Universidade Estadual de Londrina

DEBORA CRISTIANE BARBOSA KIRNEV

DIFICULDADES EVIDENCIADAS EM REGISTROS ESCRITOS A RESPEITO DE DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Londrina
2012

DEBORA CRISTIANE BARBOSA KIRNEV

DIFICULDADES EVIDENCIADAS EM REGISTROS ESCRITOS A RESPEITO DE DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profª. Drª. Angela Marta Pereira das Dores Savioli.

Londrina
2012

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

K59d Kirnev, Debora Cristiane Barbosa.
Dificuldades evidenciadas em registros escritos a respeito de demonstrações matemáticas/ Debora Cristiane Kirnev. – Londrina, 2012.
113 f. : il.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2012.
Inclui bibliografia.

1. Linguagem e educação– Teses. 2. Educação matemática– Teses. 3. Demonstrações na educação matemática– Teses. 4. Lógica simbólica e matemática– Teses. I.Savioli, Angela Marta Pereira das. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

51:37.02

DEBORA CRISTIANE BARBOSA KIRNEV

DIFICULDADES EVIDENCIADAS EM REGISTROS ESCRITOS A RESPEITO DE DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

____

Orientadora. Profª. Drª. Angela Marta P. das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____

Profª. Drª. Simone Luccas
Universidade Estadual do Norte do Paraná - UNOPAR

____

Profª. Drª Regina Célia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 30 de agosto de2012.

Dedico este trabalho a minha família, que foi fonte de motivação para iniciar e prosseguir com esta pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a DEUS por ser a força que sustenta e direciona a minha vida.

A orientadora professora Angela, por sempre instigar e provocar reflexões, sobretudo por sua amizade e auxílio em momentos delicados, além de sua compreensão e dedicação.

Ao meu esposo Marcos, por ser essa pessoa companheira e dedicada.

Ao amigo Dr. Toshihiko Tan pelo incentivo nos estudos.

Aos colegas que contribuíram para melhoria dessa pesquisa, em especial aos amigos do grupo de estudo: Alessandra, Daniele, Edilaine, Henrique, Kátia e Taís.

Agradeço a algumas pessoas que ajudaram em diferentes tarefas para que eu pudesse dedicar-me a pesquisa, em especial: as madrinhas Andréia e

Edina, a irmã Priscila, o pai Daniel, a sogra Ivone, a cunhada Patrícia e as amigas Célia e Viviane.

Agradecemos à CAPES pelo apoio financeiro.

“O sucesso nasce no querer, da determinação e persistência em chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis.” (José de Alencar)

KIRNEV, Debora Cristiane Barbosa. **Dificuldades evidenciadas em registros escritos a respeito de demonstrações matemáticas**. 2012. 113f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

RESUMO

A presente pesquisa investiga dificuldades relacionadas as formas de demonstrações matemáticas sejam direta, contrapositivas, por redução ao absurdo, por contraexemplo, evidenciadas em registros de graduandos do curso de matemática de uma universidade norte paranaense. Entendemos que seja necessário um conteúdo para abordar o tema de pesquisa, deste modo selecionamos os conteúdos conjuntos e funções para elaborar uma proposta de atividades que foi aplicada aos sujeitos participantes dessa investigação. Para subsidiar a pesquisa nos apoiamos principalmente nos teóricos Balacheff (1987), em seus estudos sobre provas e demonstrações, e, Dreyfus (1991) acerca do pensamento matemático avançado. As análises consistiram em categorizar agrupamentos com resoluções similares e evidenciar as dificuldades explicitadas.

Palavras-chave: Educação matemática. Prova. Demonstrações. Raciocínio dedutivo. Argumentação.

KIRNEV, Debora Cristiane Barbosa. **Difficulties highlighted in written records about mathematical proof**. 2012. 113f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

ABSTRACT

This research investigates difficulties related forms of mathematical statements are direct, positive against, by reductio ad absurdum, by counterexample, highlighted course graduates records in mathematics from a University North of Paraná. We believe that content is required to address the research topic, so we select the content sets and functions to draw up a proposal for activities that was applied to the subjects of this research. To subsidise research in support mainly in the theoretical Balacheff (1987) in his studies about proof, and Dreyfus (1991) about the advanced mathematical thinking. The analyses consist of categorizing groups with similar resolutions and highlight the difficulties explained.

Key words: Mathematics education. Proof. Demonstrations. Deductive reasoning. Argumentation.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Durante o curso de Licenciatura em Matemática iniciado em 2006, na Universidade Estadual de Londrina, apresentei dificuldades de compreensão quanto à forma e estrutura de demonstrações[1], realizadas principalmente na disciplina de Elementos da Matemática. Conseguia demonstrar de forma algorítmica proposições previamente provadas nas atividades em sala de aula, ou encontradas em livros acerca deste assunto.

Nos dois anos seguintes (2007 e 2008), disciplinas como Álgebra A e Análise Real exigiram que relacionasse proposições matemáticas já demonstradas com sentenças a serem provadas, esse exercício mental promoveu a abstração das formas de demonstrações.

Ao superar as dificuldades do início da graduação, em 2009, inscrevi-me como monitora da disciplina de Elementos da Matemática, e esta experiência inspirou a presente pesquisa, pois percebi que os outros estudantes passavam por dificuldades semelhantes as que tive, como: escolher a forma de demonstração adequada, construir uma sequência lógica dedutiva, verificar a validade de uma sentença. Desde então, o interesse em investigar formas de demonstrações matemáticas foi construído.

Com o ingresso no Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, decidimos pesquisar sobre o assunto, uma vez que disciplinas como: Elementos da Matemática, Estruturas Algébricas, Análise Real, dentre outras do curso de Matemática, consistem em tarefas que envolvem demonstrações.

Para estudar Matemática exige-se a compreensão e o relacionamento de sentenças e conteúdos, as demonstrações corroboram para isso. Investigar a respeito do processo de prova matemática pode contribuir para o ensino acerca desse assunto. Acreditamos serem relevantes pesquisas que investigam aspectos envolvidos em torno de demonstrações.

---

[1] Definiremos posteriormente no capítulo dois o que entenderemos por demonstração.

Nesse sentido, realizamos um levantamento no banco de teses e dissertações da CAPES[2] no período de 2007 até início de 2011, com palavras chaves tais como: provas e demonstrações matemáticas, dentre outras que remetessem ao assunto. Ao analisar tais trabalhos, não detectei qualquer que abordasse especificamente dificuldades no processo de prova de proposições matemáticas. Dos arquivos encontrados, estudamos, a fim de conhecermos o que foi observado sobre o assunto, Pietropaolo (2005), Nagafuchi (2009), Silva (2010), Varella (2010) e Sousa (2010).

Buscamos em anais do SIPEM e EBRAPEM trabalhos relacionados com dificuldades em demonstrações matemáticas e não encontramos textos diretamente pautados ao assunto, apenas artigos que abordavam demonstrações: Oliveira e Lins (2009); Proença e Pirola (2009); Silva e Savioli (2008). Notamos nestas buscas que as pesquisas relacionadas ao Ensino Superior são recentes na área de Educação Matemática, e evidenciamos a falta de investigações acerca de temas da matemática acadêmica.

Em paralelo à buscas das pesquisas citadas iniciamos uma investigação referente a provas e demonstrações nos trabalhos de Balacheff (1982, 1987, 2004) e Hanna (2000), e sobre o pensamento matemático avançado nas pesquisas de trabalhos de teóricos como Tall (1995), Resnick (1987) e Dreyfus (1991).

Após tais estudos chegamos à seguinte questão de investigação: “Que dificuldades graduandos[3] de matemática explicitam no desenvolvimento de tarefas envolvendo demonstrações?”

O presente trabalho está organizado em seis capítulos, a saber: no capítulo um abordamos a importância das demonstrações na formação do estudante de matemática. O capítulo dois contemplará alguns aspectos históricos acerca de demonstrações matemáticas e no capítulo três abordamos a argumentação e as demonstrações no contexto da Matemática, uma vez que serão aplicadas tarefas[4] a respeito desse assunto. No capítulo quatro descrevemos o referencial teórico acerca das demonstrações matemáticas no contexto da Educação Matemática e do Pensamento Matemático Avançado. No capítulo cinco abordamos os procedimentos

[2] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.
[3] Definiremos os sujeitos da pesquisa no capítulo quatro.
[4] Segundo Ponte (1997) as tarefas são propostas pelo professor e as atividades, sejam elas físicas ou mentais, são realizadas pelos estudantes durante um processo de ensino-aprendizagem, nesse trabalho o objeto de estudo utilizado são questões ou proposições matemáticas.

metodológicos adotados nesta pesquisa. No capítulo seis apresentamos as análises dos protocolos obtidos na aplicação das propostas de tarefas[5]. Após as análises apresentaremos considerações da presente pesquisa.

[5] Serão definidas posteriormente.

1 OS PORQUÊS

A matemática foi desenvolvida assumindo axiomas e postulados[6], que são princípios primitivos aceitos sem demonstrações, como também, teoremas que são proposições provadas geralmente pelo método dedutivo. Moreira e David (2005, p. 22) afirmam que "[...] devido sua estruturação axiomática, todas as provas se desenvolvem apoiadas nas definições e nos teoremas anteriormente estabelecidos", ainda alegam que "definições formais e as demonstrações rigorosas são elementos importantes tanto durante o processo de conformação da teoria [...] quanto na apresentação sistematizada da teoria já elaborada".

Quando graduandos de matemática se deparam com essa sistematização pode ser um tanto obscuro uma vez que na matemática escolar[7] as definições e provas não são tratadas do mesmo modo que na matemática acadêmica[8]. Moreira e David (2005, p. 23) mencionam que "a 'validade' dos resultados matemáticos a serem discutidos no processo de escolarização básica não está posta em dúvida; ao contrário, já está garantida, *a priori*¸ pela própria Matemática Acadêmica". Tendo em vista que os tratamentos dados à matemática escolar e à matemática acadêmica assumem diferentes aspectos quanto às demonstrações de resultados, uma das funções de se aprender a demonstrar em matemática é provar resultados que antes eram assumidos como incontestáveis. Um exemplo é o de que a soma de dois números inteiros é comutativa: na matemática básica é um argumento válido, mas na matemática acadêmica requer uma demonstração para ser aceita.

A estruturação da Matemática toma como base o método dedutivo[9] e um aspecto relevante de demonstrar consiste em validar proposições, por meio da argumentação. Autores como Rav (1999), Hanna e Barbeau (2008) defendem que as demonstrações são o coração da matemática, sendo proeminentes pesquisas acerca desse assunto uma vez que existem dificuldades no desenvolvimento do raciocínio matemático de estudantes de graduação[10], ao considerar que as demonstrações são essenciais para o desenvolvimento da matemática.

[6] Entenderemos axiomas e postulados como sinônimos.
[7] Matemática da Educação Básica.
[8] Matemática da Educação Superior.
[9] No capítulo três definiremos dedução.
[10] Licenciandos e Bacharelandos em Matemática.

Para tanto é necessário que graduandos utilizem formas de demonstrações, pois essas são as ferramentas que validarão afirmações matemáticas. Associado a essas ferramentas há o raciocínio embutido no processo. Espera-se que o estudante ao se familiarizar com as relações matemáticas diante de um problema a resolver, realize as seguintes etapas: a primeira,

> [...] é uma fase de análise consciente e deliberada do problema. A segunda é uma fase de trabalho inconsciente. Parece um abandono provisório da tarefa. No entanto, o que se passa é que o eu inconsciente ou subliminar, explora, sistematicamente, todos os elementos que lhe foram fornecidos pela primeira etapa do trabalho. Após um certo tempo, num momento qualquer em que o espírito se afasta do problema a resolver, algumas combinações desses elementos, provenientes do trabalho do inconsciente, aparecem na mente na forma de uma inspiração súbita. Numa terceira etapa, há uma análise consciente e rigorosa dessas ideias que poderão ser aceites, modificadas ou rejeitadas. Neste último caso, o inconsciente recomeçará de novo o seu trabalho na procura de uma nova solução. (PONTE, *et al.*, 1997, p. 20) (SIC)

Estes autores explicitam como se desenvolve o raciocínio matemático diante de um problema a resolver. Esse tipo de raciocínio requer que o graduando confronte inúmeras situações de aprendizagem a fim de estabelecer relações entre as mesmas, ainda exige que este desenvolva competências e habilidades[11] acerca das demonstrações. Entendemos que um estudante é competente em demonstrar quando lida com situações que exigem provas matemáticas, mas pode apresentar dificuldades durante o processo, e, habilidoso se desenvolve demonstrações e prova sentenças sem dificuldades.

Abrantes (2001) esclarece que a validade de uma afirmação[12] depende da: consistência da argumentação; compreensão da noção de conjectura, teorema, demonstração; utilização de diferentes definições; exploração de situações-problema; procura de regularidades, conjecturas, generalizações. Ou seja, pensar de maneira lógica e apreciar a estrutura abstrata que está presente na Matemática.

---

[11] Entendemos competência como “ser capaz de realizar algo” e habilidade como ”agir de maneira apropriada aos fins a que visa”.

[12] Os termos citados a respeito da validade de uma afirmação serão definidos posteriormente.

Diante do exposto buscamos no Projeto Pedagógico do Curso de Matemática[13], o que se espera com a formação de licenciandos. Segundo o artigo cinco, parágrafo dois, espera-se que esse futuro profissional seja capaz de,

> [...] explorar situações-problemas, procurar regularidades, fazer conjecturas, fazer generalizações, pensar de maneira lógica, comunicar-se matematicamente por meio de diferentes linguagens, conceber que a validade de uma afirmação está relacionada à consistência da argumentação, compreender noções de conjectura, teorema, demonstração, examinar consequências do uso de diferentes definições, analisar erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas, ter confiança pessoal em desenvolver atividades matemáticas e apreciar a estrutura abstrata que está presente na Matemática e sua função social. (CEPE nº 0230/2009, p. 4)

No anexo IV dessa mesma resolução estudamos a ementa da disciplina de Elementos da Matemática, verificamos os conteúdos trabalhados e optamos em desenvolver uma pesquisa que abrangesse algumas demonstrações que contemplassem as formas: direta, direta condicional ou contrapositiva, por absurdo e por contra exemplo[14], um dos objetivos desta disciplina é que os graduandos se familiarizem com as formas de demonstrações e trabalhem com provas de teoremas e proposições de diversos conteúdos para validar os mesmos.

Entendemos que a aprendizagem das formas de demonstrações auxilia no desenvolvimento do pensamento matemático, desde que promova reflexões nesse processo. As competências e habilidades mencionadas decorreram da prática e aperfeiçoamento de atividades matemáticas que desenvolvam investigação, conjecturas, descobertas, pesquisa, dentre outras.

Após algumas reflexões acerca do investigado, nos questionamos “e se o estudante pesquisado tiver dificuldade no conteúdo trabalhado e não na forma de demonstração, como iremos lidar com isso?” Este questionamento fez com que restringíssemos o foco da pesquisa para demonstrações que abrangessem conjuntos e funções. Nesse trabalho, não há como analisar demonstrações sem conteúdo matemático, deste modo optamos em analisar as dificuldades referentes a estes conteúdos citados.

Ao desenvolver tarefas sobre demonstrações matemáticas com os conteúdos conjuntos e funções estamos oportunizando ao estudante realizar várias

---

[13]Segundo resolução CEPE nº 0230/2009 direcionada para a habilitação de Licenciatura, da universidade dos sujeitos de pesquisa.
[14] As formas de demonstrações são referenciadas segundo Gerônimo e Franco (2006).

demonstrações acerca desses conteúdos. Analisaremos se o mesmo possui dificuldades nas formas de demonstrações e nos conteúdos trabalhados, pois não há como desvincular as demonstrações dos conteúdos.

Assim, com base no exposto, estabelecemos como objetivo *investigar dificuldades encontradas por graduandos em tarefas envolvendo demonstrações matemáticas* a fim de responder a questão de investigação *“que dificuldades graduandos de matemática explicitam no desenvolvimento de tarefas envolvendo demonstrações?”*

2 FATOS HISTÓRICOS EM TORNO DE DEMONSTRAÇÕES

Neste capítulo abordaremos fatos históricos em torno do desenvolvimento das demonstrações. Segundo Ponte (1997) desde a antiguidade há registros de atividades matemáticas em civilizações do Egito e Mesopotâmia, porém essas atividades eram voltadas para resolverem problemas particulares relacionados com as suas necessidades. Além disso, nos registros encontrados não se utilizavam métodos dedutivos com regras ou procedimentos; resolviam seus problemas por meio da observação e experimentação e com o método de tentativa e erro.

Os primeiros registros de sistematização surgiram na Grécia. Um exemplo é que para os pitagóricos tudo era número, e dedicaram-se a investigar as suas propriedades e relações fundamentais aceitando somente a existência dos inteiros e fracionários positivos.

Posteriormente surge a Academia de Platão que contribuiu para o progresso no campo da geometria. Os pensadores gregos contribuíram para o avanço nas descobertas matemáticas e buscaram uma maneira para ter certeza da validade das leis elaboradas.

> Um dos passos dados pelos gregos, para poder raciocinar sobre conceitos matemáticos abstratos, foi estabelecer axiomas, verdades de uma tal auto-evidência que ninguém poderia negar. Esses axiomas diziam respeito ao espaço e aos números inteiros.
> O segundo passo foi garantir a correção das conclusões obtidas a partir dos axiomas. Para tal, usaram raciocínio dedutivo, que consideravam como o único que garantia a correlação das conclusões. Assim uma vez que se partia de axiomas, verdades sobre o espaço e os números inteiros consideradas auto-evidentes, este raciocínio poderia ser um veículo para encontrar as verdades eternas sobre a Natureza que eles ansiavam descobrir. (PONTE *et al*., 1997, p. 9)

Em torno da argumentação e dedução aplicada nas formas de demonstrações alguns matemáticos se destacam no decorrer da história por instigar o desbravamento de novas concepções. Abordaremos brevemente sobre fatos históricos relacionados ao assunto: primeiramente respeito de Aristóteles (384 - 322 a.C.) com o silogismo categórico, Euclides (330 - 260 a.C) com o desenvolvimento do método dedutivo, Boole(1815 – 1864) com as estruturas algébricas e operações lógicas e Frege (1848-1925) com aportes ao cálculo sentencial. Essas contribuições para a Matemática subsidiam o que conhecemos como formas de demonstrações.

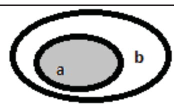
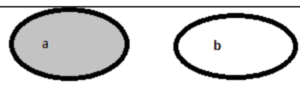
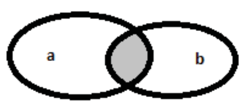
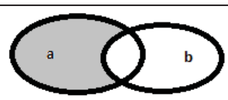
Segundo Machado e Cunha (2008) o primórdio da Lógica surgiu com Aristóteles (384 - 322 a.C) por volta do século IV a.C.. Seu trabalho consistiu em caracterizar as formas legítimas de argumentação para distingui-las das sentenças que pareciam corretas, mas que foram construídas de forma inadequada.

Ao argumentarmos utilizamos proposições a fim de justificar a verdade da conclusão, assumindo premissas verdadeiras para a argumentação. Para garantir a verdade da conclusão torna-se necessário: a verdade das premissas e uma argumentação coerente.

Aristóteles ainda classificou as proposições em categorias, sendo conhecidas como proposições categóricas que se constituem em quatro tipos básicos: na afirmação universal em que “todo *a* é *b*”, na negação universal em que “nenhum *a* é *b*”, na afirmação particular em que “algum *a* é *b*” e na negação particular em que “algum *a* não é *b*”.

A estrutura dos argumentos das proposições categóricas, desenvolvida por Aristóteles, foi representada por Leonhard Eüler (1707-1783), em torno de 1770, em forma de diagramas que contemplam as premissas e a conclusão. Temos os seguintes diagramas correspondendo às quatro proposições básicas:

Figura 1 – diagramas de Eüler

PROPOSIÇÃO	DIAGRAMA DE EÜLER
Todo *a* é *b*.	
Nenhum *a* é *b*.	
Algum *a* é *b*. (ou existe *a* que é *b*.)	
Algum *a* não é *b*. (ou existe *a* que não é *b*.)	

Fonte: Machado e Cunha (2008, p. 38)

Por volta de 1880, o matemático inglês John Venn (1834 -1923), aperfeiçoou os diagramas desenvolvidos por Eüler, mas o que ocorre é que usualmente utilizamos a representação de Eüler e atribuímos o nome de diagramas de Venn. Os diagramas possibilitam, por meio da inspeção direta, avaliarmos se uma argumentação é válida. O silogismo aristotélico perpetuou até o século XXI, pois ao utilizarmos quantificadores em uma argumentação recorremos às categorizações de Aristóteles.

Outro fato na história foi as contribuições de Euclides (323 - 285 a.C). Ponte *et al.* (1997) afirmam ser um notável discípulo da academia de Platão. Sua grande obra foi *Os Elementos,* um compêndio que representa a primeira axiomatização na História da Matemática, até então tínhamos a argumentação para justificar sentenças sem direcionamento para o desenvolvimento matemático. Esta obra organizou ampla e sistematicamente os conhecimentos desenvolvidos na época, de modo axiomático e dedutivo, considerados de grande importância por mais de dois milênios. Ponte *et al.* (1997, p.10), afirmam que até o século XIX, “foram considerados o modelo da verdade, rigor e certeza, tendo transformado, durante vários séculos, no próprio paradigma da ciência.”

Os Elementos consistem em treze livros que abordam principalmente a Geometria, mas há também estudos a respeito de Aritmética e Álgebra. Como afirma Ávila (2001, p. 2), um “equívoco que se comete com freqüência é pensar que *Os Elementos* são uma obra apenas sobre Geometria. Na verdade, há muito de aritmética e álgebra em vários livros dos *Elementos*. O que é verdade [...] é que a Matemática grega [...] era toda ela geometrizada”. Os argumentos utilizados para justificar as proposições matemáticas contidas nesta obra, caracterizam demonstrações.

Já os estudos de George Boole (1815-1864) deram origem às álgebras booleanas, sendo o primeiro a defini-las como parte de um sistema de lógica em meados do século XIX. A álgebra booleana caracteriza-se por utilizar técnicas algébricas para lidar com expressões no cálculo proposicional.

Segundo Daghlian (1995) tanto na matemática quanto em outras ciências, as álgebras booleanas, ou ainda, "Álgebra de Boole" são estruturas algébricas que trabalham com operações lógicas E, OU e NÃO, e com as operações da teoria de conjuntos: união, interseção e complementar. Essas estruturas algébricas são o fundamento da matemática computacional, baseada em números binários.

Diferentemente do silogismo aristotélico, que se preocupava com a utilização da línguagem retórica, isto é, o convencimento por meio da argumentação, a lógica empregada na álgebra booleana está restrita a forma e o emprego das estruturas lógicas, pois não há a preocupação com o contexto das sentenças, somente que o argumento seja válido. A partir dos trabalhos de Boole surgem sistematizações em torno das formas de demonstrações, inicia-se um processo de modificação, antes predominava a argumentação com a utilização da linguagem materna, após há a introdução da simbologia para a comunicação matemática.

Segundo Hegenberg (1977), uma concepção diferente das anteriores é a de Gottlob Frege (1848-1925). Sua obra mais conhecida é *Grundlagen der Arithmetik* [15] (1884), na qual a intenção era de investigar até que ponto a aritmética poderia ser construída à custa de princípios do pensamento, sem qualquer recurso aos enunciados empíricos, com o intuito de mostrar que a aritmética poderia ser construída exclusivamente a partir de leis da lógica.

São créditos de Frege o que alguns autores chamam hoje de cálculo sentencial, ou ainda, deduções condicionais por outros. Seus estudos apresentam a distinção clara do que são as premissas, em que se baseia um raciocínio e as regras de inferência, ou seja, quais regras e como proceder para comprovar uma dada tese a partir das premissas.

Este matemático contribuiu para a estruturação das formas de demonstração. Porém, Frege não comparou a Lógica e a Matemática e sua simbologia não era adequada para fins matemáticos, mas influenciou os estudos de B. Russell (1872-1970) e A. N. Whitehead (1861-1947), autores da importante obra *Principia Mathematica*[16], que favoreceu o avanço da lógica.

Wittgenstein (1889-1951), aluno de Frege, introduziu a noção de "verdade lógica" e escreveu importantes obras no campo da filosofia da linguagem.

Há inúmeros sistemas lógicos como afirma Machado e Cunha (2008, p.71-81) e quando falamos em Lógica num contexto de ciência estamos geralmente nos referindo à lógica formal ou lógica clássica. Porém, restrições impostas às sentenças sobre as quais se debruça a lógica clássica não dão conta das inúmeras

[15] Os fundamentos da aritmética
[16] Princípios Matemáticos

experiências humanas que não podem ser traduzidas em sentenças classificáveis, exclusivamente, em verdadeiras ou falsas, mostrando-se insuficiente na representação dos vários tipos de argumentos informais. Surge então a necessidade da lógica não-clássica caracterizada por: a) extensões da lógica clássica, por incorporarem mais recursos expressivos, entre elas as lógicas temporais, lógicas modais; b) alternativas à lógica clássica, por rejeitarem algum de seus princípios, entre elas as lógicas trivalentes, lógicas polivalentes, lógicas paraconsistentes.

3 ARGUMENTAÇÃO E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Ao raciocinarmos e fazermos inferências, podemos argumentarmos de maneira lógica, apenas seguindo os princípios da lógica formal. Como afirma Salmon (2010, p. 1), a “Lógica trata de argumentos e inferências. Um dos seus objetivos fundamentais consiste em proporcionar métodos que permitem distinguir entre argumentos e inferências logicamente certos e aqueles que não o são”.

No dicionário eletrônico Houaiss (2009) argumentar é “apresentar fatos, ideias, razões lógicas, provas etc. que comprovem uma afirmação, uma tese” (SIC). Notamos que os argumentos têm o propósito de convencer, porém o que percebemos na linguagem cotidiana é que há argumentos logicamente incorretos capazes de convencer, e outros logicamente corretos que não convencem.

Neste trabalho entenderemos que argumentos são compostos de uma sequência finita de enunciados, em que o último enunciado é a conclusão do argumento, os anteriores à conclusão são considerados como premissas. Quanto à consistência do argumento não afirmamos que ele é verdadeiro ou falso, apenas se é válido ou não válido em termos da lógica formal. Se as premissas forem verdadeiras e possuírem um termo médio conectivo em meio a elas que garanta a transitividade da argumentação entre as premissas a conclusão será inevitavelmente verdadeira, caso contrário será falso.

Observamos que, quando os argumentos estão logicamente incorretos os chamamos de falácia e se este tiver o intuito de enganar é chamado de sofisma.

Existem dois tipos principais de argumentos: os dedutivos e indutivos. Há duas características primordiais nesses, conforme afirma Salmon;

> Dedutivos
> I. Se todas as premissas são verdadeiras, a conclusão deve ser verdadeira.
> II. Toda a informação ou conteúdo fatual na conclusão já estava contida nas premissas, pelo menos implicitamente.
>
> Indutivos
> I. Se todas as premissas são verdadeiras, a conclusão é provavelmente verdadeira mas não necessariamente.
> II. A conclusão contém informação não presente, mesmo implicitamente, nas premissas. (SALMON, 2010, p.8)

Essas características distinguem os argumentos dedutivos dos indutivos.

Como já foi exposta, a lógica formal propicia a validade ou não de um argumento dedutivo, esta validade é dada como uma propriedade do argumento, caso a estrutura do argumento não seja logicamente correta, então, este será não válido. Salmon aponta combinações possíveis em argumentos válidos;

> 1. Premissas verdadeiras e uma conclusão verdadeira.
> 2. Alguma ou todas as premissas falsas e uma conclusão verdadeira.
> 3. Algumas ou todas as premissas falsas e uma conclusão falsa. (SALMON, 2010, p.14)

Os argumentos não válidos podem também apresentar tais combinações, porém nesses tipos de argumentação há ao menos uma contradição.

Em demonstrações matemáticas utilizamos da argumentação para provar que uma proposição[17] é verdadeira ou falsa e os processos mentais empregados nessa atividade denomina-se raciocínio lógico dedutivo. Nesse procedimento de prova consideramos os princípios axiomáticos da lógica formal da identidade, da não-contradição e do terceiro excluído conforme afirmam Gerônimo e Franco:

> 1. O princípio da identidade: garante que uma proposição é igual a si mesma. Isso parece estranho em um primeiro momento, mas do ponto de vista formal é necessário garantir isto;
> 2. Princípio da não-contradição: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa;
> 3. Princípio do terceiro excluído: Uma proposição ou é verdadeira ou é falsa; não existe uma terceira alternativa. (GERÔNIMO; FRANCO, 2006, p. 16)

Entendemos demonstrações como um método dedutivo ou raciocínio dedutivo que valida às afirmações matemáticas. Há quem afirme que essas são provas matemáticas, mas que diferenciações há entre os termos provas e demonstrações?

No dicionário eletrônico Houaiss prova significa:

> 1 aquilo que demonstra que uma afirmação ou um fato são verdadeiros; evidência, comprovação; 2 experiência científica;

[17] Definiremos proposição como uma sentença declarativa.

> demonstração, experimento; 3 qualquer experimento para verificar ou testar a qualidade de uma coisa. (HOUAISS 3, 2009).

Já, no dicionário filosófico Abbagnano prova está definida como:

> Procedimento apto a estabelecer um saber, isto é, um conhecimento válido. Constitui P. todo procedimento desse gênero, qualquer que seja sua natureza: mostrar uma coisa ou um fato, exibir um documento, dar testemunho, efetuar uma indução são P. tanto quanto as demonstrações da matemática e da lógica. Portanto esse termo é mais extenso que demonstração (v): as demonstrações são P., mas nem todas as P. são demonstrações. (ABBAGNANO, 2000, p. 239-240)

O termo demonstrações no dicionário eletrônico Houaiss significa:

> 1 ato ou efeito de demonstrar; 2 qualquer recurso capaz de atestar a veracidade ou a autenticidade de alguma coisa; prova; 3 raciocínio que torna evidente o caráter verídico de uma proposição, ideia ou teoria. (HOUAISS 3, 2009).

No dicionário filosófico Abbagnano demonstração está definida como:

> O termo D. e seu conceito foram introduzidos na Lógica por Aristóteles (Top., I 100a 27; An.post., I, 2 e passim) como silogismo que deduz uma conclusão de princípios primeiros e verdadeiros de outras proposições deduzidas silogisticamente de princípios primeiros e evidentes. [...] Mas, enquanto do ponto de vista gnosiológicose acentuaram os caracteres de necessidade e evidência intuitiva da D. (Descartes,Kant), do ponto de vista lógico evidenciou-se o caráter de dedução formal a partir de premissas (Descartes, Leibniz), o que distingue a D. (cujo tipo ou ideal continua sendo a D. matemática) de outros gêneros de prova. (ABBAGNANO, 2000, p. 805)

Segundo Garnica (1996, p. 17) “provas e demonstrações são tidas com sinônimos: é o que atesta a veracidade ou autenticidade [...] a dedução que mantém a verdade de sua conclusão apoiando-se em premissas admitidas como verdadeiras.”

Almouloud (2009) afirma que os termos são utilizados como sinônimos e muitos autores fazem uso dos termos provas e demonstrações como tal. Contudo, recorremos à distinção realizada por Balacheff (1982), o qual afirma que provas são explicações realizadas em um determinado momento para certo grupo social. Balacheff (1982) denomina que as demonstrações são provas particulares.

Baseados em Balacheff (1982), neste trabalho faremos a distinção de que as provas são explicações mais gerais e que dependendo do contexto podem não caracterizar uma prova pelo método dedutivo, porém entendemos que o termo demonstração pode ser considerado como uma prova matemática.

Observamos que em Matemática é necessário definir os conceitos de modo que esta significação satisfaça as características de tal conceito e somente deste conceito, e posteriormente demonstrar as propriedades deste conceito, o que difere esta ciência das demais que aceitam provas empíricas. Deste modo, apesar de prova ser uma palavra abrangente a outras ciências, quando nos referimos às provas em matemática entenderemos como uma demonstração.

Segundo Bicudo (2002), em termos da lógica uma demonstração trata-se de um sistema formal que é a parte sintática de um sistema axiomático, composto pela linguagem e seus símbolos, expressões e fórmulas, pelos axiomas e pelas regras de inferência. Estes componentes afirmam sob certas condições a conclusão da regra que pode ser inferida de outras regras chamadas de hipótese. E ainda caracteriza demonstração do seguinte modo:

> Seja, agora, F um sistema formal em que todas as regras sejam finitas. Então, uma DEMONSTRAÇÃO em F é uma sequência finita de fórmulas, em que cada uma seja ou um axioma ou seja conclusão de uma regra cujas hipóteses precedem essa fórmula na sequência dada. Se $\underline{A}$ for a última fórmula em uma demonstração P, diremos que P é uma DEMONSTRAÇÃO de $\underline{A}$. Uma fórmula de $\underline{A}$ de F será um teorema de F se existir uma demonstração de $\underline{A}$. (BICUDO, 2002, p. 83) [grifos do autor]

Gerônimo e Franco (2006, p. 54) definem demonstração como: seja “H_1, H_2, ..., $H_n \vdash T$ um argumento válido e H_1, H_2, ... , H_n, T_1, T_2, ... , T_p, T, proposições que fornecem a validade do argumento. Essa sequência é denominada demonstração e a conclusão T é denominada teorema”.

Já Domingues e Iezzi (2003, p.17) definem demonstração como “uma sucessão articulada de raciocínios lógicos que permite mostrar que um resultado proposto é consequência de princípios previamente fixados e de proposições já estabelecidas”.

Ainda há os tipos de demonstrações, caracterizados por Gerônimo e Franco (2006) como demonstrações direta, direta condicional e indireta. As demonstrações diretas são aquelas que argumentamos seguindo os princípios da lógica para justificar uma afirmação matemática. As demonstrações do tipo condicional são as implicações se P então Q ou de modo equivalente pela contrapositiva se não Q então não P, em que P e Q são proposições. Já a demonstração indireta consiste em redução ao absurdo, ou seja, considera a hipótese e nega-se a tese na qual chegaremos a uma contradição.

Referente ao melhor método para se demonstrar ressalta-se que para "um argumento qualquer, não existe regra para determinar qual o melhor método a ser utilizado, mas, com certeza, resolver vários exercícios nos fornece a intuição necessária para decidirmos o melhor caminho." (GERÔNIMO; FRANCO, 2006, p. 61).

Ao provar que uma afirmação matemática é verdadeira por meio de uma sequência de proposições deduzidas logicamente, premissas são consideradas como hipótese, a fim de justificar uma conclusão ou tese. Durante esse processo algumas proposições são aceitas sem demonstração, chamadas de axiomas ou postulados, e outras que já foram provadas são utilizadas para que a partir de uma hipótese aceita como verdade, possamos provar que uma tese é verdadeira.

Neste trabalho entendemos que há dificuldade em demonstrar uma proposição matemática quando o estudante não utilizar uma sequência de argumentos válidos cujo último argumento seja a conclusão da tese a ser provada. Esta sequência de argumentos deve atender alguma forma de demonstração seja ela, uma demonstração direta, indireta, redução ao absurdo, ou ainda por contraexemplo.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

4.1 Demonstrações em Educação Matemática

No decorrer de uma demonstração matemática um indivíduo utiliza a razão ou racionalidade, como afirma Balacheff (2004), e por meio disso se desenvolve o raciocínio lógico necessário para se demonstrar. Ao afirmar sobre a racionalidade, Balacheff esclarece que esta é,

> [...] densa em toda a vida do ser humano, seja em um indivíduo ou em um nível coletivo. Por ‘racionalidade’ entendemos o sistema dos critérios ou regras mobilizados quando se tem que fazer escolhas, tomar decisões, ou para realizar julgamentos. [...] Essas regras e critérios poderiam originar-se de opinião, crença ou saber, mas em todos os casos, eles são organizados em uma estrutura, que permite a tomada de decisão[18]. (BALACHEFF, 2004, p. 1)

Podemos afirmar que durante o processo de demonstração está envolvida a racionalidade do indivíduo que muitas vezes é denominado por raciocínio lógico dedutivo. A respeito disso Balacheff afirma que,

> [...] a racionalidade nos permite raciocinar e decidir, é então a base de qualquer processo de prova. Como vemos a racionalidade em geral, e sua relação com a matemática, em particular, é um ponto chave para nossa compreensão de qualquer obra de arte em nosso campo de pesquisa[19]. (BALACHEFF, 2004, p. 2)

Demonstrações matemáticas exigem dos graduandos processos mentais que caracterizam o pensamento matemático avançado[20]. Para a realização desses processos se faz necessário que estes abstraiam e representem objetos matemáticos, a argumentação explícita, a forma de raciocínio lógico dedutivo envolvido.

---

[18] Tradução nossa: “[...] rationality is dense everywhere in human being life, either at an individual or a collective level. By “rationality” is meant here the system of the criteria or rules mobilized when one have to make choices, to take decisions, or to perform judgements. [...] These rules and criteria could originate in opinion, belief or knowing but in all case they are organised in a structure, which allows decision-making”.

[19] Tradução nossa: “Rationality allows us to reason and to decide, it is then the foundation of any proving process. How we see rationality in general, and its relation to mathematics in particular, is a key point for our understanding of any piece of work in our field of research”.

[20] Definiremos o que entendemos por pensamento matemático avançado posteriormente.

Além do raciocínio envolvido na prova de uma proposição, temos o registro escrito que Balacheff (1987) categoriza em dois tipos de demonstrações denominadas de prova pragmática e prova conceitual. As provas pragmáticas são produzidas por pessoas que tomam como base fatos e ações, sem um formalismo lógico, também denominado como “mostrações”, pois os resultados apresentados são por meio de exemplos. As provas conceituais se caracterizam por formulações de propriedades e as possíveis relações entre elas. Deste modo, as demonstrações matemáticas seriam um tipo de prova conceitual. O mesmo autor admite existir vários níveis de provas pragmáticas e provas conceituais que podem ser caracterizadas conforme o quadro a seguir.

Quadro 1- caracterização dos tipos de demonstrações

Tipos	Níveis	Caracterização
Provas pragmáticas	*Empirismo ingênuo:*	consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação de alguns casos. É considerado o primeiro passo no processo de generalização.
	Experimento crucial:	consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação para um caso especial, geralmente não familiar.
Transição entre provas pragmáticas e provas conceituais	*Exemplo genérico:*	consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a manipulação de alguns exemplos de modo a deixá-los com uma característica que representa uma classe de objetos.
Provas conceituais	*Experimento de pensamento:*	consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica, porém baseada no estudo de alguns casos específicos.

Fonte: Adaptação de Balacheff (1987) [21]

[21] Nas análises recorreremos ao quadro um, destacaremos a recorrência utilizando itálico no texto.

Além do exposto, ressaltamos que o processo em que uma demonstração está envolvida, segundo Mariotti e Balacheff (2008), proporcionam ao estudante importantes elementos matemáticos, como estratégias e métodos para resolver problemas. Para demonstrar uma proposição é preciso ter uma noção sobre o objeto matemático, estabelecer relações com axiomas ou proposições anteriormente provadas e, caso seja um objeto desconhecido, promover a investigação sobre o mesmo. Quando finalmente demonstrar uma afirmação matemática, o autor precisa estar convencido de que o resultado é válido.

Nesse mesmo aspecto Fawcet afirma que a respeito

> [...] do conceito de prova o aluno deve ter uma compreensão cada vez maior e crescente. É um conceito que não só permeia seu trabalho em matemática, mas também está envolvido em todas as situações onde as conclusões estão a ser atingidas e decisões a serem tomadas. A Matemática tem a contribuição única a fazer no desenvolvimento deste conceito[22]. (Fawcet, 1938, apud Balacheff, 2004, p. 2).

Garnica (2002) assegura que a prova rigorosa[23], realizada nos termos da lógica, é considerada como elemento de prática científica da Matemática e fundamental na formação do professor em uma abordagem crítica dos objetos matemáticos. Em suas referências vale ressaltar que: “a prova rigorosa é elemento essencial para compreendermos o funcionamento do discurso matemático e o modo como são formadas as concepções em um ambiente de sala de aula”. (GARNICA, 2002, p.78)

Diante do exposto, investigamos que funções atribuiríamos a uma demonstração matemática. Segundo Hanna (2000), os teóricos Bell (1976), De Villiers (1990, 1999) e Hanna e Jahnke (1996) concordam que são funções das provas e demonstrações: verificação; explanação; sistematização; descoberta; comunicação; construção de uma teoria empírica; exploração do significado de uma definição ou a consequência de um pressuposto; incorporação de um fato bem conhecido em um novo quadro e, assim, visualizá-lo em uma nova abordagem.

---

[22] Tradução nossa: “The concept of proof is one concerning which the pupil should have a growing and increasing understanding. It is a concept which not only pervades his work in mathematics but is also involved in all situations where conclusions are to be reached and decision to be made. Mathematics has the unique contribution to make in the development of this concept.” (Fawcet, 1938)

[23] Termo utilizado para se referir a demonstrações matemáticas.

Neste trabalho concordamos com as funções expostas anteriormente a respeito de provas e demonstrações. Enfim, o desenvolvimento de demonstrações matemáticas deve propiciar o desenvolvimento intelectual do estudante e a familiaridade com as sentenças matemáticas, a fim de que este possa desenvolver autonomia ao lidar com tais sentenças.

4.2 Pensamento Matemático Avançado

Ao se desenvolver uma prova de uma proposição matemática, o resultado apresentado é uma representação simbólica de um processo mental. Graduandos em matemática se deparam com estes resultados, e precisam reconstruir a trajetória do processo da prova, uma vez que demonstrações, em muitos casos, se apresentam prontas.

Tall (1999, p.15) afirma que “alunos iniciantes têm dificuldade ainda maior com a prova antes de atingir familiaridade com o funcionamento da cultura matemática”. Familiaridade construída a partir de relações internas do indivíduo, isto é, por meio do pensamento.

Para abordarmos sobre processos mentais decorrentes da prova matemática recorremos a teóricos como Tall (1991, 1995), Resnick (1987) e Dreyfus (1991), a fim de esclarecermos o termo “pensamento matemático avançado[24]”. Sobre as diferentes teorias existentes sobre o assunto, Tall (1991, p. 15-16) afirma que “é importante ter uma visão ampla e tentar ver a iluminação que pode trazer várias teorias, é útil diferenças que surgem e as ligações comuns que as mantém juntas”.

A seguir apresentaremos algumas caracterizações sobre o pensamento matemático avançado. Para Tall (1995, p.3), “o pensamento matemático avançado envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas por uma ampla gama de atividades matemáticas para a construção de novas ideias que desenvolvam e ampliem um sistema cada vez maior de teoremas estabelecidos”.

> O crescimento cognitivo do pensamento básico ao pensamento matemático avançado no indivíduo pode, em hipótese, começar a partir da ‘percepção’ e ‘ação’ sobre objetos no mundo externo, [...]

[24] Utilizaremos a sigla P. M. A. para pensamento matemático avançado.

> usando a manipulação de símbolos para inspirar o pensamento criativo com base em objetos formalmente definidos e provas sistemáticas[25]. (TALL, 1995, p.3)

Para Resnick (1987) não há uma definição sobre o pensamento matemático avançado, porém este assume algumas características, a saber: não algoritmo, ou seja, não há um modelo pronto a ser seguido; tende a ser complexo[26], na medida em que o processo mental não se estabelece de imediato; apresenta soluções múltiplas na qual exige o julgamento e a interpretação do sujeito diante das incertezas; envolve a auto-regulação, ou seja, o sujeito apresenta autonomia durante o processo cognitivo; envolve a atribuição de significado e um esforço mental no desenvolvimento desta forma de pensamento.

Dreyfus (1991) ao abordar sobre o pensamento matemático avançado o caracteriza por meio de processos nos quais os estudantes realizam representações mentais de objetos matemáticos, e ainda difere esta forma de pensamento do pensamento elementar por apresentar: reflexões sobre a própria experiência matemática ao lidar com problemas não triviais; complexidade durante os processos mentais; e variedade de processos mentais que se interagem.

Neste trabalho adotaremos a caracterização de Dreyfus (1991) sobre o pensamento matemático avançado. A seguir explanaremos alguns aspectos do trabalho deste teórico.

Este autor justifica que estudar o pensamento matemático avançado é um modo de se obter conhecimentos teóricos sobre o que ocorre na mente do aluno durante o processo de aprendizagem devido às representações mentais que são desenvolvidas ao racionalizar. Em busca de compreender, por meio de uma análise crítica de registros escritos, que processos mentais estão envolvidos nas demonstrações dos estudantes participantes desta pesquisa, e, averiguar que dificuldades sofreram durante o desenvolvimento da prova é que recorremos à teoria deste autor.

Que distinções há entre o pensamento matemático elementar [27]e avançado? Segundo Dreyfus (1991, p. 26) "não há distinção nítida entre muitos dos processos

---

[25] Tradução nossa: "The cognitive growth from elementary to advanced mathematical thinking in the individual may therefore be hypothesised to start from "perception of" and "action on" objects in the external world, [...] using manipulable symbols—leading to a use of all of this to inspire creative thinking based on formally defined objects and systematic proof".

[26] Entenderemos esse termo como sinônimo de refinado, elaborado.

[27] Entendemos esse termo como os processos básicos do pensamento matemático.

básico e avançado do pensamento matemático, mas a matemática avançada é mais centrada nas abstrações de definição e dedução" [28].

Uma característica distintiva entre essas formas de pensamento é a complexidade e como são tratados. Os processos de abstração e representação permitem passar de um tipo de detalhe para um outro, e, deste modo, gerenciar a complexidade.

Há casos em que as demonstrações matemáticas são apenas apresentadas para os estudantes, tornando oculto o processo de seu desenvolvimento, estes por sua vez aprendem a demonstrar de forma algorítma, sem refletir sobre a argumentação utilizada. Neste aspecto Dreyfus afirma que,

> [...] o que mais os estudantes aprendem em seus cursos de matemática é realizar um grande número de procedimentos padronizados, expressos em formalismos definidos com precisão para a obtenção de respostas às classes claramente delimitadas de questões de exercício [...] a eles foram ensinados os produtos da atividade de dezenas de matemáticos em sua forma final, mas esses estudantes não ganharam a introspecção nos processos que levaram matemáticos a construir estes produtos[29]. (DREYFUS, 1991, p. 28)

Nessa forma de ensino padronizado é negada aos estudantes a possibilidade de promover um raciocínio informal, de conjecturar ideias, de investigar propriedades a fim de construir a prova de uma proposição matemática.

O pensamento matemático avançado consiste em uma grande variedade de processos mentais componentes interagindo. Quando falamos ou pensamos sobre um objeto matemático temos uma representação mental deste, que segundo Dreyfus (1991), refere-se a esquemas internos ou de quadros de referência que a pessoa utiliza para interagir com o mundo externo.

Para exprimir o que é uma representação mental recorremos a uma representação simbólica, de modo a estabelecer a comunicação entre sujeitos. Segundo Dreyfus (1991) a representação simbólica é externamente escrita ou

---

[28] Tradução nossa: "There is no sharp distinction between many of the processes of elementary and advanced mathematical thinking, even though advanced mathematics is more focussed on the abstractions of definition and deduction".

[29] Tradução nossa: "[...] what most students learn in their mathematics courses is, to carry out a large number of standardized procedures, cast in precisely defied formalisms, for obtaining answers to clearly delimited classes of exercise questions [...] they have been taught the products of the activity of scores of mathematicians in their final form, but they have not gained insight into the processes that have led mathematicians to create these products".

falada, geralmente com o objetivo de tornar a comunicação sobre o conceito mais simples.

Diferentes processos mentais podem ser elaborados pelos estudantes, por exemplo, representação, visualização, generalização, assim como outros, como classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair ou formalizar.

Espera-se que ao interpretar uma representação simbólica, diferentes sujeitos cheguem a representações mentais muitos próximas, uma vez que as representações mentais de um objeto matemático podem variar de pessoa para pessoa.

Por meio das representações mentais é que os sujeitos constroem os conceitos sobre objetos matemáticos. A respeito disso Dreyfus afirma que,

> [..] para ser bem sucedido em matemática, é desejável ter representações mentais ricas de conceitos. A representação é rica, se contém muitos aspectos ligados a esse conceito. A representação é pobre, se tiver elementos insuficientes para permitir a flexibilidade na resolução de problemas. Essa inflexibilidade observamos frequentemente em nossos alunos: a menor mudança na estrutura de um problema, ou até mesmo em sua formulação, pode bloqueá-los completamente[30]. (DREYFUS, 1991, p. 32)

O autor ainda afirma que várias representações mentais de um conceito pode complementar um outro e integrar-se numa única representação desse conceito, caracterizando um processo de abstração, e ainda, possuir várias representações de um conceito viabiliza a flexibilidade na resolução de problemas.

O processo de abstração é essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado, pois ele promove uma reflexão consciente sobre conceitos a partir de situações matemáticas.

Para se abstrair, dois processos se desenvolvem concomitantemente, os de generalizar e sintetizar. Segundo o autor, generalizar é derivar ou induzir a partir de indicações, a fim de identificar pontos em comum, e deste modo expandir domínios de validade, e ainda, sintetizar implica em combinar ou compor partes de tal forma que constituem um todo.

---

[30] Tradução nossa: “To be successful in mathematics, it is desirable to have rich mental representations of concepts. A representation is rich if it contains many linked aspects of that concept. A representation is poor if it has too few elements to allow for flexibility in problem solving. Such inflexibility we often observe in our students: The slightest change in the structure of a problem, or even in its formulation, may completely block them”.

A flexibilidade entre processos mentais que a abstração possibilita, contém

> [...] o potencial para generalização e sintetização; e vice-versa, torna-se sua finalidade, principalmente a partir desse potencial de generalização e de síntese. A natureza do processo mental de abstração é, contudo, muito diferente da generalização e do de síntese. Abstrair é antes de tudo um processo de construção - a construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, de propriedades e relações entre objetos matemáticos. Este processo é dependente do isolamento de propriedades adequadas e estabelecimento de relações. Requer a capacidade de deslocar a atenção dos objetos em si a estrutura das suas propriedades e relações[31]. (DREYFUS, 1991, p. 37)

A partir dos estudos de Dreyfus (1991) elaboramos um quadro síntese com processos mentais de representação e abstração, com as respectivas caracterizações. Utilizaremos este quadro como referência em nossas análises.

---

[31] Tradução nossa: " Abstraction thus contains the potential for both generalization and synthesis; vice versa, it gets its purpose mainly from this potential of generalization and synthesis. The nature of the mental process of abstracting is, however, very much different from that of generalizing and from that of synthesizing. Abstracting is first and foremost a *constructive*process – the building of mental structures from mathematical structures, i.e. from properties of and relationships between mathematical objects". (SIC)

Quadro 2– caracterização de processos mentais envolvidos no P. M. A.

PROCESSOS MENTAIS ENVOLVIDOS NA REPRESENTAÇÃO	
Visualizar	Converter algo em representação mental.
Reconhecer	Relacionar algo que temos em mente com o que visualizamos.
Intuir	Perceber relações existentes em diferentes representações.
Investigar	Averiguar o desenvolvimento de um processo.
Traduzir	Transitar de uma representação de um objeto para outra.
Descobrir	Conhecer algo por meio de conexões de representações mentais.
Conjecturar	Deduzir a partir da verificação, tradução, descoberta.
Classificar	Ordenar e agrupar processos mentais concorrentes.
Analisar	Avaliar, criticar, refletir sobre um processo mental.
Induzir	Concluir a partir de indícios, verificações.
Reconhecer símbolos	Traduzir signos para representações mentais.
Manipular símbolos	Associar e traduzir diferentes representações.
Definir	Expor claramente o significado de uma representação.
Flexibilizar	Relacionar diferentes representações mentais.
Compreender	Entender a interação de uma variedade de processos mentais simultâneos.
Modelar	Encontrar uma representação matemática para um objeto não-matemático.
PROCESSOS MENTAIS ENVOLVIDOS NA ABSTRAÇÃO	
Sintetizar	Combinar ou compor partes a fim de constituir algo.
Formalizar	Criar procedimentos padronizados.
Generalizar	Derivar ou induzir a partir de indícios, para indicar pontos em comum e ampliar domínios de validade.
Provar	Argumentar por meio de uma sequência lógica dedutiva.

Fonte: Adaptação de Dreyfus (1991) [32].

Outros processos mentais estão envolvidos no desenvolvimento do pensamento matemático avançado, mas segundo Dreyfus (1991) os mais relevantes são os processos de representação e abstração. É comum nas demonstrações verificarmos indícios de tais processos mentais apresentados por Dreyfus nas análises recorreremos a este autor para justificar algumas conclusões.

[32] Nas análises recorreremos ao quadro dois, destacaremos a recorrência utilizando itálico no texto.

5 ASPECTOS METODOLÓGICOS

5.1 Encaminhamentos metodológicos

A presente pesquisa é de natureza qualitativa na perspectiva da Educação Matemática. No presente estudo escolhemos utilizar algumas características dessa natureza, segundo Bogdan e Biklen (1994) e Lüdke e André (1986).

A proposta de tarefas foi aplicada pela pesquisadora em uma sala de graduandos do segundo ano de um curso de Licenciatura em Matemática, ou seja, a fonte de dados é o ambiente natural e o pesquisador é o principal instrumento.

A investigação teve uma natureza descritiva, isto é, a partir dos registros escritos dos graduandos realizamos uma análise crítica e descritiva dos dados.

Houve um interesse maior no processo do que nos resultados, a análise não consistiu no acerto ou no erro de uma questão, e sim, no seu desenvolvimento.

A análise dos dados se deu de modo indutivo, visto que foi investigado indícios de dificuldades apresentadas em registros escritos de graduandos.

Iniciamos a pesquisa no segundo semestre de 2010 por meio de levantamento bibliográfico a fim de delinear o referencial teórico para atingirmos o objetivo de investigar dificuldades encontradas por graduandos em tarefas envolvendo demonstrações matemáticas. Buscamos o banco de teses e dissertações da CAPES[33], no período de 2007 a 2011, e detectamos trabalhos acerca de demonstrações matemáticas. Das teses e dissertações pesquisadas algumas foram analisadas a fim de conhecermos o que foi abordado sobre o assunto: Pietropaolo (2005), Nagafuchi (2009), Silva (2010), Varella (2010) e Sousa (2010).

Não encontramos em anais de eventos como o SIPEM e EBRAPEM trabalhos diretamente relacionados com dificuldades em demonstrações matemáticas. Em paralelo aos estudos dos trabalhos citados investigamos aspectos teóricos sobre provas e demonstrações em trabalhos de Balacheff (1982, 1987, 2004) e Hanna (2000), e a respeito do pensamento matemático avançado em Tall (1995), Resnick (1987) e Dreyfus (1991).

[33] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

Optamos, na escolha dos sujeitos, por graduandos de um curso de Licenciatura em Matemática, matriculados na disciplina de Estruturas Algébricas, que tem como pré-requisito a disciplina de Elementos da Matemática, na qual são trabalhadas as diferentes formas de demonstrações. Temos como objetivo específico analisar quais as formas de demonstrações utilizadas em questões sobre conjuntos e funções, pelos sujeitos da pesquisa, nas tarefas propostas sobre o assunto.

Na preparação das tarefas percebemos a necessidade de um conteúdo para abordar as formas de demonstrações. Ao pesquisar a ementa da disciplina de Elementos da Matemática observamos que o primeiro conteúdo trabalhado que envolve demonstrações é conjuntos. Deste modo preparamos um piloto com questões sobre proposições matemáticas para a aplicação das tarefas, usando como principais referências os livros de Domingues e Iezzi (2003) e Gerônimo e Franco (2006), por fazerem parte da bibliografia sugerida nas disciplinas de Estruturas Algébricas e Elementos da Matemática, respectivamente.

Foram agregadas neste piloto, que identificamos como primeira proposta de tarefas, além das questões que envolviam as formas de demonstrações, questões que exigiam definições de sentenças matemáticas relacionadas com conjuntos, para que pudéssemos analisar dificuldades relacionadas com o conteúdo e com as demonstrações matemáticas. Posteriormente elaboramos uma segunda proposta de tarefas[34] que abordasse os conteúdos de conjuntos e funções.

A primeira versão da proposta de tarefas sobre conjuntos ficou pronta em fevereiro de 2011. Aplicamo-la a um grupo de colegas mestrandos em Ensino de Ciências e Educação Matemática a fim de discutirmos as possíveis falhas na elaboração da proposta e colhermos sugestões dos colegas. Deste modo, foram realizadas adequações para a versão aplicada aos sujeitos da pesquisa.

Cada um dos cinco mestrandos receberam, em uma mesma data, uma cópia da proposta de tarefas para resolução e análise, uma semana após marcamos um encontro para discutirmos. As contribuições foram: adequação do tempo de aplicação, termos utilizados que gerariam duplo sentido na interpretação, diferentes formas de resoluções das questões.

[34] Detalharemos sua elaboração posteriormente.

Os graduandos regularmente matriculados na disciplina de Estruturas Algébricas no ano de 2011 foram convidados a participar da pesquisa, nos autorizando, por meio de um termo de esclarecimento e consentimento[35], a utilização de suas produções escritas na pesquisa, sem que seus nomes fossem divulgados. Atribuímos uma codificação para cada sujeito da pesquisa, consideramos o ano de ingresso no curso de graduação e o número de matrícula como critério para codificar os sujeitos. Na primeira proposta de tarefas (P_1) os sujeitos são identificados de A_1 até A_{13} e na segunda proposta (P_2), A_1, A_2, A_4, A_7, A_8, A_{10}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16}, observamos que os códigos iguais se referem aos mesmos sujeitos.

Na disciplina de Estruturas Algébricas estava prevista uma breve revisão sobre conjuntos e formas de demonstrações, sendo assim, planejamos aplicar as tarefas, com a devida autorização da professora responsável, na segunda aula antes da revisão, esperávamos assim obter uma diversidade de resoluções, pois não teriam realizado tarefas a respeito do assunto.

A aplicação da primeira proposta de tarefas ocorreu em 24 de fevereiro de 2011, iniciando-se às 19h10` e terminando às 20h50`, com treze participantes. No início da aplicação foi realizada a apresentação da pesquisadora e da primeira proposta de tarefas[36], informando aos estudantes que se tratava de uma pesquisa sobre demonstrações matemáticas. Estes realizaram as tarefas individualmente, sem troca de informações com os colegas. Não houve a intervenção da pesquisadora e da professora na interpretação dos enunciados, como também não foram esclarecidas dúvidas sobre a resolução das tarefas.

Esta proposta foi elaborada em quatro páginas, as quais foram entregues separadamente, de modo que o participante somente receberia a segunda folha após o término da primeira, e assim sucessivamente, para que não fossem alteradas as respostas iniciais dos graduandos. Entregamos as folhas deste modo porque havia a intenção de analisar a primeira resposta dada pelos sujeitos, uma vez que as questões da primeira proposta de tarefas foram elaboradas de modo seqüencial, ou seja, no início com questões simples com processos mentais básicos e gradativamente propondo questões que exigiam processos mentais complexos.

[35] Em anexo.
[36] Nos apêndices.

Solicitamos verbalmente que justificassem suas escolhas, porém, nos registros escritos, houve questões em branco sem justificativas.

Posteriormente, em uma pré-análise dos registros escritos dos estudantes, notamos que apenas duas formas de demonstrações foram contempladas, sendo a direta e por redução ao absurdo.

Assim, optamos em preparar uma segunda proposta de tarefas. Para tanto, incluímos, além do conteúdo conjuntos, o de funções, uma vez que este é abordado tanto na disciplina de Estruturas Algébricas quanto em Elementos da Matemática, e presume-se que os graduandos têm familiaridade com estes conteúdos desde o Ensino Médio.

As questões selecionadas para a segunda aplicação focavam proposições envolvendo conjuntos e funções e levaram em consideração que estes conteúdos foram abordados no primeiro bimestre da disciplina de Estruturas Algébricas com os sujeitos de pesquisa.

No intervalo entre a aplicação da primeira e da segunda proposta de tarefas a professora responsável pela disciplina trabalhou com atividades que envolviam os conteúdos de conjuntos e funções, algumas dessas atividades trabalhadas necessitavam demonstrar.

A segunda proposta de tarefas possibilitou a utilização das formas de demonstrações: direta, contrapositiva e por contraexemplo, além de ter uma questão aberta que permitia mais de uma forma de demonstração.

Na versão preliminar da segunda proposta havia sete proposições a serem demonstradas. Novamente aplicamos aos mesmos colegas mestrandos que contribuíram para a primeira aplicação de tarefas e convidamos dois graduandos (os quais não faziam parte dos sujeitos da pesquisa) a participarem dessa aplicação piloto. Esta aplicação ocorreu em um encontro na primeira semana de maio de 2011, que foi pré-agendado e teve duração de aproximadamente duas horas, após um breve intervalo, discutimos questão por questão da proposta. As principais contribuições foram: adequação do tempo de aplicação em 1h40`, reduzindo a proposta para cinco proposições; ordenação das proposições; palavras que dariam duplo sentido a um enunciado.

A segunda aplicação de tarefas ocorreu das 19h10` às 20h50` em 18 de maio de 2011, aos estudantes presentes na disciplina de Estruturas Algébricas, que eram em número de dez, sendo que desses, sete haviam participado da primeira aplicação. Como na primeira aplicação, as tarefas foram desenvolvidas individualmente, sem a troca de informações com colegas e sem a interferência da pesquisadora e da professora.

Nesta aplicação recomendamos verbalmente e por escrito que os graduandos justificassem suas escolhas, principalmente se não desenvolvessem a demonstração. Durante a aplicação a pesquisadora não esclareceu dúvidas referentes à interpretação da proposta. Foram entregues três folhas separadamente, em que cada graduando somente receberia a segunda após o término da primeira, para que não alterassem as suas resoluções. Realizamos a aplicação deste modo porque tínhamos a intenção de analisar a primeira resposta dada pelos sujeitos e não havíamos definido como se faria as análises, como na primeira proposta, esta também foi elaborada de modo sequencial, iniciou com questões mais simples e concluída com questões mais complexas.

Existiu a cooperação dos graduandos em ambas as aplicações, de modo que não compartilharam suas respostas, mantendo-se a ordem e o silêncio durante as resoluções. Excepcionalmente algum estudante pedia auxílio, e era atendido desde que não interferisse na resolução das propostas. Houve a preocupação em não auxiliar as resoluções destes estudantes, tanto pela pesquisadora quanto pela professora responsável da disciplina. Observamos que na segunda aplicação três novos sujeitos participaram, estes foram convidados a participar da pesquisa e nos autorizaram a utilizar seus registros escritos por meio do termo de esclarecimento e consentimento.

Na análise dos registros escritos obtidos dos estudantes entendemos que;

> “A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão do que vai ser apresentado aos outros.” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 205).

Acerca do assunto temos que;

> “A tarefa da análise implica, num primeiro momento, a organização de todo o material, dividindo-o em partes, relacionando essas partes e procurando identificar nele tendências e padrões relevantes. Num segundo momento essas tendências e padrões são reavaliados,

> buscando-se relações e inferências num nível de abstração mais elevado.” (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 45).

Conforme recomendado pelos autores citados, a organização dos registros escritos é o primeiro passo para as análises. Optamos em analisar os registros escritos por questão para evidenciarmos que dificuldades são apresentadas, a fim de atingir o objetivo de *investigar dificuldades encontradas por graduandos em tarefas envolvendo demonstrações matemáticas* e responder a questão de investigação *“que dificuldades graduandos de matemática explicitam no desenvolvimento de tarefas envolvendo demonstrações?”*

Temos três grupos distintos para analisar: os sujeitos que realizaram apenas a primeira proposta de tarefas; os sujeitos que realizaram ambas as propostas de tarefas; os sujeitos que realizaram apenas a segunda proposta de tarefas. Se focarmos apenas nos sujeitos que realizaram ambas as propostas de tarefas desprezaremos protocolos que julgamos relevantes para a pesquisa. Sendo assim optamos em cada questão agrupar as resoluções semelhantes obtidas, e analisar esses agrupamentos. Optamos por esta forma para contemplar uma diversidade de registros que enriqueceriam a análise de dificuldades.

Elaboramos um quadro com unidades para categorização dos tipos de resposta obtidas pelos sujeitos de pesquisa em cada questão e assim obtermos os agrupamentos, principalmente para identificarmos resoluções consideradas coerentes, quanto à forma de demonstração e ao conteúdo. Nas análises investigaremos as dificuldades dos sujeitos nas demonstrações categorizadas como coerentes, em qualquer subcategoria.

Quadro 3– unidades para agrupamentos de demonstrações

Coerente	C_1	se a demonstração estiver correta, isto é, há uma argumentação que apresenta uma sequência lógica dedutiva válida, na qual as premissas são verdadeiras como também a conclusão.
	C_2	se a demonstração estiver com erros de conteúdo que não comprometa a forma de demonstração, isto é, há argumentação, porém a sequência lógica dedutiva é inválida por utilizar premissas falsas.
	C_3	se a demonstração não apresentar erros de conteúdo, mas está incompleta ou compromete a forma de demonstração.
Incoerente		se houve uma tentativa de resolução, mas esta foi mal sucedida por não apresentar argumentação.
Em branco		se não apresentar registro algum na questão.
Justificada		se não há tentativa de resolução na questão, porém o estudante informou que, por exemplo, não sabia resolver.

Fonte: Autoria própria[37].

Na primeira proposta de tarefas, as questões de 1 a 11 são do tipo conceituais. Nestes casos, as análises consistiram em investigar qual dificuldade os graduandos apresentaram nas definições. Já nas questões 12 e 13 são demonstrações e exigem o processo mental de prova, no qual o sujeito utiliza sua racionalidade para deduzir logicamente a veracidade ou a falsidade de uma proposição. Optamos analisar as questões 12 e 13 da primeira proposta de tarefas e as questões da segunda proposta de tarefas por tratarem demonstrações, recorrendo, se necessário aos itens de 1 a 11 da primeira aplicação. Esperávamos nas questões de 1 a 11 da primeira proposta de tarefas, que os graduandos expressassem seu entendimento a respeito de cada questão sobre alguns tópicos de conjuntos.

[37] Nas análises recorreremos ao quadro três, destacaremos a recorrência utilizando itálico no texto.

Após agruparmos os tipos de resoluções por meio do quadro três, recorreremos ao referencial teórico exposto no capítulo quatro para analisar pelo menos um protocolo de cada agrupamento.

Ao lidar com os registros escritos dos graduandos, percebemos que existem dificuldades relacionadas com a forma de demonstração e com o conteúdo de conjuntos e funções, não sendo possível desvincular ambos. Além disso, temos dificuldades que se referem à escrita, seja na linguagem materna ou matemática. Para sistematizarmos as análises, a partir os agrupamentos citados anteriormente construímos o quadro quatro com categorizações, subcategorizações e unidades de análises, obtidas por meio de uma pré análise dos registros escritos dos sujeitos de pesquisa.

O quadro quatro será utilizado como síntese das dificuldades encontradas em cada questão analisada.

Quadro 4– categorização, subcategorização e unitização de dificuldades em demonstrações matemáticas

Dificuldade			
Desenvolvimento da forma de demonstração	Argumentação	Inválida	não utiliza uma sequência lógica dedutiva, é utilizado um argumento falso que compromete a demonstração.
		Incompleta	utiliza uma sequência lógica dedutiva, mas, não concluí a demonstração.
	Estrutura da demonstração	Distinção entre hipótese e tese	Inicia a demonstração afirmando a tese e concluí a hipótese.
		Distinção entre definição e demonstração	afirma que uma proposição que necessita ser demonstrada é verdadeira por definição.
	Forma de demonstração	Utiliza exemplos	a representação simbólica[38] utilizada não se adéqua a nenhuma forma de demonstração e sim a exemplos particulares sobre a proposição.
		Forma inadequada	inicia-se o processo de prova, porém a conclusão não é válida por não utilizar a forma correta, quanto a estrutura direta, contrapositiva, redução ao absurdo.
Conhecimento do conteúdo	Conectivos		inverte a utilização de conectivos, por exemplo, *e* por *ou* .
	Condicional e bicondicional		não distingue condição necessária e condição suficiente.
	União, Interseção, complementar		não argumenta de acordo com a definição.
Escrita	Linguagem materna	Clareza	a representação simbólica utilizada na escrita é confusa.
		Coerência	existe contradição na escrita
	Linguagem matemática		não escreve adequadamente na linguagem matemática, por exemplo, utiliza símbolos inadequados, ou , atribui significado divergente.

Fonte: Autoria própria

[38] Conforme descrito por Dreyfus (1991).

5.2 Formas de demonstrações aplicáveis às propostas de tarefas

A seguir apresentaremos possíveis soluções para as questões das propostas de tarefas, além de demonstrações das proposições das propostas de tarefas consideradas coerentes. É possível que existam outras formas de demonstrar tais proposições, uma vez que para ser coerente é necessária a argumentação por meio de sentenças matemáticas verdadeiras a fim de justificar uma conclusão.

Na primeira proposta de tarefas as questões de um a onze são do tipo conceitual, o objetivo nestas questões é provocar uma reflexão no estudante a respeito de sentenças relacionadas com conjuntos. Segue possíveis respostas para o questionário, a saber:

1) O que são conjuntos?

Segundos Domingues e Iezzi (2003), Halmos (2001), Gerônimo e Franco (2006), trata-se de um conceito axiomático, no qual não há uma definição precisa. Esses autores têm como sinônimo os termos “classe” e “coleção”, além de, assumirem a existência de conjuntos, e a partir disso define: elementos, pertinência entre outros. Deste modo assumiremos conjuntos como um agrupamento de elementos que gozam de uma mesma propriedade.

2) Em sua opinião, quais das palavras a seguir apresentam relação com conjuntos? Se existir, caracterize.

a) Classe:

b) Coleção:

c) Elemento:

d) Pertinência:

e) Relação:

f) Função:

g) Partição:

h) Números:

i) Intervalo:

Nesta questão todos os itens possuem alguma relação com conjuntos, caberia ao estudante identificá-la, como por exemplo:

a) Classe: usado por alguns autores, conforme citado na questão 1), como sinônimo de conjuntos.

b) Coleção: usado por alguns autores, conforme citado na questão 1), como sinônimo de conjuntos.

c) Elemento: conjuntos possuem elementos, sendo que um conjunto pode ser elemento de um outro conjunto.

d) Pertinência: conceito axiomático que integra um elemento a um conjunto.

e) Relação: condição que associa os elementos de dois ou mais conjuntos.

f) Função: condição que associa um único elemento de um conjunto A a um elemento qualquer de um conjunto B, sendo um caso particular do item e).

g) Partição: podemos obter a partição de conjuntos em subconjuntos não vazios, desde que estes subconjuntos sejam disjuntos.

h) Números: podem ser definidos e agrupados em conjuntos numéricos.

i) Intervalo: dentro de um intervalo na reta numérica é possível definir um subconjunto dos conjuntos numéricos.

3) Qual a diferença de classe, coleção e conjunto?

Conforme citado na questão 1) esses termos são tidos como sinônimos, porém em certas abordagens podem assumir outros significados, como por exemplo, o termo “classe” pode se referir a classe de equivalência, que tem um significado distinto de conjunto.

4) Defina o conceito de pertinência em relação aos conjuntos?

Seja x um elemento de um conjunto C, neste caso consideramos que x pertence a C, ou seja, $x \in C$. A pertinência trata-se de uma relação entre elementos e conjuntos. Tomemos dois conjuntos A e B, a expressão $B \in A$, Gerônimo e Franco (2006, p. 84) define: “seja B um conjunto, se existe um conjunto A tal que $B \in A$ então B é denominado elemento de A. Neste caso, diremos “B é um elemento de A” ou “B pertence a A”.

5) O que são subconjuntos?

Segundo Domingues e Iezzi (2003) se A e B são conjuntos e todo elemento de A também é elemento de B, dizemos que A é um subconjunto de B.

6) O que são conjuntos disjuntos?

São conjuntos que não possuem elementos em comum.

7) Escreva sobre o conjunto vazio.

Na fundamentação de conjuntos, de modo axiomático, “conjunto sem elementos” é denominado de conjunto vazio.

8) Como você relaciona os diagramas de Venn- Eüler e conjuntos?

Trata-se de representações de conjuntos por meio de diagramas, no qual é possível realizar verificações.

9) Defina interseção e união de conjuntos.

Dados pelo menos dois conjuntos distintos podemos operar com esses conjuntos, sendo por meio de uniões ou interseções, para tanto apresentaremos as respectivas definições para justificar a demonstração.

Definição de união: $x \in A \cup B,$ se e somente se, $x \in A$ ou a B ou a ambos.

Definição de interseção: $x \in A \cap B,$ se e somente se, $x \in A$ e B.

10) Sejam A e B conjuntos não vazios, defina complementar de A em relação a B e a diferença entre A - B e B - A? O que você conclui?

Segundo Halmos[39] (2001), se A e B são conjuntos, a diferença entre A e B, muitas vezes conhecida como complementar relativo de A em B, é o conjunto A-B definido por: $A - B = \{x \in A: x \notin B\}$, consideremos que $A \subseteq B$, logo o $A^c = \{x \in B: x \notin A\}$, note que $B - A = \{x \in B: x \notin A\}$. Podem referir-se ao mesmo conjunto em abordagens diferentes, porém no caso de complementar há necessidade de $A \subseteq B$.

[39] Entre páginas 27-28

11) Defina os conjuntos numéricos. O que os distingue? Dê alguns exemplos.

São os conjuntos naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais e complexos. A distinção entre os conjuntos refere-se à natureza do número pertencente a cada um dos conjuntos, por exemplo:

N = {0, 1, 2, 3, ...n, n+1, ...}, segue que os naturais são os números inteiros não negativos.

Z = {... - n-1, - n, ... , -2 , -1 , 0 , 1 , 2, ..., n, n+1, ...}, observamos que todo número natural é um número inteiro, logo N é um subconjunto de Z.

Q = {a/b com a e b pertencentes a Z com b diferente de 0} , temos que o conjunto dos números inteiros satisfaz tal definição, assim todo número inteiro também é racional.

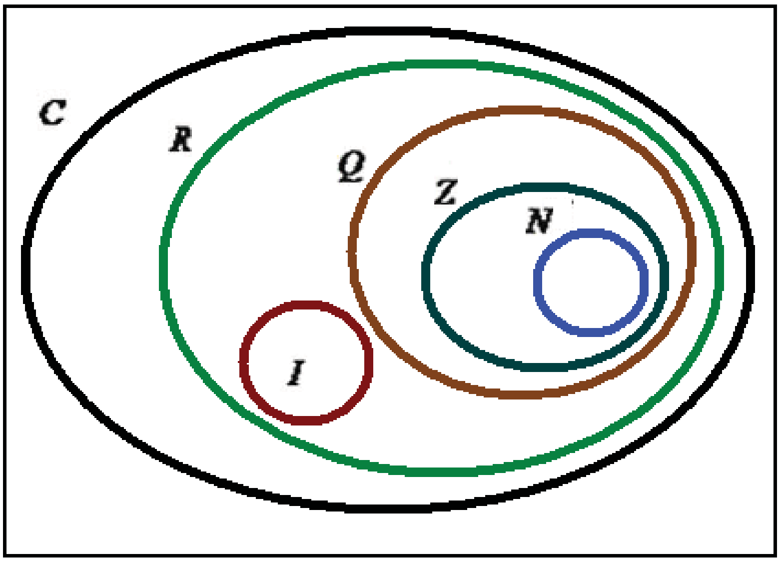
I = São aqueles que não podem ser expressos na forma a/b, com a e b inteiros e b diferente de 0.

R = É a união do conjunto dos números irracionais com o dos racionais.

C= São os números do tipo a + bi, no qual a e b são números reais e i se refere à raiz de menos um, nesse conjunto temos que $i^2 = -1$.

A partir das definições citadas temos que $N \subset Z \subset Q$, QU $I \subset R \subset C$ a menos do isomorfismo[40]. Deste modo temos a seguinte representação.

Figura 2 – diagrama de Venn-Eüler para conjuntos numéricos



Fonte: Autoria própria.

---

[40] Correspondência biunívoca entre os elementos de dois grupos, que preserva as operações de ambos.

Para especificar que condições um conjunto é denominado igual ao outro utilizaremos a relação de pertinência. Sejam A e B conjuntos, o conjunto A é igual ao conjunto B, isto é, A = B, se todo elemento de A é também elemento de B e a recíproca é verdadeira.

Caso contrário, temos algumas variações, por exemplo, se todo elemento de A é também elemento de B, diremos que A está contido em B, ou seja, $A \subset B$, sendo A diferente de B, denotamos $A \subseteq B$. Temos ainda que, B é um superconjunto de A, no primeiro caso A é um subconjunto de B, e, A é um subconjunto próprio de B no segundo caso .

Em algumas destas demonstrações recorremos aos conectivos lógicos para provar proposições, esses são palavras ou grupos de palavras utilizados para juntar pelo menos duas proposições e suas possibilidades lógicas podem ser representadas por tabelas verdades. Os principais são: a negação; a conjunção; disjunção; condicional; bicondicional; que definiremos a seguir.

a) negação: no caso de proposições com quantificadores nega-se o quantificador, isto é, se é universal torna-se particular e vice-versa, posteriormente nega-se a sentença. No caso em que não há a indicação de quantificadores nega-se apenas a sentença. A negação de todo enunciado verdadeiro é falso e a negação de todo enunciado falso é verdadeira.

b) conjunção: quando duas sentenças se combinam pela palavra "e", a frase resultante é uma conjunção, e, cada sentença é caracterizada como conjuntivo. Temos que o símbolo desta conjunção é "$\wedge$". Uma conjunção é verdadeira se ambos os seus conjuntivos forem verdadeiros, caso contrário, será falsa. A negação de uma conjunção é dada pela negação da primeira sentença, negação do conectivo "e", isto é, "ou", e a negação da segunda sentença.

c) disjunção (inclusiva): quando dois enunciados combinam-se entre si pela palavra "e/ou", o enunciado composto resultante é uma disjunção inclusiva e os dois enunciados têm o nome de disjuntivos. O símbolo da disjunção é "$\vee$". Uma disjunção é verdadeira se pelo menos um de seus conectivos forem verdadeiros, caso contrário, será falsa.

d) disjunção (exclusiva): a disjunção exclusiva é verdadeira se apenas um dos disjuntivos for verdadeiro; o que significa que será falsa, no caso de ambos disjuntivos serem falsos ou verdadeiros.

e) condicional: considerando duas proposições simples na qual temos o *se* antes da primeira proposição e a palavra *então* entre elas, a proposição composta resultante é uma condicional**.** A proposição entre o "se" e o "então" tem nome de antecedente e a posterior à palavra "então" tem nome de consequente. A relação entre as proposições é de consequência necessária entre o primeiro e o segundo enunciado, ou ainda a primeira proposição é considerada a causa, ou condição suficiente, para que aconteça a segunda proposição, a consequência ou condição necessária da primeira. Uma condicional estabelece a relação de implicação entre o antecedente e o consequente, nesta ordem. Seu símbolo é "→" que é lido "implica". Assim, p→q pronuncia: "p implica q" ou "Se p então q".

f) bicondicionais: considerando duas proposições p e q temos que se $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ então teremos uma bicondicional em que a verdade de uma das condições implica a verdade da outra e a falsidade de uma das condições, qualquer seja, implica a falsidade da outra. Gerônimo e Franco (2006, p. 23) definem: "sejam p e q proposições, a bicondicional de p e q, denotada por p↔ q onde se lê: 'p bicondiciona q', é a proposição que assume valor lógico verdadeiro somente quando p e q forem verdadeiras ou p e q forem falsas". (SIC)

A seguir apresentaremos as proposições a serem demonstradas, algumas considerações e as demonstrações das mesmas.

12) Demonstre que para qualquer conjunto A, temos que $\emptyset \subseteq A$.

O conjunto vazio é um subconjunto de qualquer outro subconjunto. Temos que provar que todo elemento pertencente ao conjunto vazio também pertence a A.

Demonstração$_1$: Se $x \in \emptyset$, isto implica que $x \in A$. Pela contrapositiva, suponhamos que $x \notin A$, assim temos que $x \notin \emptyset$, pois o conjunto vazio não contém elementos. Então $x \in A$ implica que $x \notin \emptyset$.

Outro modo de se demonstrar é por redução ao absurdo, vejamos.

Demonstração$_2$: Se o $\emptyset \nsubseteq A$, assim existe $x \in \emptyset$ e $x \notin A$, o que é um absurdo, pois não existe x pertencente ao $\emptyset$, logo $\emptyset \subseteq A$.

13) Demonstre que, se A, B, e C são conjuntos, então:
a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Na primeira demonstração, por meio da argumentação, justificaremos as sentenças, já na segunda utilizaremos operadores lógicos para validar a igualdade.

Demonstração$_1$:

Seja x ∈ $A \cap (B \cup C)$, ou seja, x ∈ A e x ∈ $B \cup C$, logo x ∈ B ou x ∈ C, assim x ∈ A e B ou x ∈ A e C, deste modo x ∈ $A \cap B$ ou $A \cap C$, podemos concluir que x ∈ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Por outro lado, se x ∈ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, x ∈ $A \cap B$ ou $A \cap C$, isto implica que x ∈ A e B ou x ∈ A e C, e ainda x ∈ A e x ∈ B ou x ∈ C, sendo assim x ∈ A e x ∈ $B \cup C$, de modo que x ∈ $A \cap (B \cup C)$. Segue que a igualdade é verdadeira.

Demonstração$_2$:

$A \cap (B \cup C) = \{x \in A \wedge x \in (B \cup C)\}$	definição de interseção
$= \{x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\}$	definição de união
$= \{(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\}$	propriedade distributiva
$= \{x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)\}$	definição de interseção
$= \{x \in (A \cap B) \cup x \in (A \cap C)\}$	definição de união
$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$	

13) b) $(A \cup B)^C = A^c \cap B^c$

Na primeira demonstração, por meio da argumentação, justificaremos as sentenças, já na segunda utilizaremos operadores lógicos para validar a igualdade.

Demonstração$_1$:

Seja x ∈ $(A \cup B)^C$, assim x ∉ a $A \cup B$, ou seja, x ∉ A e x ∉ a B, logo x ∈ A^c e x ∈ B^c, isto implica que x ∈ $A^c \cap B^c$. Por outro lado, se x ∈ $A^c \cap B^c$, então x ∈ A^c e x ∈ B^c, deste modo x ∉ A e x ∉ a B, consequentemente x ∉ a $A \cup B$, assim x ∈ $(A \cup B)^C$. Podemos concluir que a igualdade é verdadeira.

Demonstração$_2$:

$(A \cup B)^C = \{x/x \notin A \cup B\}$	definição de complemento
$= \{x/\sim(x \in A \cup B)\}$	negação da pertinência
$= \{x/\sim(x \in A \vee x \in B\}$	definição de união
$= \{x/\sim(x \in A) \wedge \sim(x \in B)\}$	leis De Morgam para operadores lógicos
$= \{x/x \notin A \wedge x \notin B\}$	negação da pertinência
$= \{x/x \in A^c \wedge x \in B^c\}$	definição de complemento

= $\{x/x \in A^c \cap x \in B^c\}$ definição de interseção

= $A^c \cap B^c$

13) c) $A \subset B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

Demonstração:

Temos que demonstrar duas condicionais, a saber:

I) $A \subset B \longrightarrow A - B = \emptyset$

II) $A - B = \emptyset \longrightarrow A \subset B$

Demonstração de I):

Seja x $\in$ A por hipótese $A \subset B$ logo x $\in$ B, deste modo não existe x $\in$ A e x $\notin$ B, sendo assim $A - B = \emptyset$.

Demonstração de II):

Utilizaremos a contrapositiva da proposição, isto é, $A \not\subset B \longrightarrow A - B \neq \emptyset$. Considere que x $\in$ A. Se x $\notin$ B segue que x $\in$ A e x $\notin$ B, assim $A - B \neq \emptyset$. Logo a condicional II é verdadeira.

Pela demonstração de I) e II) temos que a bicondicional é verdadeira.

Na segunda parte da proposta de tarefas complementamos com proposições que envolvem funções. Há grandezas que se relacionam entre si e estudos destas relações permearam o desenvolvimento do conceito de funções. Vários matemáticos apresentaram definições de funções, dentre eles: René Descartes (1596 - 1650); Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646 - 1716); Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813); Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866).

Segundo Gerônimo e Franco (2006, p. 176) uma definição de função que é apresentada desde o Ensino Médio seria: “uma regra de correspondência, que associa cada elemento x de um certo conjunto, chamado de domínio da função, a um único elemento y em um outro conjunto de contradomínio da função”.

Além desta definição o autor apresenta outra a saber,

> Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Uma função de A em B, denotada por f: A→B, é uma terna (f,A,B), onde f é uma relação de A em B satisfazendo as seguintes condições: i) Dom (f) = A, ou seja, para qualquer x em A, existe y em B tal que (x,y)está em f; ii)

> Seja x f y e x f z, então y = z. (GERÔNIMO; FRANCO, 2006, p.176)

Utilizamos tais definições e as já definidas na primeira proposta de tarefas para demonstrarmos as proposições a seguir.

1) Seja f: X→Y uma aplicação e $A \subseteq X \ e \ B \subseteq X$. Considerando que as demonstrações matemáticas podem ser realizadas valendo-se das formas direta, contrapositiva ou redução ao absurdo, demonstre, se for possível, as seguintes proposições:

a) f(A ∩ B) = f(A) ∩ f(B)

Demonstração de a):

Esta proposição é falsa, deste modo apresentaremos um contraexemplo. Seja f: X→Y definida por f(x) = n² e A, B contidos em X, tal que; A= {-2,-1,0,1} e B = {-1,0,1,2,3}; logo A∩B = {-1,0,1}, assim f(A∩B) = {0,1}, seque que f(A) = {0,1,4} e f(B) = {0,1,4,9}, deste modo f(A) ∩f(B) = {0,1,4}, o que implica que f(A ∩B) ≠f(A) ∩ f(B).

b) f(A ∪ B) = f(A) ∪ f(B)

Demonstração de b):

Devemos mostrar que as sentenças a seguir são verdadeiras

i) f(A ∪ B) ⊂ f(A) ∪ f(B)

Seja y ∈ f(A ∪ B , existe x em que f(x) = y e x ∈ A ∪ B, sendo assim x ∈ A ou x ∈ B, deste modo f(x) ∈ f(A) ou f(x) ∈ f(B), segue que f(x) ∈ f(A) ∪ f(B), como y=f(x), y ∈ f(A) ∪ f(B), o que implica em f(A ∪ B) ⊂ f(A) ∪ f(B).

ii) f(A) ∪ f(B) ⊂ f(A ∪ B)

Seja y ∈ f(A) ∪ f(B), assim y ∈ f(A)ou y ∈ f(B) existe x em que f(x) = y em que x ∈ A ou x ∈ B, segue que x ∈ A ∪ B , logo f(x) ∈ f(A ∪ B), como y=f(x), y ∈ f(A ∪ B), o que implica em f(A) ∪ f(B) ⊂ f(A ∪ B).

Por i) e ii) a proposição f(A ∪ B) = f(A) ∪ f(B) é verdadeira.

2) Seja f: X→Y uma aplicação e U⊆ X e V ⊆ X. Demonstre que: se U⊂V então $f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$.

Segundo Gerônimo e Franco (2006, p. 182) a “imagem inversa de Y sob f, denotada por $f^{-1}(Y)$, é o conjunto de todas as pré-imagens dos elementos de B, ou seja, $f^{-1}(Y) = \{x \in A / f(x) \in Y\}$”.

Demonstração:

Seja $x \in f^{-1}(U)$ sendo assim existe y = f(x) tal que y ∈ f(U) e x ∈ U, seque que U ⊂ V, logo x ∈ V e y ∈ f(V), como y = f(x) então $x \in f^{-1}(V)$, o que implica em $f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$.

3) Considere o seguinte teorema: “*Um conjunto é infinito, se e somente se, está em correspondência biunívoca com um subconjunto próprio*”. Demonstre que o Conjunto dos Números Naturais é infinito.

Demonstração:

Seja f: N→2N tal que f(n) = 2n, temos que mostrar que f é injetora. Para mostrar que f é injetora consideremos que se $n_1 \neq n_2$ então $f(n_1) \neq f(n_2)$. Suponha que $f(n_1)=f(n_2)$ que implica em $n_1=n_2$, sendo assim, $f(n_1)=2n_1$ e $f(n_2)=2n_2$, considere $n_1 \neq n_2$ e $f(n_1)=f(n_2)$, deste modo, $2n_1=2n_2$ o que é um absurdo, logo a f é injetora. Temos que 2N é um subconjunto próprio de N e existe uma correspondência biunívoca com N, segue que N é infinito.

4) Seja f: X→ Y uma aplicação. Demonstre que: f é injetiva se, e somente se, quaisquer que sejam A, B ⊂ X, f(A∩B) = f(A) ∩f(B).

Para definir injetividade recorremos a Gerônimo e Franco (2006, p. 201), uma função é considerada injetora, biunívoca ou injetiva se:

f: A→B temos que, $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2 \ \forall \ x_1, x_2 \in A$. Ou de modo equivalente $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Demonstração:

Temos que mostrar que as sentenças a seguir são verdadeiras

i) Se f é injetiva então f(A∩B) = f(A) ∩f(B).

Se f é injetiva segue que $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$. Seja y ∈ f(A ∩B) deste modo existe $x = x_1 = x_2$ tal que f(x) = y e x ∈ A ∩B, sendo assim x ∈ A e x ∈ B, logo f(x) ∈ f(A) e f(x) ∈ f(B), deste modo, f(x) ∈ f(A) ∩ f(B), segue que f(x) = y logo y ∈ f(A) ∩ f(B) o que implica f(A∩B) ⊂ f(A) ∩ f(B). Por outro lado, se y ∈ f(A) ∩ f(B), temos que

$y \in f(A)$ e $y \in f(B)$, deste modo existe $x_1 = x_2$ tal que $x_1 \in A$ e $x_2 \in B$, no qual $f(x_1) = y$ e $f(x_2) = y$, pois a f é injetiva. Considerando $x = x_1 = x_2$ temos que $x \in A \cap B$, ou seja, $f(x) \in f(A \cap B)$, logo $f(x) = y \in f(A \cap B)$, sendo assim $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$, temos que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

ii) Se $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ então f é injetiva.

Consideremos a contrapositiva da sentença, isto é, Se a f não é injetiva então $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$. Temos em i) que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ sem necessariamente ser injetiva. Mostraremos que se a f não é injetiva então $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$. Seja $y \in f(A) \cap f(B)$ assim $y \in f(A)$ e $y \in f(B)$, sendo assim existe $x_1 \in A$ e $x_2 \in B$ em que $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = y$ e $f(x_1) \in f(A)$, $f(x_2) = y$ e $f(x_2) \in f(B)$, deste modo $f(x_1) = f(x_2) = y$ mas $x_1 \neq x_2$ pois a f não é injetiva. Logo $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$ sendo assim $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$. Por i) e ii) a proposição é verdadeira.

No próximo capítulo analisaremos os protocolos obtidos na aplicação das propostas de tarefas, utilizaremos as demonstrações apresentadas como referência para identificação das dificuldades em cada questão proposta nas tarefas.

6 ANÁLISES DAS TAREFAS

Analisaremos a partir da questão doze da primeira proposta de tarefas, sendo esta a primeira proposição a ser demonstrada. Para as análises recorreremos ao referencial teórico explicitado no capítulo quatro, como também, o exposto no capítulo cinco. Agruparemos os tipos de questões, analisaremos cada agrupamento e investigaremos dificuldades encontradas nos registros escritos, de cada grupo de resolução foi escolhido ao menos um protocolo a título de exemplo. Posteriormente, sintetizaremos as dificuldades encontradas nas demonstrações utilizando o quadro quatro.

12) Demonstre que para qualquer conjunto A, temos que $\emptyset \subseteq A$.

Quadro 5 – agrupamentos da questão doze P_1

Agrupamentos		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}
Coerente	C_1												X	X
	C_2													
	C_3	X	X		X		X							
Incoerente														
Em branco				X		X		X	X	X	X			
Justificada												X		

Fonte: Autoria própria

No agrupamento coerente há duas unidades para análise, iniciaremos pela denominada C_1. Temos duas resoluções semelhantes, quanto à forma de demonstração. Vejamos o protocolo seguir;

Figura 3 – protocolo A_{12}: questão doze da P_1

Dem: Suponha que $\emptyset \not\subset A$, ou seja, existe $x \in \emptyset$, tal que, $x \notin A$. Assim, um absurdo pois $x \notin \emptyset$. Logo, $\emptyset \subset A$ para todo A.

Fonte: registros escritos do protocolo A_{12}: questão doze da P_1

Neste grupo, foram realizadas ambas as provas da proposição por redução ao absurdo, entendemos estar coerente quanto à forma e o conteúdo, pois não há contradições. Segundo Dreyfus (1991), apontamos os seguintes processos mentais;

Quadro 6 – processos mentais evidenciados no C_1[41] : questão doze P_1

PROCESSOS MENTAIS ENVOLVIDOS NA REPRESENTAÇÃO	
Visualizar	ocorreu esse processo devido ao registro escrito coerente.
Reconhecer	
Intuir	não podemos afirmar.[42]
Investigar	Investigou a sequência lógica dedutiva para demonstrar
Traduzir	leitura e interpretação dos símbolos apresentados na proposição.
Descobrir	não podemos afirmar.
Conjecturar	não podemos afirmar.
Classificar	não podemos afirmar.
Analisar	para atribuir a conclusão foi necessário a análise.
Induzir	não podemos afirmar.
Reconhecer símbolos	traduziu a linguagem simbólica.
Manipular símbolos	utilizou notação matemática corretamente.
Definir	expôs claramente cada sentença da demonstração.
Flexibilizar	estabeleceu relações entre as sentenças definidas.
Compreender	temos indícios que compreende algo sobre a forma de demonstração e do conteúdo.
Modelar	não podemos afirmar.
PROCESSOS MENTAIS ENVOLVIDOS NA ABSTRAÇÃO	
Sintetizar	constituíram as sentenças de modo coerente.
Formalizar	não podemos afirmar.
Generalizar	não podemos afirmar.
Provar	argumentaram por meio de uma sequência lógica dedutiva.

Fonte: Autoria própria

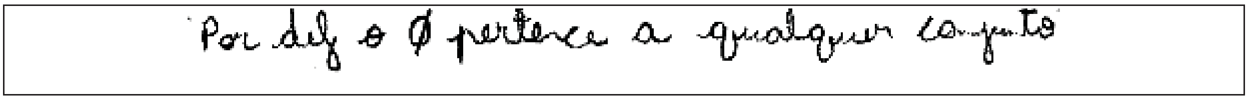
[41] Os quadros de processos mentais foram construídos, principalmente, para o agrupamento C1, pois entendemos que há indícios desses processos, quando se demonstra por uma sequência lógica dedutiva.

[42] Utilizaremos esse termo "não podemos afirmar" em todos os quadros de análises de processos mentais, quando não for possível identificar cada processo indicado em todos os sujeitos do agrupamento.

Notamos que diversos processos mentais ocorrem para que se provasse a proposição, segundo Balacheff (2004), os indivíduos utilizaram sua racionalidade para provar matematicamente. O mesmo autor, Balacheff (1987) categoriza como um caso categorizado como experimento de pensamento, por consistir uma prova conceitual, apoiada em definições e axiomas.

A segunda análise da questão 12 será para o agrupamento do tipo C_3. Neste caso obtivemos três respostas similares a exposta no protocolo de A_2 e a resposta de A_6 que difere das demais. Observemos,

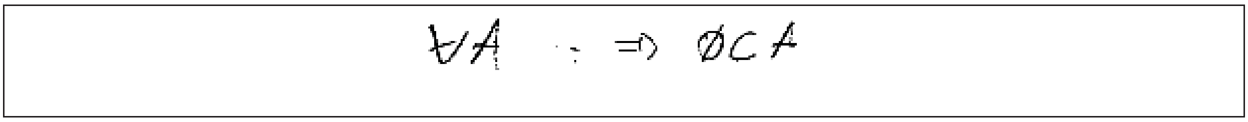
Figura 4 – protocolo A_2: questão doze da P_1



Fonte: registros escritos do protocolo A_2: questão doze da P_1

Mesmo escrito “demonstre” o estudante construiu uma imagem mental no processo de *visualização* divergente esperada na interpretação do enunciado. Há a afirmação “por definição”, segundo Dreyfus (1991), o argumento utilizado não *prova* a proposição. Segundo Balacheff (1987), o apresentado trata-se de uma mostração, classificada como *empirismo ingênuo*. Neste caso existe a *compreensão* sobre a utilização do conjunto vazio, mas não há va escolha da forma de demonstração adequada, logo existe dificuldade em *reconhecer.* Vejamos o protocolo de A_6;

Figura 5 – protocolo A_6: questão doze da P_1



Fonte: registros escritos do protocolo A_6: questão doze da P_1

Neste caso, o estudante *traduz* para a linguagem matemática a tese a ser demonstrada, não utilizando uma forma de demonstração para provar a sentença.

Os protocolos desse agrupamento enfatizam que a proposição é verdadeira “por definição”. Notamos que se tratava de uma proposição desconhecida para os graduandos, sendo assim, havia a necessidade de *conjecturar* ideias, de identificar que forma de demonstração seria adequada. Porém, onze dos estudantes não estavam aptos para demonstrar durante a aplicação da proposta, pois não reconheceram se tratar de uma demonstração e segundo Dreyfus (1991) não construíram uma representação mental adequada para a sentença. Analisamos os processos mentais evidenciados neste agrupamento.

Quadro 7– processos mentais evidenciados no C_3: questão doze da P_1

PROCESSOS MENTAIS ENVOLVIDOS NA REPRESENTAÇÃO	
Visualizar	apresentaram um registro que possui relação com a questão.
Reconhecer	reconheceram apenas o conteúdo.
Intuir	não podemos afirmar.
Investigar	não podemos afirmar.
Traduzir	leitura e interpretação dos símbolos apresentados na proposição.
Descobrir	não podemos afirmar.
Conjecturar	não podemos afirmar.
Classificar	não podemos afirmar.
Analisar	não obtivemos indícios de reflexão sobre a proposição.
Induzir	não podemos afirmar.
Reconhecer símbolos	traduziu a linguagem simbólica.
Manipular símbolos	Utilizaram notação matemática corretamente.
Definir	apenas reproduziram o enunciado.
Flexibilizar	não estabeleceram relação da forma de demonstração e o conteúdo.
Compreender	não podemos afirmar.
Modelar	não podemos afirmar.
PROCESSOS MENTAIS ENVOLVIDOS NA ABSTRAÇÃO	
Sintetizar	apenas reafirmaram a sentença exposta no enunciado.
Formalizar	não podemos afirmar.
Generalizar	não podemos afirmar.
Provar	não argumentaram por meio de uma sequência lógica dedutiva.

Fonte: Autoria própria

Neste agrupamento, encontramos apenas afirmações relacionadas ao conteúdo matemático. Segundo Hanna (2002), durante o processo de ensino aprendizagem das formas de demonstração, esses estudantes não desenvolveram habilidades, tais como, verificação, explanação, sistematização, exploração do significado de uma definição ou a consequência de um pressuposto, pois mesmo solicitando uma prova matemática, os graduandos apresentaram uma explicação para sentença sem demonstrar.

Segundo Dreyfus (1991) para se abstrair são necessários que vários processos mentais interajam simultaneamente de modo convergente. Dentre esses *conjecturar*, *descobrir*, *investigar* e *intuir* contribuem para se provar algo desconhecido, nos registros escritos não encontramos indícios de que tais processos. Deste modo, atribuímos às dificuldades expostas a seguir para o agrupamento C_3;

Quadro 8 – dificuldades encontradas na questão doze da P_1

Dificuldade			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}
Desenvolvimento da forma de demonstração	Argumentação	Inválida	X	X		X		X							
		Incompleta													
	Estrutura da demonstração	Distinção entre hipótese e tese													
		Distinção entre definição e demonstração	X	X		X		X							
	Forma de demonstração	Utiliza exemplos													
		Forma inadequada	X	X		X		X							
Conhecimento do conteúdo	Conectivos														
	Condicional e bicondicional														
	União, interseção, complementar														
Escrita	Linguagem materna	Clareza													
		Coerência													
	Linguagem matemática														

Fonte: Autoria própria

13) Demonstre que, se A, B, e C são conjuntos, então:
a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

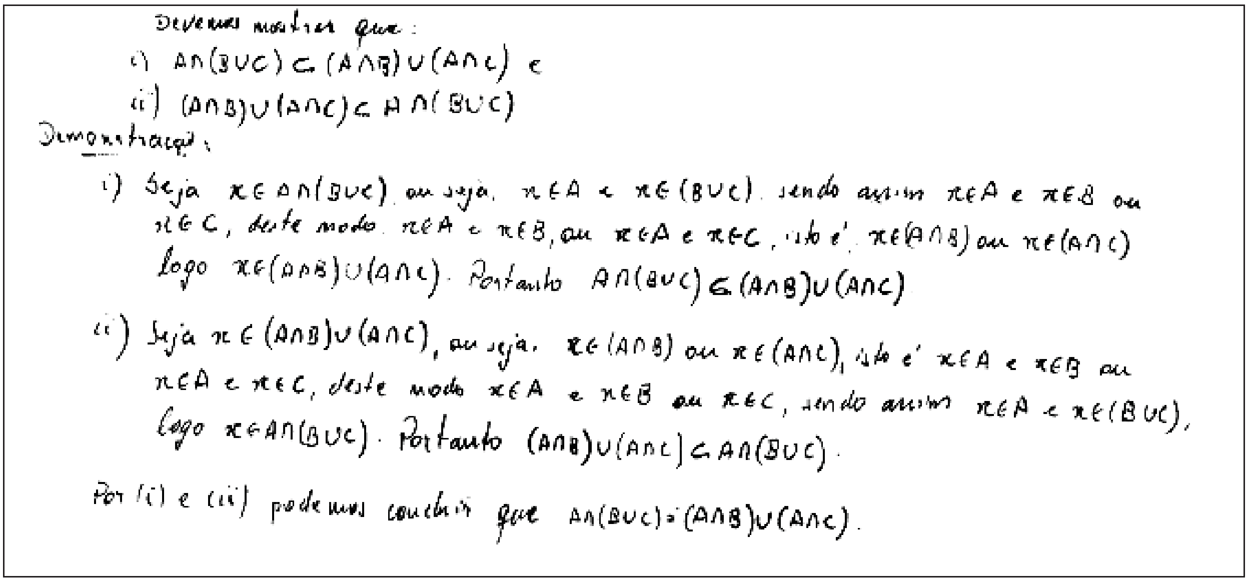
Quadro 9 – tipos de agrupamentos da questão treze a) P_1

Agrupamentos		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}
Coerente	*C_1*	X	X		X		X	X					X	X
	C_2										X			
	C_3					X			X	X		X		
Incoerente														
Em branco				X										
Justificada														

Fonte: Autoria própria

Obtivemos três agrupamentos distintos para essa proposição. Analisaremos o agrupamento C_1. Todos os sete graduandos desse agrupamento realizaram a demonstração da proposição pela forma direta, provando as duas inclusões que garantem a igualdade da proposição. Utilizaram os conectivos adequados e as definições corretas para interseção e união; construíram uma sequência lógica dedutiva válida. A diferença entre as demonstrações está na escrita da língua materna. Temos a seguir o protocolo de A_4 para exemplificar uma prova matemática desse agrupamento.

Figura 6 – protocolo A_4: questão treze a) da P_1


Devemos mostrar que:
i) $A\cap(B\cup C) \subset (A\cap B)\cup(A\cap C)$ e
ii) $(A\cap B)\cup(A\cap C) \subset A\cap(B\cup C)$
Demonstração:
i) Seja $x\in A\cap(B\cup C)$ ou seja, $x\in A$ e $x\in(B\cup C)$. sendo assim $x\in A$ e $x\in B$ ou $x\in C$, deste modo $x\in A$ e $x\in B$, ou $x\in A$ e $x\in C$, isto é, $x\in(A\cap B)$ ou $x\in(A\cap C)$ logo $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Portanto $A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$
ii) Seja $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, ou seja, $x\in(A\cap B)$ ou $x\in(A\cap C)$, isto é $x\in A$ e $x\in B$ ou $x\in A$ e $x\in C$, deste modo $x\in A$ e $x\in B$ ou $x\in C$, sendo assim $x\in A$ e $x\in(B\cup C)$, logo $x\in A\cap(B\cup C)$. Portanto $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$.
Por (i) e (ii) podemos concluir que $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Fonte: registros escritos do protocolo A_4: questão treze a) da P_1

Ao analisarmos os processos mentais, segundo Dreyfus (1991), envolvidos nesta forma de demonstração apontamos que:

Quadro 10 – processos mentais evidenciados no C_1 : questão treze a) P_1

PROCESSOS MENTAIS ENVOLVIDOS NA REPRESENTAÇÃO	
Visualizar	ocorreram esses processos devido aos registros escritos coerentes.
Reconhecer	
Intuir	não podemos afirmar.
Investigar	não podemos afirmar.
Traduzir	leitura e interpretação dos símbolos apresentados na proposição.
Descobrir	não podemos afirmar.
Conjecturar	não podemos afirmar.
Classificar	foi necessário provar suas sentenças para garantir a verdade da proposição.
Analisar	não obtivemos indícios de reflexão sobre a proposição.
Induzir	não podemos afirmar.
Reconhecer símbolos	traduziram a linguagem simbólica.
Manipular símbolos	utilizaram notação matemática corretamente.
Definir	expuseram claramente cada sentença da demonstração.
Flexibilizar	estabeleceram relação com a forma de demonstração e o conteúdo.
Compreender	há compreensão sobre as definições de interseção e união, pelo modo que são articuladas as sentenças.
Modelar	não podemos afirmar.

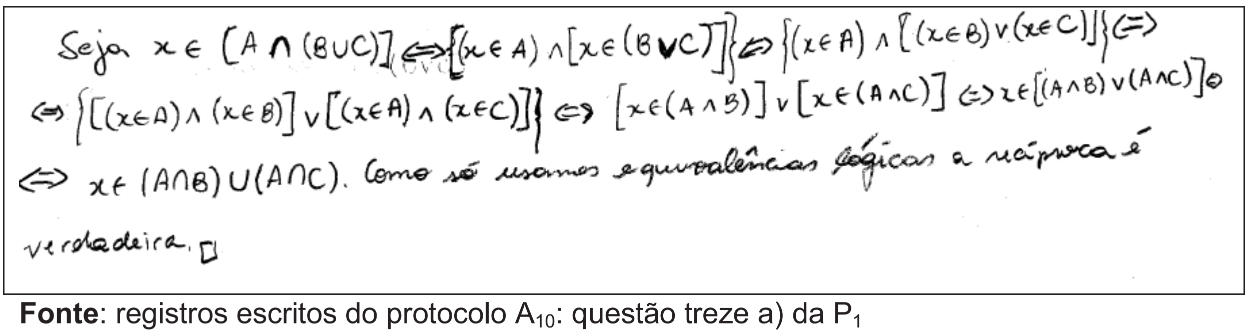
PROCESSOS MENTAIS ENVOLVIDOS NA ABSTRAÇÃO	
Sintetizar	compuseram uma sequência de afirmações coerentes.
Formalizar	encontramos um padrão em ambas as partes da demonstração.
Generalizar	não podemos afirmar.
Provar	argumentaram por meio de uma sequência lógica dedutiva.

Fonte: Autoria própria

Os processos mentais identificados corroboram para categorizarmos este grupo em um caso de *experimento de pensamento*, segundo Balacheff (1987), utilizam-se dos conceitos e definições para argumentarem.

No caso específico de A_{10}, categorizado no agrupamento C_2, o graduando demonstra a sentença por meio de conectivos lógicos, e utiliza equivalências para garantir a igualdade da proposição. Porém quando concluí a demonstração afirma “como só usamos[43] equivalências lógicas a recíproca é verdadeira”. Esta afirmação permitiu uma dupla interpretação, a primeira que a igualdade já esta garantida pelas equivalências não havendo mais o que provar, ou, a segunda que a utilizar equivalências lógicas é condição suficiente e a recíproca verdadeira é condição necessária, ou seja, “se usamos equivalências lógicas, a recíproca é verdadeira”. Deste modo evidencia que teria que se provar à recíproca, mas que esta seria de modo análogo. Entendemos que em uma demonstração não se pode afirmar sentenças ambíguas. Vejamos o protocolo a seguir;

Figura 7– protocolo A_{10}: questão treze a) da P_1


Seja $x \in [A \cap (B \cup C)] \Leftrightarrow \{(x \in A) \wedge [x \in (B \vee C)]\} \Leftrightarrow \{(x \in A) \wedge [(x \in B) \vee (x \in C)]\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{[(x \in A) \wedge (x \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (x \in C)]\} \Leftrightarrow [x \in (A \wedge B)] \vee [x \in (A \wedge C)] \Leftrightarrow x \in [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Como só usamos equivalências lógicas a recíproca é verdadeira. □

Fonte: registros escritos do protocolo A_{10}: questão treze a) da P_1

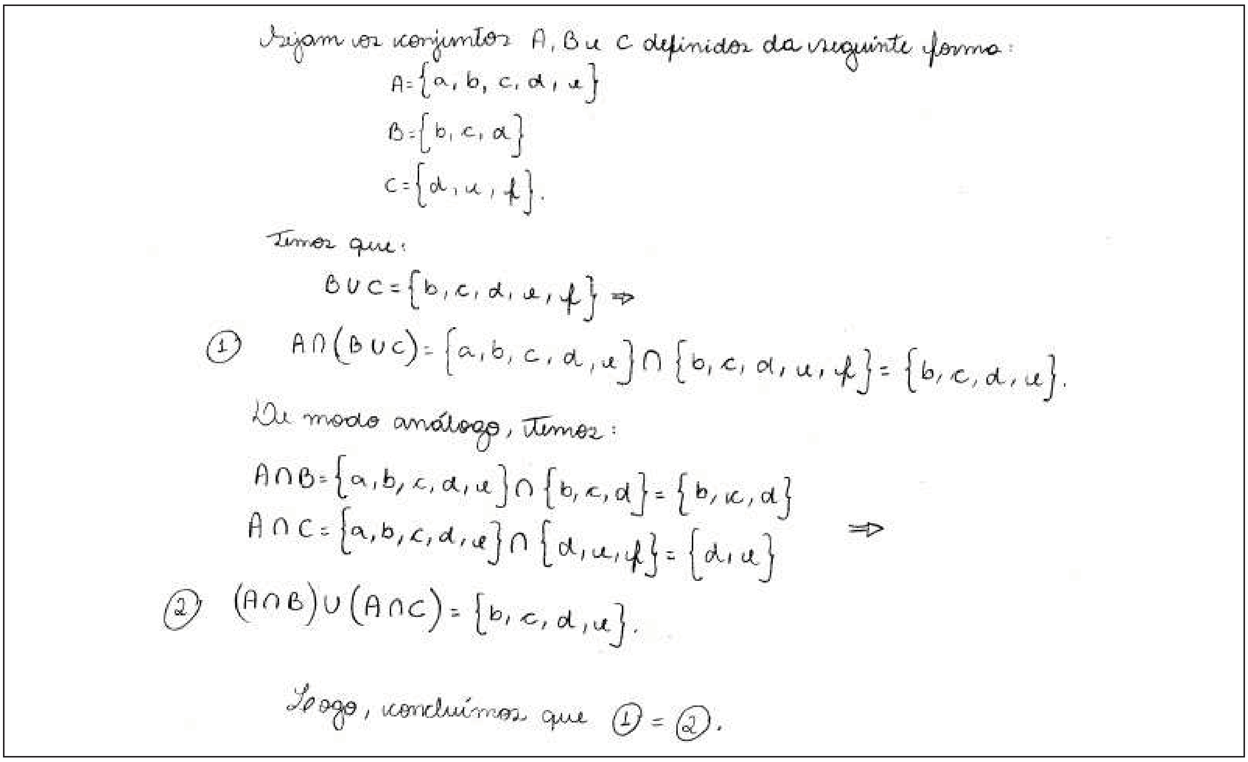
Entendemos que este graduando, desenvolveu os processos mentais[44] de *sintetização*, *formalização* e *generalização* de modo singular, pois a argumentação

[43] Grifo nosso.
[44] Segundo Dreyfus (1991).

por meio dos conectivos mostra que o estudante criou procedimentos padronizados de forma a compor as partes da demonstração. Segundo Hanna (2000) o estudante desenvolveu a sistematização para demonstrar, uma das habilidades necessárias para se demonstrar.

Analisaremos o agrupamento C_3. Obtivemos três formas de demonstrações diferentes para os graduandos, A_5, A_8 e A_9, utilizaram de exemplos particulares para demonstrar a proposição. A seguir temos dois protocolos que evidenciam esses casos;

Figura 8 – protocolo A_8: questão treze a) da P_1


Sejam os conjuntos A, B e C definidos da seguinte forma:

$A=\{a,b,c,d,e\}$

$B=\{b,c,d\}$

$C=\{d,e,f\}$.

Temos que:

$B\cup C=\{b,c,d,e,f\} \Rightarrow$

① $A\cap(B\cup C)=\{a,b,c,d,e\}\cap\{b,c,d,e,f\}=\{b,c,d,e\}$.

De modo análogo, temos:

$A\cap B=\{a,b,c,d,e\}\cap\{b,c,d\}=\{b,c,d\}$

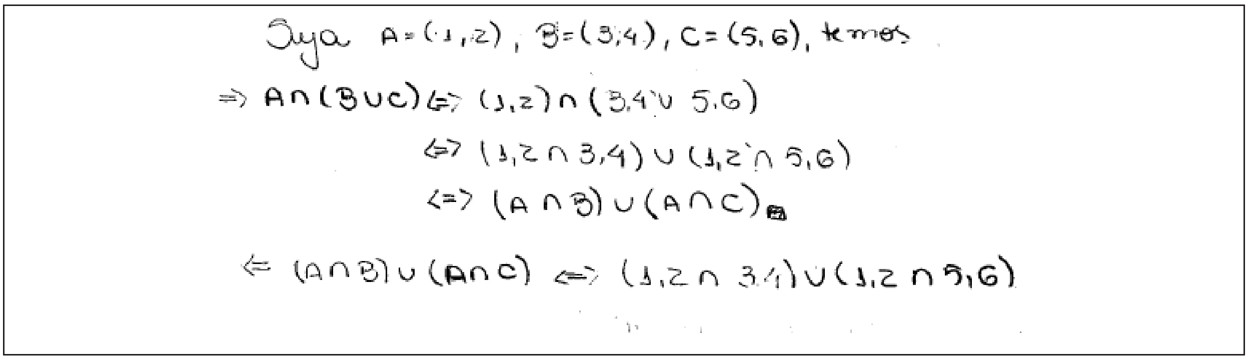
$A\cap C=\{a,b,c,d,e\}\cap\{d,e,f\}=\{d,e\}$ $\Rightarrow$

② $(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{b,c,d,e\}$.

Logo, concluímos que ① = ②.

Fonte: registros escritos do protocolo A_8: questão treze a) da P_1

Figura 9 – protocolo A_9: questão treze a) da P_1


Seja $A=(1,2)$, $B=(3,4)$, $C=(5,6)$, temos

$\Rightarrow A\cap(B\cup C) \Leftrightarrow (1,2)\cap(3,4\cup 5,6)$

$\Leftrightarrow (1,2\cap 3,4)\cup(1,2\cap 5,6)$

$\Leftrightarrow (A\cap B)\cup(A\cap C)$ ■

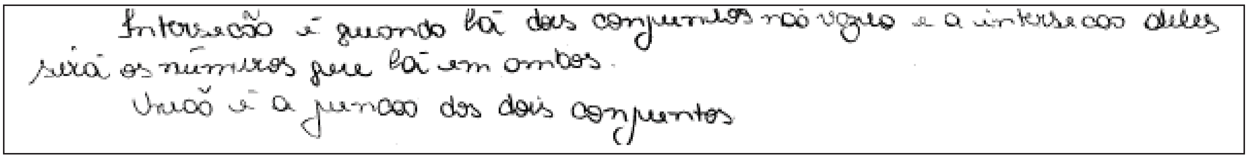
$\Leftarrow (A\cap B)\cup(A\cap C) \Leftrightarrow (1,2\cap 3,4)\cup(1,2\cap 5,6)$

Fonte: registros escritos do protocolo A_9: questão treze a) da P_1

O protocolo do graduando A_5 é similar ao do A_8, ambos apresentam um caso particular para demonstrar.

No caso específico de A_9, notamos que há dificuldade com a utilização do conectivo que indica as equivalências, uma vez que as sentenças expostas não são equivalentes, como também, das definições de união e interseção, porém o estudante definiu na questão nove da primeira proposta de tarefas de modo coerente, vejamos;

Figura 10 – protocolo A_9: questão nove da P_1


Interseção é quando há dois conjuntos não vazio e a interseção deles
será os números que há em ambos.
União é a junção dos dois conjuntos

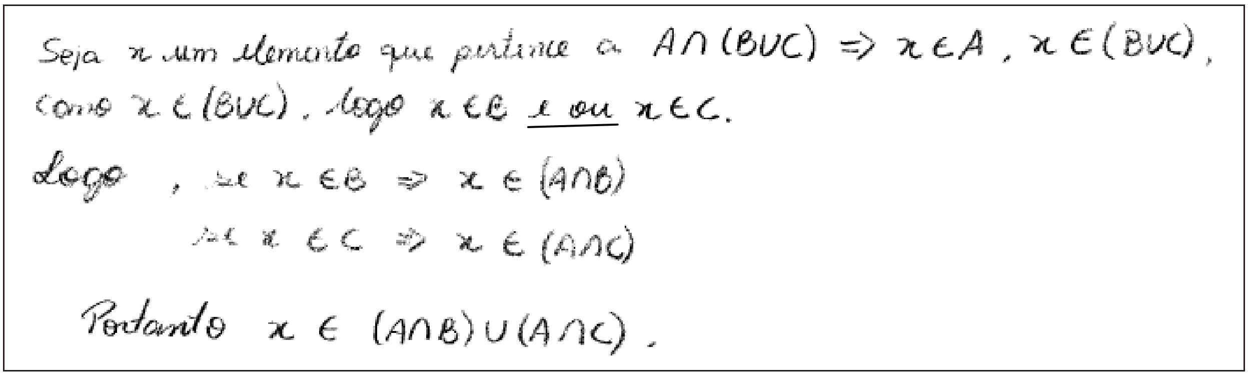
Fonte: registros escritos do protocolo A_9: questão nove da P_1

Segundo Dreyfus (1991), não ocorreram os processos mentais de *reconhecer* e *traduzir*, a falta desses processos comprometeu o desenvolvimento da demonstração e outros processos não foram desenvolvidos, como o de *sintetizar* e *provar*.

Segundo Balacheff (1987) temos três casos de *empirismo ingênuo*, em que o estudante acredita ter provado apenas apresentando um exemplo. Segundo Hanna (2000) não se cumpriu algumas das funções de se demonstrar, a de explorar o significado de uma definição e analisar as consequências de um pressuposto, pois esses graduandos recorreram a exemplos para provar a sentença.

No caso específico de A_{11} temos uma demonstração incompleta, segundo Dreyfus (1991), o estudante se restringiu a cumprir os “passos” da demonstração, sem analisar se havia garantido a validade da proposição, isso ocorre, segundo o autor, pela falta de autonomia e reflexão na resolução de problemas, ou seja, quando são trabalhadas apenas demonstrações de modo algorítmico. Vejamos o protocolo a seguir;

Figura 11 – protocolo A_{11}: questão treze a) da P_1



Seja x um elemento que pertence a $A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$, $x \in (B \cup C)$,
como $x \in (B \cup C)$. logo $x \in B$ e ou $x \in C$.
Logo, se $x \in B \Rightarrow x \in (A \cap B)$
se $x \in C \Rightarrow x \in (A \cap C)$
Portanto $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Fonte: registros escritos do protocolo A_{11}: questão treze a) da P_1

Notamos que o graduando possui dificuldade em lidar com os conectivos lógicos “e” e “ou” (observemos o grifo no protocolo[45]), como também utiliza o símbolo de implicação no corpo do texto, não realizando uma demonstração por conectivos ou por argumentação, e sim de forma mista e de modo confuso.

Neste caso a *tradução*[46] realizada pelo graduando comprometeu a forma de demonstração, além de que demonstrar a proposição, por não considerar que em uma igualdade temos que provar duas inclusões de conjuntos.

[45] Grifo nosso.
[46] Segundo Dreyfus (1991)

Quadro 11– dificuldades encontradas na questão treze a) da P_1

Dificuldade			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}
Desenvolvimento da forma de demonstração	Argumentação	Inválida					X			X	X				
		Incompleta											X		
	Estrutura da demonstração	Distinção entre hipótese e tese											X		
		Distinção entre definição e demonstração													
	Forma de demonstração	Utiliza exemplos					X								
		Forma inadequada											X		
Conhecimento do conteúdo	Conectivos										X		X		
	Condicional e bicondicional											X			
	União, interseção, complementar										X				
Escrita	Linguagem materna	Clareza										X	X		
		Coerência											X		
	Linguagem matemática										X		X		

Fonte: Autoria própria

13)b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

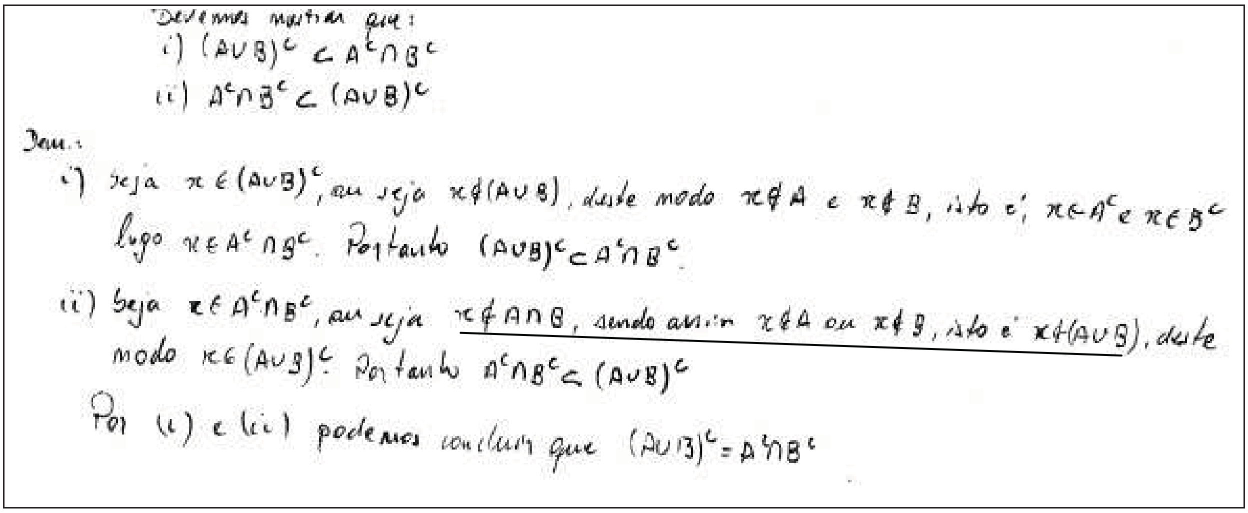
Quadro 12 – agrupamentos da questão treze b) P_1

Agrupamentos		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}
Coerente	C_1													
	C_2	X	X		X		X	X						X
	C_3					X				X	X			
Incoerente														
Em branco				X					X			X	X	
Justificada														

Fonte: Autoria própria

Nessa proposição tivemos dois agrupamentos do tipo coerente, analisaremos o C_2. Os seis graduandos optaram pela demonstração direta, considerando que para provar a sentença haviam duas inclusões a serem provadas. Nos casos de A_1, A_2, A_4, A_6 e A_7 a demonstração foi comprometida por não negarem corretamente os conectivos "e" e "ou", vejamos o protocolo a seguir;

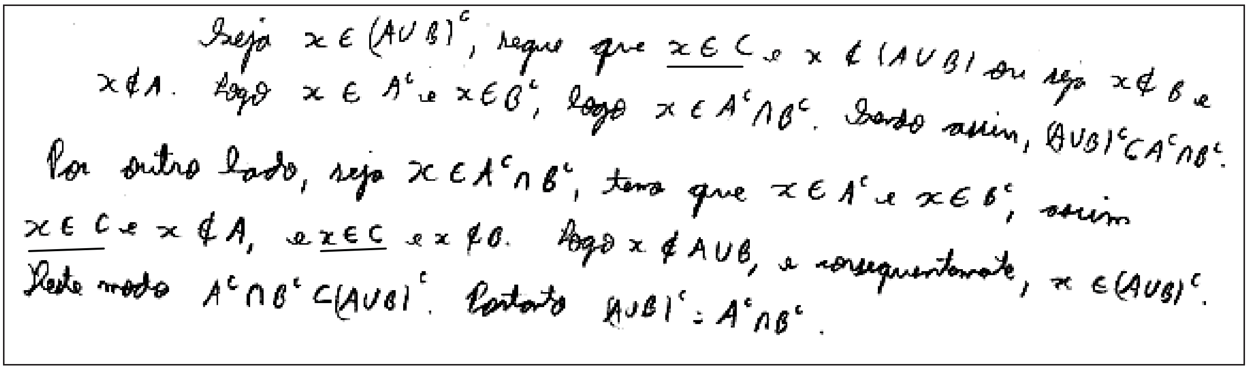
Figura 12 – protocolo de A_4 : questão treze b) da P_1


Devemos mostrar que:
i) $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$
ii) $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$
Dem.:
i) Seja $x \in (A \cup B)^c$, ou seja $x \notin (A \cup B)$, deste modo $x \notin A$ e $x \notin B$, isto é, $x \in A^c$ e $x \in B^c$ logo $x \in A^c \cap B^c$. Portanto $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$.
ii) Seja $x \in A^c \cap B^c$, ou seja $x \notin A \cap B$, sendo assim $x \notin A$ ou $x \notin B$, isto é $x \notin (A \cup B)$, deste modo $x \in (A \cup B)^c$. Portanto $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$
Por (i) e (ii) podemos concluir que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Fonte: registro escrito do protocolo de A_4: questão treze b) da P_1

O destaque no protocolo de A_4 [47] indica a afirmação falsa que compromete a sequência lógica dedutiva, há em todos os protocolos desse agrupamento alguma sentença falsa similar, de modo que o erro está relacionado com a negação de conectivos e com a *compreensão* de complementar. No caso específico de A_{13} observamos uma dificuldade notacional, o graduando se refere ao complementar utilizando a letra C, vejamos o destaque[48] no protocolo;

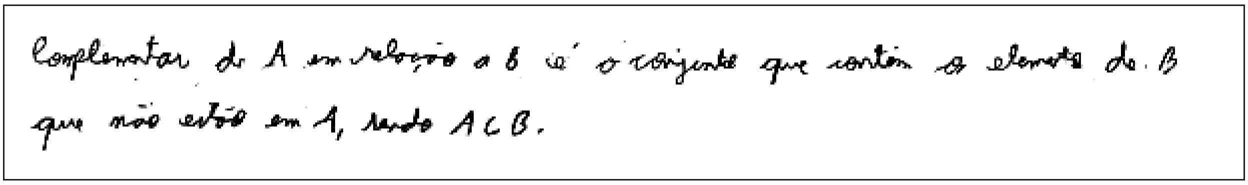
Figura 13 – protocolo de A_{13} : questão treze b) da P_1


Seja $x \in (A \cup B)^c$, segue que $x \in C$ e $x \notin (A \cup B)$ ou seja $x \notin B$ e $x \notin A$. Logo $x \in A^c$ e $x \in B^c$, logo $x \in A^c \cap B^c$. Sendo assim, $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$.
Por outro lado, seja $x \in A^c \cap B^c$, temos que $x \in A^c$ e $x \in B^c$, assim $x \in C$ e $x \notin A$, e $x \in C$ e $x \notin B$. Logo $x \notin A \cup B$, e consequentemente, $x \in (A \cup B)^c$. Deste modo $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$. Portanto $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Fonte: registro escrito do protocolo de A_{13}: questão treze b) da P_1

Ao abordar sobre complementar na questão dez da primeira proposta de tarefas, os A_4, A_6, A_{13} definiram coerentemente, vejamos um caso;

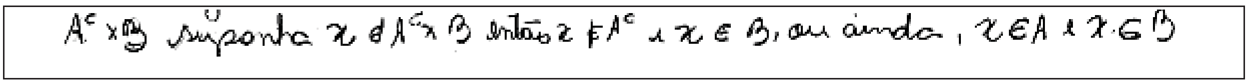
Figura 14 – protocolo de A_{13} : questão dez da P_1


Complementar de A em relação a B é o conjunto que contém os elementos de B que não estão em A, sendo $A \subset B$.

Fonte: registro escrito do protocolo de A_{13}: questão treze b) da P_1

Nos casos de A1, A2 e A7, as definições de complementar foram incoerentes, vejamos um exemplo;

Figura 15 – protocolo de A_1 : questão dez da P_1


$A^c \times B$ suponha $x \notin A^c \times B$ então $x \notin A^c$ e $x \in B$, ou ainda, $x \in A$ e $x \in B$

Fonte: registro escrito do protocolo de A_1: questão treze b) da P_1

[47] Grifo nosso.
[48] Grifo nosso.

Analisamos que os graduandos do agrupamento C_2, não apresentaram dificuldades quanto à forma de demonstração, mas com o conteúdo de conjuntos, mais especificamente em complementar e com a utilização de conectivos lógicos. Ao investigarmos sobre os processos mentais envolvidos nas demonstrações desse agrupamento temos;

Quadro 13 – processos mentais evidenciados no C_2 questão treze b) da P_1.

PROCESSOS MENTAIS ENVOLVIDOS NA REPRESENTAÇÃO	
Visualizar	apresentaram um registro que possui relação com a questão.
Reconhecer	reconheceram apenas a forma de demonstração e parcialmente o conteúdo.
Intuir	não podemos afirmar.
Investigar	não podemos afirmar.
Traduzir	leitura e interpretação dos símbolos apresentados na proposição, porém com erros em algumas sentenças.
Descobrir	não podemos afirmar.
Conjecturar	não podemos afirmar.
Classificar	não podemos afirmar.
Analisar	obtivemos indícios de reflexão a proposição.
Induzir	não podemos afirmar.
Reconhecer símbolos	traduziu a linguagem simbólica, porém há dificuldades conceituais.
Manipular símbolos	utilizou notação matemática inadequada, em alguns casos.
Definir	alguns casos desconhecem a definição de complementar.
Flexibilizar	há a articulação entre as sentenças de cada prova, porém em todas as demonstrações há ao menos uma afirmação falsa.
Compreender	compreenderam a forma de demonstrar, mas não o conteúdo.
Modelar	não podemos afirmar.
PROCESSOS MENTAIS ENVOLVIDOS NA ABSTRAÇÃO	
Sintetizar	estruturaram as partes das demonstrações.
Formalizar	criaram uma sequência de sentenças.
Generalizar	não podemos afirmar.
Provar	não argumentaram por meio de uma sequência lógica dedutiva.

Fonte: Autoria própria

Segundo Balacheff (1987) temos casos de *exemplos genéricos* no agrupamento C_2. Esses graduandos estão na transição entre as provas pragmáticas e as provas conceituais, pois não detectaram contradições na argumentação, porém preservaram a forma e a estrutura da demonstração. Segundo Ponte *et al.* (1997) uma das etapas de um prova matemática, consiste em uma análise consciente e rigorosa de sentenças afirmadas. Sobre o mesmo assunto, Hanna (2000) afirma que uma das funções da prova é o convencimento do autor da demonstração de que a sentença é verdadeira, percebemos nos registros escritos desse grupo que não houve a análise consciente e rigorosa, porém todos estavam convencidos que demonstraram corretamente. Dreyfus (1991) atribui a esse comportamento, uma demonstração que segue uma receita, ou seja, de modo algoritmo, confirmamos isso nos casos que desconhecem a definição de complementar, mas conhecem a forma de demonstração adequada para a proposição.

Analisaremos o agrupamento C_3 . Temos dois protocolos similares, o de A_5 e A_9, em ambos há evidencias de mostrações, segundo Balacheff (1987), em que utilizam exemplos particulares para demonstrar. Nesses casos existem argumentações contraditórias e não utilizam uma forma de demonstração adequada. Segundo o mesmo autor, quando o estudante realiza uma mostração está convencido de que provou uma proposição e essa ação caracteriza o *empirismo ingênuo*. Vejamos um exemplo;

Figura 16 – protocolo de A_9: questão treze b) da P_1

Seja $A=(a,b), B=(c,d), C=(e,f)$

$\Rightarrow (A\cup B)^c \Leftrightarrow (a,b \cup c,d)^{(e,f)}$

$\Leftrightarrow (a,b)^{(e,f)} \cap (c,d)^{(e,f)}$

$\Leftrightarrow A^c \cap B^c$ ■

$\Leftarrow A^c \cap B^c \Leftrightarrow (a,b)^{(e,f)} \cap (c,d)^{(e,f)}$

$\Leftrightarrow (a,b \cup c,d)^{(e,f)}$

$\Leftrightarrow (A\cup B)^c$ ■

Fonte: registro escrito do protocolo de A_9: questão treze b) da P_1

Nesses dois casos, há dificuldade com o conteúdo, pois os graduandos na questão dez não definiram complementar e utilizaram notação similar para responder a questão. Há também dificuldade notacional, o modo como é representado o conjunto complementar difere da notação convencional para conjuntos. Segundo Dreyfus (1991) não ocorre à *tradução* e a *representação* comprometendo a *compreensão* sobre complementar. Sem que ocorram esses processos elementares, não há o processo mental de *abstração*, que tende a ser complexo.

Dreyfus (1991) aponta que a dificuldade notacional ou a manipulação simbólica, ou ambos, priva processos mentais de modo que o indivíduo não compreenda a estrutura matemática. Nos casos do agrupamento C_3 detectamos tais dificuldades nos casos de A_5 e A_9.

No caso de A_{10}, temos a escolha da forma de demonstração inadequada, o estudante utilizou uma argumentação contraditória, mas há indícios de que seja uma tentativa de se demonstrar por redução por absurdo, observemos a indicação no protocolo[49];

Figura 17 – protocolo de A_{10}: questão treze b) da P_1

Seja $x \in (A \cup B)^c$, então $x \in (A \vee B)^c \Leftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)]^c \Leftrightarrow x \notin [(x \in A) \vee (x \in B)]$ o que é uma contradição logo $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. D

Fonte: registro escrito do protocolo de A_{10}: questão treze b) da P_1

Não há a construção de uma sequência lógica dedutiva, assim a conclusão é inválida, deste modo o graduando não demonstrou a proposição. Segundo Balacheff (1987), temos um caso de experimento crucial, pois o graduando afirma a validade da proposição após algumas verificações. Na definição de complementar apresentado na questão dez o estudante utiliza diagramas para exemplificar o que entende. Entendemos que o graduando possui uma noção sobre o conteúdo, mas ainda não promoveu a *investigação* e *conjecturou* ideias sobre o mesmo, sem esses processos mentais há o comprometimento da *abstração* no processo de prova.

[49] Grifos nossos.

Quadro 14 – dificuldades encontradas na questão treze b) da P_1

Dificuldade			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}
Desenvolvimento da forma de demonstração	Argumentação	Inválida	X	X		X		X	X			X			X
		Incompleta													
	Estrutura da demonstração	Distinção entre hipótese e tese													
		Distinção entre definição e demonstração													
	Forma de demonstração	Utiliza exemplos					X				X				
		Forma inadequada										X			
Conhecimento do conteúdo	Conectivos		X	X		X		X	X						X
	Condicional e bicondicional														
	União, interseção, complementar		X	X		X	X	X	X		X	X			X
Escrita	Linguagem materna	Clareza													
		Coerência													
	Linguagem matemática						X				X				X

Fonte: Autoria própria

13) c) $A \subset B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

Quadro 15 – agrupamentos da questão treze c) P_1

Agrupamentos		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}
Coerente	C_1						X		X				X	
	C_2													
	C_3	X	X		X	X				X	X	X		X
Incoerente														
Em branco				X				X						
Justificada														

Fonte: Autoria própria

Nesta proposição temos dois tipos de agrupamentos. Analisaremos o C_1. As demonstrações desse grupo são similares, todos utilizaram a forma direta, provando ambas condicionais para garantir a equivalência. Não apresentaram erros de conteúdo e articularam as sentenças construindo uma sequência lógica dedutiva válida. Acerca do exposto, segundo Balacheff (1987) temos casos de *experimento de pensamento*, caracterizando uma prova conceitual da proposição. Vejamos um exemplo;

Figura 18 – protocolo A_8: questão treze c) da P_1

($\Rightarrow$) $\forall a \in A$, temos $a \in B$, pois $A \subset B$. Logo, $A \cap B = A$. Desse modo, não existe elemento em A que não esteja em B, ou seja, $A - B = \phi$.

($\Leftarrow$) como $A - B = \phi$, temos que $\nexists\, a \in A$, tal que $a \notin B$. Logo, $A \subset B$.

Fonte: registro escrito do protocolo A_8: questão treze c) da P_1

Quanto aos processos mentais envolvidos nas demonstrações temos que;

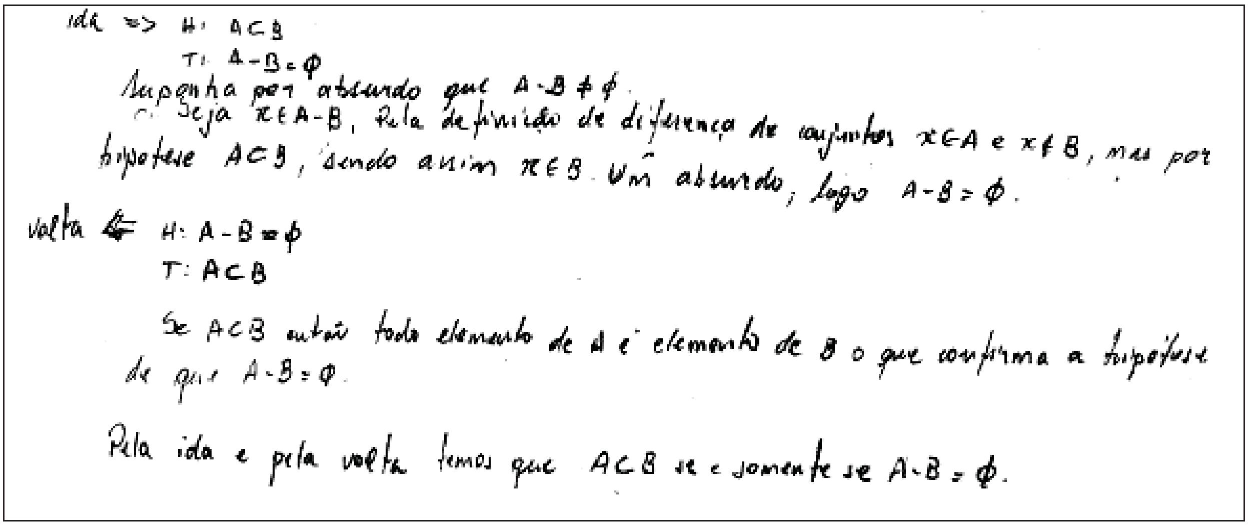
Quadro 16 – processos mentais evidenciados no C_1 questão treze c) da P_1

PROCESSOS MENTAIS ENVOLVIDOS NA REPRESENTAÇÃO	
Visualizar	apresentaram um registro que possui relação com a questão.
Reconhecer	reconheceram apenas a forma de demonstração e o conteúdo.
Intuir	intuíram ao recorrer à definição de interseção.
Investigar	investigaram relações existentes entre as implicações.
Traduzir	leitura e interpretação dos símbolos apresentados na proposição.
Descobrir	não podemos afirmar.
Conjecturar	não podemos afirmar.
Classificar	não podemos afirmar.
Analisar	obtivemos indícios de reflexão a proposição.
Induzir	não podemos afirmar.
Reconhecer símbolos	traduziram a linguagem simbólica.
Manipular símbolos	utilizaram notação matemática adequada.
Definir	expuseram de modo claro as sentenças.
Flexibilizar	há a articulação entre as sentenças de cada prova.
Compreender	compreenderam a forma de demonstração e o conteúdo.
Modelar	não podemos afirmar.
PROCESSOS MENTAIS ENVOLVIDOS NA ABSTRAÇÃO	
Sintetizar	estruturaram as partes das demonstrações.
Formalizar	criaram uma sequência de sentenças.
Generalizar	não podemos afirmar.
Provar	argumentaram por meio de uma sequência lógica dedutiva.

Fonte: Autoria própria

Quanto ao agrupamento C_3, temos divergências nas demonstrações. Nos casos de A_1, A_2, A_4 e A_{13}, obtivemos demonstrações que provavam duas vezes a mesma implicação, por exemplo, uma pela forma direta e outra por redução ao absurdo. Nesses casos, ambas as provas estavam corretas, indicando que não há dificuldade quanto à forma de demonstração, porém para se provar a proposição são necessárias demonstrar duas implicações, faltou à *análise* para distinguir qual das implicações foi provada. Entendemos que não *generalizaram* a utilização das formas de demonstração, compreendem sua utilização em algumas provas. Vejamos um protocolo a título de exemplo.

Figura 19 – protocolo A_4: questão treze c) da P_1



ida $\Rightarrow$ H: $A \subset B$

T: $A - B = \phi$

Suponha por absurdo que $A - B \neq \phi$.

Seja $x \in A - B$, Pela definição de diferença de conjuntos $x \in A$ e $x \notin B$, mas por hipótese $A \subset B$, sendo assim $x \in B$. Um absurdo, logo $A - B = \phi$.

volta $\Leftarrow$ H: $A - B = \phi$

T: $A \subset B$

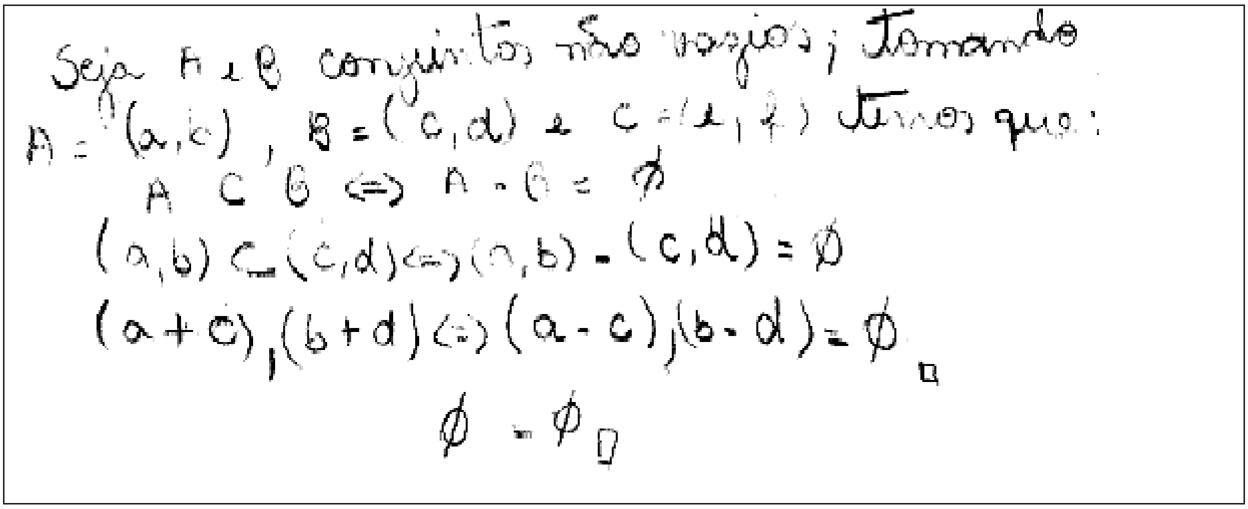
Se $A \subset B$ então todo elemento de A é elemento de B o que confirma a hipótese de que $A - B = \phi$.

Pela ida e pela volta temos que $A \subset B$ se e somente se $A - B = \phi$.

Fonte: registro escrito do protocolo A_4: questão treze c) da P_1

Nos casos de A_5 e A_9, temos mostrações. Vejamos os protocolos;

Figura 20 – protocolo A_5: questão treze c) da P_1



Seja A e B conjuntos não vazios; Tomando

$A = (a,b)$, $B = (c,d)$ e $C = (e,f)$ temos que:

$A \subset B \Leftrightarrow A - B = \phi$

$(a,b) \subset (c,d) \Leftrightarrow (a,b) - (c,d) = \phi$

$(a+c),(b+d) \Leftrightarrow (a-c),(b-d) = \phi$ $\square$

$\phi = \phi$ $\square$

Fonte: registro escrito do protocolo A_5: questão treze c) da P_1

Figura 21 – protocolo A_9: questão treze c) da P_1

Seja $A = (a, b)$ e $B = (a, b, c, d)$

$\Rightarrow A \subset B \Leftrightarrow A - B$

$\Leftrightarrow (a,b) - (a,b,c,d)$

$\Leftrightarrow \phi$ ∎

Fonte: registro escrito do protocolo A_9: questão treze c) da P_1

Em cada um dos exemplos apresentados tem-se uma resolução para a proposição de modo singular. Em ambos os casos, utilizam erroneamente equivalências, e as sentenças não se articulam, além de não terem fundamentos matemáticos que justifiquem tais afirmações, são razões que justificam casos de *empirismos ingênuos*, segundo Balacheff (1987). Entendemos também que os processos de *visualização* e *reconhecimento* diferem da resolução esperada para a proposição, comprometendo o processo de prova.

Nos casos de A_{10} e A_{11}, temos demonstrações incompletas, e a argumentação inválida, comprometendo a forma de demonstração e no caso de A_{10} há uma contradição lógica, vejamos o destaque[50] no protocolo;

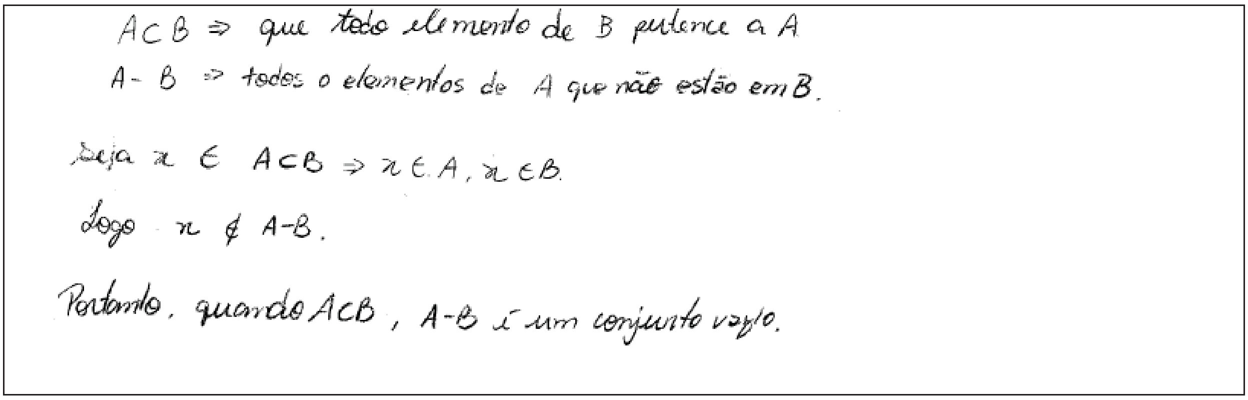
Figura 22 – protocolo de A_{10}: questão treze c) da P_1

Seja $x \in (A - B) \Leftrightarrow (x \in B) \wedge (x \notin B)$, porém $(A \subset B)$ o que significa que todos os elementos de A também são elementos de B. Logo se $(x \in A) \wedge (x \notin B)$ chegamos a uma contradição logo $A \subset B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

Fonte: registro escrito do protocolo A_{10}: questão treze c) da P_1

[50] Grifos nossos.

Figura 23 – protocolo A_{11}: questão treze c) da P_1


$A \subset B \Rightarrow$ que todo elemento de B pertence a A
$A - B \Rightarrow$ todos o elementos de A que não estão em B.
Seja $x \in A \subset B \Rightarrow x \in A, x \in B$.
Logo $x \notin A-B$.
Portanto, quando $A \subset B$, $A-B$ é um conjunto vazio.

Fonte: registro escrito do protocolo A_{11}: questão treze c) da P_1

Consideramos esses casos como *experimentos cruciais*, categorizados segundo Balacheff (1987). Vejamos a seguir as dificuldades evidenciadas nesta proposição;

Quadro 17 – dificuldades encontradas na questão treze c) da P_1

Dificuldade			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}
Desenvolvimento da forma de demonstração	Argumentação	Inválida					X				X				
		Incompleta	X	X		X						X	X		X
	Estrutura da demonstração	Distinção entre hipótese e tese	X	X		X									X
		Distinção entre definição e demonstração													
	Forma de demonstração	Utiliza exemplos					X				X				
		Forma inadequada										X			
Conhecimento do conteúdo	Conectivos											X			
	Condicional e bicondicional		X	X		X	X				X	X	X		X
	União, interseção, complementar														
Escrita	Linguagem materna	Clareza										X			
		Coerência										X			
	Linguagem matemática						X				X				

Fonte: Autoria própria

Prosseguiremos com a análise da segunda proposta de tarefas (P_2), conforme fizemos na primeira proposta, com a explicitação das dificuldades encontradas nos registros escritos dos estudantes para cada questão.

1) Seja f: X→Y uma aplicação e $A \subseteq X$ e $B \subseteq X$. Considerando que as demonstrações matemáticas podem ser realizadas valendo-se das formas direta, contrapositiva ou redução ao absurdo, demonstre, se for possível, as seguintes proposições:

a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Quadro 18 – agrupamentos da questão um a) da P_2

Agrupamentos		A_1	A_2	A_4	A_7	A_8	A_{10}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}
Coerente	C_1										
	C_2										
	C_3										
Incoerente		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Em branco											
Justificada											

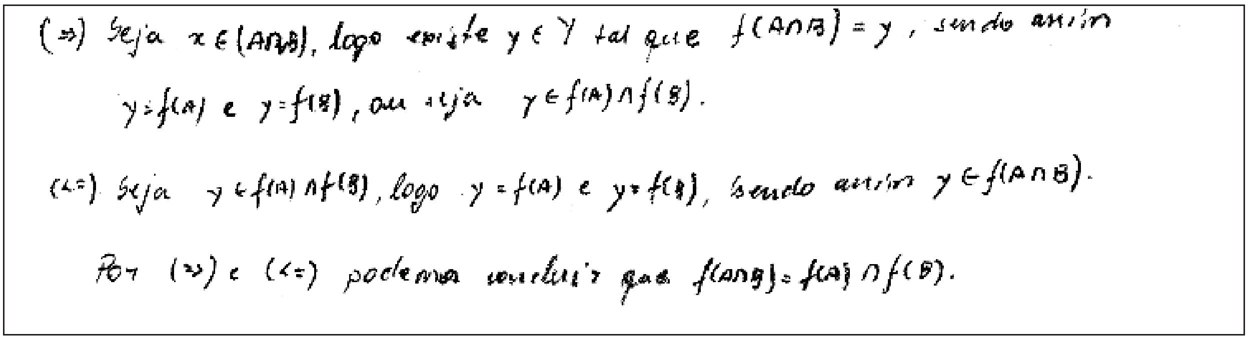
Fonte: Autoria própria

Todos os graduandos não identificaram que a proposição é falsa, bastaria apresentar um contraexemplo. O item b) apesar de similar é uma sentença verdadeira. Entendemos que os graduandos foram induzidos pela demonstração desse item, pois as demonstrações de todos os sujeitos nos dois itens são similares. Segundo Resnick (1987), essa questão exige do estudante julgamento dos sujeitos para perceber as nuances envolvida no processo de prova. Segundo Dreyfus (1987) caberia aos estudantes reflexões sobre as experiências matemáticas acerca das demonstrações apresentadas e assim argumentar coerentemente.

Outra hipótese para justificar os erros é que tenhamos induzido a resolução, poderíamos ter indicado no enunciado a possibilidade de demonstrar por contraexemplo.

A seguir temos o protocolo de A_4, que exemplifica uma demonstração incoerente.

Figura 24 – protocolo A_4: questão um da P_2


(⇒) Seja $x \in (A \cap B)$, logo existe $y \in Y$ tal que $f(A \cap B) = y$, sendo assim $y = f(A)$ e $y = f(B)$, ou seja $y \in f(A) \cap f(B)$.

(⇐) Seja $y \in f(A) \cap f(B)$, logo $y = f(A)$ e $y = f(B)$, sendo assim $y \in f(A \cap B)$.

Por (⇒) e (⇐) podemos concluir que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Fonte: registros escritos do protocolo A_4: questão um da P_2

b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

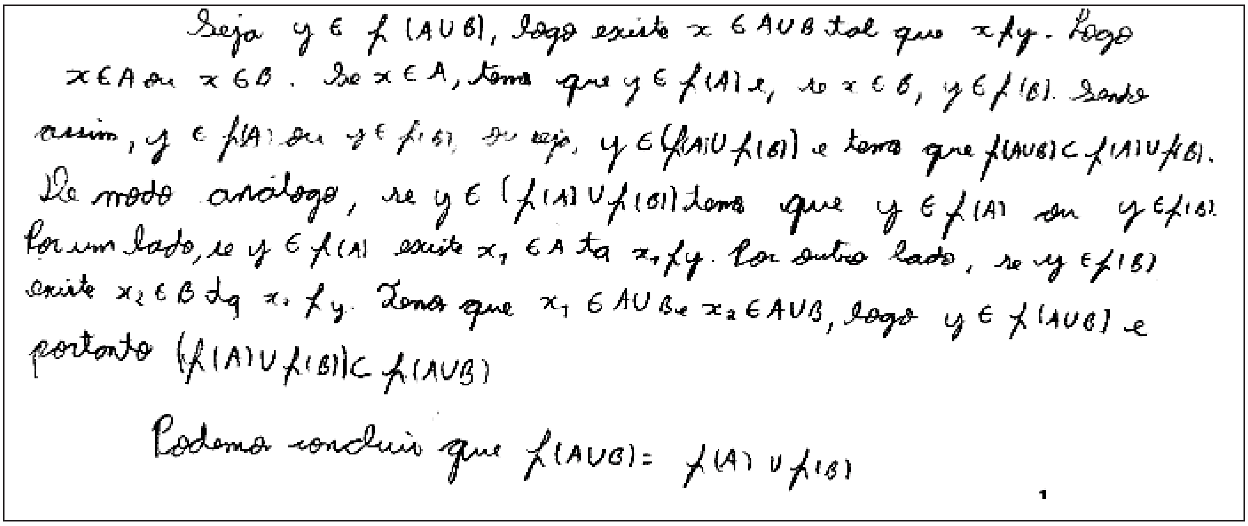
Quadro 19 – agrupamentos da questão um b) da P_2

Agrupamentos		A_1	A_2	A_4	A_7	A_8	A_{10}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}
Coerente	C_1	X	X			X		X		X	
	C_2										
	C_3			X	X		X		X		X
Incoerente											
Em branco											
Justificada											

Fonte: Autoria própria

Nesta proposição tivemos dois agrupamentos. Analisaremos o grupo C_1. Todos os estudantes provaram as duas inclusões pela forma direta, argumentaram por meio de uma sequência lógica dedutiva e provaram a proposição. Neste aspecto para Balacheff (1987), tivemos casos de *experimento de pensamento*, ou seja, ocorreram provas conceituais. Vejamos o protocolo a seguir;

Figura 25 – protocolo A_{13}: questão um b) da P_2


Seja $y \in f(A \cup B)$, logo existe $x \in A \cup B$ tal que $x f y$. Logo $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in A$, temos que $y \in f(A)$ e, se $x \in B$, $y \in f(B)$. Sendo assim, $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$, ou seja, $y \in (f(A) \cup f(B))$ e temos que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
De modo análogo, se $y \in (f(A) \cup f(B))$ temos que $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$. Por um lado, se $y \in f(A)$ existe $x_1 \in A$ tq $x_1 f y$. Por outro lado, se $y \in f(B)$ existe $x_2 \in B$ tq $x_2 f y$. Temos que $x_1 \in A \cup B$ e $x_2 \in A \cup B$, logo $y \in f(A \cup B)$ e portanto $(f(A) \cup f(B)) \subset f(A \cup B)$

Podemos concluir que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Fonte: registro escrito do protocolo A_{13}: questão 1b) da P_2

Recorremos a Dreyfus (1991) para analisar os processos mentais envolvidos nas demonstrações desse agrupamento.

Quadro 20 – processos mentais evidenciados no C_1 questão um b) da P_2

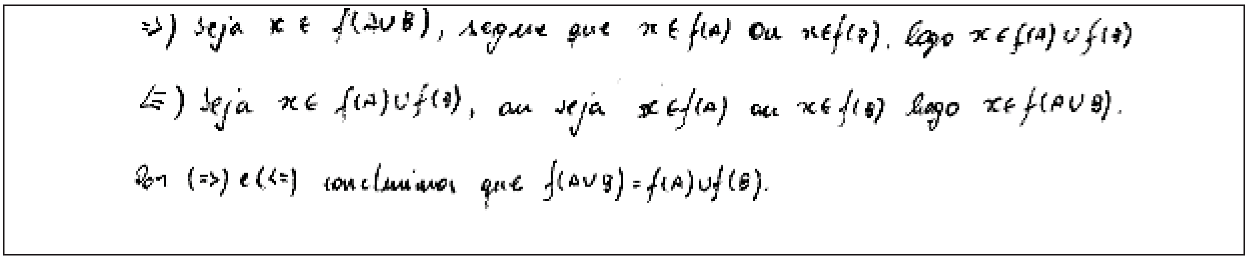
PROCESSOS MENTAIS ENVOLVIDOS NA REPRESENTAÇÃO	
Visualizar	apresentaram um registro que possui relação com a questão.
Reconhecer	aplicaram uma forma de demonstração e reconheceram o conteúdo.
Intuir	não podemos afirmar.
Investigar	não podemos afirmar.
Traduzir	leitura e interpretação dos símbolos apresentados na proposição.
Descobrir	não podemos afirmar.
Conjecturar	não podemos afirmar.
Classificar	apresentaram as duas inclusões a serem provadas.
Analisar	obtivemos indícios de reflexão sobre a proposição.
Induzir	não podemos afirmar.
Reconhecer símbolos	traduziram a linguagem simbólica.
Manipular símbolos	utilizaram notação matemática corretamente.
Definir	expuseram as definições sobre aplicações de funções durante as demonstrações.
Flexibilizar	estabeleceram relação com a forma de demonstração e o conteúdo.
Compreender	compreenderam a estrutura da forma de demonstração.
Modelar	não podemos afirmar.

PROCESSOS MENTAIS ENVOLVIDOS NA ABSTRAÇÃO	
Sintetizar	constituíram as sentenças para argumentação.
Formalizar	criaram afirmações válidas para a prova.
Generalizar	não podemos afirmar.
Provar	argumentaram por meio de uma sequência lógica dedutiva.

Fonte: Autoria própria

Quanto ao agrupamento C_3, temos os casos de A_4 e A_7 que demonstraram de modo incompleto, ou seja, não provaram as duas inclusões. Nota-se que os estudantes demonstram ambas as proposições da questão número um de forma algorítmica, sem refletir na argumentação e nos conceitos utilizados. Observemos a seguir o protocolo de A_4.

Figura 26 – protocolo A_4: questão um b) da P_2


$\Rightarrow$) seja $x \in f(A \cup B)$, segue que $x \in f(A)$ ou $x \in f(B)$. logo $x \in f(A) \cup f(B)$

$\Leftarrow$) seja $x \in f(A) \cup f(B)$, ou seja $x \in f(A)$ ou $x \in f(B)$ logo $x \in f(A \cup B)$.

Por ($\Rightarrow$) e ($\Leftarrow$) concluimos que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Fonte: registro escrito do protocolo A_4: questão 1b) da P_2

Segundo Balacheff (1987) temos casos de *experimento crucial*, pois realizaram apenas algumas verificações para afirmar a validade da proposição. Mariotti e Balacheff (2008) afirmam que para demonstrar uma proposição é preciso ter uma noção sobre o objeto matemático, estabelecer relações com axiomas ou proposições anteriormente provadas e, caso seja um objeto desconhecido, promover a investigação sobre o mesmo. Nestes casos observamos que os graduandos possuem noções sobre o conteúdo e conhecem as sentenças a serem demonstradas, mas não estabelecem relações com as definições e axiomas sobre o conteúdo.

Nos casos de A_{10}, A_{14} e A_{16}, temos exemplos de mostrações, caracterizados por Balacheff como *empirismo ingênuo*. Vejamos o registro escrito de A_{14};

Figura 27 – protocolo de A_{14}: questão um b) da P_2

Demonstração: Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.
Então, se $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
Temos, $f(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Fonte: registro escrito do protocolo A_{14}: questão um b) da P_2

Segundo Dreyfus (1991) estes estudantes não construíram o conceito matemático envolvido na demonstração. Supomos que a esses foram apresentadas demonstrações formais, com procedimentos padronizados. Logo não desenvolveram os processos mentais de conjecturar ideias, sistematizar, sintetizar e abstrair os conceitos matemáticos.

No específico de A_{10}, detectamos dificuldades com a linguagem matemática, e na utilização de equivalências lógicas, pois não relacionou a notação de conjuntos com a de aplicação em conjuntos, vejamos o registro escrito;

Figura 28– protocolo de A_{10}: questão um b) da P_2

Seja $y \in (A \cup B) \Leftrightarrow [(y \in A) \vee (y \in B)] \Leftrightarrow (y \in A) \cup (y \in B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(A) \cup f(B)$ $\square$

Fonte: registro escrito do protocolo A_{10}: questão um b) da P_2

Sintetizamos no quadro a seguir as dificuldades detectadas nas demonstrações dessa proposição.

Quadro 21 – dificuldades encontradas na questão um b) da P_2

Dificuldade			A_1	A_2	A_4	A_7	A_8	A_{10}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}
Desenvolvimento da forma de demonstração	Argumentação	Inválida						X		X		X
		Incompleta			X	X						
	Estrutura da demonstração	Distinção entre hipótese e tese										
		Distinção entre definição e demonstração										
	Forma de demonstração	Utiliza exemplos						X		X		X
		Forma inadequada										
Conhecimento do conteúdo	Conectivos											
	Condicional e bicondicional							X				
	União, interseção, complementar							X		X		X
Escrita	Linguagem materna	Clareza										
		Coerência										
	Linguagem matemática							X				

Fonte: Autoria própria

2) Seja f: X→Y uma aplicação e $U \subseteq X$ e $V \subseteq X$. Demonstre que: se U⊂V então $f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$.

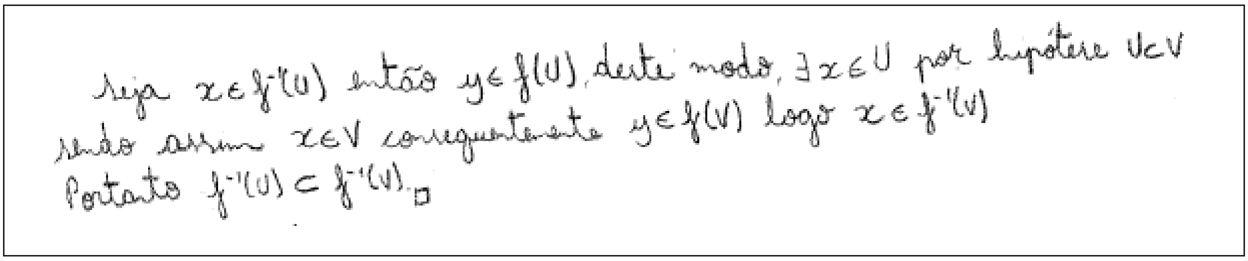
Quadro 22 – agrupamentos da questão dois a) da P $_2$

Agrupamentos		A_1	A_2	A_4	A_7	A_8	A_{10}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}
Coerente	C_1	X	X		X						
	C_2					X				X	
	C_3			X					X		
Incoerente								X			
Em branco											
Justificada							X				X

Fonte: Autoria própria

Analisaremos o grupo C_1. A forma de demonstração escolhida por esse agrupamento foi à direta, as três demonstrações são similares, mas o A_7 utiliza na escrita a notação matemática de par ordenado. Nos registros escritos há evidências de *compreensão* sobre imagens inversas, isso devido a sequência lógica dedutiva apresentadas pelos graduandos. Vejamos um protocolo;

Figura 29– protocolo de A $_2$: questão dois da P_2


seja $x \in f^{-1}(U)$ então $y \in f(U)$, deste modo, $\exists x \in U$ por hipótese $U \subset V$ sendo assim $x \in V$ consequentemente $y \in f(V)$ logo $x \in f^{-1}(V)$
Portanto $f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$. □

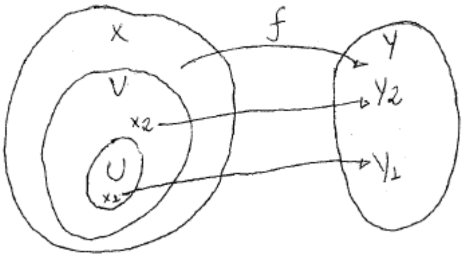
Fonte: registro escrito do protocolo A_2: questão dois da P_2

Segundo Balacheff (1987) temos casos de experimento de pensamento, e segundo Dreyfus (1991) os sujeitos, *visualizaram, reconheceram, traduziram* a fim de *sintetizar, formalizar* e finalmente provarem a proposição.

No agrupamento C_2, tivemos casos de sujeitos que não distinguem demonstração de definição. Vejamos a seguir um protocolo desse grupo;

Figura 30– protocolo de A_8: questão dois da P_2

Seja $x_1, x_2 \in X$, de modo que $x_1 \in U$ e $x_2 \in V$. Seja também $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2) \in Y$. De outra maneira, temos que x_1 é levado à y_1 pela aplicação f. Mesma coisa para x_2. Analisando a aplicação inversa, teremos uma aplicação $f^{-1}: Y \to X$, onde $x_1 = f^{-1}(y_1)$ e $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Como



já dito, $x_1 \in U$ e $x_2 \in V$. Desse modo, $f^{-1}(y_1) \in U$ e $f^{-1}(y_2) \in V$. Concluindo, $f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$.

Fonte: registro escrito do protocolo A_8: questão dois da P_2

Notamos que o estudante *compreende* o conteúdo, mas a argumentação utilizada não prova a sentença, apenas há explicação da proposição por meio de definições do objeto matemático. Segundo Balacheff (1987) temos casos de experimento crucial, em que são apresentados exemplos de um modo não familiar.

No agrupamento C3 temos casos de *empirismos ingênuos*, em que os graduandos apresentam exemplos particulares, sem argumentar do modo esperado, segundo Balacheff (1987) esses são casos típicos de mostrações, vejamos um registro escrito;

Figura 31– protocolo de A_{15}: questão dois da P_2

Temos as seguintes equações $U = 2x^2+1$ e $V = 2x^2$.

Logo, $f^{-1}(U) = 2y^2+1$ e $f^{-1}(V) = 2y^2$.

Então se $U \subset V$, logo $f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$.

Fonte: registro escrito do protocolo A_{15}: questão dois da P_2

Segundo Dreyfus (1991), quando não se estabelece conexões entre conceitos matemáticos não é possível sintetizar e formalizar representações de um mesmo conceito, no caso de A_{15}, notamos que o estudante desconhece as formas de demonstrações, precisa estabelecer relações a respeito do objeto matemático para argumentar coerentemente. Vejamos que dificuldades foram evidenciadas nesta questão;

Quadro 23 – dificuldades encontradas na questão dois da P_2

Dificuldade			A_1	A_2	A_4	A_7	A_8	A_{10}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}
Desenvolvimento da forma de demonstração	Argumentação	Inválida			X		X			X	X	
		Incompleta										
	Estrutura da demonstração	Distinção entre hipótese e tese			X							
		Distinção entre definição e demonstração					X				X	
	Forma de demonstração	Utiliza exemplos								X		
		Forma inadequada					X				X	
Conhecimento do conteúdo	Conectivos											
	Condicional e bicondicional											
	União, interseção, complementar											
Escrita	Linguagem materna	Clareza										
		Coerência										
	Linguagem matemática											

Fonte: Autoria própria

3) Considere o seguinte teorema: "*Um conjunto é infinito, se e somente se, está em correspondência biunívoca com um subconjunto próprio*". Demonstre que o Conjunto dos Números Naturais é infinito.

Quadro 24 – agrupamentos da questão três da P $_2$

Agrupamentos		A_1	A_2	A_4	A_7	A_8	A_{10}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}
Coerente	C_1										
	C_2										
	C_3										
Incoerente			X	X		X		X		X	
Em branco											
Justificada		X			X		X		X		X

Fonte: Autoria própria

Nesta proposição não obtivemos demonstrações *coerentes*, nas justificativas apresentadas há o questionamento sobre o que seria biunívoca, além de informarem desconheceram o teorema. Segundo Dreyfus (1991), mesmos graduandos com bons desempenhos em avaliações de rendimentos, podem não conseguir lidar com problemas desconhecidos. Ao selecionar tal proposição tínhamos a intenção de analisar se os sujeitos de pesquisas conseguem resolver um problema não trivial, uma vez que teriam que gerenciar a complexidade da sentença. Segundo o mesmo autor a diferença entre o pensamento elementar e o pensamento matemático avançado está em lidar com problemas complexos. Considerando o analisado anteriormente, entendemos que os sujeitos de pesquisas estão em um estágio de transição entre as provas pragmáticas e as provas conceituais, segundo Balacheff (1987), sendo assim não estavam aptos a gerenciarem a complexidade dessa proposição no momento da aplicação da proposta.

4) Seja f: X→ Y uma aplicação. Demonstre que: f é injetiva se, e somente se, quaisquer que sejam A, B ⊂ X, f(A⋂B) = f(A) ⋂ f(B).

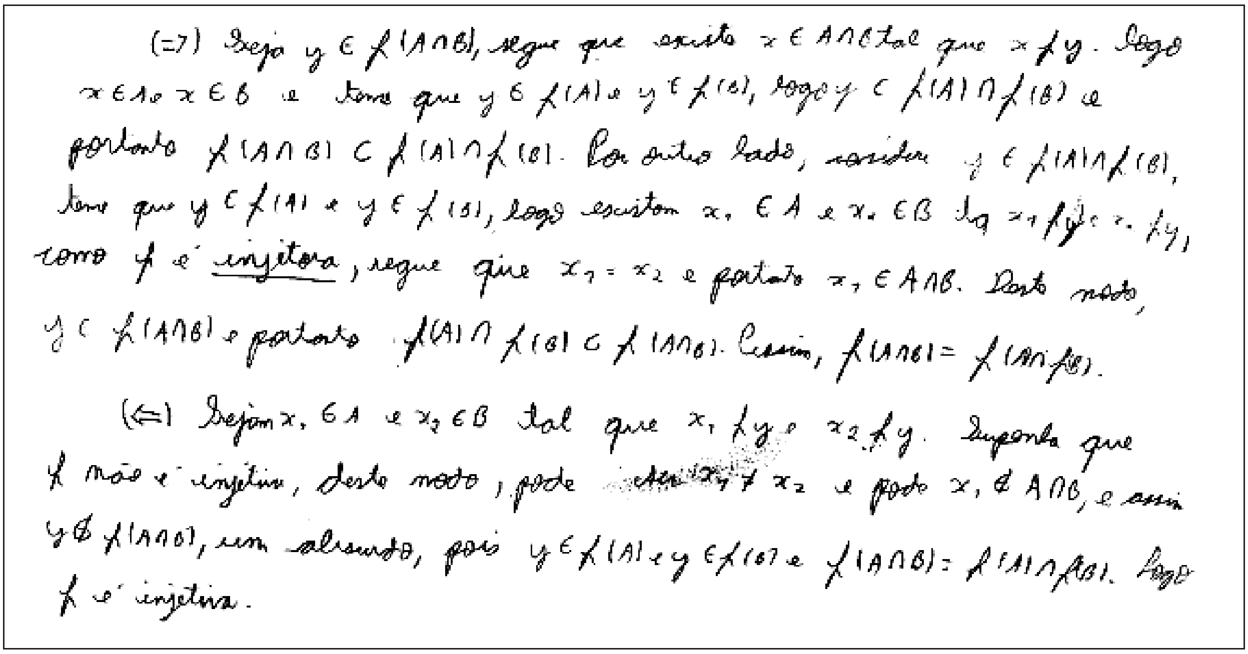
Quadro 25 – agrupamentos da questão quatro da P $_2$

Agrupamentos		A_1	A_2	A_4	A_7	A_8	A_{10}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}
Coerente	C_1										
	C_2										
	C_3	X		X				X		X	
Incoerente			X		X	X			X		
Em branco											
Justificada							X				X

Fonte: Autoria própria

Analisaremos o agrupamento C_3. Todos os graduandos apresentaram uma demonstração incompleta, provando apenas uma das condicionais da proposição. Entendemos que na *análise* da sentença, os sujeitos não diferenciaram hipótese e tese, além de não considerar que uma bicondicional é formada por duas condicionais. Segundo Dreyfus (1991), há dificuldade em gerenciar a complexidade da proposição, deste modo não atingiram o objetivo de demonstrar a sentença. Segundo Balacheff (1987), categorizamos esse agrupamento em *exemplo genérico*, devido à complexidade da proposição. No caso específico de A_1, temos dificuldade notacional, o graduando identifica os elementos pertencentes ao domínio e da imagem da mesma forma, comprometendo a coerência da argumentação. No caso de A_4, temos um argumento inválido acerca da definição de interseção, comprometendo a demonstração. Vejamos um protocolo a título de exemplo;

Figura 32– protocolo de A_{13}: questão quatro da P_2



(⇒) Seja $y \in f(A\cap B)$, segue que existe $x \in A \cap B$ tal que $x f y$. Logo $x \in A$ e $x \in B$ e temos que $y \in f(A)$ e $y \in f(B)$, logo $y \in f(A) \cap f(B)$ e portanto $f(A\cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Por outro lado, considere $y \in f(A) \cap f(B)$, temos que $y \in f(A)$ e $y \in f(B)$, logo existem $x_1 \in A$ e $x_2 \in B$ tq $x_1 f y$ e $x_2 f y$, como f é injetora, segue que $x_1 = x_2$ e portanto $x_1 \in A \cap B$. Deste modo, $y \in f(A\cap B)$ e portanto $f(A) \cap f(B) \subset f(A\cap B)$. Assim, $f(A\cap B) = f(A) \cap f(B)$.

(⇐) Sejam $x_1 \in A$ e $x_2 \in B$ tal que $x_1 f y$ e $x_2 f y$. Suponha que f não é injetiva, deste modo, pode $x_1 \neq x_2$ e pode $x_1 \notin A \cap B$, e assim $y \notin f(A\cap B)$, um absurdo, pois $y \in f(A)$ e $y \in f(B)$ e $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Logo f é injetiva.

Fonte: registro escrito do protocolo A_{13}: questão quatro da P_2

Neste caso o A_{13} apresentou a demonstração para uma das condicionais da proposição. Os sujeitos de pesquisa não pertencentes ao grupo C_3, não argumentaram adequadamente ou justificaram a proposição. Vejamos as dificuldades evidenciadas nessa questão;

Quadro 26 – dificuldades encontradas na questão quatro da P_2

Dificuldade			A_1	A_2	A_4	A_7	A_8	A_{10}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}
Desenvolvimento da forma de demonstração	Argumentação	Inválida										
		Incompleta	X		X				X		X	
	Estrutura da demonstração	Distinção entre hipótese e tese	X		X				X		X	
		Distinção entre definição e demonstração										
	Forma de demonstração	Utiliza exemplos										
		Forma inadequada	X		X							
Conhecimento do conteúdo	Conectivos											
	Condicional e bicondicional		X		X				X		X	
	União, interseção, complementar				X							
Escrita	Linguagem materna	Clareza										
		Coerência	X									
	Linguagem matemática		X									

Fonte: Autoria própria

6.1 Síntese das análises

Traçamos como objetivo *investigar dificuldades encontradas por graduandos em tarefas envolvendo demonstrações matemáticas* a fim de responder a questão de investigação *“que dificuldades graduandos de matemática explicitam no desenvolvimento de tarefas envolvendo demonstrações?”*

Para responder a questão de investigação categorizamos e sintetizamos os dados obtidos nos registros escritos dos graduandos e detectamos dificuldades relacionadas: a forma de demonstração, ao conteúdo e a escrita na linguagem matemática ou materna, explicitadas nos quadros sínteses de cada questão analisada. Detectamos resoluções de questões que não apresentavam tais dificuldades, nestes casos, analisamos o desenvolvimento da demonstração e focamos no pensamento matemático avançado (P.M.A.) envolvido em cada proposição.

O estudo de trabalhos de teóricos como Tall (1991, 1995), Resnick (1987), Dreyfus (1991) instigaram a compreender como ocorre o P.M.A.. Nas investigações acerca do assunto, entendemos que para atingir o P.M.A. há um processo gradual, se o objetivo é compreender sobre aplicações de conjuntos, é necessário compreender previamente o que são conjuntos.

Historicamente temos que o desenvolvimento das provas e demonstrações se deram de modo progressivo, as formas de se demonstrar que conhecemos é o resultado do trabalho de inúmeros matemáticos, caracterizando um processo gradual.

Para se demonstrar uma proposição, o matemático precisa ter uma noção sobre o conteúdo, e, ao se deparar com um problema a ser resolvido ocorrem processos mentais concorrentes que desencadeiam uma sequência de raciocínios lógicos a fim de provar a sentença. Para expressar o ocorrido na mente utiliza-se a representação simbólica, nesta pesquisa, explicitada por meio da escrita para representar tal processo mental.

Conforme afirma Dreyfus (1991), para ocorrer o P.M.A. é preciso gerenciar a complexidade de um problema a resolver, sendo assim as proposições a serem demonstradas exigiram dos graduandos *reflexões, sistematizações, abstrações*, dentre outros processos mentais, para lidarem com as proposições por alguns demonstradas, por outros, mostradas, ou ainda, não respondida coerentemente conforme o esperado.

Considerando o exposto, as questões de um a onze da primeira proposta de tarefa, promoviam uma reflexão sobre os pré requisitos para se demonstrar as proposições das questões doze e treze da P_1 e das questões da P_2. Essas questões tinham como finalidade auxiliarem os sujeitos de pesquisa nas provas e demonstrações a partir da questão doze da primeira proposta de tarefas. Ao iniciarmos as análises, investigamos as dificuldades evidenciadas nessas questões, porém essas análises não foram apresentadas no capítulo seis pois o foco da investigação é centrado nas dificuldades em demonstrações e essas questões tratavam de definições e conceitos sobre o conteúdo de conjunto e funções, no decorrer das análises das proposições a serem demonstradas recorremos às questões de um a onze quando julgamos conveniente.

Na proposição doze tivemos casos de demonstrações e mostrações, em que os sujeitos argumentam mas não demonstram a proposição. Na elaboração da primeira proposta de tarefas elencamos essa questão como a mais simples a ser demonstrada, mas ao analisarmos os protocolos nos surpreendemos por termos apenas duas demonstrações, ambas por redução ao absurdo, e, que dos outros onze graduandos, apenas quatro tentaram demonstrar mas apenas exemplificaram. Atribuímos a esse comportamento dos graduandos, o fato de não terem refletido anteriormente sobre a proposição, e que esse seria um novo problema a resolver.

Nas proposições da questão treze da P_1, verificamos que todos os estudantes, em algum item, não argumentaram ou utilizaram uma argumentação contraditória. Evidenciamos que nas sequências lógicas dedutivas dos agrupamentos diferentes de C_1, há argumentos inconsistentes, ou que, não podem ser deduzidos das sentenças anteriores, conforme o exposto nas análises.

Na questão um da segunda proposta de tarefas tivemos duas proposições similares, uma falsa e outra verdadeira. Ao elaborar essa questão tínhamos a intenção de investigar, além das dificuldades nas formas de demonstrações e no conteúdo, o processo mental de *abstração* dos sujeitos da pesquisa. Pois se os sujeitos demonstrassem de forma algorítmica, não reconheceriam que a proposição do item a) necessitava de um contraexemplo.

Cometemos uma falha de não incluir no enunciado da questão um, da segunda proposta de tarefas, que a demonstração por contraexemplo seria válida, isso pode ter induzido os graduandos a tentarem demonstrar pela forma direta, mas nos surpreendemos por não existir nenhuma argumentação alegando que a proposição do item a) era falsa. Já no item b) todos os sujeitos responderam de modo coerente, evidenciando familiaridade com o conteúdo.

A questão dois dessa segunda proposta foi a que apresentou mais diversidade de respostas. Entendemos que os sujeitos apresentaram dificuldades na argumentação, porém evidenciaram nos registros escritos conhecerem o conteúdo.

As questões três e quatro da segunda proposta de tarefas foram selecionadas coma intenção de analisarmos como os graduandos gerenciam a complexidade de uma proposição, no caso da questão três havia a necessidade de compreender o teorema e buscar uma forma de demonstrar a proposição, essa era uma questão aberta com inúmeras provas para a sentença. Mesmo quando aplicamos aos colegas mestrandos esses questionaram sobre as diferentes formas de demonstrações aplicáveis ao teorema, alegando que seria uma questão não familiar aos graduandos e de difícil resolução.

Decidimos mantê-la na aplicação da segunda proposta para analisar se os sujeitos seriam competentes em lidar com essa demonstração, mas obtivemos apenas respostas incoerentes, mostrando que a maior dificuldade está em lidar com uma prova desconhecida. O termo biunívoca presente no enunciado, foi um dos mais citados nas justificativas das questões não respondidas. Afirmaram que desconheciam esse termo, evidenciando assim dificuldades com a escrita, que não foram explicitadas no quadro síntese das dificuldades da questão, por termos restringido as análises a apenas as respostas categorizadas como coerentes.

Quanto a questão quatro dessa segunda proposta, havia a necessidade de provar duas condicionais, sendo que em uma dessas condicionais existiam duas inclusões de conjuntos a serem demonstradas. Nenhum dos sujeitos investigados demonstrou todas as partes da proposição, obtivemos apenas provas parciais, evidenciando dificuldade em lidar com um problema complexo a resolver.

No decorrer das análises tivemos a curiosidade de verificar o ano de conclusão da disciplina de Elementos da Matemática. Ao averiguarmos, notamos que quem concluiu em:

a) 2008: $A_{3,}$ todas as proposições da P_1 estão em branco e não realizou a P_2.

b) 2009: A_5, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{15} e A_{16}. Os estudantes deste grupo tentaram demonstrar, mas em algum item não utilizaram uma forma de demonstração adequada, realizaram mostrações e segundo a categorização de Balacheff (1987), são casos de empirismo ingênuo.

c) 2010: A_1, A_2, A_4, A_6 A_7, A_{12} e A_{13}. Neste grupo os graduandos demonstraram ao menos parcialmente as proposições propostas. Os quatro primeiros citados utilizaram notações semelhantes, inclusive os marcadores para indicar as passagens das demonstrações. Além disso, utilizaram uma forma padronizada nas demonstrações. É provável que estes recorreram a experiências comuns sobre o desenvolvimento das provas. Considerando que estes graduandos concluíram no ano anterior a disciplina de Elementos da Matemática, recentemente à aplicação da P_1, é provável que se recordem e tenham como referência as demonstrações desenvolvidas na disciplina. Observamos que o A_{14} fez equivalência de disciplinas e não foi possível categorizá-lo conforme o ano de conclusão da disciplina de Elementos da Matemática.

Entendemos que os graduandos que concluíram a disciplina de Elementos de Matemática a mais de um ano não se recordam das formas de demonstrações, porém apresentaram alguma familiaridade com os conteúdos abordados nas proposições.

CONSIDERAÇÕES

Concluída as análises nos preocupamos em validarmos os quadros de referências enumerados de um a quatro. Encaminhamos o trabalho, em uma mesma data, para um mestre e dois outros mestrandos para averiguarem contradições na pesquisa, principalmente nos quadros de análises. Após uma semana recebemos as considerações, não foram apontadas contradições nos quadros de análises, mas houve a sugestão de detalharmos algumas afirmações, a fim de que essas não gerassem ambiguidades para o leitor, nesta versão do trabalho já foram realizadas as modificações propostas pelos colegas.

Evidenciamos dificuldades relacionadas: a) a forma de demonstração; b)ao conteúdo; c) a escrita na linguagem matemática ou materna. Realizamos uma análise quantitativa dessas dificuldades, vejamos, no quadro, a seguir;

Quadro 27 – frequência de dificuldades nas propostas de tarefas

Dificuldade			Frequência
Desenvolvimento da forma de demonstração	Argumentação	Inválida	24
		Incompleta	7
	Estrutura da demonstração	Distinção entre hipótese e tese	10
		Distinção entre definição e demonstração	6
	Forma de demonstração	Utiliza exemplos	9
		Forma inadequada	11
Conhecimento do conteúdo	Conectivos		9
	Condicional e bicondicional		14
	União, interseção, complementar		14
Escrita	Linguagem materna	Clareza	3
		Coerência	3
	Linguagem matemática		9

Fonte: Autoria própria

Julgamos que essa pesquisa foi relevante por explicitar dificuldades em demonstrações matemáticas que podem ser comuns a inúmeros outros graduandos de cursos de Matemática. Essa pesquisa é uma contribuição à comunidade acadêmica com o intuito de instigar a reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem a cerca das demonstrações.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. **Reorganização Curricular do ensino básico**: princípios, medidas e implicações - Decreto-Lei: 6/2001. Lisboa: DEB, 2001.

ALMOULOUD, S. A. **Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem**. EMANPED, GT: Educação Matemática / n.19, 2009. Disponível em , http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/prova.pdf acesso em 15/10/2010.

ÁVILA, G.. Euclides, Geometria e Fundamentos. **In: Revista do professor de matemática 45**, 2001.

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. 4ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2000

BALACHEFF, N.. **Preuve et démonstration en mathématiques au collège. Recherches em Didactique des Matémathiques**, Grenoble, 1982, v. 3, n. 3, 261-304.

BALACHEFF, N.. Processus de preuve et situations de validation. In: **Educational Studies in Mathematics**, 1987, Vol. 18, n. 2,147-176.

BALACHEFF , N.. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In David Pimm (Ed.). **Mathematics Teachers and Children**. Hodder and Stoughton, London, 1988, 216-229.

BALACHEFF, N.. Is Argumentation an Obstacle? In: **International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof**. Grenoble, 1999, n.1, may-jun.

BALACHEFF, N. . **The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. Les Cahiers du Laboratoire Leibniz**, Grenoble, 2004, n. 109.

BICUDO, I.. **Demonstração em Matemática**. Bolema, ano 15, nº 18, 79-90. 2002

BOGDAN, R. C. & BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**: Uma Introdução à Teoria e aos Métodos. Porto: Porto Editora, 1999.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

CEPE n. nº 0230/2009 Universidade Estadual de Londrina – UEL.

DAGHLIAN, J. **Lógica e Álgebra de Boole**. 4ª ed. São Paulo: Atlas, 1995.

DOMINGUES, H. H. ; IEZZI, G.. **Álgebra Moderna**. 4ª ed. São Paulo: Atual, 2003.

DREYFUS, T.. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: Tall, D.. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 199, p. 25-41.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004

FOSSA, J. A. **Introdução às técnicas de Demonstração na Matemática**. São Paulo: Editora da Física, 2009a.

GARNICA, A. V. M. . As **Demonstrações em Educação Matemática: um ensaio**. Bolema, 2002, ano 15, nº18,91-99.

GERÔNIMO, J. R., FRANCO, V.S.. **Fundamentos de Matemática:** uma introdução à Lógica Matemática, Teoria dos Conjuntos, Relações e Funções. Maringá: Eduem, 2006.

HANNA, G. . Proofs that proove and proofs that explain. Proceedings of the 13rd., **Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. (PME 13). Paris, França. (2): 1989, p. 45–51.

HANNA, G. . **More than Formal Proof. For the Learning of Mathematics**. 9 (1): 1989, p.20–23.

HANNA, G. . Proof, explanation and exploration: an overview. **Educational Studies in Mathematics** 44, 2000, p. 5–23.

HANNA, G., BARBEAU, E. . Proofs as bearers of mathematical knowledge. **ZDM Mathematics Education** *40*, 2008, p. 345 -353.

HEGENBERG, L. . **Lógica Cálculo Sentencial**. 2ª ed. São Paulo: EPU, 1977.

HOUAISS3 eletrônico. **Dicionário de língua portuguesa**. 2009

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo, EPU, 1986.

MACHADO, N. J., CUNHA, M. O. da. **Lógica e linguagem cotidiana - verdade, coerência, comunicação, argumentação**. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

MARIOTTI, M. A.; BALACHEFF, N.. **Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof**. *ZDM Mathematics Education*, Heidelberg, 2008, v.40, n.3, p. 341-344.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M.S.. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. p.22-23.

NAGAFUCHI, T.,BATISTA, I. L., **O que é demonstração? Aspectos Filosóficos**. Disponível em <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/69-1-A-gt2_nagafuchi_ta.pdf> acesso em 13/01/2011.

NAGAFUCHI, T. . **Um estudo histórico-filosófico acerca do papel das demonstrações em cursos de Bacharelado em Matemática**. Dissertação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. UEL, Londrina, PR, 2009.

PONTE, J. P.; BOAVIDA, A.; GRAÇA, M. & ABRANTES, P.. **Didática da Matemática.** Lisboa: DES do ME., 1997.

PIETROPAOLO, R. C.; **(Re) Significar a demonstração nos currículos da Educação Básica e da formação de professores de Matemática.** Tese em Educação Matemática. PUC, São Paulo, SP, 2005.

PROENÇA, M. C; PIROLA, N. A.. Relações de Inclusão entre Quadriláteros: Conhecimento e Desempenho de Alunos do Ensino Médio. In: **IV SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. Anais... Tabatinga: SIPEM, 2009.

RAV, Y.. Why Do We Prove Theorems? **Philosophia Mathematica**, Oxford, 1999, v.7, n.3, p. 5- 41.

RESNICK, L.. **Education and learning to think**. Washington DC: National Academy Press,1987.

ROSA, M. H..**Frege, Wittgenstein e a Normatividade da Lógica**. Revista Índice, vol. 02, n. 01. 2010.

SALMON, W. C.. **Lógica**. 3ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

SILVA, E. M. . **Compreensão de estudantes de um curso de Matemática a respeito do conceito de indução finita**. Dissertação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, UEL, Londrina, PR, 2010.

SILVA, E. M. , SAVIOLI, A. M. P. D. . **Uma Abordagem da Indução Finita no Ensino Superior**, EBRAPEM , 2008. Disponível em, http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/22-1-A-gt10_eduardo_ta.pdf, acesso em 15/ 10/ 2010.

SOUSA, E. K. V. de. **Um estudo sobre o ensino-aprendizagem das demonstrações matemáticas**. Dissertação em Educação Matemática. UFRN. Natal, RN, 2010.

TALL, D.. The psychology of advanced mathematical thinking. In: Tall, D.. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1999, p. 3-21.

TALL, D. Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. **Plenary Lecture, Conference of the International Group for the Psychology of Learning Mathematics**, Recife, Brazil, July 1995, vol I, p. 161–175.

VARELLA, M. . **Prova e demonstração na Geometria Analítica: Uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos**. Dissertação em Educação Matemática. PUC, São Paulo, SP, 2010.

APÊNDICES

Apêndice A: primeira proposta de tarefas

Nome:____ data:__/__/_____

Ano de ingresso na UEL:__________ Número de matrícula:____________________

Ano de conclusão da disciplina Elementos da Matemática:_________

Proposta de tarefas

1) O que são conjuntos?

2) Em sua opinião, quais das palavras a seguir apresentam relação com conjuntos? Se existir, caracterize.

a) Classe:

b) Coleção:

c) Elemento:

d) Pertinência:

e) Relação:

f) Função:

g) Partição:

h) Números:

i) Intervalo:

Nome:____

3) Qual a diferença de classe, coleção e conjunto?

4) Defina o conceito de pertinência em relação aos conjuntos?

5) O que são subconjuntos?

6) O que são conjuntos disjuntos?

7) Escreva sobre o conjunto vazio.

8) Como você relaciona os diagramas de Venn-Eüler e conjuntos?

9) Defina interseção e união de conjuntos.

10) Sejam A e B conjuntos não vazios, defina complementar de A em relação a B e a diferença entre A-B e B-A? O que você concluí?.

11) Defina os conjuntos numéricos? O que os distingue? Dê alguns exemplos.

Nome:____

12) Demonstre que para qualquer conjunto A, temos que $\emptyset \subseteq A$.

13) Demonstre que, se A, B, e C são conjuntos, então

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Nome:____

b) $(A \cup B)^C = A^c \cap B^c$

c) $A \subset B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

Apêndice B: segunda proposta de tarefas

Nome:____ data:__/__/_____

Ano de ingresso na UEL:__________ Número de matrícula:____________________

Ano de conclusão da disciplina Elementos da Matemática:_________

OBSERVAÇÂO: durante a resolução das tarefas favor justificarem suas escolhas, principalmente se deixar alguma questão em branco.

Proposta de tarefas

1) Seja f: X→Y uma aplicação e $A \subseteq X$ e $B \subseteq X$. Considerando que as demonstrações matemáticas podem ser realizadas valendo-se das formas direta, contrapositiva ou redução ao absurdo, demonstre, se for possível, as seguintes proposições:

   a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

   b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Nome:____

2) Seja f: X→Y uma aplicação e $U \subseteq X$ e $V \subseteq X$. Demonstre que: se $U \subset V$ então $f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$.

3) Considere o seguinte teorema: "*Um conjunto é infinito, se e somente se, está em correspondência biunívoca com um subconjunto próprio*". Demonstre que o Conjunto dos Números Naturais é infinito.

Nome:____

4) Seja f: $X \rightarrow Y$ uma aplicação. Demonstre que: f é injetiva se, e somente se, quaisquer que sejam A, B $\subset$ X, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

ANEXOS

Anexo A

Termo de consentimento livre e esclarecido

Nome:
....
Identidade:
....
CPF:
....
Endereço
....
Telefone:
....
E-mail:
....

Tendo em vista a necessidade de coleta de dados para o desenvolvimento da pesquisa sobre Demonstrações Matemáticas, sob responsabilidade de Debora Cristiane Barbosa Kirnev, aluna regularmente matriculada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, declaro que consinto que a mesma utilize parcial ou integralmente os registros escritos em diário de campo, entrevistas e questionários, segundo as necessidades da pesquisa, acerca das atividades que desenvolvemos na sala de aula, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que seja garantido o anonimato no relato da pesquisa. A pesquisa dever ser desenvolvida de maneira que não interfira nas atividades cotidianas e tampouco ofereça possibilidade de constrangimento para os alunos e professora que atuam na sala de aula ou em atividades afins.

Declaro ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Londrina, / / 2011

NOME:____

ASS.:____