Universidade Estadual de Londrina

MARCELO SILVA DE JESUS

UM ESTUDO DAS CONCEPÇÕES DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA, À LUZ DA TEORIA APOS, A RESPEITO DO CONCEITO DE ANEL

Londrina
2016

MARCELO SILVA DE JESUS

UM ESTUDO DAS CONCEPÇÕES DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA, À LUZ DA TEORIA APOS, A RESPEITO DO CONCEITO DE ANEL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profª. Drª. Angela Marta Pereira das Dores Savioli

Londrina
2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Jesus, Marcelo Silva de.
Um estudo das concepções de licenciandos em matemática, à Luz da teoria APOS, a respeito do conceito de anel / Marcelo Silva de Jesus. - Londrina, 2016.
134 f. : il.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2016.
Inclui bibliografia.

1. Educação matemática - Teses. 2. Estrutura algébrica anel - Formação de conceitos - Teses. 3. Matemática - Estudo e ensino - Teses. 4. Álgebra abstrata - Teses. I. Savioli, Angela Marta Pereira das Dores . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

MARCELO SILVA DE JESUS

UM ESTUDO DAS CONCEPÇÕES DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA, À LUZ DA TEORIA APOS, A RESPEITO DO CONCEITO DE ANEL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

____
Profª. Drª. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
UEL – Londrina – PR

____
Prof. Dr. Bruno Rodrigo Teixeira
UEL – Londrina – PR

____
Profª. Drª. Barbara Lutaif Bianchini
PUC – São Paulo – SP

Londrina, _____de ____________de _____.

Dedico este trabalho aos meus pais, Maria Aparecida e Maurício de Jesus.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais. Agradeço pelo que sou, pelos princípios e valores que hoje possuo. Sou grato eternamente por tê-los como meus primeiros e principais exemplos de honestidade, simplicidade e trabalho.

À minha irmã Milena. Obrigado por ser um exemplo de dedicação aos estudos.

À minha orientadora Angela Marta, a melhor orientadora do mundo. Obrigado pela confiança depositada em mim, pela paciência, dedicação, pelo apoio e por compartilhar de suas experiências e de seu conhecimento ao longo de toda a minha trajetória acadêmica. Obrigado por me dar a mão e me ajudar a percorrer o caminho escolhido por mim.

Aos professores Dra. Barbara Lutaif Bianchini e Dr. Bruno Rodrigo Teixeira, por aceitarem o convite de compor a banca deste trabalho, trazendo valiosas contribuições.

À minha irmãzinha de orientação Mariany, que tanto me ajudou em todas as fases da minha dissertação. Obrigado pela paciência e apoio. Prometo um “pollo” feliz.

Agradeço aos colegas do Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático (GEPPEMat). Obrigado pela irmandade e pelas contribuições feitas para com esta pesquisa. Obrigado, Henrique, pelas conversas a respeito da Teoria APOS. Obrigado Jair pelas diversas ajudas na formatação.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL. Obrigado pelos dois anos de aprendizado.

Agradeço aos professores da educação básica. Obrigado por me ensinarem a ler, escrever, contar, estudar etc. Em especial a Prof.ª Maria Eva Convento por ser uma inspiração como educadora.

Agradeço às minhas amigas Darlini, Eliane, Elisabete, Sheila, Renata Martins e Renata Graciele. Obrigado por fazerem parte da minha vida.

Agradeço ao meu amigo Gilson. Obrigado por estar presente nos momentos bons e ruins, dando apoio e puxões de orelha.

Agradeço aos amigos que conheci durante o mestrado, Ana

Carolina, Anie, Cristiano, Hallynnee, Helen, Daiany e Leandro. Obrigado, “primaiada”, por compartilharmos momentos de diversão, sofrimento e aprendizado.

Agradeço aos estudantes da 2ª série do curso de Matemática – Habilitação: Licenciatura, que se disponibilizaram a participar deste estudo.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

“Importante não é ver o que ninguém nunca viu, mas pensar o que ninguém pensou sobre algo que todo mundo vê.”

(Arthur Schopenhauer)

JESUS, Marcelo Silva de. **Um estudo das concepções de licenciandos em Matemática, à luz da Teoria APOS, a respeito do conceito de Anel.** 2016. 134. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

RESUMO

Na presente pesquisa, identificamos e discutimos, por meio da Teoria APOS, as concepções manifestadas por licenciandos em Matemática da Universidade Estadual de Londrina na resolução de tarefas a respeito do conceito de Anel. Para tanto, realizamos uma pesquisa de abordagem qualitativa de cunho interpretativo. A coleta de dados foi realizada por meio de cinco tarefas aplicadas a onze estudantes concluintes da disciplina de Estruturas Algébricas, ofertada na 2ª série do curso. Fundamentamo-nos na Teoria APOS de Dubinsky (1994) para construir uma decomposição genética para o conceito de Anel e interpretar os registros escritos dos estudantes de modo a identificar suas concepções (ação, processo, objeto, esquema). O estudo evidenciou que após cursar uma disciplina de Estruturas Algébricas um estudante construiu uma concepção objeto de Anel, compreendendo-o com características próprias, sendo capaz de manipulá-lo e utilizá-lo quando necessário. Um estudante construiu a concepção processo, realizando ações conscientes sobre o objeto matemático, no entanto, ainda não o concebeu como um todo. Quatro estudantes construíram a concepção ação, demonstrando lidar com o objeto Anel de maneira elementar, muitas vezes indicando apenas terem decorado procedimentos e regras, sem terem de fato compreendido. Cinco estudantes demonstraram ainda estarem no processo inicial de construção do conceito de Anel, necessitando coordenar ações e construir outros objetos para passar a ter uma concepção ação de Anel. Nenhum estudante mostrou ter construído a concepção esquema. Acreditamos que as concepções identificadas e o modo como os estudantes concluintes de uma disciplina de Estruturas Algébricas lidam com tarefas envolvendo o conceito de Anel indiquem a necessidade de se repensar a respeito do modo como a disciplina de Estruturas Algébricas vem sendo abordada em cursos de licenciatura em Matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Anel. Concepção de licenciandos em Matemática. Teoria APOS.

JESUS, Marcelo Silva de. **A study of Mathematics students' conceptions, in light of APOS Theory, concerning the concept of ring.** 2016. 134. Dissertation (Master's Degree in the Teaching of Science and Mathematical Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

ABSTRACT

In this research we identified and discussed, through APOS Theory, the conceptions of Mathematics students from Universidade Estadual de Londrina, in order to accomplish tasks concerning the concept of ring. Therefore, we carried out a qualitative and interpretative research. Data collection was conducted through five tasks applied to eleven students who were concluding the subject Algebraic Structures, which was offered at the 2nd year of the graduation course. Our basis was APOS Theory of Dubinsky (1994) to construct a genetic decomposition to the concept of ring and to interpret written records of students in order to identify their conceptions (action, process, object, schema). The research showed that after taking classes of Algebraic Structures, one student constructed a conception-object of ring, understanding it with its own features, and being able to manipulate it and use it whenever necessary. One student constructed a conception-process, taking percipient actions about the mathematical object, however, he / she had not conceived it as a whole yet. Four students constructed a conception-action, dealing with the object ring in an elementary way, showing several times that they had only memorized procedures and rules, without actually understanding them. Five students showed they were still at the starting process of the construction of the concept of ring, needing to coordinate actions and construct other objects in order to achieve the conception-action of ring. No student showed to have constructed the conception-schema. We believe that the conceptions of Ring that have been identified, as well as the way students who are concluding the subject Algebraic Structure deal with tasks which involve the concept of Ring, indicate the need of rethinking the way this subject has been approached in Mathematics graduation courses.

Keywords: Mathematical Education. Ring. Mathematics student's conception. APOS Theory.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As Estruturas Algébricas ocupam um papel de destaque na Álgebra Abstrata, pela contribuição para o seu desenvolvimento e para o da Matemática, de um modo geral. Elas integram não só o currículo do curso de Matemática, mas também currículos de cursos como Engenharias, Física e Computação. Segundo Kluth (2005), por meio das Estruturas Algébricas podemos explicitar aquilo que é semelhante entre distintas coleções de um mesmo objeto e entre objetos matemáticos distintos.

Souza (2004) considera fundamental o ensino de Estruturas Algébricas em um curso de Matemática, habilitação licenciatura, pois sem essa disciplina, o aluno termina o curso sem os conhecimentos necessários para ensinar os princípios fundamentais da Matemática, como os conjuntos numéricos, suas operações e propriedades.

De modo mais específico, temos no anexo III da resolução CEPE nº 0230/2009 da Universidade Estadual de Londrina (UEL), que entre as contribuições dos conteúdos avançados à formação do licenciando em Matemática está a de fornecer uma visão da sua importância, quer como ferramenta na resolução de problemas de diversas áreas do conhecimento, quer como sistema abstrato de ideias, refletindo generalizações e regularidades. Além disso, é nas disciplinas avançadas que o aluno desenvolve a compreensão e a capacidade de estabelecer nexos entre os vários temas da Matemática escolar; aprende a tratar com maior cuidado os processos dedutivos, as definições e as formalizações, de um modo geral.

Apesar da sua importância, como explicitado acima, o ensino de Estruturas Algébricas em cursos de graduação não tem apresentado resultados satisfatórios para os estudantes, como observa Campos (2009), que assim como Milies (2004), atribui à abstração e ao formalismo o motivo de inúmeras das dificuldades apresentadas. Para Campos (2009), os conceitos algébricos são tratados nas salas de aula, na maioria das vezes, a partir das definições formais, apoiadas na linguagem da teoria de conjuntos, em que as relações entre os objetos são mais importantes do que o próprio objeto.

De acordo com Dubinsky *et al*. (1994), o ensino da Álgebra Abstrata apresenta um sério problema educacional e geralmente é considerado pelos estudantes um dos assuntos mais perturbadores da graduação. Para esses autores, muitas das dificuldades apresentadas no curso de Álgebra Abstrata são decorrentes tanto do modo de lidar com o conteúdo quanto do próprio desenvolvimento de atitudes frente à Matemática abstrata, pois esse curso é, em muitas faculdades, o primeiro no qual os estudantes precisam ir além de seguir e imitar padrões. Eles precisam aprender a lidar com conceitos abstratos, princípios matemáticos e realizar provas e demonstrações matemáticas.

Souza (2004) considera necessário destacar os pontos relevantes da disciplina, e não apenas cumprir o currículo e apresentar a teoria descontextualizada e abstrata ao abordar o ensino de Álgebra em cursos de Matemática, habilitação licenciatura.

Franco (2011) observa que os estudantes, mesmo ao final de um curso de licenciatura em Matemática e, em princípio, já tendo estudado outros conteúdos matemáticos abstratos, demonstraram significativas dificuldades na resolução de exercícios envolvendo o conceito de Anel e Subanel, evidenciando uma dificuldade no formalismo algébrico.

Nesse sentido, concordamos com Mondini (2009), quando considera importante compreender as dificuldades que muitos licenciandos em Matemática têm na compreensão de conceitos matemáticos, sendo, portanto, necessária a abordagem de temas que discutam suas origens e suas diferentes manifestações.

Assim, esta pesquisa teve início com as preocupações do autor desta dissertação a respeito das dificuldades apresentadas por licenciandos em Matemática para Estruturas Algébricas, muitas das quais este pesquisador também sentia ao cursar Matemática, como aquelas que se referem ao entendimento das Estruturas Algébricas, e aquelas relativas ao entendimento de textos matemáticos, como definições e demonstrações.

Por estar inserido no Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático (GEPPEMat) da Universidade Estadual de Londrina, este pesquisador passou a ter mais contato e a estudar pesquisas que tinham como objetivo discutir o ensino e a aprendizagem de conteúdos estudados no curso de Matemática. Entre as pesquisas desenvolvidas pelo grupo, uma em especial, intitulada *Dificuldades de estudantes de licenciatura em Matemática na compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupo*, Elias (2012), chamou a atenção, por ter como um dos objetivos interpretar as dificuldades identificadas por meio da Teoria APOS[1] de Ed Dubinsky *et. al* (1994) e Dubinsky (2002), identificando a concepção (ação, processo, objeto) de cada estudante.

Inspirados nesse estudo e em outros que abordam Álgebra Abstrata, Estruturas Algébricas e Educação Matemática[2], optamos por desenvolver esta pesquisa em um curso de Matemática, habilitação em licenciatura. Delimitamos nosso objeto de estudo ao conceito de Anel, por ser uma estrutura algébrica ainda pouco abordada em pesquisas acadêmicas associadas à Educação Matemática[3], e por sua importância na formação do professor de Matemática, como observa Souza (2004), ao afirmar que:

> [...] é fundamental um aluno de licenciatura em Matemática não só saber, mas dominar as propriedades dos Anéis, saber dar exemplos, contraexemplos, discuti-los e resolver exercícios com as propriedades pertinentes (p. 3).

E justifica essa afirmação, recorrendo ao conjunto das matrizes quadradas:

> [...] Sabemos que é um Anel, não comutativo, pois a multiplicação de matrizes é não comutativa, com divisores de zero, ou seja, é possível encontrar duas matrizes quadradas, não nulas, cujo produto seja a matriz nula. Diante de um exemplo como este, o futuro professor tem que ter em mente as propriedades que aproximam este conjunto do conjunto dos inteiros e as propriedades que o distanciam deste. Assim, um problema que poderia ser resolvido, se suas variáveis fossem os números inteiros, só poderá ser resolvido no conjunto das matrizes quadradas, se não houver necessidade do uso das propriedades: comutativa e não divisores de zero (p.3).

Por fim, de acordo com o já exposto e com as leituras de pesquisas a respeito do processo de ensino e aprendizagem de Álgebra Abstrata, apresentadas no capítulo da fundamentação teórica, definimos o objetivo desta pesquisa:

- Investigar e discutir as concepções (ação, processo, objeto, esquema), à luz da Teoria APOS, que são manifestadas por

---

1 Consideramos APOS como uma teoria, assim como em Dubinsky e McDonald (2001, p. 1).

2 As pesquisas são abordadas de modo mais específico no capítulo dois, referente à fundamentação teórica.

3 Afirmação feita com base em nossa pesquisa bibliográfica, apresentada no capítulo dois, referente à fundamentação teórica.

licenciandos em Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL) ao lidarem com tarefas referentes ao conceito de Anel.

E como questões norteadoras:

- Que caminho um indivíduo pode percorrer ao construir o conceito de Anel?
- Que concepções (ação, processo, objeto, esquema), à luz da Teoria APOS, são manifestadas nos registros escritos apresentados por licenciandos em Matemática, concluintes de uma disciplina de Estruturas Algébricas, para o conceito de Anel?

Esta pesquisa está estruturada em quatro capítulos: no primeiro capítulo, abordamos o conceito matemático de Anel por meio do estudo de artigos a respeito do seu desenvolvimento histórico, e por meio do estudo de livros-texto adotados ou sugeridos por professores que trabalham com a disciplina de Estruturas Algébricas no curso de Matemática – habilitação: licenciatura, na Universidade Estadual de Londrina.

No segundo capítulo, apresentamos algumas pesquisas nacionais e internacionais que contribuíram de algum modo com este estudo. No terceiro capítulo, tratamos da Teoria APOS de Ed Dubinsky (1994) e colaboradores, referencial teórico que subsidiou esta pesquisa.

A descrição dos procedimentos metodológicos é feita no quarto capítulo. Nele, explicitamos os sujeitos da pesquisa, o instrumento de coleta de dados, o tratamento e a maneira da análise dos dados.

A descrição e a análise, à luz da Teoria APOS, dos registros escritos dos participantes da investigação referentes à resolução de tarefas relacionadas ao conceito de Anel são apresentadas no quinto capítulo.

No sexto e último capítulo, apresentamos as considerações finais sobre os resultados, destacando aspectos relevantes e sugestões para pesquisas futuras.

1. O OBJETO MATEMÁTICO ANEL

Com a intenção de compreendermos o conceito de Anel, apresentamos um estudo a respeito do seu desenvolvimento histórico, e por considerarmos importante entender como ele é tratado nos dias atuais e apresentado aos estudantes, fazemos uma descrição do modo como esse conceito é abordado em quatro livros-texto, selecionados de acordo com a bibliografia do programa da disciplina de Estruturas Algébricas do curso de Matemática – habilitação: licenciatura da Universidade Estadual de Londrina.

1.1 Sobre a estrutura algébrica Anel: de sua gênese até os dias atuais

Pretendemos, a partir do estudo de alguns textos (fontes secundárias) a respeito da história da Matemática, descrever situações nas quais matemáticos usaram certos procedimentos que poderiam ter alguma relação com o desenvolvimento do conceito de Anel. Não tivemos a preocupação de analisar o que de fato pôde ter acontecido, pois acreditamos que tais estudos são os resultados das interpretações de seus autores. Assim, com o objetivo de encontrar referências que abordassem a história da Álgebra Abstrata, particularmente, o conceito de Anel, realizamos nossos estudos a partir das seguintes publicações: "*Uma breve história da Álgebra Abstrata*" (MILIES, 2004); "*Sobre Anéis e ideais*" (BRANDEMBERG, 2011); "*The Origins of the Definition of Abstract Rings*" (CORRY, 2000) e "*A History of Abstract Algebra*" (KLEINER, 2007).

Ao estudarmos o artigo de Brandemberg (2011), intitulado "*Sobre Anéis e ideais*", percebemos que o desenvolvimento da estrutura algébrica de Anel se deu a partir de diferentes contextos, entre eles a Teoria de Inteiros Algébricos[4], trabalhada pelo alemão Richard Dedekind (1831–1916) em 1871, e os Sistemas de Números Hipercomplexos[5], a partir de 1843, com os *quaternions* do matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865).

[4] Em Domingues e Iezzi (2003), temos que um número complexo se diz inteiro algébrico se é raiz de um polinômio cujo coeficiente do termo de maior grau é 1 e os demais são números inteiros.

[5] Segundo Brandemberg (2011), um sistema de números hipercomplexos é o conjunto de todos os símbolos da forma $x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$, onde $x_1, x_2, \dots, x_n$ são números reais ou eventualmente complexos e $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ são símbolos, chamados de unidades do sistema (p. 317).

Em 1801, a aritmética desenvolvida a partir de Diofanto (250 d.C.) passa por mudanças consideráveis quando Carl F. Gauss (1777-1855) publica o seu *Disquisitiones Arithmeticae*, uma obra que, segundo Brandemberg (2011, p. 315), "tornou um marco na Teoria dos Números". E a partir de uma demonstração das Leis de reciprocidade quadrática[6] enunciada por Adrien Legendre (1752-1833), começam as buscas por inúmeras generalizações para potências superiores de *x*. Assim, Gauss, ao abordar x^4, percebe a necessidade de uma generalização da aritmética, o que culminou no conjunto dos números complexos, que teve com Hamilton um formalismo e uma representação como pares ordenados de números reais que são usados até os dias atuais.

O matemático alemão Ernst Kummer (1810-1893), motivado pelas leis de reciprocidade quadrática, e na tentativa de provar o último Teorema de Fermat[7], define objetos matemáticos abstratos que garantem uma decomposição em produtos de fatores primos como propriedade dos seus números inteiros ciclotômicos[8], a qual denomina fatores primos ideais, e que ele chamou de números ideais. Ao generalizar e organizar os objetos definidos por Kummer, Dedekind introduz o conceito de Anel como um conjunto qualquer de números fechado com relação à adição e à multiplicação, e logo em seguida, o Anel dos números algébricos. Apesar de o conceito de Anel já ser utilizado nos trabalhos sobre a Teoria dos Números Algébricos de Dedekind, o termo Anel foi introduzido apenas em 1897, por David Hilbert (1862–1943).

De acordo com Brandemberg (2011), esses trabalhos desenvolvidos por matemáticos como Gauss, Kummer e Dedekind marcam o nascimento da Teoria Algébrica dos Números, e segundo Kleiner (2007), o início do que viria a ser uma teoria dos Anéis comutativos.

Para Brandemberg (2011), o estudo dos números inteiros foi essencial para o desenvolvimento da atual Teoria de Anéis, pois as propriedades

---

[6] De acordo com Brandemberg (2011), foi enunciada por Adrien Legendre (1752-1833) e estabelece que dados os primos p e q existe um inteiro x, tal que q divide $p – x^2$, e existe um inteiro x, tal que p divide $q – x^2$ (p. 317).

[7] De acordo com Jacinto (2007), o último teorema de Fermat considera que não existe algum conjunto de inteiros positivos *x*, *y*, *z* e *n* com *n* maior que 2 que satisfaça a equação $x^n + y^n = z^n$.

[8] Segundo Brandemberg (2011), é o conjunto dos números da forma $a_0 + a_1\omega_p + a_2\omega_P^2 + \cdots + a_{p-1}\omega_p^{p-1}$, onde $a_i \in Z \; e \; \omega_p \neq 1$.

que os definem se estendem a outros conjuntos, como o dos números racionais, dos reais, dos complexos, dos polinômios e das funções contínuas reais. Além disso, o autor complementa, afirmando que o conjunto dos números inteiros é usualmente apresentado como o primeiro, ou o mais natural exemplo de um Anel.

A Teoria dos Anéis Abstratos teve início com os trabalhos de Abraham Fraenkel (1891–1965), com objetos abstratos (independentes), ao invés de objetos específicos, como o Anel de polinômios e os Anéis dos inteiros algébricos. A primeira definição axiomática de Anel é apresentada por Fraenkel em um artigo publicado em 1914 sobre os divisores de zero e a decomposição de Anéis "*Uber die Teiler der Null und die Zerlegung Von Ringen*", no qual também discute as propriedades básicas dessa estrutura, ilustra a abrangência do conceito e apresenta exemplos de Anéis como inteiros módulos *n*, sistemas de números hipercomplexos, matrizes, e inteiro p-ádicos[9].

Segundo Milies (2004), o enunciado da definição apresentada por Fraenkel é muito próximo do atual, uma vez que o matemático

> [...] considera um sistema com duas operações, que chama de soma e produto e estabelece que, em relação à soma, o sistema deve formar um grupo, e enuncia explicitamente os axiomas dessa estrutura. Sobre o produto, ele especifica que deve ser associativo e distributivo em relação à soma e inclui a existência de um elemento unidade. A comutatividade da soma, que não foi postulada, é demonstrada a partir desses axiomas, bem como uma série de resultados elementares (p. 48).

Em Corry (2000), temos ainda que Fraenkel

> [...] assume que R contém ao menos uma identidade com relação à segunda operação. Sob essas suposições, é possível que R contenha divisores de zero; um elemento que não é divisor de zero é chamado um elemento regular do Anel (p. 17).

Ainda segundo Corry (2000), Fraenkel inclui a essa definição dois axiomas que não estão presentes na definição usual de Anéis. Um afirma que todo elemento regular é inversível com relação à multiplicação, e o outro, que para quaisquer dois elementos de a e b do Anel existe um elemento regular u no Anel, tal que $ab = uba$.

---

9 Segundo Soares (2008), um inteiro p-ádico α é formalmente escrito como uma série de potência $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ com coeficientes inteiros, tal que $0 \leq a_i \leq p - 1$ para todo a_i.

Considerando essa definição, tem-se que o próprio conjunto dos inteiros não é um Anel. E isso acontece mesmo após ele reescrever sua definição em 1916, que de acordo com Brandemberg (2011), se um Anel não apresenta divisores de zero, então ele é um corpo, o que permite concluir que todos os resultados válidos para um corpo também são válidos para um Anel, exceto os ligados à divisão.

Outra importante contribuição para o desenvolvimento da teoria foi de Emmy Noether (1882-1935), que ao generalizar o que Dedekind realizara para o Anel de números algébricos em 1871, atribui um caráter abstrato ao conceito e caracteriza os Anéis comutativos em um artigo publicado em 1927, intitulado *Abstract Study of Ideal Theory in Algebraic Number – and Function - fields*. Segundo Brandemberg (2011), Noether foi quem melhor contribuiu para o avanço da teoria abstrata da estrutura algébrica Anel, pois ao dedicar uma década de estudos a respeito da estrutura, estabeleceu propriedades e demonstra teoremas relacionados a Anéis como uma estrutura abstrata, sem considerar apenas os exemplos numéricos, mas também matrizes, polinômios, permutações e outros objetos matemáticos. De acordo com esse autor,

> Noether não trabalhava Anéis de polinômios ou ideais de inteiros ciclotômicos, e sim uma estrutura, mais pura, os seus “ideais”. Para Noether, qualquer relação Matemática só se tornava clara depois de abstraída. Ela pensava em termos de conceitos, e não de fórmulas (BRANDEMBERG, 2011, p. 325).

A caracterização dos Anéis comutativos, que segundo Kleiner (2007), é originária da Teoria dos Números Algébricos, da Álgebra comutativa e da Teoria dos Invariantes[10], também é creditada a Noether, que a descreveu no artigo publicado em 1927. Já a Teoria dos Anéis Não Comutativos foi consequência da extensão dos números complexos ao Sistema de Números Hipercomplexos.

Como exemplos de Anéis comutativos, tem-se $(Z, +, \cdot)$, Anel dos inteiros e $(Z_m, +, \cdot)$, Anel das classes de resto módulo m, e como exemplos de Anéis não comutativos pode-se mencionar $(M_n(A), +, \cdot)$, Anel de matrizes em que A indica Z, conjunto dos inteiros, ou Q, conjunto dos racionais, R, conjunto dos reais, ou C, conjunto dos complexos.

---

10 Segundo Godoy e Mattos (2011), a Teoria Clássica dos Invariantes investiga propriedades relativas às formas homogêneas, aos polinômios homogêneos, ou aos quânticos, que não são alteradas por transformações lineares.

Podemos perceber que, assim como outros conceitos da Álgebra Abstrata, o conceito de Anel passou por um longo processo de desenvolvimento até se constituir no atual. Tal conceito teve sua origem ligada a diferentes domínios, como polinômios e a Teoria de Inteiros Algébricos, nos quais sua definição sofreu alterações ao longo da história, de modo a atender às necessidades de diferentes matemáticos, como Richard Dedekind, David Hilbert, Adolf Fraenkel e Emmy Noether.

Com o objetivo de complementarmos os aspectos históricos acerca do surgimento e desenvolvimento da estrutura algébrica Anel, propomo-nos a analisar, por meio de quatro livros-texto de Álgebra Abstrata, como esse conceito é tratado nos dias atuais.

1.2 O CONCEITO DE ANEL EM LIVROS-TEXTO

A seleção dos livros estudados aqui foi feita considerando aqueles que compõem a bibliografia do programa da disciplina de Estruturas Algébricas do curso de Matemática – Habilitação: Licenciatura da Universidade Estadual de Londrina, evidenciando certa preferência de alguns professores por esses livros. Os livros selecionados foram: Domingues e Iezzi (2003), Hefez (1993), Lang (1972) e Hernstein (1970). Consideramos este estudo necessário para refletir a respeito de como o conceito é enunciado e abordado, e para conhecer os livros que foram ou podem ser utilizados pelos participantes da pesquisa, indicando como tiveram contato com o conceito de Anel.

Os livros abordam o conceito de Anel iniciando por uma definição seguida de exemplos e exercícios, de modo que esse ciclo se repete, ou seja, são apresentadas novas definições, seguidas de exemplos e exercícios, até a abordagem de outro conceito. Percebemos ainda que a definição de Anel é apresentada nesses livros, em geral, partindo de uma definição axiomática.

Hefez (1993) define Anel já no segundo capítulo, intitulado "*Os números inteiros e racionais*", para motivar a caracterização dos inteiros. Percebe-se isso a partir do seguinte comentário:

> 1. Os Números inteiros
> O conjunto Z dos números inteiros é munido de duas operações, uma adição (+) e uma multiplicação ($\cdot$), além de uma relação de ordem ($\leq$).

> Esses objetos se relacionam através de várias propriedades que listaremos ao longo das três próximas subseções. Essa lista de propriedades caracterizará completamente os números inteiros, de um modo que será precisado no Teorema 3 do Capítulo 3 (p. 23).

Logo em seguida, o autor apresenta a seguinte definição:

> Seja A um conjunto, e $(+)$ e $(\cdot)$ duas operações em A, chamadas de adição e multiplicação. A terna $(A, +, \cdot)$ será chamada de *Anel* se as operações gozarem das seguintes propriedades:
> **A_1** (**A adição é associativa**). *Quaisquer que sejam* $a, b, c \in A$, *tem-se que* $(a+b)+c = a+(b+c)$.
> **A_2** (**A adição é comutativa**). *Quaisquer que sejam* $a, b \in A$, *tem-se que* $a+b = b+a$.
> **A_3** (**Existe um elemento neutro para a adição**). *Existe* $\alpha \in A$, *tal que* $\alpha + x = x$, *para todo* $x \in A$.
> **A_4** (**Todo elemento de A possui um simétrico**). *Para todo* $a \in A$ *existe* $a' \in A$, tal que $a + a' = \alpha$.
> **M_1** (**A multiplicação é associativa**). *Quaisquer que sejam* $a, b, c \in A$, *tem-se que* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
> **M_2** (**A multiplicação é comutativa**). *Quaisquer que sejam* $a, b \in A$, *tem-se* que $a.b = b.a$.
> **M_3** (**Existe um elemento neutro para a multiplicação**). *Existe* $e \in A$ *com* $e \neq 0$, *tal que* $x \cdot e = x$, *para todo* $x \in A$.
> **AM** (**A multiplicação é distributiva com relação à adição**). *Quaisquer que sejam* $a, b, c \in A$, *tem-se que* $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.
> (p. 23-24).

Segundo Jesus *et al.* (2015), um estudante pode, a partir dessa definição, entender Anel apenas como um conjunto numérico, munido das operações usuais de adição e multiplicação com algumas propriedades, o que limita seu conhecimento a respeito dos diferentes tipos de conjuntos que podem ser Anéis. Além disso, um Anel seria sempre comutativo com unidade.

Por sua vez, Lang (1972) apresenta a definição de Anel do seguinte modo:

> Um Anel R é um conjunto cujos objetos podem ser adicionados e multiplicados, (i. e. são dadas correspondências $(x, y) \mapsto x + y$ e $(x, y) \mapsto x.y$ de pares de elementos de R, em R), e que satisfazem às seguintes condições:
> AN 1. *Sob a adição, R é um grupo aditivo (abeliano).*
> AN 2. *Para todos* $x, y, z \in R$, *temos* $x(y+z) = xy + xz$ e $(y+z)x = yx + zx$.
> AN 3. *Para todos* $x, y, z \in R$, *temos* $(xy)z = x(yz)$.
> AN 4. *Existe um elemento* $e \in R$, *tal que* $ex = xe = x$ *para todo* $x \in R$.
> (p. 40).

Ao estudarmos esse modo de apresentação, percebemos a possibilidade de certa ambiguidade, pois ao se definir Anel, tomou-se um conjunto não vazio, uma correspondência de pares de elementos de *R* em *R*, a condição de ser abeliano sob a adição e três propriedades operacionais válidas nesse conjunto. Essa apresentação pode induzir a questionamentos do tipo: O Anel é o próprio conjunto?

De acordo com Jesus *et al.* (2015), um estudante pode, a partir dessa definição, entender o conjunto vazio como sendo um Anel, no qual o conjunto goza de todas as propriedades necessárias por vacuidade, enquanto os conjuntos $2Z = \{0, \pm 2, \pm 4, ...\}$ e $M_2(R)$, por exemplo, não seriam, por não possuírem elemento neutro para a multiplicação e não gozarem da propriedade comutativa para a multiplicação, respectivamente.

Lang (1972, p. 40) apresenta ainda alguns exemplos de Anéis:

> Exemplo 1. Seja R o conjunto Z dos inteiros; R é um Anel;
> Exemplo 2. Os conjuntos dos números racionais, reais e complexos são Anéis;
> Exemplo 3. Seja R o conjunto das funções contínuas com valores reais, definidas no intervalo [0, 1]. A soma e o produto de duas funções f, g são definidas da maneira usual, ou seja, $(f+g)(t) = f(t)+g(t)$ e $fg(t) = f(t)g(t)$. Com isso, R é um Anel.

Em seguida, o autor define um Anel comutativo e um Subanel, para os quais apresenta três exemplos. A abordagem com Anéis é concluída com uma lista de exercícios.

Hernstein (1970) introduz o capítulo três, intitulado "*Teoria dos Anéis*", afirmando que Anéis são alguns dos sistemas algébricos que funcionam como as pedras fundamentais para as estruturas que compreendem a área da Matemática hoje, as quais são denominadas de Álgebra Moderna. Eles também provêm do conjunto dos inteiros, sendo cópias e generalizações dos aspectos algébricos dos inteiros ordinários. O autor define Anel como

> Um conjunto não vazio R é dito um Anel associativo se em R estão definidas duas operações, indicadas por + e ·, respectivamente, tais que para todos a, b e c em R:
> (1) $a+b$ está em R
> (2) $\mathrm{a}+\mathrm{b}=\mathrm{b}+\mathrm{a}$
> (3) $(\mathrm{a}+\mathrm{b})+\mathrm{c}=\mathrm{a}+(\mathrm{b}+\mathrm{c})$

(4) Existe um elemento 0 em R, tal que $a + 0 = a$ (para cada a em R).
(5) Existe um elemento $-a$ em R, tal que $a + (-a) = 0$
(6) $a.b$ está em R.
(7) $a.(b.c) = (a.b).c$
(8) $a.(b + c) = a.b + a.c$ e $(b + c).a = b.a + c.a$ (as duas leis distributivas) (HERNSTEIN, 1970, p. 101-102).

O autor apresenta a possibilidade de termos um Anel que não satisfaça a associatividade da multiplicação quando afirma que

> Sempre que falarmos de Anel, será entendido que queremos dizer Anel associativo. Anéis não-associativos, isto é, aqueles em que o axioma 7 não vale, podem ocorrer em Matemática e são estudados, mas não teremos oportunidade de considerá-los (HERNSTEIN, 1970, p. 102).

Segundo Jesus *et al.* (2015), um estudante pode, a partir dessa abordagem, entender que um conjunto que não satisfaça a propriedade associativa para a multiplicação também pode ser um Anel.

Outro encaminhamento pode ser identificado em Domingues e Iezzi (2003). Os autores apresentam a definição de Anel como inspiração das propriedades compartilhadas pelo sistema dos números inteiros, e o define logo após uma nota histórica a respeito do desenvolvimento do conceito.

> Um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio A e um par de operações sobre A, respectivamente uma adição $(x, y) \mapsto x + y$ e uma multiplicação $(x, y) \mapsto x.y$, é chamado Anel se:
>
> (i) $(A, +)$ é um grupo abeliano, ou seja:
>
> a) Se $a, b, c \in A,$ então $a + (b + c) = (a + b) + c$ (associatividade);
>
> b) Se $a, b \in A,$ então $a + b = b + a$ (comutativa);
>
> c) Existe um elemento $0_A \in A,$ tal que qualquer que seja $a \in A, a + 0_A = a$ (existência do elemento neutro);
>
> d) Qualquer que seja $a \in A$, existe um elemento em A, indicado genericamente por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$ (existência de opostos).
>
> (ii) A multiplicação goza da propriedade associativa, isto é:
>
> Se $a, b, c \in A$, então $a(bc) = (ab)c$
>
> (iii) A multiplicação é distributiva em relação à adição, vale dizer:
> Se $a, b, c \in A$, então $a(b + c) = ab + ac$ e $(a + b)c = ac + bc$ (p. 211).

Os autores apresentam alguns Anéis, considerados por eles como importantes, a saber:

i. Anéis numéricos

(a) Anel dos números inteiros: $(Z, +, \cdot)$;
(b) Anel dos números racionais: $(Q, +, \cdot)$;
(c) Anel dos números reais: $(R, +, \cdot)$;
(d) Anel dos números complexos: $(C, +, \cdot)$;

ii. Anel das classes de resto módulo m;
iii. Anéis de matrizes;
iv. Anéis de funções;
v. Produtos diretos.

Diversificar os tipos de conjuntos que podem ser Anéis contribui para que o estudante não se limite aos constituídos pelos usuais conjuntos numéricos.

Nas definições apresentadas tanto em Herstein (1970) como em Domingues e Iezzi (2003), percebemos também uma ambiguidade expressa na possibilidade da resposta à pergunta: O que é um Anel?

Percebemos, apesar de limitados a quatro livros-texto, que são diferentes os modos como um mesmo objeto matemático pode ser pensado e abordado. Concordamos com Jesus *et al.* (2015) quando, ao pesquisarem os significados que licenciandos em Matemática produzem para o conceito Anel, afirmam que o conhecimento que um estudante pode construir a partir do livro de Hefez (1993) pode ser diferente daquele construído pelo livro de Lang (1972). Além disso, concordamos com Kluth (2005), quando esta afirma que:

> Os autores constroem explicações compactadas e, muitas vezes, são obrigados a deixar de revelar aspectos ou supô-los conhecidos e talvez mais do que isto, supô-los entendidos, criando regiões obscuras para aqueles que não estejam familiarizados com a Matemática (p. 16).

Entendemos, então, que seja importante se atentar para isso, para que o conhecimento construído pelos estudantes vá ao encontro do esperado pelo professor, e assim sejam evitadas ou minimizadas as dificuldades dos estudantes na aprendizagem do conceito.

O estudo desses livros contribuiu para que tivéssemos um entendimento mais aprofundado do conceito de Anel, como também para percebermos que esse objeto matemático pode ser abordado de diferentes modos em livros sugeridos como fonte de estudo para estudantes de Estruturas Algébricas.

Por fim, decidimos utilizar como fonte bibliográfica nesta pesquisa o livro de Domingues e Iezzi (2003), por ser a fonte principal adotada pela professora da disciplina de Estruturas Algébricas no ano de 2014.

2. ESTRUTURAS ALGÉBRICAS NO ÂMBITO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: PESQUISAS CORRELATAS

Apresentamos aqui algumas pesquisas que serviram de referência para este trabalho e que de algum modo nos forneceram indícios do que vem sendo pesquisado a respeito de Estruturas Algébricas no âmbito da educação Matemática nos últimos 10 anos.

O levantamento bibliográfico se deu a partir de buscas em periódicos nacionais e internacionais em Educação Matemática e Ensino, de acesso livre e *online*, com *Qualis* A1, A2 e B1, apresentados no apêndice C, em anais de eventos e no banco de dissertações e teses da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), referentes ao período de 2004 a 2014.

Das publicações nacionais, pesquisamos nas seguintes revistas: BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, Boletim GEPEM, Educação Matemática em Revista, Educação Matemática Pesquisa, Perspectivas da Educação Matemática, Revemat, Zetetiké, Anais do ENEM e o banco de dissertações e teses da CAPES.

Das publicações internacionais pesquisamos nas seguintes revistas: *For the Learning of Mathematics*, Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, *International Electronic Journal of Mathematics Education* e Anais do SIPEM.

Assumimos inicialmente como disparadores de busca os termos “Anéis” e “Educação Matemática”. Sua escolha teve como objetivo ter uma ideia das pesquisas que envolviam o estudo de Anéis no âmbito da Educação Matemática. Como nenhuma pesquisa foi encontrada, realizamos a busca novamente usando os termos “Álgebra Abstrata”, “Estruturas Algébricas” e “Educação Matemática”, de modo a sermos mais abrangentes. Também passamos a considerar pesquisas que abordassem outras Estruturas Algébricas, como grupos e corpos. Essa busca resultou em algumas dissertações e teses, algumas das quais se originaram os artigos encontrados e que por isso não serão abordados.

Entre as pesquisas encontradas, três abordam a disciplina de Álgebra Abstrata de um modo geral: Franco (2011), Mondini (2009) e Kluth (2005). Sobre alguma estrutura algébrica em específico, destacamos três: Bussmann (2009), Campos (2009) e Elias (2012).

Apresentamos a seguir elementos dessas pesquisas que foram importantes para o entendimento do que já foi abordado a respeito de Estruturas Algébricas no âmbito da Educação Matemática, bem como para o desenvolvimento deste estudo.

2.1 PESQUISA DE KLUTH (2005)

Em Kluth (2005), tese de doutorado intitulada *Estruturas da Álgebra: Investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento*, a autora, ao assumir como metodologia de pesquisa a hermenêutica filosófica gadameriana, se preocupa em entender como se revela o pensar no movimento da construção do conhecimento das estruturas da Álgebra. Kluth encontra na filosofia hermenêutica de Gadamer uma possibilidade de compreender essas estruturas como uma tradição, como uma obra humana e como uma experiência hermenêutica.

As análises e reflexões desenvolvidas a partir da leitura de textos sobre a história da Matemática, de Matemática e que descrevem a produção ou construção das estruturas, como o livro publicado em 1996 por Corry, intitulado "*Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures"*, e o publicado em 1964 por Herstein, intitulado *Tópicos de Álgebra,* conduziram a autora a entender que a percepção da estrutura se dá no contato com um conjunto que reúna todos os conjuntos numéricos conhecidos em torno de características e em seu desdobramento em expressões linguísticas e demais práticas matemáticas. Além disso, a estrutura, definida ou não, é um conjunto, e as propriedades e os princípios não se dão isolados de seus conjuntos no ato da percepção, levando-a a concluir que se desejamos que a aprendizagem da Álgebra seja com sentido algébrico, é improvável que estudantes de Matemática compreendam as estruturas da Álgebra sem terem compreendido os números, pois as estruturas seriam apresentadas desvinculadas das propriedades que permitem sua percepção.

Para a autora, o pensar que se revela na construção do conhecimento das estruturas da Álgebra solicita um programa de ensino que assuma radicalmente a sua gênese em sua transmissibilidade, em seus modos de ser, em seus modos de expressão e em seus modos de organização, levando em conta os processos científicos e cognitivos que as construíram/produziram, para que o movimento de ensino e aprendizagem das estruturas possa estender-se efetivamente a outras áreas de estudo que tratam de uma formação de ser humano.

2.2 Pesquisa de Mondini (2009)

Uma pesquisa a respeito da Álgebra Abstrata na formação inicial de professores de Matemática é a dissertação de mestrado de Mondini (2009), cujo título é *Modos de conceber a Álgebra em cursos de formação de professores de Matemática.* A autora analisa como alguns professores de Álgebra dos cursos de licenciatura em Matemática compreendem e trabalham a Álgebra Abstrata, em termos de conteúdo e prática pedagógica. Para tanto, ela realiza entrevistas com professores que lecionam ou já lecionaram a disciplina de Álgebra em cursos de licenciatura em Matemática, a partir da pergunta: Qual a relevância da Álgebra para a formação de professores de Matemática?

Segundo Mondini (2009), quando os participantes falam sobre a relevância da Álgebra para a licenciatura, consideram que ela deva ser desenvolvida pensando na atuação dos estudantes como futuros professores e destacam a importância de se conhecer as Estruturas Algébricas para o ensino de determinados conteúdos matemáticos na Educação Básica.

Percebemos ainda, por meio da pesquisa, que os professores destacam de modo significativo a dificuldade que seus alunos expressam na aprendizagem da Matemática formal, principalmente nos tópicos referentes às Estruturas Algébricas, e atribuem essa dificuldade ao fato de esses estudantes não verem aplicabilidade desse conhecimento em seu futuro trabalho como profissional da Educação Básica. Além disso, os professores relatam que os estudantes têm grande dificuldade em trabalhar com abstrações e conceitos matemáticos e consideram este como um dos motivos que faz com que os estudantes rejeitem a Álgebra.

2.3 Pesquisa de Bussmann (2009)

Em Bussmann (2009), dissertação de mestrado intitulada *Conhecimentos mobilizados por estudantes do curso de Matemática sobre o conceito de grupo*, o autor investiga quais conhecimentos sobre o conceito de grupo são mobilizados na resolução de um conjunto de problemas por estudantes que já cursaram disciplinas de conteúdos algébricos. Para a coleta de dados, o autor aplicou um conjunto de problemas envolvendo o conteúdo grupos, empregando para análise o trabalho de Sfard (1991), utilizando noções abstratas de conceitos matemáticos que podem ser concebidos como estruturais (objetos) e operacionais (processo), bem como fases (interiorização, condensação ou reificação).

O autor concluiu, por meio do modo como os estudantes resolveram os problemas propostos, que a maioria não apresentou dificuldades em questões que possuíam um caráter operacional, as quais desenvolviam, por exemplo, o conceito de grupo a partir da busca de soluções para equações algébricas, enquanto não concebiam questões estruturais, no caso, questões que necessitavam apenas da definição, o que demonstra estarem em um estágio bastante avançado do ponto de vista operacional, mas não do estrutural.

2.4 Pesquisa de Campos (2009)

A tese de doutorado de Campos (2009), intitulada *A noção de congruência algébrica no curso de Matemática: uma análise das respostas dos estudantes*, apresenta uma investigação que teve como objetivo identificar e analisar as dificuldades apresentadas por estudantes de um curso de Matemática, ao responderem questões sobre congruência algébrica no contexto da Teoria de Números e da Teoria de Anéis. Para tanto, a autora se propõe a aplicar questionários com estudantes matriculados na disciplina de Álgebra A ou Teoria de Anéis, bem como realizar entrevistas com estudantes matriculados na disciplina Teoria de Grupos.

A autora identifica cinco tipos de dificuldades, entre elas: reconhecer a partição induzida pela relação de congruência módulo m sobre Z, entender a natureza dos elementos do Anel quociente Z_m, construir e entender o Anel quociente, identificar dois Anéis isomorfos e trabalhar com o representante da classe.

Além disso, Mondini analisa algumas razões, consideradas por ela, como fonte dessas dificuldades, entre elas, a defasagem em noções preliminares, dificuldades com o próprio conceito, o tratamento didático dado em sala de aula e os aspectos cognitivos.

2.5 Pesquisa de Franco (2011)

A dissertação de Franco (2011), intitulada *Os diversos conflitos observados em alunos de licenciatura num curso de Álgebra: Identificação e análise,* apresenta uma investigação a respeito dos conflitos de aprendizagem que emergem quando estudantes de licenciatura em Matemática estão diante de um primeiro curso de Álgebra Abstrata, à luz das interações entre definição formal e imagens conceituais. Para tanto, o autor acompanha doze estudantes ao longo de um semestre durante as aulas da disciplina Álgebra I, cuja ementa contemplava os conceitos de Anéis, ideais, corpos e polinômios.

O pesquisador constata que a imagem conceitual dos estudantes a respeito do que é a estrutura matemática Anel foi formada a partir do exemplo numérico do conjunto Z, ou seja, o conhecimento da definição formal de Anel, no simbolismo de seus axiomas, não garantiu, por si só, a compreensão desse conceito por parte dos estudantes. Assim, o autor considera que $(Z, +, \cdot)$ permitiu à turma pesquisada a constituição de uma imagem e uma definição conceitual de Anel, pois sempre que solicitados, recorriam a esse exemplo e o expressavam durante as aulas. Dessa maneira, a partir do momento em que a imagem conceitual de Anel se formou, as propriedades da definição formal pareceram permanecer inativas, ou até mesmo serem esquecidas.

Para esse autor, os critérios de caracterização de Subanel, a partir das condições de ser fechado para a diferença e para o produto, levaram os estudantes a uma tendência de abandonar as demais propriedades de Anel, como se o Subanel não fosse também um Anel; e quando os estudantes citavam exemplos de Subanel, pareciam resistir em vê-los como Anéis

2.6 Pesquisa de Elias (2012)

A pesquisa de Elias (2012), intitulada *Dificuldades de estudantes de licenciatura em Matemática na compreensão de conceitos de grupos e/ou isomorfismo de grupos,* tem por objetivo identificar e interpretar as dificuldades apresentadas por estudantes de Matemática quanto aos conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos. Para tanto, o autor se apoia na teoria APOS, de Ed

Dubinsky e colaboradores, no que diz respeito à concepção[11] (ação, processo, objeto) e na teoria da reificação de Anna Sfard.

O autor identifica dezesseis dificuldades, as quais evidenciam, entre dificuldades com conceitos prévios, como lidar com conjuntos diversos, e que alguns ainda permanecem com um pensamento matemático elementar, no sentido de Tall (1995, 2002), mostrando que ainda não se desprenderam de um padrão de imitar soluções, com o qual estavam acostumados.

Tem-se ainda, à luz da Teoria APOS, que as concepções (ação, processo, objeto) dos estudantes mostram que a maioria ainda apresenta uma visão elementar da estrutura de grupo e de isomorfismo de grupo, ou seja, não entende esses conceitos como objetos definidos, com características próprias e com propriedades construídas a partir dessa definição.

De acordo com Elias (2012), essa teoria busca entender como ocorre a construção de conceitos matemáticos na mente de um indivíduo, o que nos inspirou a adotá-la como referencial teórico.

2.7 SÍNTESE DOS TRABALHOS PESQUISADOS

Segue abaixo um quadro-síntese das dissertações e teses encontradas por nós, desenvolvidas no período de 2004 a 2010, e que abordam o ensino e a aprendizagem da Álgebra Abstrata no âmbito da Educação Matemática.

Quadro 1: Código (cód.) de referência dos trabalhos pesquisados

Cód.	Autor	Título	Ano de publicação
T1	Verilda Speridião Kluth	Estruturas da Álgebra: Investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento	2005
T2	Fabiane Mondini	Modos de conceber a Álgebra em cursos de formação de professores de Matemática	2009
T3	Christian James de Castro Bussmann	Conhecimentos mobilizados por estudantes do curso de Matemática sobre o conceito de grupo	2009

[11] Ao contrário de Elias (2012) consideramos a concepção esquema neste trabalho.

Cód.	Autor	Título	Ano de publicação
T4	Elisangela de Campos	A noção de congruência algébrica no curso de Matemática: uma análise das respostas dos estudantes	2009
T5	Hernando José Rocha Franco	Os diversos conflitos observados em alunos de licenciatura num curso de Álgebra: Identificação e análise.	2011
T6	Henrique Rizek Elias	Dificuldades de estudantes de licenciatura em Matemática na compreensão de conceitos de grupos e/ou isomorfismo de grupos	2012

Fonte: Do autor

Quadro 1 – Síntese dos trabalhos pesquisados

Cód.	Objetivo	Algumas Considerações
T1	Estudar como se revela o pensar no movimento da construção do conhecimento o das estruturas da Álgebra.	O pensar revelado exposto nesta tese sobre as estruturas da Álgebra é um pensar que para a autora mostra a presença de objetos da modulação Matemática que podem ser unificados por invariantes estruturais, ora como um individual matemático, ora como membro de um conjunto matemático e que se doam em sua última objetivação como um sistema de asserções que revelam regras essenciais. A autora destaca a importância de um programa de ensino das estruturas da Álgebra que assuma radicalmente a sua gênese em sua transmissibilidade, em seus modos de ser e ir sendo, em seus modos de expressão, em seus modos de organização, levando em conta os processos científicos e cognitivos que as construíram/produziram explicitados, como camadas de objetivação, para que o movimento de ensino e aprendizagem das estruturas da Álgebra possa estender-se efetivamente a outras regiões de inquérito que tratam de uma formação de ser humano que contempla a consciência de mundo, que gera querer como finalidade, que acrescentem valores humanitários à nossa existência.
T2	Estudar as concepções que professores de Álgebra de cursos de licenciatura em Matemática apresentam sobre o ensino e a aprendizagem dessa disciplina em tais cursos.	Nesta pesquisa destacou-se a ênfase que os professores dão à formação matemática do professor. Em suas falas, os professores destacam a relevância da formação pedagógica do professor de Matemática, no sentido de conhecer várias metodologias de ensino, preparar aulas diversificadas, trabalhar com a realidade do aluno, mas consideram a formação matemática como central, ou seja, o diferencial para ser um “bom profissional”.

Cód.	Objetivo	Algumas Considerações
T3	Investigar quais conhecimentos sobre o conceito de grupo são mobilizados por estudantes que já cursaram disciplinas de conteúdos algébricos.	O autor concluiu que os conhecimentos mobilizados pelos estudantes foram, em sua grande maioria, de caráter operacional, e a concepção estrutural apareceu timidamente em algumas questões. Para ele, as fases ocorreram em todas as questões, contudo houve destaque para a interiorização e a condensação.
T4	Identificar e analisar as dificuldades apresentadas por estudantes de um curso de Matemática, ao responderem questões sobre congruência algébrica no contexto da Teoria dos Números e da Teoria de Anéis.	Das análises dos questionários e com apoio dos dados das entrevistas, foi possível à autora identificar dificuldades no reconhecimento da partição induzida pela relação de congruência módulo m sobre Z, no entendimento da natureza dos elementos do Anel quociente Z_m, em construir e entender o Anel quociente, em identificar dois Anéis isomorfos e em trabalhar com o representante da classe. Para a autora, entre as possíveis razões para que estas dificuldades ocorram, pode-se destacar a falta de conhecimentos básicos de teoria de conjuntos envolvidos na noção de congruência, bem como aspectos didáticos e cognitivos.

Cód.	Objetivo	Algumas Considerações
T5	Investigar os diversos conflitos de aprendizagem apresentados por licenciandos em Matemática diante de um primeiro curso de Álgebra Abstrata.	Em diversos momentos, o autor percebeu que a apresentação axiomática das Estruturas Algébricas não se mostrou eficiente na formação de imagens que levassem os alunos à compreensão da definição formal. No que se refere aos níveis de sofisticação do pensamento matemático indicados por Tall, observou que todos os participantes superaram os conflitos iniciais e conseguiram trabalhar com as propriedades dos objetos algébricos no nível de procedimento. Para ele, os conflitos investigados evidenciaram que expressar a Matemática por meio de uma linguagem rigorosa e concisa diminui as chances de interpretações subjetivas, por outro, apresenta-se como um forte complicador para alunos iniciantes.
T6	Identificar e interpretar as dificuldades apresentadas por estudantes quanto aos conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos.	Por meio das análises, foi possível ao autor identificar vinte e nove dificuldades manifestadas, as quais evidenciam, entre outras coisas, que estudantes participantes apresentam dificuldades com conceitos prévios, como dificuldade em lidar com conjuntos diversos, não somente os conjuntos numéricos, ou dificuldades com relação à definição de função, e que alguns ainda permanecem com um pensamento matemático elementar, no sentido de Tall (1995, 2002), mostrando que ainda não se desprenderam de um padrão de imitar soluções com as quais estavam acostumados.

Fonte: do autor

Assim, além de encontrarmos pesquisas que contribuíram para a realização da nossa, fazendo-nos refletir a respeito da educação algébrica em cursos de Matemática, percebemos que ainda são poucas as pesquisas desenvolvidas no âmbito da Educação Matemática que abordam o ensino e a aprendizagem da Álgebra Abstrata, especificamente a estrutura algébrica Anel.

A seguir, apresentamos o detalhamento do referencial teórico adotado nesta pesquisa.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentamos o referencial teórico adotado, a Teoria APOS, que permitiu interpretarmos os registros escritos dos participantes desta pesquisa, investigando e discutindo que concepções (ação, processo, objeto, esquema) eles construíram para o conceito de Anel. Em seguida, apresentamos a nossa decomposição genética do conceito de Anel.

3.1 A TEORIA APOS

A Teoria APOS (*action, process, object, schema*) surgiu principalmente da tentativa de Dubinsky e colaboradores de compreender o modo como os estudantes constroem os conceitos matemáticos, e assim entender a origem de muitas dificuldades de aprendizagem.

A teoria é entendida por Dubinsky e McDonald (2001, p.1) como uma teoria construtivista de aprendizagem da Matemática, é uma perspectiva teórica, que segundo os autores, pode ter poder explicatório, ser aplicável a uma gama de fenômenos, servir como uma ferramenta para analisar dados e fornecer uma linguagem de comunicação de ideias a respeito da aprendizagem que vai além de descrições superficiais. Os autores ainda argumentam que essa teoria tem sido bastante útil na tentativa de entender a aprendizagem de conceitos da Álgebra abstrata.

Segundo Dubinsky e McDonald (2001, p. 1), a teoria inicia-se com a hipótese de que o conhecimento matemático consiste na tendência de um indivíduo em lidar com situações-problema da Matemática, por meio da construção mental de ações, processos e objetos, e organizá-los em esquemas que façam sentido e permitam resolver os problemas. O termo APOS é referência a essas construções mentais, que em inglês indicam *action, process, object* e *schema*, mas que ao longo da pesquisa, indicaremos na nossa língua materna como ação, processo, objeto e esquema.

Segundo Asiala *et al*. (1996), foi no seio do pensamento matemático avançado[12] que se desenvolveu a Teoria APOS, pois ela constituiu-se com os objetivos de Dubinsky em entender o mecanismo de abstração reflexiva, introduzido por Piaget para descrever o desenvolvimento do pensamento lógico em crianças e elevar ao nível da Matemática universitária, onde são estudados conceitos matemáticos mais complexos e avançados.

De acordo com Dubinsky (2002), a abstração reflexiva é um processo no qual os conhecimentos são construídos por meio de interações do sujeito conhecedor com a sua estrutura cognitiva adaptada, consciente e progressivamente reconstruída como resultado das interações continuadas com as últimas estruturas cognitivas adaptadas.

A respeito da abstração reflexiva, Dubinsky (2002) destaca duas importantes observações feitas por Piaget. A primeira é que a abstração reflexiva não tem um início preciso, mas está presente em idades iniciais na coordenação das estruturas sensório-motoras, e a segunda é que essa abstração continua até uma Matemática de nível mais elevado.

A seguir, apresenta-se uma descrição de quatro tipos de abstrações reflexivas (interiorização, encapsulação, generalização e coordenação), selecionados pelo autor a partir das abstrações analisadas por Piaget, por considerá-los importantes para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado (PMA), e de uma quinta, reversibilidade, que Piaget não considera como uma abstração reflexiva, mas que Dubinsky acrescenta ao grupo.

A Interiorização, segundo Dubinsky (2002), ocorre quando o sujeito é capaz de construir processos internos, como forma de dar sentido às percepções sobre os fenômenos observados, usando para isso símbolos, linguagens e imagens mentais.

Um exemplo de interiorização, apresentado por Prado (2010), ocorre na comutatividade da adição, na qual, inicialmente, o indivíduo precisa realizar cálculos para perceber que dois números inteiros quaisquer, quando adicionados, independentemente da ordem, resultam no mesmo valor, e em seguida, interioriza o fato de que para quaisquer a e b pertencentes a um conjunto, temos que $a + b = b + + a$, ou seja, a propriedade comutativa da adição.

---

[12] Segundo Harel, Selden e Selden (2006), o termo Pensamento Matemático Avançado (P.M.A.) foi proposto em oposição ao “pensamento matemático elementar”. Não há um consenso quanto à definição do P.M.A., mas para Dubinsky (2002), esse tipo de pensamento ocorre quando se encapsula processos em objetos quando esses objetos não têm representação do “mundo real”.

Outro exemplo possível de interiorização ocorre quando inicialmente são dadas uma lei de composição interna específica em um conjunto específico, como a operação de adição sobre N, e uma propriedade específica, como a associativa, a um indivíduo, que verifica inicialmente se a operação goza ou não dessa propriedade, e ao analisar os resultados, consegue verificar a propriedade com qualquer operação em um conjunto dado.

A encapsulação**,** de acordo com Dubinsky (2002), é a conversão de um processo (dinâmico) em um objeto (estático), na qual o sujeito deve estar consciente desse processo, como uma totalidade.

Para Prado (2010), um exemplo de encapsulação ocorre quando o indivíduo reconhece o esboço do gráfico de uma função polinomial de primeiro grau e é capaz de descrevê-la em linguagem algébrica da mesma maneira, e ao se deparar com a linguagem algébrica desse objeto, é capaz de esboçar seu gráfico.

Já a generalização ocorre, para Dubinsky (2002), quando um sujeito aplica um esquema existente para uma ou para uma ampla coleção de fenômenos.

Um exemplo de generalização ocorre quando um indivíduo que conhece, *a priori*, as propriedades relacionadas a uma operação binária qualquer, utilizadas para verificar se um dado conjunto é um grupo, toma o objeto e percebe que essa relação goza das propriedades, para assim, dar lugar ao novo objeto: um sistema matemático constituído de um conjunto e uma operação binária sobre este conjunto, que goze de propriedades.

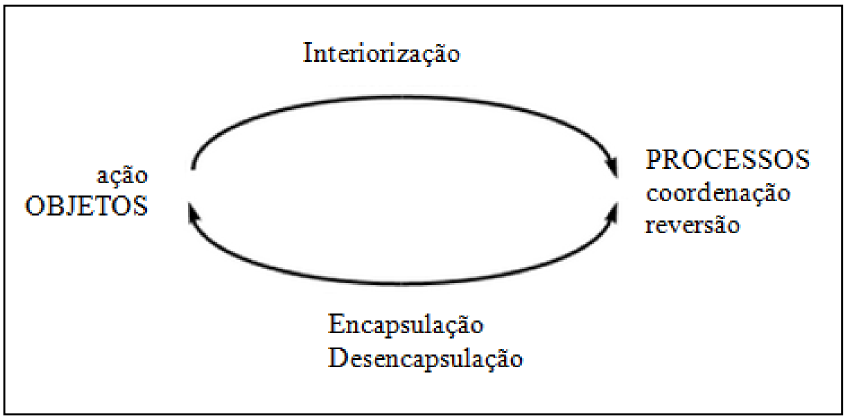
A coordenação é a composição ou a reorganização de dois ou mais processos para construir um novo (DUBINSKY, 2002). Segundo Prado (2010), um exemplo de coordenação ocorre quando um sujeito demonstra ter construído o objeto conjunto com uma operação binária que satisfaz certos axiomas e o objeto corpo.

A reversibilidade, incluída por Dubinsky na abstração reflexiva, é definida como um novo processo que consiste em inverter o processo original. Segundo Prado (2010), um exemplo de reversibilidade ocorre quando um indivíduo, ao ser apresentado a um conjunto pertencente a um espaço vetorial, verifica se esse conjunto é uma base para esse espaço, e depois, revertendo esse processo, um espaço vetorial é apresentado, permitindo que o indivíduo obtenha um conjunto que seja base desse espaço.

Dubinsky (2002) supõe que a abstração reflexiva seja como a construção de objetos mentais e ações mentais sobre estes objetos, e a partir dos tipos de construção citados (interiorização, encapsulação, generalização, coordenação e reversibilidade), o autor reconsiderou cada um deles em contextos do PMA, descrevendo como novos objetos, processos e esquemas que podem ser construídos a partir dos já existentes.

Em Asiala *et al*. (1996), a construção mental de uma noção matemática é descrita ao considerar que a compreensão começa na manipulação de objetos físicos ou mentais em forma de ações. Estas são, então, interiorizadas em processos que são encapsulados em objetos matemáticos. Os objetos podem ser desencapsulados nos processos com base nos quais foram formados e, finalmente, as ações, os processos e os objetos podem ser organizados ou reorganizados em esquemas. Segue abaixo uma descrição mais detalhada de cada uma dessas construções mentais.

Figura 1 – Construção do pensamento matemático



Fonte: Adaptado de Dubinsky (2003)

Apresenta-se a seguir uma descrição dos componentes essenciais da teoria APOS: ação, processo, objeto e esquema.

Uma *ação* é uma transformação de objetos percebidos pelo indivíduo como essencialmente externos e que exige, de forma explícita ou da memória, instruções passo-a-passo sobre como realizar a operação.

Segundo Prado (2010), um exemplo de ação é a do estudante que, para esboçar o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau, busca mais de dois pares ordenados que satisfaçam a lei descrita pela função.

Um indivíduo pode executar uma ação, mas não está necessariamente limitado a operar com ações. Ao limitar sua compreensão de uma dada noção à realização de ações, diz-se que ele possui uma concepção ação para tal noção.

Quando uma ação é repetida e o indivíduo reflete sobre isso, ele pode fazer uma construção mental interna chamada de *processo*. O indivíduo pode pensar em como executar o mesmo tipo de ação, mas não está mais com a necessidade de estímulos externos. Um indivíduo pode pensar em realizar um processo sem realmente fazê-lo, e, portanto, pode pensar em inverter isso e compô-lo com outros processos.

Um exemplo, considerado por Prado (2010) como processo, é o do estudante que, para esboçar o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau, obtém dois pares de números que lhe possibilitam traçar a representação gráfica da reta.

Construído um processo, o indivíduo pode trabalhar com ele para construir novos processos, seja por reversibilidade ou coordenação com outros processos. O ato de transformar processos de uma forma consciente é, segundo Dubinsky (2002, p. 101), "uma construção necessária para a compreensão da Matemática, mas que estudantes podem sentir dificuldades".

De acordo com Dubinsky *et al*. (1994, p. 5), quando se torna possível a um indivíduo transformar um processo por meio de alguma ação, então podemos dizer que o processo foi encapsulado para tornar-se um objeto.

Segundo Asila *et al*. (1996), um indivíduo compreende classes laterais[13] como objetos quando pode pensar sobre o número delas em um subgrupo particular, pode imaginar a comparação de duas por igualdade ou por suas cardinalidades, ou pode aplicar uma operação binária para o grupo de todas as classes de um subgrupo.

Um esquema para um determinado conceito matemático é uma coleção de ações, processos, objetos e outros esquemas de um indíviduo, os quais são ligados por alguns princípios gerais para formar um quadro em sua mente, que pode ser exercido sobre uma situação-problema envolvendo esse conceito.

[13] Sejam G um grupo, e $H,$ um subgrupo. Seja a um elemento de G. O conjunto de todos os elementos ax, com $x \in H$, é chamado uma classe lateral de H em G, sendo denotado por aH (LANG, 1972, p. 24).

De acordo com Dubinsky e McDonald (2001), esse quadro deve ser coerente no sentido de fornecer, explícita ou implicitamente, os meios de determinar quais fenômenos estão no escopo do esquema e quais não estão. Isso porque essa teoria considera que todas as entidades matemáticas podem ser representadas em termos de ações, processos, objetos e esquemas.

Os componentes da Teoria APOS, ação, processo, objeto e esquema, foram descritos neste trabalho seguindo uma sequência hierárquica. Para Dubinsky e McDonald (2001), esta é uma maneira útil de falar sobre essas construções e, em certo sentido, cada concepção na lista pode ser construída antes do passo seguinte. Porém, de acordo com esses autores, quando um indivíduo está desenvolvendo a sua compreensão de um conceito, as construções não são realmente feitas de uma forma tão linear. Com uma concepção ação de função, por exemplo, um indivíduo pode ser limitado a pensar em fórmulas que podem ser manipuladas ou substituídas por números e em como os cálculos podem ser feitos.

Dubinsky e McDonald (2001) ainda complementam, afirmando que pensamos na noção de função como precedente de uma concepção processo, em que uma função é pensada como uma máquina de entrada e saída. O que realmente acontece, no entanto, é que um indivíduo começará a restringir certos tipos de fórmulas, e refletindo sobre cálculos, pode começar a pensar em um processo, voltar a uma interpretação da ação, e talvez com fórmulas mais sofisticadas, desenvolver uma concepção processo e assim por diante.

Apresentamos no quadro a seguir uma síntese das concepções ação, processo, objeto e esquema, de acordo com a Teoria APOS. Para tanto, exemplificamos por meio do conceito de operação binária segundo Brown *et al*. (2000).

Quadro 2 – Síntese das concepções ação, processo, objeto e esquema.

	Definição	**Exemplo: Operação binária**
Ação	Uma *ação* é uma transformação de objetos percebidos pelo indivíduo como essencialmente externos e que exige, de forma explícita ou da memória, instruções passo-a-passo sobre como realizar a operação.	O estudante pode aplicar uma operação binária somente a partir de uma fórmula explícita, como em aritmética modular.

	Definição	Exemplo: Operação binária
Processo	Quando uma ação é repetida e o indivíduo reflete sobre isso, ele pode fazer uma construção mental interna chamada de *processo.*	O estudante pode entender um processo em que, dada uma operação binária genérica aplicada a dois objetos, a partir de alguma manipulação, obtém-se um novo objeto.
Objeto	Um objeto é construído a partir de um processo em que o indivíduo se torna consciente do processo como um todo e percebe que transformações podem agir sobre ele.	O estudante é capaz de distinguir diferentes operações binárias. O estudante é capaz de desencapsular uma operação binária, a fim de trabalhar com ela como um processo.
Esquema	Um *esquema* para um determinado conceito matemático é uma coleção de ações, processos, objetos e outros esquemas de um indíviduo, os quais são ligados por alguns princípios gerais para formar um quadro em sua mente. Esse quadro pode ser exercido sobre uma situação-problema envolvendo este conceito.	O estudante tem um esquema para operação binária quando esta pode ser invocada e usada em situações-problema da Matemática.

Fonte: Do autor

Assim, para análise das concepções manifestadas nos registros escritos dos participantes de nossa pesquisa em relação às tarefas referentes ao conceito de Anel, utilizaremos a Teoria APOS como referencial teórico e metodológico.

De acordo com Asiala *et al.* (1996), a Teoria APOS pode ser utilizada como uma metodologia de pesquisa. Deste modo, a teoria compreende três etapas: *análise teórica*; *planejamento e implementação;* e *observação e avaliação*.

A *análise teórica* ou, como denomina o grupo *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC)[14], decomposição genética, é a etapa que, de acordo com Asiala *et al*. (1996, p. 7), "consiste em

[14] Comunidade de Pesquisa em Educação Matemática Universitária. A Teoria APOS constituiu-se da necessidade encontrada por pesquisadores que, atualmente, compõem esse grupo de pesquisa.

propor uma descrição específica das possíveis construções mentais utilizadas por um aprendiz, a fim de desenvolver sua construção sobre um conceito".

De acordo com Prado (2010, p. 32), o *planejamento e implementação* "está diretamente relacionado à análise teórica, pois a partir dela o investigador desenvolve interações que visam a fazer com que o aluno efetive tais construções". A observação e avaliação são as etapas que, de acordo com Prado (2010), estão relacionadas com a coleta e análise de dados.

Segundo Prado (2010), a análise teórica deve servir como referência no momento de se observar e avaliar os dados, assim como as observações e as avaliações servem para um possível refinamento da análise teórica.

Para esta pesquisa, não realizaremos a etapa "planejamento e implementação", pois não temos como objetivo contribuir para que os estudantes participantes desta pesquisa construam um conceito, mas sim, identificar e discutir suas concepções com relação ao conceito de Anel.

Satisfazendo então a etapa referente à análise teórica, apresentamos na próxima seção a nossa decomposição genética do conceito de Anel, que servirá de base para identificarmos as concepções dos estudantes participantes desta pesquisa ao responderem tarefas referentes ao conceito abordado.

3.2 DECOMPOSIÇÃO GENÉTICA DO CONCEITO DE ANEL

Para realizarmos a nossa decomposição genética do conceito de Anel, estudamos as pesquisas de Dubinsky *et al.* (1994) e Elias (2012). Em ambas, encontramos uma decomposição genética do conceito de grupo. Apesar de abordarem vários tópicos da Álgebra Abstrata, iremos focar somente na decomposição genética de grupo.

Assim, a partir das decomposições feitas por eles, efetuamos um refinamento para obtermos a nossa decomposição genética do conceito de Anel, por considerarmos que os objetos matemáticos são de mesma natureza, estruturas Algébricas que consistem de três esquemas: conjunto, operação(ões) binária(s) e axiomas.

3.2.1 Alguns elementos importantes na pesquisa de Dubinsky *et al.*(1994)

A pesquisa de Dubinsky *et al.* (1994), intitulada *Aprendizagem fundamental de conceitos da teoria de grupos,* tem como objetivo promover uma discussão a respeito da natureza do conhecimento sobre Álgebra Abstrata, em particular a Teoria de Grupo, e do modo como um indivíduo pode desenvolver uma compreensão de certos tópicos nesse domínio, para então verificar a possibilidade de se mapear uma sequência de desenvolvimento ou decomposição genética desses vários tópicos.

Utilizando a teoria APOS, os autores deram ênfase em interpretar os esforços de um grupo de professores de Matemática do Ensino Secundário, que estava tentando aprender os conceitos de grupo, subgrupo, classe, normalidade e grupo quociente em um curso de Álgebra Abstrata.

Entre as questões norteadoras desse estudo estão: “Como pode um indivíduo aprender certos tópicos na Teoria Elementar de Grupo? E que relação isto tem com a compreensão matemática e a abstração em geral?”.

Para os autores, o conceito de grupo exige dos estudantes a coordenação entre três esquemas já existentes: conjunto, operação binária (função) e axioma, e na primeira fase da aprendizagem do conceito de grupo, um estudante pode construir sua própria ideia desse conceito, considerando objetos que lhe são familiares, como os elementos que o compõem, podendo assim, encapsular esse processo em um objeto que, para ele, representa o grupo em questão. Porém, se permanecer com esta compreensão, grupo como elementos que o compõe, o estudante pode não distinguir um grupo por nada mais que o número de elementos nele.

Para Dubinsky *et al.* (1994), outro entendimento que pode representar uma concepção errada de grupo ocorre quando os estudantes o consideram apenas como um conjunto, ignorando a operação que também está presente. Os autores complementam, afirmando que, uma vez que o estudante percebe sua concepção equivocada de grupo somente como um conjunto, ele começa a incluir a operação em suas determinações. Neste caso, o estudante pode considerar o conjunto como o aspecto predominante do grupo e a operação como secundária. E mais: as operações que os estudantes consideram e com as quais lidam melhor são aquelas mais comuns para eles, tais como adição e multiplicação em conjuntos numéricos.

Tendo construído o objeto grupo como um conjunto e uma operação específica, o estudante pode e deve ser capaz de desencapsular o objeto construído, de modo a incluir outras operações que poderiam ser aplicadas ao conjunto.

Em Dubinsky *et al.* (1994), temos que um estudante pode perceber, a partir de experiências, que um dado conjunto tem um número de propriedades, uma das quais é a que uma operação binária que satisfaça certas condições pode ser construída e associada ao conjunto.

Ao discutir também a construção do conceito de subgrupo, os autores afirmam que, assim como ocorre com o conceito de grupo, o conceito de subgrupo também pode ser coordenado com uma operação. Assim, para o estudante, um subgrupo é um subconjunto para o qual alguma operação foi incluída, fazendo dele um grupo. Além disso, à medida em que percebe o papel da operação, vai compreendendo que a operação do subgrupo deve ser a mesma que do grupo maior.

Para os autores, o desenvolvimento do conceito de subgrupo pelo estudante pode ser coordenado com o desenvolvimento do conceito de um grupo.

> Nós podemos ver alguma indicação da compreensão de estudantes para grupo e subgrupo quando se pede para eles determinarem se um grupo específico é um subgrupo de outro grupo. Enquanto tal decisão pode uma vez ter sido tomada considerando somente os elementos, quando um estudante compreende o papel das operações, uma abordagem diferente é usada. É possível que o estudante considerasse um subconjunto como um subgrupo se ele fosse fechado sob a operação induzida (DUBINSKY *et al.*, 1994. p.12, tradução nossa[15]).

Deste modo, é importante que o estudante compreenda que para que um dado grupo $(A,+)$ e L, um subconjunto não vazio de A, $(L,+)$ deverá ter todas as propriedades de grupo relativas à operação $+$ preservadas para que seja um subgrupo de $(A,+)$.

Assim, a partir da leitura que fizemos da pesquisa de Dubinsky *et al.* (1994), brevemente descrita, apresentamos no Quadro 3 nosso entendimento do

---

[15] We can see some indication of students' understanding of group and subgroup when they are asked to determine whether a specific group is a subgroup of another group. While such a decision may once have been made considering the elements only, when a student understands the role of operations, a different approach is used. It is possible that the student would consider a subset to be a subgroup if it is closed under the induced operation.

modo como um estudante pode construir o conceito de Anel, ou ainda, conceitos prévios que um estudante deve conceber como objeto, classificados em O1, O2 e O3, a fim de construir o conceito em questão e ações, classificadas em A1, A2 e A3, que acreditamos serem necessárias nessa construção.

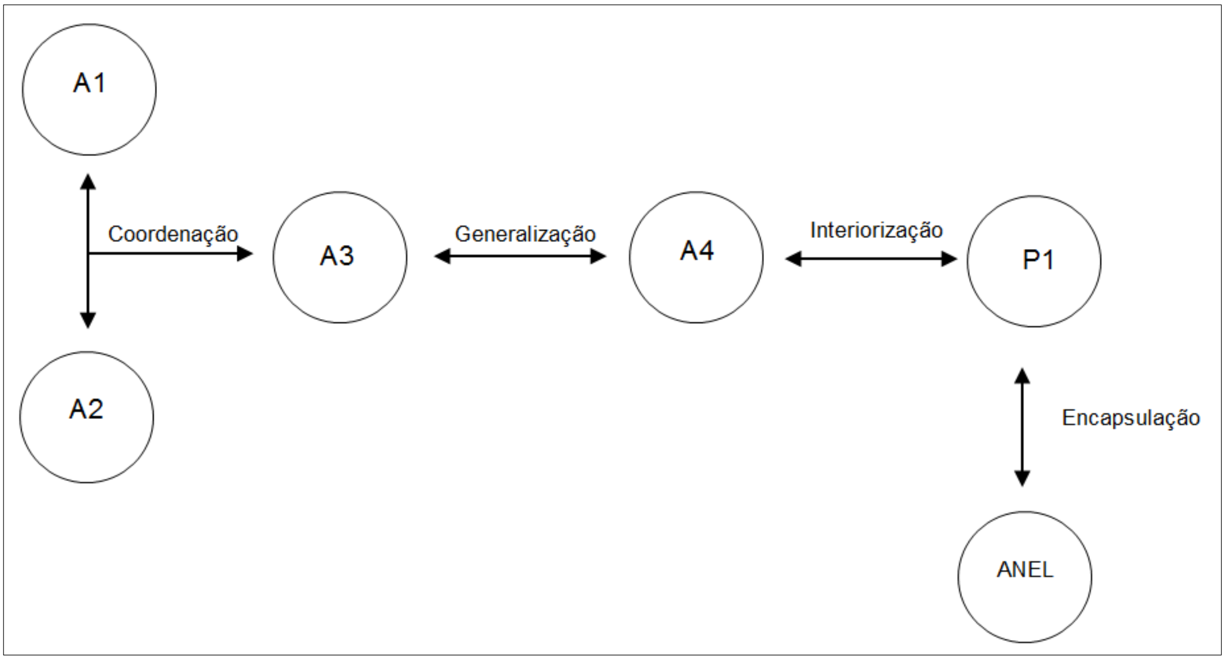
Quadro 3 – Concepções-objeto que um estudante deve ter para construir o conceito de Anel e as primeiras ações

Concepção objeto	Ações
Conjunto (O1)	A1: Ser capaz de reconhecer e lidar com os elementos de um dado conjunto.
Operações binárias (O2)	A2: Ser capaz de lidar com uma operação binária sobre um dado conjunto.
Propriedades das operações (O3)	A3: Ser capaz de verificar para uma operação binária em um dado conjunto que duas operações (não necessariamente usuais) gozam da associatividade, da comutatividade, da existência do elemento neutro, da existência de opostos e que uma operação é distributiva em relação à outra.

Fonte: Do autor

Entendemos que a construção do conceito de Anel se dá inicialmente pela coordenação entre as ações A1 e A2, permitindo a construção da ação A3, e por meio de um processo de generalização dessa ação construímos a ação A4, que consiste em repetir a ação A3 com diversos conjuntos e operações, que pode ser interiorizada em um processo, que chamaremos de P1, o qual consiste em estabelecer se um sistema constituído de um conjunto munido de duas operações binárias satisfaz determinadas propriedades. A construção descrita está representada na Figura 2.

Figura 2 – Construção do conceito de Anel

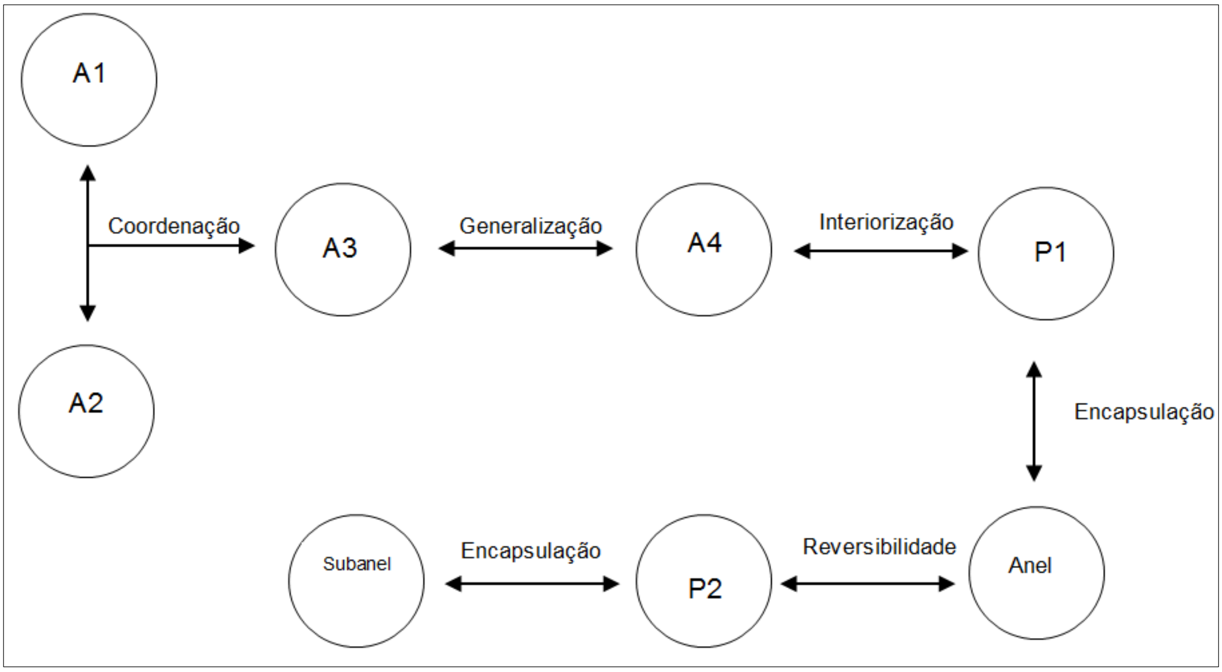


Fonte: Do autor

Posteriormente, o objeto Anel permite ao estudante abstrair reflexivamente e construir o processo, que chamaremos de P2, em que dado um Anel $(A,\ *, \#)$, é possível reconhecer que subconjuntos de A munidos das operações * e # são Subanéis do Anel maior. Assim, o P2 poderá ser encapsulado no objeto matemático Anel/Subanel. Deste modo, podemos estabelecer uma relação de reversibilidade com o conceito de Anel, na qual o estudante deve ser capaz de, ao ser apresentado a um Anel $(A,*, \#)$, determinar um Subanel $(B,*, \#)$, e dados dois Anéis $(A,*, \#)$ e $(B,*, \#)$, verificar se $(A,*, \#)$ é um Subanel de $(B,*, \#)$ ou vice-versa.

Deste modo, podemos expandir o esquema anterior para o que segue:

Figura 3 – Construção do conceito de Subanel



Fonte: Do autor

Após definirmos como pode ocorrer a construção do conceito de Anel, propusemo-nos a analisar a pesquisa de Elias (2012), com o objetivo de compreendermos e delimitarmos o que pode indicar que um estudante possui a concepção ação, processo, objeto ou esquema. Segue abaixo o resultado desse estudo.

3.2.2 Alguns elementos importantes na pesquisa de Elias (2012)

A pesquisa de Elias (2012) já foi comentada no capítulo 2, referente a pesquisas correlatas. Assim, dedicamo-nos aqui a mencionar de modo mais específico como o autor entende que um estudante está em uma concepção ação, objeto, processo ou esquema do conceito de grupo.

Apresentamos a seguir um quadro construído por nós, a partir de Elias (2012), que descreve situações que indicam para esse autor quando um estudante está em uma concepção ação, processo, objeto ou esquema, segundo a Teoria APOS, do conceito de grupo, e que consideramos ajudar em nosso entendimento de quando um indivíduo está na concepção ação, processo e objeto do conceito de Anel.

Quadro 4 – Indícios de que um estudante possui uma concepção ação, processo ou objeto do conceito de grupo, segundo Elias (2012)

Concepção	Situações indicativas
Ação	• Ter conhecimento defasado sobre as propriedades. • Apresentar dificuldades em lidar com conjuntos diversos e operações quaisquer. • Desassociar o conjunto de suas operações, entendendo que conjuntos possuem propriedades independentes da operação. • Entender que operação é algo secundário, que não interfere nas propriedades da estrutura. • Entender grupo como conjunto, independentemente da operação. • Entender grupo como uma operação. • Focar nas propriedades a serem provadas, nos algoritmos que lhes foram ensinados, sem coordenar conjuntos, operação e propriedades.
Processo	• Compreender grupo apenas para casos particulares, como apenas para conjuntos numéricos com operações usuais.
Objeto	• Compreender grupo como um conjunto com uma operação binária qualquer que goza de determinadas propriedades; • Conhecer diversos exemplos de grupos, compreender suas propriedades e saber lidar com diferentes tipos de operações de conjuntos diversos, não apenas adição e multiplicação em conjuntos numéricos.
Esquema	• Entender grupo como um esquema que contém três esquemas: conjunto, operação binária (função) e axioma, de modo que sejam ligados por alguns princípios gerais a serem aplicados em uma situação-problema envolvendo o conceito, como verificar se dois grupos dados são isomorfos.

Fonte: Do autor

A partir de um refinamento e de uma expansão dos elementos observados nessa pesquisa, apresentamos o que consideramos ser uma concepção ação, uma concepção processo, uma concepção objeto e uma concepção esquema sobre o conceito de Anel.

Consideramos que esta categorização é importante, pois permite a organização e a interpretação das informações. Segundo Dubinsky e Lewin (1986), essas categorias constituem-se em instrumentos indispensáveis para a análise de processos formativos que, segundo a epistemologia genética, ocorrem de maneira dinâmica.

Assim, um indivíduo que demonstra possuir uma concepção ação sobre um conceito matemático, tem sua compreensão limitada à realização de ações, isto é, necessita de informações precisas sobre os passos que devem ser realizados ao manipular esse conceito. Desta forma, consideramos que um indivíduo que possui uma concepção ação sobre o conceito de Anel é capaz de, por exemplo, seguir algoritmos para verificar se um dado sistema é um Anel, porém sem compreender o conjunto, ou as operações, ou as propriedades das operações, ou como eles se relacionam. O indivíduo também é capaz de reconhecer se um dado sistema é um Anel, sem justificativas matemáticas, apenas a partir de fatos que estão em sua memória.

Já a concepção processo é evidenciada quando o indivíduo passa a ter controle da transformação realizada sobre o objeto matemático, podendo descrever os passos envolvidos e invertê-los quando necessário; no entanto, ainda não o concebe como um todo. Assim, um sujeito que demonstra possuir uma concepção processo sobre o conceito de Anel é capaz de, por exemplo, verificar se um sistema particular é um Anel, compreendendo o conjunto, as operações e as propriedades das operações, e sabe relacioná-los na constituição do conceito de Anel. Porém, consideramos que esse indivíduo não consiga dar sentido a um sistema constituído por um conjunto qualquer e operações não usuais.

Temos evidência da concepção objeto quando o indivíduo considera o objeto encapsulado como um todo, sendo capaz de manipulá-lo e utilizá-lo quando necessário. Desse modo, o indivíduo que demonstra ter uma concepção objeto sobre o conceito de Anel tem construídos os objetos conjunto, operações binárias e propriedades (associativa, comutativa, elemento neutro, elemento oposto e distributividade), sabe reconhecer e verificar, quando necessário, justificando adequadamente se um sistema constituído por um conjunto e duas operações binárias quaisquer é um Anel.

Por fim, um indivíduo que demonstra possuir uma concepção esquema deve ser capaz de organizar em sua mente ações, processos, objetos e outros esquemas, de modo a relacioná-los e coloca-los em prática quando necessário na resolução de situações matemáticas que envolvam um conceito. Assim, o indivíduo que demonstra ter uma concepção esquema sobre o conceito de Anel consegue relacionar esse conceito com outros, além de perceber quando e como ele pode ser aplicado em situações matemáticas diversas.

Apresentamos no Quadro 5 situações que consideramos indicativas na identificação da concepção (ação, processo, objeto, esquema) de um indivíduo sobre o conceito de Anel.

Quadro 5 – Indícios de que um estudante possui uma concepção ação, processo, objeto ou esquema sobre o conceito de Anel.

Concepção	**Situações indicativas**
Ação	• Ter conhecimento defasado sobre as propriedades. • Apresentar dificuldades em lidar com conjuntos diversos e operações quaisquer. • Desassociar o conjunto de suas operações, entendendo que conjuntos possuem propriedades independentes da operação. • Entender que a operação é algo secundário e que não interfere nas propriedades da estrutura. • Entender Anel como conjunto, independentemente das operações. • Entender Anel como uma ou duas operações. • Focar as propriedades a serem provadas, os algoritmos que lhes foram ensinados, sem coordenar conjuntos, operações e propriedades. • Verificar propriedades com a operação incorreta, como verificar as propriedades para ser um grupo abeliano com a segunda operação. • Verificar as propriedades com apenas uma das operações, seja ela a segunda ou a primeira.
Processo	• Compreender Anel apenas para casos particulares, como apenas para conjuntos numéricos com operações usuais.
Objeto	• Compreender Anel como um conjunto com duas operações binárias quaisquer que goza de determinadas propriedades. • Conhecer diversos exemplos de Anel, compreender suas propriedades e saber lidar com diferentes tipos de operações de

	conjuntos diversos, não apenas adição e multiplicação em conjuntos numéricos.
Esquema	• O estudante tem um esquema para Anel, quando esse conceito pode ser invocado e usado em situações-problema da Matemática.

Fonte: Do autor

Feito isso, apresentamos no capítulo seguinte a descrição dos procedimentos metodológicos adotados nesta pesquisa, na qual descrevemos o contexto da pesquisa, seus participantes, o método de coleta de dados e os procedimentos para a análise dos dados.

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Apresentamos neste capítulo a abordagem metodológica utilizada, o método para a coleta de dados, bem como os procedimentos para a descrição e análise dos dados coletados.

4.1 ABORDAGEM METODOLÓGICA

Para atingir o objetivo desta pesquisa, investigar e discutir as concepções (ação, processo, objeto, esquema) por meio da Teoria APOS, manifestadas por licenciandos em Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL) ao lidarem com tarefas referentes ao conceito de Anel, escolhemos uma abordagem de natureza qualitativa.

Para tanto, a pesquisa seguirá características descritas e discutidas por Bogdan e Biklen (1994):

- Na investigação qualitativa, a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador como instrumento principal. A fonte de dados desta pesquisa foi o ambiente natural, pois os dados foram coletados por meio de um conjunto de tarefas aplicadas a licenciandos em Matemática na última aula da disciplina de Estruturas Algébricas, na própria sala em que estudam. Os dados foram coletados pelo pesquisador, constituindo-lhe como o principal instrumento de coleta de dados.
- A investigação qualitativa é descritiva. Nesta pesquisa, os dados foram descritos e analisados a partir da resolução de um conjunto de tarefas pelos participantes.
- Os investigadores tendem a analisar seus dados de forma indutiva. As concepções identificadas e discutidas nesta pesquisa surgiram das análises dos dados coletados.
- O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Entendemos que os significados que os participantes atribuem para o conceito de Anel estejam presentes nos registros escritos, permitindo assim, identificar suas concepções (ação, processo, objeto, esquema) de acordo com a Teoria APOS.

4.2 Contexto da Pesquisa

Com o intuito de atingir o objetivo que temos com esta pesquisa, investigar e discutir as concepções (ação, processo, objeto, esquema), à luz da Teoria APOS, por licenciandos em Matemática, escolhemos uma turma do curso de Matemática – Habilitação: Licenciatura da Universidade Estadual de Londrina (UEL), escolha feita pela facilidade que teríamos com a aplicação do instrumento de coleta de dados, devido ao fato de a professora da disciplina de Estruturas Algébricas ser a orientadora desta pesquisa.

Para conhecermos o que é esperado pelos estudantes concluintes dessa disciplina, buscamos o projeto político pedagógico do curso em questão. Entre os objetivos propostos para conteúdos matemáticos avançados, temos:

> - Compreender, abstrair e representar, com formalismo, aspectos estruturais da Matemática;
> - Analisar as diferentes formas de argumentação, as diversas maneiras de encadeamento do raciocínio;
> - Sintetizar, aliada à capacidade de compreender e expressar-se;
> - Desafiar a curiosidade, tendo em vista o desenvolvimento de um raciocínio independente;
> - Percepção das várias estruturas matemáticas (RESOLUÇÃO CEPE N° 0230/2009, 2009, p. 16).

A disciplina de Estruturas Algébricas possui uma carga horária de 120 horas e aborda de modo teórico os seguintes conteúdos: teoria elementar dos números; grupos, subgrupos, subgrupos normais, grupos quocientes; homomorfismo de grupo; grupo de permutações; Anéis; Subanéis; ideais; Anéis quocientes; homomorfismo de Anéis; Anéis de polinômios; aspectos históricos e epistemológicos dos conteúdos trabalhados.

Durante a disciplina de Estruturas Algébricas os conteúdos eram abordados em geral com a apresentação de definições e teoremas no quadro, em seguida a professora resolvia exemplos que exigiam os conceitos estudados e posteriormente exercícios práticos similares aos exemplos, momento em que os estudantes podiam discutir em pequenos grupos a respeito das resoluções, que eram por fim corrigidas e discutidas pela professora com toda a turma.

Conhecendo o curso e o que é esperado dos estudantes ao cursar a disciplina de Estruturas Algébricas no curso de Matemática – Habilitação: Licenciatura da UEL, apresentamos a seguir uma descrição dos participantes da pesquisa.

4.3 OS PARTICIPANTES DA PESQUISA

Os estudantes participantes desta pesquisa pertenciam à 2ª série do curso, no ano de 2014, escolha feita por serem concluintes da disciplina de Estruturas Algébricas. A turma era composta por 17 alunos, mas apenas 12 aceitaram participar da pesquisa.

Após aceitarem o convite para participar da pesquisa, todos assinaram um termo de compromisso (apêndice A), em que eram informados a respeito da pesquisa, seus objetivos, a confidencialidade na omissão de suas identidades e que os registros seriam utilizados apenas para a pesquisa. Uma estudante de Matemática – Habilitação: Bacharelado estava cursando a disciplina juntamente com a turma de licenciatura, por isso, apesar de ter resolvido as tarefas propostas, seus registros não farão parte das análises, por não cursar licenciatura, foco de nossa pesquisa. Para mantermos a omissão de suas identidades os estudantes serão referidos pelos códigos E1, E2,..., E11 no decorrer das análises.

Com a intenção de conhecê-los melhor e contextualizar as análises, aplicamos além das tarefas relacionadas ao conceito de Anel, um questionário (apêndice B) com perguntas a respeito do que pensam sobre o curso de Matemática, da disciplina de Estruturas Algébricas, das possíveis experiências como professores e das dificuldades de aprendizagem vividas até então durante o curso de Matemática.

4.4 O INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS

Para a análise e identificação das concepções dos licenciandos em Matemática da UEL a respeito do conceito de Anel, aplicamos cinco tarefas, sendo algumas com subitens, e que foram antes validadas pelo grupo GEPPEMat. A aplicação do instrumento foi no dia 19 de novembro de 2014, na sala em que estudavam, no horário de aula da disciplina de Estruturas Algébricas.

As tarefas foram inspiradas ou adaptadas de tarefas encontradas em dissertações e livros de Álgebra, de modo que representassem situações diversas a respeito do conceito de Anel e que exigissem conhecimentos trabalhados pela professora da disciplina.

Os estudantes receberam folhas em branco para que pudessem resolver as tarefas e foram limitados a um tempo de 3 horas, mas ninguém levou mais do que duas para concluí-las.

A seguir, apresentamos as tarefas, as justificativas para a aplicação de cada uma e possíveis resoluções que seriam consideradas corretas por nós.

Tarefa 1

Um professor da disciplina de Estruturas Algébricas fez o seguinte questionamento aos seus alunos. "O que é um Anel?", obtendo as seguintes respostas:

Aluno	**Resposta**
A	Um Anel é um conjunto numérico, munido das operações usuais de adição e multiplicação, que goza de determinadas propriedades;
B	Um Anel é um conjunto numérico, munido de duas operações, e goza de determinadas propriedades;
C	Um Anel é um conjunto qualquer que goza de determinadas propriedades;
D	Um Anel é um conjunto qualquer, não vazio, munido de duas operações, e que goza de determinadas propriedades.
E	Anel é um conjunto não vazio A e um par de operações sobre A.

Você concorda com alguma dessas respostas? Justifique sua escolha.

Se você não concorda com nenhuma dessas respostas, como responderia ao questionamento do professor?

A primeira tarefa consiste em uma situação fictícia em que um professor de Álgebra questiona aos seus alunos o que é um Anel e obtém cinco respostas diferentes. Os participantes deveriam escolher alguma com que concordassem ou apresentar uma diferente.

Pretendemos, com essa tarefa, obter indícios do modo como cada participante concebe o conceito de Anel, sendo importante que o conceba como um sistema constituído de um conjunto não vazio, munido de duas operações binárias que satisfazem determinadas condições. Assim, espera-se que os estudantes escolham a resposta dada por D.

Tarefa 2

Numere a 2ª coluna de acordo com a primeira, considerando a seguinte pergunta: Quanto você pode falar dos itens apresentados na 2ª coluna?

1 – Nada	( ) Propriedade associativa para a adição
2 – Só lembro-me do nome	( ) Propriedade comutativa para a adição
3 – Posso tecer alguns comentários	( ) Elemento neutro da adição
4 – Posso tecer vários comentários	( ) Elemento oposto da adição
	( ) Propriedade associativa para a multiplicação
	( ) Propriedade comutativa para a multiplicação
	( ) Elemento neutro para a multiplicação
	( ) A multiplicação é distributiva em relação à adição

De acordo com a numeração, para aqueles itens em que você marcou 3 ou 4, anote do que se lembrar.

Quais itens você acredita ter relação com a noção de Anel?

A segunda tarefa foi inspirada em Oliveira (2002). Ela consiste em apresentar aos participantes uma listagem com algumas propriedades matemáticas, associatividade, comutatividade, distributividade e elemento neutro. Para cada uma dessas propriedades, os participantes deveriam indicar quanto poderiam comentar (por escrito): nada, só lembro-me do nome, posso tecer alguns comentários, posso tecer vários comentários. A partir disso, deveriam registrar do que se lembravam na folha e dizer quais acreditavam ter relação com o conceito de Anel.

Pretendemos, com essa tarefa, identificar o entendimento que os participantes possuem de algumas propriedades das operações, e se conseguem fazer associações com a estrutura algébrica Anel.

Esperamos que, de algum modo, os estudantes demonstrem compreender as propriedades, como definido em Domingues e Iezzi (2003):

Seja $*$ uma lei de composição interna em E.

Propriedade associativa

Dizemos que $*$ goza da propriedade associativa se

$$x * (y * z) = (x * y) * z,$$

quaisquer que sejam $x, y, z \in E$.

Propriedade comutativa

Dizemos que $*$ goza da propriedade comutativa se

$$x * y = y * x,$$

quaisquer que sejam $x, y \in E$.

Elemento neutro

Se existe $e \in E$, tal que $e * x = x$ para todo $x \in E$, dizemos que e é um elemento neutro à esquerda para $*$.

Se existe $\mathrm{e} \in \mathrm{E}$, tal que $x * e = x$ para todo $\mathrm{x} \in \mathrm{E}$, dizemos que e é um elemento neutro à direita para $*$.

Se e é elemento neutro à direita e à esquerda para a operação $*$, dizemos simplesmente que e é elemento neutro para essa operação.

Elemento simetrizável

Seja $*$ uma operação sobre E que tem elemento neutro e. Dizemos que $x \in E$ é um elemento simetrizável para essa operação se existir $x' \in E$, tal que

$$x' * x = e = x * x'$$

O elemento x' é chamado simétrico de x para a operação $*$.

Quando a operação é uma adição, o simétrico de x também é chamado oposto de x e indicado por $-x$.

Quando a operação é uma multiplicação, o simétrico de x também é chamado inverso de x e indicado por x^{-1} ·.

Propriedade distributiva

Sejam $*$ e Δ duas operações sobre E.

Dizemos que Δ é distributiva à esquerda relativamente a $*$ se:

$$x\Delta(y * z) = (x\Delta y) * (x\Delta z),$$

quaisquer que sejam $x, y, z \in E$.

Dizemos que Δ é distributiva à direita relativamente a $*$ se:

$$(y * z)\Delta x = (y\Delta x) * (z\Delta x),$$

quaisquer que sejam $x, y, z \in E$.

Quando Δ é distributiva à esquerda e à direita de $*$, dizemos simplesmente que Δ é distributiva relativamente à $*$.

Espera-se que, além de saber definir de algum modo as propriedades apresentadas, o estudante também evidencie saber que todas elas possuem relação com o conceito de Anel.

Tarefa 3 - Nos itens A até G, indique se as sentenças são verdadeiras ou falsas, e a partir disso, justifique matematicamente o motivo de sua escolha.

Item	Sentença	Verdadeiro	Falso	Justificativa da escolha
A	$(N, +, \cdot)$ é um Anel comutativo			
B	$(Q^{*}, +, \cdot)$ é um Anel sem unidade			
C	$(Z_4, +, \cdot)$ não é um Anel			
D	$(Q[\sqrt{P}], +, \cdot)$ não é um Subanel de $(R, +, \cdot)$			
E	$(\{0\} \times 2Z, +, \cdot)$ é Subanel de $(Z \times Z, +, \cdot)$			
F	Z_4 não é Subanel de Z_5			
G	$(M_2(N), +, \cdot)$ é um Anel			

A tarefa três consiste em solicitar aos participantes que julguem algumas afirmações em verdadeiras ou falsas, justificando matematicamente suas decisões.

Pretendemos com ela descobrir se os participantes conseguem concluir se um sistema, composto de um conjunto e as operações usuais de adição e multiplicação, é um Anel, um Anel comutativo, um Anel sem unidade ou um Subanel, e como fazem essa verificação. Além disso, descobrir se os estudantes conhecem uma variedade de exemplos de Anéis e se sabem lidar com uma variedade de conjuntos, numéricos ou não.

O item A aborda o conceito de Anel comutativo. Segundo Domingues e Iezzi (2003), dado um Anel $(A, +, \cdot)$, se a multiplicação goza da propriedade comutativa em A, isto é, se $ab = ba$ para quaisquer $a, b \in A$, então se diz que $(A, +, \cdot)$ é um Anel comutativo.

Nesse item, é importante que o estudante perceba inicialmente que $(N, +, \cdot)$ não é um Anel, pois nem todo elemento $a \in N$ possui um elemento em N, indicado genericamente por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$, elemento neutro da adição, e consequentemente não será um Anel comutativo, atribuindo assim valor falso à sentença.

O item B aborda o conceito de Anel sem unidade, ou seja, não satisfaz a condição de ser um Anel com unidade. Segundo Domingues e Iezzi (2003), dado um Anel $(A, +, \cdot)$, se A conta com elemento neutro para a multiplicação, isto é, se existe um elemento $1_A \in A$, $1_A \neq 0_A$, tal que $a.1_A = 1_A.a = a$, qualquer que seja $a \in A$, então se diz que 1_A é a unidade de A e que $(A, +, \cdot)$ é um *Anel com unidade.*

Assim como no item A, o estudante deve perceber que $(Q^*, +, \cdot)$ não é um Anel, pois não possui elemento neutro para a operação de adição, e consequentemente não é um Anel sem unidade, atribuindo valor falso à sentença.

O item C aborda o conceito de Anel das classes de resto módulo m. De acordo com Domingues e Iezzi (2003), para todo inteiro $m > 1$ é o conjunto $Z_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{m-1}\}$ em relação às operações assim definidas:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} \text{ e } \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$$

As propriedades dessas operações garantem que realmente se trata de Anel. O zero desse Anel é a classe $\bar{0}$ e o oposto de um elemento $\bar{a} \in Z_m$ é a classe $\overline{m-a}$. Assim, o estudante deve concluir que a afirmação do item C é falsa, ou seja, que Z_4 é um Anel.

Os itens D, E e F abordam o conceito de Subanel. Segundo Domingues e Iezzi (2003), dados um Anel $(A, +, \cdot)$ e L, um subconjunto não vazio de A, diz-se que L é um Subanel de $(A, +, \cdot)$ se L for fechado para as operações que dotam o conjunto A da estrutura de Anel e se $(L, +, \cdot)$ também for um Anel. O autor também apresenta uma proposição que diz que $(L, +, \cdot)$ é um Subanel de $(A, +, \cdot)$ se, e somente se, $a - b$ e $ab \in L$, sempre que $a, b \in L$, o que permite fazer a verificação de modo mais simplificado.

A sentença do item D é falsa e pode ser justificado pelo estudante do seguinte modo:

$Q[\sqrt{P}] = \{a + b\sqrt{p}, a, b \in Q\}$ é um Subanel de $(R, +, \cdot)$, pois se $a + b\sqrt{p}, c + d\sqrt{p} \in Q[\sqrt{P}]$, com $a, b, c, d \in Q$, então:

$$Q[\sqrt{P}] \neq \emptyset, \text{ pois, } 0 \in Q[\sqrt{P}]$$

$$(a + b\sqrt{p}) - (c + d\sqrt{p}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{p} \in Q[\sqrt{P}]$$

$$\left(a+b\sqrt{p}\right)\left(c+d\sqrt{p}\right)=(ac+pbd)+(ad+bc)\sqrt{p}\in Q[\sqrt{P}]$$

A sentença do item E é verdadeira e pode ser justificada pelo estudante do seguinte modo:

$\{0\}\times 2Z=\{(0,2a),a\in Z\}$ é um Subanel de $(Z\times Z,+,\ \cdot)$, pois se $(0,2a),(0,2b)\in \{0\}\times 2Z$, com $a,b\in Z$, então:

$$\{0\}\times 2Z\neq\emptyset,\text{ pois, }(0,0)\in\{0\}\times 2Z$$

$$(0,2a)-(0,2b)=(0,2a-2b)=\left(0,2(a-b)\right)\in\{0\}\times 2Z$$

$$(0,2a)(0,2b)=(0,2a2b)=(0,2(2ab))\in\{0\}\times 2Z$$

A sentença do item F é verdadeira, pois as classes de Z_4 são congruência módulo 4, enquanto as classes de Z_5 são módulo 5, ou seja, os elementos dos conjuntos são diferentes e, portanto, um não está contido no outro.

O item G aborda um conjunto não-numérico, uma matriz de ordem 2 com elementos pertencentes a N, assim, não é válida a existência de elemento oposto para qualquer matriz dada. Portanto, a sentença é falsa.

Deste modo, um quadro final com respostas esperadas por nós é apresentado a seguir:

Tarefa 3

Nos itens A até G, indique se as sentenças são verdadeiras ou falsas, e a partir disso, justifique matematicamente o motivo de sua escolha.

Item	Sentença	Verdadeiro	Falso	Justificativa da escolha
A	$(N,+,\ \cdot)$ é um Anel comutativo		X	$(N,+,\ \cdot)$ não é um Anel, pois nem todo elemento $a\in N$ possui um elemento em N, indicado genericamente por $-a$, tal que $a+(-a)=0$, elemento neutro da adição, e consequentemente, não será um Anel comutativo.

B	$(Q^*,+,\ \cdot)$ é um Anel sem unidade		X	$(Q^*,+,\ \cdot)$ não é um Anel, pois não possui elemento neutro para a operação de adição, e consequentemente, não é um Anel sem unidade.
C	$(Z_4,+,\ \cdot)$ não é um Anel		X	As propriedades das operações $+$ e $\cdot$ garantem que se trata de um Anel, com elemento neutro sendo $\bar{0}$ e o oposto de um elemento $\bar{a} \in Z_4$ sendo a classe $\overline{4-a}$.
D	$(Q[\sqrt{P}],+,\ \cdot)$ não é um Subanel de $(R,+,\ \cdot)$		X	$Q[\sqrt{P}] = \{a + b\sqrt{p}, a, b \in Q\}$ é um Subanel de $(R,+,\ \cdot)$, pois, se $a + b\sqrt{p}, c + d\sqrt{p} \in Q[\sqrt{P}]$, com $a, b, c, d \in Q$, então: $Q[\sqrt{P}] \neq \emptyset$, pois, $0 \in Q[\sqrt{P}]$ $\left(a + b\sqrt{p}\right) - \left(c + d\sqrt{p}\right) = (a - c) + (b - d)\sqrt{p} \in Q[\sqrt{p}]$ $\left(a + b\sqrt{p}\right)\left(c + d\sqrt{p}\right) = (ac + pbd) + (ad + bc)\sqrt{p} \in Q[\sqrt{p}]$
E	$(\{0\} \times 2Z,+,\ \cdot)$ é Subanel de $(Z \times Z,+,\ \cdot)$	X		$\{0\} \times 2Z = \{(0,2a), a \in Z\}$ é um Subanel de $(Z \times Z,+,\ \cdot)$, pois, se $(0,2a),(0,2b) \in$

				$\{0\} \times 2Z$, com $a, b \in Z$, então: $\{0\} \times 2Z \neq \emptyset$, pois, $(0,0) \in \{0\} \times 2Z$ $(0,2a) - (0,2b) = (0,2a - 2b) = \big(0,2(a-b)\big) \in \{0\} \times 2Z$ $(0,2a)(0,2b) = (0,2a2b) = (0,2(2ab)) \in \{0\} \times 2Z$
F	Z_4 não é Subanel de Z_5	X		As classes de Z_4 são congruência módulo 4, enquanto as classes de Z_5 são módulo 5, ou seja, os elementos dos conjuntos são diferentes e, portanto, um não está contido no outro.
G	$(M_2(N), +, \cdot)$ é um Anel		X	No conjunto das matrizes de ordem 2 com elementos pertencentes a N, não é válida a existência de elemento oposto para uma matriz qualquer.

Tarefa 4

(DOMINGUES e IEZZI, 2003, adaptado) Considerando as operações $*$ e # em Q definidas por:

$$x * y = x + y - 5 \qquad\qquad x \# y = x + y - \frac{xy}{5}$$

$(Q, *, \#)$ é um Anel? Justifique.

A tarefa quatro consiste em solicitar aos participantes que verifiquem se um sistema com operações não usuais é um Anel.

Pretendemos com essa tarefa investigar se os participantes conseguem lidar com operações não usuais, mostrando compreender o conceito de Anel por si só, a partir da definição formal, e não somente por meio de exemplos numéricos ou já conhecidos.

Segue uma verificação possível:

- Verificando se é um grupo abeliano para $*$, sabendo que $(Q, +, \cdot)$ é um Anel e considerando $x, y, z \in Q$.

a) Propriedade comutativa

$$\begin{aligned} x * y &= x + y - 5 \\ &= y + x - 5 \\ &= y * x \end{aligned}$$

Logo, a operação $*$ goza da propriedade comutativa em Q.

b) Propriedade associativa

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * (y + z - 5) \\ &= x + (y + z - 5) - 5 \\ &= x + (y - 5 + z) - 5 \\ &= (x + y - 5) + z - 5 \\ &= (x * y) + z - 5 \\ &= (x * y) * z \end{aligned}$$

Deste modo, a operação $*$ goza da propriedade associativa em Q.

c) Existência do elemento neutro

$\exists\ e = 5 \in Q$, tal que $\forall x \in Q$, teremos

$$\begin{aligned} x * 5 &= x + 5 - 5 \\ &= x + 0 \\ &= x \end{aligned}$$

Como a operação $*$ goza da propriedade comutativa em Q (anteriormente verificado), não existe a necessidade de verificarmos a existência do elemento neutro à direita da operação. Portanto, existe elemento neutro para a operação $*$ em Q.

d) Todo elemento do conjunto Q admite oposto

$$a * (-a) = e = 5$$
$$a + (-a) - 5 = 5$$
$$-a = 10 - a$$

Como a operação $*$ goza da propriedade comutativa em Q (anteriormente verificado), não existe a necessidade de verificarmos que todo elemento do conjunto admite oposto à direita da operação. Portanto, qualquer que seja $a \in Q$, existe um elemento $-a$ em Q, tal que $a + (-a) = e = 5$.

- Verificando a propriedade associativa para a operação #

$$x\#(y\#z) = x\#\left(y + z - \frac{yz}{5}\right)$$
$$= x + \left(y + z - \frac{yz}{5}\right) - \frac{x\left(y + z - \frac{yz}{5}\right)}{5}$$
$$= x + y + z - \frac{yz}{5} - \frac{xy}{5} - \frac{xz}{5} + \frac{xyz}{25}$$
$$= \left(x + y - \frac{xy}{5}\right) + z - \frac{\left(x + y - \frac{xy}{5}\right)z}{5}$$
$$= \left(x + y - \frac{xy}{5}\right)\#z$$
$$= (x\#y)\#z$$

Portanto, a operação # goza da propriedade associativa em Q.

- Verificando a distributividade de # em relação a $*$

$$x\#(y * z) = x\#(y + z - 5)$$
$$= x + (y + z - 5) - \frac{x(y + z - 5)}{5}$$
$$= \frac{5x + 5y + 5z - 25 - xy - xz + 5x}{5}$$

$$= \left(x + y - \frac{xy}{5}\right) + \left(x + z - \frac{xz}{5}\right) - 5$$

$$= (x\#y) + (x\#z) - 5$$

$$= (x\#y) * (x\#z)$$

Logo, operação # é distributiva em relação à operação $*$, em Q.

Como todas as condições para ser um Anel foram satisfeitas, concluímos que $(Q,\ *,\#)$ é um Anel.

Tarefa 5

(DOMINGUES e IEZZI, 2003, adaptado) Como você faria para provar que, se considerarmos A um Anel de integridade, com $x \in A$ e $x^2 = x$, então $x = 0$ ou $x = 1$.

A quinta e última tarefa foi adaptada do livro de Domingues e Iezzi (2003). Ela consiste em solicitar aos participantes uma justificativa para um procedimento bem conhecido e utilizado, muitas vezes de modo mecânico, na resolução de equações do 2º grau com o termo independente nulo.

Pretendemos, com ela, verificar se os participantes sabem lidar com domínios de integridade, ou ainda se eles se sustentam nos axiomas de Anel de integridade para provar um fato rotineiro. Segundo Domingues e Iezzi (2003), um Anel é denominado de integridade se for comutativo, com unidade e sem divisores de zero. Não ter divisores de zero implica que se $x.y = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

Uma possível prova seria:

$$x^2 = x$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x - 1) = 0$$

Sabendo que A é um Anel de integridade, temos que A satisfaz a propriedade de “sem divisores de zero”, e portanto,

$$x = 0 \text{ ou } x - 1 = 0,$$

ou ainda

$$x = 0 \text{ ou } x = 1$$

A justificativa é importante em todas as tarefas, pois determina o modo como os participantes fazem suas escolhas e verificações, e deixam mais explícitas as suas concepções a respeito do objeto de estudo.

4.5 Procedimentos para análise dos dados

A análise dos dados aconteceu em dois momentos. O primeiro teve como objetivo descrever e discutir as resoluções dos estudantes em cada uma das tarefas propostas, enquanto a segunda teve o objetivo de interpretar essas resoluções, identificando, por meio da Teoria APOS, as concepções (ação, processo, objeto, esquema) dos estudantes do conceito de Anel.

Após a coleta de dados, codificamos os protocolos obtidos de modo a manter em sigilo suas identidades, e à luz da análise de conteúdo, segundo Bardin (1977), fizemos as nossas análises.

Inicialmente, realizamos uma "leitura flutuante", que segundo Bardin (1977, p. 96), é a primeira atividade. Ela consiste em estabelecer contato com os documentos a serem analisados, "deixando-se invadir por impressões e orientações" (BARDIN, 1977, p. 96).

As leituras seguintes, feitas de um mesmo aluno por vez, tinham como objetivo compreender como os estudantes lidavam com as tarefas propostas, para que, a partir dos caminhos percorridos por eles na tentativa de resolver uma determinada tarefa, pudéssemos, em um segundo momento, interpretá-los à luz da Teoria APOS e identificarmos a concepção (ação, processo, objeto, esquema) de cada estudante sobre o conceito matemático Anel.

5. ANÁLISE TEÓRICA E DISCUSSÕES

Neste capítulo, apresentamos e discutimos as resoluções apresentadas pelos estudantes para cada uma das tarefas propostas, e fundamentados na Teoria APOS, interpretamo-nas de modo a evidenciar a concepção (ação, processo, objeto, esquema) de cada estudante sobre o conceito de Anel.

O capítulo está dividido em 12 seções. As onze primeiras correspondem a uma análise dos registros escritos, que se iniciam com uma breve descrição do perfil de cada um, feita a partir de suas respostas para o questionário apresentado no apêndice B, com a intenção de conhecê-los melhor e contextualizar as análises, com perguntas a respeito do que pensam sobre o curso de Matemática, da disciplina de Estruturas Algébricas, das experiências como professores e das dificuldades de aprendizagem vividas até então durante o curso de Matemática. Concluímos cada uma dessas seções com uma síntese das análises e com a apresentação da concepção de cada estudante sobre o objeto matemático Anel. Na última seção, discutimos de um modo geral como os estudantes lidaram com as tarefas propostas e suas concepções.

Como já exposto no capítulo referente à metodologia, atribuímos códigos para cada um dos estudantes, sendo eles E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10 e E11.

5.1 ESTUDANTE E1

O estudante E1 estava cursando pela primeira vez a disciplina de Estruturas Algébricas e já lecionava Matemática no Ensino Fundamental I e II.

E1 considera importante compreender os porquês de se estudar determinado conteúdo, pois para ele é dessa maneira que a aprendizagem se torna mais significativa. Tal estudante menciona que teve muitas oportunidades de abordar e discutir na graduação como trabalhar os conteúdos matemáticos no Ensino Básico, mas que isso não aconteceu para conteúdos do Ensino Superior. Ele também considera importante prezar pelos conhecimentos prévios de cada aluno e exemplifica essa importância para o curso de Matemática, pois para ele a defasagem em conteúdos prévios é um dos motivos para não se ter uma boa aprendizagem nas disciplinas do curso.

Quanto à disciplina de Estruturas Algébricas, o estudante a considera como a mais difícil até então e acredita que ela tenha contribuído para sua formação enquanto professor de Matemática.

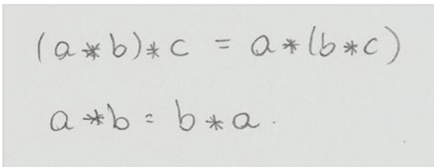
Apresentamos a seguir nossa análise do registro escrito do estudante para as tarefas propostas.

O estudante E1 responde à tarefa 1 considerando que todas as respostas apresentadas para a pergunta “O que é um Anel?” eram corretas. Porém, E1 não se atenta para o fato de que algumas das respostas eram excludentes, como por exemplo, a resposta D e a resposta C, as quais uma considerava um Anel como um conjunto qualquer e a outra, como um conjunto numérico.

Inferimos, por meio de sua escolha e pela falta de justificativa, que E1 não refletiu a respeito das respostas, mostrando não possuir uma concepção bem definida para o conceito.

Na tarefa 2, apesar de não assumir $\forall\, a, b, c \in A$, sendo A um conjunto não vazio, o estudante evidencia conhecer as propriedades associativa e comutativa para uma operação qualquer, não tendo a necessidade de utilizar casos particulares para descrevê-las, como percebemos na Figura 4.

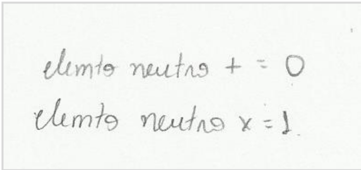
Figura 4 – Registro escrito do estudante E1 para as propriedades associativa e comutativa para a operação de multiplicação



Fonte: resolução escrita pelo estudante E1

Para comentar a respeito do elemento neutro, aparenta se apoiar nas operações usuais de adição e multiplicação para algum conjunto numérico conhecido. Além disso, não verificou que esses elementos operados à esquerda e à direita, com qualquer x pertencente a um determinado conjunto, resultam no próprio elemento, o que pode indicar que ele tenha interiorizado em um processo a ação de definir o elemento neutro.

Figura 5 – Registro escrito do estudante E1 para o conceito de elemento neutro da adição e da multiplicação



Fonte: resolução escrita pelo estudante E1

O estudante define o elemento oposto de x em relação à adição como sendo $-x$, assim como em Domingues e Iezzi (2003), ao considerar a operação de adição para tratar de elementos simetrizáveis, porém, sem especificar a relação existente entre x, $-x$ e o elemento neutro para um dado conjunto.

Nessa tarefa, E1 só não comenta algo para a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, e diz só se lembrar do nome. Consideramos importante que um estudante nessa fase do curso de Matemática saiba definir e lidar com as propriedades de conjuntos. A propriedade distributiva de uma operação em relação à outra é utilizada em diversas situações, como na resolução de equações e expressões algébricas.

Apesar de não saber definir a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, E1 acredita que todas as propriedades apresentadas possuem relação com o conceito de Anel.

Na tarefa 3, o estudante classifica como verdadeiro ou falso apenas quatro afirmações das sete apresentadas, sendo que não justifica essas escolhas.

O estudante considera falsa a afirmação de que $(Z_4, +, \cdot)$ *não é um Anel* e considera como verdadeira as afirmações de que

- $(Q, [\sqrt{p}], +, \cdot)$ *não é um Subanel de* R;
- $(\{0\} \times 2Z, +, \cdot)$ *é Subanel de* $(Z \times Z, +, \cdot)$;
- Z_4 *não é Subanel de* Z_5;
- $(M_2(N), +, \cdot)$ *é um Anel*.

Como E1 não apresentou justificativas para tais escolhas e não fez julgamento de algumas afirmações, inferimos que possa ter recorrido a lembranças de situações nas quais tenha lidado com tais afirmações.

O estudante não apresentou registro algum para as questões 4 e 5.

Ao deixar a tarefa 4 em branco, inferimos que o estudante pode não saber quais ações deve tomar para verificar se um conjunto munido de determinadas operações, usuais ou não, é um Anel. É possível também que ele tenha tido dificuldades a respeito dos conjuntos e seus elementos.

Ao deixar a tarefa 5 em branco, inferimos que o estudante pode não saber o que é um Anel de integridade, ou como lidar com ele na situação proposta, pois consideramos que a verificação de que a equação $x^2 = x$ possui como raízes reais $x = 0$ ou $x = 1$ seja algo simples para um estudante do 2º ano de Matemática.

5.1.1 Síntese e considerações a respeito do registro escrito do estudante E1

Ao analisar o registro escrito do estudante E1, percebemos que ele não possui uma concepção bem definida para o conceito de Anel, e apesar de conhecer algumas propriedades que as operações de um Anel devem satisfazer, ele não mostra saber verificá-las corretamente para os elementos de um conjunto qualquer. Além disso, não mostra saber quais ações devem ser tomadas para verificar se um conjunto munido de duas operações, usuais ou não, é um Anel, e consequentemente, não consegue aplicar esse conceito no entendimento de procedimentos utilizados em muitas situações, como a resolução de uma equação do 2º grau com o termo independente nulo, na qual podemos colocar em evidência o termo em comum. Acreditamos que esse estudante ainda esteja no processo inicial de construção do conceito de Anel, não sendo ainda capaz de coordenar as ações A1 e A2 e, portanto, necessita passar por um processo de desencapsulação dos objetos O1, O2 e O3, a fim de inserir novos exemplos para então repetir essas ações e passar a ter uma concepção ação de Anel, segundo a Teoria APOS.

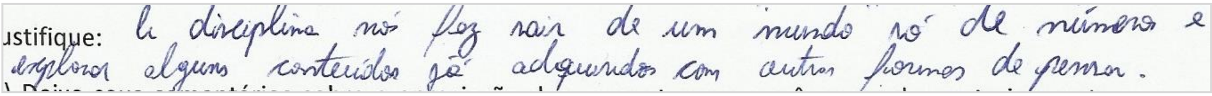
5.2 ESTUDANTE E2

O estudante E2 estava cursando pela primeira vez a disciplina de Estruturas Algébricas e já lecionava Matemática no Ensino Fundamental II.

E2 mencionou que até então não havia tido momentos para discutir o modo como os conteúdos matemáticos devem ser abordados na Educação Básica, mas que foram levantadas algumas questões. Apesar disso, tal estudante considera importante compreender os porquês de se estudar determinados conteúdos matemáticos no Ensino Superior usando a interdisciplinaridade, pois para ele isso contribui para um maior aproveitamento em sala de aula. O estudante também considera importante usar modelos, exemplos e aplicações que tornem o conteúdo mais próximo da realidade dos alunos.

A respeito da disciplina de Estruturas Algébricas, E2 não a considera como a mais difícil do curso e acredita que ela tenha contribuído com a sua formação enquanto professor de Matemática e acrescenta em que aspectos.

Figura 6 – Registro escrito do estudante E2 a respeito da disciplina de Estruturas Algébricas

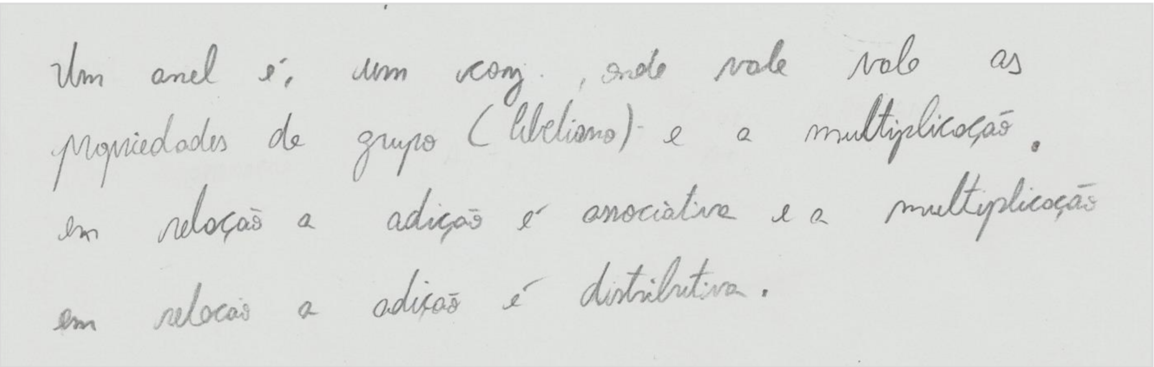

Justifique: A disciplina nos faz sair de um mundo só de números e explorar alguns conteúdos já adquiridos com outras formas de pensar.

Fonte: resolução escrita pelo estudante E2

Apresentamos a seguir a nossa análise do registro escrito do Estudante E2.

Na tarefa 1, o estudante E2 responde dizendo que não concorda com nenhuma das respostas apresentadas, e apresenta aquela que considera como a correta:

Figura 7 – Registro escrito do estudante E2 para o conceito de Anel


Um anel é, um conj., onde vale valo as propriedades de grupo (abeliano) e a multiplicação. em relação a adição é associativa e a multiplicação em relação a adição é distributiva.

Fonte: resolução escrita pelo estudante E2

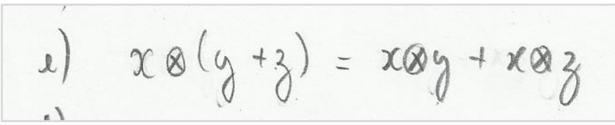
Percebemos por meio dessa definição que o estudante entende Anel como um conjunto e que as propriedades são secundárias. Por não ter especificado o conjunto ou o seu tipo, consideramos que E2 tenha interiorizado Anel como um conjunto qualquer, inclusive vazio.

Com relação às propriedades, o estudante se apoia nas propriedades de grupo abeliano, sem apresentá-las, e estende, acrescentando que a multiplicação em relação à adição deve ser associativa e distributiva.

Consideramos que E2 não tenha compreendido corretamente a propriedade associativa para a multiplicação e para a adição, pois a define utilizando duas operações distintas e não considera importante especificar para qual operação as propriedades de grupo abeliano devem sem gozadas.

Na tarefa 2, o estudante não apresentou comentários apenas para a distributividade da multiplicação em relação à adição. Para as demais, a definição é feita considerando-se uma operação não usual, porém, sem assumir elementos pertencentes a um conjunto não vazio.

Figura 8 – Registro escrito do estudante E2 para a propriedade associativa para a adição e para a multiplicação

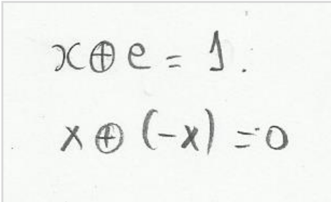


Fonte: resolução escrita pelo estudante E2

Consideramos que o estudante tenha utilizado características da propriedade distributiva ao definir a propriedade associativa, sendo importante que o mesmo desencapsule o objeto “propriedade associativa”, tanto para a operação de adição quanto para a de multiplicação, de modo a entendê-la corretamente em função de uma operação e com a ideia de parênteses sendo associados de modos diferentes sem alterar a igualdade, e também considerar a propriedade $\forall\, x, y, z \in A$.

A propriedade comutativa é definida corretamente pelo estudante, tanto para a operação de adição quanto para a de multiplicação, apesar de não mencionar que a propriedade é válida para todo x, y, z pertencentes a um conjunto não vazio. Os elementos neutro e oposto da adição são definidos do seguinte modo:

Figura 9 – Registro escrito do estudante E2 para o conceito de elemento neutro e elemento oposto da adição



Fonte: resolução escrita pelo estudante E2

A partir do registro escrito apresentado na Figura 9, não conseguimos afirmar se o estudante considera e e $-x$ como elementos neutros, ou 1 e 0. Caso entenda como e e $-x$, consideramos que E2 não compreende corretamente o elemento neutro da adição, pois considera que um elemento x operado com o elemento neutro resulta em 1, ao invés de resultar nele mesmo, ou seja, x. O mesmo acontece para o elemento oposto da adição, no qual o estudante considera que um elemento x operado com o seu oposto resulta em zero, ao invés de resultar no elemento neutro do conjunto, possivelmente assumido por ele como e. Caso entenda como 1 e 0, consideramos que E2 esteja partindo de casos particulares ao invés de genéricos.

Na tarefa 3, o estudante não julgou como verdadeiro ou falso dois itens dos sete apresentados, entre eles o item B, "$(Q^*, +, \cdot)$ *é um Anel sem unidade"*, e o item E, "$(\{0\} \times 2Z, +, \cdot)$ *é Subanel de* $(Z \times Z, +, \cdot)$ ".

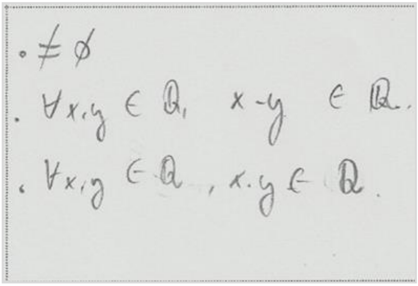
Para o primeiro item, "$(N, +, \cdot)$ *é um Anel comutativo"*, o estudante deixa claro que entende o conjunto N como o conjunto dos números naturais e considera corretamente a afirmação falsa, justificando que nem todo elemento do conjunto possui oposto para a operação de adição, não indicando apenas que o único a possuir é o zero. Percebemos assim que o estudante considera importante verificar primeiramente se o sistema dado é um Anel, antes de verificar se é comutativo.

Inferimos que ele não tenha feito o item B por não compreender o símbolo Q^*, isso porque o estudante o circulou e escreveu a palavra zero seguida de um ponto de interrogação, indicando estar em dúvida se o símbolo $*$ se referia ao zero. Não compreender a simbologia de conjuntos indica uma defasagem na aprendizagem da linguagem matemática, podendo dificultar que um estudante seja capaz de construir a ação A3.

Para o terceiro item, “$(Z_4, +, \cdot)$ *não é um Anel”*, E2 mostra que conhece o conjunto ao explicitar os seus elementos. Ele considera corretamente a afirmação falsa, justificando que todas as condições para ser Anel são satisfeitas, apesar de não apresentar e verificar essas condições, o que pode mostrar que ele tenha interiorizado a ação de verificar em processo.

No quarto item, o estudante julga corretamente a afirmação “$(Q, [\sqrt{p}], +, \cdot)$ *é Subanel de* $(R, +, \cdot)$” como sendo falsa. Sua justificativa é apresentada na Figura 10.

Figura 10 – Registro escrito do estudante E2 para o item D da tarefa 3


$\cdot \neq \emptyset$
$\cdot\ \forall x,y \in Q,\ x-y \in Q.$
$\cdot\ \forall x,y \in Q,\ x.y \in Q.$

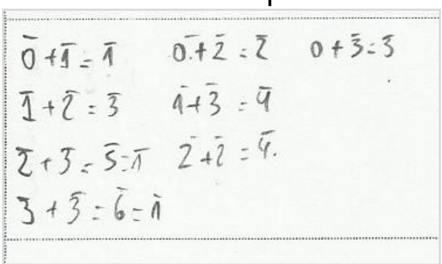
Fonte: resolução escrita pelo estudante E2

E2 mostra que compreendeu o processo de verificar um Subanel e que interiorizou a ação de verificar em um processo por não ter desenvolvido $x - y$ e $x.y$.

Com relação ao item E, inferimos que o estudante teve dificuldades na compreensão dos conjuntos abordados, isto porque ele aplicou ações para verificar se um sistema é um Subanel no item anterior.

Para o item F, “Z_4 *não é Subanel de* Z_5”, o estudante julga corretamente a sentença como verdadeira e justifica com os cálculos apresentados na Figura 11.

Figura 11 – Registro escrito do estudante E2 para o item F da tarefa 3


$\bar{0}+\bar{1}=\bar{1}$ $\quad \bar{0}+\bar{2}=\bar{2}$ $\quad 0+\bar{3}=\bar{3}$
$\bar{1}+\bar{2}=\bar{3}$ $\quad \bar{1}+\bar{3}=\bar{4}$
$\bar{2}+\bar{3}=\bar{5}=\bar{1}$ $\quad \bar{2}+\bar{2}=\bar{4}$
$\bar{3}+\bar{3}=\bar{6}=\bar{1}$

Fonte: resolução escrita pelo estudante E2

Percebemos aqui que o estudante realizou ações diferentes das do item quatro, em que verificou as condições de um subconjunto de um Anel ser um Subanel. Neste item, E2 não assumiu Z_4 como sendo subconjunto de Z_5, e se propôs a fazer tal verificação.

Consideramos que o estudante entende que, para $(A, +, \cdot)$ não vazio ser um Subanel de um dado Anel $(B, +, \cdot)$, não basta testar a diferença e o produto dos seus elementos, mas que o conjunto A também seja um subconjunto de B.

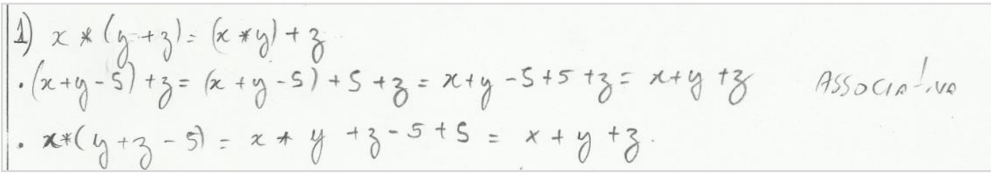
No item 7, E2 considera corretamente a afirmação "$(M_2(N), +, \cdot)$ *é um Anel"* falsa, porém sua justificativa se refere apenas ao fato de não ser comutativo, e não ao fato de "$(M_2(N), +, \cdot)$ não ser um Anel.

Ao comparar essa resolução com a sua definição para o conceito de Anel na tarefa 1, inferimos que o estudante não saiba para qual operação a propriedade comutativa, implícita na definição de grupo abeliano, deve ser satisfeita.

Na tarefa 4, o estudante mostra não ter dificuldades para lidar com operações não usuais, e supondo que $x, y, z \in Q$, verifica as propriedades de um Anel para todo elemento $x, y, z \in Q$, seguindo cinco etapas definidas por ele como: 1) associativa, 2) comutativa, 3) elemento neutro, 4) elemento inverso e 5) distributiva.

Percebemos, na etapa 1, que o estudante verifica a propriedade associativa para $*$ e para $\#$ de um modo diferente do apresentado na tarefa 2. Anteriormente, aparentava uma confusão com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição; nesse momento ele define associando os parênteses de modos diferentes, mas continua considerando duas operações. Para verificar a validade da propriedade, o estudante desenvolve o lado esquerdo e o lado direito com a intenção de chegar a uma igualdade, porém, ao desenvolver o lado esquerdo, adiciona 5, alterando a igualdade, e sem justificar, o mesmo é feito ao desenvolver o lado direito. Uma possível justificativa para tal escolha seria eliminar o "-5" das expressões.

Figura 12 – Registro escrito do estudante E2 para a propriedade associativa de $*$ no conjunto Q

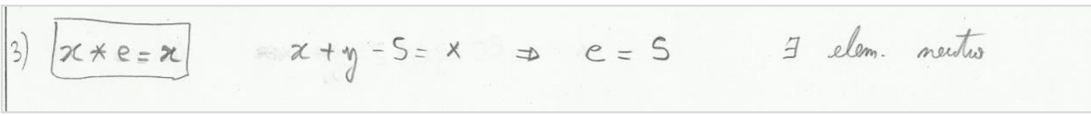


Fonte: resolução escrita pelo estudante E2

O estudante não especifica que os elementos assumidos x, y, z pertencem ao conjunto Q. Além disso, consideramos que assumir duas operações distintas tenha dificultado sua verificação, e que as manipulações algébricas aplicadas foram inadequadas. Assim, é importante que o estudante desencapsule a “propriedade associativa”, de modo a excluir uma das operações.

A partir das etapas 2 e 3, consideramos que E2 tenha compreendido e verificado corretamente a propriedade comutativa, assim como a existência do elemento neutro para $*$, porém, ao contrário do que havia feito na tarefa 2, definir apenas à esquerda da operação passa a ser suficiente, uma vez que a comutatividade foi verificada anteriormente. Além disso, ao aplicar a operação $*$ troca o e por y, seguindo a aplicação da operação apresentada no enunciado da tarefa, porém não consideramos que esse erro comprometa o entendimento do estudante para o conceito de elemento neutro.

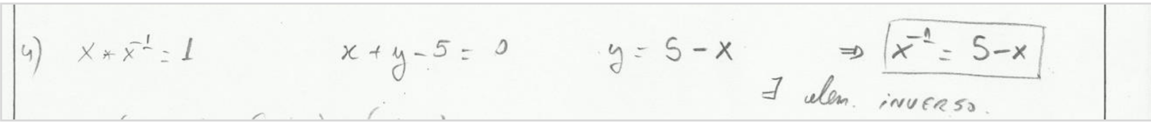
Figura 13 – Registro escrito do estudante E2 para o elemento neutro de $*$ em Q



Fonte: resolução escrita pelo estudante E2

O estudante não especifica que os elementos supostos x, y, z pertencem ao conjunto Q. Além disso, verificar que todo elemento do conjunto admite oposto também apenas para à esquerda da operação, indica certa confusão do estudante com o elemento oposto da multiplicação para conjuntos numéricos. Percebemos isso porque E2 define que x operado por meio de $*$ com x^{-1} (chamado por ele de elemento inverso) resulta em 1. Logo em seguida, ele troca x^{-1} por y, assim como feito para o elemento neutro, e troca 1 por zero sem justificar.

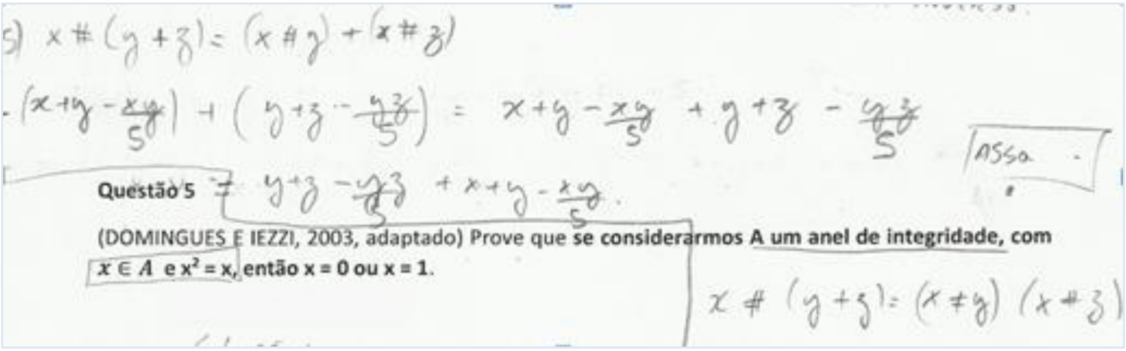
Figura 14 – Registro escrito do estudante E2 para o elemento oposto de $*$ em Q



Fonte: resolução escrita pelo estudante E2

O estudante não especifica que os elementos supostos x, y, z pertencem ao conjunto Q. Na quinta etapa, a distributividade de # em relação a $*$, o estudante demonstra dificuldade na verificação, na qual desenvolve parcialmente apenas o lado direito da igualdade $x\#(y + z) = (x\#y) + \ (x\#z)$.

Figura 15 – Registro escrito do estudante E2 para a distributividade de # em relação a $*$ em Q



Fonte: resolução escrita pelo estudante E2

O estudante não especifica que os elementos supostos x, y, z pertencem ao conjunto Q. Percebemos também que o estudante troca a operação $*$ por $+$, o que já havia ocorrido para a propriedade associativa para $*$, verificada na etapa 1, o que para nós indica certa confusão em propriedades que são definidas com duas operações.

A solução apresentada por E2 para a tarefa 5 está correta, apesar de não justificar que se $x(x - 1) = 0$, então $x = 0$ ou $x = 1$ é verdadeiro porque A é um Anel de integridade, o que nos garante que não existem divisores de zero.

5.2.1 Síntese e considerações a respeito do registro escrito do estudante E2

Ao analisar o registro escrito do estudante E2, percebemos que ele concebe Anel como um sistema constituído pela tríade conjunto, operações binárias e propriedades. Apesar de apresentar alguns equívocos na definição de algumas propriedades, principalmente na propriedade associativa para uma operação qualquer, o estudante mostra conhecer as propriedades de que as operações devem gozar e sabe lidar com elas para operações não usuais e conjuntos quaisquer, não se limitando a apenas conjuntos numéricos. Portanto, acreditamos que esse estudante tenha uma concepção objeto do conceito de Anel, segundo a Teoria APOS.

5.3 Estudante E3

O estudante E3 estava cursando pela primeira vez a disciplina de Estruturas Algébricas e já lecionava Matemática no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio.

E3 comentou que teve a oportunidade de debater no curso o modo como alguns conteúdos matemáticos devem ser abordados, e considera importante saber os porquês de se estudar um determinado conteúdo matemático no Ensino Superior, pois para ele, isso facilita a construção do conhecimento e contribui para "prender" a atenção do aluno durante as aulas. Ele também considera fundamental que o professor, ao abordar um conteúdo, resolva exercícios como exemplo.

O estudante comentou que, até aquele momento, a disciplina de Estruturas Algébricas era a que possuía os conteúdos mais difíceis e a considerou importante para a sua formação enquanto professor de Matemática, pois contribuiu para o seu raciocínio e o fez olhar a Matemática de outra forma.

Apresentamos a seguir nossa análise do registro escrito do estudante para as tarefas propostas.

O estudante E3 responde à tarefa 1 mencionando que concorda com a maioria das respostas apresentadas, porém, não especifica quais respostas compõem essa maioria. A sua justificativa é que um Anel é um conjunto que goza de algumas propriedades, o que para nós indica uma concordância com a resposta do aluno C.

Por não ter comentado sobre o conjunto de um modo específico, inferimos que o estudante considera a possibilidade de termos um Anel para um conjunto qualquer e que as operações não são importantes, pois não foram mencionadas.

Na tarefa 2, as definição são dadas sem especificar a qual conjunto os elementos assumidos pertencem. As propriedades associativa e comutativa para a operação de adição são definidas corretamente. A definição dada para a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição estava parcialmente correta, pois não foi apresentada a distributividade à esquerda. As demais propriedades não foram apresentadas

O estudante define o elemento neutro apenas apresentando 0_A para a adição e 1_A para a multiplicação, sem descrever a relação existente entre esses elementos e um elemento qualquer x pertencente a um dado conjunto. O que pode indicar que ao executar a mesma ação por várias vezes e refletir sobre ele tenha interiorizado o conceito em um processo.

Entre as propriedades apresentadas, E3 acredita que o elemento neutro da adição e da multiplicação, as propriedades associativa e comutativa para a adição e a distributividade da multiplicação em relação à adição possuem relação com o conceito de Anel.

Na tarefa 3, o estudante fez um julgamento para todos os itens apresentados, porém, não apresenta qualquer tipo de justificativa para os seguintes itens:

- (D) $(Q[\sqrt{P}],+,\ \cdot)$ *não é um Subanel de* $(R,+,\ \cdot)$.
- (E), $(\{0\}\times 2Z,+,\ \cdot)$ *é Subanel de* $(Z\times Z,+,\ \cdot)$;
- (G) $(M_2(N),+,\ \cdot)$ *é um Anel*.

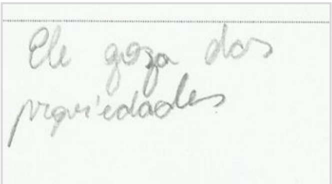
Para o item D, ele atribui corretamente o valor falso, para o item E, corretamente o valor verdadeiro, e para o item G, corretamente o valor falso. Consideramos possível que o estudante tenha recorrido apenas a fatos de sua memória para tomar tais decisões.

O primeiro item, *"*$(N,+,\ \cdot)$ *é um Anel comutativo*", E3 julga como sendo falso, e justifica afirmando que esse conjunto não possui elemento oposto ou inverso. Sua decisão está correta, porém a justificativa correta é de que nem todo elemento do conjunto possui oposto, sendo o zero o único a possuir. Mas, entendemos que o estudante demonstra conhecer o conjunto e as condições que o sistema deve satisfazer para ser um Anel.

O item B, “$(Q^*, +, \cdot)$ *é um Anel sem unidades*”, é julgado pelo estudante como sendo falso, o que ele justifica afirmando que o conjunto possui o elemento 1_A. Inferimos que E3 considerou, *a priori* e erroneamente, que o sistema apresentado era um Anel, e assim, propôs-se a verificar apenas se ele era sem unidade. Mesmo que fosse um Anel, sua justificativa é incompleta, pois não basta $1_A \in Q^*$, mas também que $1_A \neq 0_A$, tal que $a.1_A = 1_A.a = a,$ qualquer que seja $a \in Q^*$

O item C, $(Z_4, +, \cdot)$ *não é um Anel*, recebe corretamente o valor falso, e a justificativa para tal decisão é apresentada na Figura 16.

Figura 16 – Registro escrito do estudante E3 para a tarefa 3, item C



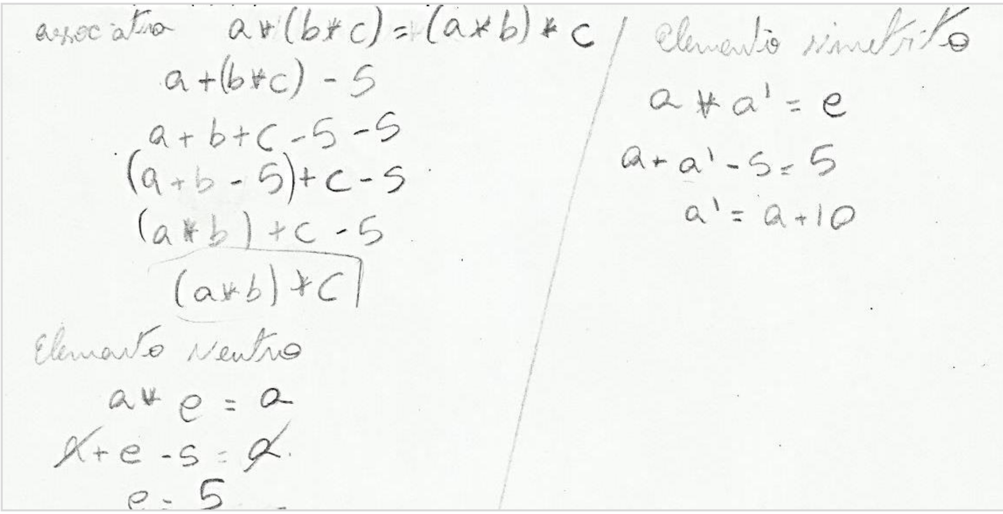
Fonte: resolução escrita pelo estudante E3

Consideramos que o estudante saiba que existem propriedades que precisam ser gozadas, porém não tenha sentido a necessidade de especificar quais são elas e como chegou a essa conclusão, o que pode indicar que ao executar a mesma ação por várias vezes e refletir sobre ela, tenha interiorizado em um processo.

Para o item F, Z_4 *não é Subanel de* Z_5; o estudante atribuiu corretamente valor verdadeiro, e justificou corretamente, afirmando que os elementos de Z_4 são diferentes dos elementos de Z_5, o que implica que o primeiro não é subconjunto do segundo.

Na tarefa 4, considerando a operação $*$ e sem assumir para todo a, b, c pertencente ao conjunto $Q,$ E3 verifica a validade da propriedade associativa, a existência do elemento neutro e que todo elemento do conjunto admite simétrico (oposto). A propriedade associativa é verificada corretamente, assim como o elemento neutro. A verificação de que todo elemento possui elemento simétrico é parcialmente correta, pois o estudante aparenta se esquecer de trocar o sinal de a e verifica apenas à esquerda da operação, o que é apresentado na Figura 17.

Figura 17 – Registro escrito do estudante E3 para a tarefa 4



associativa $a * (b * c) = (a * b) * c$

$a + (b * c) - 5$

$a + b + c - 5 - 5$

$(a + b - 5) + c - 5$

$(a * b) + c - 5$

$\boxed{(a * b) * c}$

Elemento Neutro

$a * e = a$

$\cancel{a} + e - 5 = \cancel{a}$

$e = 5$

Elemento simétrico

$a * a' = e$

$a + a' - 5 = 5$

$a' = a + 10$

Fonte: resolução escrita pelo estudante E3

Apesar de não verificar todas as propriedades necessárias, o estudante demonstra não ter dificuldades em lidar com operações não usuais.

Na tarefa 5, E3 não parte da igualdade $x^2 = x$ para mostrar que $x = 0$ ou $x = 1$, mas verifica se esses dois valores tornam a igualdade verdadeira. Consideramos possível que o estudante não saiba aplicar um conceito relacionado a Anel em casos conhecidos ou não saiba o que é um Anel de integridade.

5.3.1 Síntese e considerações a respeito do registro escrito do estudante E3

Ao analisar o registro escrito do estudante E3, percebemos que ele concebe Anel como um conjunto que goza de determinadas propriedades. E3 só não menciona que a propriedade de que todo elemento do conjunto admite simétrico (oposto) como tendo relação com o conceito de Anel, apesar de verificá-la de modo parcialmente correto à esquerda da primeira operação na tarefa 4. Em alguns dos itens apresentados na tarefa 3, que exigiam verificar se um sistema constituído de um conjunto numérico e duas operações conhecidas é um Anel ou um Subanel de um Anel dado, o estudante não justificou suas decisões, indicando dificuldade em lidar com casos não conhecidos, enquanto que em outros itens, provavelmente conhecidos, julgou e justificou corretamente. Percebemos também que E3 mostra saber lidar com operações não usuais, mas não relaciona um conceito específico de

Anel com situações conhecidas, como a equação do 2º grau. Consideramos que o estudante realiza ações para verificar se um sistema é um Anel, porém, necessita desencapsular algumas propriedades de modo a encapsular corretamente e lidar com diferentes conjuntos e operações. Portanto, consideramos que E3 tenha uma concepção ação do conceito de Anel, segundo a Teoria APOS.

5.4 ESTUDANTE E4

O estudante E4 estava cursando pela primeira vez a disciplina de Estruturas Algébricas e ainda não lecionava Matemática em qualquer nível de ensino.

E4 mencionou que só teve a oportunidade de discutir a respeito do modo como os conteúdos matemáticos devem ser abordados no Ensino Superior quando tinham que discutir problemas pessoais com algum professor. Para este estudante, não é muito importante compreender os porquês de se estudar determinado conteúdo matemático no Ensino Superior, pois considera mais importante ter a capacidade dinâmica de ensinar os conteúdos.

O estudante considerou que, até aquele momento, a disciplina de Estruturas Algébricas não era a que possuía os conteúdos mais difíceis, e destaca a disciplina de Física I. Para E4, a disciplina de Estruturas Algébricas contribuiu para sua formação enquanto futuro professor de Matemática e considerou isso por ser uma disciplina que mostra como a Álgebra funciona.

Apresentamos a seguir nossa análise do registro escrito do estudante para as tarefas propostas.

O estudante E4 responde à tarefa 1 concordando com a resposta do aluno D, ou seja, para ele, um Anel é um conjunto qualquer, não vazio, munido de duas operações e que goza de determinadas propriedades. Ele justifica a sua escolha como sendo aquilo que está mais próximo do que se recorda das aulas da disciplina de Estruturas Algébricas, o que demonstra que o estudante apenas recorreu a fatos que estão em sua memória.

Na tarefa 2, E4 fornece uma definição para todas as propriedades apresentadas. O estudante inicia supondo que as propriedades serão aplicadas para todo x, y, z, sem especificar um conjunto não vazio que os contenha.

As propriedades associativa e comutativa são descritas corretamente para as operações de adição e multiplicação. As definições apresentadas para os elementos neutro da adição e da multiplicação e oposto da adição estão parcialmente corretas, faltando apenas defini-las à direita das operações, assim como a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, como podemos observar na Figura 18.

Figura 18 – Registro escrito do estudante E4 para a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

$$x.(y+z) = xy + xz$$

Fonte: resolução escrita pelo estudante E4

Para este estudante, todas as propriedades apresentadas possuem relação com o conceito de Anel.

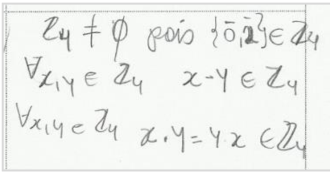
Na tarefa 3, o estudante fez um julgamento para todos os itens apresentados, não apresentando comentário algum apenas para o item F, Z_4 *não é Subanel de* Z_5, para o qual julga corretamente como sendo verdadeiro.

O item A, *"*$(N, +, \cdot)$ *é um Anel comutativo*", é julgado erroneamente por ele como sendo verdadeiro, e sua justificativa é de que $\forall\, x, y \in N$, temos que $x.y = y.x$. Consideramos que E4 supôs que não havia necessidade de verificar se o sistema era um Anel, pois analisou apenas se era comutativo.

Para o item B, *"*$(Q^{*}, +, \cdot)$ *é um Anel sem unidade*", E4 atribuiu valor verdadeiro e justificou afirmando que é sem unidade para a adição, pois 0 não pertence a Q^{*}. Assim como no item anterior, o estudante não verificou primeiramente se o sistema era um Anel, mas já supondo que seria, pôs-se a verificar se era sem unidade. Percebemos em sua justificativa uma confusão no entendimento de um Anel sem unidade, na qual troca a operação de multiplicação por adição.

O item C, "$(Z_4, +, \cdot)$ *não é um Anel",* é suposto corretamente por ele como falso, e como justificativa ele apresenta o registro da Figura 19.

Figura 19 – Registro escrito do estudante E4 para a tarefa 3, item C

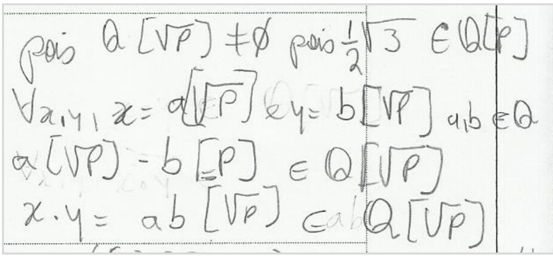


Fonte: resolução escrita pelo estudante E4

O estudante verificou inicialmente que o conjunto não era vazio, condição para ser um Anel, depois, assumindo valores $x, y \in Z_4$, mostrou que o conjunto era fechado para a subtração e satisfazia a propriedade comutativa para a multiplicação. As duas últimas propriedades não são necessárias para mostrar que um sistema é um Anel. Inferimos, portanto, que o estudante tenha, de algum modo, se confundido com as condições de Subanel.

O item D, "$(Q[\sqrt{P}], +, \cdot)$ *não é um Subanel de R"*, é considerado corretamente como falso, e como justificativa ele apresenta o registro da Figura 20:

Figura 20 – Registro escrito do estudante E4 para a tarefa 3, item D



Fonte: resolução escrita pelo estudante E4

O estudante verifica as mesmas condições do item anterior, o que reforça a nossa ideia de que esteja confundindo as condições de Anel com as de Subanel. Percebemos que o estudante não se preocupa em verificar inicialmente se $Q[\sqrt{P}] \in R$, condição inicial para que o primeiro seja Subanel do segundo, mas supondo isso como verdade, E4 verifica corretamente, pela proposição de Subanel apresentada na página 61, se o conjunto dado é fechado para as operações $-$ e $\cdot$.

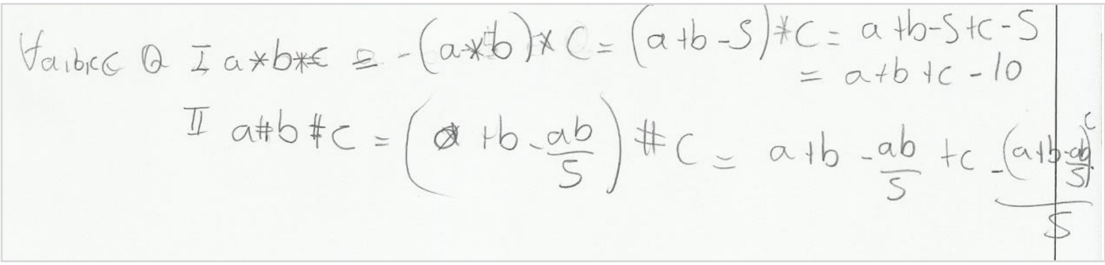
Os itens E e G, respectivamente, "$(\{0\} \times 2Z, +, \cdot)$ *é Subanel de* $(Z \times Z, +, \cdot)$" e "$(M_2(N), +, \cdot)$ *é um Anel",* são tratados pelo estudante da mesma forma que os itens C e D, ou seja, ele mostrou que os conjuntos são não vazios e fechados para as operações de subtração e multiplicação.

Consideramos, portanto, que o estudante E4 tenha interiorizado que as condições para verificar se um sistema $(A, +, \cdot)$ é um Anel ou um Subanel de outro sistema são as mesmas, a saber:

- A é não vazio;
- $\forall\, x, y \in A,$ temos que $x - y \in A$ (fechado para a subtração);
- $\forall\, x, y \in A,$ temos que $x . y \in A$ (fechado para a multiplicação).

Na tarefa 4, E3 assume valores $a, b, c \in Q$ e verifica apenas a propriedade associativa para as duas operações ($*$ e $\#$), porém, o estudante somente aplica as operações sem mostrar que os parênteses podem ser associados de modos diferentes na expressão, sem alterar a igualdade.

Figura 21 – Registro escrito do estudante E4 para a propriedade associativa na tarefa 4



Fonte: resolução escrita pelo estudante E4

Inferimos, a partir desse registro, que o estudante apresenta dificuldades em lidar com as propriedades, pois considera que todas as propriedades apresentadas na tarefa 2 possuem relação com o conceito de Anel, mas verifica incorretamente apenas a associatividade.

A tarefa 5 é deixada em branco por E4, o que nos leva a concluir que não compreenda o conceito de Anel de integridade, ou como aplicá-lo, pois verifica que a equação do 2º grau $x^2 = x$ possui como solução $x = 0$ ou $x = 1$ é uma tarefa simples e rotineira para um estudante da 2ª série de Matemática.

5.4.1 Síntese e considerações a respeito do registro escrito do estudante E4

Ao analisar o registro escrito do estudante E4, percebemos que ele concebe Anel como um sistema constituído de um conjunto, duas operações binárias e propriedades. Diferente da maioria dos estudantes, ele supõe, quando necessários, elementos pertencentes aos conjuntos trabalhados. Demonstra saber definir as propriedades relacionadas a esse conceito, apesar de não saber quais condições devem ser satisfeitas para que um sistema seja considerado um Anel, uma vez que percebemos na tarefa 3 que o estudante verifica se um sistema é um Anel do mesmo modo como verifica um Subanel, demonstrando confusão de sua parte com os dois conceitos. Inferimos, por meio do registro escrito da tarefa 4, que o estudante saiba lidar com operações usuais, mas o mesmo não acontece com as propriedades das operações e também não consegue aplicar um conceito relacionado a Anel em casos particulares e conhecidos. Assim, acreditamos que esse estudante tenha uma concepção ação, segundo a Teoria APOS.

5.5 Estudante E5

O estudante E5 estava cursando pela primeira vez a disciplina de Estruturas Algébricas e já lecionava Matemática no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio.

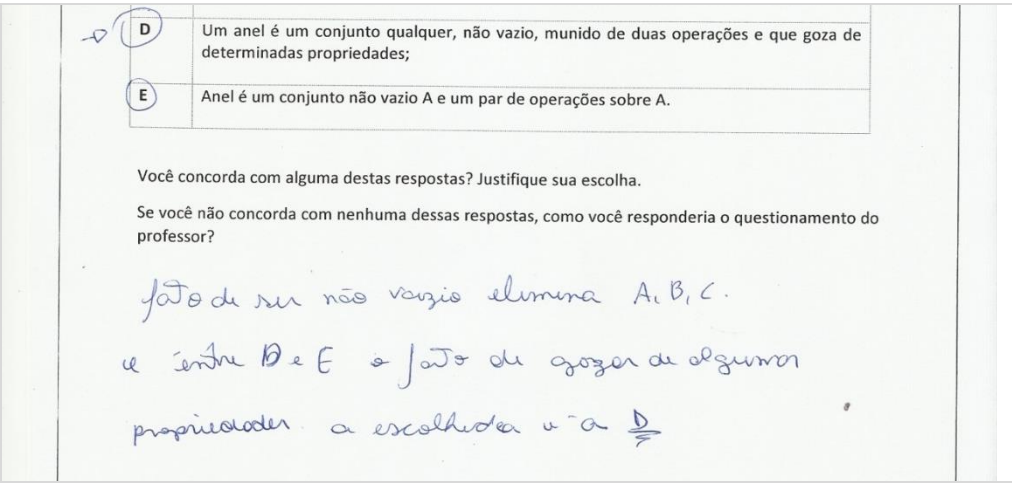
E5 comentou que não havia tido a oportunidade de discutir em nenhuma disciplina a respeito do modo como os conteúdos matemáticos devem ser abordados no Ensino Superior. Naquele momento, E5 mencionou não ter preocupação em compreender os porquês de se estudar determinado conteúdo matemático no Ensino Superior, mas sim, em “dar conta do que é obrigado” e se formar. Para ele, antes de se estudar um conteúdo matemático, é importante abordar os conteúdos necessários para se aprendê-lo.

O estudante considerou que, até aquele momento, a disciplina de Cálculo I se mostrou mais difícil que a de Estruturas Algébricas e considerou essa última importante para sua formação enquanto professor de Matemática, pois facilitou a demonstração de fórmulas, o que é importante para mostrar aos alunos como elas foram originadas.

Apresentamos a seguir nossa análise do registro escrito do estudante para as tarefas propostas.

O estudante E5 responde à tarefa 1 concordando com a resposta dada pelo aluno D. Inferimos que a sua escolha tenha sido por eliminação. O estudante evidencia ter certeza de que um Anel é um conjunto não vazio e elimina as respostas dadas pelos alunos A, B e C. Tendo que decidir entre as respostas dadas pelos alunos D e E, ele comenta:

Figura 22 – Registro escrito do estudante E5 para o conceito de Anel



D	Um anel é um conjunto qualquer, não vazio, munido de duas operações e que goza de determinadas propriedades;
E	Anel é um conjunto não vazio A e um par de operações sobre A.

Você concorda com alguma destas respostas? Justifique sua escolha.

Se você não concorda com nenhuma dessas respostas, como você responderia o questionamento do professor?

fato de ser não vazio elimina A, B, C.
e entre D e E o fato de gozar de algumas
propriedades a escolhida é a D

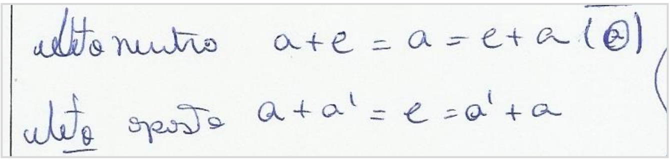
Fonte: resolução escrita pelo estudante E5

Assim, ao comparar as duas últimas respostas, as únicas que descartam a possibilidade de termos um conjunto vazio, o estudante decide por aquela mais completa.

Na tarefa 2, E5 fornece uma definição para todas as propriedades apresentadas. Para tanto, assume elementos, sem considerar um conjunto que os contenha.

Apenas a distributiva da multiplicação em relação à adição é definida parcialmente de modo correto, por ser definida apenas a esquerda da operação; todas as demais propriedades são definidas corretamente, inclusive o elemento neutro da adição e da multiplicação, bem como o oposto da multiplicação, para o qual o estudante define à esquerda e à direita da operação, apesar de não especificar a validade das propriedades para todo elemento pertencente a um conjunto não vazio, como podemos observar na Figura 23.

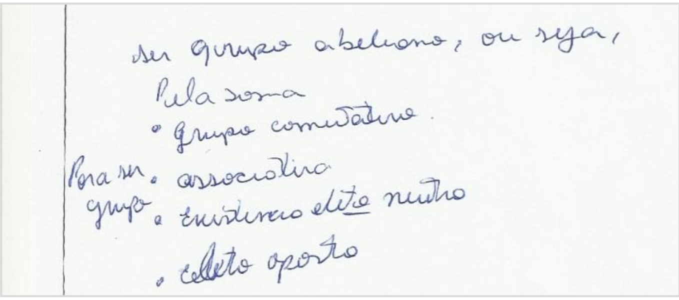
Figura 23– Registro escrito do estudante E5 para o conceito de elemento neutro e elemento oposto da adição



Fonte: resolução escrita pelo estudante E5

Com relação às propriedades que possuem relação com o conceito de Anel, o estudante comenta o que é necessário provar para que um sistema do tipo $(A, +, \cdot)$ seja um Anel. Para ele, $(A, +)$ precisa ser um grupo abeliano e especifica, conforme registro da Figura 24.

Figura 24 – Registro escrito do estudante E5 para um grupo abeliano

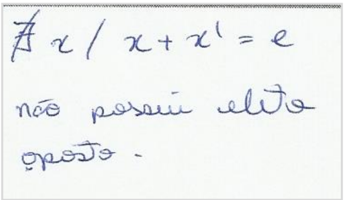


Fonte: resolução escrita pelo estudante E5

E5 ainda complementa, afirmando que a operação de multiplicação precisa gozar da propriedade associativa e ser distributiva em relação à adição. Assim, o estudante deixa claro, não somente quais propriedades acredita possuir relação com o conceito de Anel, mas descreve para quais operações elas devem ser satisfeitas.

Na tarefa 3, o estudante atribuiu um valor, verdadeiro ou falso, para todos os itens apresentados, porém justificou sua decisão apenas para os itens A e B. O item A, “$(\mathrm{N}, +, \cdot)$ é um Anel comutativo”, foi corretamente considerado por ele como sendo falso, e sua justificativa também foi correta, conforme registro da Figura 25.

Figura 25 – Registro escrito do estudante E5 para a tarefa 3, item A



Fonte: resolução escrita pelo estudante E5

O item B foi corretamente assumido como sendo falso, porém, sua justificativa está relacionada com o conceito de Anel sem unidade, indicando que o estudante assumiu *a priori* que o sistema $(Q^{*}, +, \cdot)$ é um Anel.

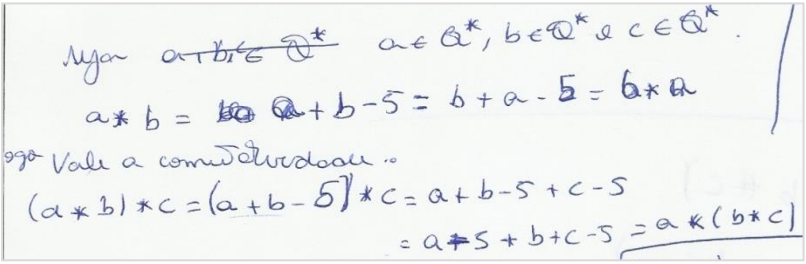
Apresentamos abaixo as demais sentenças e os respectivos valores atribuídos por E5.

- (C) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ não é um Anel; (Falso)
- (D) $(Q[\sqrt{P}], +, \cdot)$ *não é um Subanel de R*; (Falso)
- (E), $(\{0\} \times 2Z, +, \cdot)$ *é Subanel de* $(Z \times Z, +, \cdot)$; (Verdadeiro)
- (F) Z_4 *não é Subanel de* Z_5; (Verdadeiro)
- (G) $(M_2(N), +, \cdot)$ *é um Anel*. (Verdadeiro)

Por não apresentar justificativa alguma para tais decisões, consideramos que o estudante tenha recorrido apenas a fatos que estão na memória.

Na tarefa 4, E5 considera os elementos $a, b, c \in Q^{*}$, quando na verdade, os elementos deveriam pertencer a Q. Consideramos que o estudante tenha se confundido com a primeira operação do sistema, $*$. As propriedades comutativa e associativa para a operação $*$ são verificadas corretamente, como apresentado na Figura 26.

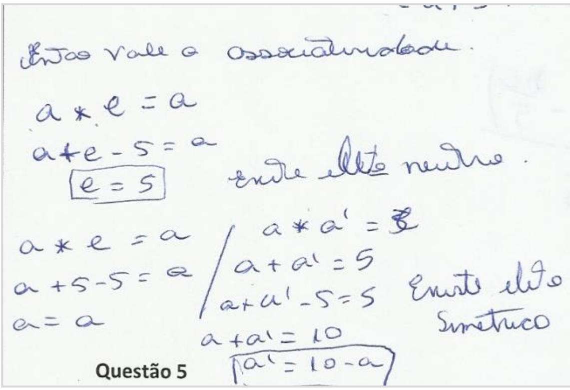
Figura 26 – Registro escrito do estudante E5 para as propriedades associativa e comutativa na tarefa 4



Fonte: resolução escrita pelo estudante E5

A existência do elemento neutro e o fato de que todo elemento do conjunto possui simétrico para a primeira operação também são verificadas corretamente.

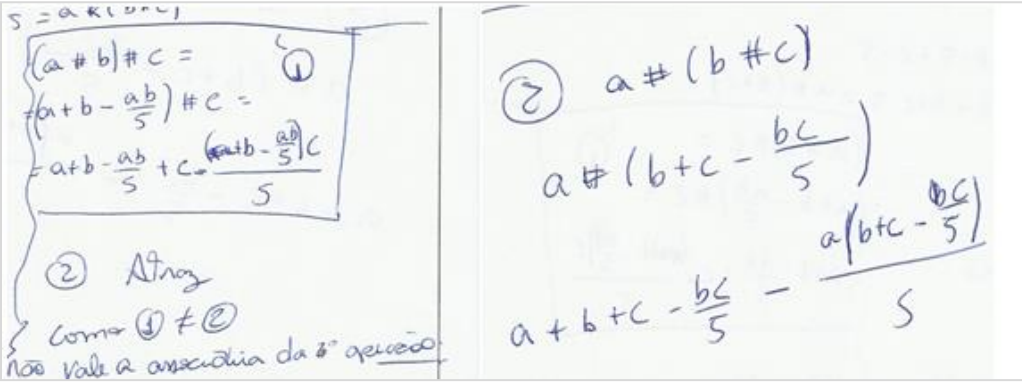
Figura 27 – Registro escrito do estudante E5 para os elementos neutro e oposto na tarefa 4



Fonte: resolução escrita pelo estudante E5

E5 considera que a propriedade associativa não é válida para a segunda operação, #, pois ao desenvolver os dois membros da igualdade, $(a\#b)\#c = a\#\,(b\#c)$, não obtêm valores iguais. Além disso, o estudante não considera a validade para todo $a, a' \in A$.

Figura 28 – Registro escrito do estudante E5 da propriedade associativa na tarefa 4



Fonte: resolução escrita pelo estudante E5

Por não perceber a igualdade existente, consideramos que seria importante o estudante desenvolver as expressões, simplificando-as ao máximo. Considerando que a igualdade não fosse válida, o estudante concluiu que o sistema não é um Anel.

Na tarefa 5, E5 demonstra corretamente que se $x^2 = x$, então $x = 0$ ou $x = 1$, apesar de não mencionar que algumas passagens eram possíveis, por termos que $x \in A$, com A sendo um Anel de integridade.

5.5.1 Síntese e considerações a respeito do registro escrito do estudante E5

Ao analisar o registro escrito do estudante E5, percebemos que ele concebe Anel como um sistema constituído de um conjunto, duas operações binárias e propriedades. Ele sabe definir e citar corretamente as propriedades e condições que um sistema deve satisfazer para que seja considerado um Anel, e além disso, consegue lidar corretamente com essas propriedades para operações não usuais. O estudante reconhece Anéis e Subanéis, apesar de só ter conseguido justificar casos em que os conjuntos eram numéricos e conhecidos, como os o conjunto dos números naturais e dos racionais. Consideramos que sua dificuldade tenha sido com os conjuntos, pois a verificação das propriedades das operações foi realizada corretamente na tarefa 4. Portanto, concluímos que o estudante tenha uma concepção processo do conceito de Anel, segundo a Teoria APOS, necessitando lidar com uma diversidade maior de conjuntos, não somente os numéricos.

5.6 ESTUDANTE E6

O estudante E6 estava cursando pela primeira vez a disciplina de Estruturas Algébricas e já lecionava Matemática no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio.

E6 mencionou que teve a oportunidade de discutir a respeito do modo como os conteúdos matemáticos devem ser abordados no Ensino Superior, principalmente nas aulas de Didática e Tópicos da Educação Matemática. Para ele, é importante compreender os porquês de se estudar um determinado conteúdo matemático no Ensino Superior para motivar a estudar o conteúdo, e considera importante que um professor tenha compreensão total de um conteúdo para que assim possa ensinar a outras pessoas.

O estudante considerou que, até aquele momento, a disciplina de Física se mostrou mais difícil que a de Estruturas Algébricas e considerou esta última importante para sua formação, pois com ela podemos ter o conhecimento de onde surgiram determinadas teorias e como compreendê-las.

Apresentamos a seguir nossa análise do registro escrito do estudante para as tarefas propostas.

O estudante E6 respondeu à tarefa 1 concordando com a resposta dada pelo aluno D. Sua justificativa para essa escolha é de que essa resposta é a que mais se parece com a definição vista de Anel, indicando recorrer apenas a fatos que estão em sua memória.

Na tarefa 2, E6 apresenta uma definição para todas as propriedades apresentadas. Para tanto, considera elementos a, b, c, sem especificar qual conjunto os contém.

Apenas a propriedade comutativa para a adição é definida corretamente. A associatividade para a adição é definida do seguinte modo:

Figura 29 – Registro escrito do estudante E6 para a propriedade associativa

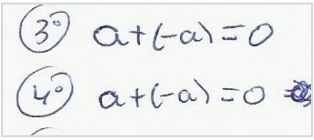
$$1^\circ \quad a+b=b+c \Rightarrow a=c$$

Fonte: resolução escrita pelo estudante E2

Percebemos certa confusão com a definição de elementos regulares (que cumprem a lei do cancelamento para a adição).

Os elementos neutro e oposto da adição são respectivamente definidos do mesmo modo:

Figura 30 – Registro escrito do estudante E6 para o conceito de elemento neutro e elemento oposto da adição



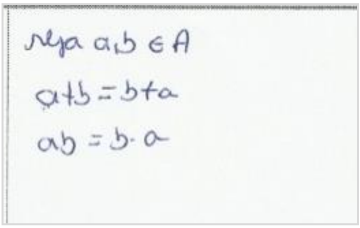
Fonte: resolução escrita pelo estudante E6

Como o elemento neutro e o oposto de determinada operação estão diretamente relacionados, consideramos que o estudante não tenha compreendido os dois. A distributividade da multiplicação em relação à adição é definida corretamente, porém apenas à direita.

Para o estudante, todas as propriedades possuem alguma relação com o conceito de Anel.

Na tarefa 3, o estudante atribuiu um valor, verdadeiro ou falso, para todas os itens, porém E6 comenta que apenas não "chutou" o item A, para o qual atribuiu valor verdadeiro e justificou do seguinte modo:

Figura 31 – Registro escrito do estudante E6 para a tarefa 3, item A



Fonte: resolução escrita pelo estudante E6

Percebemos que o estudante não assume valores $a, b \in N$, mas sim, valores pertencentes a um conjunto genérico, e em seguida, descreve a propriedade comutativa, tanto para a adição como para a multiplicação, porém sem verificá-las para o sistema dado.

O estudante menciona em alguns itens que não se lembra de como fazer as verificações solicitadas.

As questões 4 e 5 não foram resolvidas pelo estudante, que menciona não lembrar de como se faz. Consideramos possível que ele não saiba lidar com conjuntos, operações não usuais, e não saiba o que é um Anel de integridade ou como lidar com ele em situações-problema da Matemática.

5.6.1 Síntese e considerações a respeito do registro escrito do estudante E6

Ao analisar o registro escrito do estudante E6, percebemos que ele concebe Anel como um sistema constituído de um conjunto, duas operações binárias e propriedades. Ele apresenta dificuldades na definição das propriedades relacionadas a esse conceito e indica não resolver tarefas que exijam a verificação de Anéis ou Subanéis, seja com conjunto e operações conhecidas, ou não. Além disso, não relaciona esse conceito com situações conhecidas, como a resolução de equações do 2º grau sem o termo independente. Acreditamos que esse estudante ainda esteja no processo inicial de construção do conceito de Anel, não conseguindo coordenar as ações A1 e A2 e, portanto, necessita passar por um processo de desencapsulação dos objetos O1, O2 e O3, a fim de inserir novos exemplos, para então repetir essas ações desejadas e passar a ter uma concepção ação de Anel, segundo a Teoria APOS.

5.7 ESTUDANTE E7

O estudante E7 estava cursando pela primeira vez a disciplina de Estruturas Algébricas e já lecionava Matemática no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio.

E7 comentou que, de certa forma, pôde discutir com alguns professores como determinados conteúdos matemáticos devem ser abordados no Ensino Superior. Tal estudante considera importante compreender os porquês de se estudar um determinado conteúdo matemático no Ensino Superior, pois para ele existem disciplinas estudadas na graduação que deixam os estudantes confusos, e também considerou importante que na abordagem de um conteúdo se estude também onde ele será aplicado na profissão de professor de Matemática.

Para o estudante, até então, a disciplina de Estruturas Algébricas só não se apresentou mais difícil que a disciplina de Análise, e destacou que a primeira contribuiu para sua formação, pois foi por meio dos conteúdos estudados que conseguiu assimilar conteúdos estudados em outras disciplinas.

Apresentamos a seguir nossa análise do registro escrito deste estudante para as tarefas propostas.

O estudante E7 respondeu à tarefa 1 concordando com a resposta dada pelo aluno D, porém, não apresentou uma justificativa para tal escolha.

Na tarefa 2, E7 definiu apenas o elemento neutro, tanto para a adição quanto para a multiplicação, considerando zero para a primeira e 1 para a segunda. Por não assumir operações e elementos genéricos, consideramos que o estudante compreenda elemento neutro apenas para operações usuais e conjuntos numéricos. Para as demais propriedades, E7 comenta que só se lembra do nome.

O estudante acredita que apenas a propriedade comutativa, tanto para a adição quanto para a multiplicação, possui relação com o conceito de Anel.

Na tarefa 3, o estudante E7 atribuiu um valor, verdadeiro ou falso, para todos os itens apresentados, porém, não justificou nenhum deles. As suas decisões foram:

- (A) $(N, +, \cdot)$ é um Anel comutativo; (Verdadeiro)
- (B) $(Q^*, +, \cdot)$ é um Anel sem unidade; (Falso)
- (C) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ não é um Anel; (Verdadeiro)
- (D) $(Q[\sqrt{P}], +, \cdot)$ *não é um Subanel de R*; (Verdadeiro)
- (E), $(\{0\} \times 2Z, +, \cdot)$ *é Subanel de* $(Z \times Z, +, \cdot)$; (Falso)
- (F) Z_4 *não é Subanel de* Z_5; (Falso)
- (G) $(M_2(N), +, \cdot)$ *é um Anel*. (Verdadeiro)

Por não apresentar justificativa alguma para as decisões tomadas, consideramos que o estudante tenha recorrido a fatos que estão na memória para atribuir os valores.

As questões 4 e 5 não foram resolvidas pelo estudante, que menciona não se lembrar de como se faz. É possível que ele não saiba lidar com conjuntos, operações não usuais, e talvez não saiba o que é um Anel de integridade ou como aplicá-lo em situações-problema da Matemática.

5.7.1 Síntese e considerações a respeito do registro escrito do estudante E7

Ao analisar o registro escrito do estudante E7, percebemos que ele concebe Anel como um sistema constituído de um conjunto, duas operações binárias e propriedades, porém, sem compreender de quais propriedades das operações o conjunto deve gozar. Ele apresenta dificuldades na definição das propriedades relacionadas a esse conceito e indica não resolver tarefas que exijam a verificação de Anéis ou Subanéis, seja com conjuntos e operações conhecidas, ou não. Além disso, não relaciona esse conceito com situações conhecidas, como a resolução de equações do 2º grau sem o termo independente. Acreditamos que este estudante ainda esteja no processo inicial de construção do conceito de Anel, não conseguindo coordenar as ações A1 e A2 e, portanto, necessita passar por um processo de construção dos objetos O1, O2 e O3, para então repetir essas ações desejadas e passar a ter uma concepção ação de Anel, segundo a Teoria APOS.

5.8 ESTUDANTE E8

O estudante E8 estava cursando as duas habilitações concomitantemente, licenciatura e bacharelado, cursava pela primeira vez a disciplina de Estruturas Algébricas e já lecionava Matemática no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

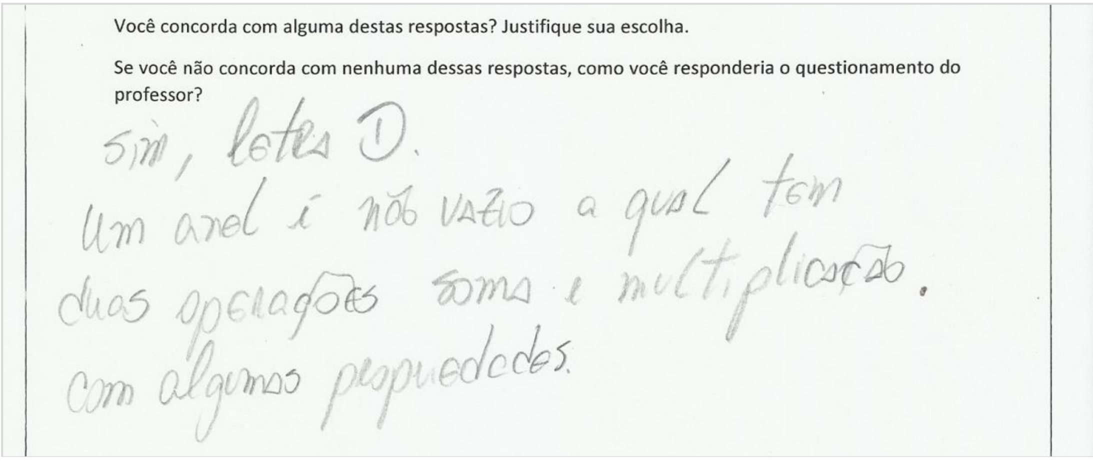
O estudante comentou que foi possível discutir com alguns professores o modo como os conteúdos matemáticos devem ser abordados no Ensino Superior e que considera importante compreender os porquês de se estudar um determinado conteúdo matemático no Ensino Superior, pois são eles que nos fazem desenvolver a amplitude Matemática. Para E8, o mais importante ao se abordar um conteúdo matemático no Ensino Superior são as definições e os teoremas.

Para ele, a disciplina de Estruturas Algébricas não foi a mais difícil, destacando as disciplinas de Análise Real, Equações Diferenciais Parciais e Cálculo Avançado como mais difíceis. O estudante afirma ainda que a disciplina de Estruturas Algébricas contribuiu para a sua formação, pois considera que vários resultados estudados são conteúdos do Ensino Médio.

Apresentamos a seguir nossa análise do registro escrito do estudante para as tarefas propostas.

O estudante E8 respondeu à tarefa 1 concordando com a resposta dada pelo aluno D e comenta, conforme registro da Figura 32:

Figura 32 – Registro escrito do estudante E8 para o conceito de Anel


Você concorda com alguma destas respostas? Justifique sua escolha.

Se você não concorda com nenhuma dessas respostas, como você responderia o questionamento do professor?

sim, letra D.
Um anel é não vazio a qual tem
duas operações soma e multiplicação.
com algumas propriedades.

Fonte: resolução escrita pelo estudante E8

Diferente da resposta dada pelo aluno D, E8 nomeia as operações como soma, quando possivelmente queria dizer adição, e multiplicação, assim como é feito em Domingues e Iezzi (2003) ao se definir um Anel, não indicando necessariamente operações usuais. Além disso, o estudante não menciona Anel como um conjunto.

Na tarefa 2, E8 só não define a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, para a qual menciona só se lembrar do nome. As demais propriedades foram definidas corretamente.

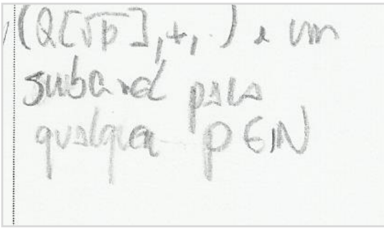
Para o estudante, apenas as propriedade associativa e comutativa possuem relação com o conceito de Anel, sendo ambas as propriedades para as operações de adição e multiplicação.

Na tarefa 3, o estudante E8 atribuiu um valor, verdadeiro ou falso, para todos os itens apresentados. Ele menciona não se lembrar de como analisar dois, sendo os itens (C), “$(Z_4, +, \cdot)$ *não é um Anel”,* e o item (F), “Z_4 *não é Subanel de* Z_5”, porém, considera ambas como verdadeiras. Isso indica certa dificuldade do estudante em lidar com o conjunto quociente Z_n.

O item (A), “$(N, +, \cdot)$ *é um Anel comutativo”*, é considerado incorretamente como verdadeiro, e a justificativa do estudante é de que N é um Anel, com a soma e a multiplicação. O item (B), “$(Q^*, +, \cdot)$ *é um Anel sem unidade”*, é considerado corretamente como falso, mas a justificativa apresentada está diretamente relacionada com o conceito de Anel sem unidade, quando deveria estar relacionada com o fato de $(Q^{*}, +, \cdot)$ não ser um Anel, indicando que o estudante considerou *a priori* o sistema como um Anel, não sentindo a necessidade de fazer tal verificação.

Para o item D, “$(Q[\sqrt{p}], +, \cdot)$ *não é um Subanel de R”*, E8 atribui corretamente o valor falso, apesar de não considerar para todo elemento pertencente ao conjunto Q. Sua justificativa é apresentada na Figura 33.

Figura 33 – Registro escrito do estudante E8 para a tarefa 3, item D



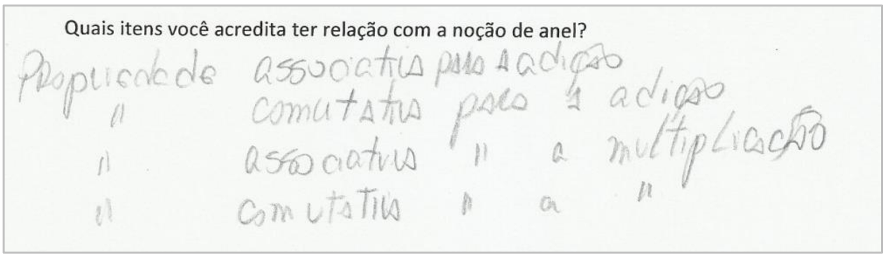
Fonte: resolução escrita pelo estudante E8

O item (E), “$(\{0\} \times 2Z, +, \cdot)$ *é Subanel de* $(Z \times Z, +, \cdot)$”, é erroneamente considerado por ele como falso, e sua justificativa é que $(\{0\} \times 2Z, +, \cdot)$ não é um Anel de integridade. O item G, “$(M_2(N), +, \cdot)$ *é um Anel”*, é erroneamente considerado como verdadeiro, e a justificativa é de que esse sistema só não é um Anel comutativo, indicando que o estudante o considerou *a priori* como um Anel.

Percebemos, a partir das justificativas dadas, que o estudante recorreu apenas a fatos que estão em sua memória, ou seja, ele mostrou já ter lidado com tais sistemas antes.

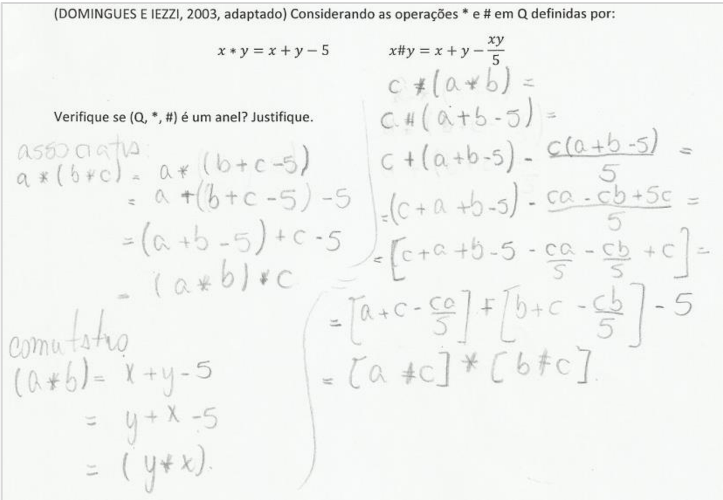
Na tarefa 4, E8 verifica corretamente as propriedades comutativa e associativa para a primeira operação, $*$, e a propriedade distributiva de # em relação a $*$. O estudante não assumi a validade $\forall a, b, c \in A$ e indica um equívoco a respeito das condições que um sistema deve satisfazer para que seja um Anel, ao deixar de verificar a existência do elemento neutro e que todo elemento possui oposto para a primeira operação e a propriedade associativa para a segunda operação, o que pode ser confirmado no modo como resolve a tarefa 2 e a tarefa 4, apresentadas nas Figuras 34 e 35 respectivamente.

Figura 34 – Registro escrito do estudante E8 para a tarefa 2


Quais itens você acredita ter relação com a noção de anel?

Propriedade associativa para a adição
" comutativa para a adição
" associativa " a multiplicação
" comutativa " a "

Figura 35 – Registro escrito do estudante E8 para a tarefa 4


(DOMINGUES E IEZZI, 2003, adaptado) Considerando as operações * e # em Q definidas por:

$x * y = x + y - 5$ $\quad$ $x\#y = x + y - \frac{xy}{5}$

Verifique se (Q, *, #) é um anel? Justifique.

associativa:

$a * (b * c) = a * (b + c - 5) = a + (b + c - 5) - 5 = (a + b - 5) + c - 5 = (a * b) * c$

comutativa

$(a * b) = x + y - 5 = y + x - 5 = (y * x).$

$c \# (a * b) = c \# (a + b - 5) = c + (a + b - 5) - \frac{c(a + b - 5)}{5} = (c + a + b - 5) - \frac{ca - cb + 5c}{5} = \left[c + a + b - 5 - \frac{ca}{5} - \frac{cb}{5} + c\right] = \left[a + c - \frac{ca}{5}\right] + \left[b + c - \frac{cb}{5}\right] - 5 = [a \# c] * [b \# c].$

Fonte: resolução escrita pelo estudante E8

A tarefa 5 é deixada em branco pelo estudante, de que menciona não se lembrar. Consideramos que ele talvez não saiba como relacionar o conceito de Anel de integridade, pois a verificação das raízes de equação do 2º grau sem o termo independente é algo simples e rotineiro para um estudante da 2ª série de Matemática, e ele utiliza o conceito de Anel de integridade para justificar o item E da tarefa 3.

5.8.1 Síntese e considerações a respeito do registro escrito do estudante E8

Ao analisar o registro escrito do estudante E8, percebemos que ele concebe Anel como um sistema constituído de um conjunto, duas operações binárias e propriedades, porém, determina parcialmente de quais propriedades das operações o conjunto deve gozar. Ele denota reconhecer Anéis ou Subanéis, constituídos por conjuntos e operações usuais, sem sentir a necessidade de fazer verificações detalhadas, o que indica que consegue lidar com diferentes exemplos. Inferimos que E8 não tenha dificuldades em lidar com operações não usuais, como percebemos na tarefa 4, em que não apresentou uma resposta esperada por não ter interiorizado todas as propriedades de que um Anel deve gozar. Acreditamos que este estudante ainda esteja no processo inicial de construção do conceito de Anel, não conseguindo coordenar as ações A1 e A2 e, portanto, necessita passar por um processo de construção dos objetos O1, O2 e O3, para então repetir essas ações desejadas e passar a ter uma concepção ação de Anel segundo a Teoria APOS.

5.9 ESTUDANTE E9

O estudante E9 estava cursando pela primeira vez a disciplina de Estruturas Algébricas e já lecionava no Ensino Fundamental II.

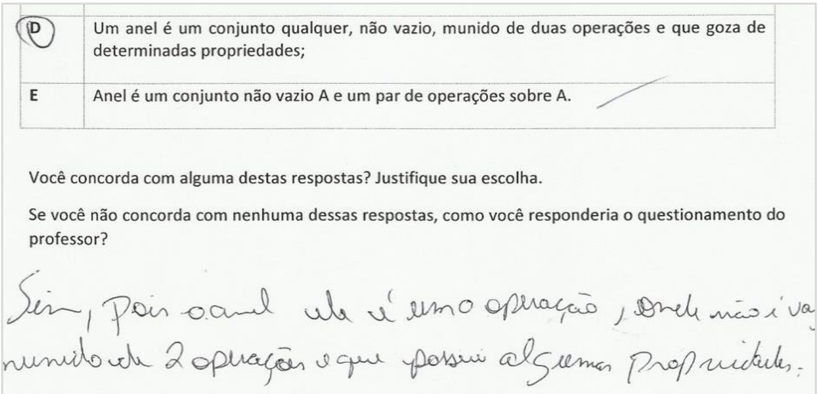
E9 comentou que não havia tido a oportunidade de discutir a respeito do modo como os conteúdos matemáticos devem ser abordados no Ensino Superior, mas considera discussões desse tipo importantes, bem como compreender os porquês de estudá-los, pois além de ser um conhecimento a mais, contribui para que o futuro professor tenha conhecimento para também explicar a seus alunos. O estudante complementa que, ao abordar um determinado conteúdo, o professor, além de explicar os porquês de estudá-lo, deve apresentar aplicações do conteúdo no cotidiano.

Para ele, as disciplinas de Cálculo I, Álgebra Linear e Geometria Analítica foram mais difíceis que a disciplina de Estruturas Algébricas, e considera que esta última contribuiu para a sua formação enquanto professor de Matemática, pois ajudou na escrita de demonstrações matemáticas e no desenvolvimento do raciocínio lógico.

Apresentamos a seguir nossa análise do registro escrito do estudante para as tarefas propostas.

O estudante E9 respondeu à tarefa 1 concordando com a resposta dada pelo aluno D, e justifica do seguinte modo:

Figura 36 – Registro escrito do estudante E9 para o conceito de Anel



D	Um anel é um conjunto qualquer, não vazio, munido de duas operações e que goza de determinadas propriedades;
E	Anel é um conjunto não vazio A e um par de operações sobre A.

Você concorda com alguma destas respostas? Justifique sua escolha.

Se você não concorda com nenhuma dessas respostas, como você responderia o questionamento do professor?

Sim, pois o anel ele é uma operação, onde não é va
munido de 2 operações e que possui algumas propriedades.

Fonte: resolução escrita pelo estudante E9

Consideramos que E9 pode ter se confundido ao dizer que um Anel é uma operação, quando, na verdade, queria dizer que Anel é um conjunto, isso pela escolha feita e pela estrutura da frase.

Na tarefa 2, E9 não definiu alguma das propriedades apresentadas, mas comentou que a associatividade e a comutatividade para a operação de adição estão relacionadas com o conceito de grupo, enquanto as mesmas propriedades para a operação de multiplicação estão relacionadas ao conceito de Anel, assim como a distributividade da multiplicação em relação à adição.

Na tarefa 3, tal estudante atribuiu valor verdadeiro para o item A, porém sem justificativa. Os demais itens foram deixados sem resposta.

Consideramos possível que o estudante não saiba lidar com tarefas que exijam a habilidade em verificar se um sistema é um Anel ou um Subanel, assim como não reconhece diferentes exemplos deles.

Na tarefa 4, E9 verifica as propriedades comutativa e associativa para a primeira operação, *, sem indicar a validade $\forall x, y, z \in A$. A comutatividade é verificada corretamente, porém, o estudante indica certa dificuldade com a propriedade associativa, na qual, mesmo obtendo a igualdade $(x * y) * z = x * (y * z)$, faz manipulações inadequadas e sem justificativas, como segue:

Figura 37 – Registro escrito do estudante E9 para a propriedade associativa para $*$ na tarefa 4

Associativo $(x*y)*z = x*(y*3)$.

$(x+y-5)*3 = x+y-5+x+y-5+3-5. = (y+3-5)+x+y-5+x+y =$
$x*(y*3)$.

Fonte: resolução escrita pelo estudante E9

Na tarefa 5, o estudante mostrou corretamente que se $x^2 = x$, então $x = 0$ ou $x = 1$, sendo o único que justificou que isso acontece porque $x \in A$, com A sendo um Anel de integridade, porém, não deixa claro como essa relação é estabelecida.

5.9.1 Síntese e considerações a respeito do registro escrito do estudante E9

Ao analisar o registro escrito do estudante E9, percebemos que ele concebe Anel como um sistema constituído de um conjunto não vazio, duas operações binárias e propriedades, porém, sem compreender de quais propriedades das operações o conjunto deve gozar. Ele cumpre de modo equivocado ações para verificar se um dado sistema com operações não usuais é um Anel, apesar de o não fazer para conjunto e operações usuais. O estudante relaciona esse conceito com uma situação conhecida, a resolução de equações do 2º grau sem o termo independente, porém, sem deixar claro de que modo a relação acontece. Assim, acreditamos que este estudante tenha uma concepção ação, segundo a Teoria APOS.

5.10 Estudante E10

O estudante E10 estava cursando pela primeira vez a disciplina de Estruturas Algébricas e já lecionava no Ensino Fundamental II.

E10 mencionou que não teve a oportunidade de discutir o modo como os conteúdos matemáticos devem ser abordados no Ensino Superior, que considera importante compreender os porquês de se estudá-los, e que não paramos para pensar neles devido às dificuldades que surgem na compreensão dos conteúdos.

Para o estudante, as disciplinas de Cálculo II e Análise Real foram mais difíceis que a disciplina de Estruturas Algébricas, e sem justificar, considerou que esta última não contribuiu para a sua formação enquanto professor de Matemática.

Apresentamos a seguir nossa análise do registro escrito do estudante para as tarefas propostas.

O estudante E10 respondeu à tarefa 1 concordando com o aluno D e justifica essa escolha com o seguinte comentário,

Figura 38 – Registro escrito do estudante E10 para o conceito de Anel

D. Não lembro exatamente do conceito sobre o que é um anel mas creio que a resposta mais adequada seja a do item D, pois anel é um conjunto não vazio, o que restaria os itens D e E e como no item E não menciona que tem propriedades, resta apenas o item D.

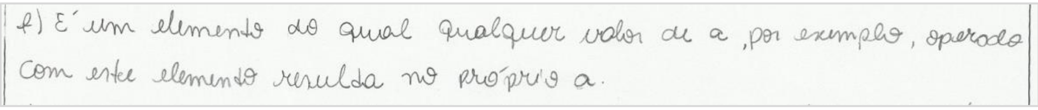
Fonte: resolução escrita pelo estudante E10

Apesar de recorrer a fatos que estão na memória, E10 indica ter certeza de que um Anel é um conjunto não vazio, e que mencionar que esse conjunto tem propriedades é importante para a tomada de decisão, portanto, por eliminação, decide pela resposta do aluno D.

Na tarefa 2, E10 não teceu algum comentário apenas para o elemento oposto da adição, para todas as demais foi o único estudante a fazer isso sem utilizar somente a linguagem matemática. Para tanto, ele supõe elementos e considera importante que estes respeitem os critérios do conjunto que os contenha.

As propriedades associativa e comutativa são definidas corretamente para as operações de adição e multiplicação, enquanto a distributiva da multiplicação em relação à adição é definida somente à esquerda. Já o elemento neutro tanto para a adição quanto para a multiplicação é definido utilizando-se a linguagem natural, como apresentado na Figura 39.

Figura 39 – Registro escrito do estudante E10 para o conceito de elemento neutro da multiplicação

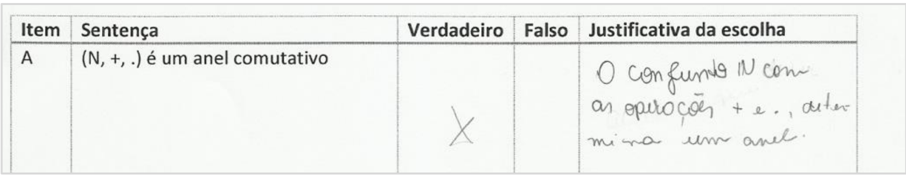

f) É um elemento do qual qualquer valor de a, por exemplo, operado com este elemento resulta no próprio a.

Fonte: resolução escrita pelo estudante E10

Inferimos que o estudante tenha compreendido o que é o elemento neutro para uma operação qualquer, porém, consideramos importante que um estudante nessa fase do curso de Matemática saiba defini-lo recorrendo a uma linguagem matemática mais formal. Acreditamos ser possível também que E10 não tenha entendido que o elemento neutro de uma dada operação deva ser verificado tanto à direita quanto à esquerda de uma dada operação.

Na tarefa 3 o estudante forneceu um valor, verdadeiro ou falso, para todos os itens apresentados, mas justificou apenas a sua decisão para o item A, como segue:

Figura 40 – Registro escrito do estudante E10 para a tarefa 3, item A



Item	Sentença	Verdadeiro	Falso	Justificativa da escolha
A	(N, +, .) é um anel comutativo	X		O conjunto N com as operações + e ., determina um anel.

Fonte: resolução escrita pelo estudante E10

Os valores atribuídos para os demais itens foram:

- *(B)* $(Q^*, +, \cdot)$ *é um Anel sem unidade*; (Verdadeiro)
- (C) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ *não é um Anel*; (Falso)
- (D) $(Q[\sqrt{p}], +, \cdot)$ *não é um Subanel de R*; (Falso)
- (E), $(\{0\} \times 2Z, +, \cdot)$ *é Subanel de* $(Z \times Z, +, \cdot)$; (Verdadeiro)
- (F) Z_4 *não é Subanel de* Z_5; (Verdadeiro)
- (G) $(M_2(N), +, \cdot)$ *é um Anel*. (Falso)

O estudante atribui valores corretos para os itens C, D, F e G. Inferimos que as decisões foram tomadas baseando-se apenas em fatos que estão em sua memória.

As tarefas 4 e 5 não foram resolvidas pelo estudante, que menciona, na tarefa 4, não lembrar como se prova se é Anel, mas recorda que o conjunto Q com duas operações determina um Anel. Consideramos que ele talvez não saiba lidar com conjuntos, operações não usuais e que também possa não saber o que é um Anel de integridade ou como aplicá-lo em situações-problema da Matemática.

5.10.1 Síntese e considerações a respeito do registro escrito do estudante E10

Ao analisar o registro escrito do estudante E10, percebemos que ele concebe Anel como um sistema constituído de um conjunto, duas operações binárias e propriedades, porém, sem compreender de quais propriedades das operações o conjunto deve gozar. Ele não apresenta dificuldades na definição das propriedades relacionadas a esse conceito, apesar de recorrer à linguagem natural. O estudante E10 julga determinados sistemas como Anéis ou Subanéis, quando solicitado, mas não apresenta justificativas para suas decisões, o que indica recorrer apenas a fatos de sua memória. Ele mostra não saber lidar com operações não usuais e com exercícios que exijam a verificação de um Anel. Além disso, não relaciona esse conceito com situações conhecidas, como a resolução de equações do 2º grau sem o termo independente. Portanto, consideramos que o estudante ainda precisa lidar com diferentes Anéis, com conjuntos e operações quaisquer, de modo a coordenar as ações A1 e A2 para construir a ação A3, e assim, passar a ter uma concepção ação do conceito de Anel.

5.11 ESTUDANTE E11

O estudante E11 estava cursando pela primeira vez a disciplina de Estruturas Algébricas e já lecionava Matemática no Ensino Fundamental I, para os 4º e 5º anos.

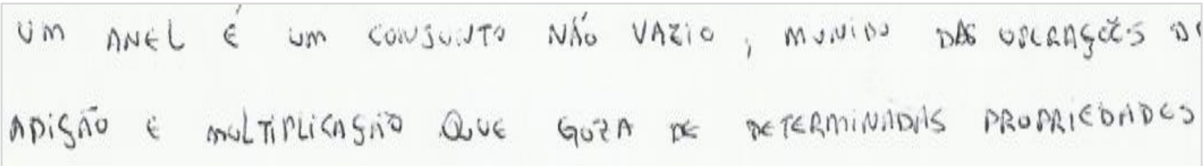
E11 comentou que teve a oportunidade de discutir o modo como os conteúdos matemáticos devem ser abordados no Ensino Superior, de um modo que as discussões guiavam o aluno, sem dar respostas, mas fazendo com que ele pensasse e formasse suas próprias ideias. Ele considerou importante que, ao abordar um determinado conteúdo matemático, o professor se coloque como um guia, de modo a ajudar o aluno a chegar ao entendimento, bem como considera importante compreender os porquês de se estudá-lo, por ser um conhecimento a mais.

Para este estudante, a disciplina de Estruturas Algébricas só não foi mais difícil que a disciplina de Física. O mesmo considerou a disciplina importante para a sua formação, pois permitiu compreender conteúdos antes não compreendidos.

Apresentamos a seguir nossa análise do registro escrito do estudante para as tarefas propostas.

O estudante E11 respondeu à tarefa 1 comentando que concorda parcialmente com alguma das respostas dadas e justifica, apresentando uma resposta pessoal para o questionamento: “O que é um Anel?”.

Figura 41 – Registro escrito do estudante E11 para o conceito de Anel


UM ANEL É UM CONJUNTO NÃO VAZIO, MUNIDO DAS OPERAÇÕES D
ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO QUE GOZA DE DETERMINADAS PROPRIEDADES

Fonte: resolução escrita pelo estudante E11

Inferimos que o estudante concordou parcialmente com a resposta dada pelo aluno D, na qual especifica que as duas operações são adição e multiplicação, assim como feito em Domingues e Iezzi (2003), sem que isso indique alguma referência a operações usuais.

Na tarefa 2, E11 apresenta uma definição para todas as propriedades apresentadas. Porém, assume elementos sem especificar o conjunto que os contenha.

As propriedades associativa e comutativa, ambas para adição e multiplicação, são definidas corretamente, enquanto as definições da distributividade da multiplicação em relação à adição, do elemento neutro da adição e da multiplicação, bem como do elemento oposto da adição estão parcialmente corretas, por serem definidas apenas à direita da operação. O estudante considera que apenas as propriedades associativa, tanto para a adição quanto para a multiplicação, e distributiva da multiplicação em relação à adição possuem relação com o conceito de Anel.

Na tarefa 3, E11 não atribuiu um valor, verdadeiro ou falso, apenas para os seguintes itens:

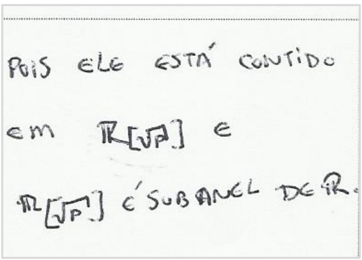
(B) $(\mathbb{Q}^{*}, +, \ \cdot)$ é um Anel sem unidade;
(C) $(\mathbb{Z}_4, +, \ \cdot)$ não é um Anel;
(E), $(\{0\} \times 2\mathbb{Z}, +, \ \cdot)$ é Subanel de $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \ \cdot)$

Consideramos que isso tenha acontecido pela falta de familiaridade do estudante com os conjuntos assumidos.

O item (A), "$(N, +, \ \cdot)$ *é um Anel comutativo"*, é considerado corretamente por E11 como sendo falso, e a sua justificativa é de que o conjunto dado não possui elemento oposto.

O item (D), "$(Q[\sqrt{p}], +, \ \cdot)$ *não é um Subanel de R"*, assumido corretamente como falso, é justificado por ele do seguinte modo:

Figura 42 – Registro escrito do estudante E11 para a tarefa 4, item D



Fonte: resolução escrita pelo estudante E11

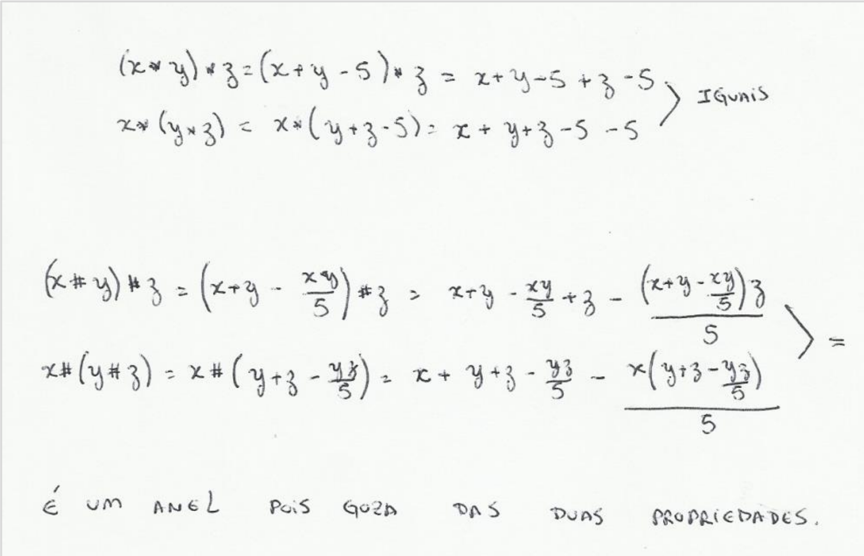
Percebemos que para E11 basta verificar se um Anel está contido em outro para termos um Subanel, o que evidencia uma dificuldade na compreensão deste conceito.

O item (F), "Z_4 *não é Subanel de* Z_5", é suposto corretamente como falso, porém, sua justificativa não é coerente, pois o estudante considera que $\mathbb{Z}_4$ pertence a $\mathbb{Z}_5$, quando, na verdade, é o fato de não pertencer que o justificaria corretamente.

O item (G), "$(M_2(N), +, \ \cdot)$ *é um Anel"*, é considerado corretamente como falso, e sua justificativa, apresentada corretamente, é de que o conjunto dado não possui elemento oposto.

Na tarefa 4, E11 verifica corretamente a propriedade associativa para as duas operações, * e #.

Figura 43 – Registro escrito do estudante E11 para a propriedade associativa para $* \, e$ # na tarefa 4



$$(x*y)*z = (x+y-5)*z = x+y-5+z-5$$
$$x*(y*z) = x*(y+z-5) = x+y+z-5-5$$

IGUAIS

$$(x\#y)\#z = \left(x+y-\frac{xy}{5}\right)\#z = x+y-\frac{xy}{5}+z-\frac{\left(x+y-\frac{xy}{5}\right)z}{5}$$
$$x\#(y\#z) = x\#\left(y+z-\frac{yz}{5}\right) = x+y+z-\frac{yz}{5}-\frac{x\left(y+z-\frac{yz}{5}\right)}{5}$$

=

É UM ANEL POIS GOZA DAS DUAS PROPRIEDADES.

Fonte: resolução escrita pelo estudante E11

Para este estudante, verificar a propriedade associativa para as duas operações envolvidas foi o suficiente para se concluir que o sistema dado é um Anel, o que demonstra que E11 tenha interiorizado incorretamente esta ação. Além disso, o estudante não assumiu inicialmente a propriedade válida para todo x, y, z pertencentes ao conjunto Q.

A tarefa 5 também é resolvida corretamente por E9, porém, sem relacionar a veracidade do fato com o conceito de Anel de integridade.

5.11.1 Síntese e considerações a respeito do registro escrito do estudante E11

Ao analisar o registro escrito do estudante E11, percebemos que ele concebe Anel como um sistema constituído de um conjunto, duas operações binárias específicas (adição e multiplicação) e propriedades, porém, não determina corretamente de quais propriedades das operações o conjunto deve gozar. Ele não apresenta dificuldades na definição das propriedades relacionadas a esse conceito, e demonstra dificuldades ao lidar com tarefas que exijam a verificação de Anéis ou

Subanéis, principalmente com conjuntos não numéricos, mesmo com operações conhecidas. Consideramos que E11 saiba lidar com propriedades de operações não usuais e não relacione o conceito de Anel com situações conhecidas, como para justificar determinados passos na resolução de equações do 2º grau sem o termo independente. Portanto, concluímos que o estudante tenha uma concepção ação do conceito de Anel, segundo a Teoria APOS, necessitando ainda lidar com uma variedade maior de Anéis, com conjuntos diversos.

5. 12 Síntese do capítulo

Ao longo deste capítulo, apresentamos uma análise individual dos registros escritos produzidos pelos estudantes participantes. Análise esta que nos permitiu inferir quais são as concepções dos estudantes para o conceito Anel. Agora, analisamos com um olhar geral.

No Quadro 6, apresentamos, de um modo geral, as respostas apresentadas pelos estudantes para o questionário, apresentado no apêndice B, com perguntas a respeito do que pensam sobre o curso de Matemática, da disciplina de Estruturas Algébricas, das experiências como professores e das dificuldades de aprendizagem vividas até então durante o curso de Matemática.

Quadro 6 – Relação dos participantes com o curso e a disciplina de Estruturas Algébricas

Questionamento	Sim	Não	Síntese dos comentários
Você já atua ou atuou como professor?	E1, E2, E3, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11	E4	A maioria dos estudantes leciona no Ensino Fundamental II.
Houve espaço na sua graduação para se discutir sobre o modo como os conteúdos matemáticos devem ser abordados?	E1, E3, E6, E7, E8, E11	E2, E4, E5, E9, E10	A maioria dos estudantes considera importante haver esses espaços de discussão.
Você, como futuro professor, se preocupa em compreender os porquês	E1, E2, E3, E6, E7, E8, E9, E10, E11	E4, E5	Para aqueles que responderam sim, compreender os porquês

Questionamento	Sim	Não	Síntese dos comentários
específicos de um conteúdo matemático?			contribui para o processo de ensino e aprendizagem.
Das disciplinas estudadas por você até o momento na licenciatura, alguma se apresentou com conteúdos tão ou mais abstratos quanto os de Estruturas Algébricas?	E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11	E1, E3	Entre as disciplinas mais difíceis que Estruturas Algébricas, os estudantes mencionaram Física, Cálculo e Análise Real.
Para a formação do professor de Matemática, independente do segmento de ensino para o qual venha a lecionar, você considera relevante o estudo dos conceitos matemáticos previstos para o curso de Estruturas Algébricas?	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E11	E10	Para a maioria dos estudantes a disciplina se mostrou importante para compreender os conteúdos estudados no próprio curso. Apenas um deles mencionou a relação dessa disciplina com conteúdos da Educação Básica.

Fonte: Do autor

Podemos perceber que a grande maioria dos estudantes considera importante discutir e refletir a respeito das disciplinas estudadas no Ensino Superior, em específico a disciplina de Estruturas Algébricas. E que essas discussões sejam relacionadas com as suas práticas enquanto professores de Matemática.

A seguir, no Quadro 7, apresentamos as escolhas feitas pelos estudantes na tarefa 1.

Quadro 7 – Tarefa 1: Respostas apresentadas

Possíveis respostas para a pergunta “O que é um Anel?”	Concorda com a resposta
A: Um Anel é um conjunto numérico, munido das operações	E1

usuais de adição e multiplicação, que goza de determinadas propriedades.	
B: Um Anel é um conjunto numérico, munido de duas operações, e goza de determinadas propriedades.	E1
C: Um Anel é um conjunto qualquer que goza de determinadas propriedades.	E1, E3
D: Um Anel é um conjunto qualquer, não vazio, munido de duas operações e que goza de determinadas propriedades.	E1, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11.
E: Anel é um conjunto não vazio A e um par de operações sobre A.	E1

Fonte: Do autor

Podemos perceber que a maioria dos estudantes concorda com a resposta D, esperada por nós. O estudante E2 foi o único que não concordou com qualquer uma das respostas apresentadas e escreveu dizendo que um Anel é um conjunto onde valem as propriedades de grupo (abeliano) e a multiplicação em relação à adição é associativa e a multiplicação em relação à adição é distributiva.

A seguir, no Quadro 8, apresentamos uma síntese do desempenho dos estudantes na tarefa 2.

Quadro 8 – Desempenho dos estudantes na tarefa 2

Propriedade	Definição correta	Definição parcialmente correta	Não definiu ou definiu incorretamente.
Propriedade associativa para a adição	E1, E4, E5, E8, E10, E11		E2, E3, E6, E7, E9
Propriedade comutativa para a adição	E1, E2, E4, E5, E6, E8, E10, E11		E3, E7, E9
Elemento neutro da adição	E5, E8	E4, E10, E11	E1, E2, E3, E6, E7, E9
Elemento oposto da adição	E5, E8	E4, E11	E1, E2, E3, E6, E7, E9, E10
Propriedade associativa para a	E1, E3, E4,		E2, E6, E7, E9

Propriedade	Definição correta	Definição parcialmente correta	Não definiu ou definiu incorretamente.
multiplicação	E5, E8, E10, E11		
Propriedade comutativa para a multiplicação	E1, E2, E3, E4, E5, E8, E10, E11		E6, E7, E9
Elemento neutro para a multiplicação	E5, E8	E4, E10, E11	E1, E2, E3, E7, E9
Distributiva da multiplicação em relação à adição		E3, E4, E5, E6, E10, E11	E1, E2, E7, E8, E9

Fonte: Do autor

Quando questionados a respeito das propriedades que possuem relação com o conceito de Anel, nenhum estudante respondeu corretamente. Percebemos assim, em correspondência com o quadro anterior, que a maioria dos estudantes concebe Anel como um sistema constituído por um conjunto, operações binárias e propriedades, porém, não sabem quais são exatamente essas propriedades, nem como defini-las. Os estudantes, em geral, aparentam recorrer aos conjuntos numéricos e às usuais operações de adição e multiplicação, principalmente para comentar a respeito dos elementos neutro e oposto, que assim como a distributiva da multiplicação em relação à adição, são verificados na maioria dos casos apenas à esquerda da operação.

A seguir, no Quadro 9, apresentamos uma síntese do desempenho dos estudantes na tarefa 3. Os estudantes deveriam decidir se as sentenças apresentadas eram verdadeiras (V) ou falsas (F), fornecendo uma justificativa para suas decisões.

Quadro 9 – Desempenho dos estudantes na tarefa 3

Sentença	Decisão correta (V/F)	Justificativa correta
A. $(N, +, \cdot)$ é um Anel comutativo	E2, E3, E5, E11	E2, E3, E11
B. $(Q^{*}, +, \cdot)$ é um Anel sem	E3, E5, E6, E7, E8	

Sentença	Decisão correta (V/F)	Justificativa correta
unidade		
C. $(Z_4, +, \cdot)$ não é um Anel	E2, E3, E4, E5, E6, E10	
D. $(Q[\sqrt{P}], +, \cdot)$ não é um Subanel de $(R, +, \cdot)$	E2, E3, E4, E5, E8, E10, E11	E2, E4
E. $(\{0\} \times 2Z, +, \cdot)$ é Subanel de $(Z \times Z, +, \cdot)$	E1, E3, E4, E5, E6, E10	E4
F. Z_4 não é Subanel de Z_5	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E8, E10, E11	E2, E3
G. $(M_2(N), +, \cdot)$ é um Anel	E2, E3, E10, E11	E11

Fonte: Do autor

Inferimos que a grande maioria dos estudantes não conseguiu lidar com afirmações envolvendo Anéis conhecidos, com conjuntos numéricos e operações usuais. Além disso, o fato de alguns terem tomado decisões corretas quanto à veracidade ou falsidade das afirmações sem apresentar justificativas pode implicar numa recorrência a fatos de suas memórias, como a lembrança de uma aula ou de uma leitura. É importante também que o estudante saiba justificar suas decisões utilizando uma linguagem matemática formal.

A seguir, no Quadro 10, apresentamos uma síntese do desempenho dos estudantes na tarefa 4. Os estudantes deveriam decidir se a tripla $(Q, *, \#)$, constituída por duas operações binárias não usuais, é um Anel. Os estudantes E01, E06, E07 e E10 não compõem o quadro por não apresentarem alguma resolução para esta tarefa.

Quadro 10 – Desempenho dos estudantes na tarefa 4

Estudante	Resumo do modo de lidar com a tarefa
E1, E6, E7, E10	Não apresentou algum tipo de resolução.
E2	O estudante demonstrou não ter dificuldades para lidar com operações não usuais, e supondo que $x, y, z \in Q$, verifica as propriedades de um

	Anel, seguindo cinco etapas: associativa para $*$, comutativa para $*$, existência de elemento neutro para *, existência de elemento inverso para $*$, associativa para # e distributiva de # em relação à +.
E3	O estudante demonstrou não ter dificuldades para lidar com operações não usuais, e sem assumir elementos em Q, verifica para $*$ as propriedades associativa, existência de elemento neutro e existência de simétrico.
E4	O estudante demonstrou não ter dificuldades para lidar com operações não usuais, e supondo que $a, b, c \in Q$, verifica a propriedade associativa para $*$ e #.
E5	O estudante demonstrou não ter dificuldades para lidar com operações não usuais, e sem supor que $a, b, c \in Q^*$, verifica para $*$ as propriedades comutativa, a associativa, a existência de elemento neutro e simétrico, e para #, a propriedade associativa.
E8	O estudante demonstrou não ter dificuldades para lidar com operações não usuais, e sem supor elementos em Q, verifica para $*$ as propriedades associativa e comutativa, e a propriedade distributiva de # em relação a $*$.
E9	O estudante demonstrou não ter dificuldades para lidar com operações não usuais, e sem supor elementos em Q, verifica para $*$ as propriedades associativa e comutativa.
E11	O estudante demonstrou não ter dificuldades para lidar com operações não usuais, e sem assumir elementos em Q, verifica para $*$ e # a propriedade associativa.

Fonte: Do autor

Inferimos, por meio dos registros escritos obtidos nesta tarefa, que os estudantes não possuem dificuldades em lidar com operações não usuais, porém evidenciaram não saber quais propriedades a primeira e a segunda operação da tripla $(Q,*,\#)$ devem ser gozadas, confirmando o que percebemos com a tarefa 2.

A seguir, no Quadro 11, apresentamos uma síntese do desempenho dos estudantes na tarefa 5. Os estudantes deveriam provar que se considerarmos A como um Anel de integridade, com $x \in A$ e $x^2 = x$, então $x = 0$ ou $x = 1$.

Quadro 11 – Desempenho dos estudantes na tarefa 5

Estudante	Resumo do modo de lidar com a tarefa

E1, E4, E6, E7, E8, E10	Não apresentou algum tipo de resolução.
E2, E5, E9, E11	O estudante resolveu a equação colocando x em evidência, como segue: $x^2 = x$ $x^2 - x = 0$ $x(x-1) = 0$ Concluindo, assim, que $x = 0$ ou $x = 1$.
E3	O estudante considerou que 0 e 1 são os valores possíveis de x para que a igualdade seja verdadeira.

Fonte: Do autor

Percebemos que a grande maioria dos estudantes não conseguiu relacionar o conceito de Anel de integridade com uma situação matemática simples e rotineira, a resolução de uma equação de 2º grau incompleta do tipo $ax^2 + bx = 0$, "com base na propriedade de sem divisores de zero". Apenas o estudante E9 justificou que as raízes são 0 e 1 por termos A como um Anel de integridade.

Por fim, apresentamos a seguir, no Quadro 12, uma síntese das concepções que inferimos que os estudantes tenham construído para o conceito Anel, após analisarmos os registros escritos.

Quadro 12 – Concepções (ação, processo, objeto, esquema) dos estudantes sobre Anel.

Anel	**E1**	**E2**	**E3**	**E4**	**E5**	**E6**	**E7**	**E8**	**E9**	**E10**	**E11**
Concepção ação			x	x					x		x
Concepção processo					x						
Concepção objeto		x									
Concepção esquema											

Fonte: Do autor

Percebemos que dos onze estudantes pesquisados, apenas um construiu ao final da disciplina de Estruturas Algébricas uma *concepção objeto* do conceito Anel. O estudante concebe corretamente Anel como um sistema constituído pela tríade conjunto não vazio, duas operações binárias e propriedades a serem gozadas. Apesar de apresentar alguns equívocos na definição de algumas propriedades, principalmente na propriedade associativa para uma operação qualquer, o estudante demonstra conhecer as propriedades de que as operações devem gozar e sabe lidar com elas para operações não usuais e conjuntos quaisquer, não se limitando a apenas conjuntos numéricos. Assim, consideramos que ele compreenda o objeto Anel com características próprias, sendo capaz de manipulá-lo e utilizá-lo quando necessário. Um estudante construiu uma *concepção processo*. Consideramos que, para a construção da concepção objeto do conceito Anel, ele ainda tenha que o lidar com uma diversidade maior de conjuntos, não somente os numéricos. Quatro estudantes construíram uma concepção ação do objeto matemático, demonstrando lidar com o objeto Anel de maneira elementar, muitas vezes indicando apenas terem decorado procedimentos e regras, sem terem de fato compreendido o objeto matemático. Esses estudantes apresentam dificuldades com o próprio conceito de Anel, com as operações binárias, com as propriedades das operações ou com os conjuntos. Sendo assim, consideramos importante que lidem mais com esses conceitos, como conjuntos não numéricos e operações binárias não usuais. Inferimos que cinco estudantes não chegaram a construir uma concepção ação para o conceito Anel. Isso por considerarmos que não possuem uma concepção bem definida para o objeto matemático e apresentam dificuldades em cumprir e coordenar as ações necessárias para a construção do objeto Anel, como ser capaz de verificar para uma operação binária em um dado conjunto (numérico ou não) que duas operações (não necessariamente usuais) gozam da associatividade, da comutatividade, da existência do elemento neutro, de que todo elemento possui opostos e que uma operação é distributiva em relação à outra. Consideramos necessário que esses estudantes passem por um processo de construção dos objetos conjunto, operações binárias e propriedades das operações, para então repetir essas ações desejadas e passar a ter uma concepção ação de Anel, segundo a Teoria APOS. Nenhum estudante demonstrou ter construído a concepção esquema, sendo necessário lidar corretamente com diversas situações matemáticas que envolvam o conceito de Anel.

A seguir, apresentamos as considerações finais, em que comentamos os resultados obtidos nas análises, sugestões de encaminhamentos, limitações e sugestões para novas pesquisas.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, o objetivo proposto foi investigar e discutir as concepções (ação, processo, objeto, esquema), à luz da Teoria APOS, que são manifestadas por licenciandos em Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL) ao lidarem com tarefas referentes ao conceito de Anel. E como questões norteadoras: Que caminho um indivíduo pode percorrer ao construir o conceito de Anel? Que concepções (ação, processo, objeto, esquema), à luz da Teoria APOS, são manifestadas nos registros escritos apresentados por licenciandos em Matemática, concluintes de uma disciplina de Estruturas Algébricas, para o conceito de Anel?

Com a intenção de compreendermos a estrutura algébrica Anel, apresentamos um estudo a respeito de seu desenvolvimento histórico, e por considerarmos importante entender como ele é tratado nos dias atuais e apresentado aos estudantes, fizemos uma descrição do modo como esse conceito é abordado em quatro livros-texto, selecionados de acordo com a bibliografia do programa da disciplina de Estruturas Algébricas do curso de Matemática – Habilitação: Licenciatura da Universidade Estadual de Londrina.

Por meio do estudo de textos a respeito da história da Matemática, percebemos que, assim como outros conceitos da Álgebra Abstrata, o conceito de Anel passou por um longo processo de desenvolvimento até se constituir no atual. Tal conceito teve sua origem ligada a diferentes domínios, como polinômios e a Teoria de Inteiros Algébricos, na qual sua definição sofreu alterações ao longo da história, de modo a atender as necessidades de diferentes matemáticos, como Richard Dedekind, David Hilbert, Adolf Fraenkel e Emmy Noether. Já com o estudo dos quatro livros-texto percebemos que são diferentes os modos como um mesmo objeto matemático pode ser pensado e abordado, sendo importante nos atentarmos para isso, de modo que o conhecimento construído pelos estudantes vá ao encontro do esperado pelo professor, e assim, sejam evitadas ou minimizadas as dificuldades dos estudantes na aprendizagem do conceito.

Para atingirmos o nosso objetivo e respondermos às questões norteadoras, assumimos como referencial teórico a Teoria APOS de Dubinsky e seus colaboradores.

A Teoria APOS foi utilizada inicialmente para descrevermos uma decomposição genética do conceito de Anel, ou seja, um possível caminho para a construção desse conceito. Essa descrição contribuiu para que respondêssemos à nossa primeira questão norteadora: Que caminho um indivíduo pode percorrer ao construir o conceito de Anel?

Para realizarmos nossa decomposição genética, estudamos as pesquisas de Dubinsky *et al.* (1994) e Elias (2012). Em ambas as pesquisas, encontramos uma decomposição genética do conceito de grupo. A partir das decomposições feitas por eles, efetuamos um refinamento para obtermos a nossa decomposição genética do conceito de Anel, por considerarmos que os objetos matemáticos são de mesma natureza, Estruturas Algébricas que consistem de três esquemas: conjunto, operação(ões) binária(s) e axiomas.

Supomos que, para um estudante construir o conceito de Anel, ele deverá possuir uma concepção objeto de conjunto, sendo capaz de reconhecer e lidar com os elementos de um dado conjunto, operações binárias, lidar com uma operação binária sobre um conjunto, e propriedades das operações, verificar para uma operação binária em um dado conjunto que duas operações (não necessariamente usuais) gozam da associatividade, da comutatividade, da distributiva de uma operação em relação à outra, existência do elemento neutro e que todo elemento do conjunto admite oposto.

Após definirmos como pode ocorrer a construção do conceito de Anel, propusemo-nos a analisar a pesquisa de Elias (2012), com o objetivo de compreendermos e delimitarmos o que pode indicar que um estudante possui a concepção ação, processo, objeto ou esquema, o que foi apresentado no Quadro 5.

Posteriormente, elaboramos um conjunto contendo cinco tarefas para respondermos à segunda questão norteadora proposta: Que concepções (ação, processo, objeto, esquema), à luz da Teoria APOS, são manifestadas nos registros escritos apresentados por licenciandos em Matemática, concluintes de uma disciplina de Estruturas Algébricas, para o conceito de Anel?

Para responder às tarefas propostas na investigação, convidamos estudantes do curso de Matemática: Habilitação – Licenciatura da Universidade Estadual de Londrina que estavam concluindo a 2ª série, indicando assim, já terem estudado o conceito de Anel na disciplina de Estruturas Algébricas. Doze estudantes aceitaram o convite, mas analisamos os registros escritos de onze, pois um estava cursando Matemática: Habilitação – Bacharelado.

Apesar de identificarmos que a maioria dos estudantes concebe a estrutura algébrica Anel como um conjunto qualquer, não vazio, munido de duas operações e que goza de determinadas propriedades, quando questionados a respeito das propriedades que possuem relação com o conceito de Anel, nenhum estudante mostrou saber quais são exatamente essas propriedades, nem como defini-las. Além disso, mostraram não saber de quais propriedades a primeira e a segunda operação de uma tripla devem gozar.

Percebemos também que a grande maioria dos estudantes não consegue lidar com afirmações envolvendo Anéis conhecidos, com conjuntos numéricos e operações usuais, nem relacionar esse conceito com uma situação matemática simples e rotineira.

Após realizarmos uma análise individual dos registros escritos dos estudantes participantes, propusemo-nos a identificar suas concepções para o conceito de Anel.

Cinco estudantes, E1, E6, E7, E8 e E10 *não chegaram a construir uma concepção ação*. Isso por considerarmos que não possuem uma concepção bem definida para o objeto matemático e apresentam dificuldades em cumprir e coordenar as ações necessárias para sua construção, como ser capaz de verificar para uma operação binária em um dado conjunto (numérico ou não) que duas operações (não necessariamente usuais) gozam da associatividade, da comutatividade, da distributividade de uma operação em relação à outra, a existência do elemento neutro e que todo elemento do conjunto admite oposto. Consideramos necessário que estes estudantes passem por um processo de construção dos objetos conjunto, operações binárias e propriedades das operações, para então repetir essas ações desejadas e passar a ter uma concepção ação de Anel, segundo a Teoria APOS.

Quatro estudantes, E3, E4, E9 e E11 construíram uma *concepção ação*, demonstrando lidar com o objeto de maneira elementar, indicando muitas vezes apenas terem decorado procedimentos e regras, sem terem de fato compreendido o objeto matemático. Estes estudantes apresentam dificuldades com o próprio conceito de Anel, com as operações binárias, com as propriedades das operações ou com os conjuntos. Sendo assim, consideramos importante que lidem mais com esses conceitos, como conjuntos não numéricos e operações binárias não usuais.

Um estudante, E5, construiu uma *concepção processo*. Acreditamos que para a construção da concepção objeto do conceito Anel ele ainda tenha que lidar com uma diversidade maior de conjuntos, não somente os numéricos.

Um estudante, E2, construiu ao final da disciplina de Estruturas Algébricas uma *concepção objeto*. O estudante concebe corretamente Anel como um sistema constituído pela tríade conjunto não vazio, duas operações binárias e propriedades a serem gozadas. Apesar de apresentar equívocos na definição de algumas propriedades, principalmente na propriedade associativa para uma operação qualquer, o estudante demonstra conhecer as propriedades de que as operações devem gozar e sabe lidar com elas para operações não usuais e conjuntos quaisquer, não se limitando a apenas conjuntos numéricos. Assim, consideramos que ele compreenda o objeto Anel com características próprias, sendo capaz de manipulá-lo.

Nenhum estudante demonstrou ter construído a *concepção esquema*, sendo necessário lidar com diversas situações matemáticas que envolvam o conceito de Anel.

Acreditamos que as concepções identificadas e o modo como os estudantes concluintes de uma disciplina de Estruturas Algébricas lidam com tarefas envolvendo o conceito de Anel indiquem a necessidade de se repensar a respeito do modo como a disciplina de Estruturas Algébricas vem sendo abordada em cursos de licenciatura em Matemática.

Apesar dos resultados insatisfatórios, muitos dos estudantes participantes desta pesquisa consideram importante o estudo de Estruturas Algébricas em um curso de licenciatura em Matemática, mas não veem relações específicas desse estudo com suas práticas enquanto professores da Educação Básica. Segundo Mondini (2009), os futuros professores de Matemática atribuem importância aos conteúdos quando percebem aplicação direta desse conhecimento para a Álgebra trabalhada na Educação Básica. Será que entender a relação entre o conhecimento estudado com a prática não contribui para que os estudantes concebam o conceito como um objeto e, posteriormente, como um esquema? Consideramos importante que os professores de disciplinas como Estruturas

Algébricas reflitam a respeito de questões como esta, inclusive com seus próprios alunos, futuros professores de Matemática.

Identificar as concepções de cada estudante participante também nos permitiu perceber que são diversas as possibilidades de compreensão de um conceito matemático. Os estudantes são diferentes, não somente no tempo que levam para aprender, mas também no modo como a aprendizagem ocorre, o que nos leva a acreditar que também não existe uma única decomposição genética para um conceito, ou seja, a construção de um conceito não é única. Entender, valorizar e discutir essas diferenças tornam-se ações necessárias ao professor em sua prática docente, possibilitando, assim, intervir e interagir no processo de ensino e aprendizagem quando necessário.

Consideramos importante que um professor em sua formação inicial não somente estude, mas vivencie em disciplinas não didáticas, por exemplo, Estruturas Algébricas, como compreender a construção de um conhecimento e como contribuir nessas construções. Assim, concordamos com Dubinsky e McDonald (2001, p.1), quando afirmam que a teoria APOS é bastante útil em tentar entender a aprendizagem de conceitos da Álgebra Abstrata. A decomposição genética pode e deve ser usada de maneira que forneça estratégias pedagógicas que levem os estudantes a fazerem as construções necessárias e usá-las na resolução de problemas diversos. Os professores e os futuros professores podem refletir sobre o modo como seus alunos constroem o conceito, ou construir suas próprias decomposições genéticas.

Também entendemos como relevante que o professor apresente situações-problema que possibilitem aos estudantes justificarem suas decisões e resoluções, permitindo identificar e discutir o que os mesmos estão de fato compreendendo e sempre enfatizar a importância que o próprio estudante tem no processo de ensino e aprendizagem, com um papel ativo e reflexivo.

Como limitação neste estudo, consideramos o uso de apenas uma decomposição genética do conceito abordado, porém, sabemos que o uso de mais que uma exigiria um tempo maior de estudo, tanto para as elaborações quanto para os refinamentos. Outra limitação encontrada foi termos apenas uma tarefa no instrumento de coleta de dados que relacionasse o objeto Anel com outros objetos matemáticos, o que nos limitou diante da concepção esquema.

Uma questão que surgiu deste estudo e que deixamos como sugestão para trabalhos futuros é: Que propostas pedagógicas podem ser elaboradas para que os estudantes possam construir uma concepção esquema para o conceito de Anel? De modo a colocarmos em prática a etapa *implementação e planejamento* de acordo com a Teoria APOS, etapa esta que não foi abordada neste trabalho. Outra questão, relacionada à decomposição genética apresentada, é: Que outro caminho um estudante pode percorrer para construir o conceito de Anel?

Por fim, esperamos que esta pesquisa possa contribuir na busca por situações que favoreçam a aprendizagem de Estruturas Algébricas em cursos de licenciatura em Matemática.

REFERÊNCIAS

ASIALA, M. et al. **A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education**. In: KAPUT, J.; SHOENFELD, A. H.; DUBINSKY, E. (Eds) *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education*. Estados Unidos: American Mathematical Society, 1996, v. 6, p. 1-32.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 1977.

BOGDAN, R. C. e BIKLEN, S. C. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Trad. Sob direção de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal: Porto, 1994. 336 p.

BRANDEMBERG, J. C. **Sobre Anéis e ideais**. In: 6º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, 2014, São João del Rei. Anais/Actas do 6º Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática. Natal: SBHMat, 2011, v. 1, p. 313-329.

BROWN, A. et al. **Learning Binary Operations, Groups, and Subgroups**. Journal of Mathematical Behavior, 2000, v. 16, n.3, p. 187-239. Disponível em http://www.math.kent.edu/~edd/LearningBOGS.pdf. Acesso em: 20 mai. 2015.

BUSSMANN, C. J. C. **Conhecimentos mobilizados por estudantes do curso de Matemática sobre o conceito de grupo**. 2009. 91 páginas. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

CAMPOS, E. de. **A noção de congruência algébrica no curso de Matemática: uma análise das respostas dos estudantes**. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

CORRY, L. **The Origins of the Definition of Abstract Rings**, 2000. Modern Logic, v. 8, n. 1/2, p. 5-27, jan. 2000.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. São Paulo: Atual, 2003.

DUBINSKY, E.; LEWIN, P. **Reflective Abstraction and Mathematics Education: the Genetic Decomposition of Induction and Compactness**. The Journal of Mathematical Behavior, 1986, p. 55-92.

DUBINSKY, E. et al. **On Learning Fundamental Concepts of Groups Theory**. Education Studies in Mathematics, v. 27, 1994. Disponível em <http://www.math.kent.edu/~edd/FundConGrpTh.pdf>. Acesso em: 11 nov. 2014.

DUBINSKY, E.; McDONALD, M. A. **APOS: a Constructivist Theory of Learning in Undergrad Mathematics Education Research**. In: HOLTON, D…et. al. (Eds.), The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study, Kluwer Academic Publishers, 2001. Disponível em <http://www.math.wisc.edu/~wilson/Courses/Math903/ICMIPAPE.PDF> Acesso em: 04 de nov. 2014.

DUBINSKY, E. **Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking**. In: TALL, David. (Org.), Advanced Mathematical Thinking, Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 95-123. Disponível em http://www.math.wisc.edu/~wilson/Courses/Math903/ReflectiveAbstraction.pdf. Acesso em: 15 nov. 2014.

DUBINSKY, E. (Ed). Dubinsky home page, 2003. Disponível em: http://www.math.kent.edu/~edd/. Acesso em: 19 nov. 2015.

ELIAS, H. R. **Dificuldades de estudantes de licenciatura em Matemática na compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos**. 2012. 152 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

FRANCO, H. J. R. **Os diversos conflitos observados em alunos de licenciatura num curso de Álgebra:** Identificação e análise. 2011. 101f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.

GODOY, K. V; MATTOS, A. C de. **Um breve estudo sobre invariantes de formas quadráticas binárias**. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. 2011, Recife. Anais do XIII CIAEM, 2011.

HAREL, G.; SELDEN, A.; SELDEN, J. Advanced Mathematical Thinking. *In*: GUTIÉRREZ, A; P; BOERO (Eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Rotterdam: Sense Publishers, 2006, p.147-172.

HEFEZ, A. **Os Números inteiros e racionais**. In:______. Curso de Álgebra. 2ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 1993. p. 22-41.

HERNSTEIN, I. N. **Teoria dos Anéis**. In:______. Tópicos de Álgebra. 1ª edição. São Paulo: Editora Polígono, 1970. p. 101-156.

JACINTO, J. **O último teorema de Fermat**. FAFI: União da Vitória, 2007. Disponível em: < http://www.ensino.eb.br/portaledu/conteudo/artigo8953.pdf>. Acesso em 15 fev. 2015.

JESUS, M. S; SAVIOLI, A. M. P. D; SOUZA, M. L. **Uma produção de significados para o conceito de Anel**. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2015, Tuxtla Gutiérrez. Anais do CIAEM, 2015.

KLEINER, I. **A History of Abstract Algebra**. Boston: BirKhauser, 2007.

KLUTH, V.S. **Estruturas da Álgebra:** investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento. 2005. 192f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

LANG, S. **Anéis**. In:______. Estruturas Algébricas. 1ª edição. Rio de Janeiro: Ao livro técnico S.A, 1970. p. 40-54.

MILIES, F. C. P. **Uma breve história da Álgebra abstrata**. Minicurso apresentado na *II - Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática* – SBM. Salvador, Universidade Federal da Bahia, 2004.

MONDINI, F. **Modos de conceber a Álgebra em cursos de formação de professores de Matemática**. 2009. 168f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

OLIVEIRA, V. C. A. **Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em Álgebra linear**. 2002. 187p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2002.

PRADO, E. A. **Alunos que contemplaram um curso de extensão em Álgebra linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial**. 2010. 185f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2010.

SOARES, J. C. A. **Métrica e Geometria p-ádica**. 2009. Disponível em www.ime.unicamp.br/~ra089367/junior/Trabalho%20final%20seminario.pdf. Acesso em 02. Dez. 2015.

SOUZA, S. A. **O ensino de Álgebra no curso de licenciatura em Matemática**. Videtur Letras. São Paulo, V.7, p. 23-26, 2004. Disponível em <http:www.hottopos.com/vdletras7/suzana.htm>. Acesso em out. 2014.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA. **Resolução CEPE 0230/2009 de 29 de outubro de 2009. Reformula o projeto pedagógico do curso de Matemática – Habilitação: Licenciatura a ser implantado a partir do ano letivo de 2010**. Londrina, 2009. Disponível em: <http://www.uel.br/prograd/pp/documentos/2010/resolucao_230_09.pdf>. Acesso em: dez. 2014.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Termo de consentimento livre e esclarecido

T E R M O D E CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu,...portador(a) do R.G...................................... e CPF.., autorizo Marcelo Silva de Jesus, estudante de mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL, com a orientação da Profª. Drª. Angela Marta Pereira das Dores Savioli, a utilizar em partes ou integralmente, sem restrições de prazos, anotações e/ou gravações em áudio de minhas falas e os meus registros escritos que constam no instrumento aplicado, podendo divulgá-los em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que seja citado(a) apenas como participante da pesquisa, garantido o anonimato no relato da pesquisa.

Declaro, ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Londrina, .../........./.........

ASS.:____

APÊNDICE B

Instrumento de Coleta de Dados

Instrumento de coleta de dados

Nome:

1) Você já atua ou atuou como professor?

( ) Sim ( ) Não

Em caso afirmativo, indique o segmento e o ano que desempenha ou desempenhou a função:
( ) Ensino Fundamental I - 2º ao 5º ano (1ª a 4ª série) / Ano/série:
( ) Ensino Fundamental II - 6º ano a 9º ano (5ª a 8ª série) / Ano/série:
( ) Ensino Médio - (1º ao 3º ano) / Ano:

4) Houve espaço na sua graduação para se discutir sobre o modo com que os conteúdos matemáticos devem ser abordados no Ensino Superior? Comente.

5) Você, como futuro professor, se preocupa em compreender os porquês específicos de um conteúdo matemático? Comente.

7) O que você considera importante ao se tratar um conteúdo matemático específico no Ensino Superior? Explique.

8) Das disciplinas estudadas por você até o momento na licenciatura, alguma se apresentou com conteúdos tão ou mais "abstratos" quanto os de Estruturas Algébricas?
( ) sim
( ) não

Em caso afirmativo, qual(is)?

9) Para a formação do professor de Matemática, independente do segmento de ensino para o qual venha a lecionar, você considera relevante o estudo dos conceitos matemáticos previstos para o curso de Estruturas Algébricas?
( ) sim
( ) não

Justifique:

10) Deixe seus comentários sobre a apreciação das perguntas que você respondeu anteriormente. Foram interessantes ou triviais? Por quê? Você acredita que as perguntas anteriores colaboram para uma reflexão pessoal e profissional? Comente.

APÊNDICE C
Pesquisa Bibliográfica

ISSN	REVISTA	ENDEREÇO ELETRÔNICO	AVALIAÇÃO	CLASSIFICAÇÃO	PESQUISAS ENCONTRADAS
1980 – 4415	BOLEMA	http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema	ENSINO	A1	KLUTH, V. S. O movimento da construção das estruturas da álgebra: uma visão fenomenológica. Bolema, Rio Claro (SP), v. 20, n. 28, p. 95-113, 2007. MONDINI, F. Modos de Conceber a Álgebra em Cursos de Formação de Professores de Matemática 14/01/2009. Bolema, Rio Claro (SP), v. 22, n. 32, p. 267-268, 2009.
2176-2988	GEPEM	http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=login&source=%2FSEER%2Findex.php%3Fjournal%3Dgepem	ENSINO	B1	BUSSMANN, C. J. C.; SAVIOLI, A. M. P. D. . Conhecimentos Mobilizados por Estudantes do Curso de Matemática sobre o Conceito de Grupo. Boletim GEPEM, v. 58, p. 33-49, 2011.
1983-3156	EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA	http://revistas.pucsp.br/emp	ENSINO	B1	ELIAS, H. R.; SAVIOLI, A. M. P. das D. . Dificuldades de graduandos em Matemática na compreensão de conceitos que envolvem o estudo da estrutura algébrica grupo. Educação Matemática Pesquisa (Online), v. 15, p. 51-82, 2013.
2176-5634	JORNAL INTERNACIONAL DE ESTUDOS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	http://pgsskroton.com.br/seer//index.php/JIEEM	ENSINO	B1	Não foram encontradas pesquisadas com os disparadores de busca propostos
1982-7652	PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/search/search	ENSINO	B1	Não foram encontradas pesquisadas com os disparadores de busca propostos
1981-1322	REVEMAT: REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat	ENSINO	B1	Não foram encontradas pesquisadas com os disparadores de busca propostos
2176-1744	ZETETIKÉ	https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/index.php/zetetike/%3B	ENSINO	B1	Não foram encontradas pesquisadas com os disparadores de busca propostos
0013-1954	EDUCATION STUDIES IN MATHEMATICS	http://link.springer.com/search?query=%C3%A1lgebra+abstrata&search-within=Journal&facet-journal-id=10649	ENSINO	A1	Não foram encontradas pesquisadas com os disparadores de busca propostos
0228-0671	FOR THE LEARNING OF MATHEMATICS	http://flm-journal.org	ENSINO	A1	Não foram encontradas pesquisadas com os disparadores de busca propostos
1306-3030	INTERNACIONAL ELETRONIC JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION	http://www.mathedujournal.com	ENSINO	A1	Não foram encontradas pesquisadas com os disparadores de busca propostos