade, procurando agir sobre ela;
Compreender os conceitos de álgebra e geometria analítica para solucionar problemas do cotidiano.

EMENTA

Reconhecer os vários sistemas de coordenadas. Realizar operações de mudanças de coordenadas. Resolver operações envolvendo vetores. Identificar as equações da reta e do plano no R^2 e no R^3. Utilizar o conceito de matrizes e determinantes para modelar e resolver problemas; Identificar características e técnicas de resolução de sistemas de lineares. Aplicar os conceitos da álgebra linear na resolução de problemas e no estudo das cônicas e quádricas.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

ITEM	EMENTA	CONTEÚDO
1	Sistemas de coordenadas	- Sistema de coordenadas retangulares no plano; - Sistema de coordenadas retangulares no espaço tridimensional; - Exemplos de sistemas de coordenadas não retangulares – coordenadas polares, cilíndricas e esféricas; - Orientação.
2	Vetores	- Definição geométrica; - Definição analítica; - Adição e subtração de vetores; - Produto de um vetor por escalar.
3	Produto de vetores	- Produto escalar; - Produto vetorial; - Produto misto.
4	Aplicação de vetores no estudo da reta e do plano	- Equações da reta; - Equações do plano; - Condições de ortogonalidade e paralelismo entre reta e reta, reta e plano e plano e plano. - Posição relativa entre reta e reta, reta e plano e plano e plano.
5	Matrizes	- Definição de matrizes; - Adição e subtração de matrizes; - Tipos especiais de matrizes; - Multiplicação de matrizes; - Inversão de matrizes; - Posto de uma matriz.
6	Sistemas de equações lineares	- Definição de sistemas de equações lineares; - Definição de solução de sistemas de equações lineares; - Tipos de soluções de sistemas de equações lineares; - O método de Gauss – Jordan para a resolução de um sistema de equações lineares.
7	Espaços Vetoriais	- Definição de um espaço vetorial;

		- Definição de um subespaço vetorial; - Combinação linear; - Conjuntos linearmente dependentes e linearmente independentes; - Base de um espaço vetorial; - Dimensão de um espaço vetorial; - Mudança de base.
8	Transformações lineares	- Definição de transformações lineares; - Tipos especiais de transformações lineares; - Conceitos e teoremas; - Transformações lineares e matrizes.
9	Autovalores e autovetores	- Definição de autovalores e autovetores; - Polinômio característico; - Propriedades dos autovalores e dos autovetores; - Diagonalização de operadores; - Diagonalização de matrizes simétricas.
10	Espaços com produto interno	- Produtos internos; - Espaços com produto interno; - Funcionais lineares e adjuntos; - Operadores unitários; - Operadores normais.
11	Cônicas e quádricas	- Retas no plano; - Planos no espaço; - Cônicas no plano; - Quádricas no espaço tridimensional.

PROFESSOR	TURMA
Michelle Andrade Klaiber	[redacted]

ANO/SEMESTRE	CARGA HORÁRIA (aulas)					
2017/01	AT	AP	APS	AD	APCC	Total
	90		06		12	108

AT: Atividades Teóricas, AP: Atividades Práticas, APS: Atividades Práticas Supervisionadas, AD: Atividades a Distância, APCC: Atividades Práticas como Componente Curricular.

DIAS DAS AULAS PRESENCIAIS						
Dia da semana	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
102		3			3	

PROCEDIMENTOS DE ENSINO

AULAS TEÓRICAS

1. Expositiva-dialogada / 2. Técnica de laboratório / 3. Técnica do estudo dirigido / 4. Técnica de trabalho em pequenos grupos / 5. Pesquisa / 6. Dramatização / 7. Projeto / 8. Debate / 9. Estudo de caso / 10. Seminário / 11. Painel integrado / 12. Visitas técnicas / 13. Brainstorming / 14. Outros: APS – Atividade Pratica Supervisionada.

Aulas expositivas-dialogadas. Trabalho individual. Trabalho em grupo. Pesquisa. No decorrer do processo ensino-aprendizagem da disciplina de álgebra linear e geometria analítica, serão aplicadas diversas técnicas de avaliação (provas dissertativas, trabalhos, listas de exercícios). Serão ministradas aulas expositivas orais, seguidas normalmente de discussões para retirar os conhecimentos prévios de cada aluno, fazendo com que as aulas sejam compartilhadas de forma organizada, clara e participativa.

AULAS PRÁTICAS

1. Expositiva-dialogada / 2. Técnica de laboratório / 3. Técnica do estudo dirigido / 4. Técnica de trabalho em pequenos grupos / 5. Pesquisa / 6. Dramatização / 7. Projeto / 8. Debate / 9. Estudo de caso / 10. Seminário / 11. Painel integrado / 12. Visitas técnicas / 13. Brainstorming / 14. Outros: APS – Atividade Pratica Supervisionada.

Não previstas para essa disciplina.

ATIVIDADES PRÁTICAS SUPERVISIONADAS

[redacted]

A unidade curricular de **Geometria Analítica e Álgebra Linear** estará realizando 6 horas aulas de atividades práticas supervisionadas – APS – distribuídas da seguinte forma:

Atividade 1 – (2 aulas) Aplicação de Matrizes e Vetores.
Data de Entrega da Atividade realizada pelo Aluno: 04/04/2017. **Valor da Atividade:** 1,0 ponto.
Descrição da Atividade 1 – Os alunos deverão resolver individualmente os exercícios propostos nessa atividade e entregar em data definida pelo professor da disciplina.
Forma de Avaliação da Atividade Proposta: O professor avaliará o aluno através da correção da atividade proposta, além disso, o professor verificará a aplicação desses conteúdos em outras atividades relacionadas à unidade curricular.
Atividade 2 – (2 aulas) Aplicação dos Conceitos de Retas e Planos.

Data de Entrega da Atividade realizada pelo Aluno: 16/05/2017. **Valor da Atividade:** 1,0 ponto.
Descrição da Atividade 2 – Os alunos deverão resolver individualmente os exercícios propostos nessa atividade e entregar em data definida pelo professor da disciplina.
Forma de Avaliação da Atividade Proposta: O professor avaliará o aluno através da correção da atividade proposta, além disso, o professor verificará a aplicação desses conteúdos em outras atividades relacionadas à unidade curricular.
Atividade 3 – (2 aulas) Aplicação dos Conceitos de Transformações Lineares.
Data de Entrega da Atividade realizada pelo Aluno: 23/06/2017. **Valor da Atividade:** 1,0 ponto.
Descrição da Atividade 2 – Os alunos deverão resolver individualmente os exercícios propostos nessa atividade e entregar em data definida pelo professor da disciplina.
Forma de Avaliação da Atividade Proposta: O professor avaliará o aluno através da correção da atividade proposta, além disso, o professor verificará a aplicação desses conteúdos em outras atividades relacionadas à unidade curricular.

ATIVIDADES A DISTÂNCIA

Não previstas para essa disciplina.

ATIVIDADES PRÁTICAS COMO COMPONENTE CURRICULAR

Os alunos discutirão com a professora, elaborarão e discutirão atividades de aplicação dos conceitos de matrizes, sistemas lineares e vetores. Estas atividades serão entregues individualmente no decorrer das aulas. A estas atividades será atribuído o valor total de 3,0 pontos.

PROCEDIMENTOS DE AVALIAÇÃO

1. Prova objetiva / 2. Prova discursiva / 3. Prova oral / 4. Prova prática / 5. Palestra / 6. Projeto / 7. Relatório / 8. Seminário / 9. Outros: APS

[redacted]

- Para possibilitar a recuperação do aproveitamento acadêmico, o professor deverá proporcionar reavaliação ao longo e/ou ao final do semestre letivo.
- Considerar-se-á aprovado na disciplina, o aluno que tiver frequência igual ou superior a 75% (setenta e cinco por cento) e Nota Final igual ou superior a 6,0 (seis), consideradas todas as avaliações previstas no Plano de Ensino.

Serão aplicadas três provas escritas individuais e sem consulta com valor igual a 8,0 pontos cada uma, três APS com valor total de 1,0 ponto por prova (totalizando 3,0 pontos no semestre) e a APCC valendo 3,0 pontos.
Segue o detalhamento do cálculo da Média Final (MF):

$$MF = (N1 + N2 + N3 + APCC)/3$$

Onde:
N1: Prova 1 (8,0 pontos) + APS 1 (1,0 ponto) – Data P1: 07/04/2017
N2: Prova 2 (8,0 pontos) + APS 2 (1,0 ponto) – Data P2: 19/05/2017
N3: Prova 3 (8,0 pontos) + APS 3 (1,0 ponto) – Data P3: 27/06/2017

Ao final do semestre, o aluno que tiver frequência igual ou superior a 75% e desejar, poderá realizar a avaliação substitutiva (SUB) contendo todo o conteúdo do semestre valendo 27,0 pontos – Data: 04/07/2017.
A Nota Final (NF) será calculada da seguinte forma:

$$NF = (SUB+APCC)/3 \text{ se } SUB > N1+N2+N3 \quad \text{ou} \quad NF = (N1+N2+N3+APCC)/3 \text{ se } SUB \leq N1+N2+N3$$

Observação: Não há segunda chamada para a avaliação substitutiva.

REFERÊNCIAS

Bibliografia Básica
BOULOS, P.; CAMARGO, I. Geometria analítica: um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.
KOLMAN, B.; HILL, D. R. Introdução à álgebra linear com aplicações. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, c2013.
STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Geometria analítica. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, Pearson Makron Books, 2006.
Bibliografia Complementar
BOLDRINI, J. L. Álgebra linear. 3. ed. ampl. e rev. São Paulo: Harper, c1984.
POOLE, D. Álgebra linear. São Paulo: Thomson Learning: Cengage Learning, 2009.
REIS, G. L.; SILVA, V. V. Geometria analítica. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC- Livros Técnicos e Científicos, 2008.
SANTOS, F. J.; FERREIRA, S. F. Geometria analítica. Porto Alegre: Bookman, 2010.
SANTOS, N. M. Vetores e matrizes: uma introdução à álgebra linear. 4. ed. rev. e ampl. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

ORIENTAÇÕES GERAIS

- A previsão da programação apresentada pode ser alterada devido a imprevistos e/ou ajuste nos conteúdos. Os casos não previstos neste plano de ensino serão analisados pelo professor, e se necessário, encaminhados para apreciação e tomada de decisão pela coordenação do curso.
- Além dos horários de aula e atendimento ao aluno, o estudante poderá entrar em contato com o professor via plataforma Moodle, o qual também será utilizado para disponibilização de notas de aula, listas de exercícios, atividades, dentre outros.
E-mail para contato com a professora: [redacted]

Assinatura do Professor

Assinatura do Coordenador do Curso

APÊNDICE K – Questões modificadas/adaptadas para a Prova Escrita

Questão 12	**Fonte: FGVRJ (2003)**
Enunciado original	A organização econômica Merco é formada pelos países 1, 2 e 3. O volume anual de negócios realizados entre os três parceiros é representado em uma matriz A, com 3 linhas e 3 colunas, na qual o elemento da linha i e coluna j informa quanto o país i exportou para o país j, em bilhões de dólares. Se A= $\begin{bmatrix} 0 & 1{,}2 & 3{,}1 \\ 2{,}1 & 0 & 2{,}5 \\ 0{,}9 & 3{,}2 & 0 \end{bmatrix}$ então o país que mais exportou e o que mais importou no Merco foram, respectivamente: a) 1 e 1 b) 2 e 2 c) 2 e 3 d) 3 e 1 e) 3 e 2
Enunciado adaptado	A organização econômica Merco é formada pelos países 1, 2 e 3. O volume anual de negócios realizados entre os três parceiros é representado em uma matriz A, com 3 linhas e 3 colunas, na qual o elemento da linha i e coluna j informa quanto o país i exportou para o país j, em bilhões de dólares. Se A= $\begin{bmatrix} 0 & 1{,}2 & 3{,}1 \\ 2{,}1 & 0 & 2{,}5 \\ 0{,}9 & 3{,}2 & 0 \end{bmatrix}$ então qual foi o país que mais exportou no Merco? E o que mais importou?
Identificação das alterações realizadas	Adaptamos a questão, originalmente de natureza objetiva, para quês essa se tornasse discursiva.

Questão 18	Fonte: PUCRJ (2013)
Enunciado original	O óxido de alumínio (Al_2O_3) é utilizado como antiácido. A reação que ocorre no estômago é: $x\ Al_2O_3 + y\ HCl \rightarrow z\ AlCl_3 + w\ H_2O$ Os coeficientes x, y, z e w são, respectivamente: a) 1, 2, 3, 6 b) 1, 6, 2, 3 c) 2, 3, 1, 6 d) 2, 4, 4, 3 e) 4, 2, 1, 6
Enunciado adaptado	Segundo a Lei de Conservação de Massas de Lavoisier, “na natureza nada se cria e nada se perde, tudo se transforma”. Essa lei nos mostra que quando ocorrem reações químicas o número de átomos permanece inalterado, estes átomos apenas se rearranjam originando novos produtos. Portanto, a quantidade de átomos de cada elemento em uma equação química que representa uma reação deve ser a mesma nos reagentes e nos produtos. Garantimos essa igualdade por meio do balanceamento dos coeficientes da equação, os chamados coeficientes estequiométricos. Um antiácido comumente utilizado é o bicarbonato de cálcio ($NaHCO_3$) que reage no estômago segundo a equação $NaHCO_3 + HCl \rightarrow NaCl + H_2O + CO_2$ liberando cloreto de sódio, água e gás carbônico (por isso a sua efervescência). O óxido de alumínio (Al_2O_3) é também utilizado como antiácido. Ele reage com o ácido clorídrico (HCl) presente no estômago produzindo cloreto de alumínio e água. A equação desta reação é: $x\ Al_2O_3 + y\ HCl \rightarrow z\ AlCl_3 + w\ H_2O$, onde *x*, *y, z* e *w* são os coeficientes estequiométricos da reação. a) Você conseguiria resolver este problema utilizando sistemas de equações lineares? b) Calcule os valores de *x*, *y, z* e *w* para que a reação fique balanceada.
Identificação das alterações realizadas	Modificamos a questão acrescentando informações a respeito do conceito de balanceamento de reações químicas, e acrescentando outro exemplo de antiácido comumente utilizado, enriquecendo o contexto da questão.

APÊNDICE L – Questão modificada para a Tarefa 5

Questão 2	**Fonte: Boldrini (1980, p. 50)**
Enunciado original	Foram estudados três tipos de alimentos. Fixada a mesma quantidade (1 g) determinou-se que: i) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e 4 unidades de vitamina C. ii) O alimento II tem 2, 3 e 5 unidades respectivamente, das vitaminas A, B e C. iii) O alimento III tem 3 unidades de vitamina A, 3 unidades de vitamina C e não contém vitamina B. Se são necessárias 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B e 20 de vitamina C, a) Encontre todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II e III, que fornecem a quantidade de vitaminas desejada. b) Se o alimento I custa 60 centavos por grama e os outros dois custam 10, existe uma solução custando exatamente Cr$ 1,00?
Enunciado adaptado	Sabe–se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades (u) de vitamina A, 180 u de vitamina B e 140 u de vitamina C. Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados 3 alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) de cada alimento, determinou-se que: (i) o alimento I tem 1 u de vitamina A, 10 u de vitamina B e 1 u de vitamina C. (ii) o alimento II tem 9 u de vitamina A, 1 u de B e 0 u de C. (iii) o alimento III tem 2 u de vitamina A, 2 u de B e 5 u de C. Quantos gramas de cada um dos alimentos I, II e III devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja equilibrada em vitaminas?
Identificação das alterações realizadas	Na questão original o Sistema Linear obtido é possível indeterminado. Modificamos a questão para que o Sistema Linear obtido seja possível determinado, e excluímos a questão referente ao custo, por julgarmos não ser relevante para os objetivos do episódio de ensino.