Universidade Estadual de Londrina

JAIR LUCAS JORGE

TEORIA DE CONJUNTOS:

PROCESSOS MANIFESTADOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Londrina
2017

JAIR LUCAS JORGE

TEORIA DE CONJUNTOS:

PROCESSOS MANIFESTADOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli

Londrina
2017

JAIR LUCAS JORGE

TEORIA DE CONJUNTOS:
PROCESSOS MANIFESTADOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora : Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Profa. Dra. Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Simone Luccas
Universidade Estadual do Norte do Paraná - UENP

Londrina, 04 de abril de 2017.

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Jorge, Jair Lucas.
TEORIA DE CONJUNTOS : PROCESSOS MANIFESTADOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO / Jair Lucas Jorge. - Londrina, 2017.
132 f. : il.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2017.
Inclui bibliografia.

1. Pensamento Matemático Avançado - Tese. 2. Teoria de Conjuntos - Tese. 3. Educação Matemática - Tese. I. Savioli, Angela Marta Pereira das Dores . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus.

Agradeço à minha orientadora Angela Marta, pela paciência que teve comigo, por toda a dedicação, pelo apoio não só na escrita do trabalho, mas também em todas as conversas.

À minha mãe, Deusa, por todo o apoio e compreensão, ao meu pai, Jair, incentivando a sempre progredir. Aos meus Irmãos, Walmir e Waldania, pelo apoio e ajuda nesse momento. Ao meu sobrinho, André, e meu cunhado, Devanil, pelo incentivo. Enfim, agradeço a todos os meus familiares.

As professoras Dra. Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho e Dra. Simone Luccas, por aceitarem o convite de compor a banca deste trabalho e pelas valiosas contribuições dadas a esta pesquisa.

Agradeço aos colegas do Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático (GEPPEMat). Obrigado pelas contribuições feitas para com esta pesquisa. Obrigado Marcelo pelas conversas e cobranças.

Agradeço ao grande amigo que conheci durante o mestrado, Julio Cezar, pois compartilhamos momentos de sofrimento, incertezas e também de muita descontração. Obrigado por tudo.

Agradeço aos professores e aos colegas do Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL. Em especial as Prof.ª Dra. Marcia Cyrino e Prof.ª Dra. Regina Buriasco por toda a trajetória desde a graduação.

Agradeço aos meus amigos Renata Graciele, Talita, Gustavo e Rafael. Obrigado por fazerem parte da minha vida e pelo apoio.

Agradeço aos estudantes da 2ª série do curso de Matemática – Habilitação: Licenciatura, que se disponibilizaram a participar deste estudo.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

JORGE, Jair Lucas. **Teoria de Conjuntos**: Processos Manisfestados do Pensamento Matemático Avançado. 2017, 132 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) –Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

RESUMO

O objetivo deste trabalho, que constitui em uma pesquisa qualitativa, é verificar tarefas desenvolvidas por estudantes do curso de licenciatura em matemática com a intenção de identificar os processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) em relação à Teoria de Conjuntos. Utilizamos Dreyfus (2002) como referencial teórico e apresentamos um breve histórico da Teoria de Conjuntos. Foram participantes da pesquisa 20 estudantes do segundo ano de Matemática, habilitação: Licenciatura, que resolveram tarefas a eles propostas. Foi possível observar características dos processos envolvidos no PMA nas produções escritas dos estudantes, tais como modelação, comutação de representações e tradução, processos de representação, síntese e generalização. Além disso, analisar quais e quantos processos cada estudante possui a respeito da Teoria de Conjuntos. Concluímos que todos os estudantes apresentaram ao menos uma característica dos processos do PMA, nove estudantes evidenciaram somente as características envolvidas no processo de Representação, cinco apresentaram apenas as características dos processos de Abstração e dois apresentaram características de todos os processos do PMA.

Palavras-chave: Pensamento matemático avançado. Teoria de conjuntos. Educação Matemática.

JORGE, Jair Lucas. **Set Theory**: Processes of Advanced Mathematical Thinking. 2017. 132 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Departamento de Matemática Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

ABSTRACT

The purpose of the present work is to verify and identify the processes of Advanced Mathematical Thinking (AMT) presented by undergraduate students in Mathematics in relation to Set Theory. We will use Dreyfus (2002) as a theoretical reference and will do the analyzes based on some ideas of the content analysis of Bardin (1977). We present a brief history of Set Theory, the development of theory and the studies that made it possible. Tasks were proposed for students of the second year of Mathematics, Habilitation: Degree, altogether 20 accepted to participate in the research. Finally, we conclude that it was possible to observe the characteristics of the processes involved in the AMT in the written productions of the students and to verify what and how many processes each student has regarding the Set theory.

Key words: Advanced mathematical thinking. Set theory. Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - O elemento x pertence ao conjunto A 18
Figura 2 - O conjunto B está contido no conjunto A 19
Figura 3 - Ilustração do axioma do par 20
Figura 4 - União de conjuntos 21
Figura 5 - Interseção de conjuntos 21
Figura 2 - Diferença entre os conjuntos A e B ou B^C 22
Figura 7 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E1 40
Figura 8 - Resolução da tarefa 2 pelo estudante E1 41
Figura 9 - Exemplo de resolução da tarefa 3 pelo estudante E1, conjunto vazio41
Figura 10 - Resolução da tarefa 4 pelo estudante E1 41
Figura 11 - Resolução da tarefa 4 pelo estudante E1, inclusão 42
Figura 12 - Resolução da tarefa 5 pelo estudante E1 42
Figura 13 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E2 44
Figura 14 - Resolução da tarefa 2 pelo estudante E2 45
Figura 15 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E2, pertinência. 45
Figura 16 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E2, inclusão 45
Figura 17 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E2 46
Figura 18 - Resolução da tarefa 4 pelo estudante E2 46
Figura 19 - Resolução da tarefa 5 pelo estudante E2 47
Figura 20 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E3 48
Figura 21 - Resolução da tarefa 2 pelo estudante E3 49
Figura 22 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E3, inclusão 49
Figura 23 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E3, conjunto vazio. 50
Figura 24 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E3, subconjuntos. 50
Figura 25 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E3 51
Figura 26 - Resolução da tarefa 4 pelo estudante E3 51
Figura 27 - Resolução da tarefa 5 pelo estudante E3 52
Figura 28 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E4 53
Figura 29 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E4, parte 2 54
Figura 30 - Resolução da tarefa 2 pelo estudante E4 55

Figura 31 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E4, item a 55
Figura 32 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E4, item f... 55
Figura 33 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E4, item h 56
Figura 34 - Resolução da tarefa 4 pelo estudante E4 56
Figura 35 - Resolução da tarefa 5 pelo estudante E4 57
Figura 36 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E5 58
Figura 37 - Resolução da tarefa 2 pelo estudante E5 59
Figura 38 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E5, parte 1 59
Figura 39 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E5, parte 2 60
Figura 40- Resolução da tarefa 4 pelo estudante E5 60
Figura 41 - Resolução da tarefa 5 pelo estudante E5 61
Figura 42 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E6 62
Figura 43 - Resolução da tarefa 2 pelo estudante E6 63
Figura 44 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E6 63
Figura 45 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E6, parte 2 63
Figura 46 - Resolução da tarefa 4 pelo estudante E6 64
Figura 47 - Resolução da tarefa 5 pelo estudante E6 64
Figura 48 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E7 65
Figura 49 - Resolução da tarefa 2 pelo estudante E7 66
Figura 50 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E7 66
Figura 51 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E7, parte 2 67
Figura 52 - Resolução da tarefa 4 pelo estudante E7 67
Figura 53 - Resolução da tarefa 5 pelo estudante E7 68
Figura 54 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E8 69
Figura 55 - Resolução da tarefa 2 pelo estudante E8 69
Figura 56 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E8 70
Figura 57 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E8, parte 2 70
Figura 58 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E8, parte 3 71
Figura 59 - Resolução da tarefa 4 pelo estudante E8 71
Figura 60 - Resolução da tarefa 5 pelo estudante E8 72
Figura 61 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E9 73
Figura 62 - Resolução da tarefa 2 pelo estudante E9 73
Figura 63 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E9 74
Figura 64 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E9, parte 74

Figura 65 - Resolução da tarefa 4 pelo estudante E9 ... 74
Figura 66 - Resolução da tarefa 5 pelo estudante E9 ... 75
Figura 67 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E10 ... 76
Figura 68 - Resolução da tarefa 2 pelo estudante E10 ... 77
Figura 69 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E10 ... 77
Figura 70 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E10, parte 3 ... 78
Figura 71 - Resolução da tarefa 4 pelo estudante E10 ... 78
Figura 72 - Resolução da tarefa 5 pelo estudante E10 ... 79
Figura 73 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E11 ... 80
Figura 74 - Resolução da tarefa 2 pelo estudante E11 ... 80
Figura 75 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E11 ... 81
Figura 76 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E11, parte 2 ... 81
Figura 77 - Resolução da tarefa 4 pelo estudante E11 ... 81
Figura 78 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E12 ... 83
Figura 79 - Resolução da tarefa 2 pelo estudante E12 ... 84
Figura 80 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E12 ... 84
Figura 81 - Resolução da tarefa 4 pelo estudante E12 ... 85
Figura 82 - Resolução da tarefa 5 pelo estudante E12 ... 85
Figura 83 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E13 ... 86
Figura 84 - Resolução da tarefa 2 pelo estudante E13 ... 86
Figura 85 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E13 ... 87
Figura 86 - Resolução da tarefa 4 pelo estudante E13 ... 88
Figura 87 - Resolução da tarefa 5 pelo estudante E13 ... 89
Figura 88 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E14 ... 90
Figura 89 - Resolução da tarefa 2 pelo estudante E14 ... 90
Figura 90 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E14 ... 91
Figura 91 - Resolução da tarefa 4 pelo estudante E14 ... 92
Figura 92 - Resolução da tarefa 5 pelo estudante E14 ... 92
Figura 93 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E15 ... 94
Figura 94 - Resolução da tarefa 2 pelo estudante E15 ... 94
Figura 95 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E15 ... 95
Figura 96 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E15, parte 2 ... 95
Figura 97 - Resolução da tarefa 4 pelo estudante E15 ... 95
Figura 98 - Resolução da tarefa 5 pelo estudante E15 ... 96

Figura 99 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E16 98
Figura 100 - Resolução da tarefa 2 pelo estudante E16 98
Figura 101 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E16 99
Figura 102 - Resolução da tarefa 4 pelo estudante E16 100
Figura 103 - Resolução da tarefa 5 pelo estudante E16 101
Figura 104 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E17 102
Figura 105 - Resolução da tarefa 2 pelo estudante E17 103
Figura 106 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E17 103
Figura 107 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E17, parte 2 103
Figura 108 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E17, parte 3 104
Figura 109 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E17, parte 4 104
Figura 110 - Resolução da tarefa 4 pelo estudante E17 105
Figura 111 - Resolução da tarefa 5 pelo estudante E17 106
Figura 112 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E18 108
Figura 113 - Resolução da tarefa 2 pelo estudante E18 108
Figura 114 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E18 109
Figura 115 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E18, parte 2 109
Figura 116 - Resolução da tarefa 4 pelo estudante E18 109
Figura 117 - Resolução da tarefa 5 pelo estudante E18 110
Figura 118 - Resolução da tarefa 5 pelo estudante E18, parte 2 110
Figura 119 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E19 112
Figura 120 - Resolução da tarefa 2 pelo estudante E19 113
Figura 121 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E19 113
Figura 122 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E19, parte 2 114
Figura 123 - Resolução da tarefa 4 pelo estudante E19 115
Figura 124 - Resolução da tarefa 5 pelo estudante E19 115
Figura 125 - Resolução da tarefa 1 pelo estudante E20 117
Figura 126 - Resolução da tarefa 2 pelo estudante E20 117
Figura 127 - Resolução da tarefa 3 pelo estudante E20 118
Figura 128 - Resolução da tarefa 4 pelo estudante E20 119

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Trabalhos do GEPPMat 13
Quadro 2 – Correspondências dos símbolos 17
Quadro 3 – Características do PMA com base em Dreyfus (2002) 30
Quadro 4 – Características dos Estudantes Analisados 39
Quadro 5 – Quadro síntese do PMA apresentado pelos estudantes 120

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 12

CAPÍTULO I: CONJUNTOS 15

CAPÍTULO II: PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO 23

2.1 PROCESSOS ENVOLVIDOS NO PMA SEGUNDO DREYFUS 23

CAPÍTULO III: ASPECTOS METODOLÓGICOS 31

3.1 POSSÍVEIS SOLUÇÕES 32

CAPÍTULO IV: ANÁLISES 39

4.1 ANÁLISES DAS TAREFAS 39

4.2 SÍNTESE DAS ANÁLISES 40

CAPÍTULO V: CONSIDERAÇÕES FINAIS 120

REFERÊNCIAS 122

APÊNDICES 126

INTRODUÇÃO

Quando ingressei no curso de Matemática, habilitação: Licenciatura, deparei-me com abstração matemática iniciando pela Teoria de Conjuntos. Assim, tive meu primeiro contato com as demonstrações formais matemáticas. Durante o curso, percebi a importância disso em diversas disciplinas, e que muitos de meus colegas tinham dificuldades com esse conteúdo.

Considerando que tais dificuldades são evidenciadas no início dos estudos com conjuntos, aplicamos tarefas para estudantes do segundo ano de Matemática, habilitação: Licenciatura, de uma Universidade Pública do norte paranaense.

Como objetivo verificaremos tarefas desenvolvidas por estudantes do curso de licenciatura em matemática com a intenção de identificar os processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) em relação a Teoria de Conjuntos. Utilizaremos Dreyfus (2002) como referencial teórico e a parte histórica de Teoria de Conjuntos.

Como Objetivos específicos temos:

- propor tarefas que envolvam os conceitos da Teoria de Conjuntos;
- coletar dados referentes aos conhecimentos dos alunos em relação à Teoria de Conjuntos a partir da aplicação das tarefas propostas e de entrevistas;
- analisar a produção dos alunos decorrente da aplicação das tarefas e das respostas obtidas durante as entrevistas;
- identificar as dificuldades apresentadas pelos alunos sobre a Teoria dos Conjuntos;
- desenvolver uma reflexão em relação às dificuldades encontradas a partir da coleta de dados.

Assim, o tema de nosso trabalho versa a respeito da Teoria de Conjuntos e as manifestações dos processos envolvidos no PMA em tarefas envolvendo esse conteúdo.

Há pesquisas que evidenciam que estudantes nesse nível de ensino estejam ainda em transição de pensamento matemático, do elementar para o avançado, porém já devem apresentar características desse pensamento mais avançado. Como em Marins (2014) e Gereti (2014).

A importância de identificar o PMA refere-se ao nível dos estudantes, que estão no segundo ano de ensino superior, ou seja, na etapa, que segundo a teoria utilizada nesse trabalho, Dreyfus (2002), já deveriam apresentar processos desse pensamento mais avançado.

Consideramos que identificar os processos do PMA seja suficiente para um trabalho a nível de mestrado, pois o passo seguinte seria a construção de uma proposta de intervenção que é inviável no período de um mestrado.

Há disciplinas no curso de graduação em matemática, na Universidade Estadual de Londrina, que necessitam desse pensamento em um nível mais avançado como, por exemplo, Análise Real[1].

O Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático – GEPPMat, desenvolve estudos e pesquisas a respeito do pensamento matemático, este grupo integra os grupos de estudo do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina. Algumas das discussões e pesquisas do grupo versam a respeito de caracterizações do pensamento matemático (avançado e elementar), em especial do pensamento algébrico, os processos envolvidos no desenvolvimento deste pensamento e dificuldades na aprendizagem de conceitos matemáticos.

Alguns trabalhos apresentados pelo grupo que discorrem a respeito do Pensamento Matemático Avançado podem ser vistos no quadro 1.

Quadro 1 – Trabalhos do GEPPMat

AUTOR	**ANO**	**ASSUNTO**
ELIAS, H. R.	2012	Tratou do PMA por meio da Teoria APOS de Ed Dubinsky, sua pesquisa versou a respeito das dificuldades manifestadas por estudantes a respeito dos conceitos de grupos e isomorfismos de grupos.
BERTOLAZI, K. S.	2012	Apresentou o PMA por meio das afirmações de Dreyfus e de Resnick, sua pesquisa teve por objetivo investigar os processos do PMA manifestados em estudantes a respeito de Sistemas de Equações lineares.
KIRNEV, D. C. B.	2012	Investigou as dificuldades relacionas às formas de demonstrações matemáticas e abordou o PMA segundo a perspectiva de Dreyfus (2002).
GERETI, L. V.	2014	Discutiu o PMA por meio das resoluções de estudantes de questões de provas do ENADE, descreveu indícios das características dos processos do PMA.

[1] Ementa do Curso de Análise Real: Conjuntos Finitos e infinitos. Números reais. Sequências e séries de números reais. Noções de Topologia na reta. Funções reais: Limite e continuidade. Derivada. Fórmula de Taylor. A integral de Riemann.

AUTOR	ANO	ASSUNTO
MARINS, A. S.	2014	Identificou e discutiu características dos processos do PMA em estudantes referente ao conteúdo de transformações lineares.
SOUZA, M. L.	2016	Observou as concepções, a luz da teoria APOS, de licenciandos em matemática com relação ao conceito de dependência e independência linear.
JESUS, M. S.	2016	Discutiu concepções, por meio da teoria APOS, manifestadas por estudantes em tarefas que abordavam o conceito de Anel, presente nas Estruturas Algébricas.

Fonte: dos autores

No primeiro capítulo, será apresentado um breve histórico da Teoria de Conjuntos, o desenvolvimento da teoria e os estudos que a tornaram possível. Bem como alguns aspectos e axiomas dessa teoria.

No capítulo dois, são expostos os processos do Pensamento Matemático Avançado, as características de cada processo descrito por Dreyfus (2002) e, além disso, apresentamos um quadro síntese dessas características.

Os aspectos metodológicos utilizados nesse trabalho podem ser vistos no terceiro capitulo, juntamente a isso uma breve descrição da aplicação das tarefas e possíveis soluções para cada uma delas.

O quarto capítulo apresenta as análises das tarefas de estudantes de Matemática, Habilitação: Licenciatura, as resoluções por eles realizadas e os processos do PMA apresentados por esses estudantes.

E no capítulo cinco, são apresentadas as considerações finais, uma síntese das análises e as dificuldades encontradas nas resoluções das tarefas dos estudantes.

CAPÍTULO I

CONJUNTOS

1.1 Um Pouco de história

A Teoria de Conjuntos tal como entendemos hoje começou a ser desenvolvida por George Cantor no final do século XIX, quando ele sentiu necessidade de sistematizar o conceito de conjunto ao estudar os números transfinitos, descobrindo que existia uma distinção entre o “tamanho” dos conjuntos, a cardinalidade. Este estudo transformou a Matemática (ÁVILA, 2007).

A noção de conjunto é algo intuitivo, basta ver uma criança agrupando objetos, ou seja, separando em conjuntos, Cantor sentiu a necessidade de formalizar este conceito. Apesar de não existir uma definição explicita de conjunto, ele apresentou um conjunto como sendo qualquer coleção de objetos que podemos intuir ou pensar (CANTOR, 1915).

Cantor, no entanto, não foi o primeiro a trabalhar com conjuntos infinitos. Antes Bernhard Bolzano produziu alguns trabalhos no tratamento de conjuntos infinitos e escreveu um livro a respeito dos paradoxos do infinito que tratava de questões acerca de conjuntos infinitos, publicado apenas depois de sua morte em 1859 (ÁVILA, 2007). Após Bolzano, ainda no século XIX, Richard Dedekind utilizou a noção “de conjunto na construção dos números reais” (ÁVILA, 2007, p. 62).

No início de sua carreira, Cantor estudava representações de funções por meio de séries trigonométricas e foi nesse estudo que ele se viu obrigado a estudar o conjunto de pontos de descontinuidade destas funções. Durante esse estudo foram aparecendo conjuntos cada vez mais complexos e isso o levou a introduzir o conceito de equivalência de conjuntos (ÁVILA, 2007). Dizer que dois conjuntos são equivalentes é dizer que os dois possuem a mesma cardinalidade, assim, deve verificar se “é possível estabelecer uma correspondência que leve elementos distintos de um conjunto a elementos distintos do outro, todos os elementos de um e do outro conjunto sendo objetos dessa correspondência” (ÁVILA, 2007, p. 62). Essa correspondência é chamada de correspondência biunívoca. Os números chamados de números transfinitos[2] vêm do conceito de cardinalidade de conjuntos, dois conjuntos possuem o mesmo número de elementos se possuírem a mesma cardinalidade (ÁVILA, 2007).

A teoria de Cantor foi descrita por David Hilbert como "o fruto mais admirável da mente matemática e uma das conquistas mais preciosas dos processos intelectuais do homem" (CASTRUCCI, 1968, p. 127). Em 1874, Cantor fez sua primeira grande publicação a respeito da Teoria de Conjuntos (mengenlehre) no Journal de Crelle, famoso jornal cientifico da época. Esta publicação foi retardada pelo matemático Kronecker, pois na sua visão, à época, não era muito satisfatória considerando a lógica matemática. Esses problemas "lógicos" causaram algumas lacunas.

As lacunas que Cantor deixou em sua teoria fizeram surgir paradoxos. Um desses paradoxos é a ideia de existir um conjunto de todos os conjuntos, o conjunto universo, que mais tarde ficou conhecido como Paradoxo de Russell[3]. A partir dos paradoxos, foi necessário a criação de axiomas, e um dos primeiros sistemas de axiomatização apresentado foi de autoria de Zermelo e foi aperfeiçoado por Fraenkel. Este sistema ficou conhecido como sistema ZF (GERONIMO e FRANCO, 2008). Zermelo, percebendo os paradoxos na Teoria de Conjuntos, formulou um axioma, que veio a ser chamado de axioma da especificação[4] (ÁVILA, 2007). Posteriormente a isso, Fraenkel juntamente com Skolem "propuseram que a linguagem corrente fosse completamente banida da Matemática e substituída por uma linguagem formal, construída com poucos símbolos e as regras de sintaxe necessárias para se conduzir o raciocínio dedutivo" (ÁVILA, 2007, p. 75). Nesse momento da história, final do século XIX e início do século XX, a Teoria de Conjuntos sai do sistema intuitivo e passa para o sistema axiomático.

1.2 Elementos da Teoria de Conjuntos

A Teoria de Conjuntos comtempla os primórdios de conjuntos e é a primeira que os estudantes têm contato. Conjunto, coleção ou classe são apresentados como sinônimos na Teoria de Conjuntos. Não existe uma definição formalizada do que seja um conjunto, mas

---

[2] O tipo de ordem de um conjunto bem ordenado infinito é chamado de número ordinal transfinito ou número transfinito. Em outras palavras números transfinitos são os tipos de ordem de conjuntos infinitos e bem ordenados (SANTOS; LOPES; CUNHA, 2001, p. 43).

[3] Paradoxo de Russell: "Esse conjunto pertence a si mesmo?". Existem duas repostas possíveis: sim, ele pertence a si mesmo, ou não, não pertence a si mesmo. Se a resposta é que ele pertence a si mesmo, ele é um conjunto que não pertence a si mesmo (porque essa é a característica que define os participantes desse conjunto específico). E se a resposta for que ele não pertence a si mesmo, então ele é um conjunto que pertence a si mesmo (LAGES, 2014).

[4] Ver o axioma da especificação na página 19.

pode-se intuir que um conjunto é um aglomerado de coisas, objetos, elementos que devem seguir uma lei de formação estabelecida previamente (CANTOR, 1915). Alguns exemplos de conjuntos podem ser o conjunto dos seres vivos, dos seres humanos ou das plantas. Para estar em um desses conjuntos, ou seja, para pertencer a um deles, o elemento deve possuir as características deles exigida, como no exemplo a seguir, uma flor pode pertencer ao conjunto dos seres vivos bem como ao conjunto das plantas, porém não pertence ao conjunto dos seres humanos. Podemos ter conjuntos formados por outros conjuntos, por exemplo, o conjunto dos seres humanos pode se um elemento do conjunto dos seres vivos, como também ser subconjunto do conjunto dos seres vivos.

Halmos (1960, p. 1) afirma que “o conceito matemático de conjunto pode ser usado como fundamento para toda a matemática conhecida[5]”, essa afirmação nos revela a importância dos conceitos de conjuntos para a matemática. Além disso, esse conceito é fundamental para a compreensão de outros conceitos, tais como o de funções, de pertinência e de subconjuntos, por exemplo. E para compreender estes conceitos, deve-se conhecer primeiro os símbolos que são utilizados e suas correspondências, podemos ver alguns destes no quadro 1, além disso, usualmente os elementos de um conjunto são representados por letras minúsculas e os conjuntos por letras maiúsculas.

Quadro 2 – Correspondências dos símbolos

Símbolo	**Correspondência**
$\in$	pertence a/elemento de
$\notin$	não pertence a/não é elemento de
$\subset$	contido/subconjunto de
$\supset$	contem
$\subseteq$	contido ou igual
$\not\subset$	não está contido/não é subconjunto de
$\cap$	interseção
$\cup$	união
A^C	complementar do conjunto A

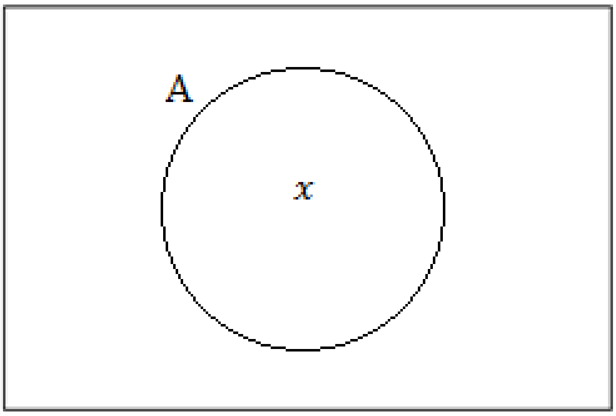
[5] Tradução nossa de: the mathmatical concept of a set can be used as the fundation for all known mathematics.

Símbolo	Correspondência
$\mathcal{P}(A)$	conjunto das partes do conjunto A
$\{a\}$	conjunto que tem o a como elemento
$A - B$	diferença entre conjuntos A e B
$\emptyset$	conjunto vazio

Fonte: dos autores

Para Halmos (1960), o principal conceito da teoria de conjuntos é o de pertinência, pois é por meio deste conceito que se pode compreender os outros. Escrevemos $x \in A$ para representar que x é um elemento do conjunto A ou x pertence a A.

Figura 1 – O elemento x pertence ao conjunto A



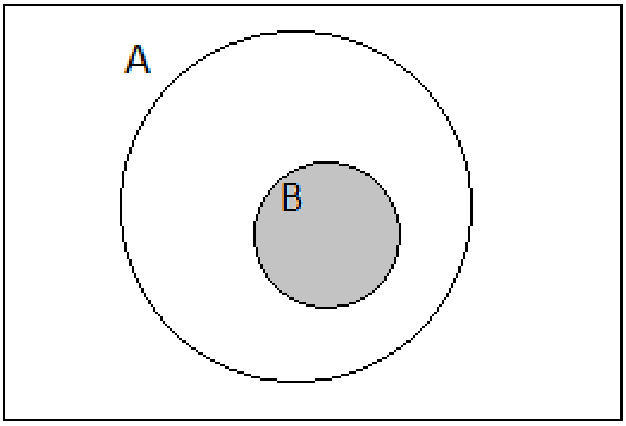
Fonte: dos autores

A partir de agora apresentaremos alguns axiomas da Teoria de Conjuntos, pois serão importantes para o entendimento de conceitos e propriedades dessa teoria. São eles: axioma da extensão, axioma da especificação, axioma da união e axioma da potência.

Um conceito relativo à pertinência é o de subconjunto. Para um conjunto B ser subconjunto de outro conjunto A é necessário que todos os elementos dele pertençam ao outro conjunto e podemos escrever como $B \subset A$, que pode ser lido como o conjunto B é um subconjunto do conjunto A ou, ainda, B está contido em A. Quando todos os elementos de um conjunto são todos os elementos do outro conjunto, podemos usar o *axioma da extensão*, este axioma diz que "os conjuntos S e T são chamados iguais (S = T) se cada um é um subconjunto do outro, isto é, se eles contêm os mesmos elementos[6]" (FRAENKEL, 1966, p. 5).

[6] Tradução nossa de: the sets S and T are called equal (S=T) if each is a subset of the other, i.e., if they contain the same elements.

Figura 2 – O conjunto B está contido no conjunto A



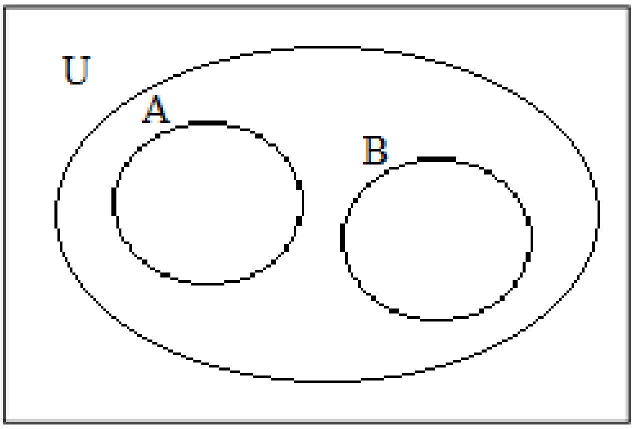
Fonte: dos autores

Para descrever as características de um conjunto, ou seja, que tipo de elementos pertencem ao conjunto, temos a necessidade de apresentar o *axioma da especificação*, como por exemplo, quando determinamos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$, estamos especificando o conjunto que estamos trabalhando, e neste caso, o conjunto A são todos os elementos do conjunto dos números reais maiores ou iguais a dois. Halmos (1960, p. 6) apresenta a seguinte definição: "a todo conjunto A e a toda condição S(x) corresponde um conjunto B cujos elementos são exatamente aqueles elementos x de A para os quais S(x) vale[7]". Essa condição representa quais elementos de A devem ser os elementos de B, como no exemplo anterior.

Sabemos que não pode existir um conjunto que contenha todos os conjuntos, pois teríamos um paradoxo, se um conjunto possuir todos os conjuntos, ele deve possuir a si mesmo, o que não é possível. Esse paradoxo ficou conhecido como Paradoxo de Russell. Contudo, quando necessitamos trabalhar com dois ou mais conjuntos, devemos recorrer ao *axioma do par*, que nos afirma: "para dois conjuntos quaisquer existe um conjunto a qual ambos pertencem[8]" (HALMOS, 1960, p. 9).

[7] Tradução nossa de: To every set A and to every condition S(x) there corresponds a set B whose elements are exactly those elements x of A for which S(x) holds.
[8] Tradução nossa de: for any two sets there exists a set that they both belong to.

Figura 3 – Ilustração do axioma do par

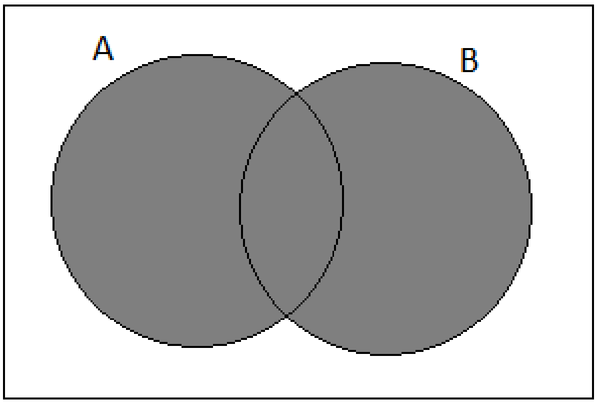


Fonte: dos autores

Suponhamos que um elemento pertença a dois ou mais conjuntos simultaneamente ou, que no mínimo, pertença a um deles, neste caso estaremos trabalhando com a Interseção ou União de conjuntos. Como afirmado anteriormente, existe um conjunto ao qual ambos os conjuntos que estamos trabalhando pertencem, deste modo, quando fala-se em união e interseção de conjuntos, estamos afirmando a existência de um conjunto que contenha os conjuntos que está sendo efetuado as operações de união e interseção. O *axioma da união* (ou axioma da soma) aponta que "para toda coleção de conjuntos existe um conjunto que contém todos os elementos que pertencem a pelo menos um conjunto da coleção dada[9]" (HALMOS, 1960, p. 12), ou seja, para um elemento pertencer ao conjunto união, ele deve pertencer a pelo menos algum conjunto da coleção de conjuntos que foi efetuada esta operação. De forma análoga, pode-se compreender a noção de interseção de conjuntos, pois para um elemento pertencer à interseção de conjuntos, ele deve pertencer a todos os conjuntos que pertencem a coleção de conjuntos em que esta sendo efetuado essa operação.

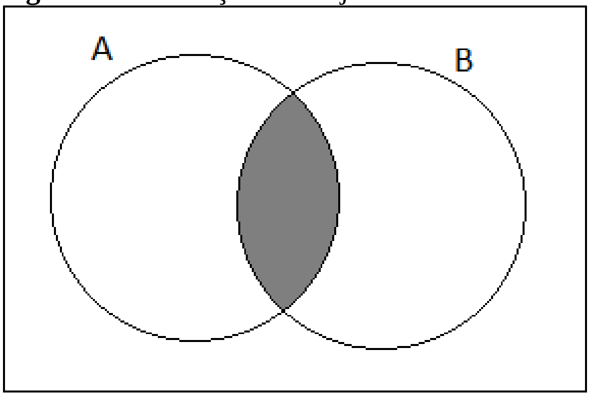
[9] Tradução nossa de: for every collection of sets there exists a set that contains all the elements that belong to at least one set of the given collection.

Figura 4 – União de conjuntos



Fonte: dos autores

Figura 5 – Interseção de conjuntos

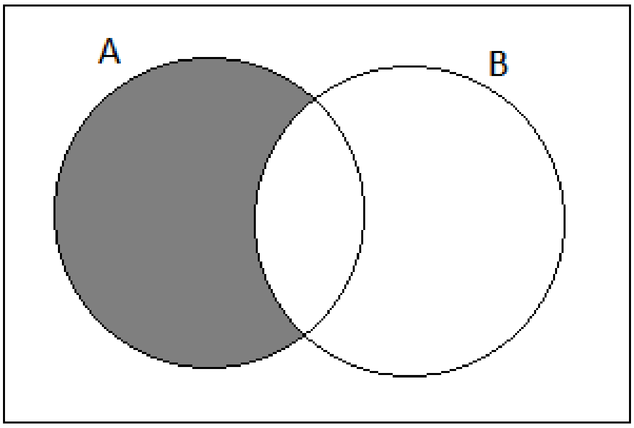


Fonte: dos autores

Por meio das operações de união e interseção pode-se destacar algumas propriedades relevantes ao uso da Teoria de Conjuntos as quais são associatividade, comutatividade, distributividade e idempotência da união e, também, da interseção (GERONIMO e FRANCO, 2008). Algumas dessas propriedades foram utilizadas neste texto.

Outras operações importantes na Teoria de Conjuntos são as de complemento, diferença e as partes de um conjunto. As operações de diferença e de complemento são semelhantes. A diferença entre os conjuntos A e B pode ser escrita como $A - B$, e é definida como $A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$, que se lê, x pertence a A tal que x não pertence a B, ou seja, a diferença entre o conjunto A e B são todos os elementos de A que não são elementos de B.

Figura 6 – Diferença entre os conjuntos A e B ou B^C



Fonte: dos autores

No caso de complemento, temos a seguinte notação B^C que se lê, B complementar ou complementar de B em A (assumindo $B \subset A$), e pode ser definida como $B^C = \{x \notin B \mid x \in A\}$ tomando $B \subset A$.

O conceito das partes de um conjunto, ou potência de um conjunto, está atrelada ao *axioma da potência* e, este axioma, afirma que "para cada conjunto existe uma coleção de conjuntos que contém todos os subconjuntos do conjunto dado [10]" (HALMOS, 1960, p. 19), e sua notação é dada por $\mathcal{P}(A)$, em que A é um conjunto. Tome, por exemplo, $A = \{a, b\}$ e $B = \{c, d, e\}$, deste modo teremos $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$ e $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{c, d, e\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$, observe que o número de elementos do conjunto das partes de A é igual a $2^2 = 4$ e do conjunto B é igual $2^3 = 8$, ou seja, pode-se determinar o número de elementos do conjunto das partes utilizando as potências de 2 de acordo com o número de elementos do conjunto 'original', deste modo, para um conjunto C que contenha *n* elementos teremos $\mathcal{P}(C)$ com 2^n elementos, a demonstração desta última afirmação é realizada utilizando indução finita e pode ser encontrada em livros de Álgebra ou de Teoria de Conjuntos. Além disso, veja que o conjunto vazio pertence ao conjunto das partes, pois $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ para qualquer A, pois "o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto" (GERONIMO e FRANCO, 2008, p. 107).

Apresentou-se neste capítulo apenas alguns conceitos da Teoria de Conjuntos, exatamente aqueles que foram utilizados na elaboração do instrumento que seria aplicado aos estudantes. No capítulo que segue, destaca-se o Pensamento Matemático Avançado (PMA) com base nas afirmações de Dreyfus (2002).

---

[10] Tradução nossa de: for each set there exists a collection of sets that contains among its elements all the subsets of the given set.

CAPÍTULO II

PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Ao ingressarmos no Ensino Superior, por vezes, ocorre um estranhamento referente à forma de apresentação dos conteúdos, a qual difere, e muito, daquela a qual estamos acostumados a lidar no Ensino Fundamental e Médio. Essa mudança pode ser esclarecida quando estudamos a respeito do Pensamento Matemático Elementar (PME) e do Pensamento Matemático Avançado (PMA), tais como as representações simbólica e mental. Para Tall (2002), a transição do PME para o PMA está na passagem da descrição para a definição e do convencimento para a prova formal. O PMA está intimamente ligado ao Ensino Superior, pois é neste nível de ensino em que se aprende a utilizar métodos de provas lógicas, muitas vezes com base em abstrações e deduções das definições formais (TALL, 2002).

Nesta transição de níveis, do ensino básico para o superior, estamos sujeitos a apresentar algumas dificuldades, que por muitas vezes estão associadas ao nível de complexidade dos assuntos que vão surgindo no decorrer do curso. Para Dreyfus (2002) o que pode distinguir os processos que são envolvidos do PME dos processos do PMA é a complexidade dos assuntos trabalhados, com isso, inferimos que dificuldades que apresentamos na aprendizagem de conceitos trabalhados apenas no Ensino Superior vem dessa transição, que pode não ter ocorrido no indivíduo.

2.1 PROCESSOS ENVOLVIDOS NO PMA SEGUNDO DREYFUS

Dreyfus (2002) apresenta os processos envolvidos PMA e afirma que não existe uma distinção clara entre os processos envolvidos no PME e o PMA. O que pode distingui-los é a complexidade e a forma que são tratados. Os processos que permitem uma maior percepção a respeito dessa distinção são os processos envolvidos na representação e os processos de abstração, pois "por meio da abstração e da representação pode-se passar de um nível de detalhe para outro e, assim, gerenciar a complexidade"[11] (p. 26).

[11] Tradução nossa de: by means of abstracting and representing, one can move from one level of detail to another and thus manage the complexity.

Dreyfus (2002) descreve três processos envolvidos na representação, o processo de representação, a comutação de representações e a tradução entre elas e a modelação. Além disso, ele descreve dois processos que estão ligados com a abstração, a generalização e a sintetização. Domingos (2003) afirma que esses processos aplicados ao PMA, podem vir a ser processos matemáticos e psicológicos simultaneamente.

Dreyfus (2002) descreve o processo de representação em uma junção de outros processos, o processo de representação simbólica, representação mental e a visualização. Ele salienta que a representação simbólica é indispensável na matemática moderna. Afirma ainda, que as representações têm um papel importante na matemática, por exemplo,

> se queremos falar sobre o grupo de permutações de n objetos, por exemplo, muitas vezes não é conveniente chamar o grupo simétrico de grau n e denotar pelo S_n. A notação S_né um sinal de que se refere, e, assim, representa ou simboliza, o grupo em questão; é uma representação simbólica do.[12] (p. 30).

A representação simbólica tem o objetivo de tornar mais fácil a comunicação assim ela é escrita ou falada, a representação mental possuí relação com os esquemas internos que um indivíduo usa na sua interação com o mundo externo (DOMINGOS, 2003). Quando pensamos em qualquer objeto matemático, o relacionamos com algo que já possuímos em nossa mente, ou seja, é o processo de uma representação mental do objeto que estamos considerando (Dreyfus, 2002). Quando representamos um conceito matemático geramos uma imagem instantânea.

As representações mentais são criadas na mente por meio de bases concretas de sistemas de representação, por exemplo, quando estudamos conjuntos podemos visualizar a representação por meio de símbolos, mas, também, por meio de sua representação gráfica, os diagramas de Euler-Venn. Estes tipos de representações são concretas, porém uma pessoa pode criar uma única imagem mental para um conceito o que pode acarretar em uma representação mental pobre, que não permite uma resolução de um problema de maneira flexível, enquanto o desejável para ser bem sucedido na matemática seria ter representações mentais ricas, ou seja, que possuem mais de uma representação concreta para um mesmo conceito e, assim, flexibilizar a resolução de um problema. As representações mentais de objetos e definições matemáticas podem ser distintas entre as pessoas, para Dreyfus (2002) isso pode gerar situações em que os alunos não conseguem compreender seus professores. Além disso, representações mentais

[12] Tradução nossa de: grupoif we want to talk about the group of permutations of n objects, for instance, it will often be convenient to call it the symmetric group of degree n and denote it by S_n. The notation S_n is a sign that refers to, and thus represents, or symbolizes, the group in question; it is a symbolic representation of the group.

pobres, ou imagens mentais pobres, podem atrapalhar estudantes na interpretação de problemas. Por menor que seja a mudança na estrutura de um problema pode acarretar em um bloqueio, um obstáculo, na resolução do problema por parte do estudante (DREYFUS, 2002).

Para Dreyfus (2002) a "visualização é um processo pelo qual as representações mentais podem vir a existir"[13] (p. 31), pois é a visualização a responsável por "enxergar" as construções concretas, tais como os símbolos e as representações gráficas de conceitos matemáticos, como por exemplo, o conceito de Conjuntos. Domingos (2003) apresenta um exemplo em que esses três processos envolvidos na representação são simultâneos,

> se considerarmos a construção de um gráfico de uma função, executamos um conjunto de processos que seguem certas regras que podem ser expressas em linguagem matemática, mas em simultâneo estamos a criar uma imagem mental do gráfico da função. Ambas as imagens criadas (mental e matemática) estão relacionadas e uma não pode aparecer sem a outra, pelo que elas representam os aspectos matemático e psicológico deste processo (p. 72).

O processo de Comutação de Representações está ligado ao anterior, o processo de representação, pois ressalta a importância da pluralidade de representações para um mesmo conceito, porém o domínio de diversas representações de um mesmo conceito não garante o uso flexível delas na resolução de problemas. Dreyfus (2002) comenta da possibilidade de ser necessário a mudança de representação para uma outra sempre que isso se mostre mais eficiente para a resolução de um problema. Podemos utilizar o exemplo de Funções, que muitas vezes são necessárias mais de uma representação para conseguir resolver um problema, seja ela gráfica, algébrica, tabular e, às vezes, por diagramas de conjuntos, precisamos fazer a comutação entre essas representações do conceito.

A Tradução por sua vez está ligada ao processo de Comutação de Representações. Podemos ver o papel da Tradução na formulação de um enunciado de um problema matemático, ou seja, um professor, ao elaborar um problema vai traduzir os conceitos matemáticos em um contexto que seja passível de compreensão por parte do aluno, mas isso não significa que o aluno vá fazer uma correspondência, ou mesmo consiga traduzir novamente, para o conceito que o professor utilizou na elaboração. Para Dreyfus (2002, p. 31) "esta correspondência pode ser obvia para o professor, mas para o aluno a construção de esquemas mentais adequados é uma tarefa difícil que precisa ser apoiada por uma ação explicita do

[13] Tradução nossa de: Visualizing is one process by which mental representations can come into being.

professor”[14]. No PMA pode ser entendida como a transposição de uma formulação de uma propriedade matemática para outra (DOMINGOS, 2003).

O termo modelação usualmente é abordado quando precisamos encontrar uma representação matemática para um objeto, inicialmente, “não-matemático” (DREYFUS, 2002). Nos processos de representação esse termo significa “a construção de uma estrutura matemática ou teoria que incorpora características essenciais do objeto, do sistema ou processo a ser descrito”[15] (DREYFUS, 2002, p. 32). O processo de modelação pode ser visto como análogo ao processo de representação, pois a representação mental está associada com o modelo matemático. A modelação de uma situação é da ordem física, a construção de um conceito concreto, enquanto o modelo é de ordem matemática, pois o objeto a ser representado é uma estrutura matemática e o modelo é uma estrutura mental (DREYFUS, 2002). A representação mental está relacionada com o modelo matemático bem como o modelo matemático está relacionado com o sistema físico, Dreyfus (2002), afirma que cada um é parte do outro, ou seja, eles podem refletir as propriedades do outro e, assim, aumenta a capacidade da manipulação mental de um sistema que estamos considerando.

Os processos descritos anteriormente são possíveis de serem alcançados já nas séries iniciais, Dreyfus (2002, p. 34) afirma que “até mesmo as crianças pequenas criam representações mentais de qualquer coisa que pensam, e, particularmente, dos objetos matemáticos do pensamento, tais como números ou triângulos”[16]. Com isso, quando um aluno consegue desenvolver a capacidade de abstrair conscientemente situações matemáticas podemos inferir que ele alcançou o nível de Pensamento Matemático Avançado.

Para a Abstração ser alcançada por um indivíduo é necessário que ele domine os processos de representação e, além disso, os processos de generalização e de síntese, os quais serão descritos a seguir.

Generalizar para Dreyfus (2002) é derivar ou induzir por meio de indicações para encontrar pontos comuns, assim expandir os domínios de validade. A experiência de um aluno pode levá-lo a conseguir generalizar algum conceito matemático, por exemplo, por meio

[14] Tradução nossa de: This correspondence may be obvious to the teacher, but for the student the construction of the appropriate mental schemata is a difficult task which needs to be supported by explicit teacher action.
[15] Tradução nossa de: constructing a mathematical structure or theory which incorporates essential features of the object, system or process to be described.
[16] Tradução nossa de: even small children create mental representations of anything they think about, and particularly of mathematical objects of thought, such as numbers or triangles.

de sua experiência com conjuntos finitos ele pode estabelecer uma conexão com os conjuntos infinitos e, assim, generalizar o conceito.

O processo de síntese pode ser observado quando um estudante consegue fazer ligações de partes distintas de um mesmo conceito, por exemplo, em Teoria de Conjuntos temos os conceitos de elementos de conjuntos, de união e interseção, de inclusão, entre outros. Dreyfus (2002) diz que é esperado que todas essas partes distintas sejam fundidas em uma única imagem, em que todas possam ser abrangidas e inter-relacionadas. E esse "processo de fusão em uma única imagem é uma síntese"[17] (DREYFUS, 2002, p. 35).

Dreyfus (2002) cita que por meio da síntese é possível dizer que a matemática é, de certa forma, compreensível. No entanto, vale ressaltar que Dreyfus (2002) afirma ainda que é muito difícil para o professor, especificamente o matemático, se colocar no lugar do estudante que ainda não atingiu o processo de síntese, pois para ele esse processo é irreversível, ou seja, uma vez atingido o processo de síntese não é possível distinguir as partes de uma imagem.

Mesmo assim, Dreyfus (2002) afirma que é possível que os professores contribuam com o processo de síntese que deve ser realizado pelos estudantes, pois quando o professor faz resumos, estabelece conexões e relações entre os conceitos, de certa forma, ele acaba ajudando nesse processo. Outro meio pelo qual o professor pode contribuir no processo de síntese do estudante, é realizar uma grande quantidade de trabalhos que detalhem os conceitos estudados.

"[...] a maior parte da matemática deriva da abstração"[18] (DREYFUS, 2002, p. 36), pois, por mais que a abstração esteja intimamente ligada com os processos de generalização e de síntese, é com a abstração que os estudantes aumentam a suas capacidades cognitivas. A abstração é capaz de realizar uma reconstrução mental no indivíduo. O estudante deverá se concentrar nas relações que existem entre os conceitos para poder compreender o campo estudado, por exemplo, em Teoria de Conjuntos o estudante deverá ser capaz de relacionar os conceitos de conjuntos a fim de compreender o que são Conjuntos.

O que destaca o processo de abstração dentre os outros é que ele é intrínseco a capacidade de construção de estruturas mentais. Para Dreyfus (2002),

> a natureza do processo mental de abstrair é, no entanto, muito diferente do de generalização e de síntese. Abstração é primeiro acima de tudo um processo

---

[17] Tradução nossa de: process of merging into a single picture is a synthesis.
[18] Tradução nossa de: much of the power of mathematics derives from abstraction.

> construtivo -a construção de estruturas mentais e de estruturas matemáticas, ou seja, de relações entre as propriedades e os objetos matemáticos[19] (p.37).

Dreyfus (2002) relata que existe uma dificuldade que pertence à abstração: como gerar estruturas mentais se na grande maioria das vezes essas estruturas estão ligadas a imagens visuais? Ele não traz uma resposta definida a esse tipo de pergunta. Entretanto, Dreyfus (2002) afirma que imagens visuais ajudam os estudantes a estabelecer uma representação mental, ou seja, uma estrutura mental, contudo para conceitos matemáticos abstratos essas imagens visuais são inexistentes, incompletas ou enganosas.

No PMA os processos de representação e de abstração são complementares. Para Dreyfus (2002) de um lado o conceito pode ser entendido por meio de várias de suas representações, por outro as "representações são sempre representações de algum conceito mais abstrato"[20] (p. 38).

Ambos os processos podem ser utilizados na aprendizagem. Tendo isso, Dreyfus (2002) define os processos de aprendizagem em quatro etapas

> • Usando uma única representação;
> • Usando mais de uma representação em paralelo;
> • Fazendo ligações entre representações paralelas;
> • Integrando representações e flexibilizando a comutação entre elas [21] (p. 39).

Dreyfus (2002, p. 39) explica que na primeira etapa "os processos começam a partir de um caso concreto, uma única representação"[22]. Na segunda etapa são usadas várias representações de um mesmo objeto (conceito) matemático em paralelo, para Dreyfus (2002, p. 39) o "processo de transição para o conceito abstrato depende de forma essencial sobre as ligações entre as representações que são formadas"[23], com isso, chegamos a terceira etapa, em que, as ligações permitem aos estudantes mudar de representações, o que, segundo Dreyfus

[19] Tradução nossa de: the nature of the mental process of abstracting is, however, very much different from that of generalizing and from that of synthesizing. Abstracting is first and foremost a constructive process – the building of mental structures from mathematical structures, i.e. from properties of and relationships between mathematical objects.
[20] Tradução nossa de: representations are always representations of some more abstract concept.
[21] Tradução nossa de: • Using a single representation;
• Using more than one representation in parallel;
• Making links between parallel representations;
• Integrating representations and flexible switching between them.
[22] Tradução nossa de: processes start from a concrete case, a single representation.
[23] Tradução nossa de: process of transition to the abstract concept depends in an essential manner on the links between the representations that are formed.

(2002, p. 39), pode “torna-los cientes dos conceitos subjacentes”[24], e por sua vez, “influenciar positivamente a abstração”[25]. E, finalmente, na quarta etapa acontece um processo de integração entre as diferentes representações. Resumindo o que já foi citado anteriormente, para ser parte do processo de abstração temos: “as ligações, as relações e as propriedades comuns” [26](DREYFUS, 2002, p. 39). E quando esse processo for concluído o estudante terá formado uma noção abstrata de um determinado conceito e, assim, ele tem disponível esse conceito. Deste modo, quando o estudante necessitar resolver um problema em que esse conceito seja necessário, talvez seja preciso voltar a uma ou mais de suas representações concretas, mas isso não é uma coisa ruim, pelo contrário, o “conceito abstrato é capaz de fazer exatamente isso e fazê-lo de maneira controlada”[27] (DREYFUS, 2002, p. 39), várias representações do mesmo objeto podem ajudar o estudante a fazer a transição da compreensão concreta limitada para uma compreensão mais abstrata e flexível.

Reunimos todas essas características do PMA no quadro 1, sintetiza os processos envolvidos na abstração e na representação.

[24] Tradução nossa de: makes them aware of the underlying.
[25] Tradução nossa de: positively influence abstraction.
[26] Tradução nossa de: the links, the relationships, the common properties.
[27] Tradução nossa de: abstract concept is that one is able to do precisely that, and to do it in a controlled manner.

Quadro 3 – Características do PMA com base em Dreyfus (2002)

<table>
<tr><td rowspan="7">PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO</td><td rowspan="5">REPRESENTAÇÃO</td><td rowspan="3">Processos de Representação</td><td>Representação Simbólica</td><td>Representação por meio de símbolos, escritos ou falados.</td></tr>
<tr><td>Representação Mental</td><td>Imagens concretas de conceitos matemáticos, esquemas ou imagens que um indivíduo possui.</td></tr>
<tr><td>Visualização</td><td>É o processo pelo qual as representações mentais podem vir a existir.</td></tr>
<tr><td>Processo de Comutação de Representações e Tradução</td><td colspan="2">Possuir uma pluralidade de representações de um mesmo conceito, efetuar mudanças de representações quando forem necessárias. Fazer correspondência de um enunciado de um problema com conceitos matemáticos.</td></tr>
<tr><td>Modelação</td><td colspan="2">Representação matemática para um objeto, construir um conceito concreto.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ABSTRAÇÃO</td><td>Generalização</td><td colspan="2">Derivar ou induzir por meio de indicações para encontrar pontos comuns, assim expandir os domínios de validade.</td></tr>
<tr><td>Síntese</td><td colspan="2">Construir ligações distintas de um mesmo conceito, fundir partes distintas de um todo em uma única imagem.</td></tr>
</table>

Fonte: dos autores

No próximo capitulo trataremos dos aspectos metodológicos utilizados no presente trabalho, alguns conceitos e modo que utilizamos.

Capítulo III

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa é caracterizada como exploratória, de natureza qualitativa, de cunho interpretativo. De acordo com Gerhardt e Silveira (2009), a pesquisa exploratória

> [...] tem como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses. A grande maioria dessas pesquisas envolve: (a) levantamento bibliográfico; (b) entrevistas com pessoas que tiveram experiências práticas com o problema pesquisado; e (c) análise de exemplos que estimulem a compreensão (p. 35).

Segunda Bogdan e Biklen (1994) esta pesquisa é considerada qualitativa, pois foi constituída em ambiente natural em que o investigador se torna o principal instrumento de pesquisa.

Foram propostas tarefas, envolvendo conteúdos de Teoria de Conjuntos, a 21 estudantes da disciplina de Estruturas Algébricas[28] que está inserida no segundo ano de Matemática, Habilitação: Licenciatura, da Universidade Estadual de Londrina. A aplicação se deu em duas aulas no dia 11 de abril de 2016, segunda semana do ano letivo de 2016. Concebemos essa data por ser início da disciplina de Estruturas Algébricas que tem como pré-requisito a disciplina de Fundamentos de Matemática, onde é apresentado aos estudantes a Teoria de Conjuntos. Deste modo, poderíamos afirmar que todos os estudantes já haviam passado por pelo menos uma disciplina que tem a Teoria de Conjuntos em sua ementa.

As tarefas foram realizas individualmente pelos estudantes, e eram entregues em ordem, uma a uma, conforme um estudante terminava uma tarefa a ele era entregue a posterior. Todos os estudantes receberem todas as tarefas no período de duas aulas, porém, foram analisadas as produções escritas de 20 estudantes, pois um estudante não quis participar da pesquisa. A seguir apresentamos as tarefas que foram aplicadas com possíveis resoluções e os possíveis processos do PMA que elas poderiam evidenciar.

[28] Ementa do Curso de Estruturas Algébricas: Teoria elementar dos números. Grupos: subgrupos, subgrupos normais, grupos quocientes. Homomorfismos de grupo. Grupo de permutações. Anéis: subanéis, ideais, anéis quocientes, homomorfismos de anéis. Anéis de polinômios. Extensões de corpos sobre os racionais. Construção com régua e compasso. Aspectos históricos e epistemológicos dos conteúdos trabalhados.

3.1 POSSÍVEIS SOLUÇÕES

1) (Adaptado de UEL – 2015) Considere que 300 homens estavam construindo a Torre de Babel, que eles receberam uma numeração de 1 a 300 e que foram divididos em três grupos: o grupo A formado pelos homens com numeração múltipla de 2, o grupo B formado pelos homens com numeração múltipla de 3 e o grupo C formado pelos demais homens. Cada um dos homens pertencentes somente ao grupo A ou somente ao grupo B passou a falar idiomas distintos entre si. Os homens do grupo C permaneceram falando o idioma original, bem como os homens cuja numeração pertencia, simultaneamente, aos grupos A e B. Nessas condições responda quantos foram os idiomas falados na Torre de Babel, após essa ação.

A quantidade de múltiplos de 2 é igual a 150, de múltiplos de 3 é igual 100 e a quantidade de múltiplas de 2 e 3 simultaneamente é igual a 50. Sendo assim, temos:

$n(A) = 150$

$n(B) = 100$

$n(A \cap B) = 50$

$n(C) = 100$

Deste modo, o número de idiomas falados na Torre de Babel é igual á $n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) + 1 = 150 + 100 - (2 \cdot 50) + 1 = 151$

2) Defina o que são conjuntos:

Como afirmamos anteriormente, o conceito de conjunto não possui uma definição formal, sendo assim, é algo concebido na intuição, deste modo, iremos considerar como valida qualquer afirmação que descreva quaisquer conjuntos.

3) Sejam os conjuntos A, B e C definidos por:

$A = \{a, b, c, d, e\}$;

$B = \{d, e, f, g\}$;

$C = \{a, b, c\}$.

Mostre, se for possível, as operações de conjuntos a seguir e justifique suas respostas.

a. $C \subset A$;

Verdadeiro, pois o conjunto C possui apenas os elementos a, b, c e esses elementos pertencem ao conjunto A, logo o conjunto C está contido em no conjunto A.

b. $B \subset A$;

Falso, pois o conjunto B possui o elemento f e este elemento não pertence ao conjunto A, logo o conjunto B não está contido no conjunto A.

c. $A \subset C$;

Falso, pois o conjunto A possui o elemento d e este elemento não pertence ao conjunto C, logo o conjunto A não está contido no conjunto C.

d. $A \cap C = \emptyset$;

Falso, pois a interseção entre os conjuntos A e C é o próprio conjunto C, pois ele é composto por elementos que pertencem aos dois conjuntos simultaneamente.

e. $A \cap B = \{d\}$;

Falso, pois a interseção entre os conjuntos A e B compõem o conjunto {d,e}.

f. $\emptyset \subset A$;

Verdadeiro, pois o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

g. $\emptyset \subset B$;

Verdadeiro, pois o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

h. $a \in A$;

Verdadeiro, pois o elemento a é um elemento do conjunto A.

i. $\{a\} \in A$;

Falso, pois o conjunto que tem a como elemento não pertence ao conjunto A.

j. $\{a\} \subset A$;

Verdadeira, pois $\{a\}$ é um subconjunto do conjunto A.

k. $a \subset A$;

Falso, pois a é um elemento do conjunto A e não um subconjunto do conjunto A.

l. $\mathcal{P}(A)$;

São todos os subconjuntos próprios de A. A cardinalidade do conjunto das partes de A é igual a dois elevado a cardinalidade do conjunto A. Nesse caso, $2^5 = 32$. E $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,e\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{b,e\}, \{c,d\}, \{c,e\}, \{d,e\},$ $\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,e\}, \{a,c,d\}, \{a,c,e\}, \{a,d,e\}, \{b,c,d\}, \{b,c,e\}, \{b,d,e\}, \{c,d,e\},$ $\{a,b,c,d\}, \{a,b,d,e\}, \{a,b,c,e\}, \{a,c,d,e\}, \{b,c,d,e\}, \{a,b,c,d,e\}\}$

m. $\mathcal{P}(C)$;

São todos os subconjuntos próprios de C. A cardinalidade do conjunto das partes de C é igual a dois elevado a cardinalidade do conjunto C. Nesse caso, $2^3 = 8$. E $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

n. $A - B$;

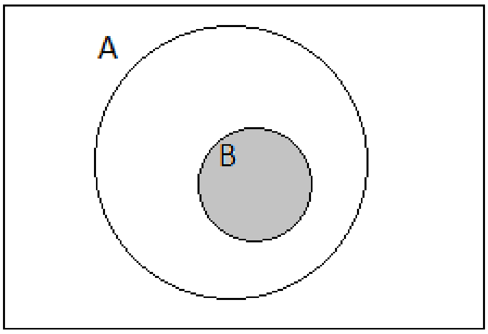
São todos os elementos de A que não pertencem ao conjunto B. Neste caso, $A - B = \{a,b,c\} = C$, que é o conjunto C.

o. $B \cup C$.

São todos os elementos do conjunto B e os elementos do conjunto C, ou seja, $B \cup C = \{a,b,c,d,e,f,g\}$

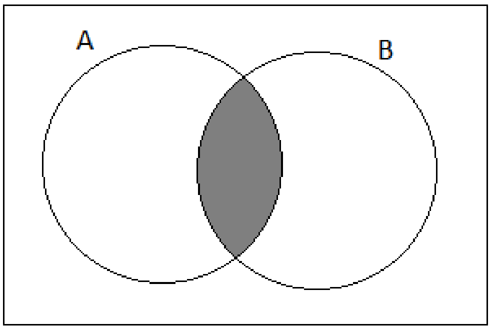
4) Escreva o que cada diagrama a seguir representa e justifique suas respostas.

a.



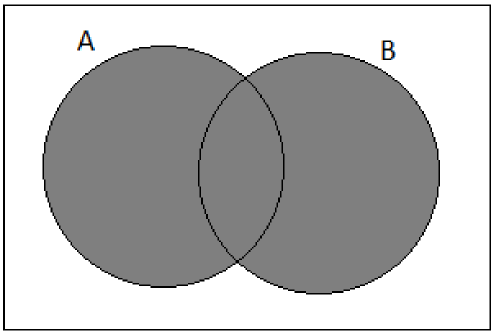
$B \subset A$, pois a representação do diagrama indica que B está dentro de A.

b.



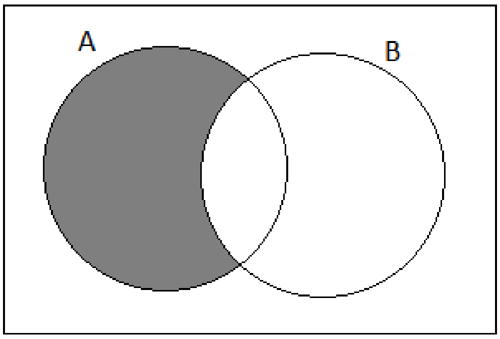
$A \cap B$, pois a parte destaca é justamente na interseção entre A e B. São os elementos comuns aos dois.

c.



$A - B$ ou B^C, pois estão destacados apenas a parte que pertence somente ao conjunto A.

d.



$A \cup B$, pois são todos os elementos dos dois conjuntos que estão destacados no diagrama.

5) (GERONIMO e FRANCO, 2008) Sejam o A, B e C conjuntos quaisquer, demonstre que:

a. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

Seja $x \in A \cup (B \cup C) \Longrightarrow x \in A \; ou \; x \in (B \cup C) \Longrightarrow x \in A \; ou \; x \in B \; ou \; x \in C \Longrightarrow x \in (A \cup B) \; ou \; x \in C \Longrightarrow x \in (A \cup B) \cup C \Longrightarrow A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$.

Seja $x \in (A \cup B) \cup C \Longrightarrow x \in (A \cup B) \; ou \; x \in B \Longrightarrow x \in A \; ou \; x \in B \; ou \; x \in C \Longrightarrow x \in A \; ou \; x \in (A \cup B) \Longrightarrow x \in A \cup (B \cup C) \Longrightarrow (A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$.

Portanto $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

Seja $x \in A \cap (B \cap C) \Longrightarrow x \in A \; e \; x \in (B \cap C) \Longrightarrow x \in A \; e \; x \in B \; e \; x \in C \Longrightarrow x \in (A \cap B) \; e \; x \in C \Longrightarrow x \in (A \cap B) \cap C \Longrightarrow A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$.

Seja $x \in (A \cap B) \cap C \Longrightarrow x \in (A \cap B) \; e \; x \in B \Longrightarrow x \in A \; e \; x \in B \; ou \; x \in C \Longrightarrow x \in A \; e \; x \in (A \cap B) \Longrightarrow x \in A \cap (B \cap C) \Longrightarrow (A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$.

Portanto $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

c. $A \cup B = B \cup A$;

Seja $x \in A \cup B \Longrightarrow x \in A \; ou \; x \in B \Longrightarrow x \in B \; ou \; x \in A \Longrightarrow x \in B \cup A \Longrightarrow A \cup B \subset B \cup A$.

Seja $x \in B \cup A \Longrightarrow x \in B \; ou \; x \in A \Longrightarrow x \in A \; ou \; x \in B \Longrightarrow x \in A \cup B \Longrightarrow B \cup A \subset A \cup B$.

Portanto $A \cup B = B \cup A$.

d. $A \cap B = B \cap A$;

Seja $x \in A \cup B \Longrightarrow x \in A \; ou \; x \in B \Longrightarrow x \in B \; ou \; x \in A \Longrightarrow x \in B \cup A \Longrightarrow A \cup B \subset B \cup A$.

Seja $x \in B \cup A \Longrightarrow x \in B \; ou \; x \in A \Longrightarrow x \in A \; ou \; x \in B \Longrightarrow x \in A \cup B \Longrightarrow B \cup A \subset A \cup B$.

Portanto $A \cup B = B \cup A$.

e. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

Seja $x \in A \cup (B \cap C) \Longrightarrow x \in A \; ou \; x \in B \cap C \Longrightarrow x \in A \; ou \; (x \in B \; e \; x \in C) \Longrightarrow (x \in A \; ou \; x \in B) \; e \; (x \in A \; ou \; x \in C) \Longrightarrow x \in A \cup B \; e \; x \in A \cup C \Longrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Longrightarrow A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Seja $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Longrightarrow x \in A \cup B \; e \; x \in A \cup C \Longrightarrow (x \in A \; ou \; x \in B) \; e \; (x \in A \; ou \; x \in C) \Longrightarrow x \in A \; ou \; (x \in B \; e \; x \in C) \Longrightarrow x \in A \; ou \; x \in B \cap C \Longrightarrow x \in A \cup (B \cap C) \Longrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.

Portanto $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

f. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

Seja $x \in A \cap (B \cup C) \Longrightarrow x \in A\ e\ x \in B \cup C \Longrightarrow x \in A\ e\ (x \in B\ ou\ x \in C) \Longrightarrow (x \in A\ e\ x \in B)\ ou\ (x \in A\ e\ x \in C) \Longrightarrow x \in A \cap B\ ou\ x \in A \cap C \Longrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Longrightarrow A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Seja $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Longrightarrow x \in A \cap B\ ou\ x \in A \cap C \Longrightarrow (x \in A\ e\ x \in B)\ ou\ (x \in A\ e\ x \in C) \Longrightarrow x \in A\ e\ (x \in B\ ou\ x \in C) \Longrightarrow x \in A\ e\ x \in B \cup C \Longrightarrow x \in A \cap (B \cup C) \Longrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

Portanto $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

g. $A \cup A = A$;

Seja $x \in A \cup A \Longrightarrow x \in A\ ou\ x \in A \Longrightarrow x \in A \Longrightarrow A \cup A \subset A$.

Seja $x \in A \Longrightarrow x \in A \Longrightarrow x \in A\ ou\ x \in A \Longrightarrow A \subset A \cup A$.

Portanto $A \cup A = A$.

h. $A \cap A = A$;

Seja $x \in A \cap A \Longrightarrow x \in A\ e\ x \in A \Longrightarrow x \in A \Longrightarrow A \cap A \subset A$.

Seja $x \in A \Longrightarrow x \in A \Longrightarrow x \in A\ e\ x \in A \Longrightarrow A \subset A \cap A$.

Portanto $A \cap A = A$.

i. $\emptyset \subseteq A$, para todo A.

Suponha que $\emptyset \nsubseteq A \Longrightarrow \exists\ x \in \emptyset\ tal\ que\ x \notin A, um\ absurdo$! Pois o vazio não possui elementos, logo $\emptyset \subseteq A$, para todo A.

j. $A - B = A \cap B^C$

Seja $x \in A - B \Longrightarrow x \in A\ e\ x \notin B \Longrightarrow x \in A\ e\ x \in B^C \Longrightarrow x \in A \cap B^C \Longrightarrow A - B \subset A \cap B^C$.

Seja $x \in A \cap B^C \Longrightarrow x \in A\ e\ x \in B^C \Longrightarrow x \in A\ e\ x \notin B \Longrightarrow x \in A - B \Longrightarrow A \cap B^C \subset A - B$.

Portanto $A - B = A \cap B^C$

Assim, ao verificar as tarefas desenvolvidas pelos participantes com a intenção de identificar os processos do PMA em relação a Teoria de Conjuntos, iremos analisar as suas produções escritas seguindo os procedimentos:

- Codificação dos documentos;
- Primeira leitura;
- Constituição do corpus;
- Exploração do material;
- Análise do material;
- Interpretação das resoluções dos estudantes;
- Obtenção dos dados.

O capítulo a seguir irá tratar das análises realizadas por meio das resoluções dos estudantes que participaram da presente pesquisa.

CAPÍTULO IV

ANÁLISES

Cada estudante preencheu uma ficha no início da aplicação do instrumento, com isso, fomos capazes de identificar algumas das características dos estudantes. As idades dos mesmos variavam entre os 18 e 29 anos de idade e o ano de ingresso no curso de Matemática de 2010 a 2015. Podemos observar no quadro a seguir as características dos estudantes analisados.

Quadro 4 – Características dos Estudantes Analisados

<table>
<tr><th colspan="8">Faixa Etária dos Estudantes</th></tr>
<tr><th>18</th><th>19</th><th>20</th><th>21</th><th>22</th><th>25</th><th>28</th><th>29</th></tr>
<tr><td>6</td><td>6</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><th colspan="8">Ano de Ingresso no Curso de Matemática</th></tr>
<tr><th colspan="2">2010</th><th colspan="2">2013</th><th colspan="2">2014</th><th colspan="2">2015</th></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">17</td></tr>
<tr><th colspan="8">Quantas vezes cursou a disciplina de Estruturas Algébricas</th></tr>
<tr><th colspan="4">Primeira Vez</th><th colspan="4">Mais de uma vez</th></tr>
<tr><td colspan="4">19</td><td colspan="4">1</td></tr>
<tr><th colspan="8">Habilitações no Curso de Matemática</th></tr>
<tr><th colspan="4">Licenciatura</th><th colspan="4">Licenciatura e Bacharelado</th></tr>
<tr><td colspan="4">16</td><td colspan="4">4</td></tr>
<tr><th colspan="8">Estudantes que atuaram como professores</th></tr>
<tr><th colspan="4">Sim</th><th colspan="4">Não</th></tr>
<tr><td colspan="4">3</td><td colspan="4">17</td></tr>
<tr><th colspan="8">Estudantes que possuem outra graduação</th></tr>
<tr><th colspan="4">Sim</th><th colspan="4">Não</th></tr>
<tr><td colspan="4">1</td><td colspan="4">19</td></tr>
</table>

Fonte: dos autores

4.1 ANÁLISES DAS TAREFAS

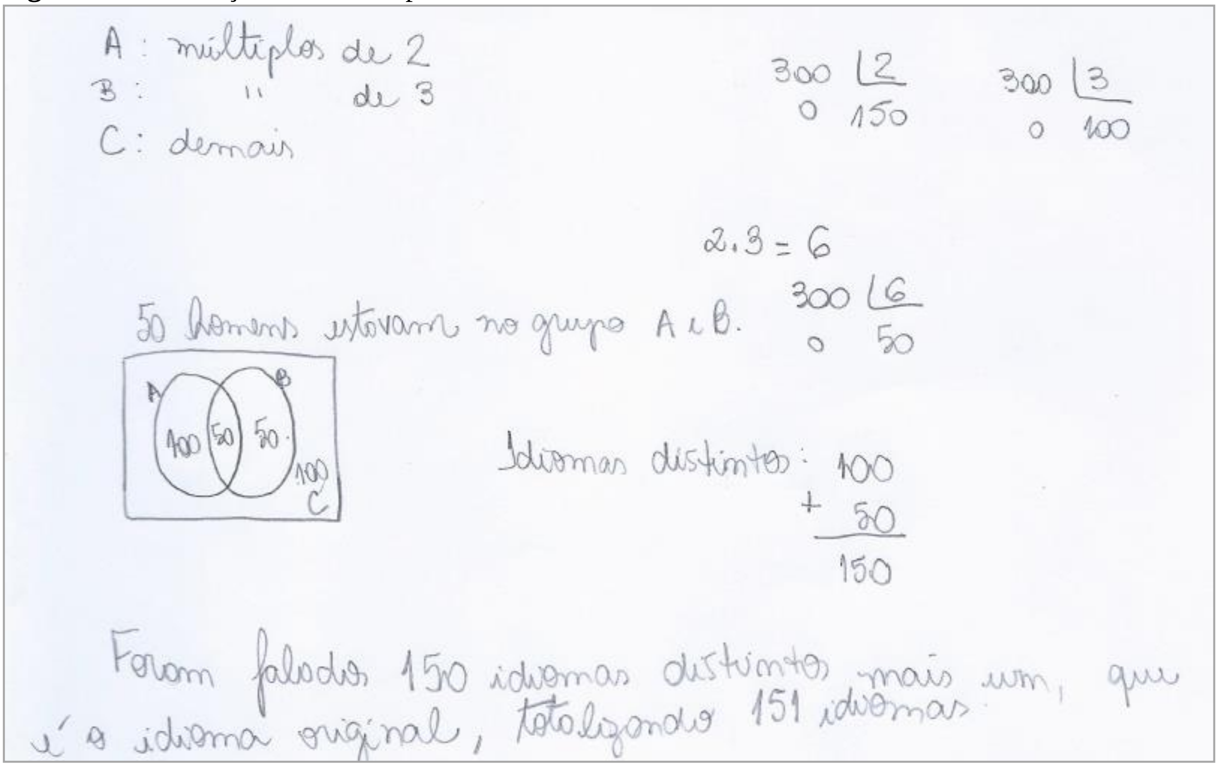
4.1.1 Estudante E1

Tarefa 1

O estudante E1 utilizou a ideia de conjuntos para a resolução desta tarefa, ele usou a representação do diagrama de Venn-Euller e identificou quais eram os elementos de cada conjunto por meio das informações dadas no enunciado. Percebeu a interseção entre os conjuntos A e B e, por fim, conseguiu chegar à solução do problema proposto.

Colocou, entretanto, na representação dos elementos dos conjuntos, a quantidade de elementos destes, não os elementos que pertenciam aos conjuntos.

Figura 7 – Resolução da tarefa 1 pelo estudante E1


A : múltiplos de 2
B : " de 3
C: demais

300 |2
0 150

300 |3
0 100

2.3 = 6

50 homens estavam no grupo A e B.

300 |6
0 50

Idiomas distintos: 100
+ 50
150

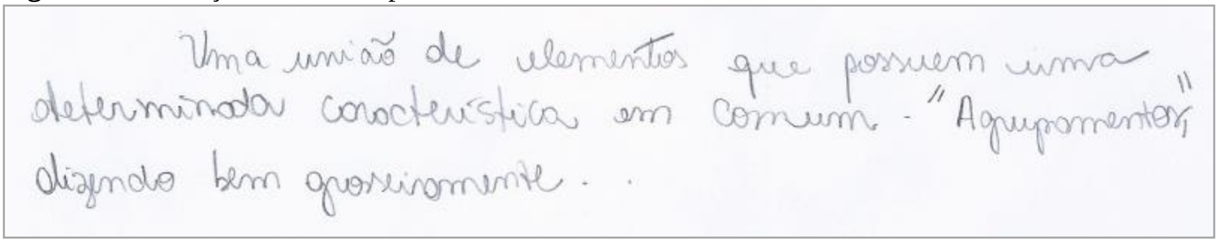
Foram falados 150 idiomas distintos mais um, que é o idioma original, totalizando 151 idiomas.

Fonte: resolução do estudante E1

Tarefa 2

Apresenta o que são conjuntos e, ao dizer que os conjuntos são apenas uma união de elementos, ele se esquece do conjunto vazio e de conjuntos unitários. Para ele, conjuntos são agrupamentos.

Figura 8 – resolução da tarefa 2 pelo estudante E1



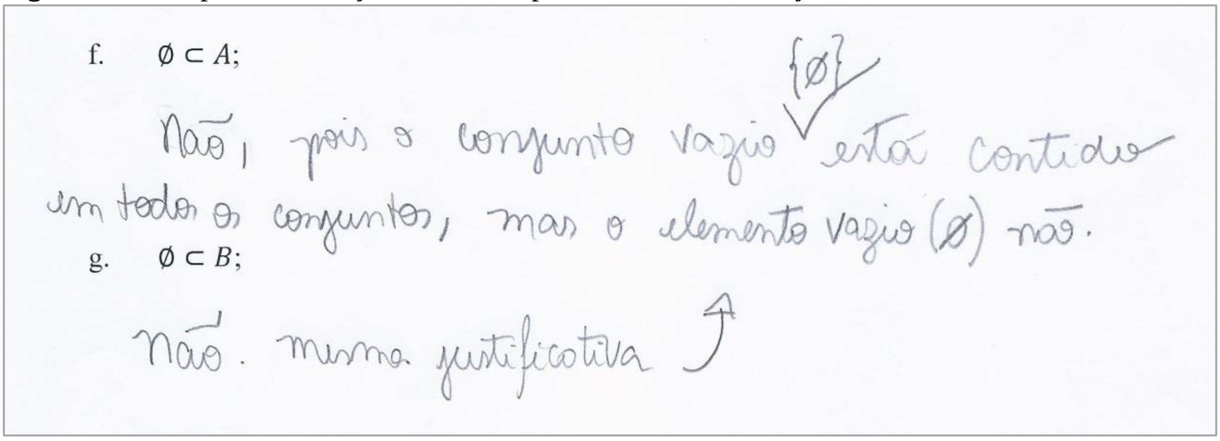
Uma união de elementos que possuem uma determinada caracteristica em comum. - "Agrupamentos" dizendo bem grosseiramente. .

Fonte: resolução do estudante E1

Tarefa 3

E1 utiliza bem as notações, as definições e axiomas, contudo não compreendeu a representação do conjunto vazio (∅) considerando-a um elemento.

Figura 9 – exemplo de resolução da tarefa 3 pelo estudante E1, conjunto vazio



f. $\emptyset \subset A$;

Não, pois o conjunto vazio {∅} está contido em todos os conjuntos, mas o elemento vazio (∅) não.

g. $\emptyset \subset B$;

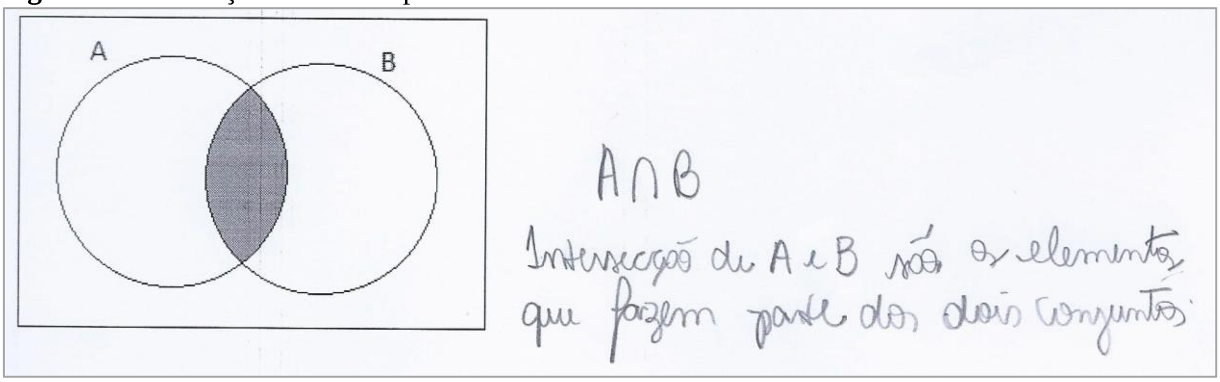
Não. mesma justificativa

Fonte: resolução do estudante E1

Tarefa 4

Ele descreveu o que cada diagrama representava, além disso, justificou com coerência o significado de cada operação que estava representada.

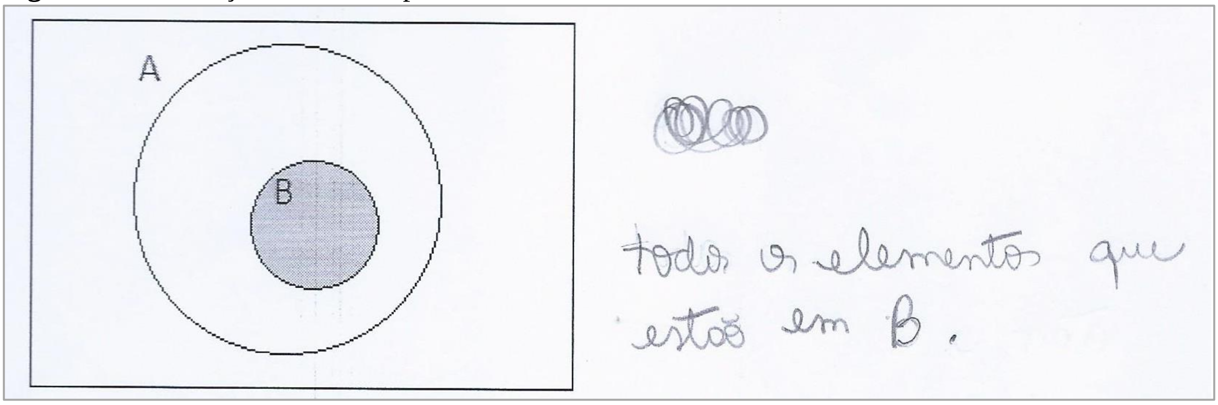
Figura 10 – resolução da tarefa 4 pelo estudante E1



Fonte: resolução do estudante E1

No item a) ele descreveu o diagrama, mas não escreveu a operação que estava sendo representada.

Figura 11 – resolução da tarefa 4 pelo estudante E1, inclusão

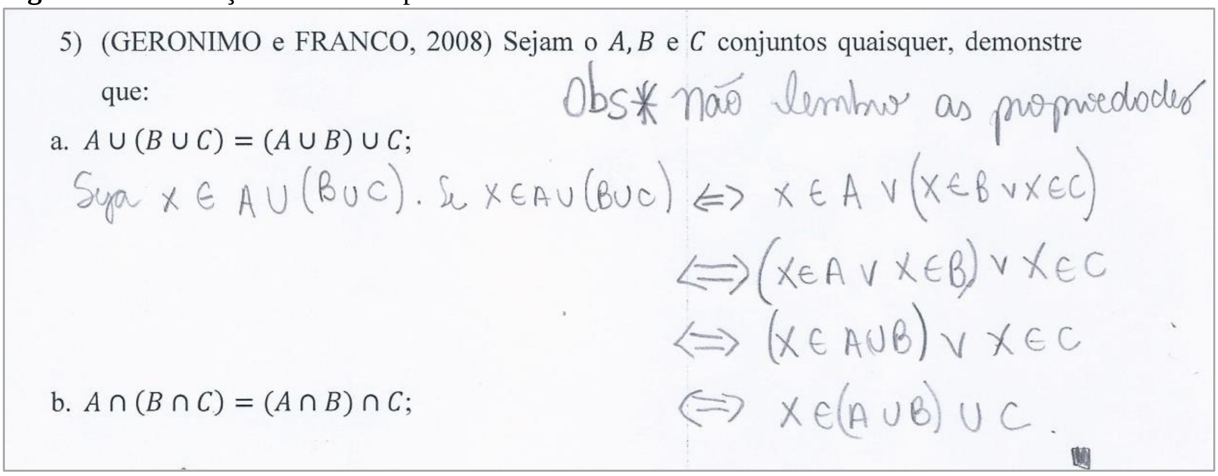


Fonte: resolução do estudante E1

Tarefa 5

O estudante não conseguiu resolver todos os itens dessa tarefa, no entanto, ao provar algumas propriedades de conjuntos: associatividade, comutatividade e de idempotência, ele utilizou equivalências lógicas das leis associativa, comutativa e de idempotência, mas parece não se lembrar dos nomes dessas propriedades; ele faz uma observação que não se lembra das propriedades, contudo as utiliza.

Figura 12 – resolução da tarefa 5 pelo estudante E1



5) (GERONIMO e FRANCO, 2008) Sejam o A, B e C conjuntos quaisquer, demonstre que:

Obs* não lembro as propriedades

a. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

Seja $x \in A \cup (B \cup C)$. Se $x \in A \cup (B \cup C) \iff x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$

$\iff (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$

$\iff (x \in A \cup B) \vee x \in C$

$\iff x \in (A \cup B) \cup C$.

b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

Fonte: resolução do estudante E1

Ele não provou a propriedade distributiva. Ele poderia ter recorrido à mesma estratégia. E, além disso, não mostrou que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto. Infere-se que esse fato se deva a dificuldade de compreender o símbolo $\emptyset$ como sendo o conjunto vazio (ver tarefa 3). Além disso, não conseguiu provar que a diferença entre os conjuntos A e B é igual a interseção do conjunto A com o complementar do conjunto B no conjunto A.

Características do PMA manifestadas pelo estudante E1

O estudante E1, ao resolver as tarefas propostas, demonstra compreender alguns símbolos usados na Teoria de Conjuntos, bem como utilizá-los em suas resoluções. Ele consegue compreender mais de uma representação do mesmo conceito e ainda as converte para outra representação, como pode ser observado na tarefa 4. Ele consegue descrever matematicamente as informações apresentadas em um enunciado. Mostra compreender que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto, mas quando a ele é proposto que se demonstre isso, ele não o faz.

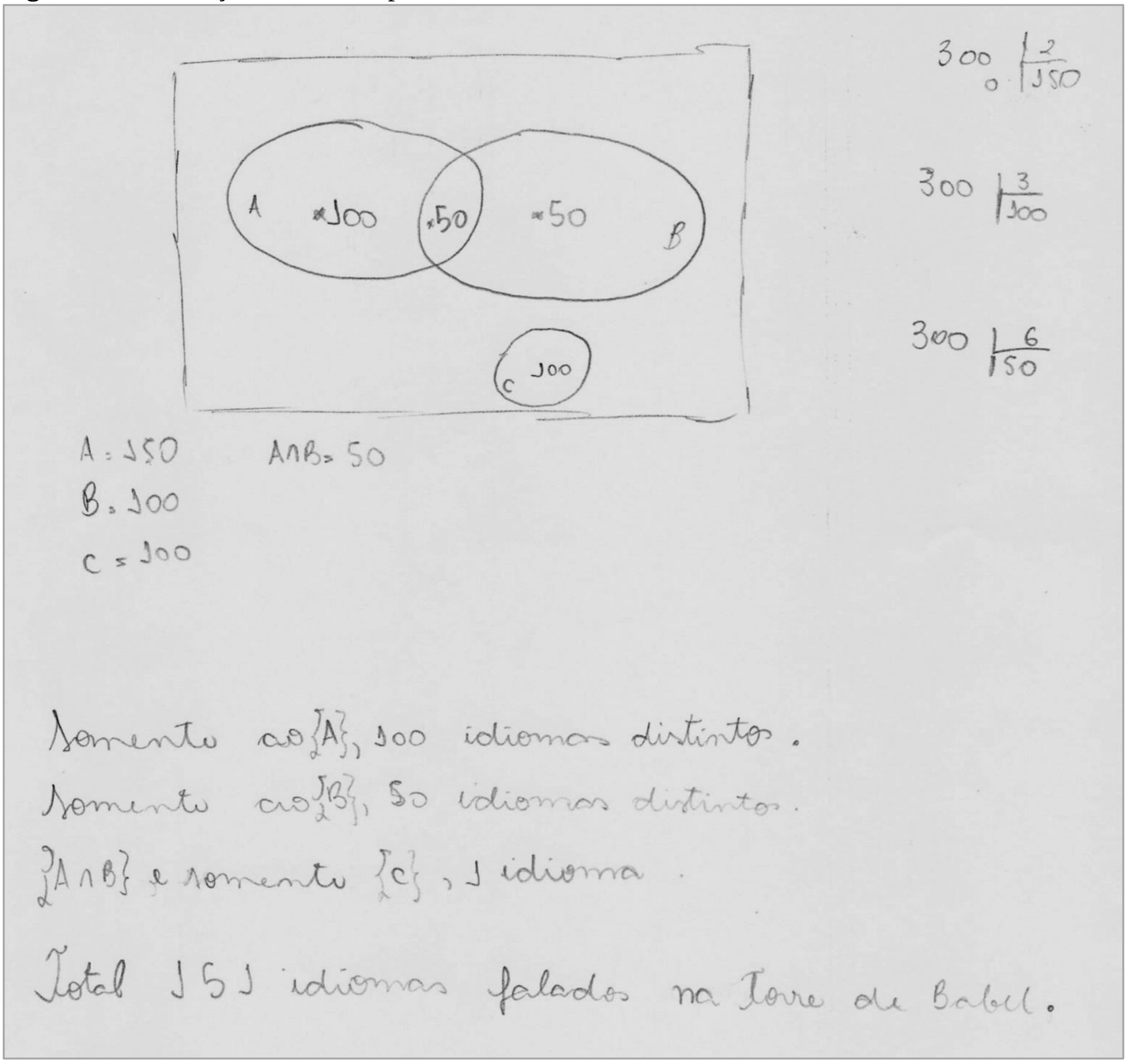
Com isso infere-se que ele possui características dos processos envolvidos na representação, porém ele não consegue generalizar e nem sintetizar os conceitos, ou seja, ele não atinge o processo de abstração, pois ele define conjuntos de maneira ampla, não consegue provar algo que ele afirma, não percebe a semelhança entre as definições que ele utilizou para provar algumas proposições para provar outras, como no caso da propriedade distributiva em que poderia ter demonstrado do mesmo modo que provou as propriedades associativas e comutativas. Além disso, consegue ver que o conjunto das partes é um conjunto que tem elementos que são conjuntos, mas ao mesmo tempo afirma que a relação de pertinência não pode relacionar conjuntos como sendo elementos de outros conjuntos.

4.1.2 Estudante E2

Tarefa 1

O estudante E2 usou diagramas de Venn-Euller na resolução da tarefa, conseguiu identificar quais elementos pertenciam a cada conjunto, a interseção entre os conjuntos A e B, e que o conjunto C era disjunto aos outros dois. Porém, representou os elementos dos conjuntos com sua quantidade, tanto na representação com diagramas como na representação simbólica.

Figura 13 – resolução da tarefa 1 pelo estudante E2



Fonte: resolução do estudante E1

Tarefa 2

Apresenta uma definição semelhante ao estudante E1, que também não comtempla o conjunto vazio.

Figura 14 – resolução da tarefa 2 pelo estudante E2

União de elementos com características semelhantes que caracterizam este conjunto a ser formado apartir disto, essas características são as regras de formação deste conjunto.

Fonte: resolução do estudante E1

Tarefa 3

Ele demonstra compreender as operações de conjuntos propostas nessas tarefas, no item i), ele percebe que o conjunto que possui o a como elemento não é um elemento de A e, mesmo assim, ele não afirma que a relação de pertinência é específica de elemento/conjunto. Observando o item k), quando a relação era de um elemento estar contido em um conjunto, ele compreende que essa relação é específica de conjunto/conjunto, o que nos leva a inferir que ele compreende que a relação de que um conjunto enquanto elemento pode pertencer a outro conjunto.

Figura 15 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E2, pertinência

i. $\{a\} \in A$;

Não, pois o conjunto com o elemento a não pertence ao conjunto A.

Fonte: resolução do estudante E1

Figura 16 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E2, inclusão

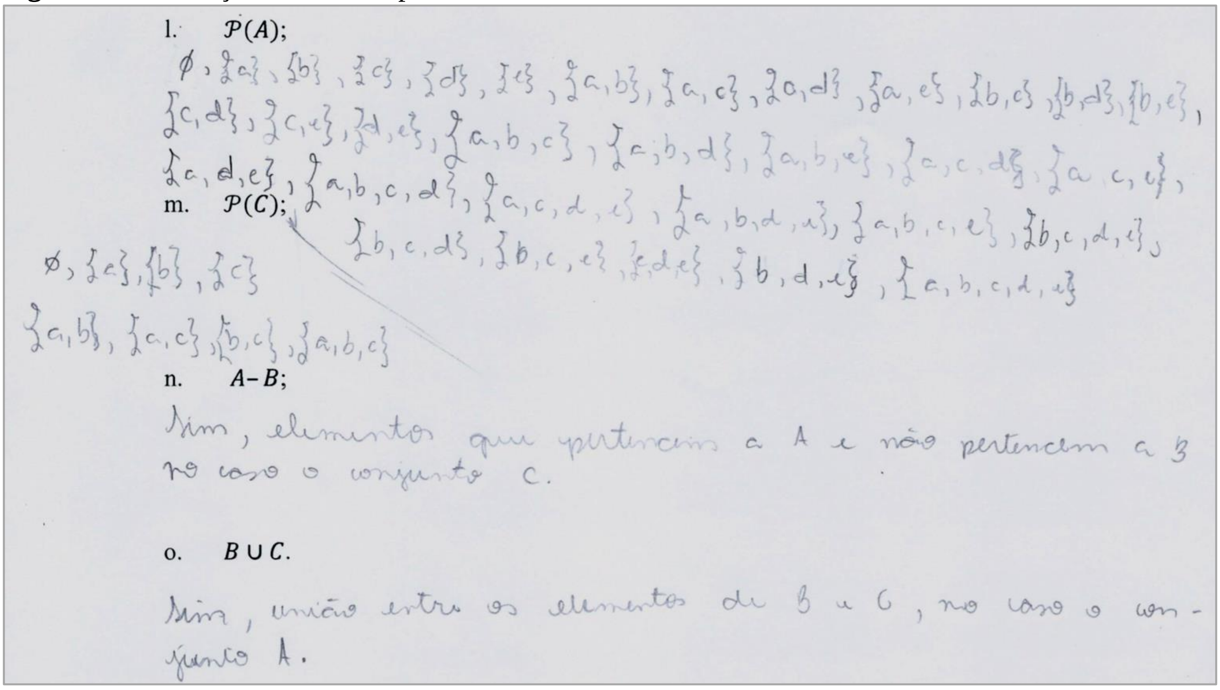
k. $a \subset A$;

Não, pois o símbolo de contido relaciona conjunto com conjunto, e não elementos com conjuntos.

Fonte: resolução do estudante E1

Nos itens l), m), n) e o), deveriam ser realizadas as operações descritas. Nos itens l) e m), ele mostrou as operações, porém nos itens n) e o) ele apenas diz que era possível efetuar as operações e as descreveu. A notação poderia ter sido o motivo desse equívoco, pois não foi utilizado o símbolo da igualdade após as relações, contudo nos itens l) e m) também não foi utilizado o símbolo da igualdade e ele efetuou as operações das partes de um conjunto.

Figura 17 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E2


l. $\mathcal{P}(A)$;

$\emptyset$, {a}, {b}, {c}, {d}, {e}, {a,b}, {a,c}, {a,d}, {a,e}, {b,c}, {b,d}, {b,e}, {c,d}, {c,e}, {d,e}, {a,b,c}, {a,b,d}, {a,b,e}, {a,c,d}, {a,c,e}, {a,d,e}, {a,b,c,d}, {a,c,d,e}, {a,b,d,e}, {a,b,c,e}, {b,c,d,e}, {b,c,d}, {b,c,e}, {c,d,e}, {b,d,e}, {a,b,c,d,e}

m. $\mathcal{P}(C)$;

$\emptyset$, {a}, {b}, {c}

{a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}

n. $A - B$;

Sim, elementos que pertencem a A e não pertencem a B no caso o conjunto C.

o. $B \cup C$.

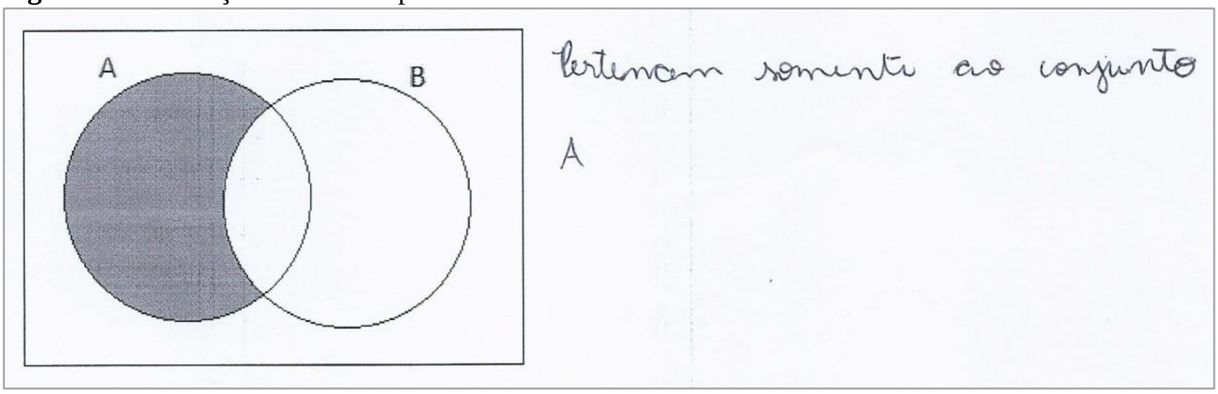
Sim, união entre os elementos de B e C, no caso o conjunto A.

Fonte: resolução do estudante E1

Tarefa 4

O estudante E2 consegue perceber quase todas as representações dos diagramas presentes na tarefa e faz justificativas satisfatórias, entretanto, no diagrama apresentado no item c), descreve que são os elementos que somente pertencem ao conjunto A, não estabelecendo a relação com o conjunto B.

Figura 18 - resolução da tarefa 4 pelo estudante E2

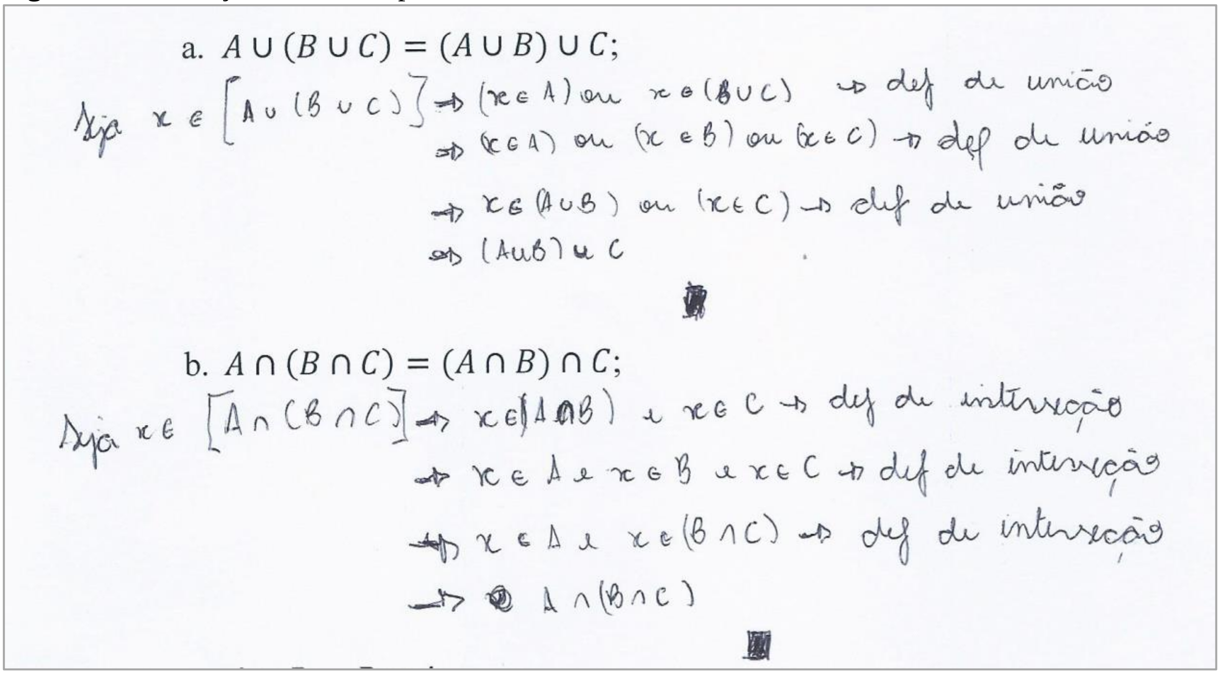


Fonte: resolução do estudante E1

Tarefa 5

O estudante só apresentou resolução para os dois primeiros itens. Provou apenas que o lado esquerdo da igualdade estava contido no lado direito e concluiu que a igualdade valia.

Figura 19 - resolução da tarefa 5 pelo estudante E2



a. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

Seja $x \in [A \cup (B \cup C)] \Rightarrow (x \in A)$ ou $x \in (B \cup C) \Rightarrow$ def de união

$\Rightarrow (x \in A)$ ou $(x \in B)$ ou $(x \in C) \Rightarrow$ def de união

$\Rightarrow x \in (A \cup B)$ ou $(x \in C) \Rightarrow$ def de união

$\Rightarrow (A \cup B) \cup C$

■

b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

Seja $x \in [A \cap (B \cap C)] \Rightarrow x \in (A \cap B)$ e $x \in C \Rightarrow$ def de interseção

$\Rightarrow x \in A$ e $x \in B$ e $x \in C \Rightarrow$ def de interseção

$\Rightarrow x \in A$ e $x \in (B \cap C) \Rightarrow$ def de interseção

$\Rightarrow A \cap (B \cap C)$

■

Fonte: resolução do estudante E1

Características do PMA manifestadas pelo estudante E2

O estudante compreende vários símbolos e representações usados na Teoria de Conjuntos e consegue representá-los, faz correspondência entre as representações do conceito, descreve matematicamente as informações de um enunciado. Contudo ele não conseguiu relacionar a diferença entre os conjuntos A e B por meio do diagrama de Venn-Euller. Mesmo sabendo o que significa a representação simbólica da diferença, como pode ser visto na tarefa 3. Deste modo, ele não conseguiu encontrar pontos comuns entre essas representações. Além disso, E2 não completa as demonstrações que ele iniciou, fazendo somente uma implicação.

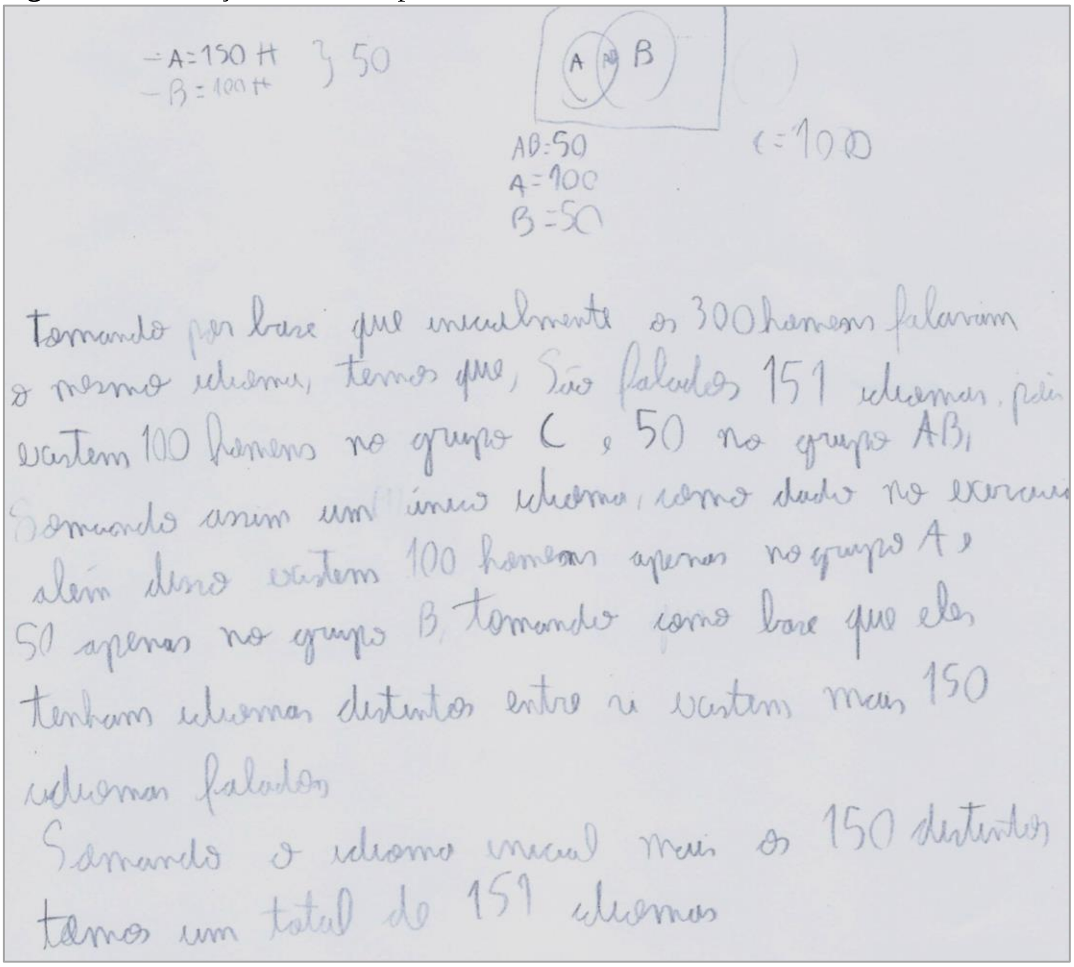
Infere-se que ele comtempla as características dos processos envolvidos na representação, tais como processos de representação, modelação e Processo de Comutação de Representações e Tradução, mas não generaliza e nem sintetiza conceitos da Teoria de Conjuntos, pois não encontra pontos em comum entre essas representações.

4.1.3 Estudante E3

Tarefa 1

Ele relaciona a tarefa com conjuntos, mas ao escrever na forma simbólica de conjuntos, não utiliza a simbologia correta para a interseção de conjuntos. Porém, consegue obter a quantidade de elementos de cada conjunto, descrevendo as características de cada um.

Figura 20 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E3



-A=150 H } 50
-B=100 H

A B

AB:50
A=100
B=50

C=100

Tomando por base que inicialmente os 300 homens falavam o mesmo idioma, temos que, São falados 151 idiomas, pois existem 100 homens no grupo C, e 50 no grupo AB, somando assim um único idioma, como dado no exercício além disso existem 100 homens apenas no grupo A e 50 apenas no grupo B, tomando como base que eles tenham idiomas distintos entre si existem mais 150 idiomas falados

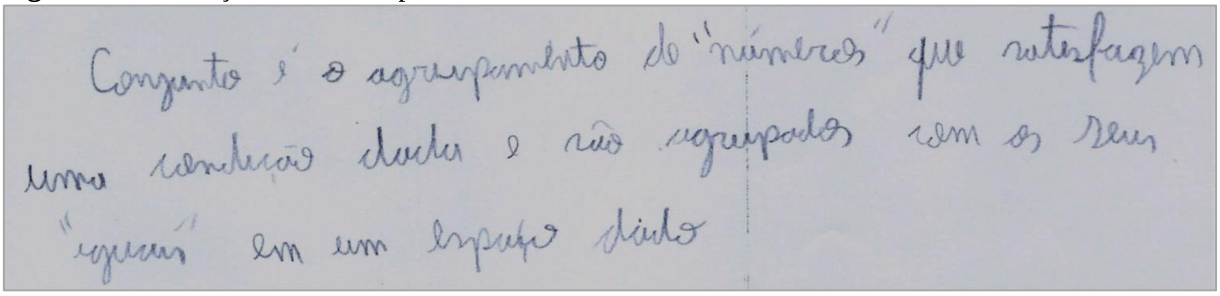
Somando o idioma inicial mais os 150 distintos temos um total de 151 idiomas

Fonte: resolução do estudante E1

Tarefa 2

Ao apresentar conjuntos, o estudante E3 trata apenas conjuntos numéricos. Além de não considerar conjuntos de elementos distintos, também não considera conjuntos unitários e o conjunto vazio.

Figura 21 - resolução da tarefa 2 pelo estudante E3

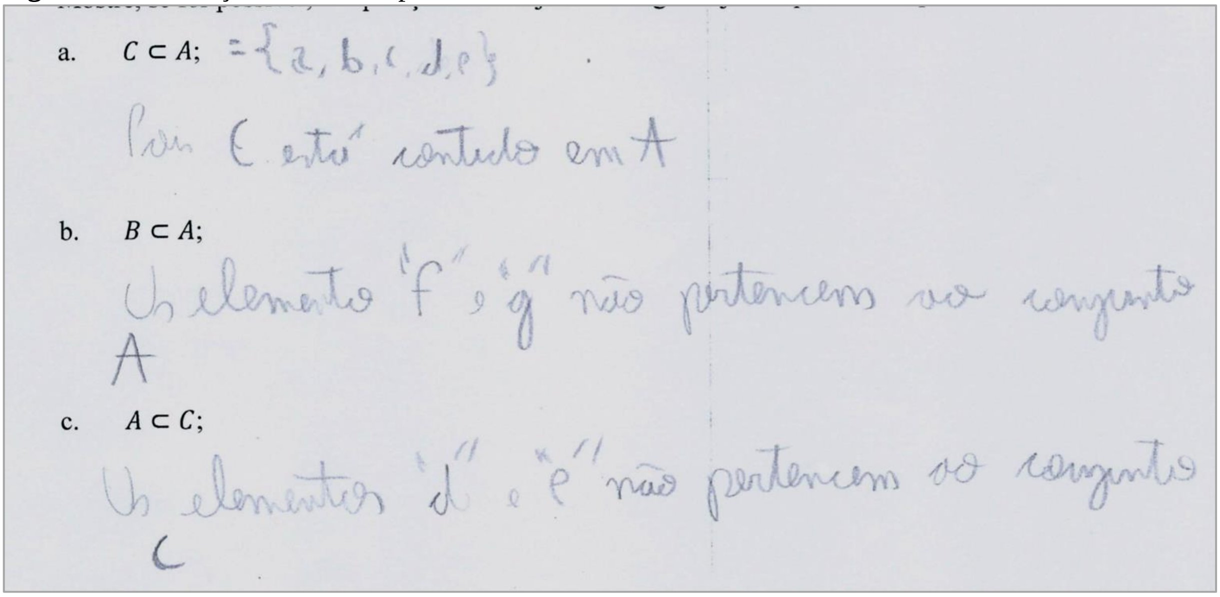

Conjunto é o agrupamento de "números" que satisfazem uma condição dada e não agrupados com os seus "iguais" em um espaço dado

Fonte: resolução do estudante E3

Tarefa 3

No item a), o estudante justifica sua resposta com a própria questão e descreve isso como sendo igual ao próprio conjunto A. Nos itens posteriores ele apresenta uma justificativa, mas não uma resposta.

Figura 22 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E3, inclusão


a. $C \subset A$; = {a, b, c, d, e}

Pois C está contido em A

b. $B \subset A$;

Os elementos "f" e "g" não pertencem ao conjunto A

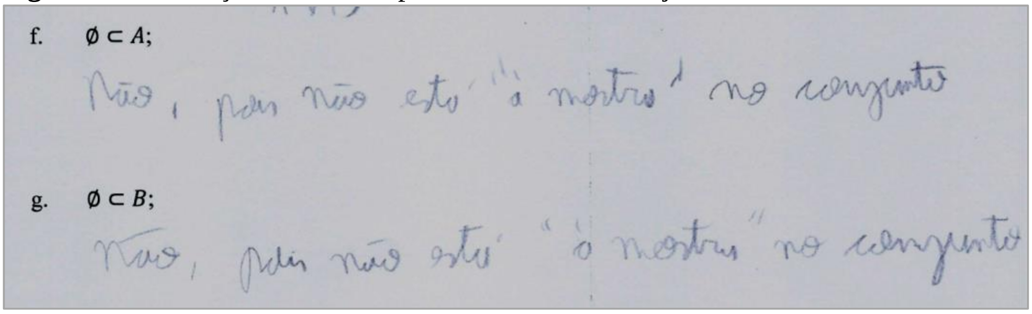
c. $A \subset C$;

Os elementos "d" e "e" não pertencem ao conjunto C

Fonte: resolução do estudante E3

Quanto ao conjunto vazio, não considera que seja um subconjunto próprio de todos os conjuntos. Em sua resposta espera encontrar a notação do conjunto vazio inserida no conjunto A ou B.

Figura 23 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E3, conjunto vazio



f. $\emptyset \subset A$;

Não, pois não está "a mostra" no conjunto

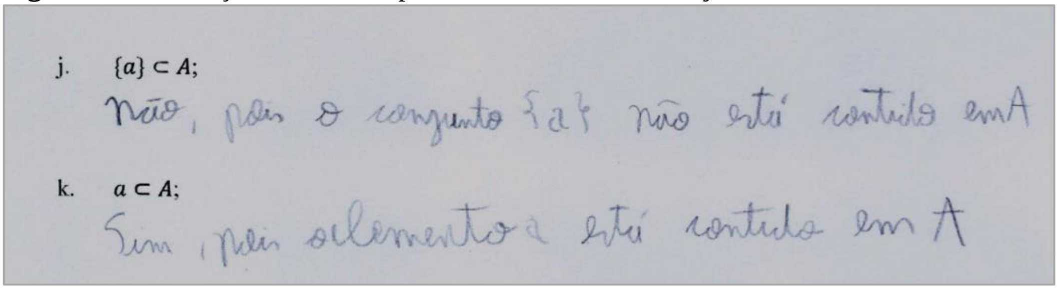
g. $\emptyset \subset B$;

Não, pois não está "a mostra" no conjunto

Fonte: resolução do estudante E3

Ele relaciona o símbolo de inclusão com elemento e conjunto, mas a inclusão é uma operação exclusiva entre conjuntos. O estudante não compreende que o conjunto unitário que possui a como elemento é um subconjunto do conjunto A.

Figura 24 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E3, subconjuntos



j. $\{a\} \subset A$;

não, pois o conjunto {a} não está contido em A

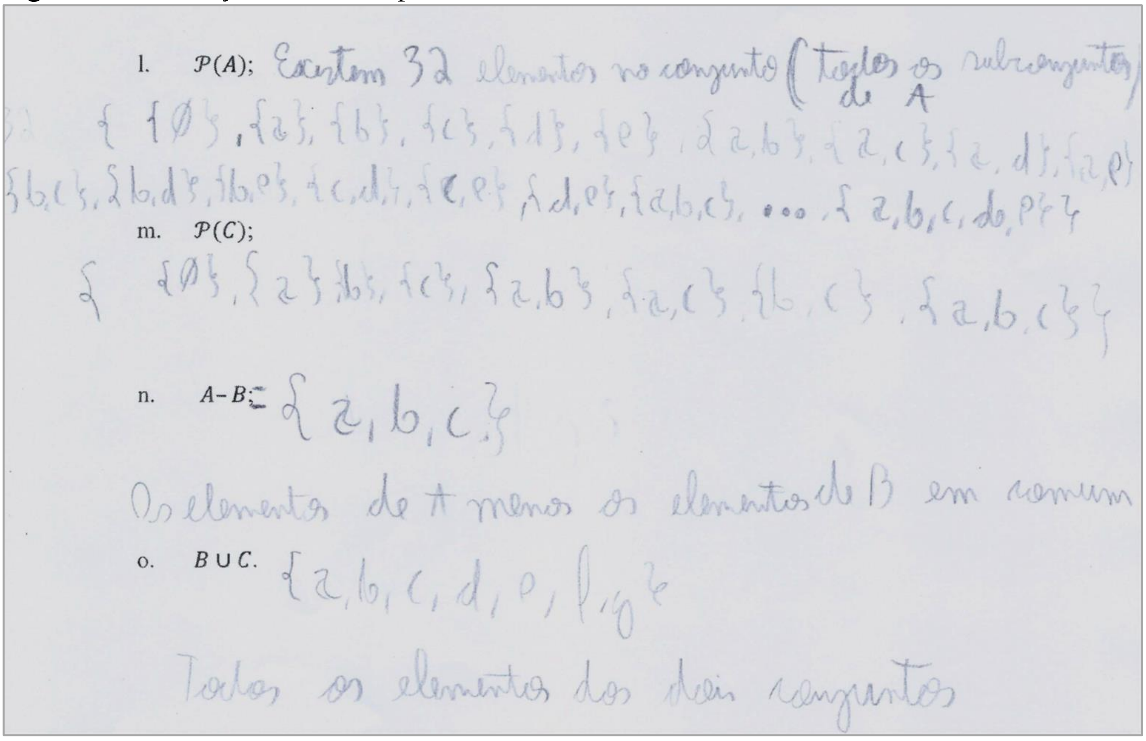
k. $a \subset A$;

Sim, pois o elemento a está contido em A

Fonte: resolução do estudante E3

Compreende as operações do conjunto das partes, da diferença e união entre conjuntos. Apresenta justificativas e resolve os itens.

Figura 25 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E3

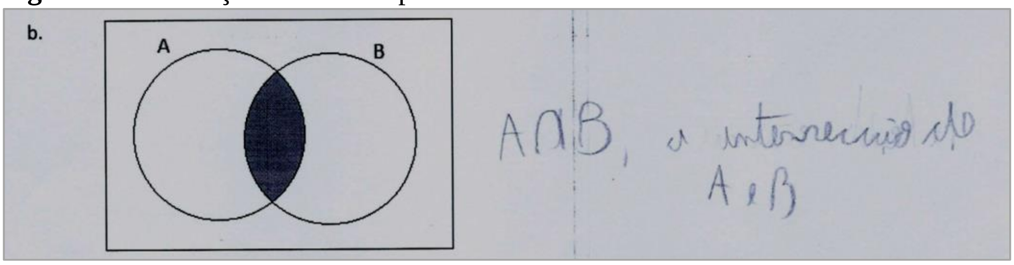


Fonte: resolução do estudante E3

Tarefa 4

E3 consegue interpretar todos os diagramas da tarefa, descreve cada um e escreve simbolicamente cada operação representada por diagramas, contudo não apresenta justificativas, que foram solicitadas pela tarefa.

Figura 26 - resolução da tarefa 4 pelo estudante E3

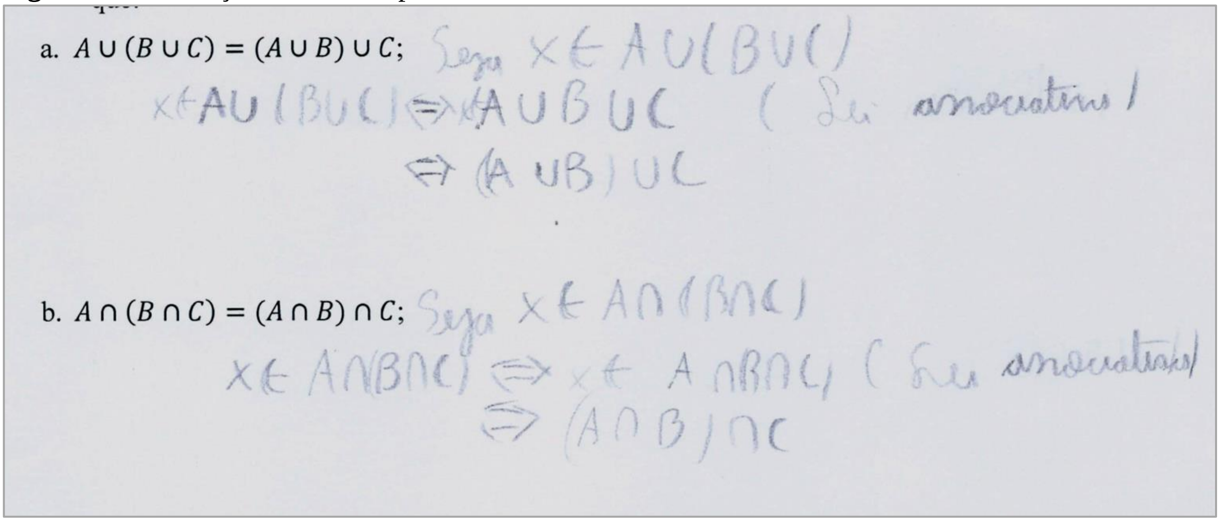


Fonte: resolução do estudante E3

Tarefa 5

O estudante E3 considera apenas algumas soluções para a tarefa 5, ele optou resolver por meio de equivalências lógicas e utilizar as propriedades associativa, comutativa e distributiva, mas não utilizou os conectivos "e" e "ou" para realizar as demonstrações. Infere-se que ele compreende as mesmas propriedades aplicadas na teoria de conjunto, mesmo não conseguindo demonstrar matematicamente esses conceitos.

Figura 27 - resolução da tarefa 5 pelo estudante E3



a. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; Seja $x \in A \cup (B \cup C)$

$x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \cup B \cup C$ (Lei associativa)

$\Leftrightarrow (A \cup B) \cup C$

b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; Seja $x \in A \cap (B \cap C)$

$x \in A \cap B \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap B \cap C$ (Lei associativa)

$\Leftrightarrow (A \cap B) \cap C$

Fonte: resolução do estudante E3

Características do PMA manifestadas pelo estudante E3

O estudante ao resolver a tarefa 1 não representa corretamente os símbolos envolvidos na Teoria de Conjuntos. Não consegue unir todos os conceitos que conhece em uma única imagem, como pode-se observar nas tarefas 3 e 5. Tem dificuldades com a representação de alguns símbolos, tais como as chaves e o símbolo do conjunto vazio, observando os itens da tarefa 3. Consegue efetuar mudanças entre representações de um mesmo conceito, mas não consegue generalizar nem os conceitos que mostrou em algumas das tarefas propostas.

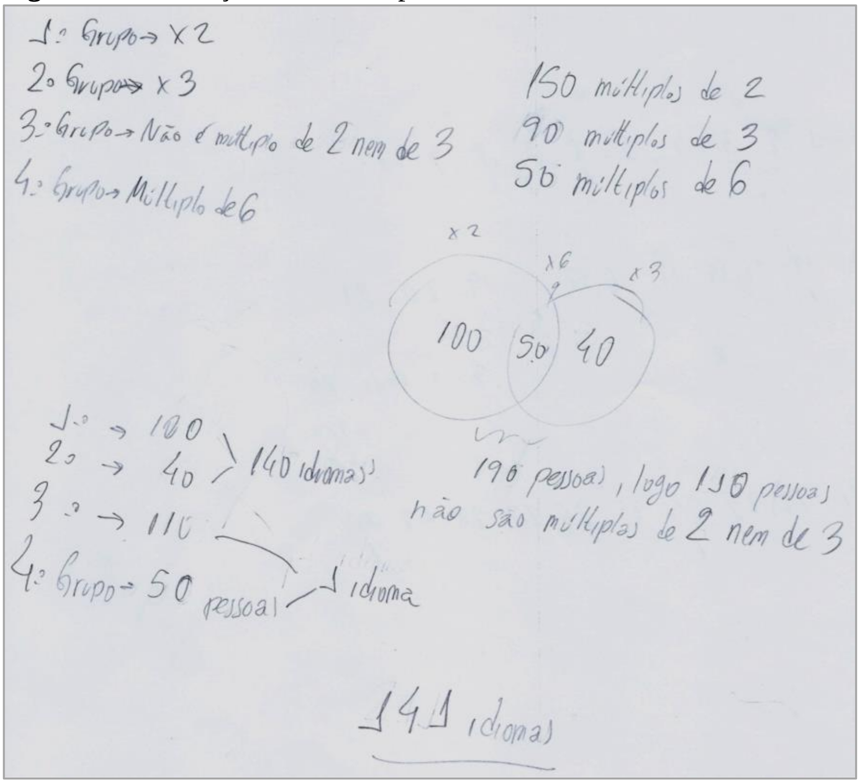
Infere-se que esse estudante não atinge todos os processos envolvidos na representação, pois não representa corretamente os símbolos envolvidos no conceito. Além disso, não atinge os processos de síntese e de generalização, ou seja, também não desenvolveu os processos envolvidos na abstração. Contudo consegue traduzir e alternar entre algumas representações de conceitos de conjuntos.

4.1.4 Estudante E4

Tarefa 1

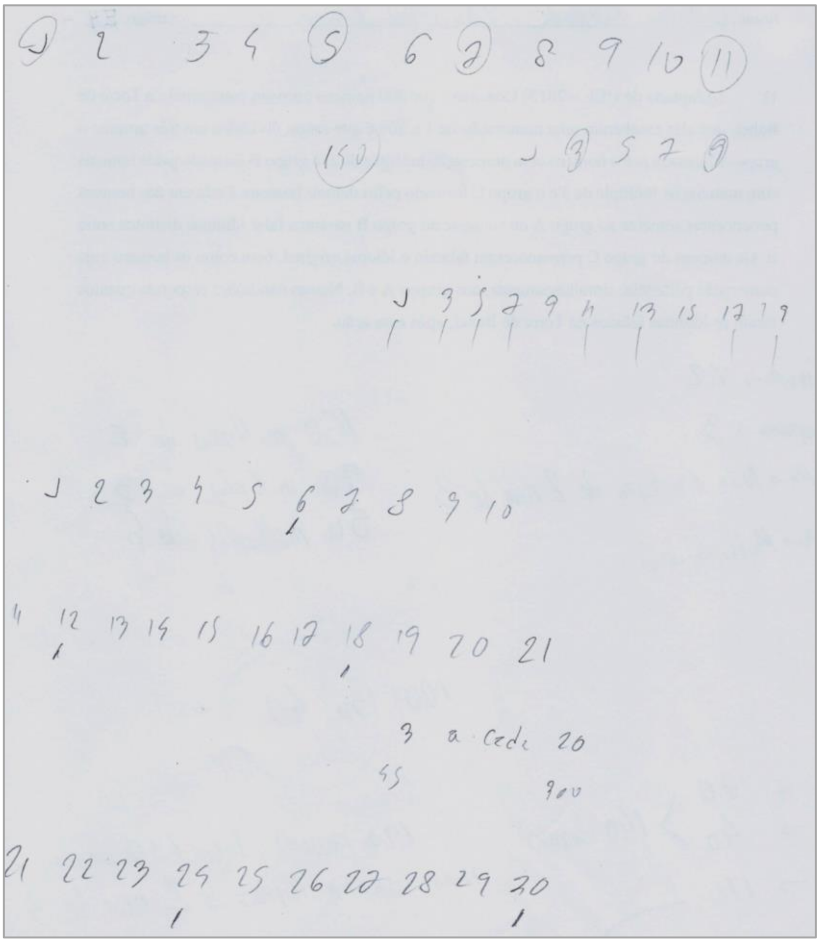
O estudante E4 usou representação de diagramas para indicar a quantidade de elementos de cada conjunto, ou grupo como ele chamou. Entretanto, ele cometeu um equívoco ao escrever a quantidade de elementos do grupo B, que eram todos os homens que receberam números múltiplos de 3, que estavam entre os números 1 e 300. Ele considerou apenas 90 números, ou seja, não considerou 10 que totalizavam 100 números múltiplos de 3 entre os números 1 e 300. No verso da folha, ele foi descrevendo os elementos de cada conjunto e como era o comportamento de cada um.

Figura 28 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E4



Fonte: resolução do estudante E4

Figura 29 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E4, parte 2

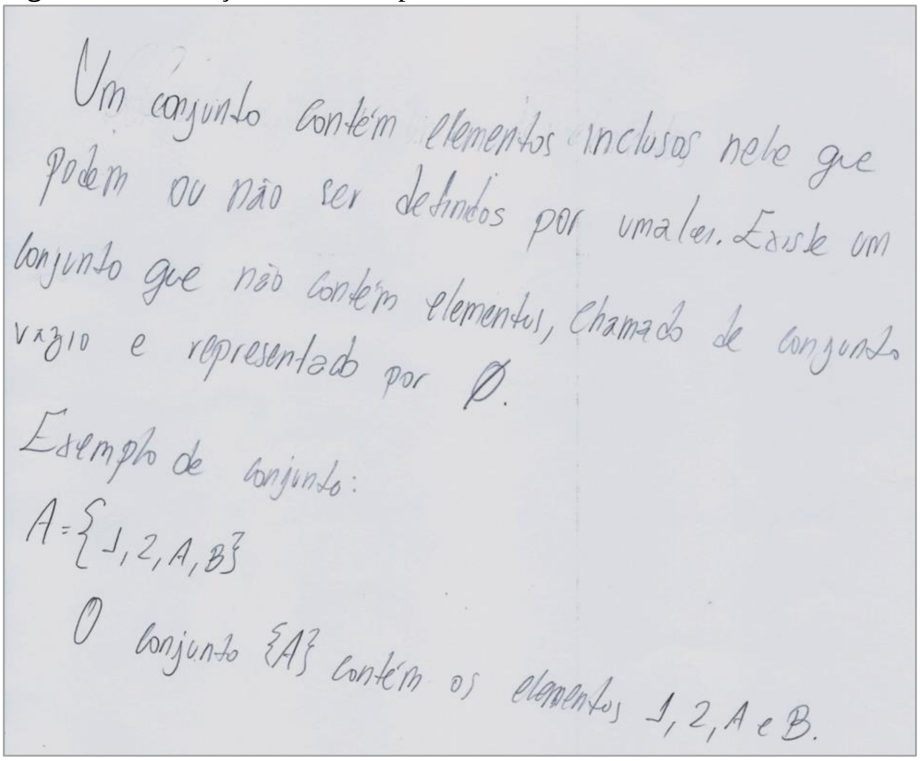


Fonte: resolução do estudante E4

Tarefa 2

E4 utiliza as palavras ‘contém’ e ‘inclusão’ quando está se referindo aos elementos que pertencem a um conjunto qualquer. Além disso, quando vai se referir a um conjunto, simbolicamente, ele acaba acrescentando as ‘chaves’ no conjunto, o que não é necessário. Porém ele consegue expressar uma definição bem consistente para conjuntos.

Figura 30 - resolução da tarefa 2 pelo estudante E4


Um conjunto contém elementos inclusos nele que podem ou não ser definidos por uma lei. Existe um conjunto que não contém elementos, chamado de conjunto vazio e representado por $\emptyset$.

Exemplo de conjunto:

$A = \{1, 2, A, B\}$

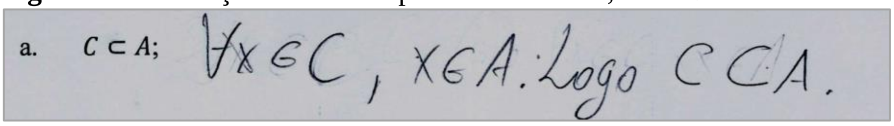
O conjunto $\{A\}$ contém os elementos 1, 2, A e B.

Fonte: resolução do estudante E4

Tarefa 3

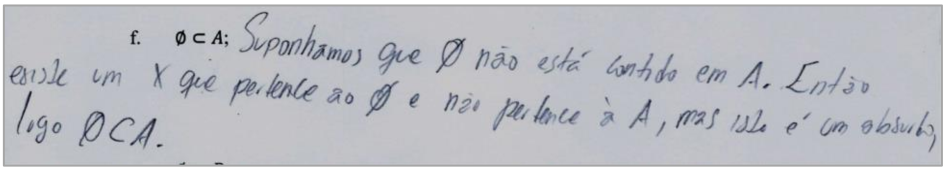
O estudante apresenta contraexemplos como justificativa nos itens que não eram verdadeiros. No item a), ele apresenta a definição de inclusão para mostrar que o conjunto C é subconjunto do conjunto A. Ele prova que o conjunto vazio está contido no conjunto A.

Figura 31 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E4, item a.


a. $C \subset A$; $\forall x \in C$, $x \in A$. Logo $C \subset A$.

Fonte: resolução do estudante E4

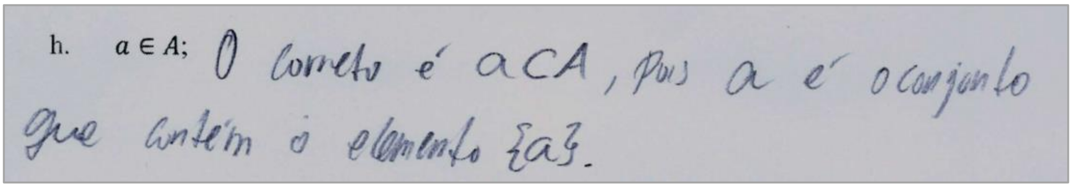
Figura 32 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E4, item f.


f. $\emptyset \subset A$; Suponhamos que $\emptyset$ não está contido em A. Então existe um x que pertence ao $\emptyset$ e não pertence à A, mas isso é um absurdo, logo $\emptyset \subset A$.

Fonte: resolução do estudante E4

Ele confunde pertencer com estar contido, troca o elemento pelo conjunto. Não consegue estabelecer o conjunto das partes. Compreende as definições de união e de diferença entre conjuntos.

Figura 33 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E4, item h.

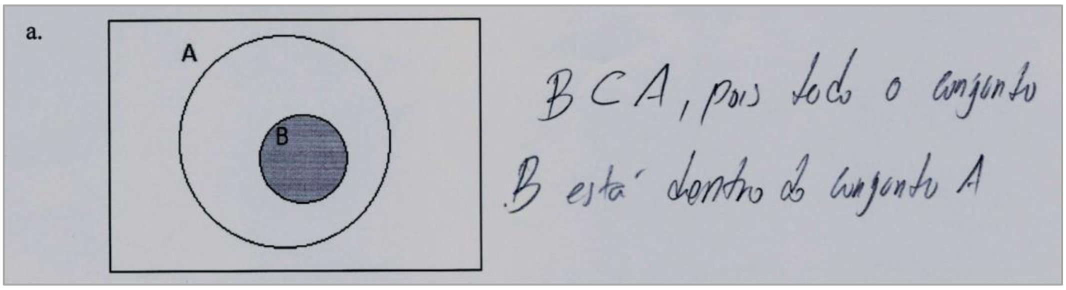


Fonte: resolução do estudante E4

Tarefa 4

Compreende as representações apresentadas por diagramas de Venn-Euler, e faz a conversão entre as representações por meio de símbolos e por diagramas.

Figura 34 - resolução da tarefa 4 pelo estudante E4

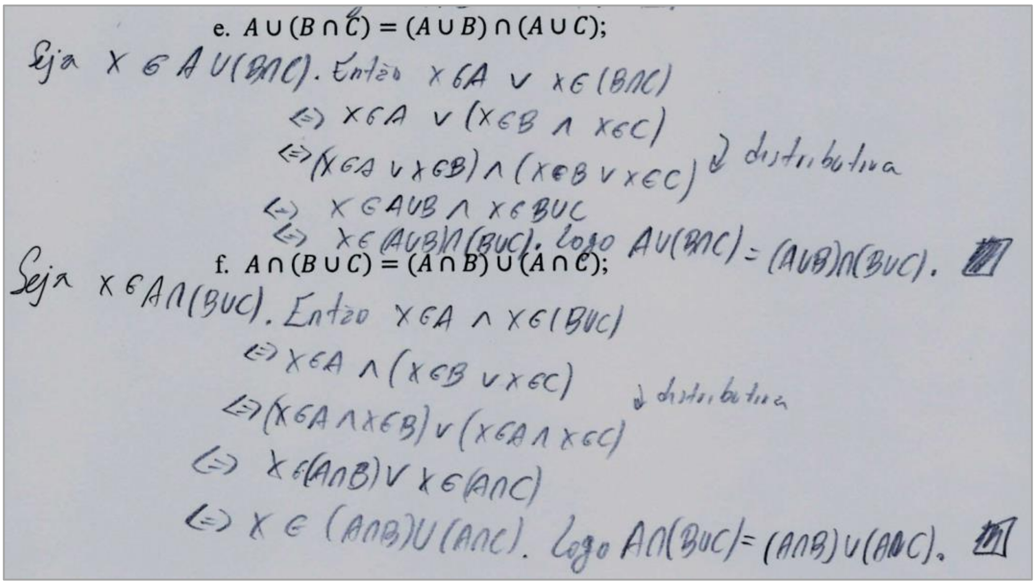


Fonte: resolução do estudante E4

Tarefa 5

O estudante utilizou as equivalências lógicas das leis associativa, comutativa, distributiva e de idempotência para provar as propriedades de conjuntos de mesmo nome. Provou que o vazio é um subconjunto de qualquer conjunto. Também conseguiu provar a relação entre a diferença entre conjuntos com a definição de conjunto complementar.

Figura 35 - resolução da tarefa 5 pelo estudante E4



e. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

Seja $x \in A \cup (B \cap C)$. Então $x \in A \vee x \in (B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in B \vee x \in C)$ distributiva

$\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in B \cup C$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (B \cup C)$. Logo $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$. ∎

f. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

Seja $x \in A \cap (B \cup C)$. Então $x \in A \wedge x \in (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$ distributiva

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Logo $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. ∎

Fonte: resolução do estudante E4

Características do PMA manifestadas pelo estudante E4

Ele compreende os símbolos apresentados nas tarefas. Não apresenta uma claramente o que são conjuntos, mas apresenta o conjunto vazio. Consegue compreender várias representações do conceito de conjunto, como pode-se ver nas tarefas 3 e 4. Consegue generalizar seus conhecimentos acerca dos conceitos tratados nas tarefas propostas.

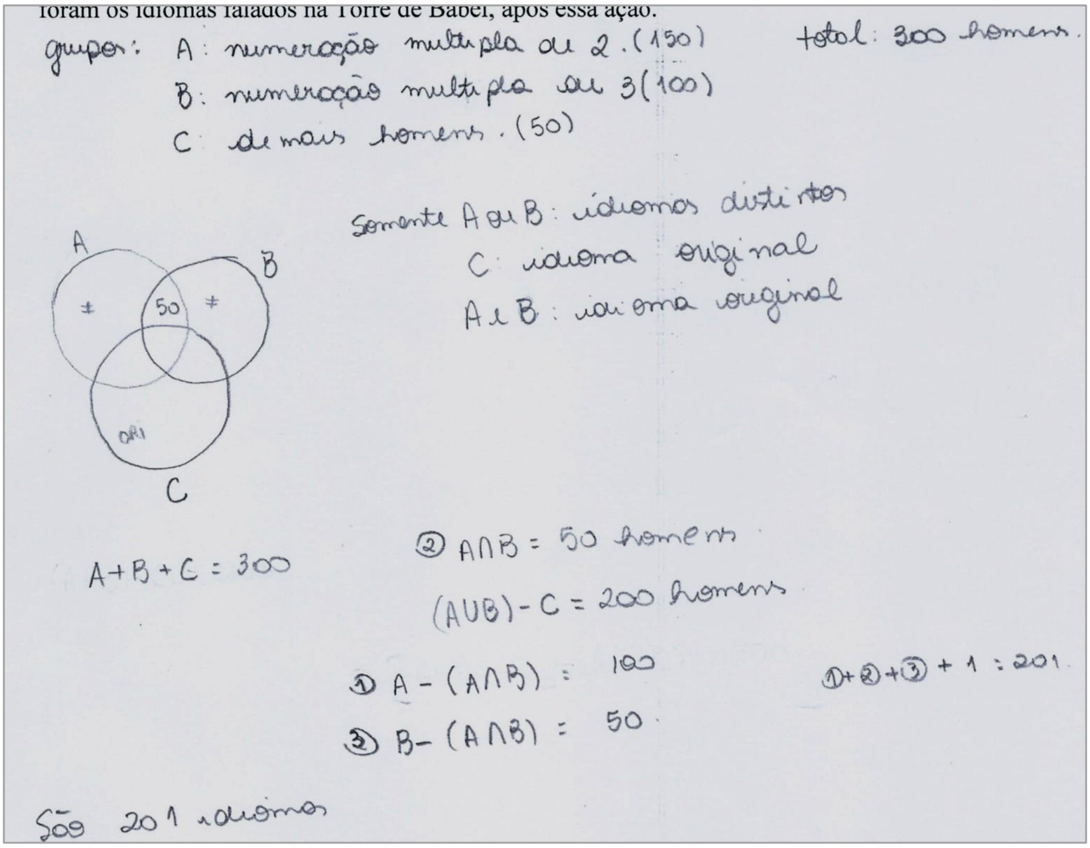
Assim, infere-se que o estudante E4, não contempla todos os processos de envolvidos na representação e na abstração, porém ele apresenta algumas das características desses processos, ele consegue representar por meio de símbolos e fazer a comutação e tradução entre eles, além disso, generaliza os conceitos abordados.

4.1.5 Estudante E5

Tarefa 1

O estudante utilizou conceitos da Teoria de Conjuntos para resolver a tarefa. Em sua resolução usou diagramas e símbolos. Ao estabelecer o número de elementos de cada conjunto confundiu a quantidade do conjunto C, infere-se que ele considerou a interseção entre os conjuntos A e B, que correspondia exatamente a quantidade de elementos que faltaram no conjunto C.

Figura 36 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E5



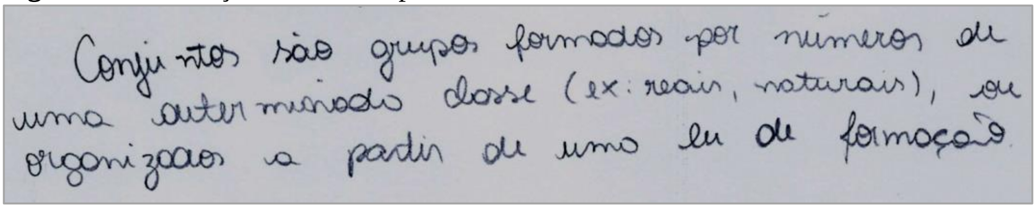
Fonte: resolução do estudante E5

Considerou uma interseção entre os conjuntos A, B e C, sendo que o conjunto C é disjunto dos demais conjuntos.

Tarefa 2

Ele definiu apenas conjuntos numéricos. Não definiu conjuntos unitários nem o conjunto vazio.

Figura 37 - resolução da tarefa 2 pelo estudante E5

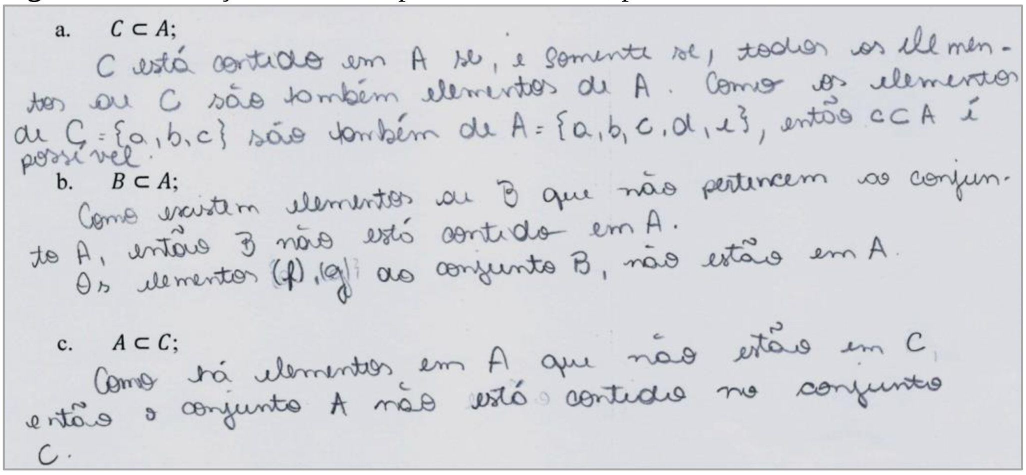

Conjuntos são grupos formados por números de uma determinada classe (ex: reais, naturais), ou organizações a partir de uma lei de formação.

Fonte: resolução do estudante E5

Tarefa 3

O estudante mostra que o conjunto C é subconjunto de A por meio da definição de subconjuntos. E, do mesmo modo, mostra que o conjunto B não é subconjunto de A e nem o conjunto A é subconjunto de C. Compreende as interseções entre conjuntos e, além disso, mostra compreender que o vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

Figura 38 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E5, parte 1


a. $C \subset A$;

C está contido em A se, e somente se, todos os elementos de C são também elementos de A. Como os elementos de C = {a, b, c} são também de A = {a, b, c, d, e}, então C ⊂ A é possível.

b. $B \subset A$;

Como existem elementos de B que não pertencem ao conjunto A, então B não está contido em A.
Os elementos (f), (g) do conjunto B, não estão em A.

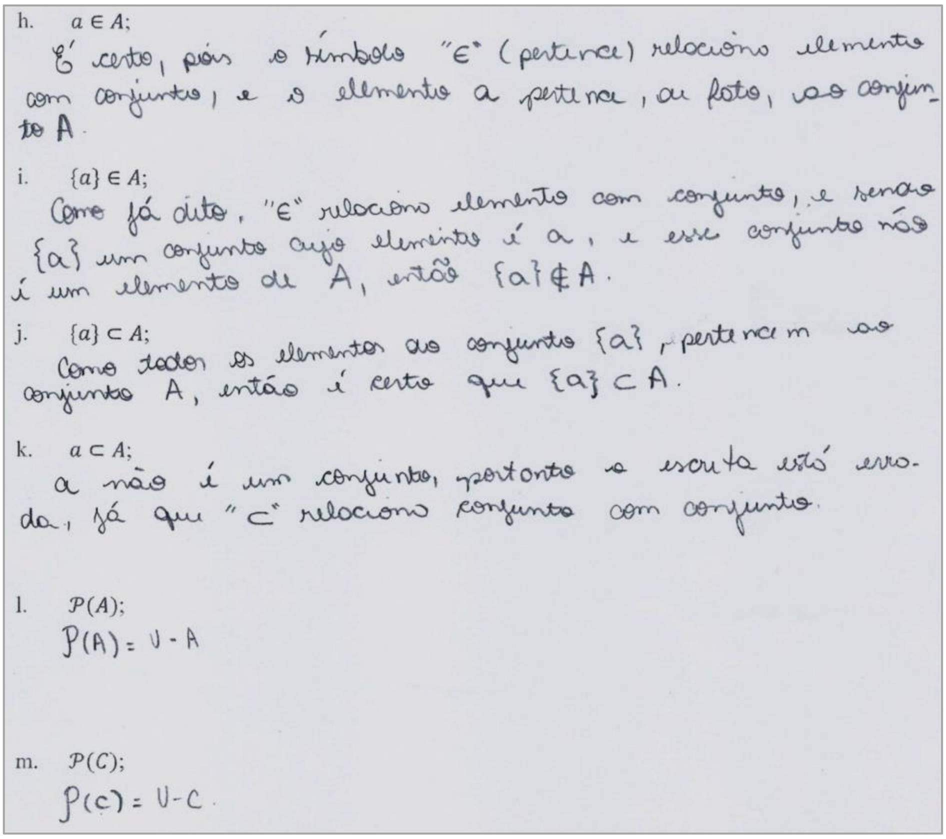
c. $A \subset C$;

Como há elementos em A que não estão em C, então o conjunto A não está contido no conjunto C.

Fonte: resolução do estudante E5

Distingue que o símbolo de “contido” é algo que relaciona apenas conjuntos com outros conjuntos. Compreende as operações de união e diferença entre conjuntos, mas não compreende a composição do conjunto das partes, utiliza uma diferença entre um conjunto que ele chamou de U com os conjuntos A e C.

Figura 39 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E5, parte 2.



h. $a \in A$;

É certo, pois o símbolo "$\in$" (pertence) relaciona elemento com conjunto, e o elemento a pertence, de fato, ao conjunto A.

i. $\{a\} \in A$;

Como já dito, "$\in$" relaciona elemento com conjunto, e sendo $\{a\}$ um conjunto cujo elemento é a, e esse conjunto não é um elemento de A, então $\{a\} \notin A$.

j. $\{a\} \subset A$;

Como todos os elementos do conjunto $\{a\}$, pertencem ao conjunto A, então é certo que $\{a\} \subset A$.

k. $a \subset A$;

a não é um conjunto, portanto a escrita está errada, já que "$\subset$" relaciona conjunto com conjunto.

l. $\mathcal{P}(A)$;

$P(A) = U - A$

m. $\mathcal{P}(C)$;

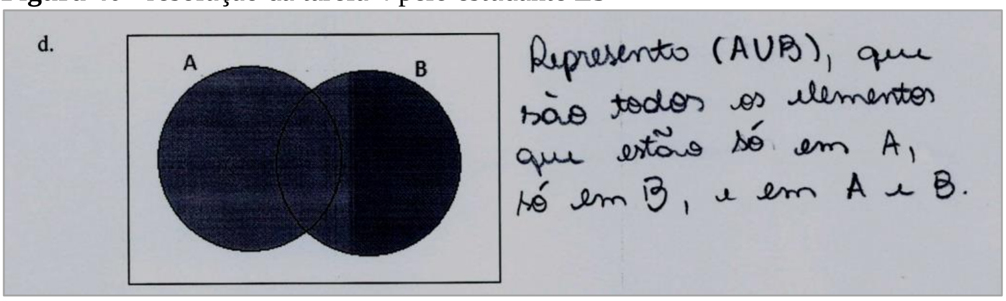
$P(C) = U - C$.

Fonte: resolução do estudante E5

Tarefa 4

O estudante E5 descreve cada diagrama e consegue partir da representação apresentada por diagramas para a representação simbólica de conjuntos, justifica todas as suas conclusões.

Figura 40 - resolução da tarefa 4 pelo estudante E5



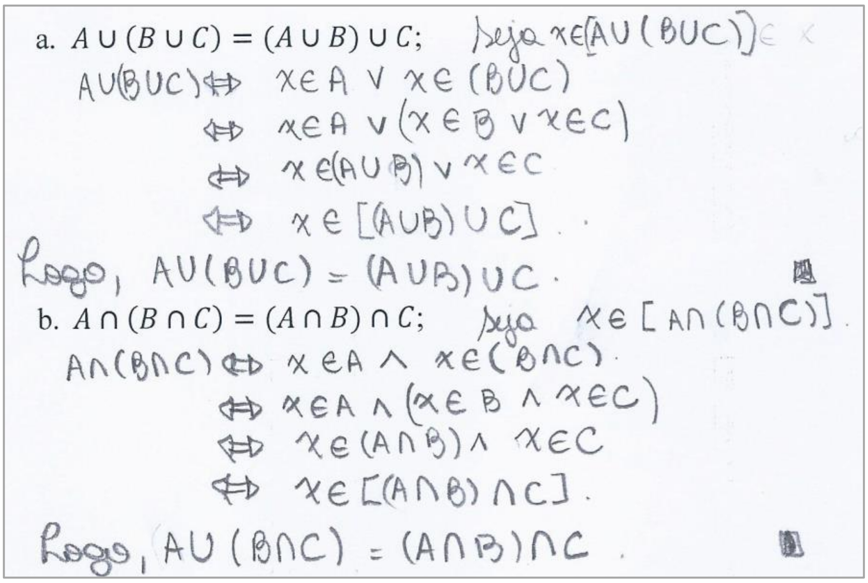
Fonte: resolução do estudante E5

Tarefa 5

E5 utilizou as equivalências lógicas das leis associativa, comutativa, distributiva e de idempotência para provar as propriedades de conjuntos de mesmo nome.

Também conseguiu provar a relação entre a diferença entre conjuntos com a definição de conjunto complementar. Não conseguiu provar que o vazio é um subconjunto de qualquer conjunto, mas, observando a tarefa 3, pode-se inferir que o estudante compreende que o vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

Figura 41 - resolução da tarefa 5 pelo estudante E5



a. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; Seja $x \in [A \cup (B \cup C)]$

$A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C$

$\Leftrightarrow x \in [(A \cup B) \cup C]$.

Logo, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. ■

b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; Seja $x \in [A \cap (B \cap C)]$.

$A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cap C)$.

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \in C$

$\Leftrightarrow x \in [(A \cap B) \cap C]$.

Logo, $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. ■

Fonte: resolução do estudante E5

Características do PMA manifestadas pelo estudante E5

E5 compreende vários símbolos e representações usados na Teoria de Conjuntos e consegue representá-los, faz correspondência entre as representações do conceito, descreve matematicamente as informações de um enunciado. Mas não faz ligações distintas de um mesmo conceito e não consegue generalizá-los.

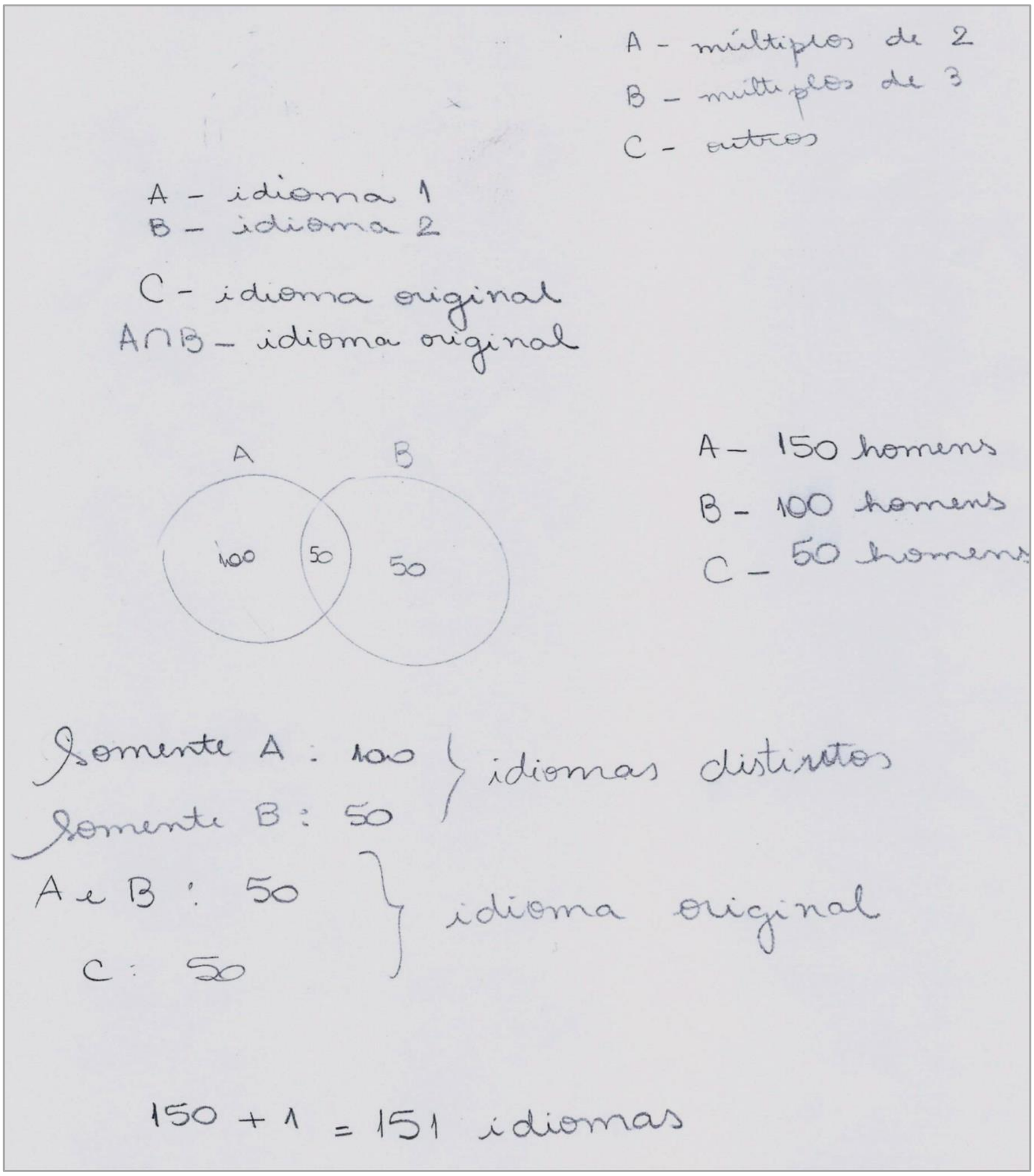
Deste modo infere-se que ele alcança os processos envolvidos na representação, pois ele consegue representar simbolicamente, fazer modelações e alternar entre representações do mesmo objeto. Porém não consegue sintetizar e nem abstrair os conceitos por ele apresentados.

4.1.6 Estudante E6

Tarefa 1

Do mesmo modo que o estudante E5, o estudante E6, utilizou conceitos da Teoria de Conjuntos para resolver a tarefa, usou diagramas e símbolos. Quando estabeleceu o número de elementos de cada conjunto confundiu a quantidade do conjunto C, infere-se também, que ele considerou a interseção entre os conjuntos A e B, que correspondia exatamente a quantidade de elementos que faltaram no conjunto C. Contudo ele percebeu que os conjuntos A e B não possuíam interseção com o conjunto C.

Figura 42 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E6

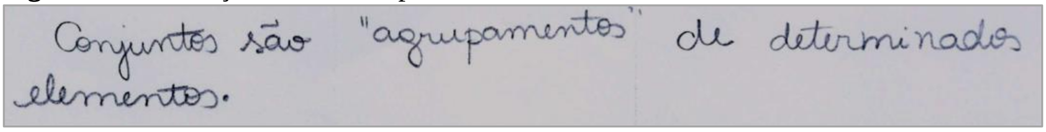


Fonte: resolução do estudante E6

Tarefa 2

Definiu conjuntos como agrupamentos de elementos, mas em sua definição não deixou claro a existência dos conjuntos unitários e do conjunto vazio.

Figura 43 - resolução da tarefa 2 pelo estudante E6



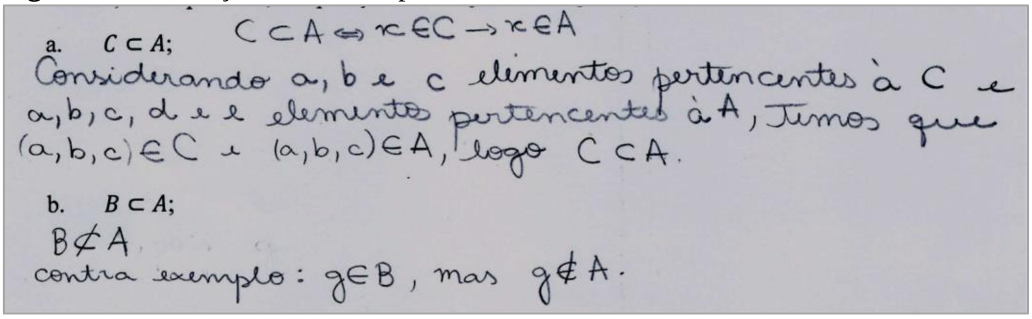
Conjuntos são "agrupamentos" de determinados elementos.

Fonte: resolução do estudante E6

Tarefa 3

Mostrou que o conjunto C é subconjunto de A, apresentou contraexemplos quando os itens eram falsos.

Figura 44 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E6



a. $C \subset A$; $C \subset A \Leftrightarrow x \in C \rightarrow x \in A$

Considerando a, b e c elementos pertencentes à C e a, b, c, d e e elementos pertencentes à A, temos que $(a,b,c) \in C$ e $(a,b,c) \in A$, logo $C \subset A$.

b. $B \subset A$;

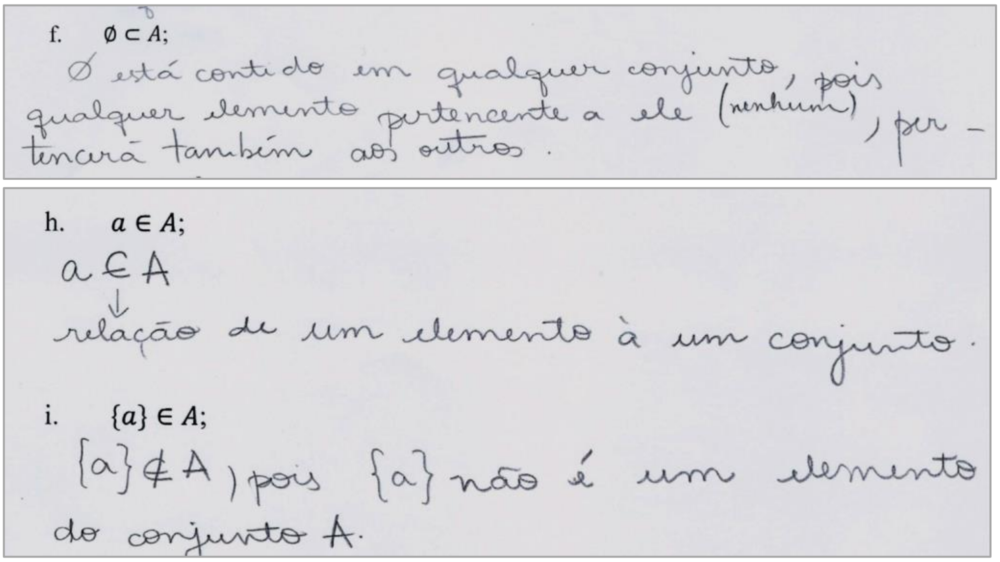
$B \not\subset A$

contra exemplo: $g \in B$, mas $g \notin A$.

Fonte: resolução do estudante E6

Mostra que o conjunto vazio é subconjunto de A e de B por meio de uma contradição, compreende que a relação de inclusão relaciona apenas conjuntos com outros conjuntos, a diferença e a união entre conjuntos. Porém não compreende o conceito do conjunto das partes.

Figura 45 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E6, parte 2



f. $\emptyset \subset A$;

$\emptyset$ está contido em qualquer conjunto, pois qualquer elemento pertencente a ele (nenhum), pertencerá também aos outros.

h. $a \in A$;

$a \in A$

$\downarrow$

relação de um elemento à um conjunto.

i. $\{a\} \in A$;

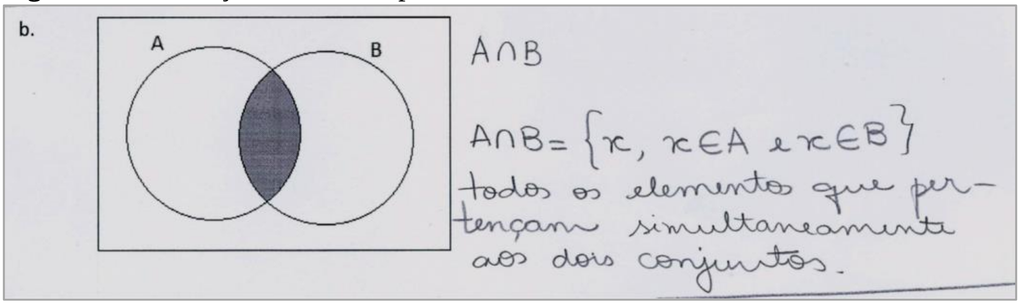
$\{a\} \notin A$, pois $\{a\}$ não é um elemento do conjunto A.

Fonte: resolução do estudante E6

Tarefa 4

O estudante consegue descrever as representações apresentadas por meio de diagramas e, também, consegue transformar essas representações nas representações simbólicas de conjuntos.

Figura 46 - resolução da tarefa 4 pelo estudante E6

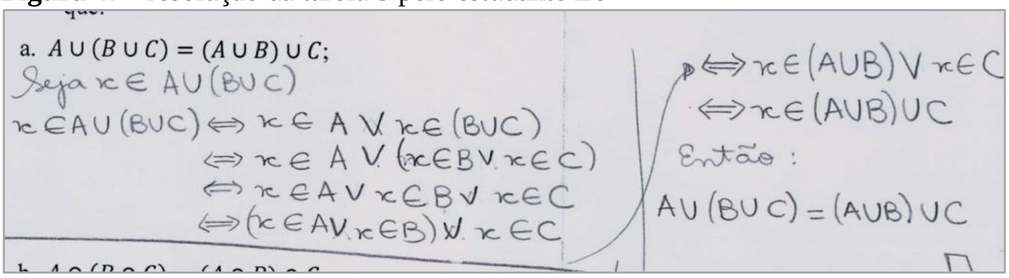


Fonte: resolução do estudante E6

Tarefa 5

Ele utilizou a técnica das equivalências lógicas das leis associativa, comutativa, distributiva e de idempotência para provar as propriedades de conjuntos de mesmo nome. Não conseguiu provar que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, mas na tarefa 3 provou para um conjunto finito que o vazio era subconjunto. Também não conseguiu provar a relação entre a diferença entre conjuntos com a definição de conjunto complementar.

Figura 47 - resolução da tarefa 5 pelo estudante E6



Fonte: resolução do estudante E6

Características do PMA manifestadas pelo estudante E6

O estudante aparenta compreender diversos símbolos e imagens de conceitos da teoria de conjuntos, possui mais de uma representação para o mesmo conceito e apresenta essas representações para os conceitos de conjuntos. Contudo não consegue generalizar e nem sintetizar conceitos inerentes a teoria de conjuntos.

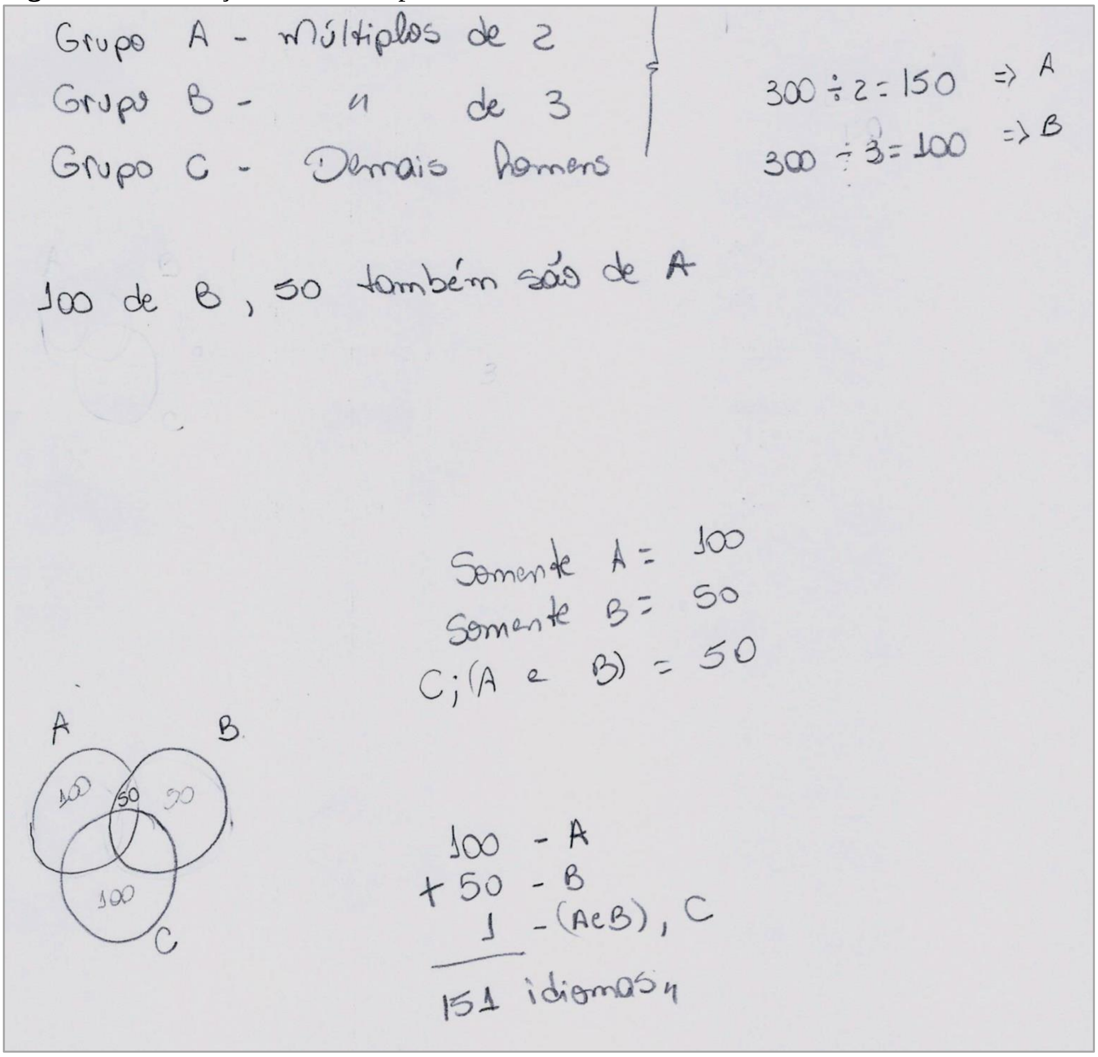
O estudante E6 apresenta as características dos processos de representação, pois ele consegue representar, fazer mudanças de representação bem como modela as situações apresentadas. Contudo, não atinge os processos de abstração, pois não sintetiza os conceitos e nem os generaliza.

4.1.7 Estudante E7

Tarefa 1

O estudante E7 utilizou diagramas em parte de sua resolução da tarefa, mas em sua representação ele fez uma interseção entre os conjuntos A e B com o conjunto C, o que, por meio das informações apresentadas no enunciado, não era possível.

Figura 48 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E7



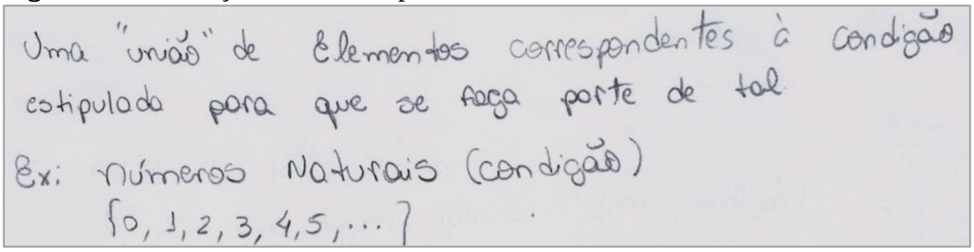
Fonte: resolução do estudante E7

Ele conseguiu distribuir os elementos entre os conjuntos A, B e C, percebeu a interseção entre os conjuntos A e B e, por fim, encontrou uma solução para a tarefa.

Tarefa 2

Ele define conjuntos como união de elementos e apresenta um exemplo, o conjunto dos números naturais, mas em sua definição ele desconsidera os conjuntos unitários e o conjunto vazio.

Figura 49 - resolução da tarefa 2 pelo estudante E7



Uma "união" de Elementos correspondentes à condição estipulada para que se faça parte de tal

Ex: números Naturais (condição)

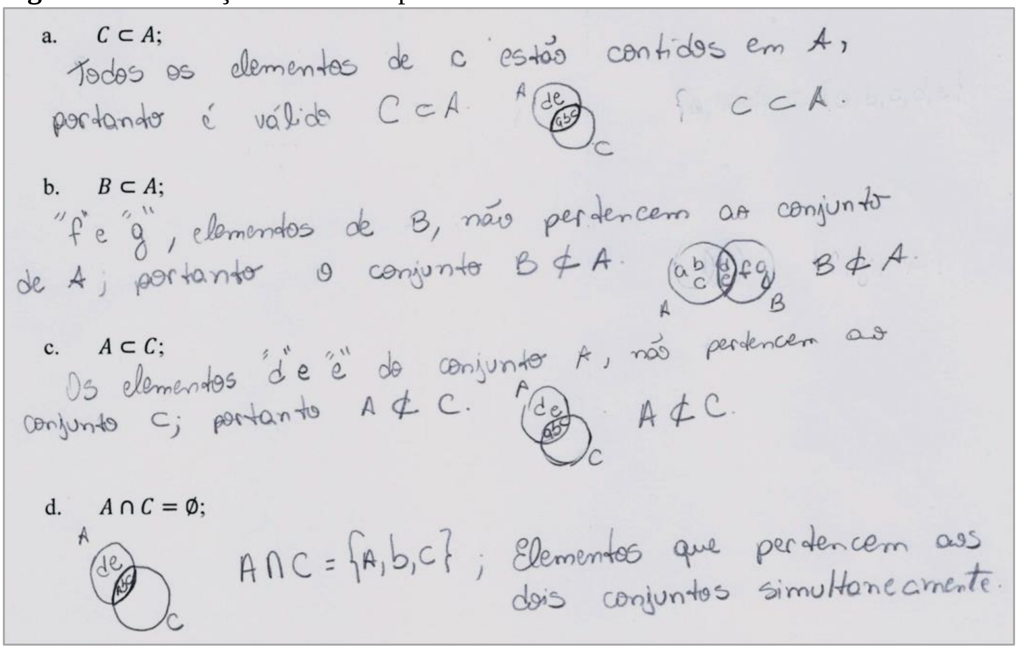
{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

Fonte: resolução do estudante E7

Tarefa 3

Apresenta em suas resoluções diagramas de Venn-Euler e símbolos de conjuntos, mostra que o conjunto C é subconjunto de A, apresenta contraexemplos nos itens que representavam afirmativas falsas e afirma que o conjunto vazio pertence a qualquer conjunto.

Figura 50 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E7



a. $C \subset A$;

Todos os elementos de C estão contidos em A, portanto é válido $C \subset A$. $C \subset A$.

b. $B \subset A$;

"f" e "g", elementos de B, não pertencem ao conjunto de A; portanto o conjunto $B \not\subset A$. $B \not\subset A$.

c. $A \subset C$;

Os elementos "d" e "e" do conjunto A, não pertencem ao conjunto C; portanto $A \not\subset C$. $A \not\subset C$.

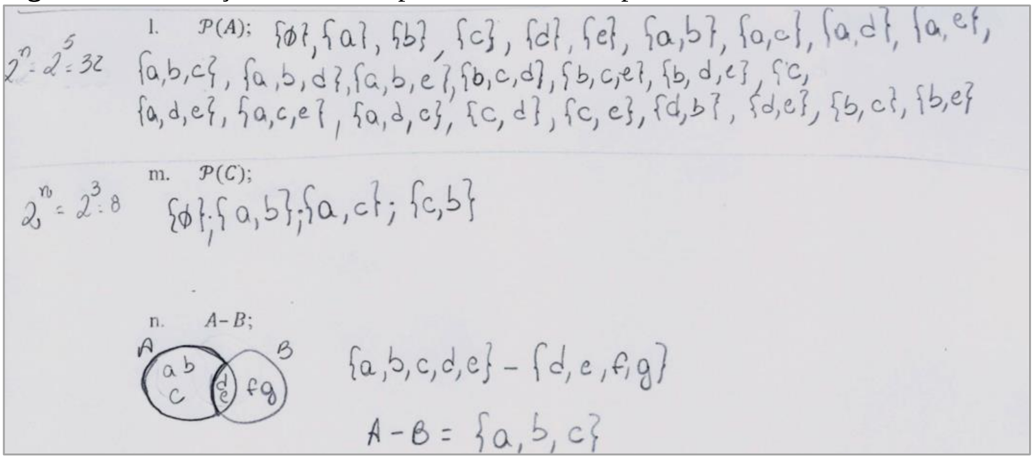
d. $A \cap C = \emptyset$;

$A \cap C = \{a, b, c\}$; Elementos que pertencem aos dois conjuntos simultaneamente.

Fonte: resolução do estudante E7

Ele compreende quantos conjuntos pertencem aos conjuntos das partes de A e das partes de C, mas não descreve todos. Apresenta solução para as operações de diferença e união entre conjuntos.

Figura 51 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E7, parte 2

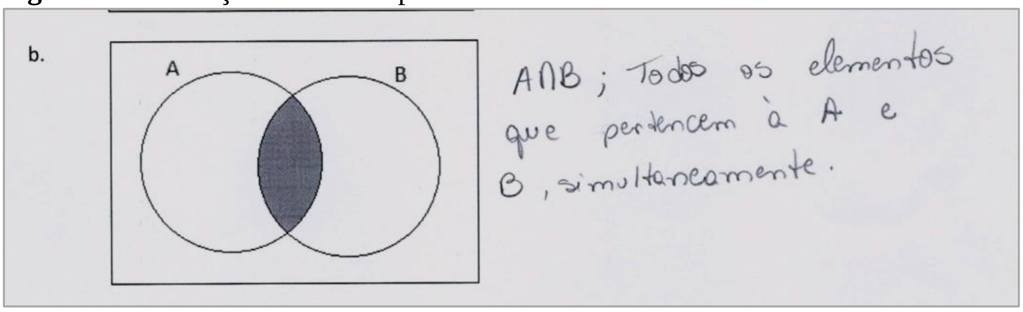


Fonte: resolução do estudante E7

Tarefa 4

Ele descreve as representações apresentadas por meio de diagramas e, também, consegue mudar de representação, parte das representações de diagramas para as representações simbólicas de conjuntos.

Figura 52 - resolução da tarefa 4 pelo estudante E7

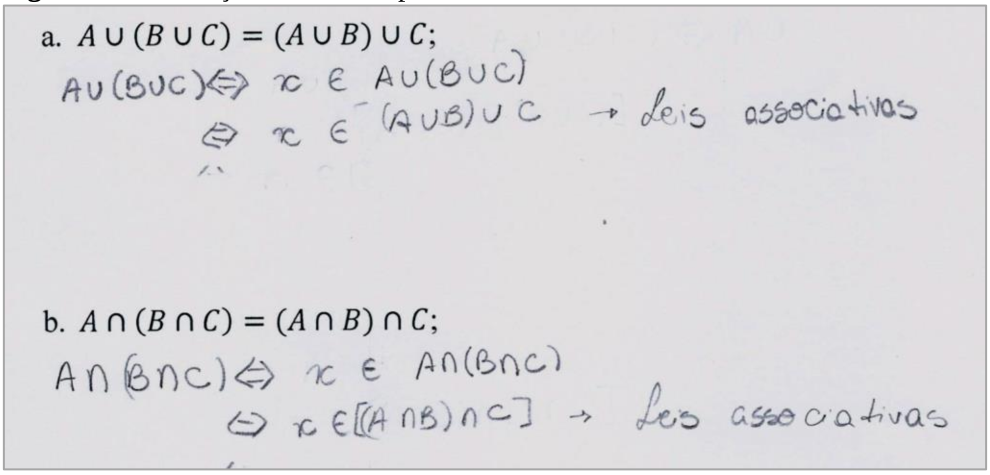


Fonte: resolução do estudante E7

Tarefa 5

Ele tenta usar as leis de equivalência lógica para provar as propriedades de conjuntos, mas deixa de fazer alguns passos que levariam a prova do resultado. Mesmo mostrando compreender que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, basta observar sua solução na tarefa 3, não conseguiu demonstrar essa propriedade.

Figura 53 - resolução da tarefa 5 pelo estudante E7



a. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

$A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$ → leis associativas

b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

$A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in [(A \cap B) \cap C]$ → leis associativas

Fonte: resolução do estudante E7

Características do PMA manifestadas pelo estudante E7

O estudante demonstra compreender os símbolos apresentados nas tarefas. Não apresenta uma descrição clara para o que seria um conjunto. Consegue compreender várias representações do conceito de conjunto, como pode-se ver nas tarefas 3 e 4. Não consegue generalizar os conceitos que demonstra compreender.

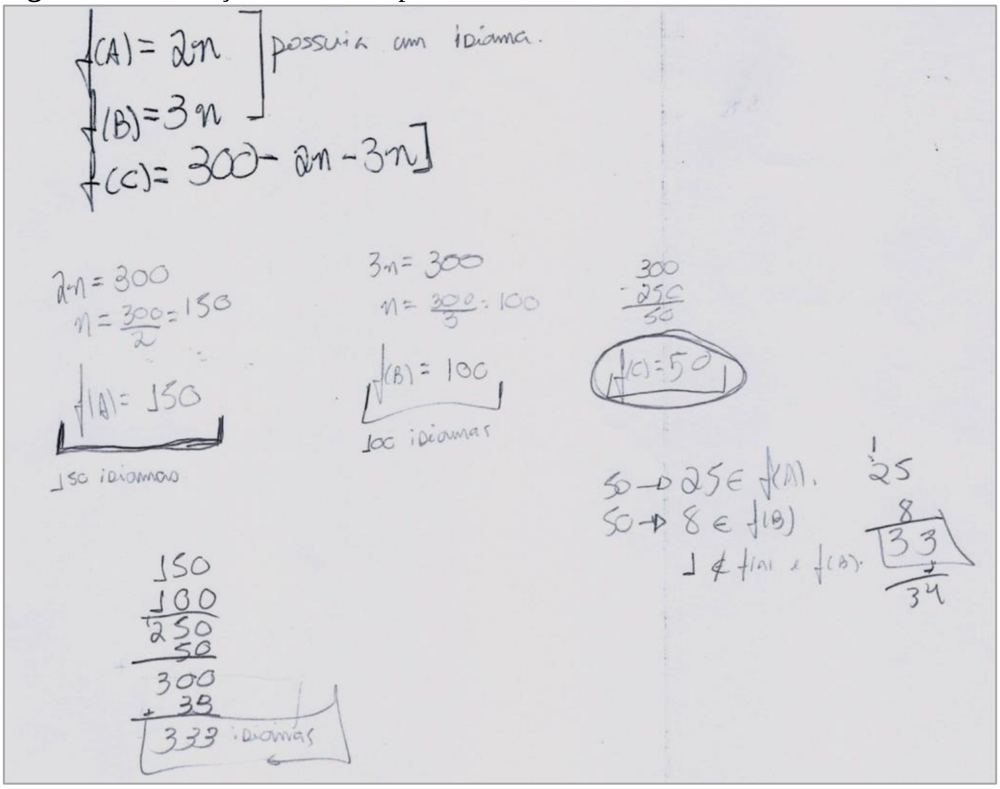
O estudante E7 consegue atingir as características dos processos de representação, representa simbolicamente e faz as mudanças de representação do mesmo objeto. Entretanto, não consegue sintetizar os conceitos bem como generalizá-los, ou seja, não atinge os processos de abstração.

4.1.8 Estudante E8

Tarefa 1

O estudante separa os elementos pelos grupos, mas desconsidera a interseção, mas percebe a existência, entre os conjuntos A e B, ou seja, ele considera alguns elementos duas vezes. Com isso desconsidera alguns elementos do conjunto C e os acrescenta nos conjuntos A e B. Ele classifica a interseção de A e B com 50 elementos consecutivos, assim ele confundiu essa quantidade de elementos, acreditou que existiam 25 elementos no conjunto A e 8 elementos no conjunto B, nessa interseção, por fim somou todos os elementos que ele encontrou para definir o número de idiomas falados, só que esse número superou a quantidade de homens e a tarefa não permitia isso.

Figura 54 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E8

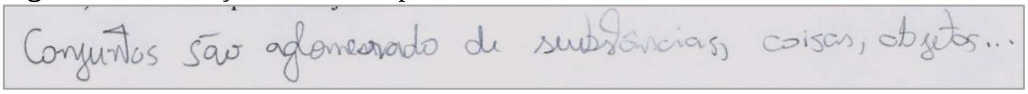


Fonte: resolução do estudante E8

Tarefa 2

Definiu conjuntos como aglomerados de objetos, só não apresentou definição uma clara definição para os conjuntos unitários e para o conjunto vazio.

Figura 55 - resolução da tarefa 2 pelo estudante E8

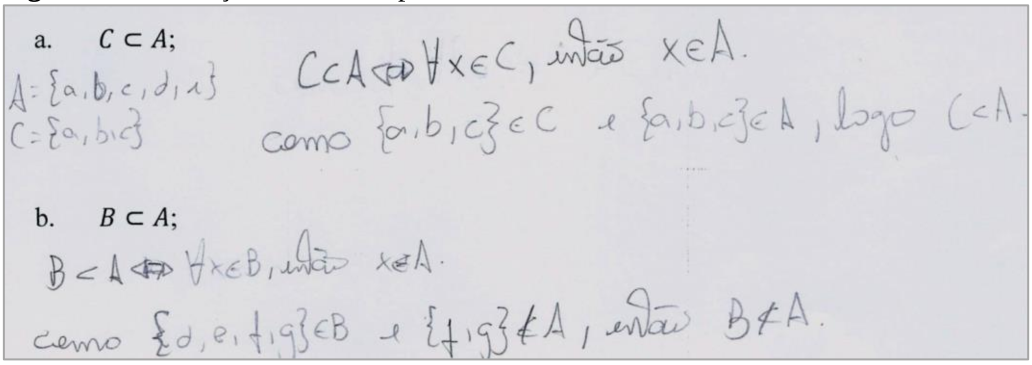


Fonte: resolução do estudante E8

Tarefa 3

O estudante mostra que o conjunto C é subconjunto de A, apresenta contraexemplos para os itens posteriores que apresentavam afirmativas falsas.

Figura 56 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E8



a. $C \subset A$;

$A=\{a,b,c,d,x\}$

$C=\{a,b,c\}$

$C \subset A \Leftrightarrow \forall x \in C$, então $x \in A$.

como $\{a,b,c\} \in C$ e $\{a,b,c\} \in A$, logo $C \subset A$.

b. $B \subset A$;

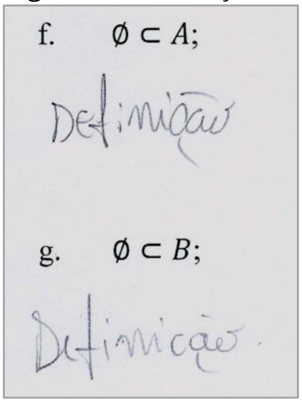
$B \subset A \Leftrightarrow \forall x \in B$, então $x \in A$.

como $\{d,e,f,g\} \in B$ e $\{f,g\} \notin A$, então $B \not\subset A$.

Fonte: resolução do estudante E8

Nos itens f. e g. ele deveria mostrar ou apresentar um argumento que o conjunto vazio era subconjunto dos conjuntos A e B, mas ele apenas escreveu a palavra “definição”.

Figura 57 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E8, parte 2



f. $\emptyset \subset A$;

Definição

g. $\emptyset \subset B$;

Definição.

Fonte: resolução do estudante E8

Percebeu as utilizações dos símbolos de inclusão e de pertinência, compreende as operações de diferença e união entre conjuntos. Começou a escrever os elementos do conjunto das partes de A, mas não concluiu. Em relação ao conjunto das partes de C, ele não descreveu todos os elementos e nem apresentou a quantidade de elementos que deveriam pertencer a este conjunto.

Figura 58 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E8, parte 3

l. $\mathcal{P}(A)$;

$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\{d\}, \{e\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}, A, \{a,c\}, \{a,c,d\}$
$\{a,c,d,e\}, \{a,d\}, \{a,d,e\}, \{a,e\}, \{b,c\}, \{b,c,d\}, \{b,c,d,e\} \dots$

m. $\mathcal{P}(C)$;

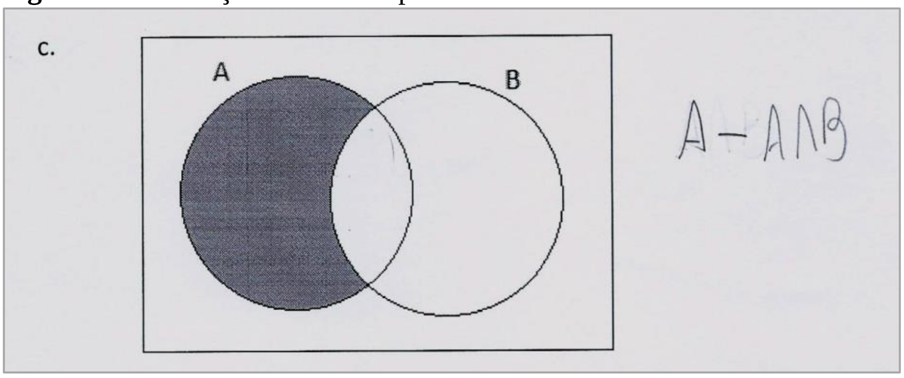
$P(C) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, C, \{b,c\}\}.$

Fonte: resolução do estudante E8

Tarefa 4

Ele converteu três dos quatro diagramas corretamente, mas não apresentou justificativas. Para o item c. ele definiu erroneamente, descreveu como a diferença entre o conjunto A e a interseção entre os conjuntos B e A, o que não era possível, pois todos os elementos de B não estão sendo considerados.

Figura 59 - resolução da tarefa 4 pelo estudante E8

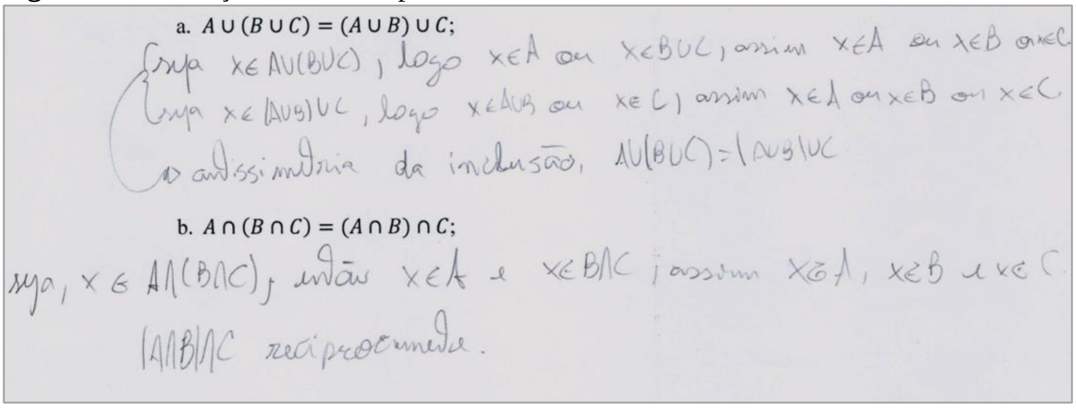


Fonte: resolução do estudante E8

Tarefa 5

Não conclui nenhuma parte de suas demonstrações, apenas distribui um elemento entre os conjuntos, por fim, apresenta uma conclusão para cada item. Apresentou resolução apenas para os primeiros cinco itens.

Figura 60 - resolução da tarefa 5 pelo estudante E8



a. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

seja $x \in A \cup (B \cup C)$, logo $x \in A$ ou $x \in B \cup C$, assim $x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in C$

seja $x \in (A \cup B) \cup C$, logo $x \in A \cup B$ ou $x \in C$, assim $x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in C$.

p/ antissimetria da inclusão, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

seja, $x \in A \cap (B \cap C)$, então $x \in A$ e $x \in B \cap C$; assim $x \in A$, $x \in B$ e $x \in C$.

$(A \cap B) \cap C$ reciprocamente.

Fonte: resolução do estudante E8

Características do PMA manifestadas pelo estudante E8

O estudante E8 compreende as representações simbólicas da teoria de conjuntos, mas tem dificuldades para fazer correspondências com conceitos dessa teoria. Não faz a alternância entre diferentes representações, porém compreende diferentes representação. Não efetua a generalizações e nem sintetiza conceitos.

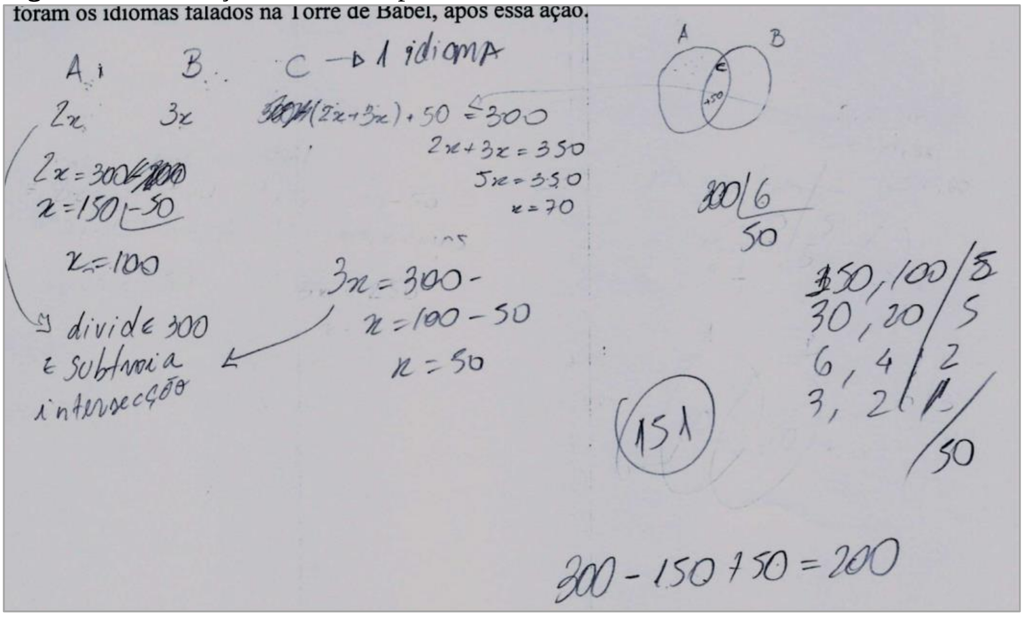
O estudante consegue atingir alguns processos de representação, não possui as características dos processos de representação e alternância entre eles. Além disso, não atinge os processos de Abstração, pois não consegue generalizar nem sintetizar esses conceitos.

4.1.9 Estudante E9

Tarefa 1

O estudante E9 escreve de forma confusa sua solução, percebe que não importa a quantidade de elementos que o conjunto C possua e que ele irá representar apenas um na soma dos idiomas, encontra a quantidade de elementos de cada conjunto e, também, a interseção entre os conjuntos A e B.

Figura 61 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E9



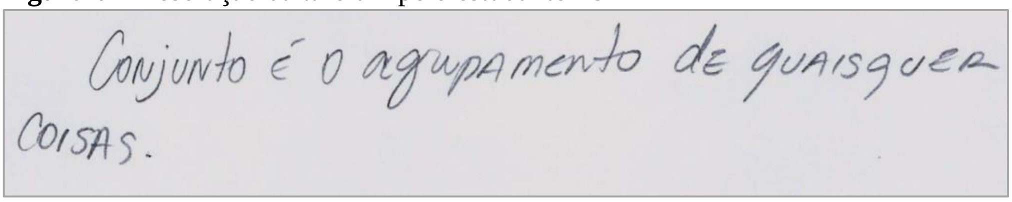
Fonte: resolução do estudante E9

Finalmente encontra um resultado, mas não mostra como conseguiu encontrar tal resposta, apresenta uma outra soma, porém não é a soma correspondente com sua resolução.

Tarefa 2

Definiu conjuntos como agrupamentos de coisas, só não apresentou definição uma clara definição para os conjuntos unitários e para o conjunto vazio.

Figura 62 - resolução da tarefa 2 pelo estudante E9

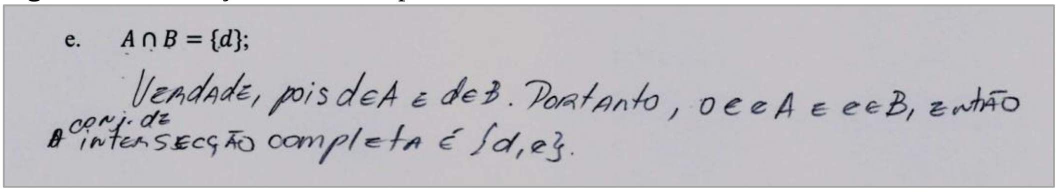


Fonte: resolução do estudante E9

Tarefa 3

Conseguiu mostrar que o conjunto C é subconjunto do conjunto A, apresentou contraexemplos para os itens b. c. e d., mas não percebeu que o conjunto que continha apenas o elemento d como elemento ({d}) não representava o conjunto formado pela interseção dos conjuntos A e B, mesmo mostrando que o conjunto era composto pelos elementos d e e.

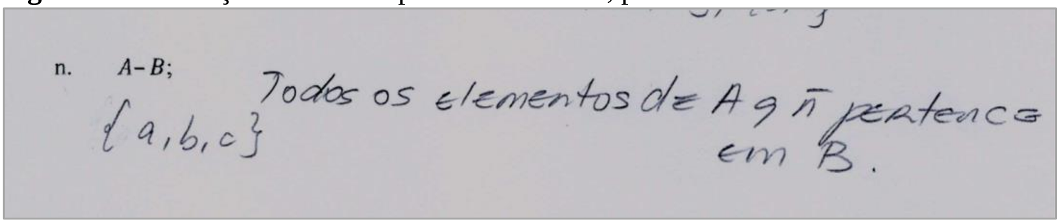
Figura 63 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E9



Fonte: resolução do estudante E9

Afirma que o conjunto vazio é subconjunto de todos os conjuntos, consegue realizar as operações de diferença e união entre conjuntos. Compreende a formação do conjunto das partes, e a utilização dos símbolos de pertinência e de inclusão.

Figura 64 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E9, parte 2

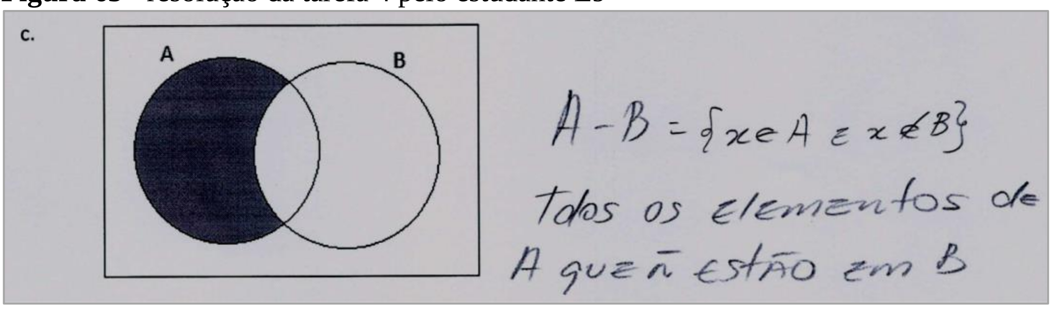


Fonte: resolução do estudante E9

Tarefa 4

Ele compreende as representações apresentadas por diagramas de Venn-Euler, e faz a conversão entre as representações por meio de símbolos e por diagramas. Apresenta justificativas para cada conversão.

Figura 65 - resolução da tarefa 4 pelo estudante E9

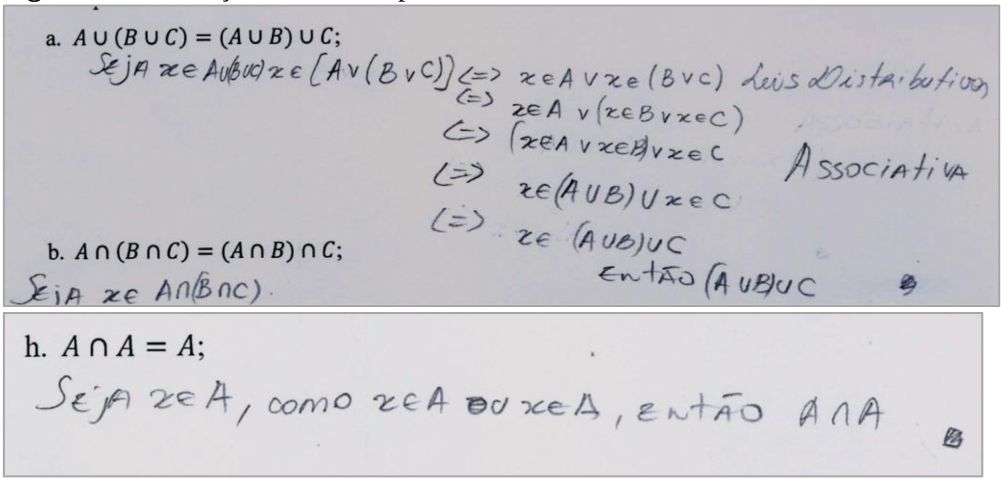


Fonte: resolução do estudante E9

Tarefa 5

O estudante apresenta demonstrações por meio de equivalências lógicas, mas não mostra conclusões. Deixa incompletos alguns itens, mas tenta provar todos. No item h. ele confunde a interseção com a união de conjuntos.

Figura 66 - resolução da tarefa 5 pelo estudante E9


a. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

Seja $x \in A \cup (B \cup C)$ $x \in [A \vee (B \vee C)]$ $\Leftrightarrow$ $x \in A \vee x \in (B \vee C)$ Leis Distributivas

$\Leftrightarrow$ $x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$

$\Leftrightarrow$ $(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$ Associativa

$\Leftrightarrow$ $x \in (A \cup B) \cup x \in C$

$\Leftrightarrow$ $x \in (A \cup B) \cup C$

Então $(A \cup B) \cup C$

b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

Seja $x \in A \cap (B \cap C)$.

h. $A \cap A = A$;

Seja $x \in A$, como $x \in A$ ou $x \in A$, então $A \cap A$

Fonte: resolução do estudante E9

Características do PMA manifestadas pelo estudante E9

O estudante não consegue traduzir enunciados de problemas para conceitos matemáticos. Consegue representar conceitos da teoria de conjuntos em símbolos e imagens, mas não consegue construir um conceito concreto. Faz alternâncias entre representações do conceito. Não generaliza e nem efetua a síntese de conceitos da teoria de conjuntos.

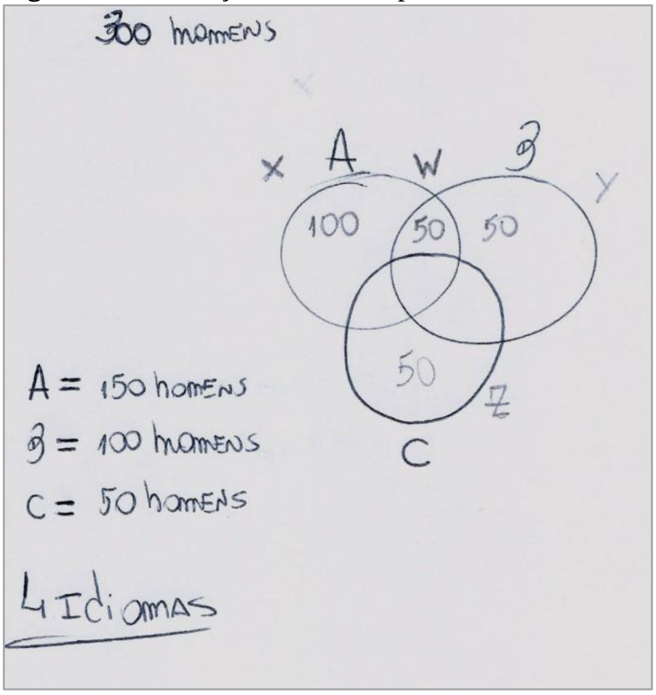
O estudante E9, não atinge todos os processos de representação, pois não possui a característica dos processos de modelação. E, além disso, não possui os processos de abstração, pois não apresenta indícios das características de Síntese e Generalização.

4.1.10 Estudante E10

Tarefa 1

O estudante utilizou diagramas de Venn-Euller para resolver a tarefa, porém cometeu um equívoco com a quantidade de elementos que pertenciam ao conjunto C. Não se atentou ao enunciado da tarefa, apresentou como resposta apenas 4 idiomas, infere-se que se deve ao fato de ele ter contado os grupos mais a interseção entre os conjuntos A e B.

Figura 67 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E10

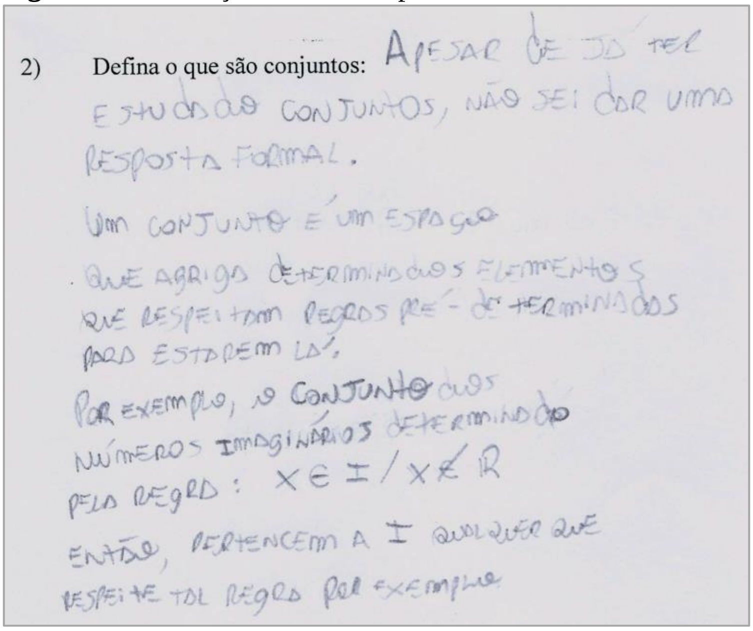


Fonte: resolução do estudante E10

Tarefa 2

Apesar de escrever que não seria capaz de apresentar conjuntos formalmente, fez um registro do que são conjuntos de forma consistente, usa como exemplo o conjunto dos números imaginários, entretanto ele quis se referir ao conjunto dos números irracionais. Porém, não deixa claro a existência dos conjuntos unitários e do conjunto vazio.

Figura 68 - resolução da tarefa 2 pelo estudante E10



2) Defina o que são conjuntos: APESAR DE JÁ TER ESTUDADO CONJUNTOS, NÃO SEI DAR UMA RESPOSTA FORMAL.

UM CONJUNTO É UM ESPAÇO QUE ABRIGA DETERMINADOS ELEMENTOS QUE RESPEITAM REGRAS PRÉ-DETERMINADAS PARA ESTAREM LÁ.

POR EXEMPLO, O CONJUNTO DOS NÚMEROS IMAGINÁRIOS DETERMINADO PELA REGRA: $x \in I / x \notin \mathbb{R}$

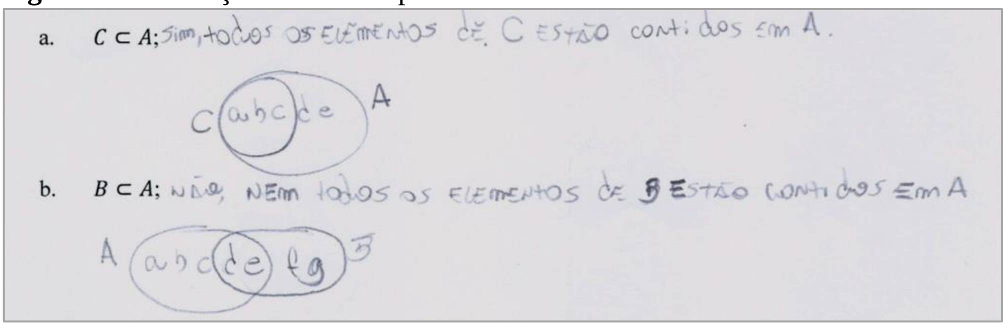
ENTÃO, PERTENCEM A I QUALQUER QUE RESPEITE TAL REGRA POR EXEMPLO

Fonte: resolução do estudante E10

Tarefa 3

Ele utiliza diagramas de Venn-Euller para resolver os itens da tarefa 3, afirma que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto. Ele confundiu os símbolos de pertinência com os de inclusão, afirmou que o símbolo de inclusão relaciona apenas elementos com conjuntos, o que é o oposto disso.

Figura 69 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E10



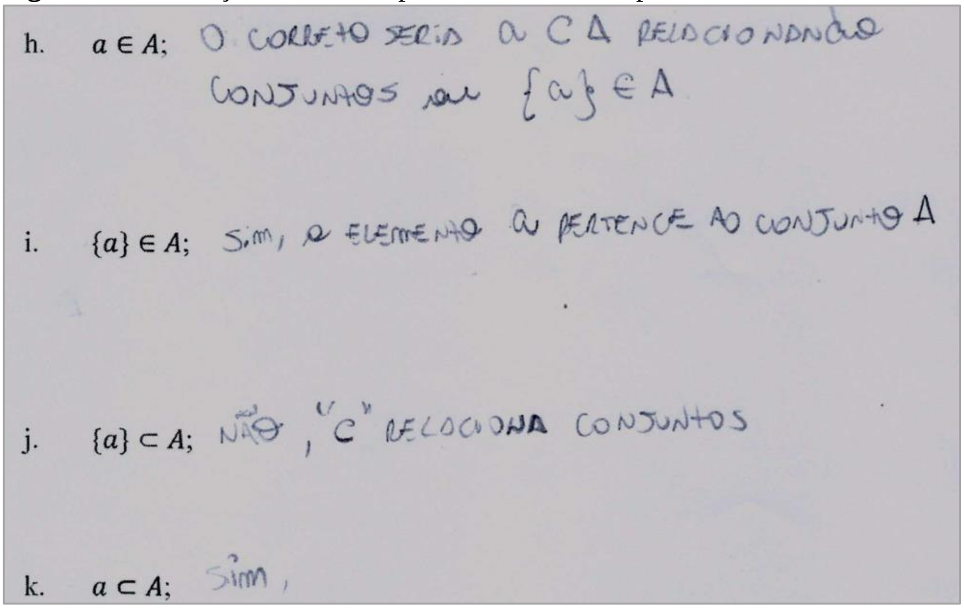
a. $C \subset A$; sim, todos os elementos de C estão contidos em A.

b. $B \subset A$; não, nem todos os elementos de B estão contidos em A

Fonte: resolução do estudante E10

Não apresentou nenhuma solução para os conjuntos das partes de A e de C. Mas apresentou resolução, por meio de diagramas de Venn-Euller, para as operações de diferença e de união entre conjuntos.

Figura 70 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E10, parte 3

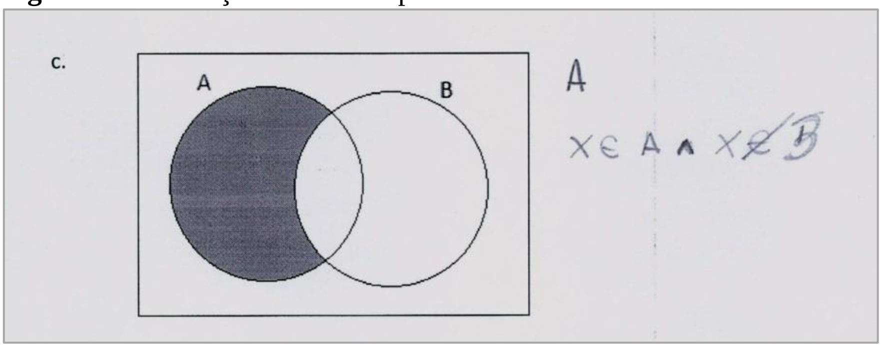


Fonte: resolução do estudante E10

Tarefa 4

Conseguiu converter três das quatro representações por meio de diagramas, mas não justificou nenhuma de suas conversões. No item c., infere-se que por ver que o conjunto B não estava sendo considerado, afirmou que a representação era do conjunto A, porém não considerou a interseção como sendo parte do conjunto A.

Figura 71 - resolução da tarefa 4 pelo estudante E10

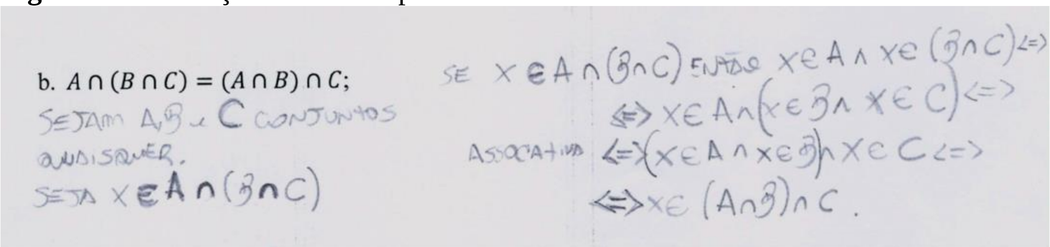


Fonte: resolução do estudante E10

Tarefa 5

E5 demonstra apenas os primeiros quatros itens por meio de equivalências lógicas, consegue utilizar as leis associativas e comutativas em suas demonstrações.

Figura 72 - resolução da tarefa 5 pelo estudante E10



b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

SEJAM A, B e C CONJUNTOS QUAISQUER.

SEJA $x \in A \cap (B \cap C)$

SE $x \in A \cap (B \cap C)$ ENTÃO $x \in A \wedge x \in (B \cap C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow$

ASSOCIATIVA $\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C$.

Fonte: resolução do estudante E10

Características do PMA manifestadas pelo estudante E10

Igualmente ao estudante E9, E10 não consegue traduzir enunciados de problemas em conceitos matemáticos, mas representa conceitos por meio de símbolos e imagens. Consegue fazer algumas ligações distintas de um mesmo conceito, porém não consegue fundi-las em uma mesma ideia. Generaliza alguns conceitos que ele apresenta conhecimento em algumas das tarefas. Representa matematicamente diversos conceitos da teoria.

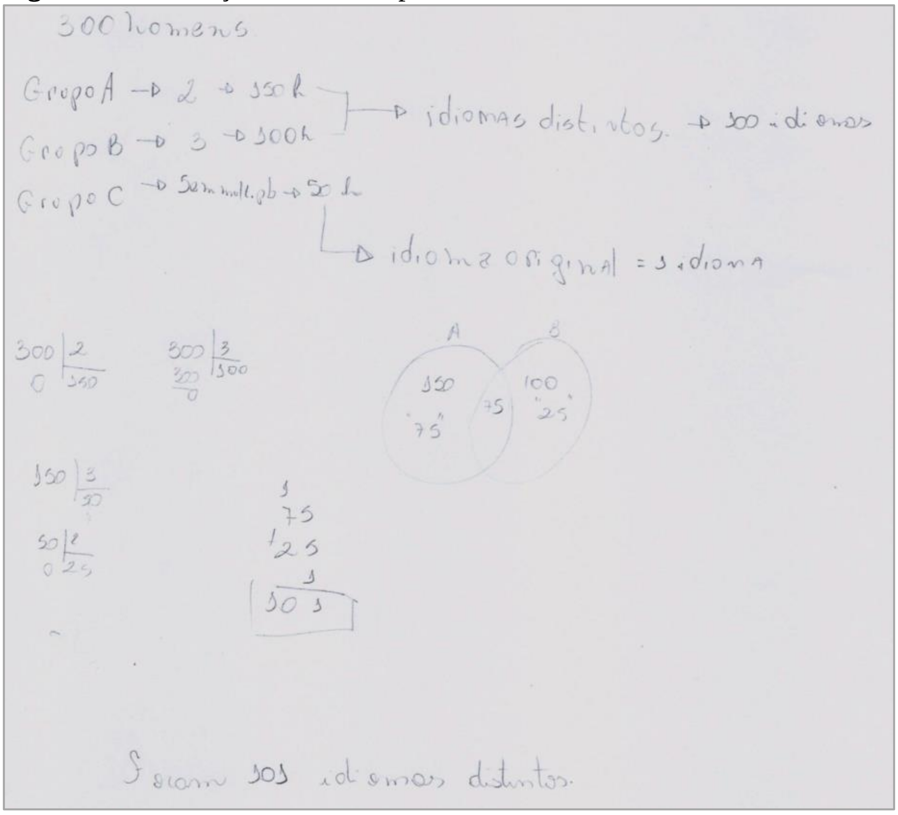
Ele não atinge todos os processos de representação, pois não modela os conceitos de determinados objetos matemáticos. Contudo, ele apresenta as características dos processos de Abstração, ou seja, ele generalizara e faz a síntese dos conceitos.

4.1.11 Estudante E11

Tarefa 1

Usou diagramas de Venn-Euller em sua resolução, encontrou a quantidade de elementos dos conjuntos A e B, mas confundiu a quantidade de elementos presentes na interseção entre esses conjuntos, além disso, concluiu a quantidade de elementos do conjunto C equivocadamente, o que colaborou com a solução equivocada apresentada.

Figura 73 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E11

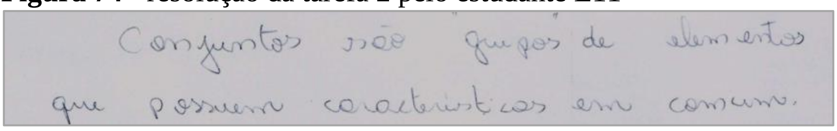


Fonte: resolução do estudante E11

Tarefa 2

Apresentou conjuntos como grupos de elementos, descreve que esses elementos devem possuir características em comum, porém não apresenta conjuntos unitários bem como conjuntos vazios.

Figura 74 - resolução da tarefa 2 pelo estudante E11

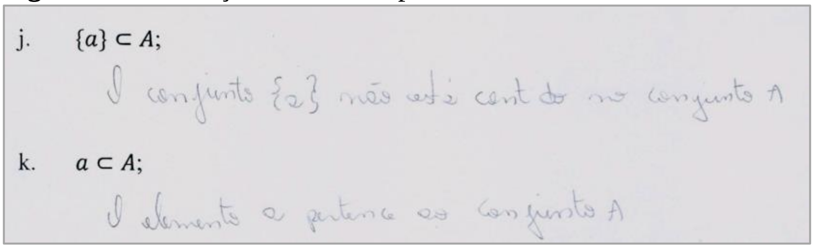


Fonte: resolução do estudante E11

Tarefa 3

Compreendeu inclusões, interseções e união entre conjuntos e mostra que C é um subconjunto de A. Apresentou contraexemplos para os itens falsos. Afirmou que o vazio é subconjunto de todos os conjuntos. Entendeu utilizações dos símbolos, como os de pertinência e inclusão, mas não entendeu que o conjunto que possui o elemento a é subconjunto do conjunto A, pois a∈A.

Figura 75 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E11



j. $\{a\} \subset A$;

O conjunto {a} não está contido no conjunto A

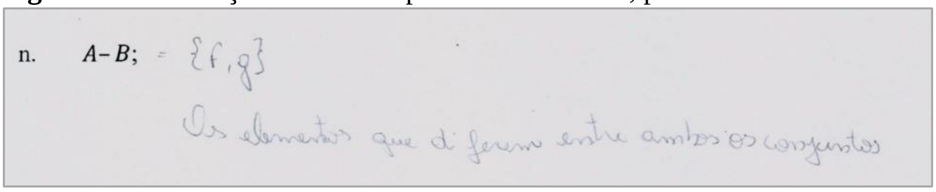
k. $a \subset A$;

O elemento a pertence ao conjunto A

Fonte: resolução do estudante E11

Não realizou os itens que se referiam ao conjunto das partes. Não compreendeu a operação de diferença entre os conjuntos, ele fez B-A.

Figura 76 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E11, parte 2



n. $A-B$; = {f, g}

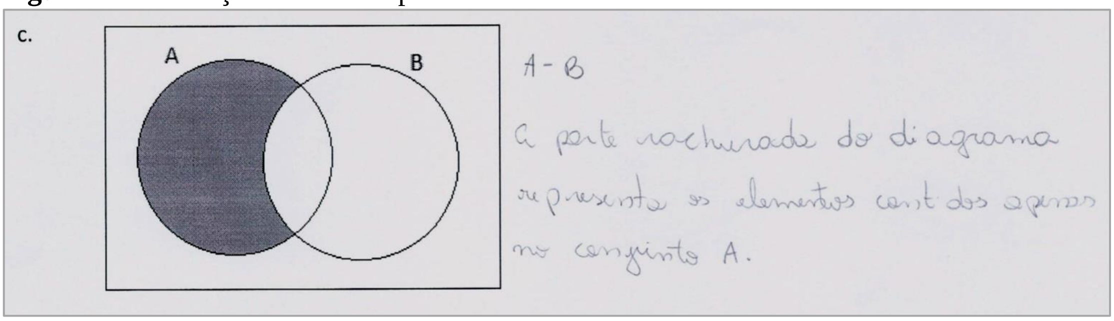
Os elementos que diferem entre ambos os conjuntos

Fonte: resolução do estudante E11

Tarefa 4

O estudante E11 compreendeu representações apresentadas por diagramas de Venn-Euler, e faz a conversão entre as representações por meio de símbolos e por diagramas. Apresenta justificativas para cada conversão. O item c. diz respeito a operação de diferença entre conjuntos, o qual ele confundiu na tarefa anterior, ou seja, fez corretamente.

Figura 77 - resolução da tarefa 4 pelo estudante E11



Fonte: resolução do estudante E11

Tarefa 5

Não apresentou solução para esta tarefa.

Características do PMA manifestadas pelo estudante E11

Ele compreende os símbolos apresentados nas tarefas. Apresenta conjuntos como classes. Consegue compreender várias representações do conceito de conjunto, como pode-se ver nas tarefas 3 e 4, mas tem problemas ao identificar a representação por meio de diagramas da operação de diferença entre conjuntos, pois fez exatamente ao contrário. Não realizou a tarefa 5, assim não se pode inferir que ele consegue generalizar os conceitos que mostrou conhecer, pois não realiza operações com conjuntos infinitos.

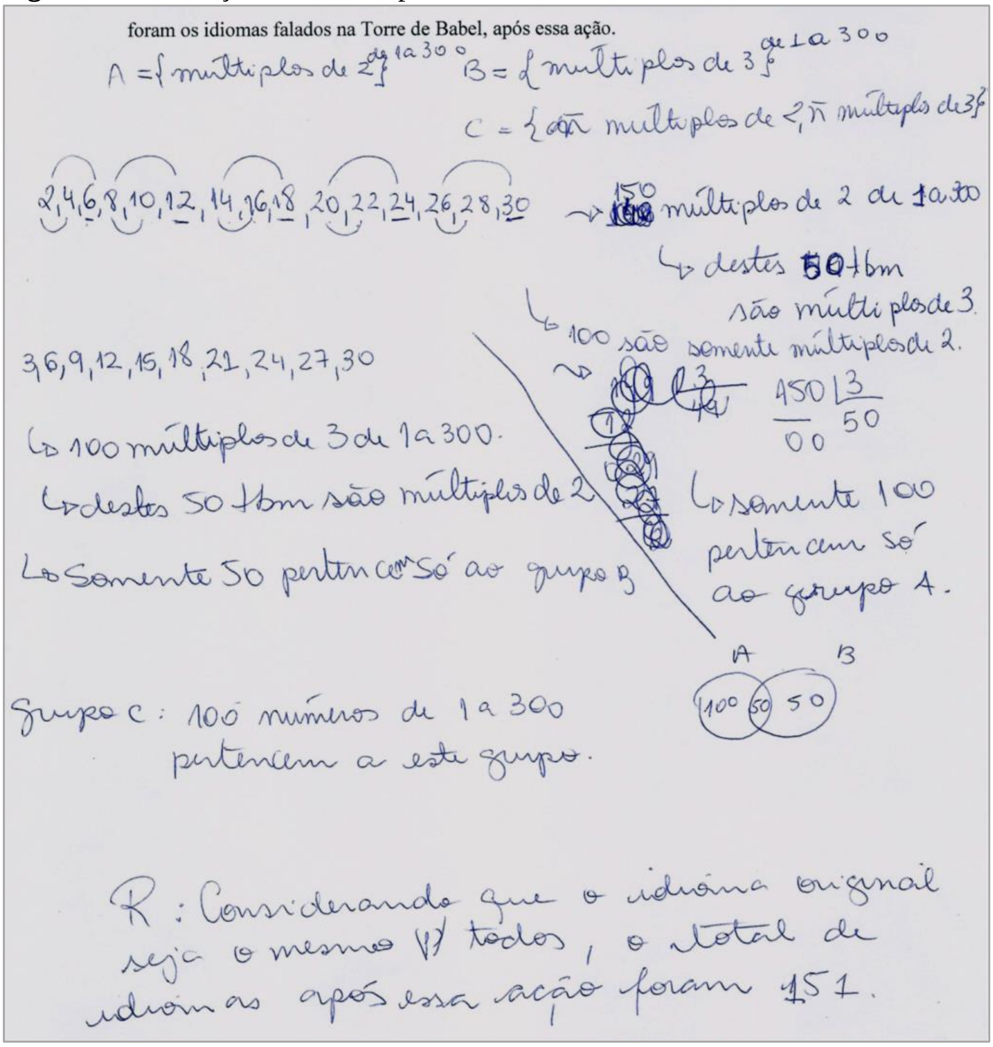
Deste modo, infere-se que esse estudante manifesta características dos processos de representação, pois ele consegue representar objetos simbolicamente bem como mudar de representação do mesmo objeto. Contudo não consegue abstrair os conceitos que ele mostra compreender.

4.1.12 Estudante E12

Tarefa 1

O estudante E12 separa os elementos nos respectivos conjuntos, descreve alguns desses elementos, percebe a interseção entre os conjuntos A e B e que C é um conjunto disjunto dos demais.

Figura 78 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E12


foram os idiomas falados na Torre de Babel, após essa ação.

A = {múltiplos de 2} de 1 a 300   B = {multiplos de 3} de 1 a 300

C = {não multiplos de 2, ñ multiplos de 3}

2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30 → 150 múltiplos de 2 de 1 a 300

↳ destes 50 tbm são multiplos de 3.

↳ 100 são somente múltiplos de 2.

3,6,9,12,15,18,21,24,27,30

↳ 100 múltiplos de 3 de 1 a 300.

↳ destes 50 tbm são múltiplos de 2

↳ Somente 50 pertencem só ao grupo B

450 | 3
00   50

↳ somente 100 pertencem só ao grupo A.

A B

100 50 50

Grupo C: 100 números de 1 a 300 pertencem a este grupo.

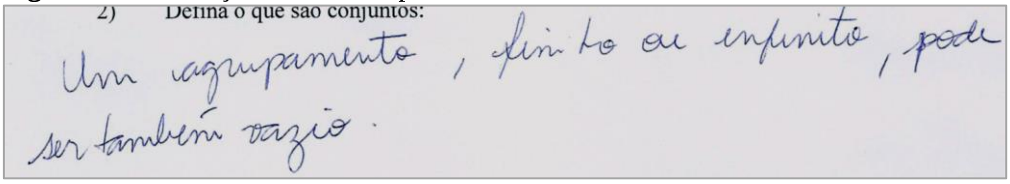
R: Considerando que o idioma original seja o mesmo p/ todos, o total de idiomas após essa ação foram 151.

Fonte: resolução do estudante E12

Tarefa 2

E12 apresenta uma definição sucinta, mas bem completa, define que é um agrupamento que pode ser finito ou infinito, contudo não fala nada a respeito dos elementos de um conjunto.

Figura 79 - resolução da tarefa 2 pelo estudante E12


2) Defina o que são conjuntos:

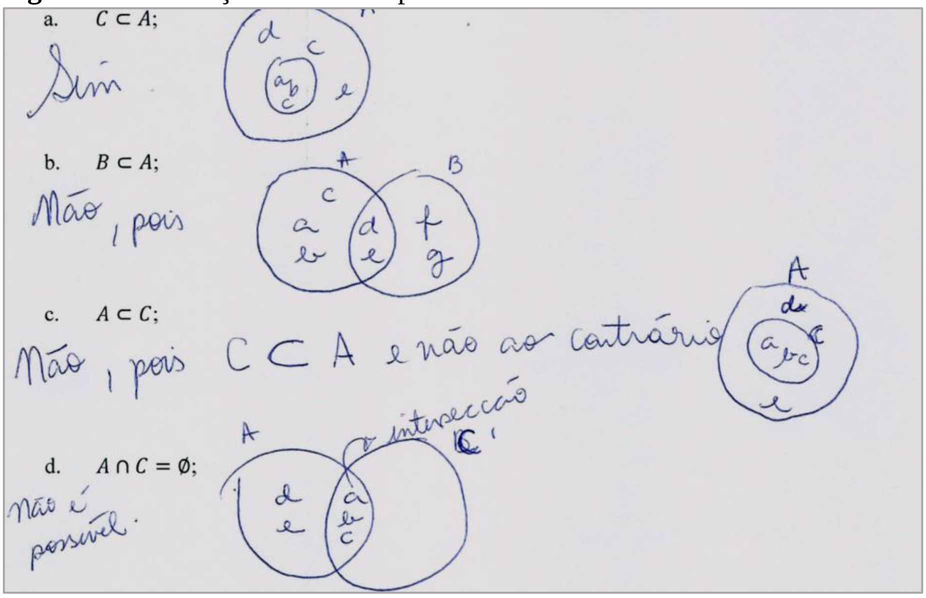
Um agrupamento, finito ou infinito, pode ser também vazio.

Fonte: resolução do estudante E12

Tarefa 3

Apresenta diagramas como justificativas para os itens da tarefa, mostra que o conjunto C está contido no conjunto A e mostra que as demais afirmações, os itens b. c. d. e e., são falsas. Justifica que o vazio é um subconjunto de todos os conjuntos.

Figura 80 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E12



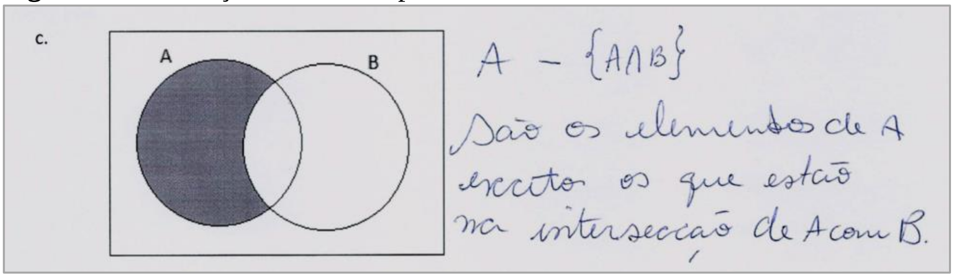
Fonte: resolução do estudante E12

Compreende que o símbolo de inclusão só relaciona conjuntos com outros conjuntos. Consegue resolver a operação de união entre conjuntos, mas não consegue realizar a operação de diferença entre conjuntos e nem consegue construir conjunto das partes.

Tarefa 4

O estudante E12 conseguiu converter três das quatro representações por meio de diagramas, mas não justificou nenhuma de suas conversões. Porém, no item c., infere-se que por ver que o conjunto B não estava sendo considerado, afirmou que a representação era do conjunto A, porém não considerou a interseção como sendo parte do conjunto A, ele somente a excluiu.

Figura 81 - resolução da tarefa 4 pelo estudante E12

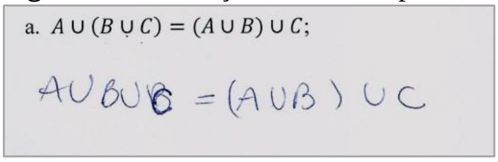


Fonte: resolução do estudante E12

Tarefa 5

O estudante só reescreveu dois enunciados, mas não seguiu resolvendo nenhum dos itens da tarefa 5.

Figura 82 - resolução da tarefa 5 pelo estudante E12



Fonte: resolução do estudante E12

Características do PMA manifestadas pelo estudante E12

O estudante E12 mostra compreender símbolos e representações utilizados na Teoria de Conjuntos e consegue representá-las, faz correspondência entre as representações de conjunto, descreve matematicamente as informações de um enunciado. Contudo ele não consegue relacionar a representação da diferença entre os conjuntos A e B por meio do diagrama de Euler-Venn, não consegue transformar em uma representação simbólica do mesmo. Mostra não compreender o que significa a representação simbólica da diferença, como por ser visto na tarefa 3. Além disso, E12 não completa as demonstrações que ele iniciou, faz somente a repetição do enunciado, como na tarefa 5.

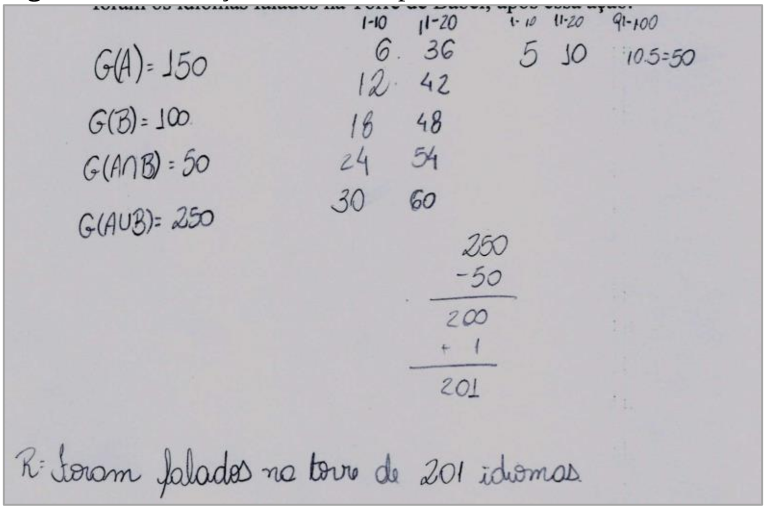
Assim infere-se que ele comtempla as características dos processos envolvidos na representação, tais como os processos de representação e a tradução e comutação entre as representações, mas ainda não generaliza e nem sintetiza conceitos da Teoria de Conjuntos.

4.1.13 Estudante E13

Tarefa 1

Ele utilizou simbologia de conjuntos para resolver a tarefa, separou os grupos A e B pela quantidade de elementos. Mas em sua solução ele verifica a quantidade de elementos na interseção entre os conjuntos A e B e, além disso, a união entres esses conjuntos, entretanto ao realizar a operação de união ele considerou duas vezes a interseção, o que fez com que ele desse uma resposta incorreta à tarefa.

Figura 83 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E13

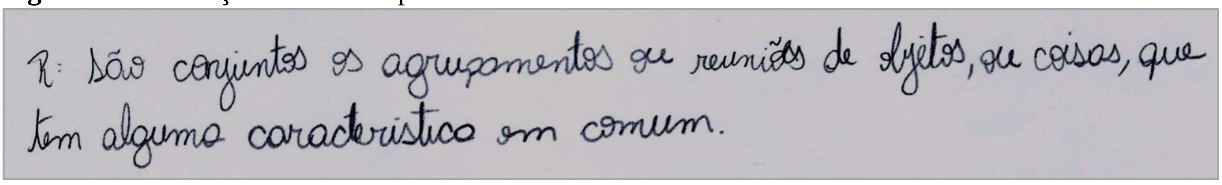


Fonte: resolução do estudante E13

Tarefa 2

Ele apresenta conjuntos vagamente e pode se interpretar que os conjuntos vazio e o unitário não são considerados conjuntos.

Figura 84 - resolução da tarefa 2 pelo estudante E13

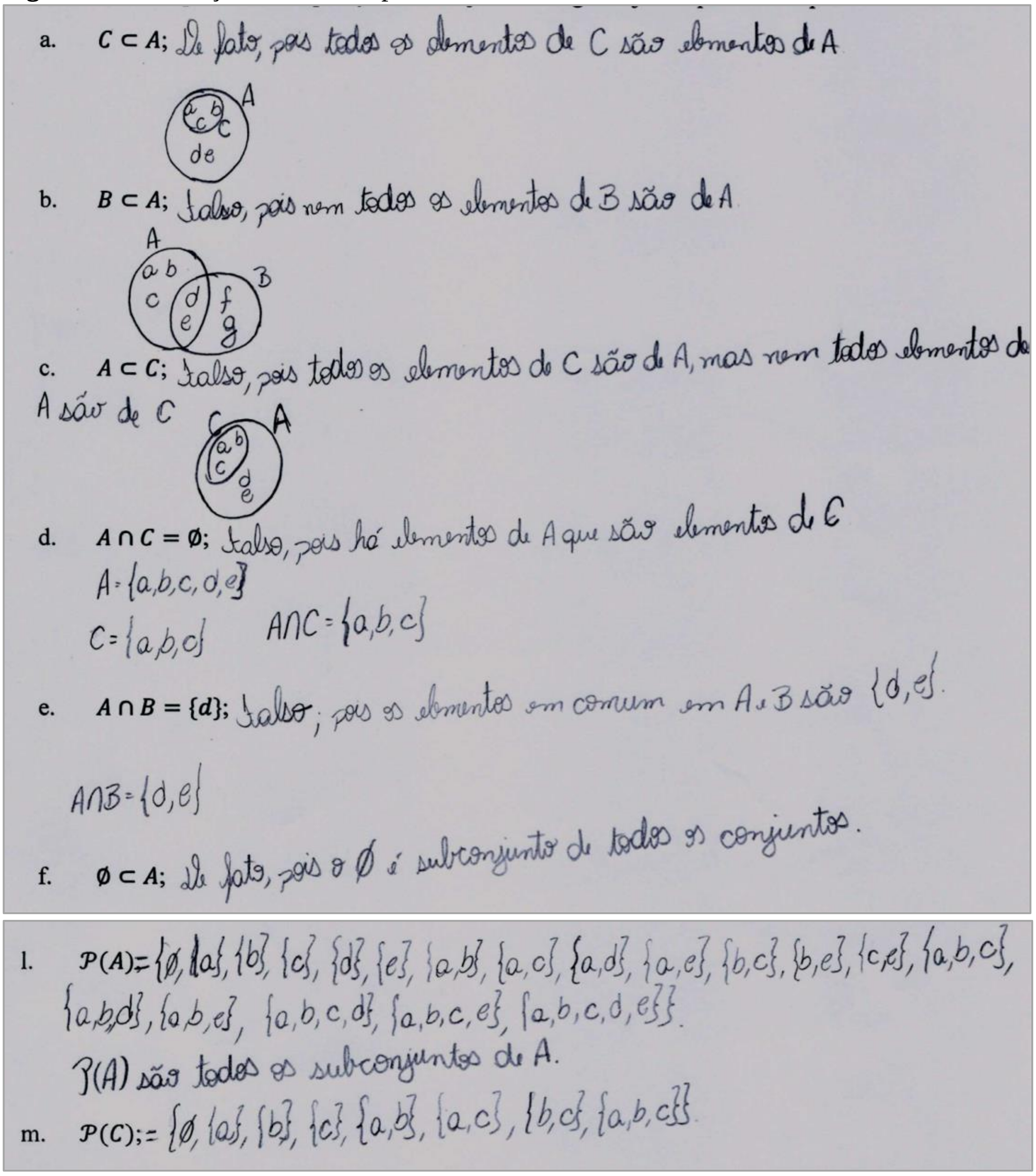


Fonte: resolução do estudante E13

Tarefa 3

O estudante utilizou em algumas de suas soluções os diagramas de Venn-Euler para justificá-las. Compreende as relações de subconjunto, união e interseção, além disso, compreende que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, que a relação de estar contido é uma relação exclusiva de conjuntos com conjuntos e a diferença entre conjuntos. No entanto, não conseguiu listar todos os subconjuntos de P(A), mas entende que P(A) é composto por todos os subconjuntos do conjunto A.

Figura 85 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E13



a. $C \subset A$; De fato, pois todos os elementos de C são elementos de A

b. $B \subset A$; falso, pois nem todos os elementos de B são de A

c. $A \subset C$; falso, pois todos os elementos de C são de A, mas nem todos elementos de A são de C

d. $A \cap C = \emptyset$; falso, pois há elementos de A que são elementos de C

$A = \{a, b, c, d, e\}$

$C = \{a, b, c\}$ $A \cap C = \{a, b, c\}$

e. $A \cap B = \{d\}$; falso; pois os elementos em comum em A e B são $\{d, e\}$.

$A \cap B = \{d, e\}$

f. $\emptyset \subset A$; De fato, pois o $\emptyset$ é subconjunto de todos os conjuntos.

l. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,e\}, \{b,c\}, \{b,e\}, \{c,e\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,e\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,c,e\}, \{a,b,c,d,e\}\}$.

P(A) são todos os subconjuntos de A.

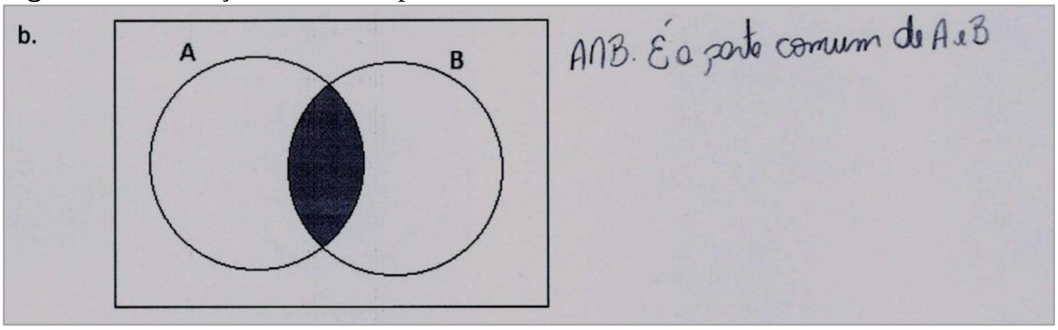
m. $\mathcal{P}(C)$; $= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

Fonte: resolução do estudante E13

Tarefa 4

Ele descreve o que cada diagrama representa e apresenta justificativas coerentes com a relação que está sendo representada.

Figura 86 - resolução da tarefa 4 pelo estudante E13



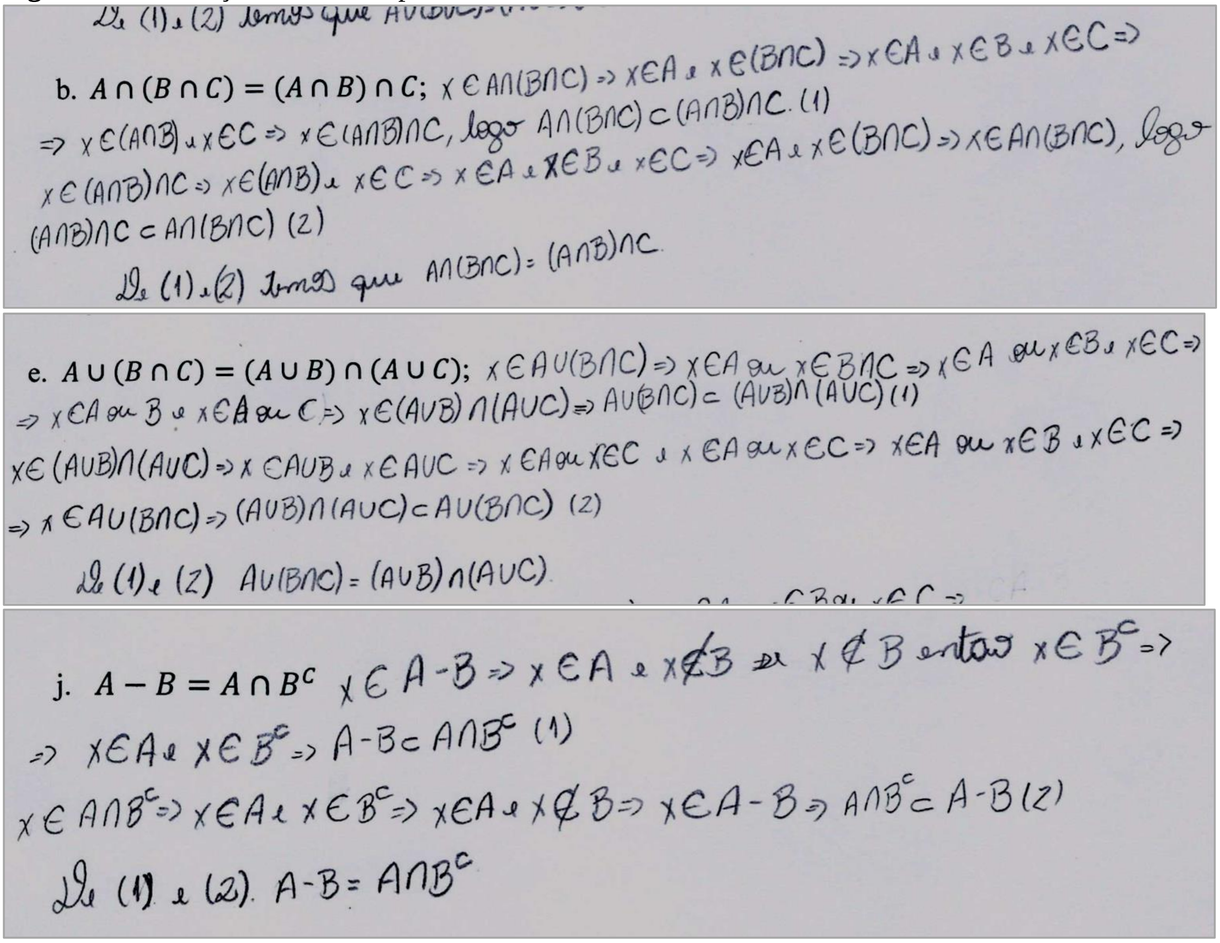
Fonte: resolução do estudante E13

Tarefa 5

O estudante E13 apresentou solução para quase todos os itens desta tarefa, só não apresentou solução para o item i), que dizia a respeito do vazio estar contido em qualquer conjunto. Em suas soluções ele usa o método dedutivo[1] para demonstrar cada item da tarefa. No item e), em sua primeira parte, ele não escreve corretamente que o elemento x pertence a B e, também, que x pode pertencer a C (ver destaque na figura XX). Na sua resolução do item j), quando ele demonstra que a diferença entre os conjuntos A e B é um subconjunto da interseção do conjunto A e com o conjunto complementar de B em relação ao conjunto A, ele pula direto da relação que o elemento x pertence ao conjunto A e ao conjunto complementar de B em relação ao conjunto A e afirma que ele contém o conjunto inicial, o que não pode ser afirmada antes de ser apresentada que essa relação estabelece a interseção entre esses conjuntos, e ai sim provar que este conjunto contém a diferença entre os conjuntos A e B.

[1] Segundo Gerônimo e Franco (2008), método dedutivo é um método que usa resultados já conhecidos para provar outros.

Figura 87 - resolução da tarefa 5 pelo estudante E13



b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; $x \in A\cap(B\cap C) \Rightarrow x\in A$ e $x \in (B\cap C) \Rightarrow x\in A$ e $x\in B$ e $x \in C \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in (A\cap B)$ e $x\in C \Rightarrow x \in (A\cap B)\cap C$, logo $A\cap(B\cap C) \subset (A\cap B)\cap C$. (1)
$x\in(A\cap B)\cap C \Rightarrow x \in (A\cap B)$ e $x\in C \Rightarrow x\in A$ e $x\in B$ e $x\in C \Rightarrow x\in A$ e $x\in(B\cap C)\Rightarrow x\in A\cap(B\cap C)$, logo
$(A\cap B)\cap C \subset A\cap(B\cap C)$ (2)
De (1) e (2) temos que $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$.

e. $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$; $x\in A\cup(B\cap C) \Rightarrow x\in A$ ou $x\in B\cap C \Rightarrow x \in A$ ou $x\in B$ e $x\in C \Rightarrow$
$\Rightarrow x\in A$ ou B e $x\in A$ ou $C \Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C) \Rightarrow A\cup(B\cap C) \subset (A\cup B)\cap(A\cup C)$ (1)
$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C) \Rightarrow x \in A\cup B$ e $x\in A\cup C \Rightarrow x\in A$ ou $x\in C$ e $x\in A$ ou $x\in C \Rightarrow x\in A$ ou $x\in B$ e $x\in C \Rightarrow$
$\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C) \Rightarrow (A\cup B)\cap(A\cup C) \subset A\cup(B\cap C)$ (2)
De (1) e (2) $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$.

j. $A - B = A\cap B^c$ $x\in A-B \Rightarrow x\in A$ e $x\notin B$ se $x\notin B$ então $x\in B^c \Rightarrow$
$\Rightarrow x\in A$ e $x\in B^c \Rightarrow A-B\subset A\cap B^c$ (1)
$x\in A\cap B^c \Rightarrow x\in A$ e $x\in B^c \Rightarrow x\in A$ e $x\notin B \Rightarrow x\in A-B \Rightarrow A\cap B^c \subset A-B$ (2)
De (1) e (2). $A-B = A\cap B^c$

Fonte: resolução do estudante E13

Características do PMA manifestadas pelo estudante E13

O estudante utiliza símbolos da Teoria de Conjuntos, consegue construir esquemas para as suas resoluções. Representa os conceitos de conjuntos com mais de uma representação, utiliza símbolos e diagramas. Constrói conceitos matemáticos por meio de suas representações. Resolve problemas com conjuntos finitos, ou seja, definidos e, também, expande esses conhecimentos para resolução de problemas com conjuntos infinitos, conjuntos quaisquer. Além disso, faz a ligação entre essas duas partes deste conceito.

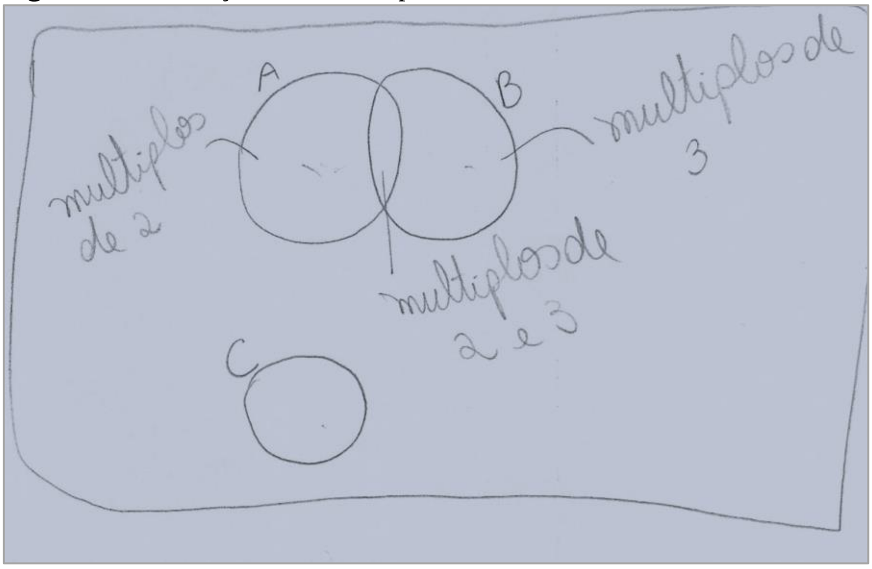
Infere-se que o estudante E13 atinge todas as características do PMA, ou seja, alcança os processos de representação e de abstração, pois ele consegue representar o conceito por meio de símbolos e mais de uma representação, modela esse conceito matematicamente, encontra pontos comuns em diferentes tarefas e faz ligações destes pontos em um conceito.

4.1.14 Estudante E14

Tarefa 1

O estudante E14 conseguiu perceber a formação dos três conjuntos apresentados na tarefa. Ele apresentou diagrama representando esses conjuntos, percebeu a interseção entre os conjuntos A e B e que o conjunto C não possui nenhuma interseção entre os outros conjuntos. Representou os tipos de elementos que pertencem a cada um dos conjuntos, contudo não conseguiu determinar a quantidade de elementos que pertenciam a estes conjuntos, o que era necessário para resolver o problema.

Figura 88 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E14

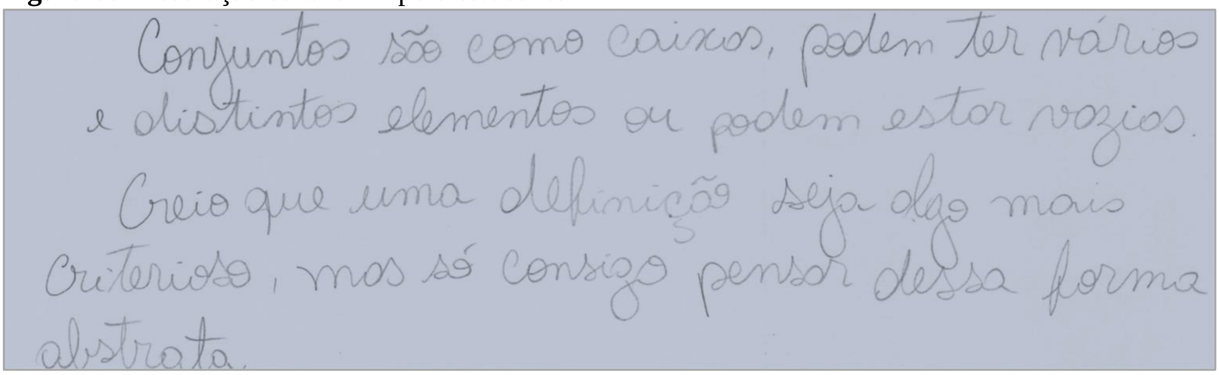


Fonte: resolução do estudante E14

Tarefa 2

O estudante apresentou conjuntos fazendo uma comparação com caixas, concebe a ideia do que são conjuntos, apresentou de maneira simples, mas bem esclarecida.

Figura 89 - resolução da tarefa 2 pelo estudante E14



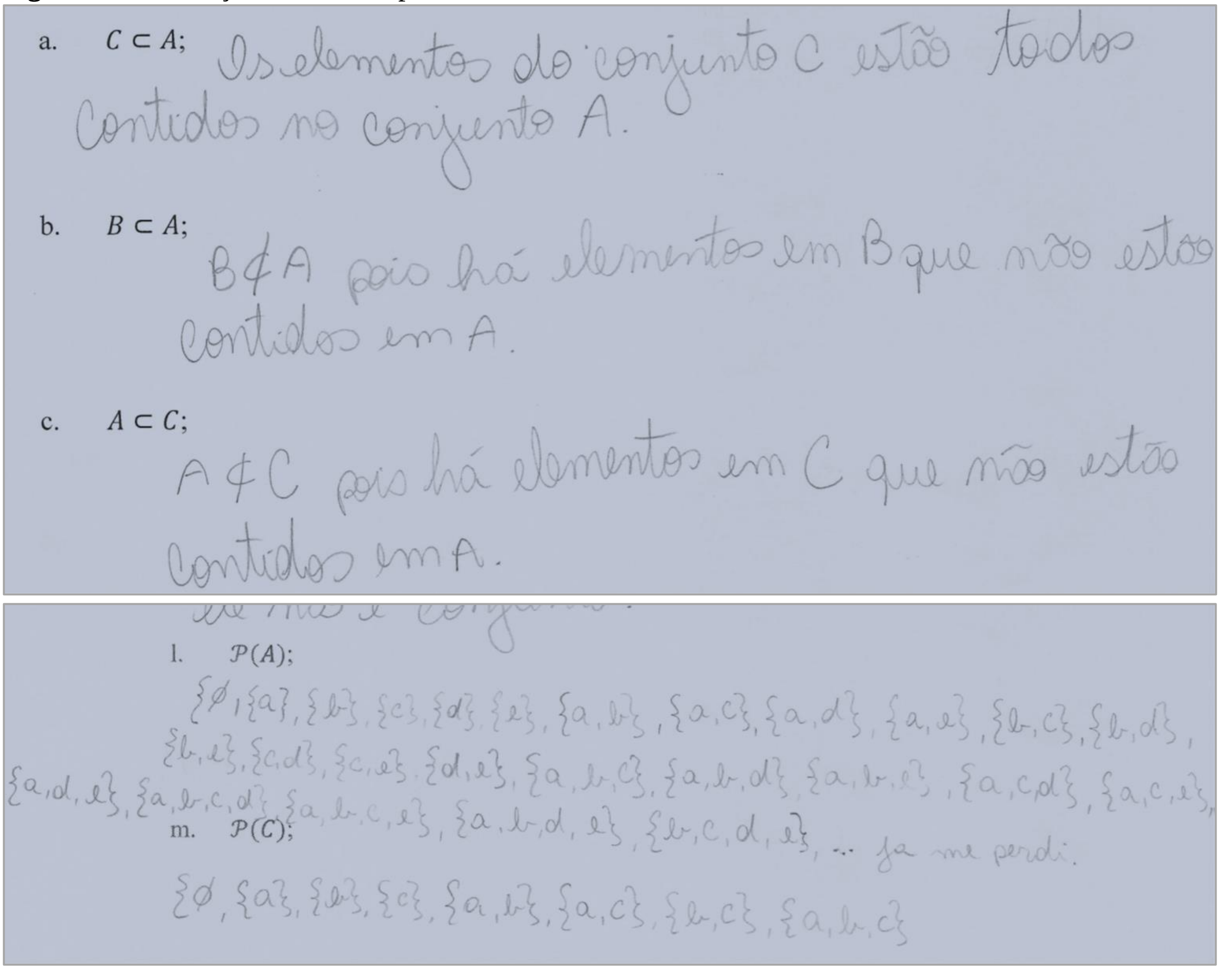
Conjuntos são como caixas, podem ter vários e distintos elementos ou podem estar vazios. Creio que uma definição seja algo mais criterioso, mas só consigo pensar dessa forma abstrata.

Fonte: resolução do estudante E14

Tarefa 3

O E14 usa repetidas vezes a palavra contido ao invés de pertence, porém percebe que B não é subconjunto de A, nem A é subconjunto de C e que C é um subconjunto de A, observe a figura 84. Compreende a interseção entre os conjuntos, como é composta essa operação. Afirma que o vazio está contido em qualquer conjunto, ou seja, compreende que o vazio é um subconjunto próprio de todos os conjuntos. Nos itens seguintes que a relação de subconjunto (estar contido) mostra compreender que é uma operação exclusiva entre conjuntos. Resolve as operações de união e diferença entre conjuntos, e consegue explicá-las. Compreenda a constituição do conjunto das partes, consegue escrever o conjunto todo das partes do conjunto C, mas justifica que se perdeu ao construir o conjunto das partes do conjunto A.

Figura 90 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E14



a. $C \subset A$; Os elementos do conjunto C estão todos contidos no conjunto A.

b. $B \subset A$; $B \not\subset A$ pois há elementos em B que não estão contidos em A.

c. $A \subset C$; $A \not\subset C$ pois há elementos em C que não estão contidos em A.

l. $\mathcal{P}(A)$;
$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,e\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{b,e\}, \{c,d\}, \{c,e\}, \{d,e\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,e\}, \{a,c,d\}, \{a,c,e\}, \{a,d,e\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,c,e\}, \{a,b,d,e\}, \{b,c,d,e\}$, ... já me perdi.

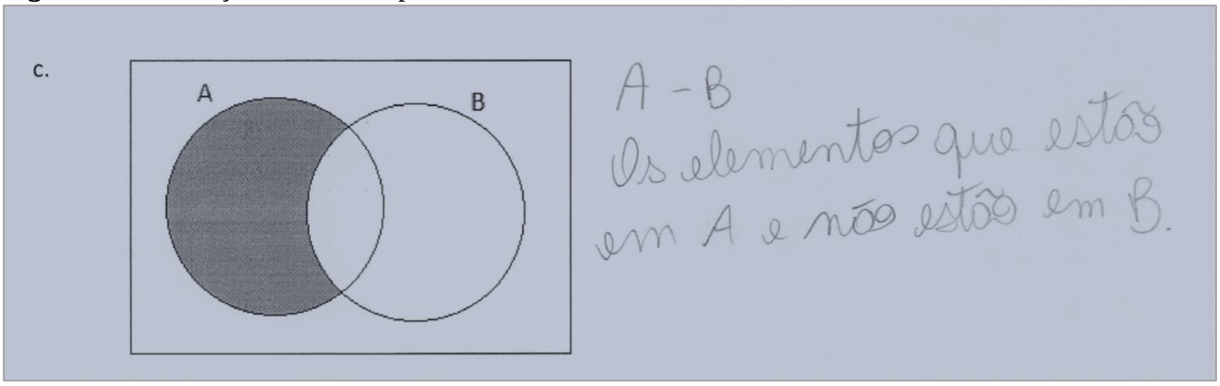
m. $\mathcal{P}(C)$;
$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$

Fonte: resolução do estudante E14

Tarefa 4

Compreende todas as representações que estão por meio de diagramas de Venn-Euler, justifica todas as suas correspondências simbólicas das representações apresentadas.

Figura 91 - resolução da tarefa 4 pelo estudante E14

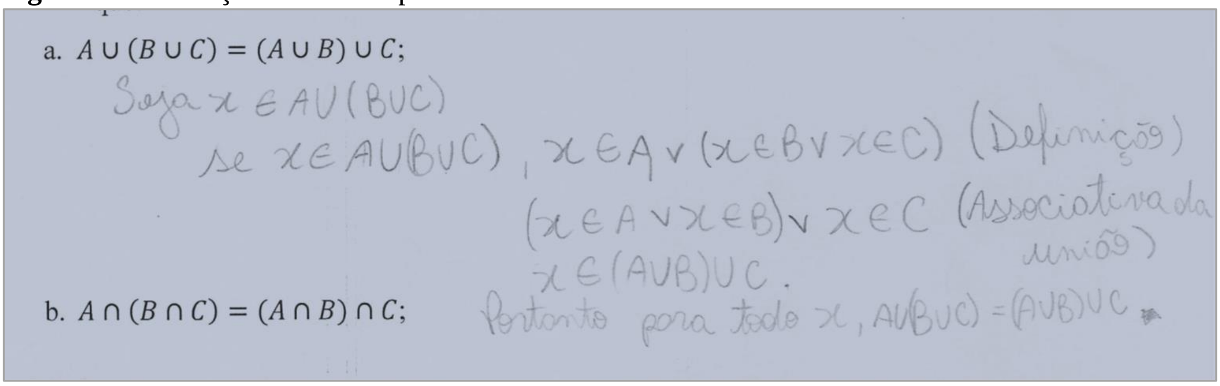


Fonte: resolução do estudante E14

Tarefa 5

Resolveu apenas o item a), contudo não faz a equivalência lógica entre os passos de sua demonstração, infere-se que ela deve ter apenas esquecido de usar a simbologia de equivalência lógica.

Figura 92 - resolução da tarefa 5 pelo estudante E14



Fonte: resolução do estudante E14

Características do PMA manifestadas pelo estudante E14

O estudante E14 ao resolver as tarefas propostas demonstra compreender os símbolos usados na Teoria de Conjuntos, bem como utilizá-los em suas resoluções. Ele consegue compreender mais de uma representação do mesmo conceito e ainda as converte para outra representação, como pode-se observar na tarefa 4. Descreve matematicamente as informações apresentadas em um enunciado. Não consegue generalizar os conceitos de conjuntos definidos em conjuntos quaisquer, não realiza as demonstrações da tarefa 5. Apresenta uma síntese de suas concepções do que são conjuntos quando apresenta uma definição para esse conceito.

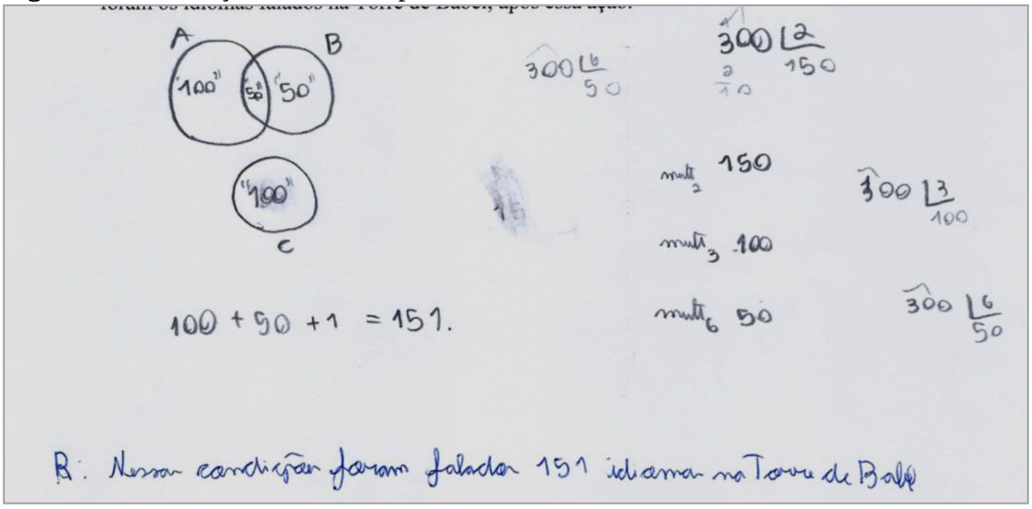
Com isso, infere-se que o estudante apresenta as características de todos processos envolvidos na representação, mas não consegue atingir todos os processos envolvidos na abstração, ele apresenta o processo de síntese, mas não apresenta o processo de generalização.

4.1.15 Estudante E15

Tarefa 1

O estudante E15 usou diagramas de Venn-Euller em sua resolução, destacou a quantidade de elementos com aspas, infere-se que seja para mostrar quer o número de elementos não é o elemento em si. Percebeu que o conjunto C era disjunto dos demais conjuntos. E, por fim, apresentou solução para a tarefa.

Figura 93 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E15

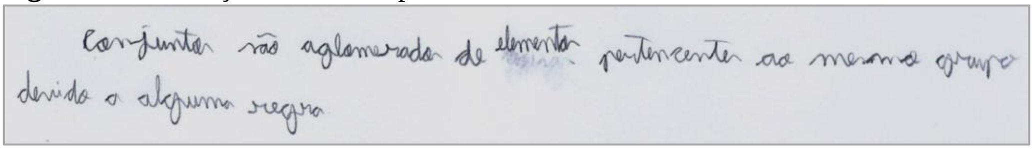


Fonte: resolução do estudante E15

Tarefa 2

O estudante apresentou conjuntos como aglomerados de elementos que são determinados por alguma regra, só não apresentou de forma clara para os conjuntos unitários e para o conjunto vazio.

Figura 94 - resolução da tarefa 2 pelo estudante E15

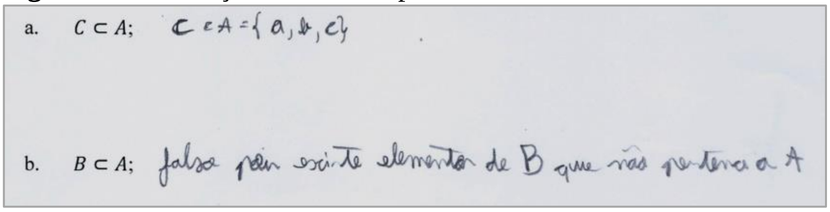


Fonte: resolução do estudante E15

Tarefa 3

E15 afirma que o conjunto C é subconjunto de A, porém a notação está incorreta. Apresenta contraexemplos nos itens que representavam afirmativas falsas e afirma que o conjunto vazio pertence a qualquer conjunto.

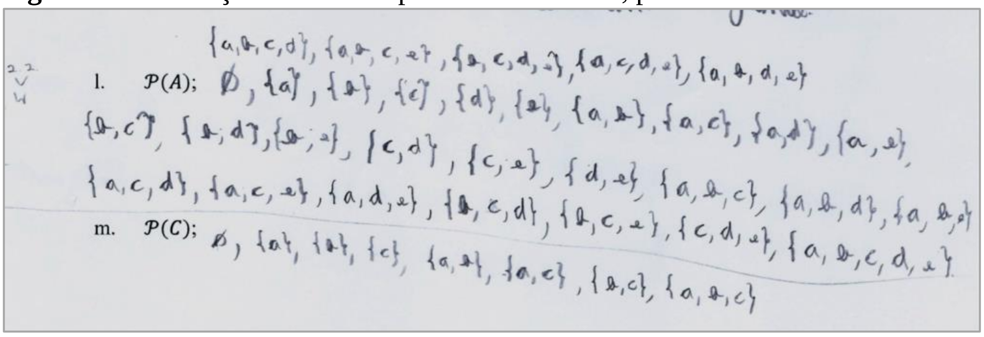
Figura 95 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E15



Fonte: resolução do estudante E15

Ele compreende quantos conjuntos pertencem aos conjuntos das partes de A e das partes de C, além disso, descreve todos os elementos desses conjuntos, mas não utilizou as chaves para indicar que os subconjuntos são elementos dos conjuntos das partes. Apresenta solução para as operações de diferença e união entre conjuntos.

Figura 96 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E15, parte 2

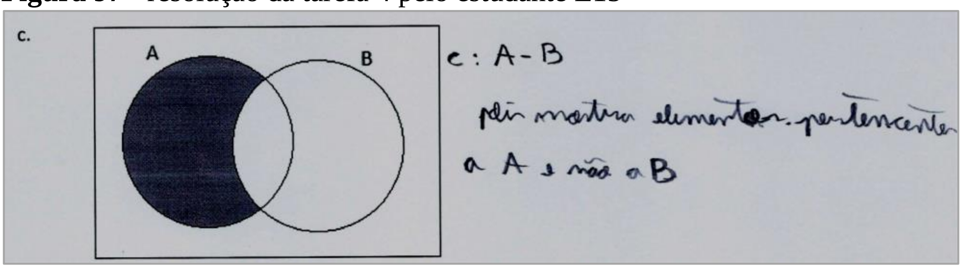


Fonte: resolução do estudante E15

Tarefa 4

Ele compreende as representações apresentadas por diagramas de Venn-Euler, e faz a conversão entre as representações por meio de símbolos e por diagramas. Apresenta justificativas para cada conversão.

Figura 97 - resolução da tarefa 4 pelo estudante E15

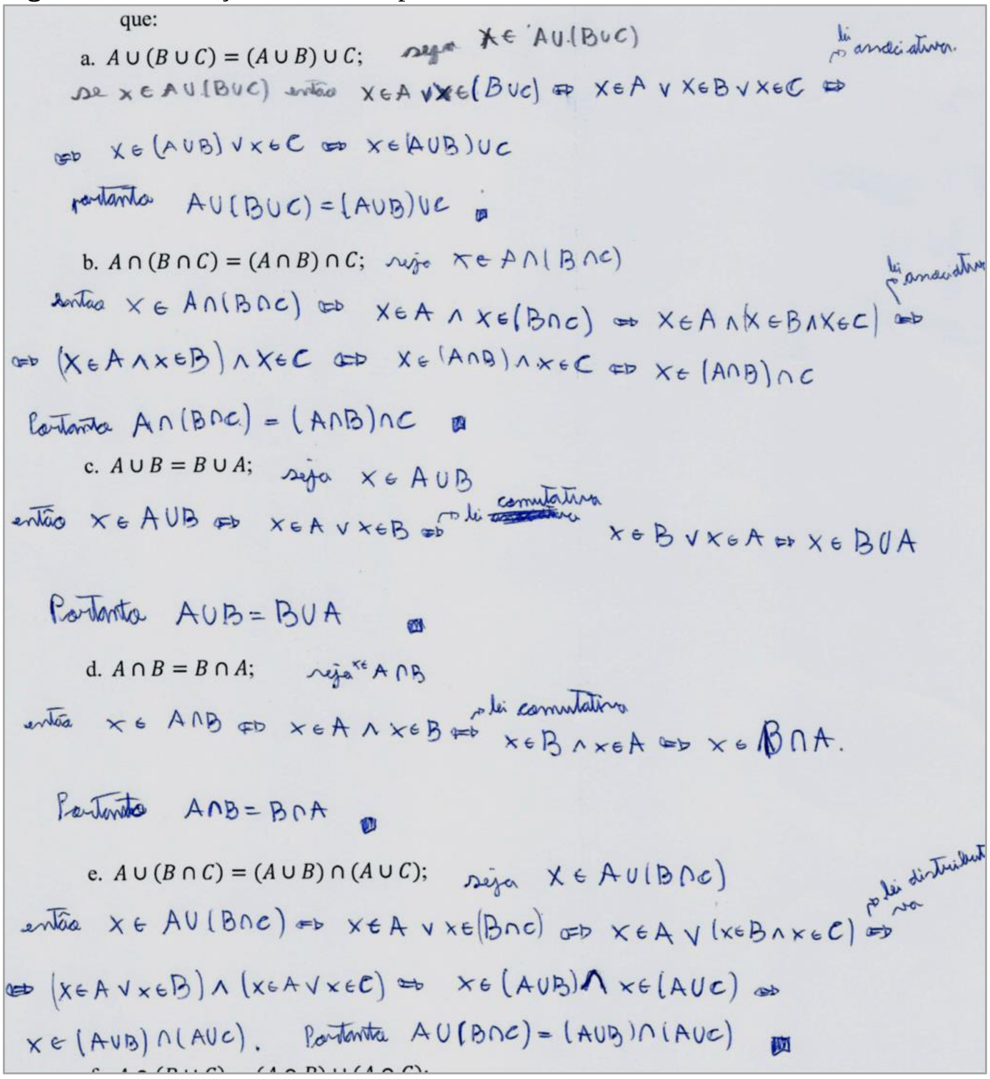


Fonte: resolução do estudante E15

Tarefa 5

O estudante apresentou para os primeiros cinco itens demonstrações por meio de equivalências lógicas. Provou as propriedades associativas e comutativas da união e da interseção e, além disso, provou a propriedade distributiva com a interseção. Não apresentou prova para os demais itens.

Figura 98 - resolução da tarefa 5 pelo estudante E15



que:

a. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; seja $x \in A \cup (B \cup C)$ lei associativa

se $x \in A \cup (B \cup C)$ então $x \in A \vee x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \vee x \in C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

portanto $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ∎

b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; seja $x \in A \cap (B \cap C)$ lei associativa

então $x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \in C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C$

Portanto $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ∎

c. $A \cup B = B \cup A$; seja $x \in A \cup B$

então $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow$ lei comutativa $x \in B \vee x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A$

Portanto $A \cup B = B \cup A$ ∎

d. $A \cap B = B \cap A$; seja $x \in A \cap B$

então $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow$ lei comutativa $x \in B \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in B \cap A$.

Portanto $A \cap B = B \cap A$ ∎

e. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; seja $x \in A \cup (B \cap C)$

então $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow$ lei distributiva

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \Leftrightarrow$

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Portanto $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ∎

Fonte: resolução do estudante E14

Características do PMA manifestadas pelo estudante E15

O estudante 15 compreende diversos símbolos da Teoria de Conjuntos, constrói esquemas para as suas resoluções. Consegue representar conjuntos com mais de uma representação, utiliza símbolos e diagramas. Constrói conceitos matemáticos por meio de suas representações. Resolve problemas com conjuntos finitos, ou seja, definidos e, também, expande esses conhecimentos para resolução de problemas com conjuntos infinitos, conjuntos quaisquer. Contudo não consegue sintetizar todos os conceitos por ele compreendidos.

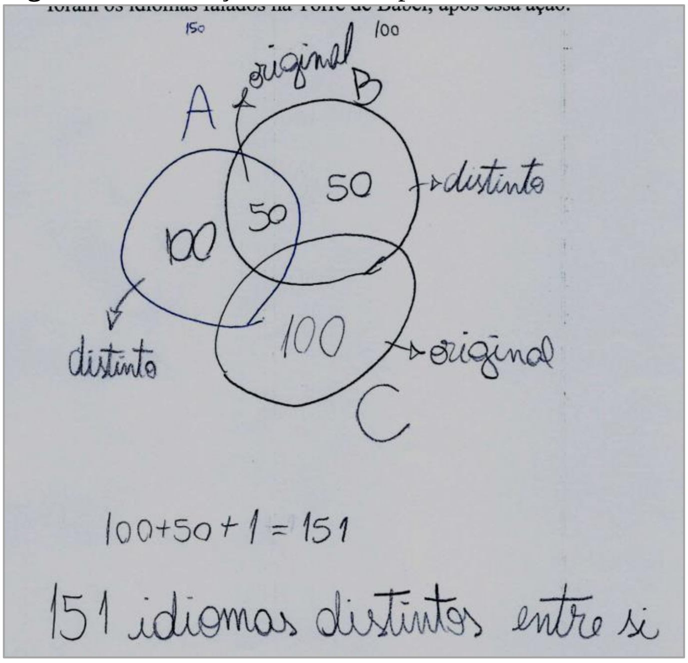
Infere-se que o estudante atinge quase todas as características do PMA, ou seja, alcança todos os processos de representação, mas não consegue atingir o processo de síntese. Ele consegue representar o conceito por meio de símbolos e mais de uma representação, modela esse conceito matematicamente, encontra pontos comuns em diferentes tarefas e só não consegue fazer ligações destes pontos em um conceito.

4.1.16 Estudante E16

Tarefa 1

O estudante consegue resolver a tarefa, distinguiu os conjuntos e determinou exatamente o que a tarefa solicitava. Contudo ao desenhar o diagrama, não se atentou ao fato de o conjunto C não possuir nenhuma interseção com os conjuntos A e B.

Figura 99 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E16

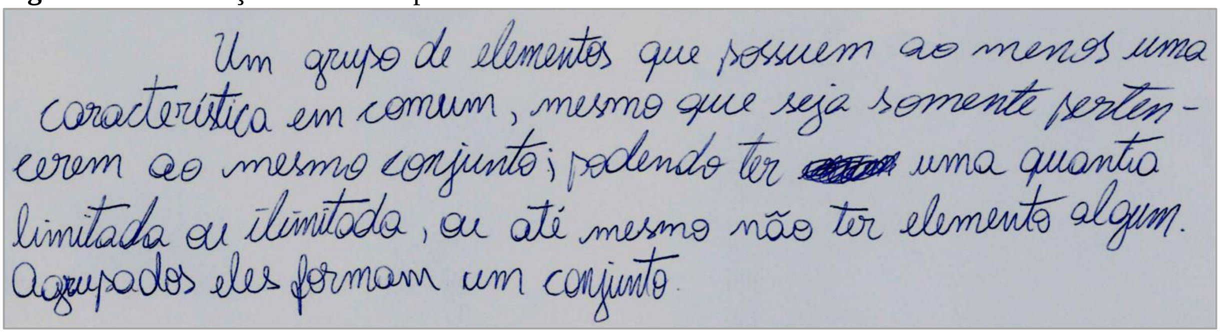


Fonte: resolução do estudante E16

Tarefa 2

Ele apresenta uma definição para conjuntos que comtempla qualquer conjunto, os limitados e ilimitados e até mesmo o conjunto vazio.

Figura 100 - resolução da tarefa 2 pelo estudante E16



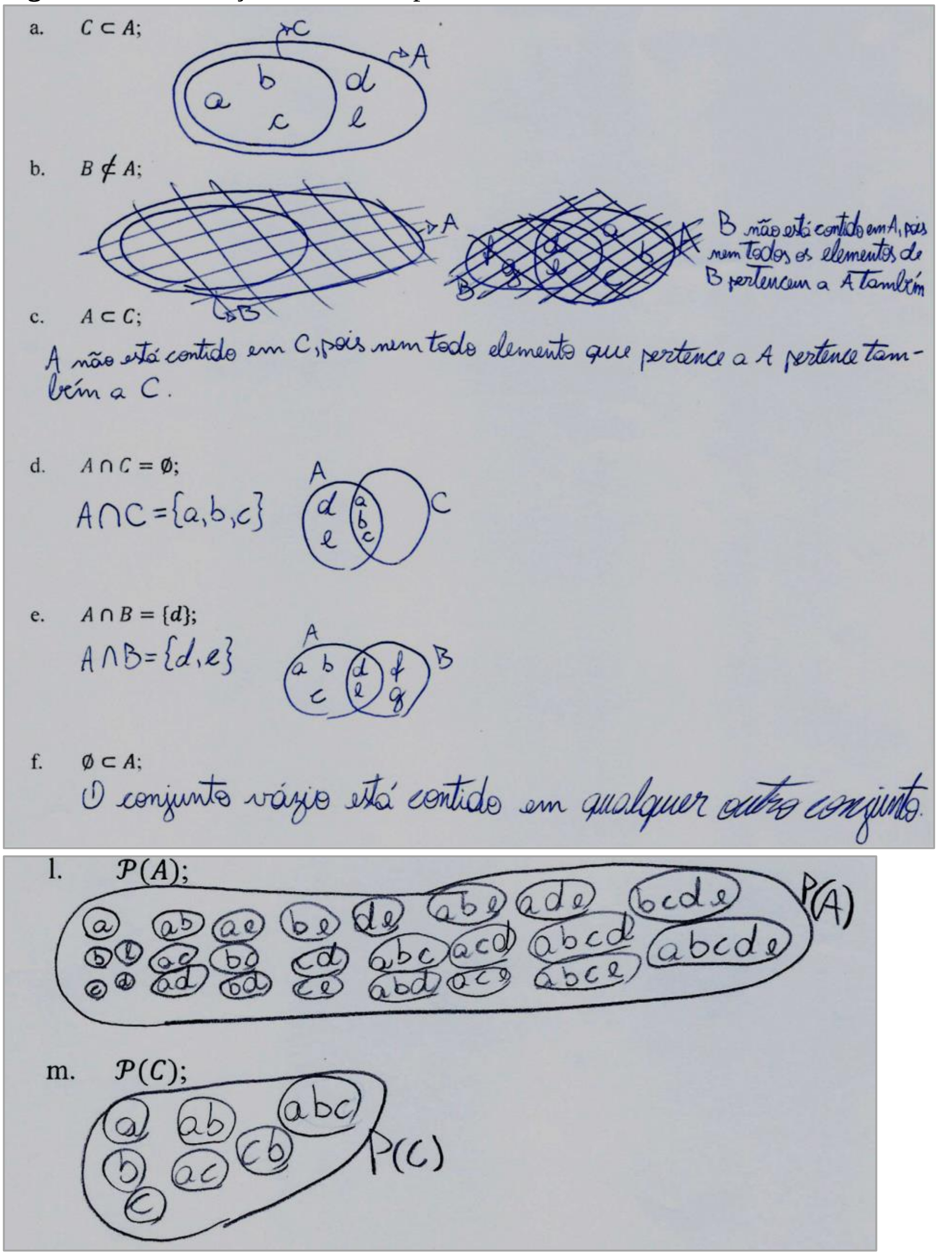
Um grupo de elementos que possuem ao menos uma caracteristica em comum, mesmo que seja somente pertencerem ao mesmo conjunto; podendo ter uma quantia limitada ou ilimitada, ou até mesmo não ter elemento algum. Agrupados eles formam um conjunto.

Fonte: resolução do estudante E16

Tarefa 3

O estudante utilizou em suas soluções os diagramas de Venn-Euler para justificá-las. Em alguns casos o apresentou o diagrama como solução, visualizou que não era possível B c A e os elementos que pertenciam a relação de interseção dos conjuntos. Compreende que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto, que a relação de subconjunto (estar contido em) é uma relação exclusiva entre conjuntos, bem como a diferença e a união entre conjuntos. Ele compreende como é composto o conjunto das partes, contudo ao descrever o Conjunto das partes de A, ele não adiciona alguns subconjuntos que pertencem a essa relação.

Figura 101 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E16

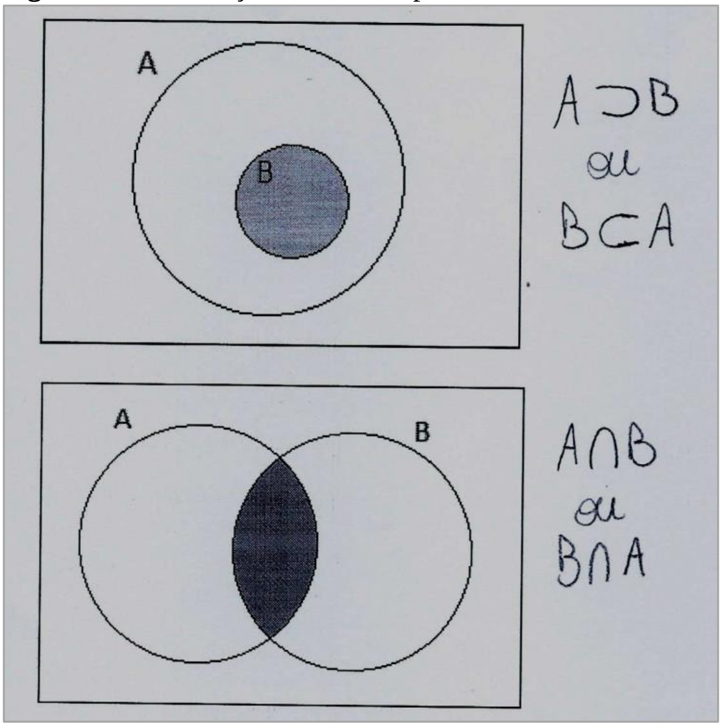


Fonte: resolução do estudante E16

Tarefa 4

Ele responde corretamente cada item da tarefa, contudo não apresenta justificativas. Ele compreende a comutatividade presentas nas relações de união, intercessão e de subconjuntos, pois ele compreende a diferença entre estar contido e conter um conjunto.

Figura 102 - resolução da tarefa 4 pelo estudante E16

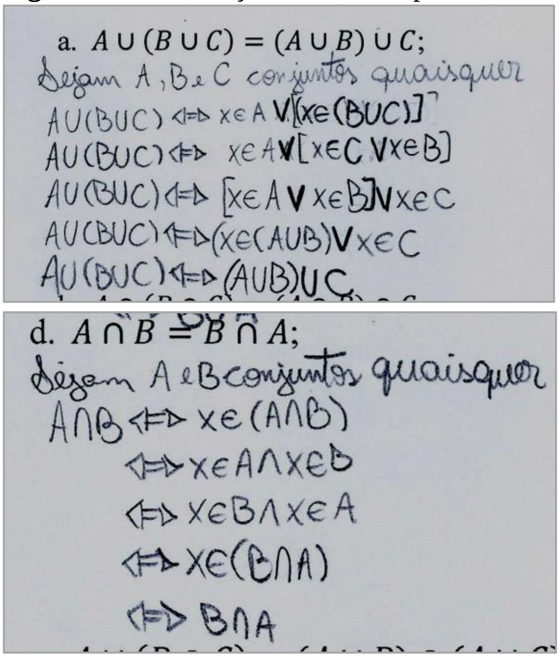


Fonte: resolução do estudante E16

Tarefa 5

O estudante consegue demonstrar por meio de equivalências lógicas, as propriedades de conjuntos, associativa, comutativa e de idempotência. Porém, não consegue nem esboçar uma demonstração para as propriedades distributivas em conjuntos. Além disso, ele tem ciência de que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto, no entanto, ele não consegue demonstrar isso. E, também, não demonstra que a diferença entre os conjuntos A e B é igual a união de A com o complementar de B em relação ao conjunto A.

Figura 103 - resolução da tarefa 5 pelo estudante E16



Fonte: resolução do estudante E16

Características do PMA manifestadas pelo estudante E16

O estudante consegue representar por meio de diagramas e símbolos as suas resoluções das tarefas propostas, representa um mesmo conceito com mais de uma representação, ver tarefa 3, ou seja, representa matematicamente os conceitos de conjuntos. Da mesma maneira que resolve problemas com conjuntos definidos ele consegue expandir esse conhecimento para conjuntos indefinidos, conjuntos quaisquer. Deste modo, faz ligações do mesmo conceito em uma única imagem.

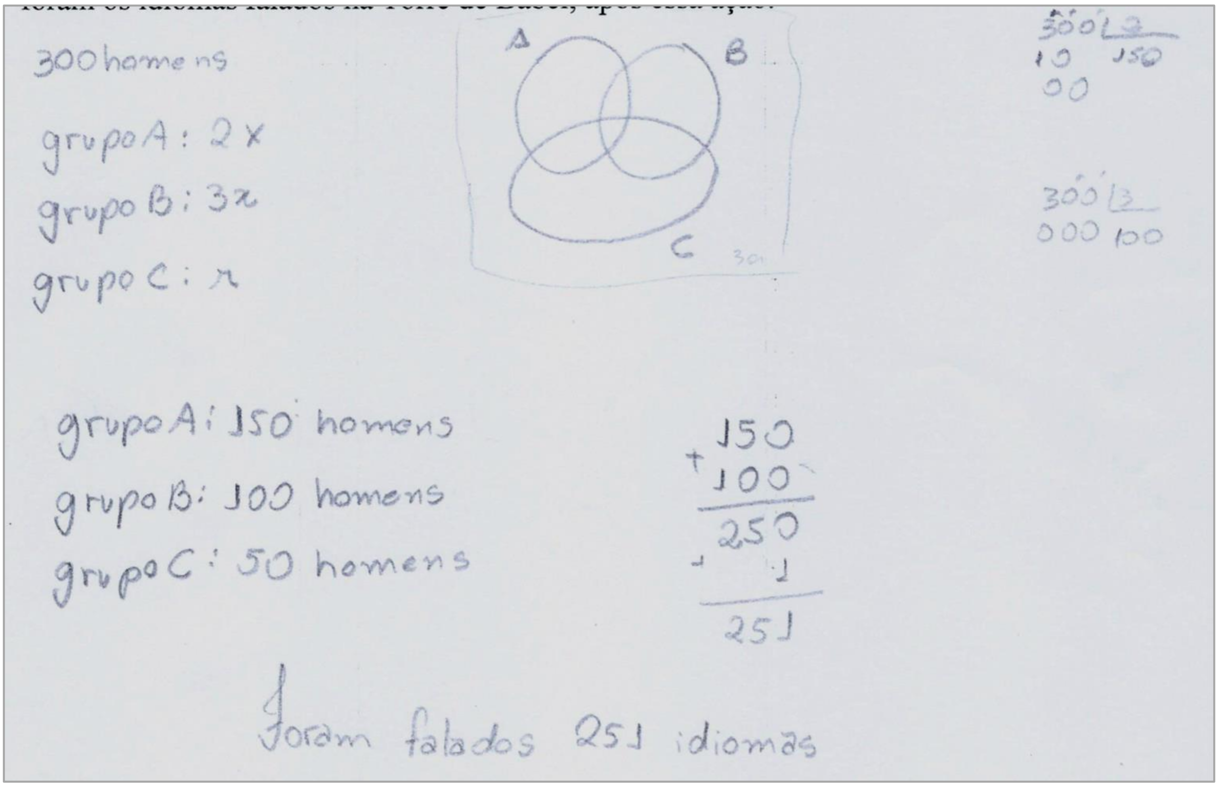
Infere-se que esse estudante consegue atingir todas as características do PMA, ou seja, ele consegue alcançar os processos de representação e de abstração. Portanto, ele consegue representar simbolicamente os conceitos de Conjuntos, bem como modelar e fazer comutação entre várias representações do mesmo conceito, sintetiza e generaliza os conceitos propostos nesse trabalho,

4.1.17 Estudante E17

Tarefa 1

O estudante separa em três grupos, conforme é apresentado no enunciado, encontra a quantidade correta dos grupos A e B, contudo não se atenta a interseção entre esses dois grupos (conjuntos) e erra a quantidade de elementos do grupo C. Acaba errando a tarefa por essa desatenção. Ele desenhou um diagrama de Venn-Euller, mas não utiliza em sua resolução.

Figura 104 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E17

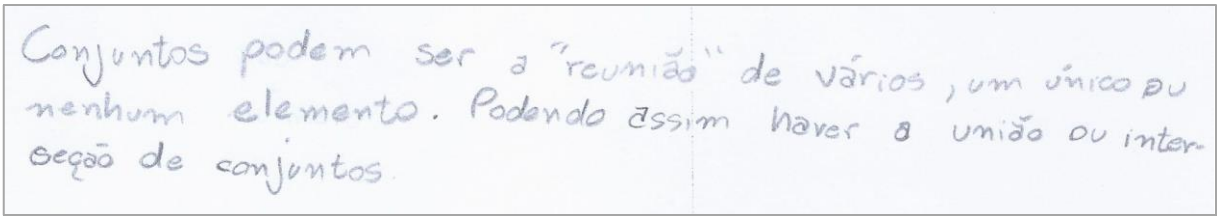


Fonte: resolução do estudante E17

Tarefa 2

O estudante E17 apresentou conjuntos de uma maneira mais completa, mas se referiu a apenas duas operações (ou relações) entre conjuntos, união e interseção.

Figura 105 - resolução da tarefa 2 pelo estudante E17

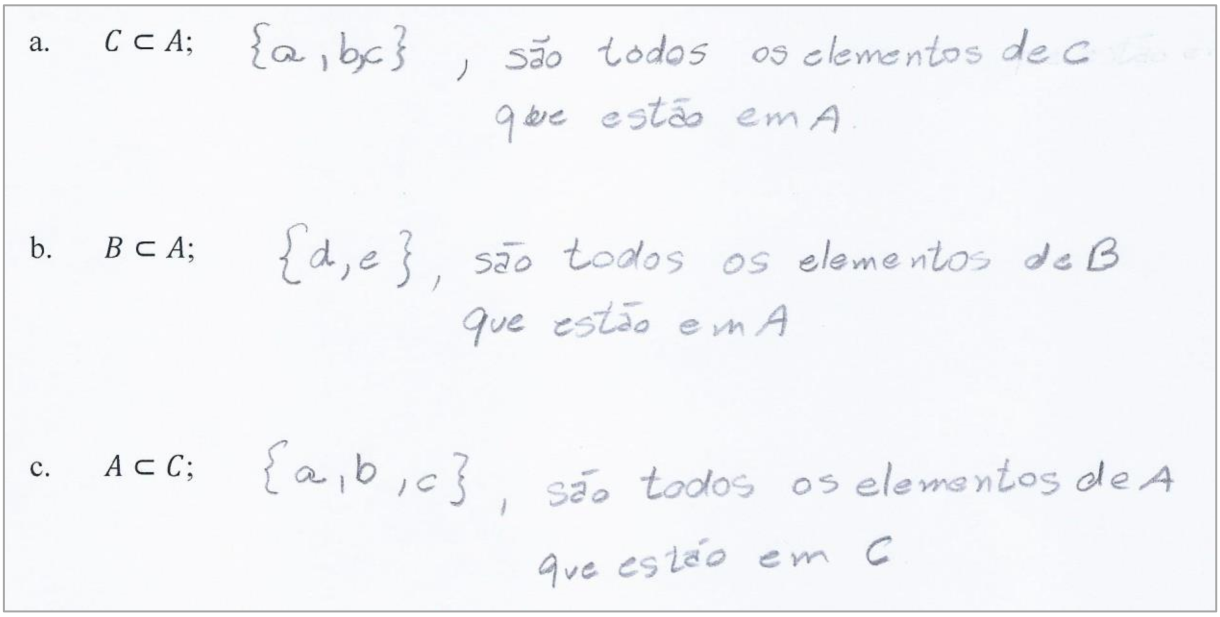

Conjuntos podem ser a "reunião" de vários, um único ou nenhum elemento. Podendo assim haver a união ou interseção de conjuntos

Fonte: resolução do estudante E17

Tarefa 3

Por meio da análise dos primeiros itens da tarefa 3, pode-se perceber que o estudante E17 concebe a ideia de subconjuntos como sendo a interseção entre subconjuntos, ele considera que como existem elementos comuns entre os conjuntos, que um deles deve ser subconjunto do outro. Demonstra compreender o conceito de interseção entre conjuntos.

Figura 106 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E17


a. $C \subset A$; {a, b,c}, são todos os elementos de C que estão em A.

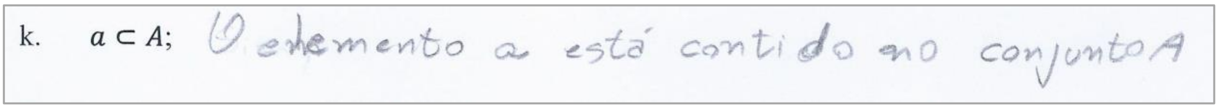
b. $B \subset A$; {d,e}, são todos os elementos de B que estão em A

c. $A \subset C$; {a, b, c}, são todos os elementos de A que estão em C

Fonte: resolução do estudante E17

Não compreendeu que a inclusão só relaciona conjuntos com outros conjuntos e, além disso, afirmou que o conjunto {a} não é um subconjunto de A, o que não é verdadeiro, pois pela definição de inclusão o conjunto {a} é um subconjunto do conjunto A.

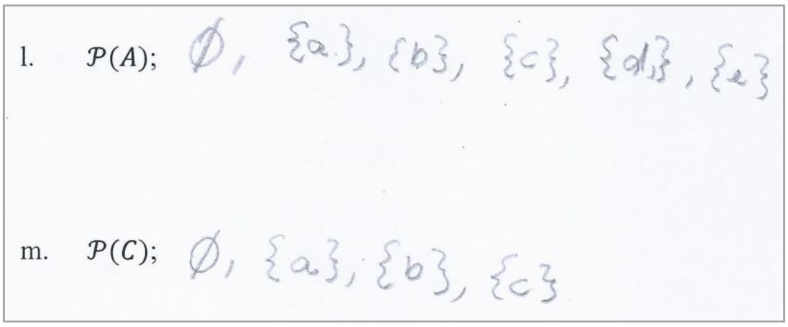
Figura 107 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E17, parte 2


k. $a \subset A$; O elemento a está contido no conjunto A

Fonte: resolução do estudante E17

Apresenta falta de compreensão com o conceito do conjunto das partes, pois só descreveu o conjunto vazio e os subconjuntos que possuíam apenas um elemento como elementos do conjunto das partes.

Figura 108 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E17, parte 3

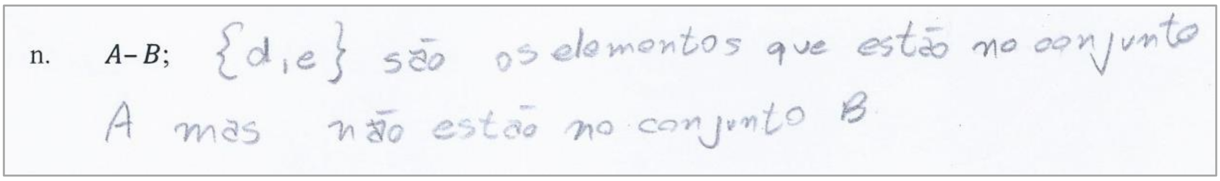

l. $\mathcal{P}(A)$; $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{e\}$

m. $\mathcal{P}(C)$; $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$

Fonte: resolução do estudante E17

Ele sabe a definição da diferença de conjuntos, mas faz uma afirmação equivocada, descreve os únicos elementos que não pertencem a essa relação como sendo a diferença entre os conjuntos A e B, ou seja, não compreende de fato a relação de diferença entre conjuntos.

Figura 109 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E17, parte 4

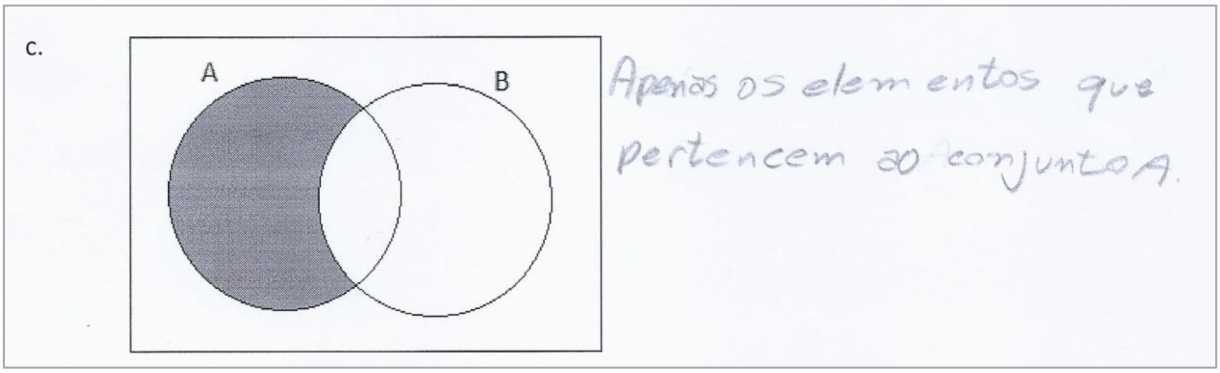

n. $A-B$; $\{d, e\}$ são os elementos que estão no conjunto A mas não estão no conjunto B

Fonte: resolução do estudante E17

Tarefa 4

Conseguiu descrever três dos diagramas apresentados na tarefa 4, conseguiu justificar o motivo desses diagramas representarem as operações descritas. Contudo o item c) que tratava da diferença (ou complementar) entre os conjuntos A e B, ele só identificou que eram apenas os elementos que pertenciam somente ao conjunto A, mas não disse qual a relação que esse diagrama representava.

Figura 110 - resolução da tarefa 4 pelo estudante E17

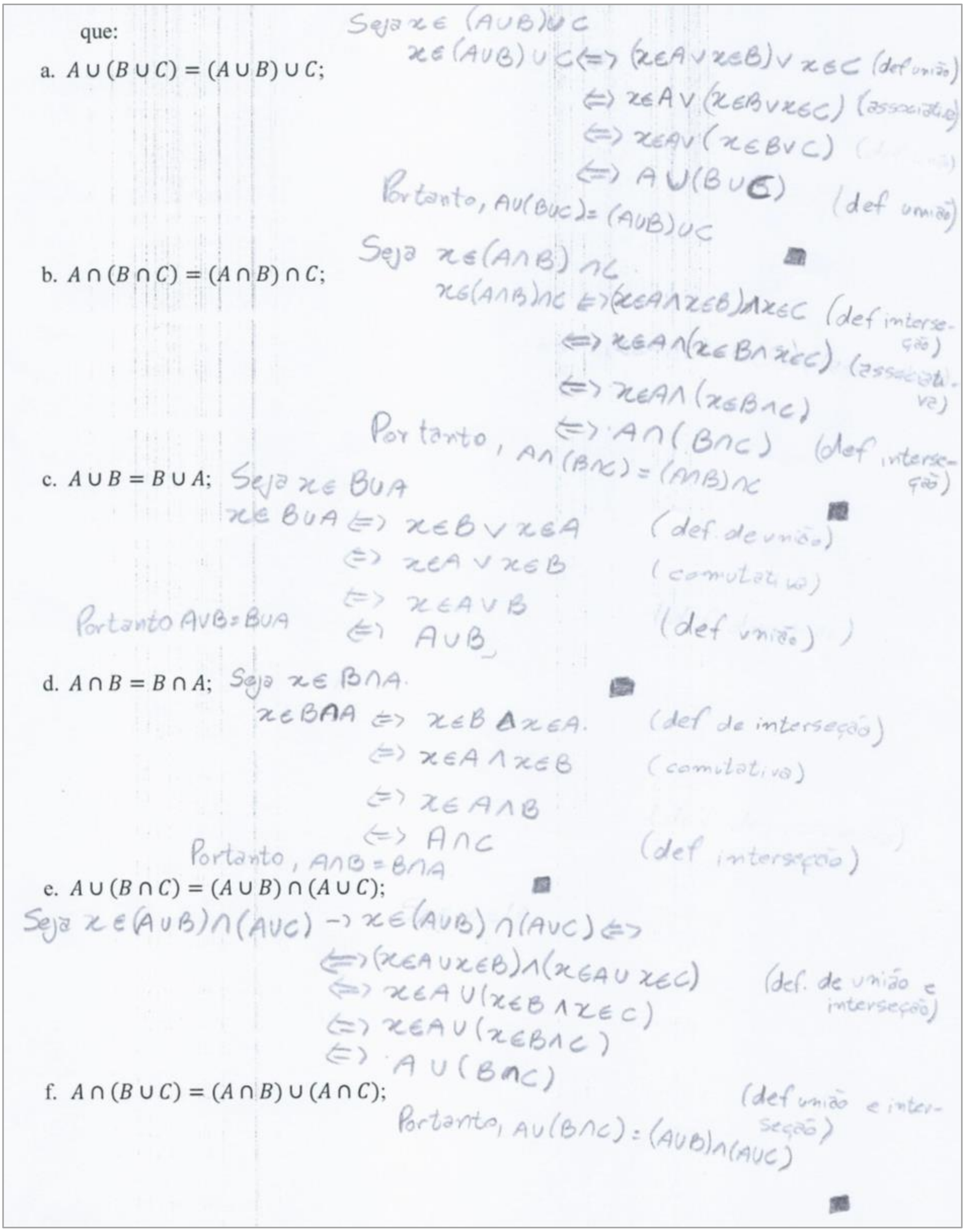


Fonte: resolução do estudante E17

Tarefa 5

O estudante não provou todos os itens da tarefa 5, mas conseguiu demonstrar os cinco itens iniciais dessa tarefa. Ele usou as equivalências lógicas das leis associativa, comutativa e distributiva para provar a igualdades entre as relações dos conjuntos. Descreveu o que fez em cada passo de sua demonstração.

Figura 111 - resolução da tarefa 5 pelo estudante E17



que:

a. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

Seja $x \in (A \cup B) \cup C$

$x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$ (def união)

$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$ (associativa)

$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee C)$

$\Leftrightarrow A \cup (B \cup C)$ (def união)

Portanto, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

Seja $x \in (A \cap B) \cap C$

$x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$ (def interseção)

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$ (associativa)

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge C)$

$\Leftrightarrow A \cap (B \cap C)$ (def interseção)

Portanto, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

c. $A \cup B = B \cup A$; Seja $x \in B \cup A$

$x \in B \cup A \Leftrightarrow x \in B \vee x \in A$ (def. de união)

$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$ (comutativo)

$\Leftrightarrow x \in A \vee B$

$\Leftrightarrow A \cup B$ (def união)

Portanto $A \cup B = B \cup A$

d. $A \cap B = B \cap A$; Seja $x \in B \cap A$.

$x \in B \cap A \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A$. (def de interseção)

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$ (comutativo)

$\Leftrightarrow x \in A \wedge B$

$\Leftrightarrow A \cap C$ (def interseção)

Portanto, $A \cap B = B \cap A$

e. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

Seja $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \to x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x \in A \cup x \in B) \wedge (x \in A \cup x \in C)$ (def. de união e interseção)

$\Leftrightarrow x \in A \cup (x \in B \wedge x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in A \cup (x \in B \wedge C)$

$\Leftrightarrow A \cup (B \cap C)$ (def união e interseção)

f. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

Portanto, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Fonte: resolução do estudante E17

Características do PMA manifestadas pelo estudante E17

O estudante E17 compreende as notações simbólicas da Teoria de Conjuntos, as utiliza de maneira correta. Consegue converter representações do conceito, por exemplo, parte de diagramas e consegue traduzir para notações simbólicas. Contudo tem dificuldades em traduzir um enunciado para os conceitos matemáticos, como pode ser observado na tarefa 1, pois o estudante não compreende a interseção que existe entre dois conjuntos.

Mesmo não tendo concluído a tarefa 5, percebe-se que o estudante consegue generalizar os conceitos da Teoria de conjuntos, para conjuntos quaisquer, compreende as propriedades utilizadas nas demonstrações, ou seja, consegue sintetizar e generalizar os conceitos prévios por ele dominados.

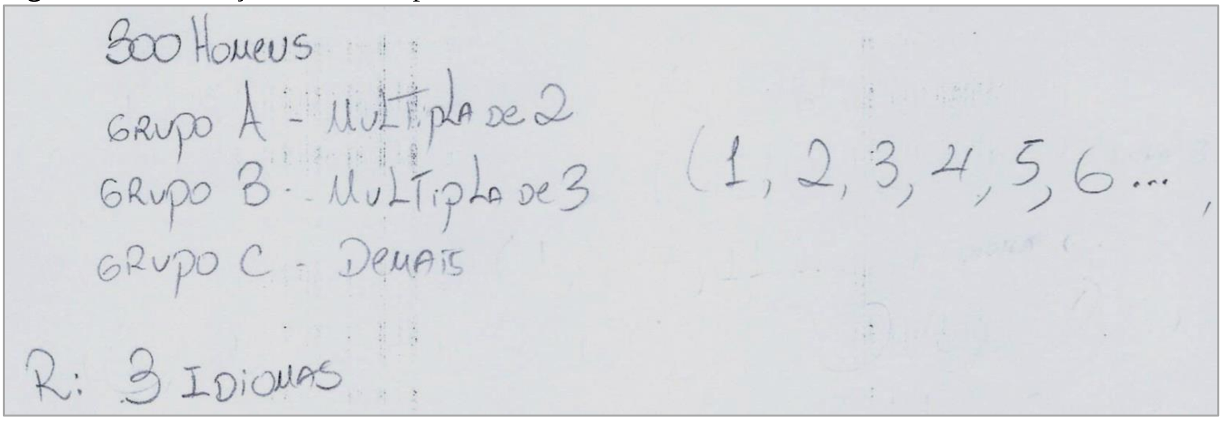
Infere-se que o estudante consegue atingir quase todas as características do PMA, pois ele compreende as representações dos conceitos, consegue comutar e traduzi-las, consegue abstrair, ou seja, generaliza e sintetiza os conceitos, mas não consegue modelar os conceitos, pois quando é necessário que ele construa conceitos matemáticos para a resolução de uma tarefa, o mesmo efetua com problemas, além disso, conhece os conceitos de algumas relações entre conjuntos, contudo não compreende, por exemplo, o conjunto das partes e a diferença entre conjuntos.

4.1.18 Estudante E18

Tarefa 1

O estudante não utilizou diagramas para resolver a tarefa, ele apenas separou três grupos e escreveu quais eram os representantes desses três grupos, não verificou a interseção entre o grupo A e B. Apresentou uma resposta incorreta, apenas distribuiu um idioma por grupo e concluiu que eram três idiomas falados.

Figura 112 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E18

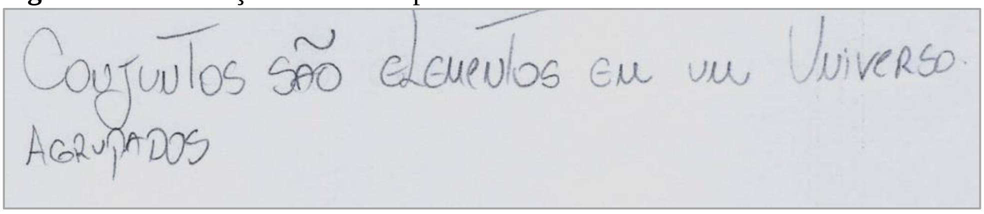


Fonte: resolução do estudante E18

Tarefa 2

Ele apresentou que conjuntos são elementos, mas elementos compõe um conjunto. Um conjunto pode vir a ser um elemento de outro conjunto, porém isso é um caso, não pode ser considerado como uma regra.

Figura 113 - resolução da tarefa 2 pelo estudante E18

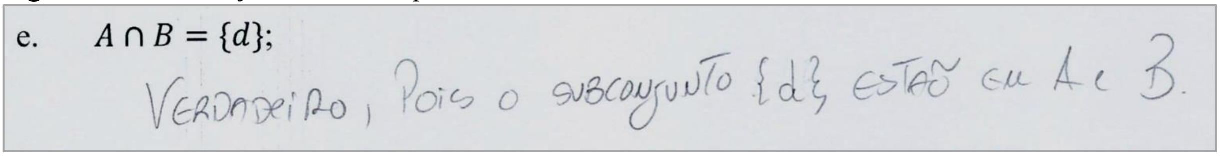


Fonte: resolução do estudante E18

Tarefa 3

O estudante E18 apresentou solução e justificativa para os itens da tarefa 3, conseguiu mostrar que compreende várias das operações que foram propostas na tarefa, entretanto no item e) ele acreditou que considerando apenas um elemento já representaria a interseção entre os conjuntos A e B, mas no item anterior ele descreveu todos os elementos da interseção entre A e C.

Figura 114 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E18

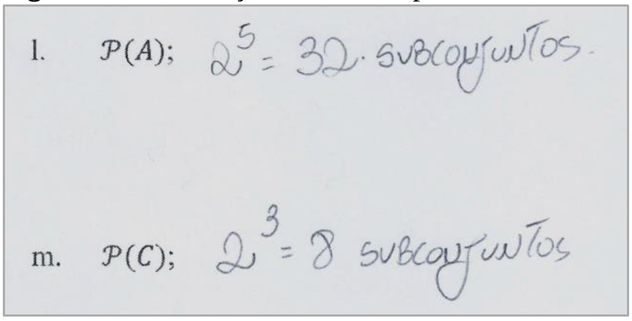

e. $A \cap B = \{d\}$;

VERDADEIRO, POIS O SUBCONJUNTO {d} ESTÃO EM A e B.

Fonte: resolução do estudante E18

Ele não escreve todos os subconjuntos contidos nos conjuntos das partes dos conjuntos A e B, mas apresenta quantos subconjuntos esses conjuntos possuem.

Figura 115 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E18, parte 2


l. $\mathcal{P}(A)$; $2^5 = 32$. SUBCONJUNTOS.

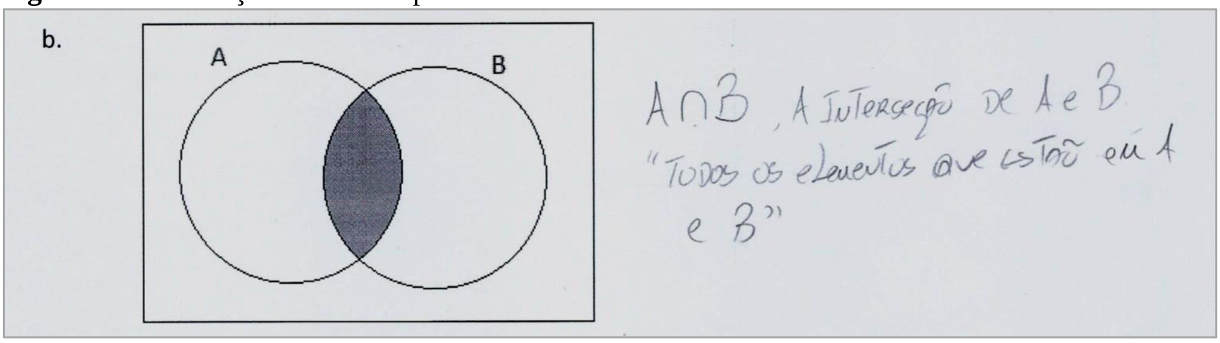
m. $\mathcal{P}(C)$; $2^3 = 8$ SUBCONJUNTOS

Fonte: resolução do estudante E18

Tarefa 4

Observando o item b) da tarefa 4, pode-se ver que o estudante sabe que na interseção são considerados todos os elementos que pertencem aos conjuntos A e B simultaneamente, o que ele não demonstrou no item e) da tarefa 3. Além disso, ele escreveu o que representava cada item da tarefa 4, mas suas justificativas eram a respeito do que significava as operações, não o motivo da representação significar a operação.

Figura 116 - resolução da tarefa 4 pelo estudante E18

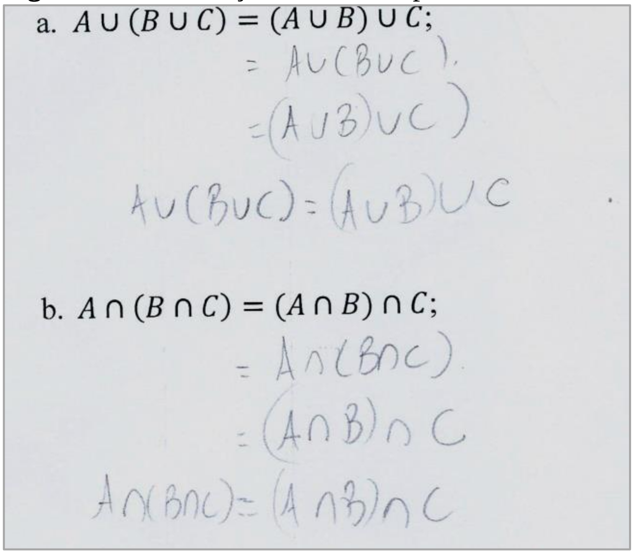


Fonte: resolução do estudante E18

Tarefa 5

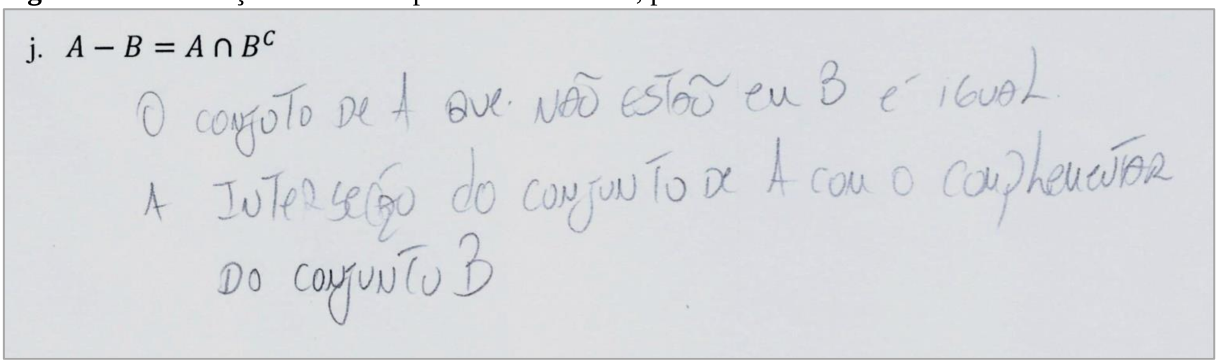
O estudante resolveu toda a tarefa, contudo não fez o que era solicitado, ele não demonstrou nenhum dos itens. Apenas reposicionou parênteses, inverteu a ordem dos conjuntos, descreveu o que significava cada representação e concluiu o que era proposto. Ele não possui habilidade com as demonstrações que envolvem a Teoria de Conjuntos.

Figura 117 - resolução da tarefa 5 pelo estudante E18



Fonte: resolução do estudante E18

Figura 118 - resolução da tarefa 5 pelo estudante E18, parte 2



Fonte: resolução do estudante E18

Características do PMA manifestadas pelo estudante E18

O estudante compreende os símbolos, notações, utilizadas na Teoria de Conjuntos. Não compreende a definição de conjunto. Ele consegue efetuar mudanças de representação entre os conceitos da teoria, ver tarefa 4. Utiliza bem as notações matemáticas, compreende o conceito. Contudo não consegue generalizar o conceito, quando é necessário a manipulação com conjuntos quaisquer, ele não consegue efetuar demonstrações, apresentou respostas sem justificativas, ou seja, não usou definições e teoremas que seriam necessários para demonstrar as propriedades algébricas de conjuntos.

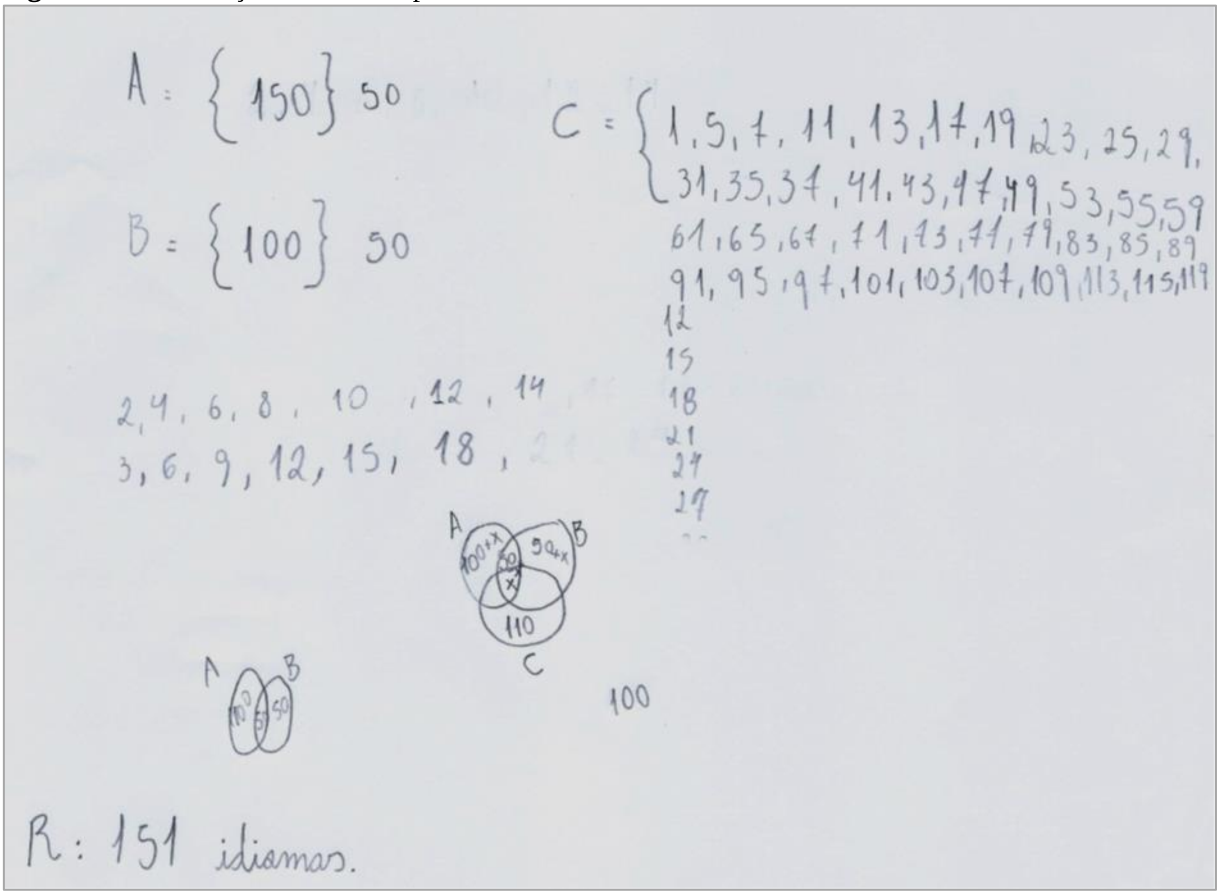
Pode-se inferir que ele possui as características dos processos envolvidos na representação, no entanto ele não consegue generalizar e nem sintetizar os conceitos, ou seja, ele não atinge o processo de abstração, pois não consegue provar algo que ele afirma.

4.1.19 Estudante E19

Tarefa 1

A resolução apresentada pelo estudante E19 ficou confusa, ele tentou de maneiras distintas chegar em uma resposta final. Apresentou a quantidade de elementos dos conjuntos A e B em uma representação dos seus elementos, no entanto começou a escrever todos os elementos do conjunto C, mas percebeu que seriam muitos números a serem listados e parou. Usou duas representações do diagrama de Venn-Euller na sua solução, uma com o conjunto C possuindo uma interseção com os conjuntos A e B, e a outra com os conjuntos A e B com uma interseção e nenhuma representação para o conjunto C.

Figura 119 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E19

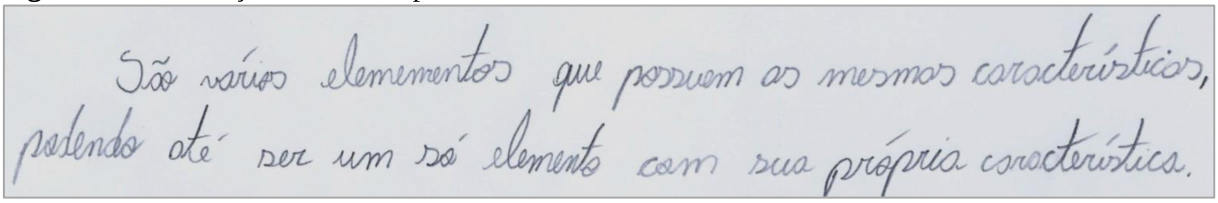


Fonte: resolução do estudante E19

Tarefa 2

Ele apresenta conjuntos de maneira que comtempla vários elementos ou apenas um, mas esqueceu de mencionar algo a respeito do conjunto vazio.

Figura 120 - resolução da tarefa 2 pelo estudante E19



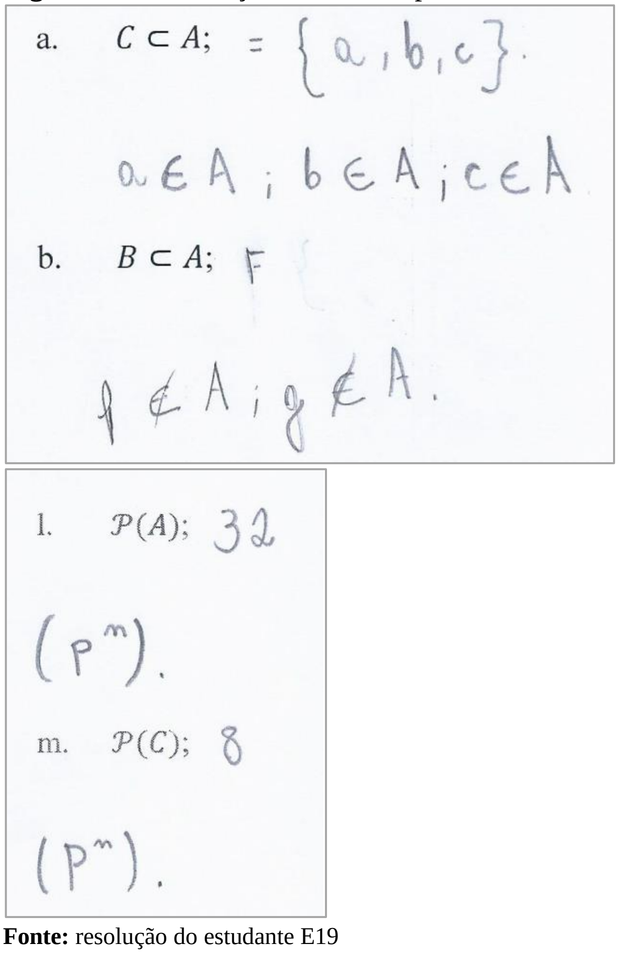
São vários elementos que possuem as mesmas caracteristicas, podendo até ser um só element com sua própria característica.

Fonte: resolução do estudante E19

Tarefa 3

O estudante apresenta uma solução e boas justificativas do item a) até o item g), contudo nos itens que vieram a seguir ele apresentou solução, mas não apresentou justificativa apenas reescreveu as operações dos itens. Nas operações com o Conjunto das Partes, apresenta apenas o número de subconjuntos dos conjuntos particionados, mas não justifica que esses números correspondem ao número de subconjuntos.

Figura 121 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E19



a. $C \subset A$; $= \{a, b, c\}$.

$a \in A$; $b \in A$; $c \in A$

b. $B \subset A$; F

$f \notin A$; $g \notin A$.

l. $\mathcal{P}(A)$; 32

(p^n).

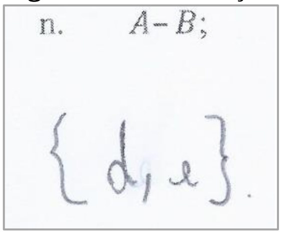
m. $\mathcal{P}(C)$; 8

(p^n).

Fonte: resolução do estudante E19

Na operação da diferença de conjuntos ele faz o inverso do que deve ser feito, pois coloca justamente os elementos que não pertencem a diferença como se fosse o resultado da operação, e também não justificou como foi realizada essa operação.

Figura 122 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E19, parte 2

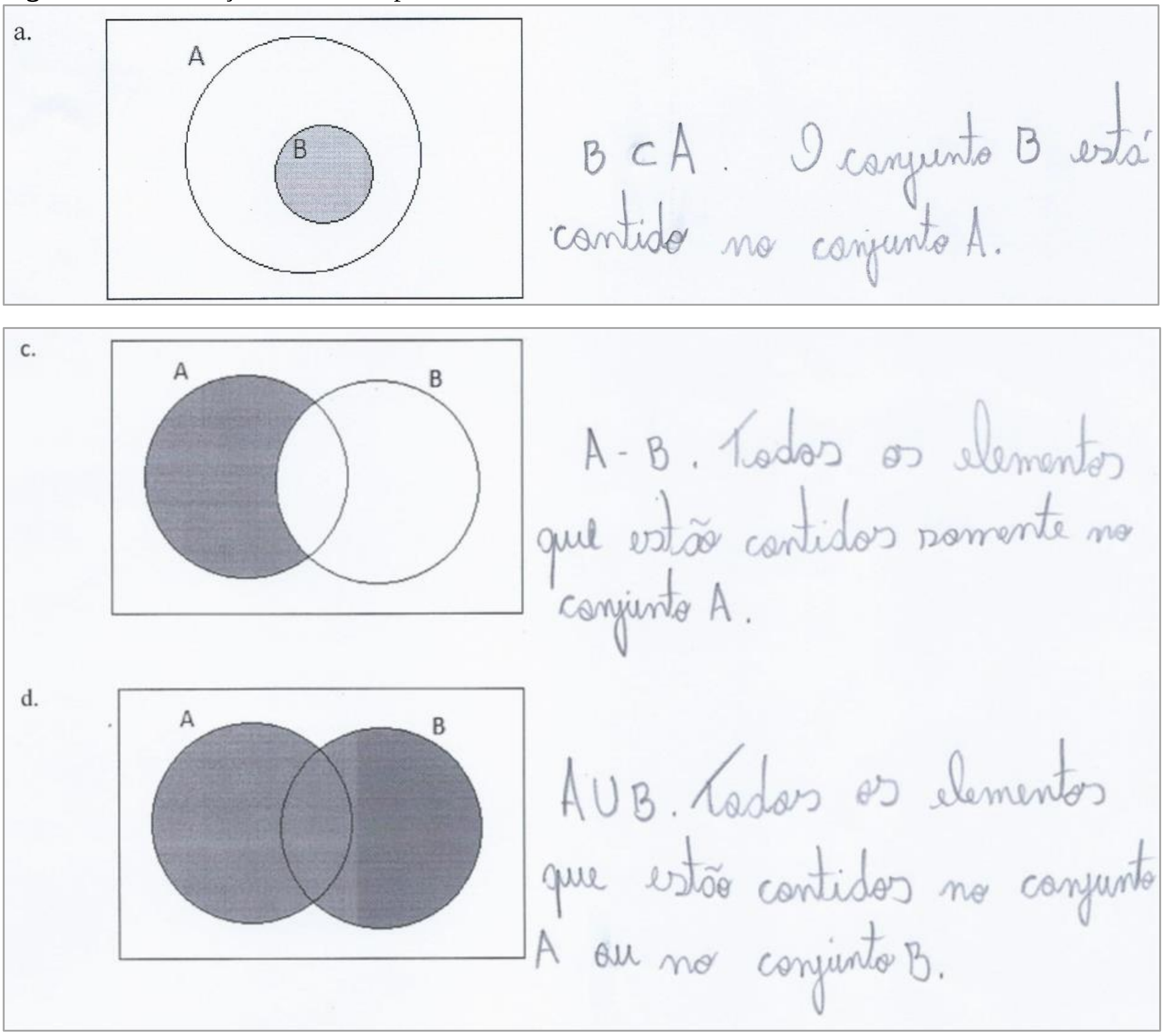


Fonte: resolução do estudante E19

Tarefa 4

Ele escreve o que representa cada diagrama e apresenta justificativa. Para o item a) ele descreve apenas o que representa o conjunto B estar contido no conjunto A. Com relação a operação de diferença, em que ele não conseguiu efetuar com êxito na tarefa 3, nessa tarefa apresentou a definição correta do que é a diferença entre os conjuntos A e B, ou seja, ele sabe a definição, mas não a compreende para aplicá-la.

Figura 123 - resolução da tarefa 4 pelo estudante E19

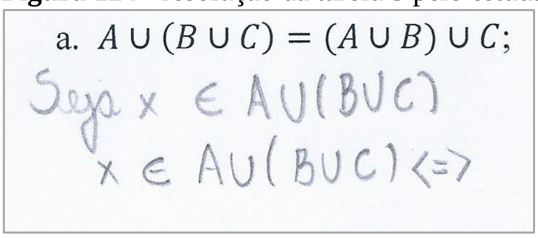


Fonte: resolução do estudante E19

Tarefa 5

Ele começou a esboçar uma solução para o item a), escreveu uma relação de equivalência, mas não seguiu em frente. Infere-se que ele não conseguiu lembrar as propriedades necessárias para a realização da tarefa.

Figura 124 - resolução da tarefa 5 pelo estudante E19



Fonte: resolução do estudante E19

Características do PMA manifestadas pelo estudante E19

O estudante E19 não compreende a representação por meio de chaves, na tarefa 1 usa para descrever a quantidade de elementos do conjunto. Porém, compreende os símbolos que são usados para as resoluções das tarefas, consegue representar os conceitos por meio de símbolos. Consegue mudar de uma representação para outra do mesmo conceito. Descreve os conceitos matematicamente. Contudo não generaliza esses conceitos, pois quando é necessário a manipulação dos mesmos com conjuntos quaisquer, o estudante não consegue.

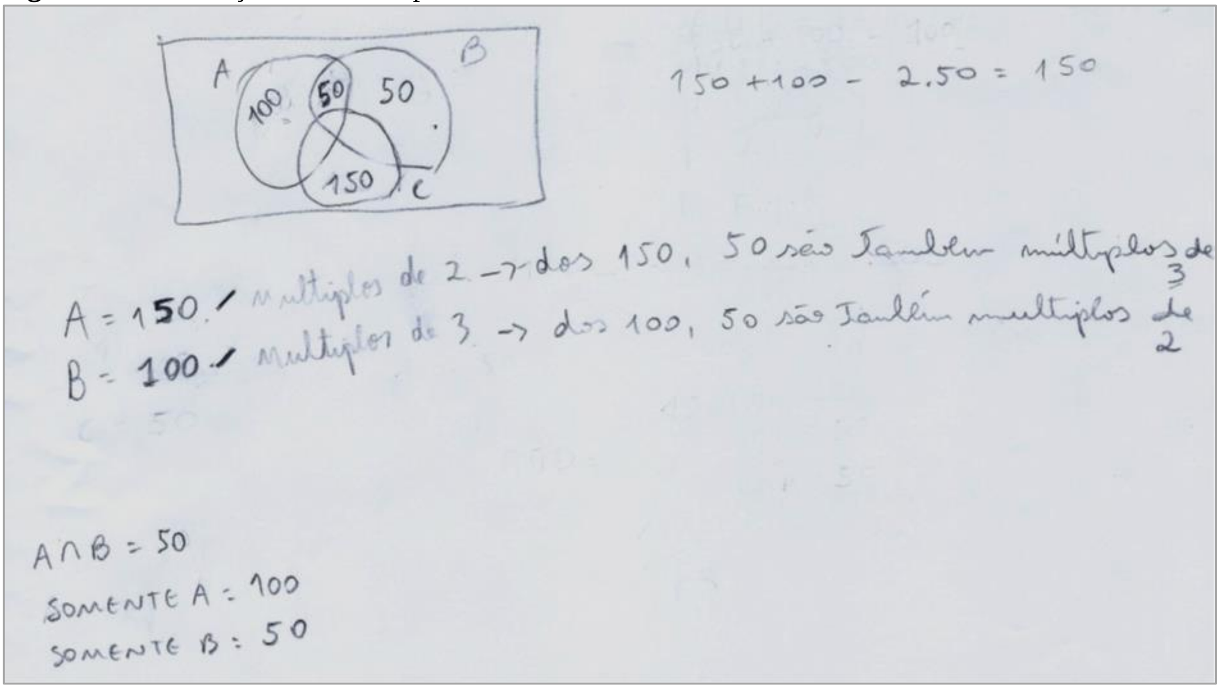
Com isso, infere-se que esse estudante possui as características dos processos de representação, tais como processos de representação e modelação, contudo não atinge as outras necessárias para a abstração, a de generalizar e sintetizar os conceitos.

4.1.20 Estudante E20

Tarefa 1

O estudante E20 consegue separar os elementos dos conjuntos A e B, percebe a interseção, mas não compreende que o conjunto C é disjunto dos conjuntos A e B, observe a figura?. A soma dos elementos dos conjuntos ultrapassa a quantidade de elementos originais, pois ele admite que o conjunto C possui 150 elementos, enquanto o correto seria 100 elementos. Usou diagrama de Venn-Euller para resolver a tarefa, contudo utilizou a quantidade de elementos para representar os elementos dos conjuntos. Por fim, não apresentou uma resposta para a tarefa.

Figura 125 - resolução da tarefa 1 pelo estudante E20

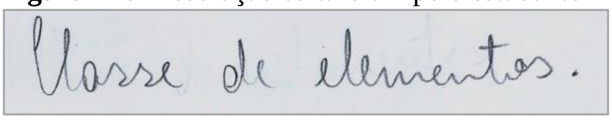


Fonte: resolução do estudante E20

Tarefa 2

Apresentou conjuntos com um sinônimo da palavra conjunto, se referiu como “classe de elementos”.

Figura 126 - resolução da tarefa 2 pelo estudante E20

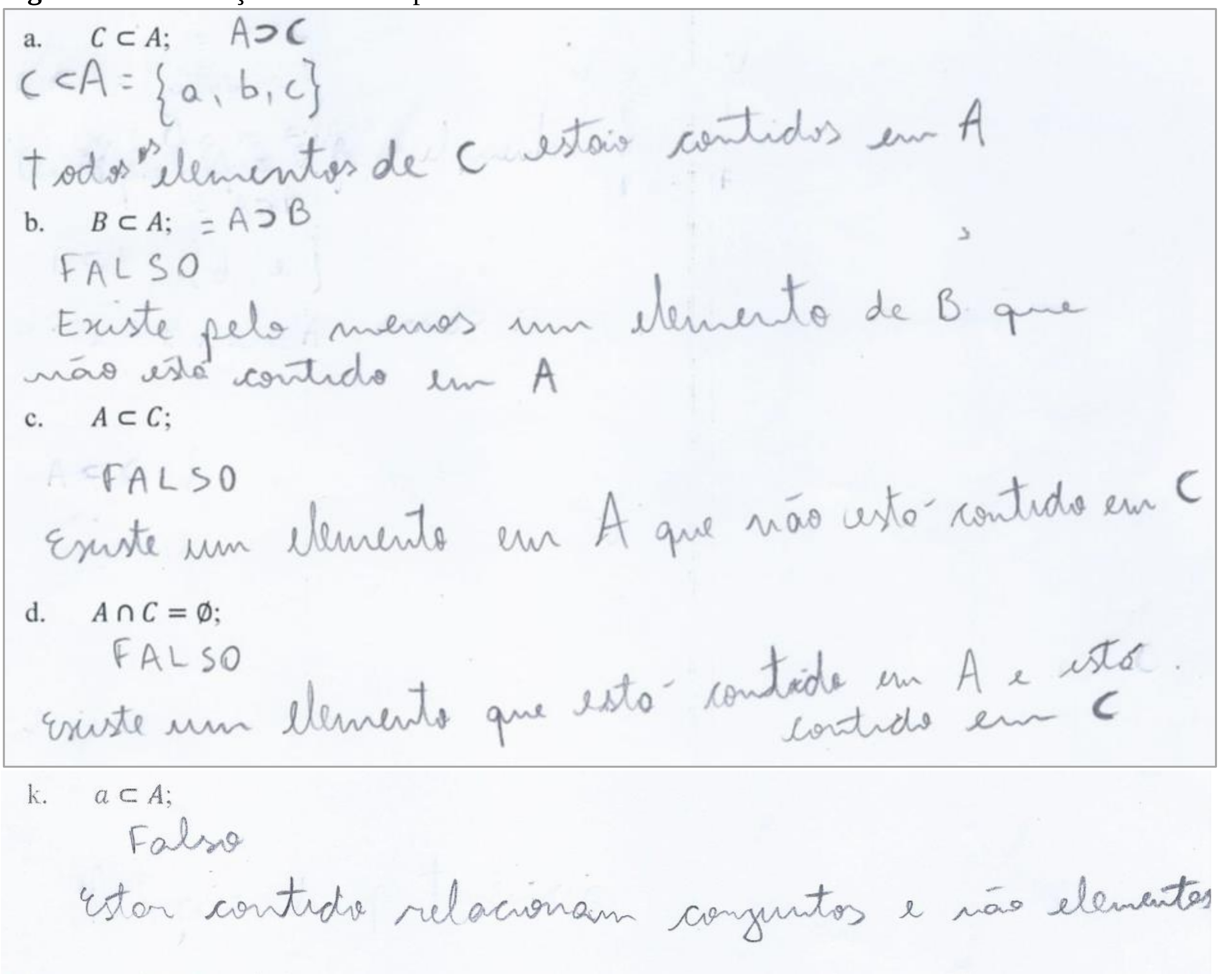


Fonte: resolução do estudante E20

Tarefa 3

Nos primeiros itens da tarefa 3 ele se utiliza da palavra contido como sinônimo de pertence, mostra não compreender que a operação “contido” só relaciona conjuntos com outros conjuntos, no entanto, no item k) ele diz que o a operação “contido” relaciona apenas conjuntos. Isso nos mostra que ele não compreende esta operação, sabe o que significa, mas não a usa corretamente.

Figura 127 - resolução da tarefa 3 pelo estudante E20



a. $C \subset A$; $A \supset C$

$C \subset A = \{a, b, c\}$

todos os elementos de C estão contidos em A

b. $B \subset A$; $= A \supset B$

FALSO

Existe pelo menos um elemento de B que não está contido em A

c. $A \subset C$;

FALSO

Existe um elemento em A que não está contido em C

d. $A \cap C = \emptyset$;

FALSO

Existe um elemento que está contido em A e está contido em C

k. $a \subset A$;

Falso

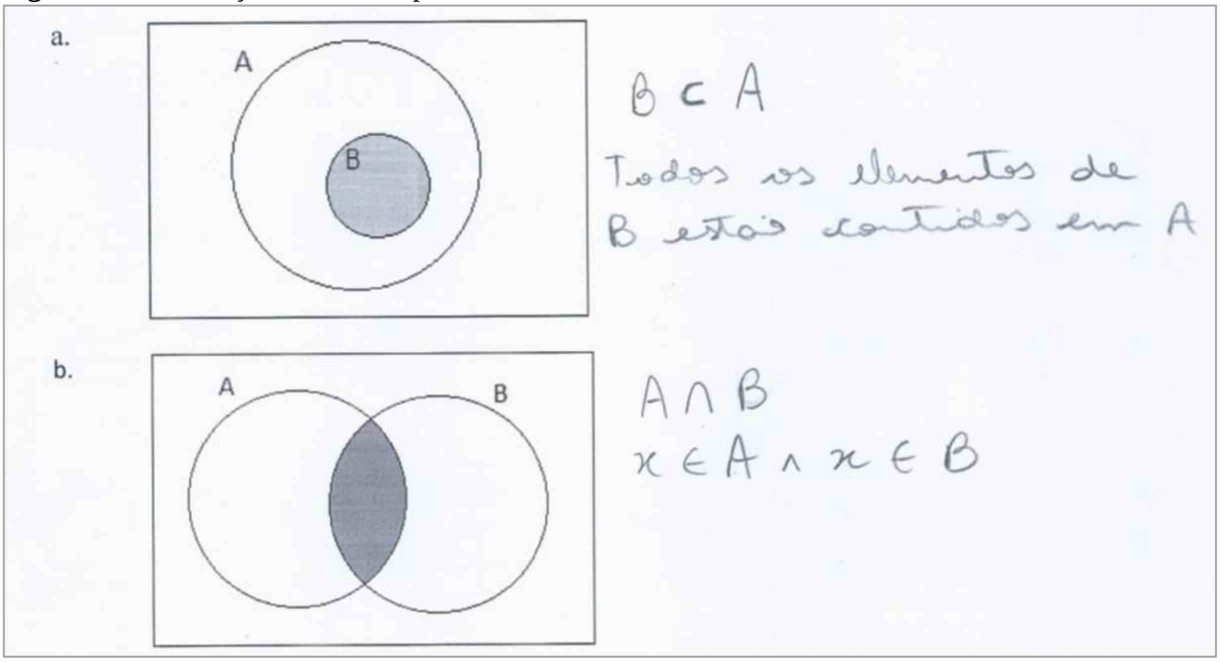
Estar contido relacionam conjuntos e não elementos

Fonte: resolução do estudante E20

Tarefa 4

Ele compreende os significados de todos os diagramas apresentados na tarefa, no item a) ele justifica com o mesmo erro da tarefa 3, diz que os elementos de B estão contidos em A. Nos outros itens ele usa os conectivos e o símbolo ∈ nas suas justificativas, acredito que por isso não usou o termo contido como sinônimo do termo pertence.

Figura 128 - resolução da tarefa 4 pelo estudante E20



Fonte: resolução do estudante E20

Tarefa 5

O estudante não apresenta nenhuma solução para qualquer item da tarefa 5, não conseguiu nem esboçar uma solução[1].

Características do PMA manifestadas pelo estudante E20

Ele compreende os símbolos apresentados nas tarefas, porém ele não compreende que elementos não estão contidos em conjuntos, ele conhece o símbolo que representa isso, mas em seu registro conclui sempre que os elementos estão contidos no conjunto. Não apresenta claramente o que são conjuntos, apresenta com um sinônimo. Consegue compreender várias representações do conceito de conjunto, como pode-se ver nas tarefas 3 e 4. Não realizou a tarefa 5, assim não se infere que ele consegue generalizar os conceitos que mostrou conhecer, pois não realiza operações com conjuntos infinitos.

Deste modo, infere-se que esse estudante manifesta características dos processos de representação, contudo não consegue abstrair os conceitos que ele mostra compreender.

[1] O estudante E20 demorou um tempo maior na solução da tarefa 1. Relatou ser usuário de transporte coletivo, por isso teve que se ausentar antes de concluir a tarefa 5.

4.2 Síntese das Análises

Por meio das análises dos registros escritos dos estudantes podemos perceber que maior parte dos estudantes não atingem todas as características presentes no PMA. Entretanto quase todos atingem as características de representação, o que pode ser interpretado que eles possuem as características do PME, já que para Dreyfus (2002) uma das distinções entre o PMA e o PME são os processos envolvidos na abstração. O que podemos observar no quadro 5.

Quadro 5 – Quadro síntese do PMA apresentado pelos estudantes

Pensamento Matemático Avançado	**REPRESENTAÇÃO**	**Processos de Representação**	E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19 e E20
		Processo de Comutação de Representações e Tradução	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E9, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19 e E20
		Modelação	E1, E2, E6, E7, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E18, E19 e E20
	ABSTRAÇÃO	**Generalização**	E3, E4, E10, E13, E15, E16 e E17
		Síntese	E4, E10, E12, E13, E14, E16 e E17

Fonte: dos autores

Ao observarmos o quadro 5, podemos ver que de 20 estudantes: todos apresentaram ao menos um processo do PMA; nove apresentaram todos os processos presentes na Representação; cinco estudantes apresentaram todos os processos de Abstração; apenas os estudantes E13 e E16 apresentaram todos os processos do PMA. Ou seja, a maioria dos estudantes não apresenta indícios de estar em um nível mais avançado de pensamento, pois apenas dois conseguiram apresentar todos os processos do PMA com destaque para as características dos processos de Abstração, pois são elas que podem diferenciar os níveis entre o PME e o PMA.

CAPÍTULO V

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Percebendo a importância da Teoria de Conjuntos em diversas disciplinas do curso de matemática e a partir de dificuldades que apresentei durante o curso e considerando que tais dificuldades evidenciam-se no início do curso, temos como tema dessa dissertação um estudo a respeito dos processos do Pensamento Matemático Avançado em tarefas da Teoria de Conjuntos.

Acreditamos que o objetivo deste trabalho, que era verificar e identificar os processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) apresentados por estudantes de licenciatura em Matemática em relação a Teoria de Conjuntos, foi alcançado, pois as tarefas propostas possibilitaram a identificação de todos os processos objetivados, foi possível observar as características dos processos envolvidos no PMA nas produções escritas dos estudantes e verificar quais e quantos processos cada estudante possui a respeito da Teoria de conjuntos.

A maior parte dos estudantes é ingresso do ano de 2015, ou seja, está realizando pela primeira vez a disciplina de Estruturas Algébricas. Esses estudantes se destacaram dentre o restante que ingressou em anos anteriores, pois expõe pelo menos alguma solução para todas as tarefas propostas.

A quinta tarefa foi a que menos teve solução apresentada para todos os itens, pois acreditamos que por levar a um nível de abstração maior que as demais, impossibilitou aqueles estudantes que não atingiram todos os processos do PMA, como pode ser observado no quadro 5, apenas cinco estudantes atingiram todos os processos de abstração.

Além disso, podemos destacar que todos os estudantes apresentaram pelo menos uma dificuldade nos conceitos da Teoria de conjuntos, tais como compreender o símbolo $\emptyset$ como sendo o conjunto vazio; utilização das chaves na representação do conjunto das partes; utilização das chaves para definir o conjunto vazio; distinção dos elementos com sua quantidade na representação por diagramas em conjuntos; demonstração completa de igualdade entre conjuntos, propriedades algébricas dos conjuntos; confundir inclusão com pertinência; operação de diferença entre conjuntos; conceber todos os elementos presentes em interseção de conjuntos; utilizar conceitos conhecidos para provar outros; dificuldades com a operação do conjunto das partes.

Uma dificuldade muito recorrente foi a não compreensão de que conjuntos podem ser elementos de outros conjuntos, bem como a distinção da quantidade de elementos com os elementos dos conjuntos.

A partir da aplicação do estudo houve, entre os estudantes, uma mudança, pois alguns buscaram sanar suas dificuldades e, além disso, a professora da turma aproveitou para realizar um trabalho diferenciado.

Concluímos que a maioria dos estudantes não atingiu, neste estudo, com essas questões, a abstração, segundo nosso referencial teórico. Além disso, as dificuldades apresentadas ainda configuram-se como pertencentes a conteúdos vistos (ou que deveriam ter sido vistos) na Educação Básica. Assim, como continuidade deste trabalho, uma contribuição seria a elaboração e implementação de propostas, contemplando esses conteúdos da Teoria de conjuntos, que focassem nessas dificuldades que emergiram dos dados e no desenvolvimento de processos do pensamento matemático visando chegar a uma abstração.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. S. S. **Várias faces da Matemática**. São Paulo, Blucher, 2007.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 1977. Tradução de: L' Analyse de Contenu.

BERTOLAZI, K. S. **Conhecimentos e Compreensões Revelados por Estudantes de Licenciatura em Matemática Sobre Sistemas de Equações Lineares**. 2012. 227 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

CANTOR, G. F. L. P. **Contribuitions to the founding of the theory of Trasfinite Numbers**. Tradução de Philip E. B. Jourdain. Nova York: Dover Publications, Inc. 1915. Disponível em: https://archive.org/stream/contributionstot003626mbp#page/n3/mode/2up acesso em: 05 de dezembro de 2015 as 20 horas.

CASTRUCCI, B. **Elementos** da **teoria dos conjuntos**. 3. ed. São Paulo: G.e.e.m., 1968.

DOMINGOS, A. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados**: a matemática no início do superior. Tese de Doutorado. Faculdade Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2003.

DREYFUS, T. **Advanced mathematical thinking processes**. In : TALL, David. Advanced mathematical thinking. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2002, p.25-41.

ELIAS, H. R. **Dificuldades de estudantes de licenciatura em matemática na compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos**. 2012. 152 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

FRAENKEL, A. A. **Set theory and logic**. Estados Unidos: Addison-Wesley, 1966

GERETI, L. V. **Processos do Pensamento Matemático Avançado Evidenciados em Resoluções de Questões do ENADE**. 2014. 136 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

GERHARDT, T. E. SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre, Editora da UFRGS, 2009. Disponível em <http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf>. Acesso em 13 out. 2015.

GERONIMO, J. R. FRANCO, V. S. **Fundamentos de Matemática**: Introdução a lógica matemática, teoria dos conjuntos, relações e funções. Maringá: Eduem, 2008.

HALMOS, P. R. **Naive Set Theory**. New York, Van Nostrand Reinhold Company Regional Offices, 1960.

KIRNEV, D. C. B. **Dificuldades evidenciadas em registros escritos a respeito de demonstrações matemáticas**. 2012. 113 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

LAGES, L. 5 Paradoxos da Lógica e da Matemática. **Super Interessante**. Out. 2014. Disponível em: < https://super.abril.com.br/blog/superlistas/5-paradoxos-da-logica-e-da-matematica/ >. Acesso em 20 jan. 2016.

MARINS, A. S. **Pensamento Matemático Avançado em Tarefas Envolvendo Transformações Lineares**. 2014. 170 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

SANTOS, A. B A. LOPES, C. do N. CUNHA. M. O. da. Uma introdução ao estudo dos números transfinitos. **Caderno Dá Licença**. Niterói, v. 3, n. 4, p. 40-48, out. 2001. Disponível em: <http://www.dalicenca.uff.br/images/stories/caderno/volume3/uma_introduo_ao_estudo_dos_numeros_transfinitos.pdf>. Acesso em 13 jan. 2016.

SOUZA, M. L. **Dependência e Independência linear: um olhar para as concepções dos licenciandos em Matemática**. 2016. 130 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

SOUZA, M. L. **Um estudo das concepções de licenciandos em Matemática, à luz da Teoria APOS, a respeito do conceito de Anel**. 2016. 134 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

TALL, D. **The psychology of advanced mathematical thinking**. In: TALL, David. (Org.), Advanced mathematical thinking, Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2002, p.3-21.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA. **Resolução CEPE 0229/2009 de 29 de outubro de 2009. Reformula o Projeto Político Pedagógico do Curso de Matemática - Habilitação: Licenciatura, a ser implantado a partir do ano letivo de 2010**. Londrina, 2009. Disponível em: <http://www.uel.br/prograd/docs_prograd/resolucoes/2009/resolucao_230_09.pdf>. Acesso em 10 out. 2015.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Caracterização dos Estudantes

Nome:	Idade:
E-mail:	
Em que ano ingressou no curso de Matemática?	
Qual(is) habilitação(ões) você cursa?	
Possui outra(s) graduação(ões)? Se sim, qual(is)? Foi(ram) em instituição(ões) pública(s) ou privada(s)?	
É a primeira vez que está cursando a disciplina de Estruturas Algébricas?	
Quais disciplinas você já cursou?	
Já participou ou participa de algum projeto? Se sim, qual(is)?	
Já atuou ou atua como professor no Ensino Fundamental ou Médio? Se sim, em instituição pública ou privada? E quanto tempo atua?	

APÊNDICE B

Questionário apresentado aos estudantes

1) (Adaptado de UEL – 2015) Considere que 300 homens estavam construindo a Torre de Babel, que eles receberam uma numeração de 1 a 300 e que foram divididos em três grupos: o grupo A formado pelos homens com numeração múltipla de 2, o grupo B formado pelos homens com numeração múltipla de 3 e o grupo C formado pelos demais homens. Cada um dos homens pertencentes somente ao grupo A ou somente ao grupo B passou a falar idiomas distintos entre si. Os homens do grupo C permaneceram falando o idioma original, bem como os homens cuja numeração pertencia, simultaneamente, aos grupos A e B. Nessas condições responda quantos foram os idiomas falados na Torre de Babel, após essa ação.

2) Defina o que são conjuntos:

3) Sejam os conjuntos A, B e C definidos por:

$A = \{a, b, c, d, e\}$;

$B = \{d, e, f, g\}$;

$C = \{a, b, c\}$.

Mostre, se for possível, as operações de conjuntos a seguir e justifique suas respostas.

a. $C \subset A$;

b. $B \subset A$;

c. $A \subset C$;

d. $A \cap C = \emptyset$;

e. $A \cap B = \{d\}$;

f. $\emptyset \subset A$;

g. $\emptyset \subset B$;

h. $a \in A$;

i. $\{a\} \in A$;

j. $\{a\} \subset A$;

k. $a \subset A$;

l. $\mathcal{P}(A)$;

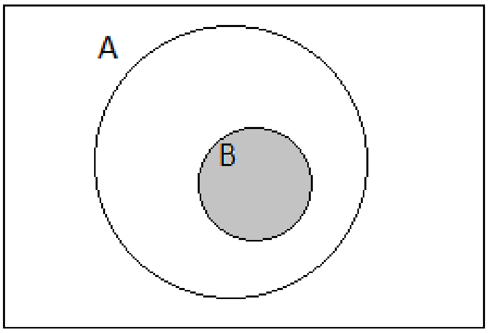
m. $\mathcal{P}(C)$;

n. $A - B$;

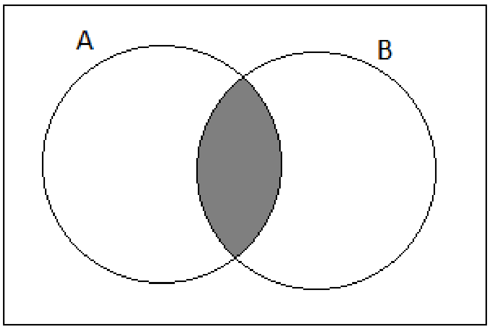
o. $B \cup C$.

4) Escreva o que cada diagrama a seguir representa e justifique suas respostas.

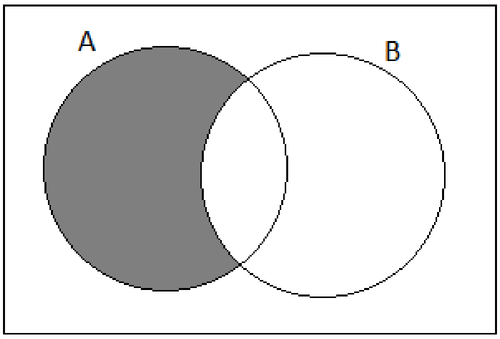
a.



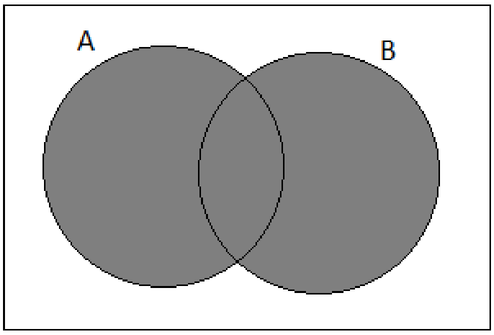
b.



c.



d.



5) (GERONIMO e FRANCO, 2008) Sejam o A, B e C conjuntos quaisquer, demonstre que:

a. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

c. $A \cup B = B \cup A$;

d. $A \cap B = B \cap A$;

e. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

f. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

g. $A \cup A = A$;

h. $A \cap A = A$;

i. $\emptyset \subseteq A$, para todo A.

j. $A - B = A \cap B^C$

APÊNDICE C

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Com o objetivo de analisar e discutir as concepções de estudantes da Licenciatura em Matemática referente aos conceitos da Teoria de Conjuntos, gostaríamos de contar com sua participação, que se daria da seguinte forma: resolução de problemas matemáticos e entrevista, quando necessário, a respeito do registro escrito obtido na resolução do problema, bem como com sua autorização para analisar os registros escritos obtidos e gravar em áudio a entrevista com o intuito de esclarecer discussões e resoluções escritas.

Esclarecemos que sua participação é totalmente voluntária, podendo o (a) senhor (a): recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento, sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa. Esclarecemos, também, que suas informações serão utilizadas somente para os fins de pesquisa acadêmica e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade. Os registros gravados serão deletados e apagados após a utilização dos mesmos na pesquisa.

Eu, ____, tendo sido devidamente esclarecido sobre os procedimentos da pesquisa, concordo em participar **voluntariamente** da pesquisa e autorizo por meio do presente termo a estudante **Jair Lucas Jorge**, do mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, a utilizar integralmente ou em partes meus registros escritos para fins de pesquisa acadêmica, podendo divulgá-los em publicações científicas, com a condição de que estará garantido meu direito ao anonimato.

Assinatura:______________________________

Data:____________________