Universidade Estadual de Londrina

LAÍS CRISTINA VIEL GERETI

PROCESSOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO EVIDENCIADOS EM RESOLUÇÕES DE QUESTÕES DO ENADE

Londrina
2014

LAÍS CRISTINA VIEL GERETI

PROCESSOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO EVIDENCIADOS EM RESOLUÇÕES DE QUESTÕES DO ENADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientador: Profª. Drª. Angela Marta Pereira das Dores Savioli

Londrina
2014

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

G367p Gereti, Laís Cristina Viel

Processos do pensamento matemático avançado evidenciados em resoluções de questões do ENADE / Laís Cristina Viel Gereti. – Londrina, 2014.

136 f.: il.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2014.

Inclui Bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino (Superior) – Teses. 2. Educação matemática – Teses. 3. Universidades e faculdades – Avaliação – Teses. 4. Estudantes – Testes e medidas educacionais – Teses. 5. Linguagem e educação – Teses. I. Savioli, Angela Marta Pereira das Dores. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

LAÍS CRISTINA VIEL GERETI

PROCESSOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO EVIDENCIADOS EM RESOLUÇÕES DE QUESTÕES DO ENADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
UEL – Londrina – PR

Profa. Dra. Márcia Cristina de C. Trindade Cyrino
UEL – Londrina – PR

Profa. Dra. Patrícia Sandalo Pereira
UFMS – Campo Grande – MS

Londrina, 16 de Janeiro de 2014

A Deus por me guiar e me iluminar em todos os momentos.

A minha família pelo apoio incondicional.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à **Deus**, que mesmo muitas vezes não tendo entendido Seus planos, hoje sei que tudo ocorreu exatamente da melhor maneira possível. Pela fé.

Agradeço à minha família, meu pai, Santo, minha mãe, Ivete e minha irmã, Juliana, pelo apoio, pelo amparo, pela compreensão, por todas as vezes que me ajudaram durante minha vida escolar e acadêmica; pela preocupação com meus estudos; pela sabedoria que sempre compartilham; por sempre estarem presentes em minha vida; por tornarem possível esta minha pesquisa.

Agradeço aos meus familiares, em especial minha tia Vandete, pelo apoio e preocupação de sempre; e minha avó Libânia pelo exemplo de vida.

Agradeço ao meu namorado, Jorge, por nunca ter negado sua ajuda, seu companheirismo, uma das pessoas mais inteligentes e humildes que já conheci; aproveito e agradeço à sua família, sua mãe, dona Josefa, e suas irmãs Deise e Débora.

Agradeço as minhas amizades, às mais antigas, Suellen, Paula, Daiany, e às novas Alessandra, Lilian, Laís Maria, Daniele, Anagela, pela compreensão da minha ausência em alguns momentos devido aos meus estudos; pela amizade fiel, pelo incentivo, pelos bons momentos.

Agradeço aos demais colegas e professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL, por esses dois anos de aprendizado.

Agradeço aos colegas do Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático (GEPPMAT), que neste tempo vem se consolidando cada vez mais, pelo companheirismo e pelas contribuições feitas para com esta pesquisa.

Agradeço aos estudantes do quarto ano do curso de Matemática da UEL, que se disponibilizaram participar deste estudo.

Agradeço às professoras componentes da banca, Profª. Drª. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino e Profª. Drª. Patrícia Sandalo Pereira, pelas críticas e sugestões para o aperfeiçoamento deste trabalho

Agradeço, de modo especial, a minha orientadora Angela Marta Pereira das Dores Savioli, pela confiança que depositou em mim deste o começo, pela paciência, dedicação, pelos conselhos, pelo apoio e por compartilhar de suas experiências e de seu conhecimento.

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

Agradeço, enfim, a todos que de uma forma ou outra contribuíram com a realização deste trabalho.

“Ninguém chega a parte alguma só. [..] Carregamos conosco a memória de muitas tramas, o corpo molhado de nossa história, de nossa cultura.” (Paulo Freire, 2011)

GERETI, Laís Cristina Viel. **Processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados em resoluções de questões do Enade**. 2014. 136 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo descrever e discutir indícios/características dos processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) evidenciados na produção escrita de estudantes de Matemática da Universidade Estadual de Londrina ao resolverem questões discursivas do Enade. Para tanto, elaboramos um instrumento com quatro questões discursivas do Enade e o aplicamos em uma turma do quarto ano do curso de Matemática com treze estudantes. Para análise dos registros escritos, recorremos à metodologia de Análise de Conteúdo, segundo Bardin (2004), em que por meio dos agrupamentos (unidades de registro), e embasados na teoria de Dreyfus (2002), descrevemos uma síntese dos processos do Pensamento Matemático Avançado que foram evidenciados nas resoluções dos estudantes. As categorias, que foram definidas *a priori*, referem-se aos processos do PMA que foram mobilizados nas resoluções, sendo que os processos de *representação simbólica*, *mudança de representações e tradução entre elas*, *visualização* e *modelação* constituem o processo global de *representação*, e os processos de *sintetização* e *generalização* constituindo o segundo processo global, o de *abstração*. Ao analisar os registros escritos de cada participante e as respostas Padrão do Enade com base na teoria de Dreyfus (2002), chegamos a algumas reflexões e conclusões acerca da problemática desta pesquisa: os mesmos processos evidenciados nas respostas Padrão do Enade foram mobilizados nas resoluções de alguns estudantes, com exceção do processo de *visualização*. Além disso, os estudantes que mobilizaram os processos nas resoluções das quatro questões se referem a uma parte do total de participantes desta pesquisa, um total de treze: onze estudantes mobilizaram o processo de *representação simbólica*, três estudantes mobilizaram o processo de *visualização*, sete estudantes mobilizaram o processo de *mudança de representações e tradução entre elas*, dois estudantes mobilizaram o processo de *modelação*, sete estudantes mobilizaram o processo de *sintetização* e dois estudantes mobilizaram o processo de *generalização*. No entanto, nenhum estudante mobilizou todos os processos do PMA nas resoluções das quatro questões; dos treze estudantes, dois não resolveram nenhuma questão, logo não mobilizaram nenhum processo do PMA.

Palavras-chave: Educação matemática. Pensamento matemático avançado. Enade.

GERETI, Laís Cristina Viel. **Advanced Mathematical Thinking processes evidenced in resolutions of questions of Enade**. 2014. 136 p. Dissertation (Masters in Teaching Science and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

ABSTRACT

This study aimed to describe and discuss clues/characteristics of the Advanced Mathematical Thinking (AMT) processes evidenced in the written production of students of Mathematics, Universidade Estadual de Londrina, to solve discursive questions of Enade test. In order to do so, we developed an instrument with four essay questions of Enade and applied in fourth grade class of mathematics courses with thirteen studentes. For the written records analysis, we used the methodology of Content Analysis according to Bardin (2004), through groups (record units), and grounded in the theory of Dreyfus (2002), we could be able to describe a synthesis of Advanced Mathematical Thinking processes which have been evidenced in the resolutions. The categories that were defined *a priori* refer to the AMT processes that were mobilized in the resolutions, and that the processes of symbolic representation, switching representations and translating, visualization and modeling constitute the global process of representation, and the processes of synthesis and generalization constituting the second global process, of abstraction. When analyzing the written records of each participant and the standard responses of Enade based on theoretical adopted framework, as well as some conclusions and reflections on the problem of this research: the same processes evidenced in the standard answers of Enade were mobilized in the resolutions of some students, with exception of the *visualization* process. Furthermore, students who mobilized the processes in the resolutions of the questions refer to a part of the total number of participants of this research; thirteen in total: eleven students mobilized the process of the *symbolic representation*, three students mobilized the *visualization* process, seven students mobilized the *switching representations and translating,* two students mobilized the *modeling* process, seven students *synthesis* and two students mobilized the process of *generalization*. However, no student mobilized all processes of AMT in resolutions of the four questions; of the thirteen students, two did not solve any question, so they do not mobilized any of the AMT process.

Key-words: Mathematics education. Advanced mathematical thinking. Enade.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Até tempos atrás, a preocupação com o ensino e a aprendizagem da Matemática no Brasil era focada somente na educação básica, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Com o tempo, a área da Educação Matemática foi se consolidando, como o número de doutores deste campo de pesquisa que atuam no Ensino Superior. Começa-se, então, segundo Pinto (2002), perceber novas propostas, como o uso de modelagem, de novas tecnologias e de outras perspectivas metodológicas para o Ensino Superior.

O movimento dá início a outro foco, e no ano de 2000, durante o *I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (SIPEM), em Serra Negra (SP), constituiu-se o primeiro Grupo de Trabalho em Educação Matemática no Ensino Superior, coordenado pela Dra. Lilian Nasser (PINTO, 2002).

Em âmbito internacional, na década de 80, foi constituído o grupo Advanced Mathematical Thinking Group, durante o encontro do *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME), que segundo Pinto (2002), visava explicar questões relativas ao ensino e a aprendizagem da matemática por pessoas adultas. A pesquisa desenvolvida pelo grupo não se fundamenta em um único referencial teórico, coexistindo diversas abordagens para o termo Pensamento Matemático Avançado (PMA). No entanto, as ideias de tais pesquisadores convergem para o questionamento de como a matemática está sendo ensinada no Ensino Superior.

De acordo com Domingos (2003), o ensino e a aprendizagem da matemática no Ensino Superior tem sido alvo de uma crescente preocupação, por revelar níveis de insucesso elevados. O autor acredita que as dificuldades que são apresentadas nesta área disciplinar resultam da falta de compreensão de conceitos matemáticos pelos estudantes. No entanto, a maioria dos conceitos matemáticos que são ensinados no Ensino Superior possui certa complexidade, precisando recorrer a um pensamento matemático avançado.

Sendo assim, procuramos por pesquisas que abordam o PMA, as quais buscam explicar a maneira que estudantes se envolvem na compreensão de conceitos matemáticos. Tais teorias relacionam o PMA a uma perspectiva cognitivista, investigando como ocorre o desenvolvimento do pensamento matemático das pessoas, como suas mentes funcionam e como isso pode contribuir para melhorar o ensino e a aprendizagem de matemática. Para este trabalho, optamos por tratar de maneira breve os estudos de Tall (2002), Gray et al. (1999) e Resnick (1987), e de maneira minuciosa os estudos de Dreyfus (2002).

Para Dreyfus (2002), o PMA é caracterizado por processos mentais que ocorrem e se interagem durante o desenvolvimento de uma longa sequência de atividades de aprendizagem. Os principais processos são os de representação e de abstração, e é por meio deles que se passa de um nível de pensamento para outro, gerenciando a complexidade peculiar deste tipo de pensamento.

A escolha por este referencial se deu por vários motivos, dentre os quais:

- por julgar importante analisar as resoluções dos estudantes em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado, visando auxiliar na discussão e desenvolvimento do Projeto Pedagógico do curso de Matemática, assim como futuras pesquisas nesta área;

- por apresentar uma teoria que nos possibilita “enxergar” por meio de registros escritos os conceitos matemáticos abstraídos pelos estudantes, e se não houver abstração, nos permite conhecer qual nível de pensamento o estudante possui (representação simbólica, representação mental, mudança de representações e tradução entre elas, visualização, modelação, sintetização ou generalização) e compreender algumas das dificuldades enfrentadas pelos mesmos;

- por permitir que professores, da Educação Básica aos de Ensino Superior, possam realizar uma autoanálise de suas práticas em sala de aula, com o intuito de se questionarem a respeito do modo como estão ensinando a matemática, que na maioria das vezes a apresentam como produto acabado, seguindo a sequência “teorema-prova-aplicação”, sem dar margem às discussões, importantes para a aprendizagem dos estudantes;

- por acreditar que os professores de matemática ainda são responsáveis por “provocar” em seus estudantes o desenvolvimento e a mobilização dos processos do PMA, de maneira consciente, alertando-os a respeito do que seja ou de como ocorre uma representação ou um processo de sintetização, por exemplo.

Ao analisar o Projeto Pedagógico do curso de Matemática, habilitação em Licenciatura, da Universidade Estadual de Londrina, pudemos verificar a importância de disciplinas que abordam conteúdos avançados, pois

> fornecem uma visão da importância da matemática quer como ferramenta na resolução de problemas nas diversas áreas do conhecimento, quer como sistema abstrato de idéias, refletindo generalizações e regularidades. É nas disciplinas avançadas que o aluno desenvolve a compreensão e a capacidade de estabelecer nexos entre os vários temas da matemática escolar; aprende a tratar com maior cuidado os processos dedutivos, as definições e as formalizações, de um modo geral (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, 2009, p. 16[1]).

O estudante do curso de Matemática tem a oportunidade de desenvolver e mobilizar os processos do Pensamento Matemático Avançado, já que as disciplinas oferecidas no curso, como Cálculo, Estruturas Algébricas, Análise Real, entre outras, exigem um pensamento matemático mais complexo para compreender conceitos abstratos.

Por conseguinte, optamos por fazer uma pesquisa que diz respeito ao que se é exigido dos estudantes dos cursos de graduação, em especial o de Matemática, nas avaliações do Enade (Exame Nacional de Avaliação dos Estudantes), pois consideramos que nas resoluções das questões[2] destas provas os estudantes podem apresentar processos do PMA. De acordo com a matriz de competências e habilidades do Enade, Matemática, de 2005[3], a prova tinha como objetivo avaliar

> se o estudante, no processo de formação, habilidades e competências que lhe possibilite: a) Estabelecer relações entre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos da Matemática; b) Formular conjecturas e generalizações, elaborar argumentações e demonstrações matemáticas e examinar consequências do uso de diferentes definições; c) Utilizar conceitos e procedimentos matemáticos para analisar dados, elaborar modelos, resolver problemas e interpretar suas soluções; d) Utilizar diferentes representações para um conceito matemático, transitando por representações simbólicas, gráficas e numéricas, entre outras; e) Perceber a Matemática em uma perspectiva histórica e social; f) Interpretar e utilizar a linguagem matemática com a precisão e o rigor que lhe são inerentes; g) Ser capaz de ler e interpretar textos e expressa-se com clareza e precisão em Língua Portuguesa (BRASIL, 2005, p. 63).

---

[1] Resolução CEPE 0230/2009. Reformula o Projeto Pedagógico do Curso de Matemática – Habilitação: Licenciatura.

[2] Adotaremos este termo por ser o mesmo utilizado nas provas do Enade.

[3] Portarias Inep do dia 24 de agosto de 2005, publicada no Diário Oficial de 26 de agosto de 2005, Art. 10, Nº 176 – art.6º, seção 1, p. 63. Disponível no site: <http://www.jusbrasil.com.br/diarios/804516/pg-63-secao-1-diario-oficial-da-uniao-dou-de-26-08-2005>.

Neste sentido, considerando que para resolver as questões é preciso mobilizar diversas representações e/de conceitos matemáticos, nesta pesquisa temos por objetivo *descrever e discutir indícios/características dos processos*[4] *do Pensamento Matemático Avançado evidenciados na produção escrita de estudantes de Matemática da Universidade Estadual de Londrina ao resolverem questões discursivas do Enade*. E como pergunta que orienta nossa pesquisa:

Que processos do Pensamento Matemático Avançado são evidenciados por estudantes de Matemática ao resolverem questões discursivas do Enade?

A fim de desenvolver esta pesquisa, estruturamo-la nas seguintes partes:

- No capítulo 1 apresentamos os fundamentos teóricos que servirão de base para análise dos registros escritos dos estudantes. Abordamos uma breve discussão de algumas leituras a respeito do Pensamento Matemático Avançado, que nos permitiram escolher pelo teórico Tommy Dreyfus;
- No capítulo 2 tratamos de um breve histórico a respeito das provas que avaliam o Ensino Superior, desde o Provão até o Enade;
- No capítulo 3 contemplamos os procedimentos metodológicos, apresentando o contexto de investigação, os sujeitos participantes, o momento da coleta de informações, bem como a estratégia metodológica adotada, Análise de Conteúdo, para tratar as informações coletadas;
- No capítulo 4 mostramos as resoluções dos estudantes e da resposta Padrão do Enade, de modo descritivo seguido das análises e inferências a respeito dos indícios/características dos processos do Pensamento Matemático Avançado;
- Nas Considerações Finais, apresentamos as conclusões e reflexões acerca dos processos do Pensamento Matemático Avançado que foram manifestados nas resoluções dos estudantes participantes e nas respostas Padrão do Enade, relacionando com a matriz de competências e habilidades do Enade.

[4] Os processos utilizados para analisar os registros escritos se referem àqueles da teoria de Dreyfus (2002), descritos no próximo capítulo.

1 PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Neste capítulo apresentaremos a fundamentação teórica de nossa pesquisa. A seção 2.1 se refere às primeiras leituras que realizamos, buscando por algumas teorias que tratam do PMA. Este estudo se faz importante, uma vez que por meio dele pudemos conhecer e discutir o que autores como Tall (2002), Resnick (1987), Gray et al. (1999) e Dreyfus (2002) compreendem acerca deste tipo de pensamento. Na seção 2.2, apresentaremos a teoria que optamos para subsidiar nossas análises, desenvolvida por Tommy Dreyfus (2002).

1.1 PRIMEIRAS LEITURAS

Uma das preocupações da Educação Matemática se refere à maneira que os estudantes pensam os objetos matemáticos, e em especial o pensamento matemático desenvolvido pelos mesmos, seja de modo elementar, seja de modo avançado.

Um grupo de trabalho que se propôs a estudar o pensamento matemático, durante o evento do *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, constituiu o termo “pensamento matemático avançado” em que os participantes, dentro os quais David Tall e Gontran Ervynck, incluíram o que se refere ao pensamento matemático abrangendo desde os últimos anos do Ensino Médio até a matemática formal axiomática baseada em provas e teoremas (HAREL, SELDEN; SELDEN, 2006).

Diversos autores se dedicaram ao estudo do pensamento matemático avançado, como por exemplo Dreyfus (2002), Tall (2002), Gray et al. (1999) e Resnick (1987). Apesar de tantos estudos e discussões a respeito do PMA, não se chegou a uma conclusão para definir o que de fato seja este pensamento.

Segundo Brandemberg (2010) o processo do pensamento matemático avançado se preocupa com a aprendizagem de conteúdos matemáticos, em que “o estudante deve manipular mentalmente, investigar e descobrir coisas a respeito do objeto foco de seu conhecimento, não de forma parcial e fragmentada, mas buscando visualizar a sua totalidade generalizante” (p.112).

Tall (2002), em seus estudos, relaciona aspectos da psicologia com o pensamento matemático avançado, com o intuito de melhorar a qualidade de ensino e de pesquisa. O autor acredita que o PMA envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas por sequências de atividades matemáticas.

Para o autor, o PMA consiste em um ciclo completo de atividades, em que se parte de um contexto de um problema para se formular conjecturas chegando-se a fase final de refinamento e prova. Este ciclo ainda pode ser encontrado em atividades da matemática elementar, com a exceção de que a dedução e a definição formal são fatores que distinguem o PMA do PME[5].

Uma distinção do pensamento matemático, de acordo com Tall (2002), é a mudança do pensamento elementar para o pensamento avançado e trata-se de uma transição significativa, isto é, partindo-se do descrever para o definir e do convencer para a prova lógica baseada em definições. Para isso ser possível, deve haver uma reconstrução cognitiva, quando o estudante enfrenta as abstrações formais, baseada em entidades abstratas que devem ser construídas por meio de deduções a partir de definições formais, dando consequência a matemática avançada.

Assim, a distinção entre o PME e o PMA, segundo Tall (2002), está que no primeiro os objetos são descritos a partir da experiência com o objeto, e no segundo os objetos são definidos, ou seja, as propriedades são construídas a partir da definição.

Outra concepção do PMA é dado por Gray et al. (1999). Para estes autores o termo tem sido usado mais no sentido do pensamento de matemáticos profissionais criativos, quando imaginam, conjecturam e provam teoremas. Além disso, refere-se ao pensamento de estudantes que constroem o conceito de axiomas e definições criados por outras pessoas. Envolve a criação de novos mundos mentais, podendo ser inteiramente hipotético, em que cada indivíduo desenvolve um mundo teórico pessoal de imagens de conceitos e relações com a teoria. Ou seja, as atividades cognitivas variam de um indivíduo para outro.

A transição do básico para o PMA, segundo os autores, envolve o movimento

construção do objeto → definição para a construção definição → objeto

---

[5] Pensamento Matemático Elementar.

sendo parte essencial desta transição. A “construção definição → objeto” envolve a seleção e critérios para a definição de objetos, podendo essa situação inverter as experiências anteriores de relações além de envolver uma transposição da estrutura do conhecimento.

Outro autor que se dedica ao assunto é Dreyfus (2002), o qual afirma que o PMA consiste na interação entre vários processos, como os processos de representar, visualizar, generalizar, entre outros. Para o autor, não existe uma diferença nítida entre os processos envolvidos do pensamento matemático avançado e do pensamento matemático elementar. Há tópicos da matemática elementar que podem ser tratados de forma avançada, assim como há pensamento elementar sobre temas avançados. O que distingue estes dois pensamentos é a complexidade como são tratados os processos presentes em cada um deles, como são gerenciados os processos, por exemplo, de representação e abstração.

A respeito dos processos envolvidos no pensamento matemático avançado, definidos por Dreyfus, trataremos de maneira aprofundada na próxima seção.

Diferente dos autores citados anteriormente que adotaram o termo *pensamento matemático avançado*, Resnick (1987) trata de *pensamento de ordem superior* e afirma que não existe uma definição precisa deste pensamento, mas existem características chave que podem acontecer, como:

> - Pensamento de ordem superior é não algorítmico. Isto é, o caminho de ação não está completamente especificado previamente.
> - Pensamento de ordem superior tende a ser complexo. O caminho todo não é “visível” (mentalmente falando) para qualquer ponto de vista único;
> - Pensamento de ordem superior frequentemente rende muitas soluções, cada uma com custos e benefícios, ao invés de soluções únicas;
> - Pensamento de ordem superior envolve julgamentos e interpretações sutis;
> - Pensamento de ordem superior envolve a aplicação de múltiplos critérios, o que por vezes entram em conflito uns com os outros;
> - Pensamento de ordem superior geralmente envolve incerteza. Nem tudo o que está na tarefa é conhecido;
> - Pensamento de ordem superior envolve auto-regulação do processo de pensamento. Nós não reconhecemos o pensamento de ordem superior de um indivíduo que “pergunta” quais passos deve seguir;
> - Pensamento de ordem superior envolve uma imposição de sentido, quando a estrutura se encontra em desordem aparente;
> - Pensamento de ordem superior é trabalhoso. Há um considerável trabalho mental envolvido nos tipos de elaborações e julgamentos necessários. (RESNICK, 1987, p. 3: Versão nossa).6

[6] Versão nossa de: “Higher order thinking is nonalgorithmic. That is, the path of action is not specified in advance. Higher order thinking tends to be complex. The total path is not “visible” (mentally speaking) from any

Para a autora, este pensamento não é exclusivo dos matemáticos, sendo possível desenvolvê-lo em outras áreas de conhecimento.

1.2 Características do Pensamento Matemático Avançado

Tall (2002), em seus estudos, afirma que o pensamento matemático avançado está associado a processos cognitivos que dão origem ao conhecimento matemático. Para a compreensão do processo que ocorre na mente do indivíduo, Dreyfus (2002) nos apresenta os processos mentais que ocorrem e se interagem durante uma sequência de atividades de aprendizagem.

Atualmente pesquisadores em Educação Matemática têm tomado consciência da importância dos processos mentais e suas interações para a compreensão da matemática avançada, própria do Ensino Superior, com o intuito de obter conhecimentos teóricos a respeito do que acontece na mente do estudante. Dreyfus (2002) afirma que alguns professores ainda ensinam o aspecto matemático mais prático, seguindo a sequência "teorema-prova-aplicação". Para o autor, a consequência disso é que estes estudantes realizam apenas técnicas e padrões, tendo uma quantidade considerável de conhecimento matemático, mas não o método de trabalho de um matemático, ou seja, não desenvolvem a reflexão nos processos que levaram matemáticos a construir teorias.

Os principais processos destacados por Dreyfus (2002) são os processos de representação e de abstração[7]. Tais processos mentais podem ser encontrados tanto no pensamento matemático elementar quanto no pensamento matemático avançado. Como já referido no item anterior, o autor afirma que o que diferencia estes dois pensamentos é a complexidade e o tratamento que se dá a estes processos.

---

single vantage point. Higher order thinking often yields multiple solutions, each with costs and benefits, rather than unique solutions. Higher order thinking involves nuanced judgment and interpretation. Higher order thinking involves the application of multiple criteria, which sometimes conflict with one another. Higher order thinking often involves uncertainly. Not everything that bears on the task at hand is known. Higher order thinking involves self-regulation of the thinking process. We do not recognize higher order thinking in an individual when someone else "calls the plays" at every step".

[7] Por meio de nossos estudos, entendemos que os processos de representação e de abstração são os mais globais, sendo constituídos por outros processos como representar, visualizar, generalizar, classificar, conjecturar, induzir, verificar, analisar, sintetizar, abstrair, provar, definir, formalizar, entre outros. Os principais processos, caracterizados por Dreyfus (2002), serão descritos na próxima seção.

Dreyfus (2002) ainda destaca que os processos mentais estão intimamente ligados aos aspectos psicológicos (imagens matemáticas), e é esta ligação que torna interessante a compreensão e a aprendizagem da matemática avançada. Um exemplo dado pelo autor é quando ao criar um gráfico de uma função, executa-se um processo matemático, seguindo várias regras que podem ser expressas em linguagem matemática, e ao mesmo tempo gera-se uma imagem mental do gráfico da função. Assim "ambas as imagens criadas (mental e matemática) estão relacionadas e uma não pode aparecer sem a outra, pelo que elas representam os aspectos matemático e psicológico deste processo" (DOMINGOS, 2003, p.72).

Nas próximas seções abordaremos os processos do PMA envolvidos na representação e em seguida na abstração.

1.2.1 Processos Envolvidos na Representação

Os processos que estão presentes na representação, segundo Dreyfus (2002), são: representação simbólica; representação mental; visualização; mudança de representações e tradução entre elas; e modelação.

Para Dreyfus (2002) as representações são fundamentais na Matemática, em que os símbolos tornaram-se indispensáveis para a matemática moderna[8]. Os símbolos envolvem relações entre signos e significados, proporcionando explicitar em símbolos aquele conhecimento pessoal antes implícito. Por exemplo, quando falamos a respeito do grupo de permutações de *n* elementos, podemos chamá-lo por Grupo Simétrico de grau *n* e denotá-lo por S_n. Ou seja, S_n é uma *representação simbólica* do grupo considerado. De acordo com Brandemberg (2010) "deve existir, *a priori*, um significado associado a uma ideia, antes que um símbolo relacionado à mesma ideia que nos possa ser útil" (p.113).

As representações possibilitam aprender e pensar matematicamente. Ao pensar a respeito de um grupo, uma integral ou qualquer outro objeto matemático, cada um relacionará com algo que se tem em mente. A isso Dreyfus (2002) chama de *representação mental* do objeto em questão. Embora

[8] Em uma das leituras a respeito da Matemática Moderna apresentadas por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), há a concepção de que a Álgebra se distingue em três momentos: a retórica ou verbal, a sincopada e a simbólica. A Matemática Moderna se encontraria nesta última fase, em que as ideias algébricas eram expressas por meio de símbolos ao invés do uso de palavras.

se espere que as pessoas cheguem a definições matemáticas semelhantes, cada uma apresentará representações mentais diferentes do mesmo conceito.

> Você já perguntou a matemáticos que trabalham em diferentes áreas o que lhes vem à mente quando eles pensam sobre funções? Quando você também perguntar a professores de matemática e estudantes, estas diferenças tornam-se não só acentuadas, mas também muito mais importante. Por exemplo, a noção de um estudante de uma função pode ser limitada a processos (de computação ou aplicação), enquanto que o professor que ensina integrais indefinidas pode pensar na função da integral como objeto a ser transformado. (DREYFUS, 2002, p.31: Versão nossa)[9].

A situação descrita acima pode levar a momentos em que estudantes não compreendem seus professores. Segundo Brandemberg (2010) o ensino só acontecerá quando a comunicação for estabelecida e para isso acontecer será preciso gerar um exemplo ou imagem para o ensino efetivo da representação do conceito.

No entanto, Dreyfus (2002) esclarece que não se pode afirmar que o exemplo gerado seja simbólico ou mental. Assim, a *representação simbólica* deve ser externada de forma escrita ou falada, com o objetivo de tornar a comunicação mais compreensível sobre o conceito, enquanto que a *representação mental* concerne a esquemas internos que as pessoas utilizam para se relacionar com o mundo externo. Domingos (2003) afirma que a representação mental é fundamental, pois permite a comunicação de seu pensamento relativo a um objeto.

Outro processo envolvido na representação é a *visualização*. Este processo permite que as representações sejam criadas. De acordo com Domingos (1993) a visualização oferece intuir e compreender, sendo um processo de formação de imagens utilizando-as na descoberta e compreensão de conceitos matemáticos.

Segundo Brandemberg (2010), visualização é essencial para que o matemático consiga trabalhar em qualquer nível. Para o autor, é necessário que o estudante possua diversas representações simbólicas de um mesmo conceito para gerar representações mentais do mesmo. Tomemos como exemplo representações

---

[9] Versão nossa de: “Have you ever asked mathematicians working in different areas what comes to their mind when they think about functions? When you also ask mathematics teachers and students, these differences become not only more pronounced but also much more important. For example, a student’s notion of a function may be limited to processes (of computation or mapping), whereas the teacher teaching indefinite integrals may think of the function in the integral as an object to be transformed.”

mentais do conceito de função: alguém pode descrevê-lo por meio de fórmulas, outro pode pensar em gráficos, assim como em diagramas e tabelas. Ou uma mesma pessoa pode criar várias representações mentais para o conceito de função.

A criação dessas representações está relacionada com as representações concretas que o estudante possui.

> Admitindo, então, que uma pessoa pode criar uma ou múltiplas representações mentais para um mesmo conceito matemático, podemos inferir que é apoiado nessas representações que se torna possível a ampliação concreta do número de representações simbólicas ligadas a um determinado conceito, posto que cada representação mental estará associada a seu modelo de representação simbólica (BRANDEMBERG, 2010, p.115).

Dreyfus (2002) comenta que para ter sucesso em matemática é desejável possuir representações matemáticas ricas de conceitos. Isso quer dizer ter vários aspectos ligados a estes conceitos. Por outro lado, uma representação mental é pobre quando estes aspectos são insuficientes para permitir uma flexibilidade na resolução de problemas. Estudantes universitários iniciantes geralmente apresentam imagens mentais pobres do conceito de função, pois pensam somente em termos de fórmulas algébricas. Brandemberg (2010) afirma que isso ocorre devido ao ensino que o estudante teve no Ensino Médio, caracterizado pela manipulação de fórmulas, tendo como consequência uma limitação na habilidade da representação mental.

Um indivíduo ao possuir diversas representações mentais pode utilizá-las de maneira complementar e pode ser possível integrá-las em uma única representação. Como resultado, Dreyfus (2002) afirma que o indivíduo terá várias representações ligadas, o que permite utilizá-las simultaneamente e alterná-las de forma eficientes em determinados momentos. Este processo, de *mudanças de representações e a tradução entre elas*, Dreyfus (2002) considera estar envolvido na representação.

O autor explica que mesmo tendo muitas representações de um conceito não é suficiente para o seu uso flexível. Segundo Domingos (2003) é preciso que as várias representações estejam ligadas correta e fortemente para ter sucesso na manipulação dos conceitos. O que é necessário é a possibilidade de mudar de uma representação A para B, sempre que esta for mais eficiente que a primeira. Deste modo, o processo de mudança de representações é o que caracteriza o processo de representação.

Porém, ensinar e aprender este processo de mudança de representações não é simples, e segundo Dreyfus (2002), sua estrutura é complexa. Uma possível saída para isso é um ensino baseado no processo de mudança de representações. “Uma abordagem possível é a aplicação sistemática de várias representações no ensino e enfatizar o processo de mudanças de representações desde o início” (DREYFUS, 2002, p.33: Versão nossa)[10]. Para resolver um problema o estudante precisará utilizar pelo menos duas representações além de transferir informações de uma representação para outra.

Um processo importante e relacionado à mudança de representações é o *processo de tradução*, que consiste em passar de uma formulação de um problema matemático ou de uma propriedade para outro. Para esta situação Dreyfus (2002) dá exemplos de problemas aplicados, em que é necessário o uso de propriedades matemáticas em fenômenos físicos, como é o caso de uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes sendo apresentada como um problema de oscilação. A relação que o estudante deve fazer, por exemplo, entre o contexto dos problemas aplicados com a representação matemática não é simples, pois isso necessita a construção de um esquema mental adequado juntamente com um trabalho explícito do professor.

O último processo envolvido na representação é a *modelação*. Dreyfus (2002) diz que geralmente este processo associa uma representação matemática a um objeto não matemático, mas no caso do pensamento matemático avançado, modelação “significa a construção de uma estrutura matemática ou teoria que incorpora características essenciais do objeto do sistema. Esta estrutura ou teoria, o modelo, pode ser usado para estudar o comportamento do objeto ou o processo a ser modelado” (DREYFUS, 2002, p.34: Versão nossa)[11].

O autor afirma que o processo de representação é análogo ao de modelação, mas em outro nível. Na modelação o objeto é físico, enquanto o modelo é matemático e a relação entre objeto e modelo ocorre por meio de uma

---

[10] Versão nossa de: “One possible approach is to systematically use several representations in teaching and to stress the process of switching representations from the beginning”.

[11] Versão nossa de: “it means constructing a mathematical structure or theory which incorporates essential features of the object, system or process to be described. This structure or theory, the model, can then be used in order to study the behavior of the object or process being modelled.”

representação simbólica. Na representação o objeto é uma estrutura matemática e o modelo é a estrutura mental. Portanto uma representação mental está relacionada com o modelo matemático que por sua vez está relacionado com o sistema físico (DREYFUS, 2002).

Após a descrição dos processos envolvidos na representação, apresentamos o quadro, que segue abaixo, com o intuito de sintetizar o que interpretamos acerca desta teoria:

Quadro 1 – Descrição dos processos do Pensamento Matemático Avançado envolvidos na Representação, segundo Dreyfus (2002), conforme nossas interpretações

Processos envolvidos na REPRESENTAÇÃO	
Representação Simbólica	Pode-se representar um conceito/objeto matemático por meio da escrita, em forma de notações ou símbolos. No entanto é necessário que se tenha antes um significado associado ao conceito/objeto matemático (representado).
Representação Mental	A representação de um conceito/objeto matemático ocorre na mente do indivíduo, relacionando-se ao conjunto de representações concretas que possui do conceito/objeto.
Visualização	Por meio da intuição e da compreensão, este processo permite que as representações mentais sejam criadas.
Mudança de representações e tradução entre elas	Transitar por diversas representações de um conceito/objeto matemático demanda habilidade para interligá-las corretamente, sempre que necessário. Traduzir representações se refere à passagem de informações de um enunciado/propriedade matemático(a) para outro(a), assim como a tradução entre linguagens (matemática e verbal).
Modelação	O objeto/processo a ser modelado requer a construção de uma estrutura/teoria matemática que abrange suas características.

Fonte: do autor.

Após descrevermos os processos presentes na representação, na próxima seção apresentaremos os processos envolvidos na abstração.

1.2.2 Processos Envolvidos na Abstração

Desde os primeiros anos escolares as crianças já podem criar representações mentais de objetos matemáticos, como números e figuras geométricas. Com o decorrer dos anos, o conteúdo matemático se torna mais avançado e estes estudantes começam a trabalhar com diferentes representações mentais de objetos matemáticos. Por meio de experiências matemáticas alguns processos ganham relevância e os estudantes desenvolvem habilidades em relação a alguns conteúdos. De acordo com Dreyfus (2002), o processo mais importante no desenvolvimento dessas habilidades é a abstração.

> Se um aluno desenvolve a habilidade de conscientemente fazer abstrações a partir de situações matemáticas, ele alcançou um nível avançado do pensamento matemático. Atingir essa capacidade de abstrair pode muito bem ser o objetivo mais importante da educação matemática avançada. (DREYFUS, 2002, p.34: Versão nossa)[12].

Juntamente com o processo de representação, outros dois processos constituem uma base para abstrair: a *generalização* e a *sintetização*.

Segundo Dreyfus (2002) "generalizar é derivar ou induzir a partir de particularidades, identificar semelhanças e expandir domínios de validade" (p.35: Versão nossa)[13]. Sendo assim, este processo é importante, pois estabelece, a partir de um caso particular, um resultado para grande quantidade de casos.

Um exemplo é o processo de generalização da esfera S^n n-dimensional, em que $S^n = \{(x_1,...,x_n) \in R^n \mid x_1^2 + ... + x_n^2 = 1\}$. Outro exemplo é quando o estudante sabe por experiência que uma equação linear com uma variável possui uma solução e que sistemas de duas ou três dimensões em duas ou três variáveis têm uma única solução, generalizando este conhecimento a um sistema de *n* equações lineares com *n* variáveis. Para realizar este processo, o estudante terá que fazer a transição dos casos particulares para o caso geral *n*, identificando o que há de comum e conjecturar para, enfim, estabelecer o domínio de validade.

---

[12] Versão nossa de: "If a student develops the ability to consciously make abstractions from mathematical situations, he has achieved an advanced level of mathematical thinking. Achieving this capability to abstract may well be the single most important goal of advanced mathematical education."

[13] Versão nossa de: "To generalize is to derive or induce from particulars, to identify commonalities, to expand domains of validity."

Brandemberg (2010) afirma que o processo de generalização poderá ocorrer se se relacionar bem com objetos característicos da experiência do estudante. Podemos notar isso quando Dreyfus (2002) diz que a presença de objetos matemáticos conhecidos pelos estudantes os deixam seguros quando lidam com a generalidade da situação.

O outro processo presente na abstração é a *sintetização*. De acordo com Dreyfus (2002), este processo se refere à combinação ou composição de partes com o intuito de formar um todo. Na graduação, por exemplo, vários conteúdos são ensinados de maneira isolada, como ortogonalização de vetores, diagonalização de matrizes, transformação de bases, entre outros, e mais tarde, durante o processo de aprendizagem, o que se espera é que tais conteúdos sejam assimilados pelos estudantes de maneira a formar um conjunto, composto pela junção destes conteúdos aparentemente isolados, buscando relacioná-los e interligá-los.

Da mesma maneira que os conteúdos são ensinados de forma isolada, professores não dão ênfase no processo de síntese, poucas atividades se destinam a oportunizar momentos para que o estudante sintetize. Geralmente o professor ao dar sua aula faz alguns resumos, o que pode incluir algumas sínteses, isentando o estudante de realizar tal processo. Assim, as questões ditas não-padrão[14], mesmo as simples, que necessitam de flexibilidade de pensamento e de síntese, estão na maioria das vezes fora do alcance dos estudantes (DREYFUS, 2002).

O que pode ser feito para ativar o processo de síntese na mente dos estudantes, de acordo com Brandemberg (2010), é inicialmente estabelecer relações entre conteúdos presentes em diferentes disciplinas, como por exemplo, a Geometria e a Álgebra, fazendo o uso adequado de definições associadas às formas de representações familiares ao estudante.

Os processos de *generalização* e *sintetização*, que foram descritos anteriormente, complementam o processo de *abstração*, em uma ligação íntima, mas nenhum destes dois processos exige tanto esforço cognitivo dos estudantes quanto o processo de *abstração*. Segundo Dreyfus (2002) este processo obriga o estudante a se concentrar nas relações existentes nos objetos matemáticos, a fim de compreendê-los. Além disso, a natureza do processo de *abstração* é diferente dos

[14] Que não seguem um determinado padrão.

processos de *generalização* e *sintetização*, pois se trata de um processo de construção:

> [...] a construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, de propriedades e relações entre objetos matemáticos. Este processo é dependente do isolamento de propriedades adequadas e estabelecimento de relações. Requer a capacidade de deslocar a atenção dos objetos em si a estrutura das suas propriedades e relações. (DREYFUS, 2002, p. 37: Versão nossa)[15].

Para acontecer tal processo deve haver uma separação entre as relações, as propriedades e o objeto, de modo que o foco passe do objeto para suas propriedades e relações, sendo essas consideradas as mais relevantes do objeto, e as irrelevantes sendo omitidas, reduzindo a complexidade da situação.

Uma questão didática em relação à abstração de um conceito surge quando nos questionamos: devemos "levar" os estudantes a abstraírem a partir de um único caso ou de vários casos? Dreyfus (2002) nos afirma que em algumas situações é fazer com que os estudantes, a partir de diversos exemplos, identifiquem pontos em comum, sendo que o professor deve chamar a atenção deles para as relações e propriedades necessárias para se abstrair. No entanto, isso ocorrerá de maneira efetiva se a quantidade de informações, presentes nos exemplos, for limitada. Caso contrário, se os exemplos foram complexos, as propriedades podem ser ignoradas durante o processo de abstração. Nestas condições, será melhor abstrair de um único exemplo. Deste modo, o autor diz que a questão não é a utilização de um ou de vários exemplos, mas sim encontrar a "boa medida" para cada situação. Um exemplo dado por Dreyfus (2002) é o caso de estudantes da disciplina de Equações Diferenciais, que por não possuírem o conceito abstrato de função como objeto matemático, não entendem que a função pode ser uma solução de uma equação diferencial.

Com os processos do Pensamento Matemático Avançado envolvidos na abstração descritos, apresentamos a seguir um quadro, em que sintetizamos aquilo que interpretamos da teoria de Dreyfus (2002):

---

[15] Versão nossa de: "the building of mental structures from mathematical structures, i.e. from properties of and relationships between mathematical objects. This process is dependent on the isolation of appropriate properties and relationships. It requires the ability to shift attention from the objects themselves to the structure of their properties and relationships."

Quadro 2 – Descrição dos processos do Pensamento Matemático Avançado envolvidos na Abstração, segundo Dreyfus (2002), conforme nossas interpretações

Processos envolvidos na ABSTRAÇÃO	
Sintetização	Utilizar uma composição de objetos/conceitos matemáticos (distintos), inter-relacionando-os com o propósito de resolver a tarefa como um todo.
Generalização	A partir de casos particulares, identificar características comuns para a validade ser expandida. Pode ser que seja preciso incluir a formulação de outros conceitos matemáticos.

Fonte: do autor.

1.2.3 Relações entre os Processos de Representação e de Abstração

Algumas propriedades que gostaríamos de abstrair estão relacionadas a representações de um conceito matemático abstrato. Essas relações entre os processos de *representação* e de *abstração*, segundo Dreyfus (2002), são complementares. Muitas vezes temos que um conceito é abstraído de suas representações e, em outros casos, temos que as representações são representações de um conceito abstrato.

Um indivíduo pode, então, ter uma representação de um conceito ou ter diversas. No primeiro caso, a atenção centra-se sobre a representação e não ao objeto abstrato. No segundo caso, as diversas representações tratadas em paralelo são importantes para se obter o conceito abstrato. Quando um indivíduo chega a uma representação específica por meio das representações mentais estará reforçando seu pensamento matemático, e poderá ser mais reforçado se usar diversas representações paralelamente. Esta situação, de acordo com Dreyfus (2002), estabelece uma complementaridade entre aspectos matemáticos e cognitivos de representação de estruturas matemáticas.

Por meio das complementaridades instituídas por Dreyfus (2002) – entre a representação e a abstração e entre as representações matemáticas e mentais – professores podem encontrar uma oportunidade para possibilitar a aprendizagem. Para o autor, os processos de aprendizagem matemática são constituídos pelas seguintes fases:

i) utiliza uma única representação;

ii) utiliza várias representações em paralelo;

iii) estabelece ligações entre as representações paralelas;

iv) integra as representações e flexibiliza a mudança entre elas.

É na *primeira fase* que os processos iniciam a partir de um caso particular, uma única representação. No decorrer da aprendizagem dos conteúdos matemáticos, o estudante passa a ter contato com diferentes representações de um conceito, como é o caso do conceito de função, em que se tem contato com as representações gráfica, tabular, algébrica, por meio de diagramas, entre outras. Aqui se inicia a *segunda fase*, quando o estudante é capaz de utilizar várias representações em paralelo. Pode ser que o estudante encontre dificuldades na mudança entre essas representações, complicando o processo de transição para o conceito abstrato. Estas relações entre as representações constituirá a *terceira fase*. As mudanças de representações tornam o estudante ciente ao conceito subjacente do objeto matemático, induzindo a abstração. E na *quarta fase*, ocorre a integração entre as diversas representações, uma síntese, constituindo um processo parcial da abstração, em que as ligações, relações e as propriedades comuns formam o conceito abstrato (DREYFUS, 2002).

De acordo com Brandemberg (2010) há uma importância na ordem dessas fases e para resolver uma tarefa que envolva o pensamento matemático avançado, o estudante deve estar na quarta fase.

Ao finalizar este processo (as quatro fases), o indivíduo se apropria do conceito que foi formado e, segundo Dreyfus (2002), ao resolver um problema que envolva um conceito que já foi abstraído, o mesmo precisará voltar a uma ou várias de suas representações, tendo pleno domínio em todas essas representações.

Portanto, com base na teoria desenvolvida por Dreyfus (2002) é que analisaremos os registros escritos dos estudantes participantes desta pesquisa. As fases de aprendizagem descritas anteriormente não foram utilizadas para análise das resoluções.

2 SISTEMA DE AVALIAÇÃO DO ENSINO SUPERIOR E O ENADE

Este capítulo visa abordar um breve histórico a respeito do Sistema de Avaliação do Ensino Superior, uma vez que nesta investigação utilizaremos questões do Enade como instrumento para coleta de informações.

O Exame Nacional de Avaliação dos Estudantes[16] (Enade) é uma das três dimensões que constitui o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (Sinaes), tendo como unidade de análise os estudantes. As outras dimensões se referem à avaliação institucional, que pretende avaliar a instituição de Ensino Superior; e a avaliação dos cursos de graduação, avaliando o curso dentro da instituição.

Essa avaliação, o Sinaes, em 2004, veio substituir o antigo sistema de avaliação do ensino superior denominado popularmente de “Provão”, sendo inicialmente nomeado por Exame Nacional de Cursos (ENC), permanecendo em atividade do ano de 1995 a 2003.

A seguir, apresentamos uma rápida revisão abordando os dois sistemas de avaliação acima mencionados. As iniciativas precedentes ao Provão – PARU[17], GERES[18] e PAIUB[19] – não serão aqui abordadas, mas para maiores informações indicamos os estudos de Brasil (2004) e Gouveia et al. (2005).

2.1 UM BREVE HISTÓRICO: DO PROVÃO AO ENADE

Durante o governo do presidente Fernando Henrique Cardoso, 1995 à 2002, houve uma significativa ampliação da educação superior brasileira, em especial no setor privado. Segundo Barreyro (2004), essa explosão deveu-se a “sanção de nova legislação e implementação da avaliação das universidades pelo Provão” (p.40).

A nova legislação, decorrente da sanção da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB, nº 9394/96 (BRASIL, 1996) – no que diz respeito à educação superior, permitiu a diversificação das instituições, ou seja, a educação superior tanto por instituições públicas ou privadas e seus

[16] Algumas informações a respeito do ENADE: http://portal.inep.gov.br/enade.
[17] Programa de Avaliação da Reforma Universitária.
[18] Grupo Executivo para a Reformulação da Educação Superior.
[19] Programa de Avaliação Institucional.

reconhecimentos com validade limitada, renovada periodicamente por meio das avaliações.

Assim, o Provão era uma avaliação aplicada anualmente às instituições e nos cursos “de nível superior de graduação, e teve como função avaliar os conhecimentos e competências técnicas adquiridas pelos estudantes em fase de conclusão dos cursos de graduação” (POLIDORI, ARAUJO, BARREYRO, 2006, p.429). De acordo com o Decreto nº 2.026/96 (BRASIL, 1996), a avaliação deveria ser feita por estado e região, considerando a área de conhecimento e o tipo de instituição de ensino. Cabia avaliar ainda as dimensões de ensino, pesquisa e extensão.

Os estudantes formandos dos cursos de graduação, então, resolviam uma prova de conhecimentos, e posteriormente as instituições recebiam uma nota (A, B, C, D e E) referente às provas que os estudantes realizaram, posta em um ranking.

Porém, houve algumas modificações nas instituições de Ensino Superior, distorcendo o objetivo central do Provão, como reformulação de currículos, induzindo as instituições a ensinar somente os conteúdos que eram exigidos para fazer a prova, e cursinhos “pré-provão”, com o intuito de os estudantes apresentarem um bom desempenho na prova, tendo como consequências com que os seus efeitos negativos estivessem à frente dos positivos (POLIDORI, ARAUJO, BARREYRO, 2006).

Segundo Barreyro (2004), o Provão foi um “regulador mercadológico e midiático” em que os resultados das provas aplicadas aos estudantes eram utilizados para outros fins, como notas de cursos e de universidades no sentido de publicidade e marketing. A ênfase era dada às notas que os estudantes recebiam, ao invés das informações acerca da própria prova.

No ano de 2003, com a divulgação do Relatório Técnico do Exame Nacional de Cursos, foi possível visualizar os reais resultados do Provão, em que as notas atribuídas às instituições, na escala de A a E, estavam distorcidas.

Com a repercussão e o estranhamento das informações, passou-se a repensar o sistema de avaliação da educação superior do país, e após estudos e discussões, idas e vindas, foi instituído em 2004 o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior, o Sinaes.

O novo sistema visa à melhoria da qualidade da educação superior, a orientação da expansão da sua oferta, a eficácia institucional crescente, a efetividade social e acadêmica, aprofundamento de compromissos e responsabilidades sociais, o respeito à diferença e a diversidade, a afirmação da autonomia e identidade institucional (BRASIL, 2004).

O Sinaes se divide em três componentes de avaliação: a avaliação das instituições, a avaliação dos cursos de graduação e a avaliação do desempenho dos estudantes.

O primeiro eixo, a avaliação das instituições, é constituído pela avaliação interna, a auto-avaliação, favorecendo um processo de auto-conhecimento das instituições, preparando-se para bom desenvolvimento de uma instituição do Ensino Superior. A segunda etapa refere-se à avaliação externa, em que professores de outras instituições verificam as informações disponibilizadas anteriormente, na etapa da avaliação interior.

O segundo eixo diz respeito à avaliação dos cursos de graduação. É realizada por uma equipe externa a instituição avaliada, com o objetivo de proporcionar as instituições de Ensino Superior auxílio para dinamizar as atividades, resolver questões imediatas e construir metas (POLIDORI, ARAUJO, BARREYRO, 2006).

E a avaliação dos estudantes, o terceiro eixo, permite uma coleta rica de informações. O principal instrumento de avaliação deste eixo é chamado de Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes – Enade. De acordo com lei nº 10.861,

> § 1º O ENADE aferirá o desempenho dos estudantes em relação aos conteúdos programáticos previstos nas diretrizes curriculares do respectivo curso de graduação, suas habilidades para ajustamento às exigências decorrentes da evolução do conhecimento e suas competências para compreender temas exteriores ao âmbito específico de sua profissão, ligados à realidade brasileira e mundial e a outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 2004).

A prova é aplicada periodicamente a todos estudantes concluintes, do último ano, que tenham expectativas de conclusão do curso e tenham concluído mais de 80% da carga horária mínima do currículo do curso. Para os estudantes ingressantes, a prova é opcional. O Enade é realizado anualmente e para cada curso avaliado a periodicidade é trienal (o curso de Matemática participou das provas nos anos de 2005, 2008 e 2011). Os conceitos relacionados a avaliação do desempenho dos estudantes é expressa por meio da escala de 1 a 5, sendo que 1 é o resultado mais baixo e 5 é o melhor resultado. Para os estudantes selecionados, consta como componente curricular obrigatório dos cursos de graduação.

A seguir, apresentamos o quadro 3, com o intuito de especificar a estrutura das provas dos anos de 2005, 2008 e 2011 de Matemática, detalhadas pelas questões objetivas e discursivas:

Quadro 3 – Relação das questões das provas de Matemática do Enade dos anos de 2005, 2008 e 2011

		Questões Objetivas	**Questões Discursivas**[20]
2005	Formação Geral	1 a 7	8 a 10
	Núcleo Comum	11 a 28	29 e 30
	Licenciatura	31 a 39	40
	Bacharelado	41 a 49	50
2008	Formação Geral	1 a 8	9 e 10
	Núcleo Comum	11 a 27	28 e 29
	Licenciatura	30 a 39	40
	Bacharelado	41 a 50	51
2011	Formação Geral	1 a 8	Discursivas 1 e 2
	Núcleo Comum	9 a 25	Discursivas 3, 4 e 5
	Licenciatura	26 a 35	-
	Bacharelado	36 a 45	-

Fonte: do autor.

A prova do Enade, em relação a matriz de competências e habilidades do Enade, do ano de 2005[21],

[20] As questões discursivas escolhidas para este trabalho se referem às do Núcleo Comum e as de Licenciatura (uma questão do ano de 2005, outra de 2008 e as outras duas de 2011). No próximo capítulo trataremos a respeito desta escolha.

[21] Portarias Inep do dia 24 de agosto de 2005, publicada no Diário Oficial de 26 de agosto de 2005, Art. 10, Nº 176 – art.6º, seção 1, p. 63. Disponível no site: <http://www.jusbrasil.com.br/diarios/804516/pg-63-secao-1-diario-oficial-da-uniao-dou-de-26-08-2005>.

> avaliará se o estudante, no processo de formação, habilidades e competências que lhe possibilite: a) Estabelecer relações entre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos da Matemática; b) Formular conjecturas e generalizações, elaborar argumentações e demonstrações matemáticas e examinar consequências do uso de diferentes definições; c) Utilizar conceitos e procedimentos matemáticos para analisar dados, elaborar modelos, resolver problemas e interpretar suas soluções; d) Utilizar diferentes representações para um conceito matemático, transitando por representações simbólicas, gráficas e numéricas, entre outras; e) Perceber a Matemática em uma perspectiva histórica e social; f) Interpretar e utilizar a linguagem matemática com a precisão e o rigor que lhe são inerentes; g) Ser capaz de ler e interpretar textos e expressa-se com clareza e precisão em Língua Portuguesa (BRASIL, 2005, p. 63).

O componente específico do curso de Matemática[22], avaliará se o estudante: tem domínio do conhecimento matemático, compreendendo seu uso em diversos contextos; concebendo-o como conhecimento rigoroso, formal e dedutivo, sendo construído historicamente pelo homem; analisa a contribuição do conhecimento matemático na formação de indivíduos; identifica e soluciona problemas; é crítico de seu desempenho profissional, por meio da identificação de seus valores, concepções e atitudes, entre outros.

Sendo assim, a maioria das questões do Enade exigem um pensamento matemático formal, mais abstrato e que podem levar os estudantes a mobilizarem os processos do Pensamento Matemático Avançado. As competências e habilidades da matriz do Enade convergem para os processos do PMA, segundo Dreyfus (2002), como representação (d), mudança de representações e tradução entre elas (d, f, g), modelação (c), visualização (d), sintetização (a, c) e generalização (b). Devido a isso, e por se trata de questões que já estão validadas, escolhemos fazer este estudo, em que relacionamos o Enade com o PMA.

No próximo capítulo, apresentaremos os procedimentos metodológicos, em que trataremos da construção do instrumento para coleta de informações, dos sujeitos da pesquisa, da escolha das questões, bem como comentaremos as fases da Análise de Conteúdo, segundo Bardin (2004), para tratar das resoluções dos estudantes em nossa pesquisa.

[22] De acordo com as Portarias Inep do dia 24 de agosto de 2005, publicada no Diário Oficial de 26 de agosto de 2005, Art. 10, Nº 176 – art.5º, seção 1, p. 63.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Este capítulo tem por finalidade tratar dos procedimentos metodológicos adotados nesta investigação assim como o contexto em que a mesma foi realizada. Na seção 3.1 exporemos nossa opção metodológica, referente a uma pesquisa qualitativa. Na seção 3.2 descrevemos o caminho percorrido para a elaboração do nosso instrumento de coletas de informações. Na seção 3.3 abordamos a respeito dos sujeitos participantes desta pesquisa, e do momento da coleta de informações. E na seção 3.4 exporemos nosso recurso metodológico para tratamento das informações, relatando as fases da Análise de Conteúdo em nossa pesquisa.

3.1 NATUREZA DA PESQUISA

Considerando que o presente estudo tem como objetivo *descrever e discutir indícios/características dos processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados na produção escrita de estudantes de Matemática da Universidade Estadual de Londrina ao resolverem questões discursivas do Enade*, optamos por realizar uma pesquisa qualitativa, de cunho interpretativo, seguindo algumas características segundo Bogdan e Biklen (1994):

"1) *Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal*" (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 47). A coleta de informações ocorreu por meio de registros escritos de estudantes do quarto ano do curso de Matemática ao resolverem quatro questões do nosso instrumento. Este momento realizou-se durante duas aulas da disciplina de Seminário de Matemática e Educação Matemática, aplicado pela pesquisadora.

"2) *A investigação qualitativa é descritiva*. [...] Tentam analisar os dados em toda sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registrados" (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 48). Por meio dos registros escritos e com base no referencial teórico adotado, analisamos as informações que emergiram das resoluções. A metodologia da Análise de Conteúdo contribuiu para que tratássemos as informações.

"3) *Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos*" (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p.

49). As informações foram analisadas considerando a resolução de questões dissertativas do Enade com o intuito de analisar os processos mentais do Pensamento Matemático Avançado evidenciados pelos estudantes, tratando de uma pesquisa descritiva interessada no envolvimento do estudante com essas questões.

3.2 DAS PRIMEIRAS IDEIAS AO INSTRUMENTO DE COLETA DE INFORMAÇÕES

Tendo em conta o objetivo de nossa pesquisa, fizemos uma busca pelas provas de Matemática do Enade, que ocorreram nos anos de 2005, 2008 e 2011, e escolhemos questões discursivas por considerar que as mesmas permitem ao estudante resolver e justificar suas escolhas e estratégias, não sofrendo a influência das alternativas de uma questão objetiva.

Sendo assim, escolhemos nove questões discursivas[23] que contemplam, nas provas do Enade dos anos de 2005, 2008 e 2011, as de Núcleo Comum e as de Licenciatura, por abrangerem conteúdos que são estudados tanto pelos estudantes que cursam Licenciatura quanto os estudantes de Bacharelado, constituindo nosso *instrumento piloto* (Anexo A).

Antes de aplicarmos este instrumento com os estudantes de graduação, participantes do Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático – GEPPMAT – resolveram as questões com o intuito de sabermos o tempo médio gasto para a resolução, assim como quais questões nos dariam mais “elementos de análise”. A seguir, apresentamos um quadro com os números das questões do *instrumento piloto* correspondentes aos números das questões discursivas da prova do Enade e o ano de sua aplicação:

[23] Conforme o quadro 3 da página 37. As questões de Formação Geral e de Bacharelado são específicas dos cursos de Licenciatura e Bacharelado.

Quadro 4 – Relação das questões do instrumento piloto com as questões da prova do Enade

Número da questão do instrumento piloto	Número da questão discursiva da prova do Enade	Ano da prova do Enade
01	29	2005
02	30	2005
03	40	2005
04	28	2008
05	29	2008
06	40	2008
07	03	2011
08	04	2011
09	05	2011

Fonte: do autor.

Fizemos a aplicação no dia 06 de março de 2013, na sala onde realizamos nossos encontros do GEPPMAT, estando presentes nove pessoas, das quais sete resolveram as questões do instrumento piloto (quatro pessoas são mestres, sendo três em Educação Matemática e uma em Matemática; duas pessoas mestrandas em Educação Matemática e uma graduada em Matemática). O tempo gasto foi de duas horas, não sobrando tempo algum, sendo que alguns dos participantes não conseguiriam resolver todas as questões.

Em seguida, observamos que em uma hora e cinquenta minutos, que é o tempo de duas aulas, não poderíamos aplicar essas nove questões. Após analisar as resoluções dos sete integrantes do grupo, fizemos a escolha das questões 1, 6, 7 e 8, compondo, enfim, nosso *instrumento* (Anexo B) para coletar as informações. A decisão da escolha destas quatro questões foi que julgamos permitirem em suas resoluções encontrar indícios/características dos processos do Pensamento Matemático Avançado, deixando de fora aquelas que possivelmente não iriam dar margem a estes processos.

No quadro 5 apresentamos os números das questões do instrumento, os números das questões discursivas que estão na prova do Enade e o ano em que foram propostas:

Quadro 5 – Relação das questões do instrumento com as questões da prova do Enade

Número da questão do instrumento	**Número da questão discursiva da prova do Enade**	**Ano da prova do Enade**
01	29	2005
02	40	2008
03	03	2011
04	04	2011

Fonte: do autor.

A seguir, descreveremos o momento da coleta de informações e a respeito dos sujeitos participantes da pesquisa.

3.3 Sujeitos da Pesquisa e a Coleta de Informações

Para selecionar os sujeitos da pesquisa, no dia 19 de março de 2013, durante a disciplina de Seminários de Matemática e Educação Matemática, convidamos todos os estudantes do quarto ano do curso de Matemática para participarem do nosso trabalho. Fizemos um esclarecimento acerca da pesquisa e firmamos o compromisso de manter o anonimato dos participantes que se disponibilizassem contribuir com nossa pesquisa (conforme o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – Anexo C).

A referida disciplina é ministrada no quarto ano do curso de Matemática, Licenciatura. No momento da aplicação do instrumento contamos com a presença da pesquisadora, da professora da disciplina e da professora orientadora.

Todos os estudantes se dispuseram a contribuir, um total de treze. Juntamente com o instrumento, coletamos algumas informações a respeito dos sujeitos que resolveram as questões, tais como ano de ingresso no curso de Matemática e se cursava apenas licenciatura, apenas bacharelado ou licenciatura e bacharelado. Dos treze estudantes, quatro ingressaram no curso de licenciatura em Matemática no ano de 2008, três estudantes ingressaram em 2009, seis estudantes em 2010, sendo que um destes faz o curso de licenciatura em concomitância com o bacharelado. De modo aleatório, utilizamos um código de identificação para resguardar o nome do participante. Empregamos a letra E para nos referir aos estudantes, e um número para diferenciá-los (de 1 a 13).

A aplicação do instrumento (que ocupou o tempo de duas aulas) se deu logo após a devolução do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, assinado pelos estudantes. Cada um resolveu individualmente, sem poder pesquisar em livros, cadernos ou internet. A coleta das informações se deu por meio dos registros escritos dos estudantes ao resolverem questões discursivas do Enade.

Tendo as informações coletadas, demos início às primeiras fases à luz da Análise de Conteúdo. Na próxima seção, descreveremos como realizamos tal análise.

3.4 Fases da Análise de Conteúdo

Para este estudo, seguimos procedimentos à luz da Análise de Conteúdo (BARDIN, 2004), que é uma modalidade da pesquisa qualitativa. Segundo a autora, a Análise de Conteúdo é:

> um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 2004, p. 37).

Este método leva a alguns objetivos, que são: a *superação da incerteza*, em que validarei o que julgo ver em meus elementos, e o *enriquecimento da leitura*, com um olhar atento para aumentar a produtividade do material analisado.

Para que a aplicação do método esteja coerente, Bardin (2004) afirma que é necessário que a análise de conteúdo tenha como princípio uma organização, possuindo três fases: 1) a pré-análise; 2) a exploração do material e 3) o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

A pré-análise (que é constituída por cindo etapas: a) leitura flutuante; b) escolha dos documentos; c) formulação das hipóteses e dos objetivos; d) referenciação dos índices e elaboração de indicadores; e) preparação do material) é a fase da organização e tem por objetivo sistematizar as ideias iniciais. Deve-se estabelecer um programa que seja flexível e preciso. Para isso é necessária uma leitura flutuante ao estabelecer um primeiro contato com os documentos que serão analisados, surgindo as primeiras hipóteses e objetivos para a pesquisa.

Para isso, construímos um quadro com o propósito de visualizar: qual(s) questão cada estudante resolveu por completo[24]; qual(s) questão cada estudante resolveu incompleto[25]; qual(s) questão anotou informações do enunciado e qual(s) questão não resolveu; como podemos ver no quadro 06 (os números preenchidos de 1 a 4 representam o número da questão do instrumento).

Quadro 6 – Informações a respeito de cada estudante em relação às questões do instrumento

Estudante	**Questão resolvida de maneira completa**	**Questão resolvida de maneira incompleta**	**Apresenta algumas informações do enunciado**	**Questão não resolvida**
E1	1	-	2	3, 4
E2	2	1, 3	-	4
E3	1	3	2	4
E4	2, 3	4	-	1
E5	-	4	-	1, 2, 3
E6	3	-	1, 2	4
E7	1, 4	-	-	2, 3
E8	1	-	-	2, 3, 4
E9	-	1	-	2, 3, 4
E10	3	-	4	1, 2
E11	3	2	4	1
E12	-	2	-	1, 3, 4
E13	-	-	1	2, 3, 4

Fonte: do autor.

Ao observar este quadro podemos verificar que nove estudantes resolveram pelo menos uma questão de maneira completa, totalizando onze questões resolvidas completas; oito questões resolvidas incompletas; sete questões que foram anotadas informações do enunciado e vinte e sete questões que não foram resolvidas.

Segundo Bardin (2004), a escolha dos documentos de análise pode ser determinada *a priori* ou podem ser escolhidos aqueles documentos que

[24] Significa que o estudante resolve todos os passos ou todas as alternativas da questão até chegar a uma resposta, sendo que não faremos distinção entre as respostas consideradas corretas ou incorretas.

[25] Significa que o estudante não resolve todos os passos ou todas as alternativas da questão.

oferecem informações para o problema levantado. Sendo assim, resolvemos construir outro quadro, para que pudéssemos escolher as resoluções considerando o objetivo desta pesquisa. No quadro 7 agrupamos as resoluções que podem nos dar informações para análise dos processos do Pensamento Matemático Avançado.

Quadro 7 – Relação de estudantes que resolveu cada questão

Questão	**Estudantes que resolveram de maneira**	
	Completa	**Incompleta**
01	E1, E3, E7, E8	E2, E9
02	E2, E4	E11, E12
03	E4, E6, E10, E11	E2, E3
04	E7	E4, E5

Fonte: do autor.

O passo seguinte à escolha foi a constituição do *corpus*, que "é o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos" (BARDIN, 2004, p.90). Deste modo, as informações do quadro 7, que mostram as questões resolvidas de modo completo e incompleto pelos estudantes, constituem o *corpus* desta pesquisa, totalizando dezenove registros escritos.

A fase seguinte a pré-análise refere-se a exploração do material, em que procedimentos são aplicados às informações, sendo uma fase longa e cansativa e "consiste essencialmente de operações de codificação, desconto ou enumeração, em função de regras previamente formuladas" (BARDIN, 2004, p. 95). É nesta fase, que após uma intensa análise, surgem as unidades de registro (que em nossa pesquisa chamamos de agrupamentos).

Nosso primeiro passo foi descrever cada resolução do nosso *corpus*, separadas por questão (iniciamos descrevendo todas as resoluções da questão 01; depois todas as resoluções da questão 02; e assim sucessivamente), considerando as estratégias escolhidas pelos estudantes, assim como possíveis erros.

Posteriormente a cada resolução descrita, realizamos as análises com base na teoria estudada, de acordo com Dreyfus (2002), inferindo a respeito dos processos do Pensamento Matemático Avançado que os estudantes puderam mobilizar em suas resoluções.

Com todas estas análises feitas, começamos a "olhar" para os processos mobilizados nas resoluções de cada questão e, a partir disso, construímos os agrupamentos (unidades de registro). De maneira mais clara, fizemos os seguintes procedimentos: em relação as resoluções da questão 01, observamos quais processos haviam sido manifestados, e construímos os agrupamentos de acordo com este critério.

Por exemplo, em relação ao processo de representação voltamos nossa atenção para as resoluções que mobilizaram este processo, e ao analisá-las novamente, observamos as semelhanças presentes nas resoluções, como as notações e símbolos utilizados para se referir à conceitos/objetos matemáticos, e construímos um agrupamento referente ao "como" havia sido manifestado o processo de representação. O mesmo foi realizado para outros processos mobilizados (visualização, mudança de representações e tradução entre elas, modelação, sintetização e generalização), e para as outras questões.

A construção das unidades de registro (agrupamentos) para cada questão é, segundo Bardin (2004), uma etapa da codificação, que corresponde ao recorte, ou seja, a escolha das unidades. Esta escolha nada mais é do que aqueles elementos que serão submetidos à análise, visando à categorização, a qual se refere a

> uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o género (analogia), com os critérios previamente definidos. As categorias são rubricas ou classes, que reúnem um grupo de [...] unidades de registro [...] sob um título genérico, agrupamento este efectuado em razão dos caracteres comuns destes elementos (BARDIN, 2004, p.111).

Com o intuito de realizar este passo, procuramos classificar os agrupamentos de cada questão e analisar o que havia de comum entre os mesmos, ou seja, reagrupamos conforme critérios semelhantes. Como havíamos construído os agrupamentos conforme a mobilização de cada processo do Pensamento Matemático Avançado, decidimos utilizar os próprios processos para servir de categorias. Estas, então, em nossa pesquisa são *a priori*. De acordo com Bardin (2004), neste processo de categorização "é fornecido o sistemas de categorias e repartem-se da melhor maneira possível os elementos, à medida que vão sendo encontrados" (p.113).

Para dar um exemplo de como realizamos o passo da categorização, descreveremos de maneira sucinta o seguinte procedimento: para constituir a categoria das Representações Simbólicas, procuramos pelos agrupamentos, das questões 1, 2, 3 e 4, que se referiam a utilização de notações e símbolos que representam conceitos/objetos matemáticos. Depois fizemos o mesmo procedimento para constituir a categoria de Mudança de Representações e Tradução entre elas, e para os outros processos que foram evidenciados nas resoluções pelos estudantes.

A última etapa da Análise de Conteúdo, segundo Bardin (2004), refere-se ao tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação que consistem no tratamento estatístico dos resultados, permitindo a elaboração de tabelas, diagramas e figuras que condensam e destacam as informações fornecidas para a análise. Estando a disposição os resultados ao analista, este poderá sugerir inferências e interpretações a respeito dos objetivos previstos, assim como a confrontação com o material teórico.

Neste trabalho, como não estamos interessados em resultados quantitativos, a inferência e interpretação das informações estará relacionada com nosso interesse em conhecer que processos do Pensamento Matemático Avançado estudantes do quarto ano do curso de Matemática mobilizam durante a resolução das questões do instrumento. Abordaremos tais inferências e interpretações nas Considerações Finais, em que faremos uma discussão a respeito dos processos do PMA mobilizados nas resoluções dos estudantes, nas repostas Padrão do Enade e da matriz de habilidades e competências do Enade.

No próximo capítulo, trataremos das análises das resoluções dos estudantes, apresentando os agrupamentos das questões e por fim, as categorias.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DAS INFORMAÇÕES

Apresentaremos, neste capítulo, as análises, interpretações e inferências referentes às descrições das resoluções dos estudantes em relação às questões do nosso instrumento que pertencem ao Enade, servindo para a coleta de informações. De acordo com as fases da Análise de Conteúdo, segundo Bardin (2004), daremos continuidade à fase da exploração do material, em que as informações coletadas foram submetidas às análises.

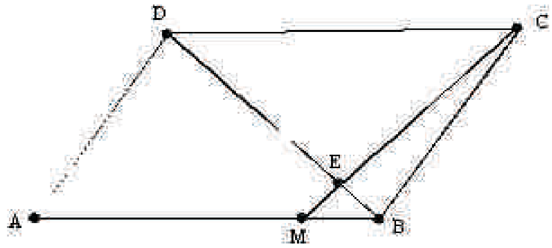
Nas seções 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 apresentamos as análises referentes às questões 01, 02, 03 e 04, respectivamente. No início de cada seção trazemos as respostas Padrão do Enade[26], juntamente com a análise dos processos do Pensamento Matemático Avançado destas respostas. Ao final das análises dos estudantes de cada questão, expomos os agrupamentos (unidades de registro), que surgiram a partir de uma intensa leitura e análise das resoluções dos estudantes. Para a construção dos agrupamentos, consideramos "o modo" que os processos do Pensamento Matemático Avançado foram evidenciados. Na seção 4.5 fazemos um resumo dos processos do PMA que foram mobilizados em cada questão. Na seção 4.6 abordaremos a respeito da última fase da análise de conteúdo, a categorização.

4.1 ANÁLISE DA QUESTÃO 01

Nesta seção apresentaremos as descrições da resposta Padrão do Enade e das resoluções dos estudantes, bem como as análises relativas à fundamentação teórica estudada, ou seja, os processos do Pensamento Matemático Avançado que foram manifestados tanto em um quanto em outro, em relação a questão 01, descrita a seguir:

Em um paralelogramo ABCD, considere M o ponto da base AB tal que $\overline{MB} = \frac{1}{4}\overline{AB}$ *e E o ponto de interseção do segmento CM com a diagonal BD, conforme figura a seguir.*

[26] Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos-2012. É possível acessar as provas de 2005, 2008 e 2011. O intuito de trazer estas resoluções juntamente com as análises em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado é fazer, ao final deste trabalho, uma discussão com aquilo que se espera do Enade e com aquilo que os estudantes apresentaram em suas resoluções. Cabe ressaltar, que não utilizamos as respostas Padrão do Enade como base para análise das resoluções dos estudantes.



Prove, detalhadamente e de forma organizada, que a área do triângulo BME é igual a $\frac{1}{40}$ *da área do paralelogramo ABCD.*

No desenvolvimento de sua demonstração, utilize os seguintes fatos, justificando-os:

- *os triângulos BME e DCE são semelhantes;*
- *a altura do triângulo BME, relativa à base BM, é igual a* $\frac{1}{4}$ *da altura do triângulo DCE relativa à base DC.*

Em relação a esta questão, analisamos os registros escritos dos estudantes que resolveram a mesma de maneira completa e de maneira incompleta: E1, E3, E7, E8, E2 e E9. Para analisarmos os registros escritos, dividimos as resoluções em três partes, que se referem ao que esperamos dos estudantes em relação ao enunciado da questão:

- a primeira que consiste na prova de que os triângulos BME e DCE são semelhantes;

- a segunda que se refere a prova da altura do triângulo BME relativa a base BM ser igual a $\frac{1}{4}$ da altura do triângulo DCE relativa a base DC;

- e a terceira parte consistindo na prova da área do triângulo BME equivalendo a $\frac{1}{40}$ do paralelogramo ABCD.

4.1.1 Resolução e Análise da Resposta Padrão do Enade

Segundo o padrão de resposta da questão discursiva 29[27] da prova de 2005, a <u>primeira parte</u> da resolução: *pela figura, usando o fato de que duas retas paralelas cortadas por uma transversal determinam ângulos correspondentes iguais, concluir que o ângulo EMB é igual ao ângulo DCE. Concluir que o ângulo MEB é*

[27] Disponibilizada pelo site: http://download.inep.gov.br/download/enade/2005/PR_matematica.pdf.

igual ao ângulo DEC, usando o fato de que são opostos pelo vértice. Concluir, a partir dos itens provados anteriormente, que os triângulos MBE e CDE são semelhantes.

Nesta parte da resolução, há evidência do processo de *mudança de representações e tradução entre elas*. Este ocorre quando retira as informações da figura e do enunciado para a resolução. No caso da figura, seria uma transição de uma representação geométrica para uma linguagem matemática em termos de propriedades de figuras geométricas.

Outro processo mobilizado é o de *sintetização*, que ocorre quando é apresentado conceitos envolvidos em retas paralelas, e consequentemente, em figuras que possuem lados paralelos; em conceitos que envolvem a noção de ângulos opostos pelo vértice; e noções de casos de semelhança de triângulos, sendo utilizado o caso ângulo-ângulo-ângulo (AAA).

Para a <u>segunda parte</u>: *usando o fato de que* $MB = \frac{1}{4}AB$*, concluir que a razão de semelhança entre os triângulos MBE e CDE é igual a* $\frac{1}{4}$ *e que a altura h do triângulo MBE é igual a* $\frac{1}{4}$ *da altura do triângulo CDE.*

Nesta parte, há mobilização do processo de *representação simbólica*, pois utiliza-se:

- a notação MB para se referir à base do triângulo MBE;
- a notação AB para se referir à base do triângulo ABD que tem mesma medida que a base DC do triângulo CDE;
- a notação $MB = \frac{1}{4}AB$ que se refere a uma razão de semelhança entre os triângulos MBE e CDE;
- a notação h para se referir a altura do triângulo MBE;
- a notação H para se referir a altura do triângulo CDE.

Outro processo evidenciado é o de *sintetização*, pois pela consequência de dois triângulos serem semelhantes apresenta a noção de razão de semelhança.

Para a <u>terceira parte</u>: *demonstrar que a altura h do triângulo MBE é igual a* $\frac{1}{5}$ *da altura H do paralelogramo ABCD. Utilizando os itens anteriores concluir que a área do triângulo BEM é igual a:*

$$\acute{A}rea(MBE) = MB \times \frac{h}{2} = \left(\frac{1}{4}AB\right) \times \left(\frac{H}{5}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{40}AB \times H = \frac{1}{40}\acute{A}rea(ABCD).$$

Na última parte da resolução do exercício, há evidência do processo de *representação simbólica*, em que é apresentado:

- notação h para se referir ao triângulo MBE;
- notação H para se referir a altura do paralelogramo ABCD;
- notação numérica “$\frac{1}{5}$” para se referir a relação existente entre as alturas do triângulo MBE e do paralelogramo ABCD;
- notação a respeito do cálculo da área de um triângulo;
- notação a respeito da área de um paralelogramo.

Há, ainda, mobilização do processo de *sintetização*, quando se utiliza noções para obter a altura do paralelogramo por meio das alturas dos triângulos; noções dos cálculos das áreas do triângulo e do paralelogramo.

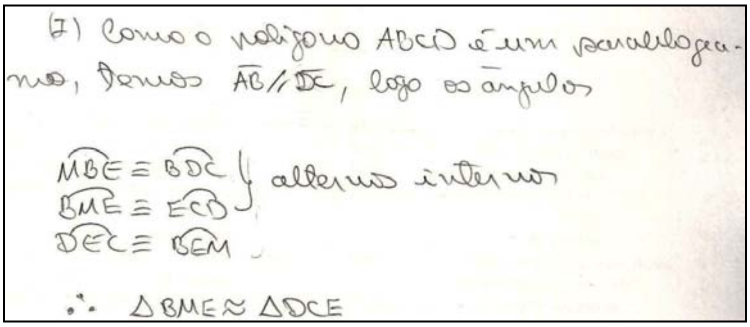
Portanto, na questão 01, de acordo com a resolução da Resposta Padrão do Enade, foi mobilizado os processos de *representação simbólica*, de *mudança de representações e tradução entres elas* e de *sintetização*.

4.1.2 Resolução do Estudante E1

Este estudante resolveu a questão 01 de modo completo, resolvendo todos os passos até chegar a uma resposta final. Ao fazer uma correção, observamos que E1 chega a uma resposta diferente daquela que consideramos estar certa. Mesmo assim, vamos analisar, pois o estudante apresenta alguns dos processos mentais do Pensamento Matemático Avançado.

Na primeira parte da resolução o estudante E1 prova que os triângulos *BME* e *DCE* são semelhantes. Para isso, utiliza uma propriedade de paralelogramo ao escrever que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são paralelos, assim como conceitos de ângulos em relação a uma reta transversal a duas retas paralelas e de ângulos congruentes, como podemos ver na figura 1:

Figura 1 – Registro escrito presente na resolução da questão 01 do estudante E1



(I) Como o polígono ABCD é um paralelogra-mo, temos $\overline{AB} // \overline{DC}$, logo os ângulos

$M\hat{B}E \equiv B\hat{D}C$ } alternos internos
$B\hat{M}E \equiv E\hat{C}D$
$D\hat{E}C \equiv B\hat{E}M$

$\therefore \Delta BME \approx \Delta DCE$

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado, temos presente o processo de *representação simbólica*, pois o estudante apresenta:

- Notação para segmentos, como é o caso de $\overline{AB}$;
- Notação para ângulos, por exemplo, $M\hat{B}E$;
- Notação para triângulos, quando utiliza o símbolo "Δ", por exemplo, ao escrever ΔBME;
- Notação para segmentos paralelos, representado pelo símbolo "$//$", quando escreve $\overline{AB} // \overline{DC}$;
- Notação para ângulos congruentes, fazendo uso do símbolo "$\equiv$", ao escrever, por exemplo, $M\hat{B}E \equiv B\hat{D}C$;
- Notação para triângulos semelhantes, sendo a semelhança representada pelo símbolo "$\approx$", quando escreve $\Delta BME \approx \Delta DCE$.

De acordo com Dreyfus (2002) essas notações são um sinal de referência e representam, ou simbolizam, o conceito em questão, sendo, portanto, uma representação simbólica.

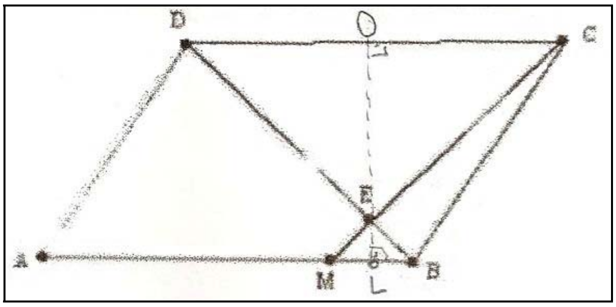
O segundo processo presente neste registro escrito é o de *sintetização*. Podemos observar que para chegar ao resultado de que os triângulos *BME* e *DCE* são semelhantes, o estudante E1 teve que recorrer a vários conceitos matemáticos, quando apresenta:

- Noção da definição do paralelogramo quando escreve a respeito dos lados opostos serem paralelos, que decorre da definição da figura considerada;
- Noção a respeito da relação de ângulos alternos internos quando duas retas paralelas são interceptadas por uma reta transversal;

- Noção de ângulos opostos pelo vértice, dadas duas retas concorrentes;
- Noção dos casos de semelhança de triângulos, sendo utilizado o caso *AAA* (ângulo, ângulo, ângulo).

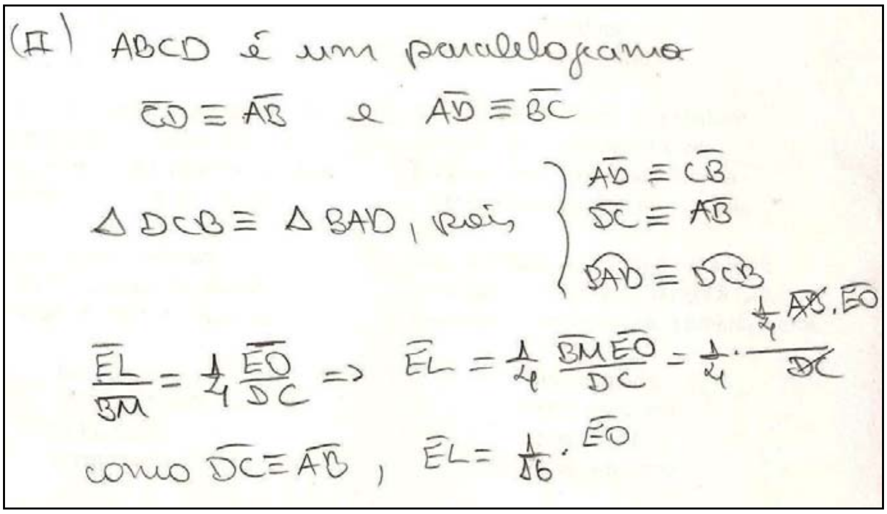
Para resolver a segunda parte da questão 01, o estudante marca a figura que representa o paralelogramo definindo a altura $\overline{OL}$, sendo que $\overline{OE}$ representa a altura do triângulo DCE e $\overline{EL}$ a altura do triângulo BME, como mostra a figura 2:

Figura 2 – Imagem presente na resolução da questão 01 do estudante E1



O estudante opta por provar que os triângulos DCB e BAD são congruentes, utilizando o caso de congruência de triângulos LAL (lado, ângulo, lado). Mas comete um erro ao iniciar os cálculos para encontrar a relação entre as alturas do triângulo e do paralelogramo, comprometendo a resolução correta da questão, como podemos ver na figura 3:

Figura 3 – Registro escrito presente na resolução da questão 01 do estudante E1


(II) ABCD é um paralelogramo

$\overline{CD} \equiv \overline{AB}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$

$\Delta DCB \equiv \Delta BAD$, pois, $\begin{cases} \overline{AD} \equiv \overline{CB} \\ \overline{DC} \equiv \overline{AB} \\ \widehat{BAD} \equiv \widehat{DCB} \end{cases}$

$\frac{\overline{EL}}{\overline{BM}} = \frac{1}{4}\frac{\overline{EO}}{\overline{DC}} \Rightarrow \overline{EL} = \frac{1}{4}\frac{\overline{BM}\,\overline{EO}}{\overline{DC}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{1}{4}\overline{AB}\cdot\overline{EO}}{\overline{DC}}$

como $\overline{DC} \equiv \overline{AB}$, $\overline{EL} = \frac{1}{16}\cdot\overline{EO}$

Nesta parte da resolução podemos observar que o estudante erra ao assumir o valor “um quarto” na proporção da altura $\overline{EL}$ sobre a base $\overline{BM}$ equivalendo a altura $\overline{EO}$ sobre a base $\overline{DC}$. Se não tivesse colocado este valor, sua resolução estaria certa, pois E1 fez as substituições corretamente, que eram: substituir $\overline{BM}$ por $\frac{1}{4}\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ por $\overline{AB}$; mas não chegou à relação desejada que é $\overline{EL} = \frac{1}{4}\overline{EO}$.

Mesmo assim, podemos constatar evidências de alguns dos processos do Pensamento Matemático Avançado. Um processo é o de *representação simbólica*, em que o estudante E1 faz uso de notações no decorrer da resolução, apresentando:

- Notação para segmento, quando escreve, por exemplo, $\overline{CD}$;
- Notação para triângulos, ao utilizar o símbolo “Δ” quando escreve, por exemplo, ΔDCB;
- Notação para ângulos, ao escrever $B\hat{A}D$;
- Notação de congruência, utilizando o símbolo “$\equiv$” ao escrever, por exemplo:
    - a congruência entre dois segmentos ($\overline{CD} \equiv \overline{AB}$),
    - a congruência entre dois triângulos ($\Delta DCB \equiv \Delta BAD$),
    - e a congruência entre dois ângulos ($B\hat{A}D \equiv D\hat{C}B$).

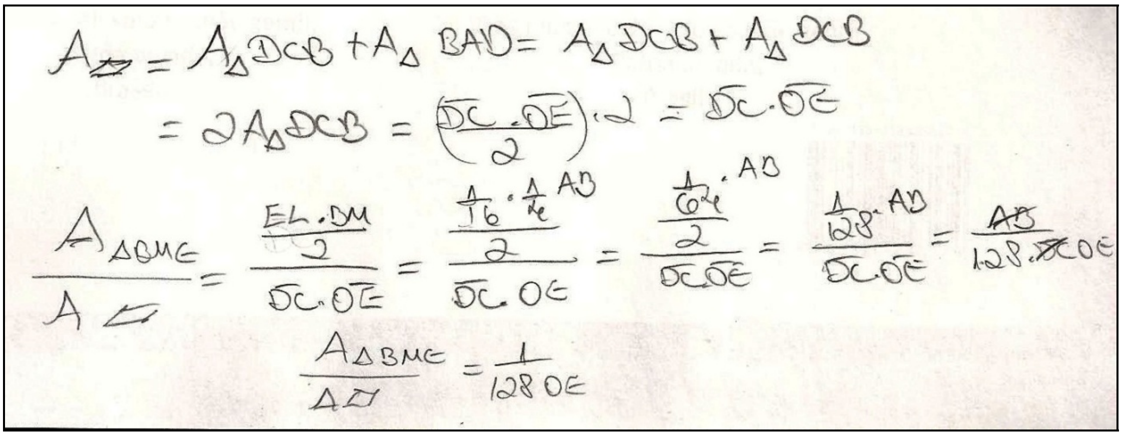
Outro processo que aparece na resolução da figura 03 é o de *sintetização*. O estudante E1 utiliza alguns conceitos matemáticos para provar que a altura do triângulo BME equivale a “um dezesseis avos” (estaria certo se fosse “um quarto”) da altura do triângulo DCE. Assim, apresenta:

- Noção da definição de paralelogramo quando escreve que os lados opostos, dois a dois, são congruentes;
- Noção dos casos de congruência de triângulos, sendo utilizado o caso *LAL* (lado, ângulo, lado);
- Noção de razões proporcionais entre a medida da altura em relação a medida da base.

Mudança de representações e tradução entre elas é outro processo evidenciado. Isto ocorre quando o estudante consegue interpretar e traduzir as informações do enunciado para sua resolução, assim como passa da representação geométrica para a algébrica.

E por fim, a última parte da questão 01, em que se deve provar que a área do triângulo BME é igual a “um quarenta avos” da área do paralelogramo ABCD. Vamos acompanhar a resolução na figura 4:

Figura 4 – Registro escrito presente na resolução da questão 01 do estudante E1



$$A_{▱} = A_{\Delta}DCB + A_{\Delta}BAD = A_{\Delta}DCB + A_{\Delta}DCB$$
$$= 2A_{\Delta}DCB = \left(\frac{\overline{DC}\cdot\overline{OE}}{2}\right)\cdot 2 = \overline{DC}\cdot\overline{OE}$$
$$\frac{A_{\Delta BME}}{A_{▱}} = \frac{\frac{EL\cdot DM}{2}}{\overline{DC}\cdot\overline{OE}} = \frac{\frac{\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}AB}{2}}{\overline{DC}\cdot OE} = \frac{\frac{\frac{1}{64}\cdot AB}{2}}{\overline{DC}\,\overline{OE}} = \frac{\frac{1}{128}AB}{\overline{DC}\,\overline{OE}} = \frac{AB}{128\cdot\cancel{DC}\,OE}$$
$$\frac{A_{\Delta BME}}{A_{▱}} = \frac{1}{128\,OE}$$

O estudante faz a escolha de encontrar a área do paralelogramo utilizando a decomposição da figura em dois triângulos, *DCB* e *BAD*. Ao substituir a altura do triângulo *DCB* na fórmula da área, E1 utiliza a altura *OE*, que se refere ao triângulo *DCE* e não ao triângulo *DCB* (que poderia ser *OL* nas notações que E1 escolheu).

O erro permanece ao utilizar a razão da área do triângulo *BME* sobre a área do paralelogramo *ABCD*, quando o estudante substitui *EL* por “um dezesseis avos” de *EO* (resultado encontrado na resolução da figura 3). Além disso, o estudante utiliza informações do triângulo *DCE* (ao considerar a altura do paralelogramo como *OE*), enquanto deveria substituir por *OL* (a altura do paralelogramo).

Neste registro há evidência de dois processos. O primeiro se refere à *representação simbólica*, pois o estudante apresenta as notações de triângulo e de segmento, como já descrito nos registros escritos anteriores e apresenta notação para a fórmula da área do triângulo e outra fórmula para área do paralelogramo.

O segundo processo é o de *sintetização*. Para finalizar a resolução, o estudante E1 apresenta:

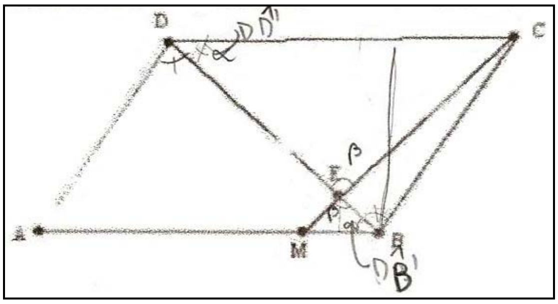
- Noção a respeito de decomposição de figuras geométricas para calcular área da figura decomposta;
- Noção a respeito de triângulos congruentes;
- Noção a respeito do cálculo da área de um triângulo;
- Noção a respeito do cálculo da área de um paralelogramo.

Portanto, o estudante E1, em sua resolução para a questão 01, evidenciou os processos de *representação simbólica*, *sintetização* e *mudança de representações e tradução entre elas*.

4.1.3 Resolução do Estudante E2

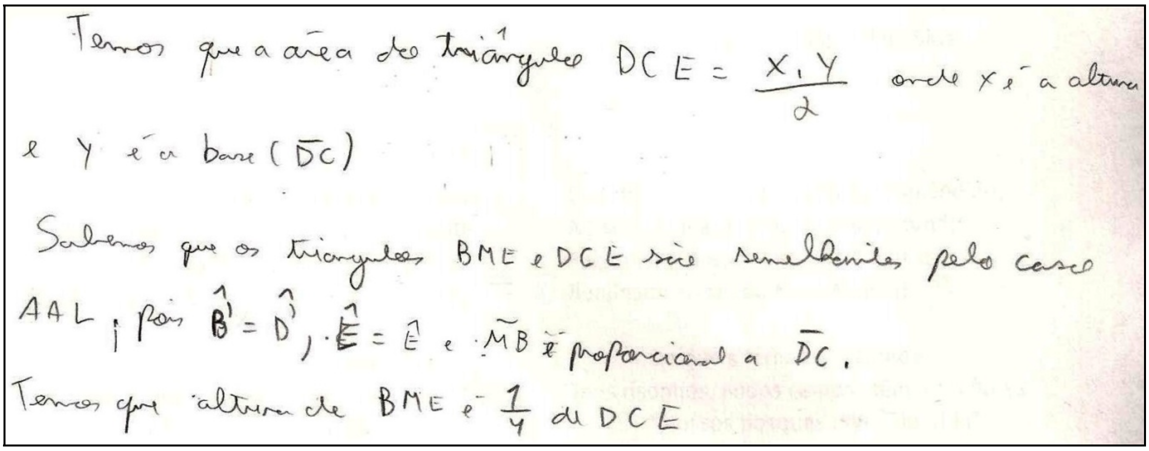
Este estudante resolveu a questão de maneira incompleta, resolvendo somente as duas primeiras partes da questão (que consiste na prova de que os triângulos BME e DCE são semelhantes e que a altura do triângulo BME é igual a "um quarto" da altura do triângulo DCE). O estudante ainda marca a figura do paralelogramo ao estabelecer os ângulos que irá utilizar em sua resolução:

Figura 5 – Imagem presente na resolução da questão 01 do estudante E2



Podemos ver sua resolução na figura 6 abaixo:

Figura 6 – Registro escrito da resolução da questão 01 do estudante E2


Temos que a área do triângulo DCE = $\frac{X \cdot Y}{2}$ onde X é a altura
e Y é a base ($\overline{DC}$)
Sabemos que os triângulos BME e DCE são semelhantes pelo caso
AAL, pois $\hat{B}' = \hat{D}'$, $\hat{E} = \hat{E}$ e $\overline{MB}$ é proporcional a $\overline{DC}$.
Temos que altura de BME é $\frac{1}{4}$ de DCE

O estudante E2 começa a resolução definindo a área do triângulo DCE, assim como sua altura e sua base. Depois, ao invés de utilizar esta informação para algum outro passo da sua resolução, o estudante afirma que os triângulos BME e DCE são semelhantes, não apresentando uma prova para tal afirmação e justifica que chegou a este resultado pelo caso AAL (ângulo, ângulo, lado) de semelhança de triângulos. E ao continuar em sua resolução, afirma, novamente sem apresentar uma prova, que a altura do triângulo BME equivale a um quarto de DCE.

Observe que o caso de semelhança de triângulos (*AAL*) que o estudante menciona em sua resolução não existe.

Outra informação utilizada sem ter sido provada, é o fato do segmento $\overline{MB}$ ser proporcional ao segmento $\overline{DC}$. O estudante E2 escreve isto para justificar o caso de semelhança de triângulos, querendo se referir aos lados dos triângulos que deveriam ser congruentes, e não proporcionais como afirma.

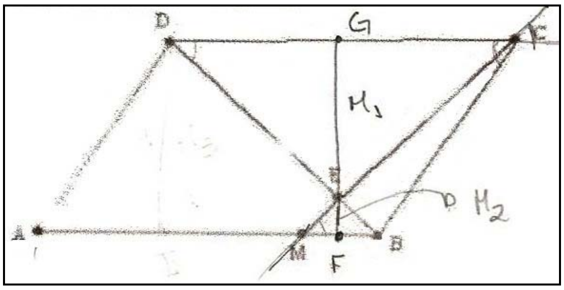
Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado, podemos inferir que houve apenas indício do processo de *representação simbólica*, pois o estudante utiliza:

- Notação para segmento, por exemplo, $\overline{DC}$;
- Notação para ângulo, por exemplo, ao escrever $\widehat{B}'$ se referindo ao ângulo $M\widehat{B}E$;
- Notação para a fórmula da área do triângulo.

4.1.4 Resolução do Estudante E3

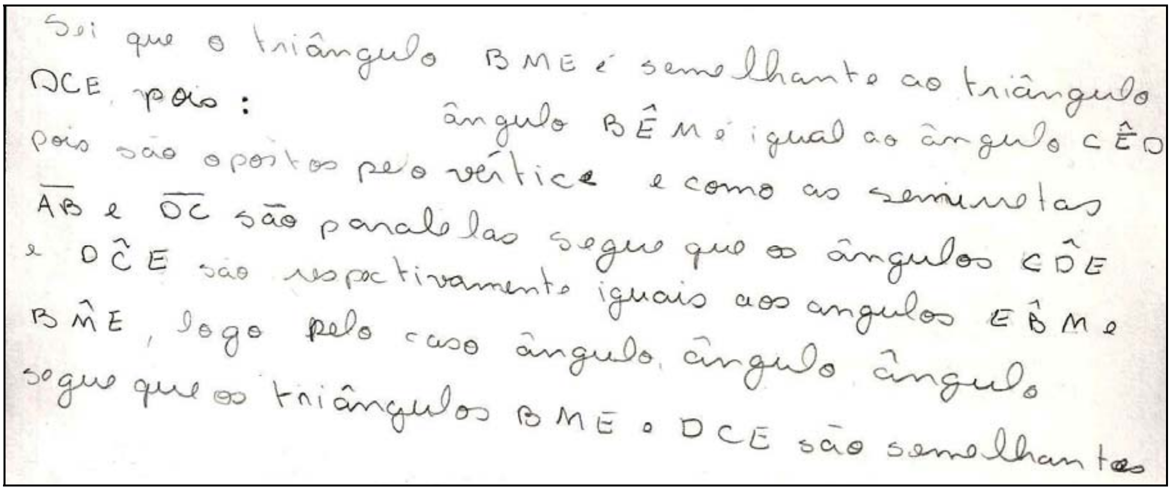
O estudante E3 resolve a questão 01 de modo completo (as três partes da questão) chegando a uma resposta que consideramos estar correta. Ao longo da resolução o estudante foi bem criterioso, provando todos os resultados. Para resolver a questão, o estudante marca a figura do paralelogramo para estabelecer as alturas H_1 (do triângulo DCE) e H_2 (do triângulo BME), como podemos ver na figura a seguir:

Figura 7 – Imagem presente na resolução da questão 01 do estudante E3



A resolução da primeira parte da questão segue na figura 08:

Figura 8 – Registro escrito presente na resolução da questão 01 do estudante E3


Sei que o triângulo BME é semelhante ao triângulo DCE, pois: ângulo $B\hat{E}M$ é igual ao ângulo $C\hat{E}D$ pois são opostos pelo vértice e como as semirretas $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são paralelas segue que os ângulos $C\hat{D}E$ e $D\hat{C}E$ são respectivamente iguais aos angulos $E\hat{B}M$ e $B\hat{M}E$, logo pelo caso ângulo, ângulo, ângulo segue que os triângulos BME e DCE são semelhantes

Para justificar sua afirmação *"sei que o triângulo BME é semelhante ao triângulo DCE"*, E1 utiliza o caso ângulo-ângulo-angulo (*AAA*) de semelhança de triângulos, provando que o ângulo $B\hat{E}M$ é congruente ao $C\hat{E}D$; o ângulo $C\hat{D}E$ é congruente ao $E\hat{B}M$ e que o ângulo $D\hat{C}E$ é congruente ao $B\hat{M}E$.

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado, há evidências do processo de *representação simbólica*, pois o estudante E3 apresenta:

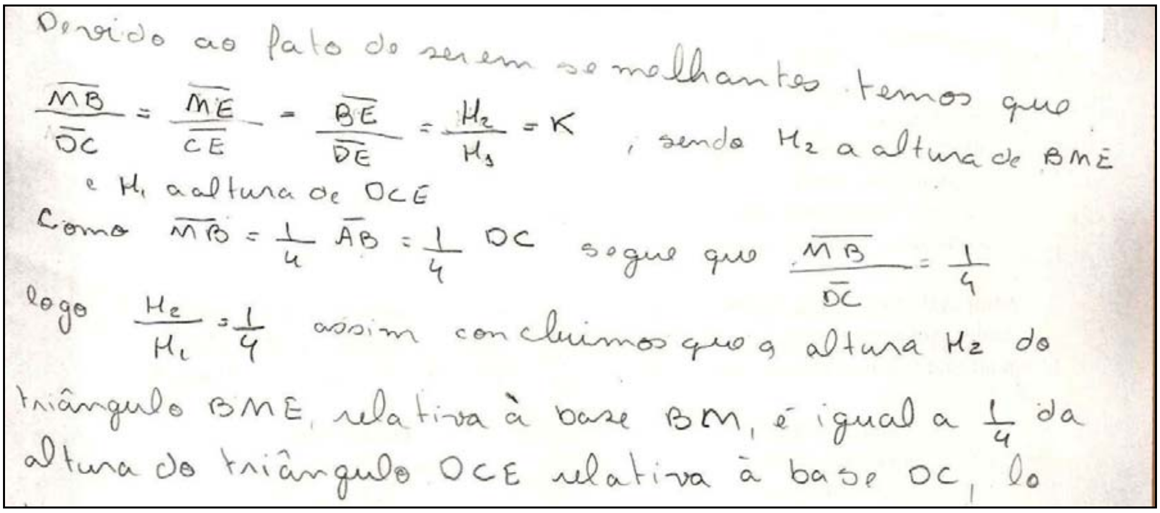
- Notação para ângulos, por exemplo, $B\hat{E}M$;
- Notação para segmentos, ao escrever $\overline{AB}$;
- Notação para se referir ao triângulo, quando escreve *BME*.

Outro processo evidenciado é o de *sintetização*. Ao justificar que os triângulos *BME* e *DCE* são semelhantes, o estudante recorre a diversos conceitos matemáticos, quando apresenta:

- Noção de ângulos opostos pelo vértice, dadas duas retas concorrentes;
- Noção a respeito de ângulos alternos internos quando duas retas paralelas são interceptados por uma reta transversal;
- Noção dos casos de semelhança de triângulos, sendo utilizado o caso *AAA* (ângulo, ângulo, ângulo).

Para a segunda parte da questão, o estudante E3 utiliza o fato dos triângulos serem semelhantes para escrever a relação de razão e proporção, como mostra a figura 9:

Figura 9 – Registro escrito presente na resolução da questão 01 do estudante E3



Devido ao fato de serem semelhantes temos que

$\frac{\overline{MB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{ME}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{DE}} = \frac{H_2}{H_1} = K$, sendo H_2 a altura de BME

e H_1 a altura de DCE

Como $\overline{MB} = \frac{1}{4}\overline{AB} = \frac{1}{4}$ DC segue que $\frac{\overline{MB}}{\overline{DC}} = \frac{1}{4}$

logo $\frac{H_2}{H_1} = \frac{1}{4}$ assim concluimos que a altura H_2 do triângulo BME, relativa à base BM, é igual a $\frac{1}{4}$ da altura do triângulo DCE relativa à base DC, lo

O estudante mostra saber as relações existentes entre os triângulos semelhantes ao escrever os segmentos que são proporcionais, igualando a uma constante *k*, assim como as alturas. E é por meio disto que E3 prova que a altura do triângulo BME equivale a “um quarto” da altura do triângulo DCE.

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado, temos evidências, neste registro escrito, do processo de *representação*, pois o estudante E3 apresenta:

- Notação para segmentos, por exemplo, ao escrever $\overline{MB}$;
- Notação para altura do triângulo, quando escreve H_1;
- Notação para se referir ao triângulo, por exemplo, *BME*.

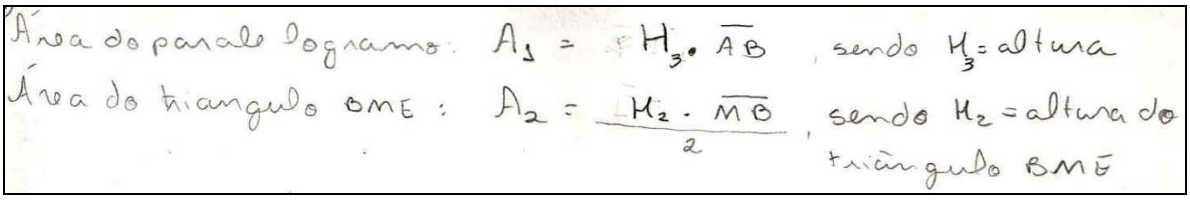
Outras evidências apontam para o processo de *sintetização*, pois o estudante apresenta:

- Noção de propriedade de triângulos semelhantes;
- Noção de razões proporcionais entre os segmentos dos triângulos semelhantes.

Outro processo presente é *mudança de representações e tradução entre elas*, quando o estudante passa da representação geométrica (da figura 8) para as notações de segmentos, por exemplo, como bases e alturas. Além disso, E3 interpreta o enunciado da questão, conseguindo resolvê-la.

A resolução da terceira parte da questão 01 consiste na prova da área do triângulo *BME* ser “um quarenta avos” da área do paralelogramo *ABCD*. Para isso, o estudante define alguns conceitos que irá utilizar na resolução, como podemos ver na figura 10:

Figura 10 – Registro escrito presente na resolução da questão 01 do estudante E3



Observe que o estudante define a área do paralelogramo (A_1), a área do triângulo BME (A_2), a altura do paralelogramo (H_3) e a altura do triângulo BME (H_2).

Acompanhemos a resolução na figura a seguir:

Figura 11 – Registro escrito presente na resolução da questão 01 do estudante E3

temos que a altura H_2 do triângulo BME relativa a base BM é igual a $\frac{1}{5}$ da altura do paralelogramo ABCD, ou seja $H_2 = \frac{1}{5} H_3$. Assim

$$A_2 = \frac{H_2 \cdot \overline{MB}}{2} = \frac{\frac{H_3}{5} \cdot \frac{\overline{AB}}{4}}{2} = \frac{H_3 \cdot \overline{AB}}{40} = \boxed{\frac{A_1}{40}}$$

O estudante afirma que a altura do triângulo *BME* equivale a "um quinto" da altura do paralelogramo, mas não justifica como chegou a este resultado. Inferimos que E3 sabe que a altura do paralelogramo é a soma da altura H_1 (altura do triângulo *DCE*) com a altura H_2 (altura do triângulo *BME*).

Em seguida, o estudante utiliza a fórmula da área do triângulo *BME* (definida na figura 10) e faz as substituições adequadas, como em H_2 e em $H_3 \cdot \overline{AB}$, chegando ao resultado desejado.

Na resolução da terceira parte da questão 01, há evidências de dois processos. O primeiro refere-se à *representação simbólica*. O estudante apresenta:

- Notação para as alturas dos triângulos e do paralelogramo, como por exemplo, H_1;
- Notação para segmentos, ao escrever $\overline{AB}$;
- Notação para a fórmula da área do triângulo;
- Notação para a fórmula da área do paralelogramo.

Em relação ao segundo processo, o de *sintetização*, o estudante buscou por alguns conceitos matemáticos para finalizar a resolução da questão 01, apresentando:

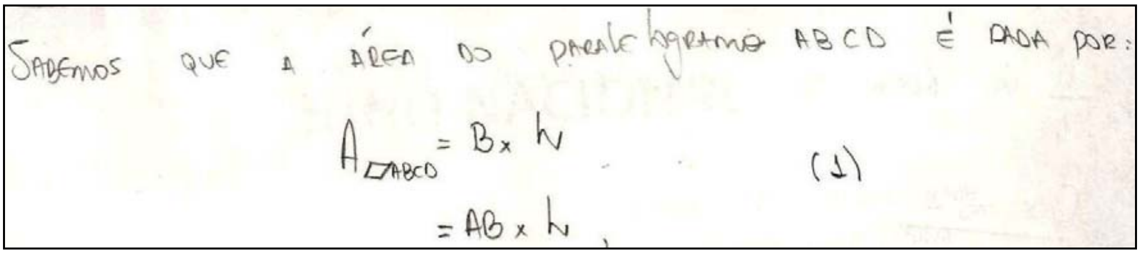
- Noção a respeito do cálculo da área de um triângulo;
- Noção a respeito do cálculo da área de um paralelogramo.

Portanto, na resolução do estudante E3, houve evidências dos processos de *representação simbólica*, *mudança de representações e tradução entre elas* e de *sintetização*.

4.1.5 Resolução do Estudante E7

O estudante E7 resolveu a terceira parte da questão 01, em que prova que a área do triângulo *BME* equivale a “um quarenta avos” da área do paralelogramo *ABCD*, assumindo como verdade que a altura do triângulo *MEB* é igual a “um quarto” da altura do triângulo *EDC*. Primeiramente, o estudante estabelece a área do paralelogramo *ABCD*, como mostra a figura a seguir:

Figura 12 – Registro escrito presente na resolução da questão 01 do estudante E7



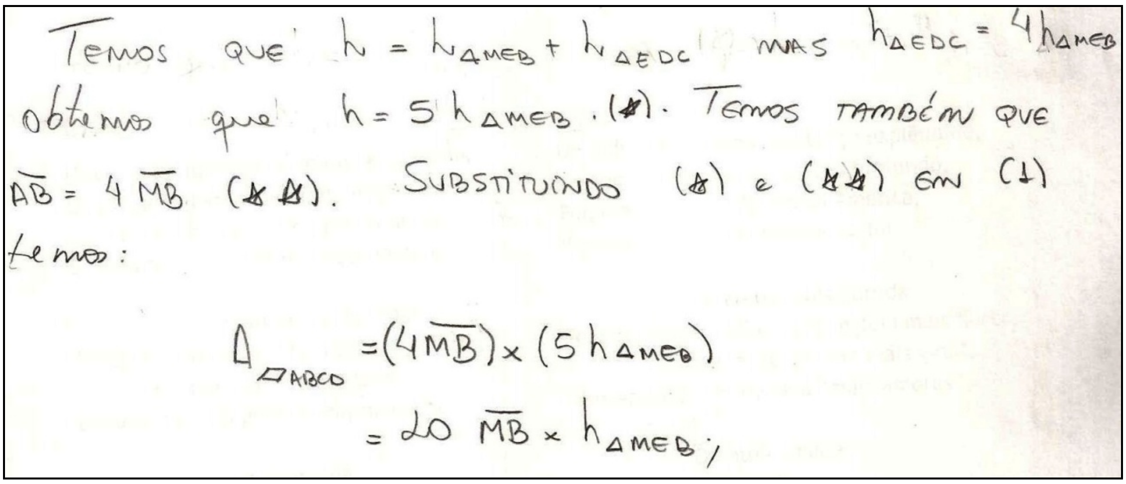
SABEMOS QUE A ÁREA DO PARALELOGRAMO ABCD É DADA POR:

$A_{\square ABCD} = B \times h$ (1)

$= AB \times h$,

Para a base da área do paralelogramo o estudante escolhe o segmento $\overline{AB}$ e a altura por *h*. Dando continuidade em sua resolução, E7 define que a altura *h* é a soma das alturas do triângulo MEB com a do triângulo EDC, como veremos na figura 13:

Figura 13 – Registro escrito presente na resolução da questão 01 do estudante E7



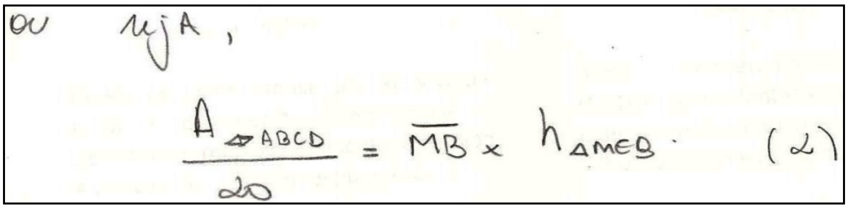
Temos que $h = h_{\Delta MEB} + h_{\Delta EDC}$ mas $h_{\Delta EDC} = 4h_{\Delta MEB}$ obtemos que $h = 5h_{\Delta MEB}$. (*). Temos também que $\overline{AB} = 4\overline{MB}$ (**). Substituindo (*) e (**) em (1) temos:

$A_{\square ABCD} = (4\overline{MB}) \times (5h_{\Delta MEB})$

$= 20\,\overline{MB} \times h_{\Delta MEB}$;

Além disso, afirma que a altura do triângulo *EDC* equivale a “quatro vezes” a altura do triângulo *MEB*. Como o estudante não provou esta afirmação, podemos inferir que E7 utilizou em sua resolução a informação do enunciado. Deste modo, chega ao resultado de que a altura *h* do paralelogramo equivale a “cinco vezes” a altura do triângulo *MEB*. Utilizando outra informação do enunciado, de que $\overline{AB} = 4 \cdot \overline{MB}$, o estudante faz as devidas substituições na fórmula (1) – presente na figura 12 – chegando a fórmula (2):

Figura 14 – Registro escrito presente na resolução da questão 01 do estudante E7



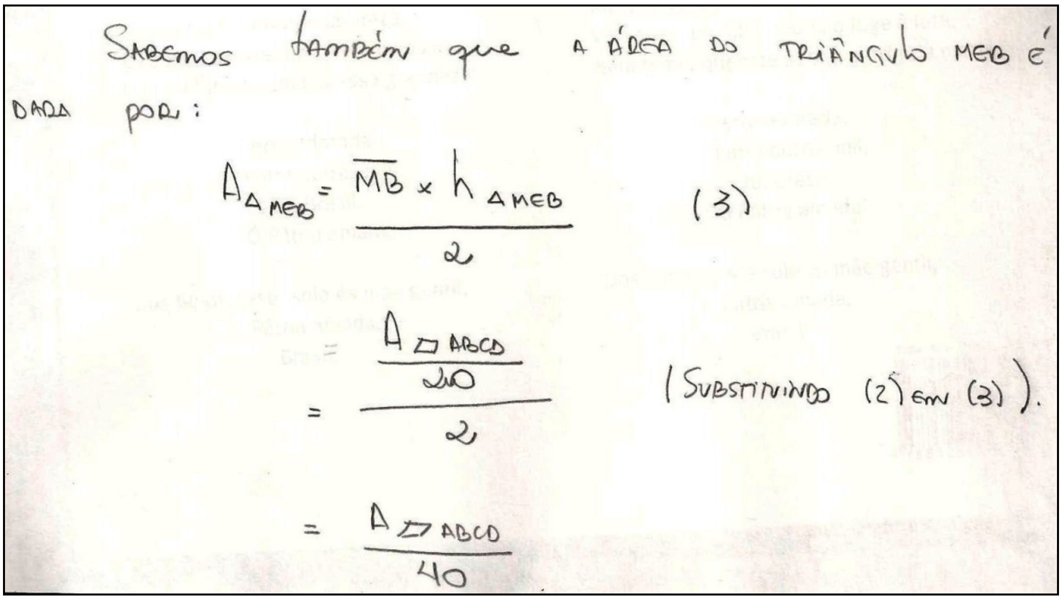
OU SEJA,

$$\frac{A_{\square ABCD}}{20} = \overline{MB} \times h_{\Delta MEB} \cdot \quad (2)$$

que significa que o segmento $\overline{MB}$ (base do triângulo *MEB*) vezes a altura do triângulo *MEB* é igual a “um vinte avos” da área do paralelogramo *ABCD*.

Continuando em sua resolução, o estudante utiliza outra fórmula, a da área de um triângulo, para finalizar sua prova, como mostra a figura 15:

Figura 15 – Registro escrito presente na resolução da questão 01 do estudante E7



SABEMOS TAMBÉM QUE A ÁREA DO TRIÂNGULO MEB É DADA POR:

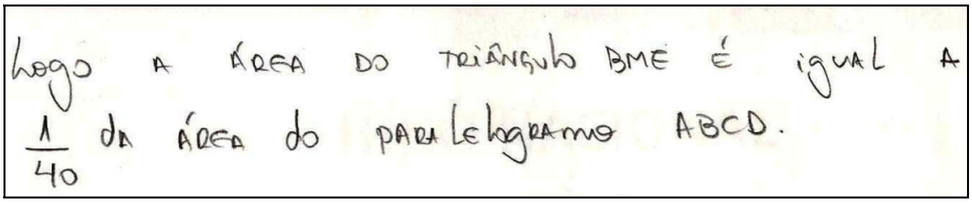
$$A_{\Delta MEB} = \frac{\overline{MB} \times h_{\Delta MEB}}{2} \quad (3)$$

$$= \frac{\frac{A_{\square ABCD}}{20}}{2} \quad \text{(SUBSTITUINDO (2) EM (3)).}$$

$$= \frac{A_{\square ABCD}}{40}$$

Como o triângulo considerado na fórmula da área é o *MEB*, a base é $\overline{MB}$ e a altura é a do próprio triângulo. Mas $\overline{MB} \cdot h_{\Delta MEB}$ é a relação (2) (como mostra a figura 14). Assim, o estudante faz a substituição e chega à resposta desejada, de que a área do triângulo *MEB* é igual a “um quarenta avos” da área do paralelogramo *ABCD*. Para finalizar, o estudante responde a questão inicial do problema, como segue na figura a seguir:

Figura 16 – Registro escrito presente na resolução da questão 01 do estudante E7


logo A ÁREA DO TRIÂNGULO BME É igual A $\frac{1}{40}$ DA ÁREA do PARALELOGRAMO ABCD.

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados na resolução do estudante E7, temos presente três processos. O primeiro diz respeito ao de *representação simbólica*. Ao longo de sua resolução o estudante apresenta:

- Notação para se referir ao paralelogramo, ao escrever *ABCD*;
- Notação para se referir aos triângulos, quando escreve ΔEDC e ΔMEB;
- Notação para a fórmula da área do paralelepípedo;
- Notação para a fórmula da área do triângulo;
- Notação para se referir a altura das figuras geométricas, ao escrever *h*;
- Notação para segmento, quando escreve $\overline{MB}$.

O segundo processo presente na resolução é o de *sintetização*. Para resolver a questão, o estudante recorre a diversos conceitos matemáticos, quando apresenta:

- Noção a respeito do cálculo da área de um paralelogramo;
- Noção a respeito do cálculo da área de um triângulo;
- Noção da decomposição da altura do paralelogramo na soma das alturas dos triângulos.

O terceiro se refere ao processo de *mudança de representações e tradução entre elas*, pois E7 interpreta e compreende o enunciado da questão, conseguindo traduzir as informações do enunciado para sua resolução.

Portanto, o estudante E7 mobilizou os processos de *representação simbólica*, *sintetização* e *mudança de representações e tradução entre elas*.

4.1.6 Resolução do Estudante E8

O E8 foi outro estudante que resolveu somente a terceira parte da questão 01, assumindo alguns resultados como verdadeiros, sem provar. Mesmo assim, chega ao resultado que consideramos estar correto. Ao iniciar sua resolução, E8 começa definindo a área do triângulo *BME* e do paralelogramo *ABCD*, como mostra a figura a seguir:

Figura 17 – Registro escrito presente na resolução da questão 01 do estudante E8

Seja a área de BME $= A_1 = (MB \times h_1)/2$ e

área ABCD $= A_2 = AB \times h$, onde $h = h_1 + h_2$ (*)

Na fórmula da área do triângulo BME o estudante considera a base sendo $\overline{MB}$ e altura h_1, e para a fórmula da área do paralelogramo, $\overline{AB}$ é a base e h sua altura, em que esta é a soma das alturas dos triângulos *DCE* com *BME*. Na figura a seguir, podemos ver que o estudante define cada altura:

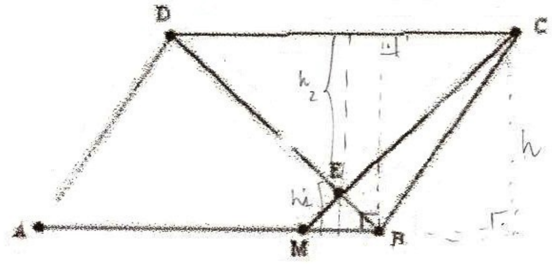
Figura 18 – Registro escrito presente na resolução da questão 01 do estudante E8

(*) h_1 => altura do triangulo DCE

h_2 => altura " " BME

Assim, E8 está considerando que h_1 é a altura do triângulo *DCE* e h_2 a altura do triângulo *BME*. Podemos observar, ainda, quando o estudante faz as marcações das alturas na figura do enunciado da questão:

Figura 19 – Imagem presente na resolução da questão 01 do estudante E8



Nesta imagem ainda podemos ver as alturas marcadas. O que queremos mostrar aqui, é que o estudante quando define a área do triângulo *BME* (figura 18) assume a altura como h_1 assim como na figura 18, mas h_1 na figura 19 é a altura do triângulo *DCE*. Apesar deste equívoco sua resolução não foi comprometida.

Uma informação do enunciado que o estudante utiliza em sua resolução é o fato da altura do triângulo *BME* ser igual a “um quarto” da altura do triângulo *DCE*, como nos mostra a figura 20:

Figura 20 – Registro escrito presente na resolução da questão 01 do estudante E8

Como $\frac{1}{4}h_2 = h_1$, tem-se $h = h_1 + 4h_1$

$= 5h_1$

Ao utilizar a informação, E8 obtém o resultado de que a altura do paralelogramo *h* equivale a “cinco vezes” a altura do triângulo *BME*.

Continuando em sua resolução, o estudante faz a substituição da altura h_1 por $\frac{h}{5}$:

Figura 21 – Registro escrito presente na resolução da questão 01 do estudante E8

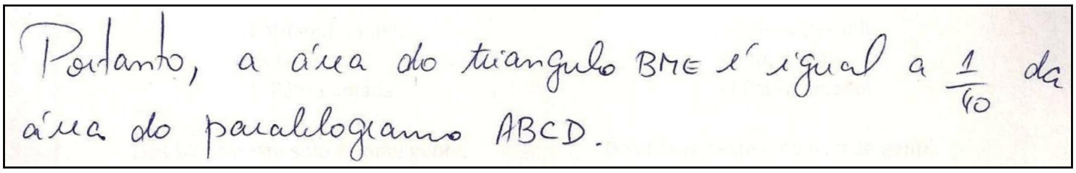
Então $A_1 = \left(\frac{1}{4}AB \times \frac{h}{5}\right)/2$

$A_1 = \left(\frac{AB \times h}{20}\right)/2 \quad \therefore \quad A_1 = \frac{AB \times h}{40}$ e

$A_2 = AB \times h.$

Ao fazer a substituição, E8 chega ao resultado $\frac{AB \cdot h}{40}$, mas o numerador desta fração equivale a área A_2, que é a área do paralelogramo *ABCD*. Portanto, o estudante chega ao resultado esperado. E para finalizar, escreve por extenso a resposta da questão 01:

Figura 22 – Registro escrito presente na resolução da questão 01 do estudante E8


Portanto, a área do triângulo BME é igual a $\frac{1}{40}$ da área do paralelogramo ABCD.

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado, temos presente o processo de *representação simbólica*. Para resolver a questão 01, o estudante utiliza várias notações ao longo de sua resolução. Assim, há:

- Notação para a fórmula da área do triângulo;
- Notação para a fórmula da área do paralelogramo;
- Notação para as alturas do paralelogramo e dos triângulos;
- Notação para se referir ao paralelogramo, ao escrever *ABCD*;
- Notação para se referir ao triângulo, quando escreve *BME*;
- Notação para segmento, ao escrever *AB*.

Outro processo que há evidências é o de *mudança de representações e tradução entre elas*. O estudante utiliza uma representação geométrica (figura 19) para marcar as alturas das figuras, como os triângulos e o paralelogramo, e depois as escreve, definindo-as, já em uma representação algébrica (figura 18).

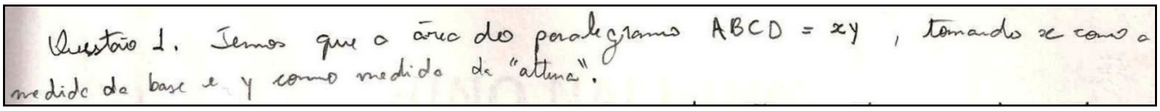
O terceiro processo evidenciado é o de *sintetização*. O estudante E8 utiliza de vários conceitos matemáticos para resolver a questão, apresentando:

- Noção a respeito do cálculo da área de um triângulo;
- Noção a respeito do cálculo da área de um paralelogramo;
- Noção da decomposição da altura do paralelogramo na soma das alturas dos triângulos.

4.1.7 Resolução do Estudante E9

O estudante E9 faz uma resolução incompleta e não chega a algum resultado das partes da questão 01. Começa definindo a área do paralelogramo, e assume *x* como a medida da base e *y* como a altura, como nos mostra a figura 23:

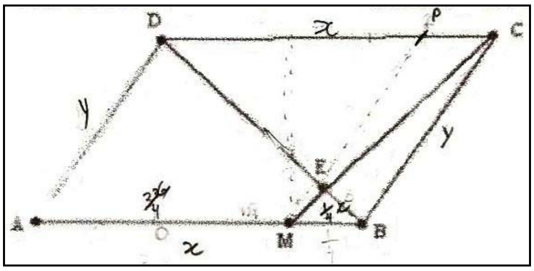
Figura 23 – Registro escrito presente na resolução da questão 01 do estudante E9



Questão 1. Temos que a área do paralelogramo ABCD = xy , tomando x como a medida da base e y como medida da "altura".

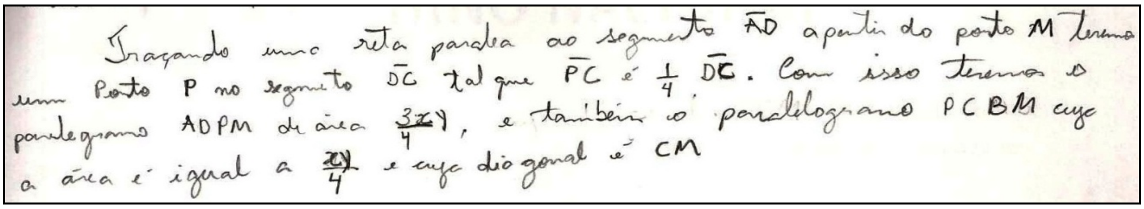
Em seguida, constrói uma reta paralela ao lado $\overline{AD}$ a partir do ponto M pertencente ao lado $\overline{AB}$ marcando o ponto de intersecção P com o lado $\overline{DC}$, como veremos na figura a seguir:

Figura 24 – Imagem presente na resolução da questão 01 do estudante E9



Além dessa imagem, podemos ver sua resolução na próxima figura:

Figura 25 – Registro escrito presente na resolução da questão 01 do estudante E9



Traçando uma reta paralela ao segmento $\overline{AD}$ a partir do ponto M teremos um Ponto P no segmento $\overline{DC}$ tal que $\overline{PC}$ é $\frac{1}{4}$ $\overline{DC}$. Com isso teremos o paralelogramo ADPM de área $\frac{3xy}{4}$, e também o paralelogramo PCBM cuja a área é igual a $\frac{xy}{4}$ e cuja diagonal é CM

Ao fazer essa construção, E9 considera que $\overline{PC} = \overline{MB} = \frac{1}{4}$ e que o novo paralelogramo *ADPM* tem uma área de $\frac{3x \cdot y}{4}$, pois a medida da base que o estudante utilizou nesta fórmula equivale a $\frac{3}{4}$ da medida *x* da base $\overline{AB}$. Já o outro paralelogramo *PCBM* tem área $\frac{x \cdot y}{4}$, pois a base é $\overline{MB}$ e equivale a "um quarto" da base $\overline{AB}$.

Porém, E9 não progride em sua resolução, fazendo apenas esta construção. Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado, há evidências do processo de *representação simbólica*, pois o estudante apresenta:

- Notação para se referir ao paralelogramo, as escrever, por exemplo, *ABCD*;
- Notação para a fórmula da área do paralelogramo;
- Notação para segmento, por exemplo, $\overline{AB}$;
- Notação para ponto, quando escreve, por exemplo, *P*.

4.1.8 Agrupamentos Referentes às Resoluções da Questão 01 dos Estudantes E1, E2, E3, E7, E8 E E9

Após descrevermos e analisarmos as resoluções dos estudantes, construímos os agrupamentos, os quais emergiram após analisar os processos do PMA que foram manifestados (considerando as resoluções do estudantes E1, E2, E3, E7, E8 e E9). Trata-se de uma fase que exige uma intensa dedicação e uma profunda leitura das análises. A seguir apresentamos um quadro com tais agrupamentos:

Quadro 8 – Descrição dos agrupamentos relativos às resoluções da questão 01

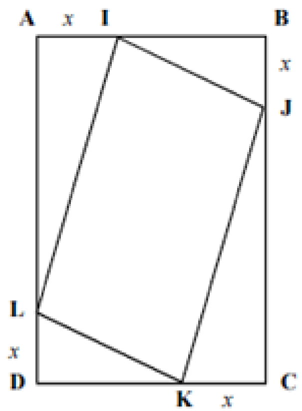
<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Agrupamentos</th><th>Estudantes</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Representação</td><td>A</td><td>Utiliza notações para se referir a conceitos geométricos, como: segmentos, ângulos, triângulos, área de um triângulo ou área de um paralelogramo.</td><td>E1, E2, E3, E7, E8, E9</td></tr>
<tr><td>B</td><td>Apresenta cálculos referentes às áreas de um triângulo e de um paralelogramo.</td><td>E1, E3, E7, E8</td></tr>
<tr><td>C</td><td>Retira informações do enunciado, fazendo ligações entre a figura do paralelogramo ABCD (representação geométrica) com as demais representações e notações utilizadas na resolução.</td><td>E1, E3, E7, E8</td></tr>
<tr><td>Abstração</td><td>D</td><td>Evidencia um domínio referente a conceitos matemáticos representados pelas notações, por meio do uso de propriedades de figuras planas (triângulo e paralelogramo), área de figuras planas (triângulo e paralelogramo), caso de semelhança de triângulos ou propriedades de triângulos semelhantes.</td><td>E1, E3, E7, E8</td></tr>
</table>

Fonte: do autor.

4.2 ANÁLISE DA QUESTÃO 02

Nesta seção, descreveremos as resoluções dos estudantes que resolveram a questão 02. Após cada descrição, faremos uma análise dos processos do Pensamento Matemático Avançado que foram evidenciados. Para isso, apresentemos abaixo o enunciado da questão.

No retângulo ABCD ao lado, o lado AB mede 7 cm e o lado AD mede 9 cm. Os pontos I, J, K e L foram marcados sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, de modo que os segmentos AI, BJ, CK e DL são congruentes.



Com base nessa situação, faça o que se pede nos itens a seguir e transcreva suas respostas para o Caderno de Respostas, nos locais devidamente indicados.

a) *Demonstre que o quadrilátero IJKL é um paralelogramo.*

b) *Escreva a função que fornece a área do paralelogramo IJKL em função de x e determine, caso existam, seus pontos de máximo de mínimo.*

c) *Na resolução desse problema, que conceitos matemáticos podem ser explorados com alunos do ensino fundamental e do ensino médio?*

Para esta questão foram analisadas as resoluções dos estudantes E2, E4 e E11, sendo que os dois primeiros apresentaram uma resolução para todas as alternativas ((a), (b), (c)) e o terceiro resolveu apenas a alternativa (a).

As análises dos registros escritos foram divididas por partes, as quais se referem ao que esperamos dos estudantes em relação ao enunciado da questão, sendo que:

1ª parte: alternativa (a); 2ª parte: alternativa (b); 3ª parte: alternativa (c).

4.2.1 Resolução e Análise da Resposta Padrão do Enade

Segundo o padrão de resposta da questão discursiva 40[28] da prova de 2008, a alternativa (a): *Para demonstrar que IJKL é um paralelogramo o estudante pode mostrar que os triângulos IBJ e KDL são congruentes, pelo caso ALA; da mesma forma o triângulo IAL é congruente ao triângulo KCJ, pelo caso ALA. Em seguida, usa-se a propriedade dos paralelogramos: um quadrilátero com lados opostos congruentes é um paralelogramo. Outra forma é mostrar pela definição identificando os ângulos.*

Na resolução da alternativa (a), há evidência do processo de *representação simbólica*, ao utilizar:

- Notação IJKL para se referir a um paralelogramo;
- Notações IAL, IBJ, KDL e KCJ para se referir a triângulos;
- Notação ALA para se referir a um caso de congruência de triângulos.

O processo de *mudança de representações e tradução entre elas* também foi evidenciado. Este processo ocorre quando se interpreta e retira as informações do enunciado e da figura para a resolução.

Outro processo mobilizado é o de *sintetização*, quando se apresenta noções de congruência de triângulos, sendo utilizado o caso ângulo-lado-ângulo (ALA); noções de propriedade do paralelogramo, ao afirmar que possui lados opostos congruentes; e noções de ângulos em uma figura geométrica, como a soma dos ângulos em uma reta e a soma dos ângulos em um triângulo.

Alternativa (b): $A(x) = 63 - 2\dfrac{(7-x)\cdot x}{2} - 2\dfrac{(9-x)\cdot x}{2} = 2x^2 - 16x + 63$. *O estudo do ponto crítico (de mínimo) pode ser feito usando a derivada e ainda usando o gráfico da função do segundo grau.*

Para a alternativa (b), é mobilizado o processo de *representação simbólica*, quando se faz os cálculos algébricos para obter a função que fornece a área do paralelogramo.

[28] Disponibilizada pelo site: http://download.inep.gov.br/download/Enade2008_RNP/PADRAO_DE_RESPOSTA_DE_MATEMATICA.pdf.

Outro processo evidenciado é o de *mudança de representações e tradução entre elas*, quando se utiliza as informações da figura e do enunciado para resolver a questão.

Para encontrar a função que fornece a área do paralelogramo, é preciso utilizar as propriedades daquilo que se pretende estudar. Este é outro processo mobilizado na resolução, chamado *modelação*.

O processo de *sintetização* foi evidenciado, quando se utiliza noções dos cálculos das áreas de triângulo e de paralelogramo; noção de decomposição de figuras planas em outras para calcular a área de uma das figuras decompostas (para calcular a área do paralelogramo, foi preciso calcular a área do retângulo e subtrair as áreas dos quatro triângulos); noção de ponto crítico por meio do uso do conceito de derivada ou por meio do estudo do vértice da parábola (gráfico da função do segundo grau).

Alternativa (c): *Congruência de triângulo, propriedade de paralelogramo, estudo do gráfico da função do segundo grau*.

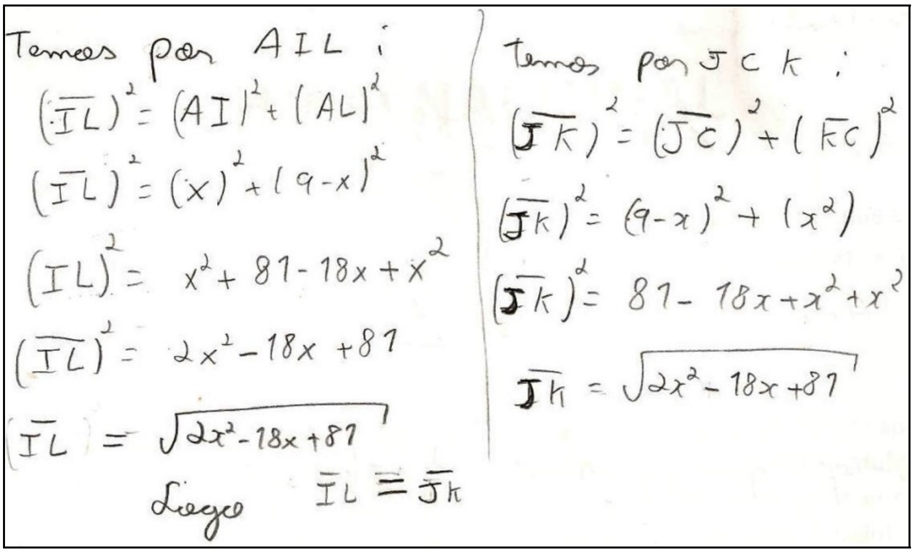
Como esta alternativa se refere a conceitos que podem ser trabalhados com estudantes da Educação Básica, e como não requer a resolução matemática, não iremos analisá-la em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado.

Portanto, na resolução Padrão do Enade da questão 02, foram mobilizados os processos de *representação simbólica*, de *mudança de representações e tradução entre elas*, de *sintetização* e *modelação*.

4.2.2 Resolução do Estudante E2

O estudante E2 resolveu a questão 02 de modo completo, chegando às respostas que consideramos estarem corretas. Para resolver a primeira parte, alternativa (a), E2 opta pelo cálculo das áreas dos triângulos com o intuito de verificar suas congruências. Acompanhemos a resolução na figura abaixo:

Figura 26 – Registro escrito presente na resolução da questão 02 do estudante E2


Temos por AIL:

$(\overline{IL})^2 = (AI)^2 + (AL)^2$

$(\overline{IL})^2 = (x)^2 + (9-x)^2$

$(IL)^2 = x^2 + 81 - 18x + x^2$

$(\overline{IL})^2 = 2x^2 - 18x + 81$

$\overline{IL} = \sqrt{2x^2 - 18x + 81}$

Temos por JCK:

$(\overline{JK})^2 = (\overline{JC})^2 + (\overline{KC})^2$

$(\overline{JK})^2 = (9-x)^2 + (x^2)$

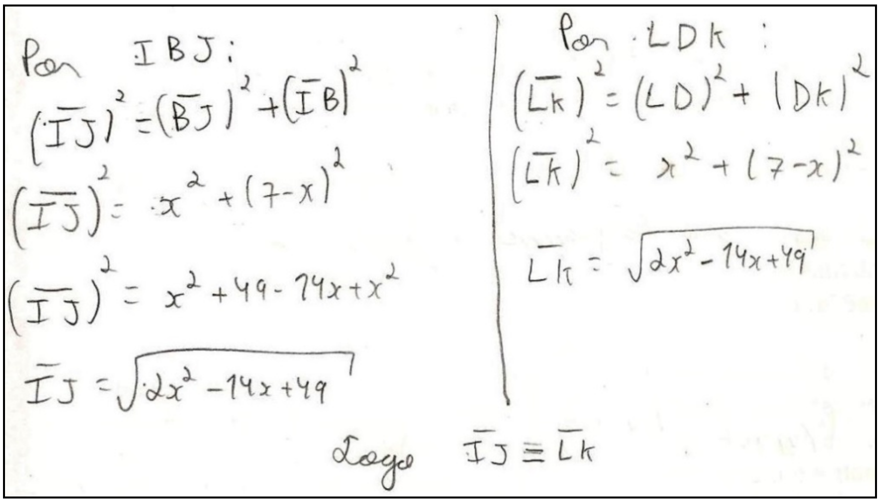
$(\overline{JK})^2 = 81 - 18x + x^2 + x^2$

$\overline{JK} = \sqrt{2x^2 - 18x + 81}$

Logo $\overline{IL} \equiv \overline{JK}$

O estudante considera os triângulos *AIL* e *JCK* e utiliza o Teorema de Pitágoras para calcular a medida da hipotenusa de tais triângulos, chegando ao resultado que as hipotenusas $\overline{IL}$ e $\overline{JK}$ são congruentes. Em seguida, considera os triângulos IBJ e LDK, como podemos ver na figura a seguir:

Figura 27 – Registro escrito presente na resolução da questão 02 do estudante E2


Por IBJ:

$(\overline{IJ})^2 = (\overline{BJ})^2 + (\overline{IB})^2$

$(\overline{IJ})^2 = x^2 + (7-x)^2$

$(\overline{IJ})^2 = x^2 + 49 - 14x + x^2$

$\overline{IJ} = \sqrt{2x^2 - 14x + 49}$

Por LDK:

$(\overline{LK})^2 = (LD)^2 + (DK)^2$

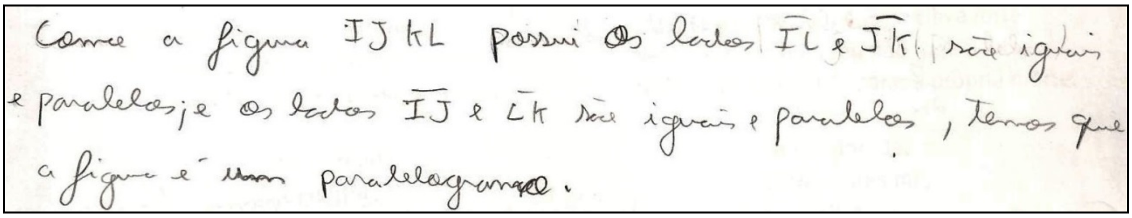
$(\overline{LK})^2 = x^2 + (7-x)^2$

$\overline{LK} = \sqrt{2x^2 - 14x + 49}$

Logo $\overline{IJ} \equiv \overline{LK}$

Do mesmo modo, E2 utiliza o Teorema de Pitágoras para calcular as medidas das hipotenusas dos triângulos considerados, obtendo a congruência delas. Com os resultados de que $\overline{IL} = \overline{JK}$ e de $\overline{IJ} = \overline{LK}$, o estudante chega a seguinte resposta:

Figura 28 – Registro escrito presente na resolução da questão 02 do estudante E2


Como a figura IJKL possui os lados $\overline{IL}$ e $\overline{JK}$ são iguais e paralelos, e os lados $\overline{IJ}$ e $\overline{LK}$ são iguais e paralelos, temos que a figura é um paralelogramo.

E2, por meio da linguagem natural, esclarece que como o quadrilátero *IJKL* possui os lados opostos congruentes, e são paralelos dois a dois, segue que é um paralelogramo.

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado, há evidências de três. O primeiro se refere ao de *representação simbólica*, pois o estudante apresenta:

- Notação para se referir a um triângulo, por exemplo, ao escrever AIL;
- Notação para se referir a um segmento, quando escreve, por exemplo, $\overline{IL}$;
- Notação para segmentos congruentes, quando utiliza o símbolo “$=$”, ao escrever, por exemplo, $\overline{IL} = \overline{JK}$;
- Notação para se referir ao cálculo utilizando o teorema de Pitágoras.

O segundo processo é o de *mudança de representações e tradução entre elas*, quando E2 traduz as informações do enunciado para sua resolução, ao provar que IJKL é um paralelogramo. Além disso, o estudante teve que compreender a figura do enunciado, transitando pelas representações geométrica e algébrica.

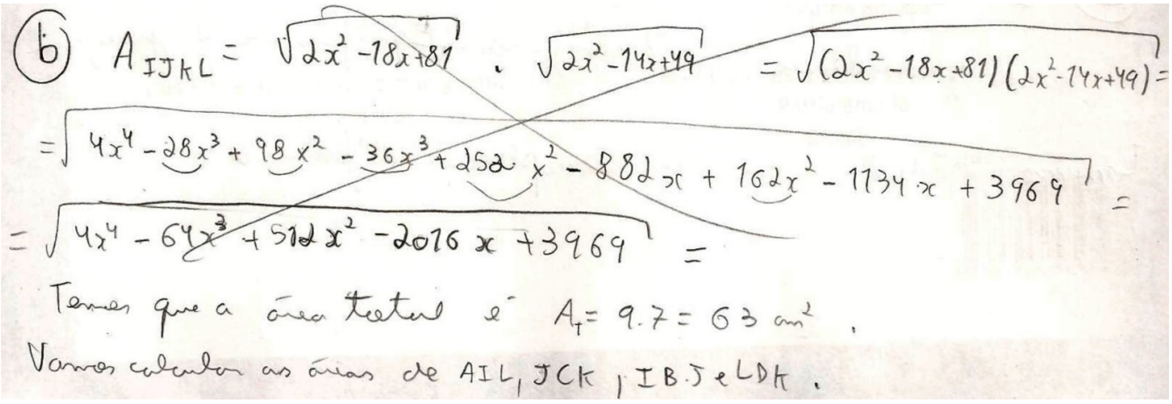
O terceiro processo é o de *sintetização*, pois E2 mobiliza diferentes conceitos em sua resolução, quando apresenta:

- Noção a respeito das propriedades de um triângulo retângulo;
- Noção a respeito do cálculo da fórmula do teorema de Pitágoras;
- Noção a respeito da definição de paralelogramo.

Para a alternativa (b), que consiste na determinação da função que fornece a área do paralelogramo IJKL e do ponto de mínimo ou de máximo, o estudante E2, ao iniciar sua resolução, opta por calcular a área do paralelogramo

IJKL utilizando a fórmula de sua área, multiplicando $\overline{IL}$ por $\overline{LK}$, como nos mostra a figura a seguir:

Figura 29 – Registro escrito presente na resolução da questão 02 do estudante E2


(b) $A_{IJKL} = \sqrt{2x^2-18x+81} \cdot \sqrt{2x^2-14x+49} = \sqrt{(2x^2-18x+81)(2x^2-14x+49)} =$

$= \sqrt{4x^4 - 28x^3 + 98x^2 - 36x^3 + 252x^2 - 882x + 162x^2 - 1134x + 3969} =$

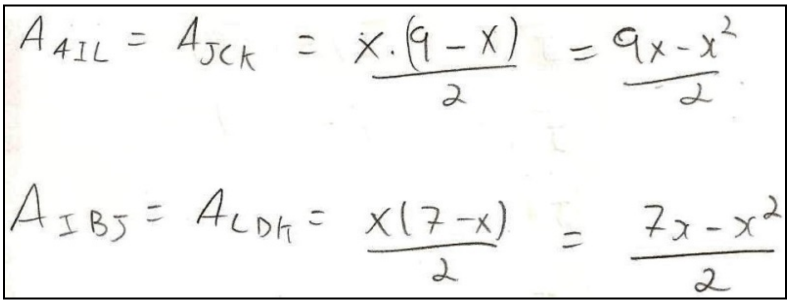
$= \sqrt{4x^4 - 64x^3 + 512x^2 - 2016x + 3969} =$

Temos que a área total é $A_T = 9.7 = 63$ cm².

Vamos calcular as áreas de AIL, JCK, IBJ e LDK.

As medidas de $\overline{IL}$ e de $\overline{LK}$ utilizadas na resolução, foram encontradas na resolução da alternativa (a). Ao multiplicá-las, E2 encontra dificuldades e opta por outra estratégia. No enunciado da questão há a informação de que os lados do retângulo ABCD tem medidas 7 e 9, então o estudante calcula a área do retângulo obtendo 63 cm^2. Além disso, calcula as áreas dos triângulos AIL, JLK, IBJ e LDK, como podemos ver na figura a seguir:

Figura 30 – Registro escrito presente na resolução na questão 02 do estudante E2


$A_{AIL} = A_{JCK} = \frac{x.(9-x)}{2} = \frac{9x-x^2}{2}$

$A_{IBJ} = A_{LDK} = \frac{x(7-x)}{2} = \frac{7x-x^2}{2}$

Como o estudante escreve que a área do triângulo AIL é igual a área do triângulo JLK, assim como a área de IBJ com a área do triângulo LDK, podemos inferir que E2 utiliza o conceito de congruência de triângulos nesta resolução. Para o cálculo da área dos triângulos considerados, E2 utiliza as medidas *x*, *9-x* e *7-x*. Depois de encontrar as áreas do retângulo ABCD e dos triângulos (mencionados anteriormente), o estudante nos apresenta a seguinte resolução:

Figura 31 – Registro escrito presente na resolução da questão 02 do estudante E2

A área que queremos será $A_T - (A_{AIL} + A_{JCK} + A_{IBJ} + A_{LDK}) =$

$= 63 - \left(\frac{9x - x^2}{2} + \frac{9x - x^2}{2} + \frac{7x - x^2}{2} + \frac{7x - x^2}{2} \right) = 63 - (9x - x^2 + 7x - x^2) =$

$= 63 - 16x + 2x^2$

Portanto a área do paralelogramo em função de x é

$2x^2 - 16x + 63$.

Para encontrar a função que fornece a área do paralelogramo IJKL, E2 optou por fazer a diferença entre a área do retângulo ABCD e dos triângulos AIL, JCK, IBJ e LDK, obtendo $2x^2 - 16x + 63$, que é o resultado correto. Com esta função, o estudante determina o ponto de mínimo, como podemos ver na figura 32:

Figura 32 – Registro escrito presente na resolução da questão 02 do estudante E2

Ponto mínimo: $(x_V, y_V) = (4, 31)$ $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-248)}{8} = 31$ $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-16)}{2 \cdot 2} = 4$	Não possui ponto máximo

O ponto de mínimo (4, 31) é obtido utilizando as fórmulas do vértice de uma parábola. Outra maneira de encontrar o ponto de mínimo seria calcular a derivada da função.

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado manifestados na resolução da alternativa (b), há evidências de quatro deles. O primeiro se refere ao de *representação simbólica*, pois o estudante apresenta:

- Notação para se referir à área do paralelogramo IJKL, quando escreve A_{IJKL};
- Notação para se referir a área do retângulo ABCD, ao escrever A_T;
- Notação para se referir a um triângulo, por exemplo, AIL;

- Notação para se referir a área de um triângulo, por exemplo, A_{AIL};
- Notação aritmética para o cálculo da área do retângulo ABCD;
- Notação algébrica para o cálculo da área dos triângulos;
- Notação algébrica para o cálculo da área do paralelogramo IJKL;
- Notação algébrica para se referir a área do paralelogramo IJKL;
- Notação algébrica para se referir ao cálculo do vértice da função do segundo grau que fornece a área do paralelogramo IJKL.
- Notação aritmética para se referir ao vértice da função do segundo grau que fornece a área do paralelogramo IJKL.

O segundo processo é o de *mudança de representações e tradução entre elas*, pois E2 ao interpretar e compreender o enunciado e sua figura, consegue resolver a alternativa (b), obtendo a função que fornece a área do paralelogramo. O estudante transita pela representação geométrica do enunciado, assim como pelas representações algébricas em sua resolução.

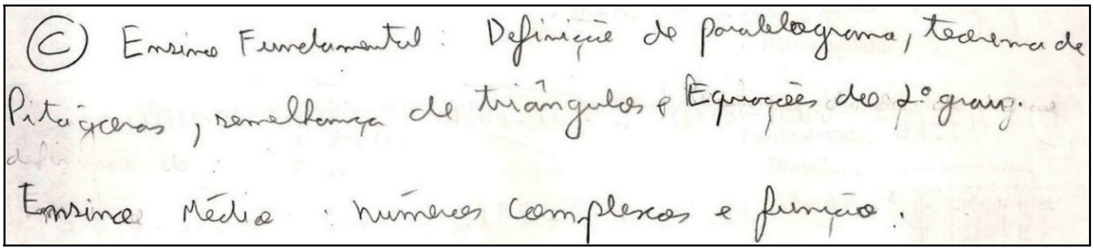
Outro processo evidenciado é o de *sintetização*. E2 utiliza diversos conceitos matemáticos, como:

- Noção a respeito do cálculo da área de um retângulo;
- Noção a respeito do cálculo da área de um triângulo;
- Noção da decomposição de uma figura plana (retângulo) em outras (triângulos e paralelogramo) para o cálculo da área de uma das figuras decompostas (paralelogramo);
- Noção de uma função do segundo grau;
- Noção a respeito do cálculo do vértice de uma parábola;
- Noção a respeito de pontos críticos.

E o quarto processo evidenciado se refere ao de *modelação*, quando o estudante encontra a função que fornece a área do paralelogramo IJKL.

Para a alternativa (c), o estudante responde que conceitos matemáticos podem ser explorados com a questão 02, como nos mostra a figura a seguir:

Figura 33 – Registro escrito presente na resolução da questão 02 do estudante E2



(C) Ensino Fundamental: Definição de paralelogramo, teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos e Equações do 2º grau.

Ensino Médio: números complexos e função.

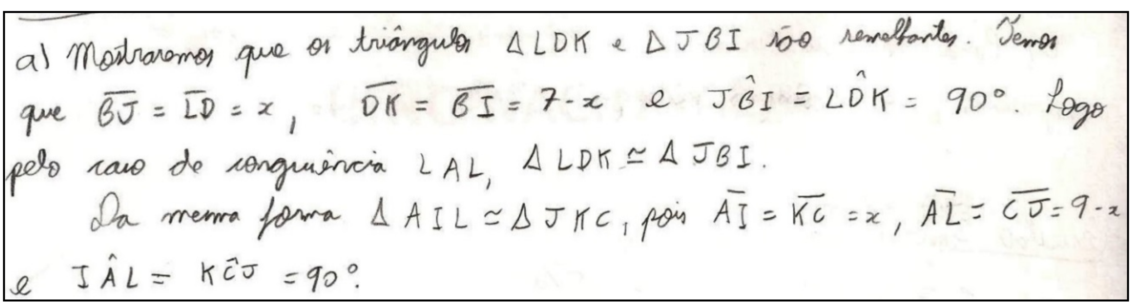
O estudante escreve a respeito da semelhança de triângulos, mas em sua resolução utiliza de maneira indireta a congruência de triângulos. Não iremos analisar esta alternativa em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado por se tratar de uma questão apenas descritiva de conceitos matemáticos.

Portanto, na resolução da questão 02 do estudante E2 foram manifestados os processos de *representação simbólica*, de *mudança de representações e tradução entre elas*, de *sintetização* e de *modelação*.

4.2.3 Resolução do Estudante E4

O estudante E4 resolveu todas as alternativas da questão 02. Na alternativa (a), em que se deve provar que IJKL é um paralelogramo, E4 inicia sua resolução provando que os triângulos LDK e JBI são semelhantes (que na verdade deveria ser congruentes, mas pensamos que o estudante deve ter se confundido no momento de transcrever a resolução), como podemos ver na figura a seguir:

Figura 34 – Registro escrito presente na resolução da questão 02 do estudante E4



a) Mostraremos que os triângulos ΔLDK e ΔJBI são semelhantes. Temos que $\overline{BJ} = \overline{LD} = x$, $\overline{DK} = \overline{BI} = 7-x$ e $J\hat{B}I = L\hat{D}K = 90°$. Logo pelo caso de congruência LAL, $\Delta LDK \cong \Delta JBI$.

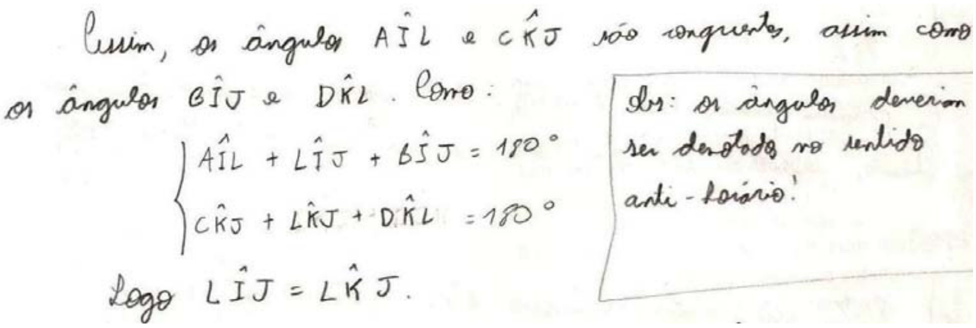
Da mesma forma $\Delta AIL \cong \Delta JKC$, pois $\overline{AI} = \overline{KC} = x$, $\overline{AL} = \overline{CJ} = 9-x$ e $I\hat{A}L = K\hat{C}J = 90°$.

Para isso, E4 utiliza o caso de congruência de triângulos LAL (lado, ângulo, lado), pois $\overline{BJ} = \overline{LD}$, $\overline{DK} = \overline{BI}$ e $J\hat{B}I = L\hat{D}K$, provando que os triângulos

LDK e JBI são congruentes. Mas utiliza o sinal de semelhança "$\cong$" ao escrever $\Delta LDK \cong \Delta JBI$, outro momento que E4 pode ter se confundido.

O estudante prova que os triângulos AIL e JKC são congruentes, utilizando novamente o caso de congruência de triângulos LAL, quando escreve que $\overline{AI} = \overline{KC}$, $\overline{AL} = \overline{CJ}$ e $I\hat{A}L = K\hat{C}J$. Com a congruência dos triângulos (LDK e JBI, AIL e JKC), E4 continua sua resolução:

Figura 35 – Registro escrito presente na resolução da questão 02 do estudante E4



Assim, os ângulos $A\hat{I}L$ e $C\hat{K}J$ são congruentes, assim como os ângulos $B\hat{I}J$ e $D\hat{K}L$. Como:

$$\begin{cases} A\hat{I}L + L\hat{I}J + B\hat{I}J = 180^\circ \\ C\hat{K}J + L\hat{K}J + D\hat{K}L = 180^\circ \end{cases}$$

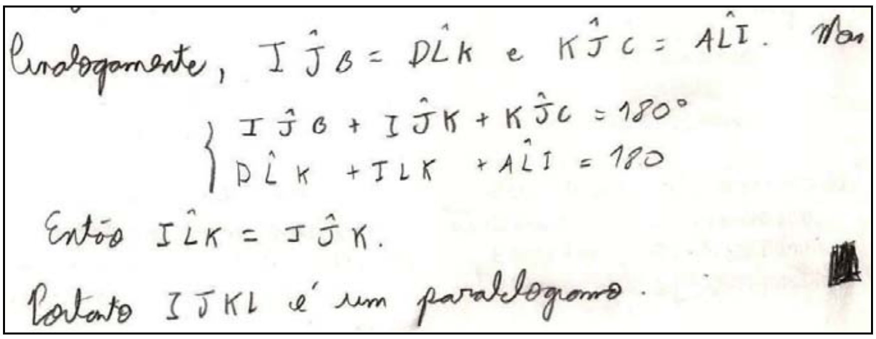
Logo $L\hat{I}J = L\hat{K}J$.

Obs: os ângulos deveriam ser denotados no sentido anti-horário!

O estudante calcula a soma dos ângulos $A\hat{I}L$, $L\hat{I}J$ e $B\hat{I}J$, sabendo que é 180°, pois estão sob o segmento $\overline{AB}$. Assim como a soma dos ângulos $C\hat{K}J$, $L\hat{K}J$ e $D\hat{K}L$, que estão sobre o segmento $\overline{DC}$. Ao fazer a relação da adição destes ângulos em um sistema, E4 obtém que os ângulos $L\hat{I}J$ e $L\hat{K}J$ tem mesma medida, pois sabe que os ângulos $A\hat{I}L$ e $C\hat{K}J$ são congruentes, do mesmo modo que $B\hat{I}J$ e $D\hat{K}L$, resultados obtidos da congruência dos triângulos LDK e JBI e dos triângulos AIL e JKC.

Ainda resulta das congruências destes triângulos que $I\hat{J}B = D\hat{L}K$ e $K\hat{J}C = A\hat{L}I$, que serão utilizados na resolução da figura 36:

Figura 36 – Registro escrito presente na resolução da questão 02 do estudante E4



Analogamente, $I\hat{J}B = D\hat{L}K$ e $K\hat{J}C = A\hat{L}I$. Mas

$$\begin{cases} I\hat{J}B + I\hat{J}K + K\hat{J}C = 180^\circ \\ D\hat{L}K + ILK + A\hat{L}I = 180 \end{cases}$$

Então $I\hat{L}K = J\hat{J}K$.

Portanto IJKL é um paralelogramo.

Para finalizar sua resolução, E4 prova que os ângulos $I\hat{L}K$ e $I\hat{J}K$ são congruentes, utilizando o fato de que a soma dos ângulos $I\hat{J}B$, $I\hat{J}K$ e $K\hat{J}C$ é 180°, bem como que os ângulos $D\hat{L}K$, $I\hat{L}K$ e $A\hat{L}I$ somam-se 180°.

Desde modo, com os resultados de que $\overline{IJ} \equiv \overline{LK}$, $\overline{IL} \equiv \overline{JK}$, $L\hat{I}J = L\hat{K}J$ e $I\hat{L}K = I\hat{J}K$, E4 provou que IJKL é um paralelogramo.

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado, há evidências de três processos. Um se refere ao de *representação simbólica*, pois o estudante apresenta:

- Notação para se referir a um triângulo, ao escrever, por exemplo, ΔLDK;
- Notação para se referir a um segmento, por exemplo, $\overline{BJ}$;
- Notação para se referir a um ângulo, por exemplo, $J\hat{B}I$;
- Notação para se referir ao paralelogramo, quando escrever IJKL;
- Notação algébrica para se referir à medida de um segmento, por exemplo, x;
- Notação aritmética para se referir à medida de um ângulo, por exemplo, 90°.

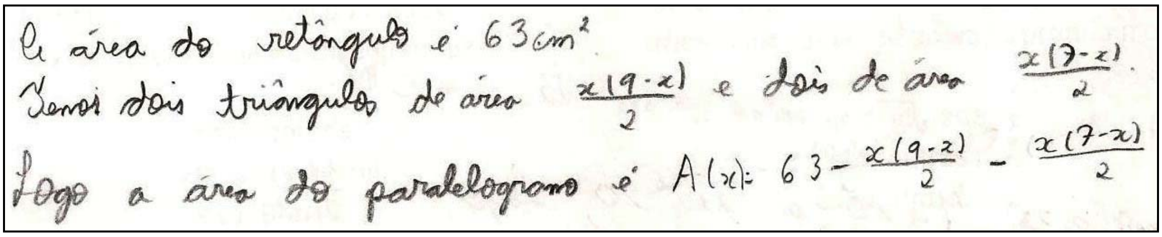
O segundo processo manifestado é o de *mudança de representações e tradução entre elas*, pois E4 compreende o enunciado da questão e interpreta a figura presente no enunciado, traduzindo para sua resolução em linguagens natural e matemática. Consegue mudar de uma representação geométrica para as representações algébricas utilizadas em sua resolução.

E o terceiro processo é o de *sintetização*, pois o estudante utiliza diferentes conceitos para provar que IJKL é um paralelogramo, quando apresenta:

- Noção de propriedades de um triângulo;
- Noção de casos de congruência de triângulos, sendo utilizado o caso LAL;
- Noção da soma dos ângulos internos de um triângulo;
- Noção da definição de um paralelogramo.

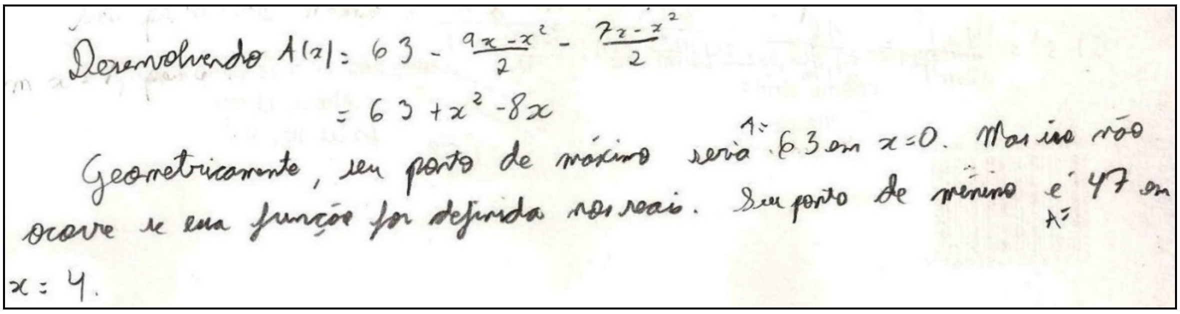
Para a alternativa (b), E4 inicia sua resolução da seguinte maneira:

Figura 37 – Registro escrito presente na resolução da questão 02 do estudante E4


A área do retângulo é 63cm²
Temos dois triângulos de área $\frac{x(9-x)}{2}$ e dois de área $\frac{x(7-x)}{2}$.
Logo a área do paralelogramo é $A(x) = 63 - \frac{x(9-x)}{2} - \frac{x(7-x)}{2}$

E4 calcula a área do retângulo ABCD, obtendo 63 cm², e calcula as áreas dos triângulos AIL, JBI, JKC e LDK, sabendo que os triângulos $AIL \equiv JKC$ e que $LDK \equiv JBI$. Para obter a função que fornece a área do paralelogramo IJKL, E4 calcula a diferença entre as áreas do retângulo e dos triângulos, mas esquece de multiplicar por 2 cada área dos triângulos, definidas por $\frac{x \cdot (9-x)}{2}$ e $\frac{x \cdot (7-x)}{2}$. Continuando em sua resolução, o estudante desenvolve A(x), como podemos ver na figura 38:

Figura 38 – Registro escrito presente na resolução da questão 02 do estudante E4


Desenvolvendo $A(x) = 63 - \frac{9x-x^2}{2} - \frac{7x-x^2}{2}$
$= 63 + x^2 - 8x$
Geometricamente, seu ponto de máximo seria A= 63 em x=0. Mas isso não ocorre se essa função for definida nos reais. Seu ponto de mínimo é A= 47 em x = 4.

E4 obtém a função $x^2 - 8x + 63$ que fornece a área do paralelogramo IJKL, que devido a um descuido, não é a resposta correta. Para determinar o ponto de mínimo ou de máximo, conforme o enunciado, o estudante afirma que o ponto de máximo desta função seria em *A=63* para *x=0*, isto para uma visão geométrica da figura, mas como a função é definida nos reais afirma que seu ponto de mínimo é em *x=4* e *y=47*, que está correto para a função que o estudante obteve.

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado, quatro deles foram evidenciados. O primeiro se refere ao de *representação simbólica*, pois o estudante apresenta:

- Notação aritmética para se referir à área do retângulo ABCD, quando escreve 63 cm²;

- Notação algébrica para se referir a área dos triângulos, ao escrever, por exemplo, $\frac{x \cdot (9-x)}{2}$;
- Notação para se referir à área do paralelogramo, quando escreve A(x);
- Notação algébrica para se referir a área do paralelogramo, quando escreve $x^2 - 8x + 63$;
- Notação aritmética para se referir ao ponto de mínimo, ao escrever 47 e x=4.

O segundo processo evidenciado é o de *mudança de representações e tradução entre elas*. O estudante E4, para resolver à alternativa (b), teve que compreender o enunciado e a figura da questão, mudando de uma representação geométrica para uma representação algébrica.

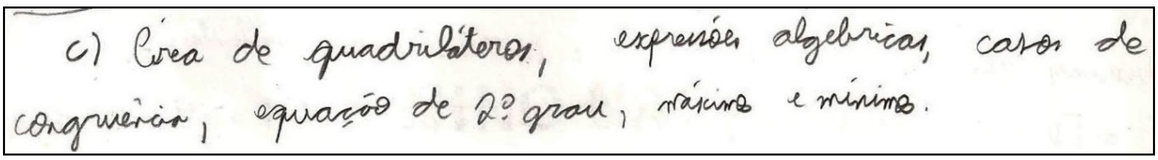
O terceiro processo é o de *sintetização*, pois o estudante apresenta:

- Noção a respeito do cálculo da área de um triângulo;
- Noção a respeito do cálculo da área de um retângulo;
- Noção da decomposição de uma figura plana (retângulo) em outras (triângulos e paralelogramo) para o cálculo da área de uma das figuras decompostas (paralelogramo);
- Noção de uma função do segundo grau;
- Noção a respeito do cálculo do vértice de uma parábola;
- Noção a respeito de pontos críticos.

E o quarto processo diz respeito ao de *modelação*. Este foi evidenciado quando o estudante E4 determinou a função que fornece a área do paralelogramo IJKL.

Para a alternativa (c), E4 citou os seguintes conteúdos matemáticos que podem ser explorados com a questão 02, como podemos ver na figura 39:

Figura 39 – Registro escrito presente na resolução da questão 02 do estudante E4


c) Área de quadriláteros, expressões algébricas, casos de congruência, equação do 2º grau, máximo e mínimo.

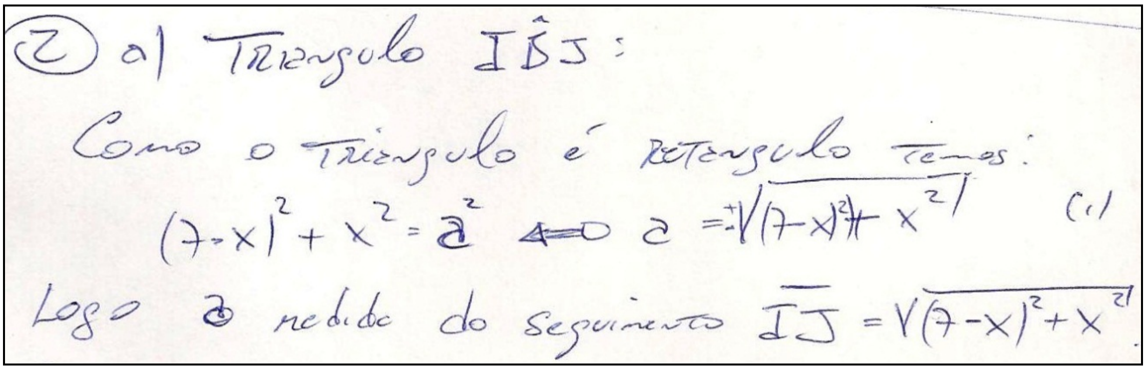
Não iremos analisar esta alternativa em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado por se tratar de uma questão descritiva de conceitos matemáticos.

Portanto, o estudante E4 evidenciou em sua resolução os processos de *representação simbólica*, de *mudança de representações e tradução entre elas*, de *sintetização* e de *modelação*.

4.2.4 Resolução do Estudante E11

O estudante E11 resolveu somente a alternativa (a) da questão 02, em que prova que a figura IJKL é um paralelogramo. Para isso, E11 optou por provar que os segmentos $\overline{IJ}$ e $\overline{LK}$ são congruentes. Observemos o início de sua resolução na figura a seguir:

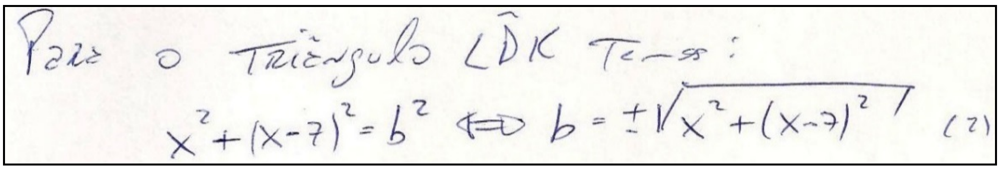
Figura 40 – Registro escrito presente na resolução da questão 02 do estudante E11



2) a) Triangulo $I\hat{B}J$:
Como o triângulo é retangulo temos:
$(7-x)^2 + x^2 = a^2 \iff a = \pm\sqrt{(7-x)^2 + x^2}$ (1)
Logo a medida do segmento $\overline{IJ} = \sqrt{(7-x)^2 + x^2}$

O estudante indica o triângulo IBJ, com o intuito de calcular a medida de sua hipotenusa, que no caso é $\overline{IJ}$. Utilizando o teorema de Pitágoras, E11 encontra a medida $\overline{IJ} = \sqrt{(7-x)^2 + x^2}$, denotando por (1). Ao continuar, o estudante faz o cálculo para encontrar a medida da hipotenusa do triângulo LDK, como nos mostra a figura 41:

Figura 41 – Registro escrito presente na resolução da questão 02 do estudante E11

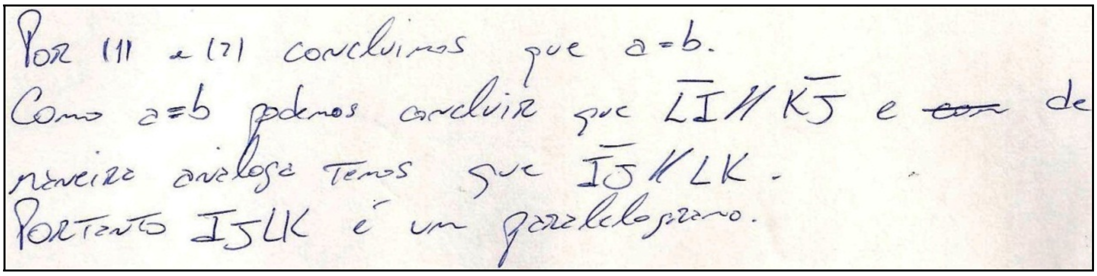


Para o triângulo $L\hat{D}K$ Temos:
$x^2 + (x-7)^2 = b^2 \iff b = \pm\sqrt{x^2 + (x-7)^2}$ (2)

Para a medida da hipotenusa procurada, e utilizando novamente o teorema de Pitágoras, E11 determina $b=\sqrt{x^2+(x-7)^2}$, denotado por (2), sendo que *b* se refere ao segmento $\overline{LK}$.

Com as relações (1) e (2), o estudante chega a seguinte conclusão:

Figura 42 – Registro escrito presente na resolução da questão 02 do estudante E11


Por (1) e (2) concluimos que a=b.
Como a=b podemos concluir que $\overline{LI} // \overline{KJ}$ e ~~com~~ de
maneira análoga temos que $\overline{IJ} // LK$.
Portanto IJLK é um paralelogramo.

E11 conclui que as medidas dos segmentos $\overline{IJ}$ e $\overline{LK}$ são congruentes, tendo como consequência que os segmentos $\overline{LI}$ e $\overline{KJ}$ são paralelos, além do paralelismo entre os próprios segmentos $\overline{IJ}$ e $\overline{LK}$. Com este resultado, o estudante prova que IJKL é um paralelogramo. Mas este resultado não é suficiente para provar que os lados $\overline{LI}$ e $\overline{KJ}$ são paralelos. O estudante deveria ter provado que estes mesmos lados são congruentes, e então IJKL como é um quadrilátero com lados opostos congruentes, é um paralelogramo.

Ao fazer uma análise desta resolução em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado, encontramos evidências de dois processos. O primeiro diz respeito ao de *representação simbólica*. O estudante utiliza alguns símbolos para se referir a alguns conceitos matemáticos, quando apresenta:

- Notação para se referir a um triângulo, quando escreve IBJ;
- Notação para segmento, ao escrever, por exemplo, $\overline{IJ}$;
- Notação para a fórmula do teorema de Pitágoras;
- Notação para se referir que dois segmentos são paralelos, ao utilizar o símbolo "//", quando escreve, por exemplo, $\overline{IJ} // \overline{LK}$;
- Notação para se referir a um paralelogramo, ao escrever IJKL.

O segundo processo evidenciado é o de *sintetização*. Na alternativa (a), o estudante buscou por alguns conceitos de maneira a relacioná-los para a resolução. Assim, E11 apresenta:

- Noção a respeito do cálculo do teorema de Pitágoras;
- Noção de congruência entre segmentos;
- Noção de paralelismo entre segmentos.

Portanto, E11 mobilizou os processos de *representação simbólica* e *sintetização* em sua resolução da questão 2.

4.2.5 Agrupamentos Referentes às Resoluções da Questão 02 dos Estudantes E2, E4 e E11

Depois de descrevermos e analisarmos as resoluções dos estudantes E2, E4 e E11, de acordo com a teoria de Dreyfus (2002), construímos os agrupamentos para a questão 02. Segue abaixo o quadro:

Quadro 9 – Descrição dos agrupamentos relativos às resoluções da questão 02

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Agrupamentos</th><th>Estudantes</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Representação</td><td>A</td><td>Utiliza notações para se referir a conceitos geométricos, como: segmentos, triângulos, retângulo, paralelogramo, área de um triângulo, área de um retângulo, área de um paralelogramo ou vértice de uma parábola.</td><td>E2, E4, E11</td></tr>
<tr><td>B</td><td>Apresenta: cálculos referentes às áreas de um triângulo, de um retângulo e de um paralelogramo; cálculos utilizando o teorema de Pitágoras.</td><td>E2, E4, E11</td></tr>
<tr><td>C</td><td>Retira informações do enunciado, fazendo ligações entre a figura do retângulo ABCD circunscrito no paralelogramo IJKL (representação geométrica) com as demais representações e notações utilizadas na resolução.</td><td>E2, E4, E11</td></tr>
<tr><td>D</td><td>Utiliza a incógnita x para obter a função que determina a área do paralelogramo IJKL.</td><td>E2, E4</td></tr>
<tr><td>Abstração</td><td>E</td><td>Evidencia um domínio referente a conceitos matemáticos representados pelas notações, por meio do uso de: propriedades de figuras planas (triângulo, retângulo e paralelogramo); cálculos das áreas de figuras planas (triângulo, retângulo e paralelogramo); cálculos utilizando o teorema de Pitágoras.</td><td>E2, E4, E11</td></tr>
</table>

Fonte: do autor.

4.3 ANÁLISES DA QUESTÃO 03

Nesta seção, faremos uma descrição das resoluções dos estudantes que resolveram a questão 03, assim como o estudo de indícios dos processos do Pensamento Matemático Avançado em tais resoluções e na resposta Padrão do Enade. Abaixo segue o enunciado da questão.

Em um prédio de 8 andares, 5 pessoas aguardam o elevador no andar térreo. Considere que elas entrarão no elevador e sairão, de maneira aleatória, nos andares de 1 a 8.

Com base nessa situação, faça o que se pede nos itens a seguir, apresentando o procedimento de cálculo utilizado na sua resolução.

a) *Calcule a probabilidade de essas pessoas descerem em andares diferentes.*

b) *Calcule a probabilidade de duas ou mais pessoas descerem em um mesmo andar.*

As resoluções analisadas são dos estudantes: E2, E3, E4, E6, E10 e E11. As análises, tanto as descritivas quanto as que se referem ao nosso referencial teórico, serão divididas em duas partes, considerando o enunciado da questão:

1ª parte: alternativa (a); 2ª parte: alternativa (b).

4.3.1 Resolução e Análise da Resposta Padrão do Enade

Segundo a resposta padrão da questão discursiva 3[29] da prova do Enade de 2011, a alternativa (a):

<u>Solução I</u>*: Encontrar a probabilidade de ocorrência do evento, calculando o número total de configurações determinadas pelas possíveis escolhas das 5 pessoas nas quais as mesmas saem em andares diferentes (número de elementos do evento) e, a seguir, dividindo-o pelo número total de possíveis configurações (número de elementos do espaço amostral).*

O número de possíveis configurações determinadas pelas escolhas em que as 5 pessoas saem em andares diferentes: pelo Princípio Multiplicativo ($8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4$) *ou, ainda, considerando* $A_{8,5}=\dfrac{8!}{3!}=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=6720$. *Número total de configurações:* $8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8=8^5=32768$.

Probabilidade $P_A=\dfrac{6720}{32768}=\dfrac{105}{512}$.

<u>Solução II</u>*: A probabilidade de que um andar seja escolhido por uma determinada pessoa é igual a* $\dfrac{1}{8}$. *Como as escolhas são independentes, a*

---

[29] Disponibilizada pelo site: http://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/padrao_resposta/2011/MATEMATICA.pdf.

probabilidade de ocorrência de uma determinada configuração (determinada pelas escolhas das 5 pessoas) é igual a $\frac{1}{8^5}$*. O número de possíveis escolhas em que as 5 pessoas saem em andares diferentes: pelo Princípio Multiplicativo (*$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$*) ou, ainda, considerando* $A_{8,5} = \frac{8!}{3!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$*.*

Assim, tem-se $P_A = 6720 \cdot \frac{1}{8^5} = \frac{6720}{32768} = \frac{105}{512}$*.*

Ao analisar os processos do Pensamento Matemático Avançado nas duas soluções para a alternativa (a), podemos encontrar evidências de *representação simbólica*, pois é utilizado:

- Notação para se referir ao arranjo, para determinar as possibilidades do evento;
- Notação aritmética para se referir ao cálculo de arranjo;
- Notação aritmética para se referir ao cálculo que determina o total de possibilidades, ou seja, o espaço amostral;
- Notação para se referir à probabilidade do evento;
- Notação aritmética para se referir ao cálculo de probabilidade.

O processo de *sintetização* também foi mobilizado, pois apresenta noções de análise combinatória, quanto utiliza arranjo/princípio multiplicativo e noções de probabilidade.

Alternativa (b):

<u>Solução I</u>*: Calcular a probabilidade do evento complementar diretamente, por meio da relação* $P_B = 1 - P_A$*:* $P_B = 1 - P_A = 1 - \frac{105}{512} = \frac{407}{512}$*.*

<u>Solução II</u>*: O número de elementos que compõem o evento complementar é igual ao número total subtraído do número de elementos do evento apresentado em (a):* $8^5 - 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 26048$*.*

Assim, $P_B = \frac{26048}{32768} = \frac{407}{512}$*.*

Analisando o Pensamento Matemático Avançado envolvido nas duas soluções da alternativa (b), podemos encontrar evidências do processo de *representação simbólica*, quando é apresentado:

- Notação aritmética para se referir ao cálculo de probabilidade complementar;
- Notação para se referir a probabilidade do evento;
- Notação aritmética para se referir ao cálculo da subtração entre o total de possibilidades (espaço amostral) e o arranjo (evento).

Outro processo mobilizado é o de sintetização, quando se utiliza noções de arranjo, de probabilidade e probabilidade complementar.

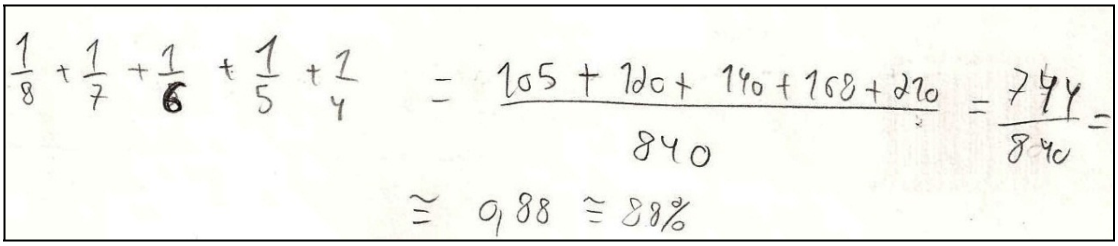
O processo de *mudança de representações e tradução entre elas* foi evidenciado nas duas alternativas, pois foi necessário retirar as informações do enunciado, e traduzir em uma linguagem matemática para resolvê-lo.

Portanto, na resolução Padrão do Enade da questão 03 foram mobilizados os processos de *representação simbólica*, *mudança de representações e tradução entre elas* e *sintetização*.

4.3.2 Resolução do Estudante E2

O estudante E2 resolveu somente a alternativa (a), não chegando ao resultado que consideramos estar correto. E2 utiliza a seguinte estratégia para resolver o que se pede, como podemos ver na figura abaixo:

Figura 43 – Registro escrito presente na resolução da questão 03 do estudante E2



Ao calcular a probabilidade das pessoas que poderiam descer em andares diferentes, E2 faz a seguinte soma: $\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}$; ao invés de fazer primeiramente o cálculo pelo Princípio Multiplicativo, obtendo o número total de escolhas que as cinco pessoas teriam ao saírem em andares diferentes e posteriormente, fazer a divisão pelo número total de escolhas do espaço amostral.

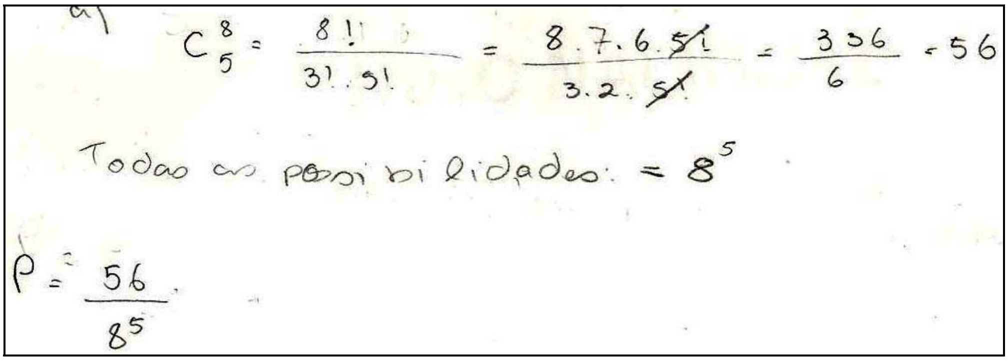
Portanto o estudante não chega ao resultado esperado, pois realiza um cálculo em que relaciona, de maneira errônea, o Princípio Aditivo com o conceito de probabilidade. Ao analisar o cálculo efetuado pelo estudante, podemos inferir que sabe fazer operações de adição com números fracionários, determinando o mínimo múltiplo comum dos denominadores, obtendo as frações equivalentes. Além disso, E2 apresenta o resultado em forma de número percentual.

Ao analisar os processos do Pensamento Matemático Avançado, encontramos evidência do processo de *representação simbólica*, em especial uma representação aritmética, em que apresenta notação para o cálculo da probabilidade do evento conforme o enunciado.

4.3.3 Resolução do Estudante E3

O estudante E3 resolveu somente a alternativa (a), em que apresenta um cálculo para obter o número de escolhas das cinco pessoas ao saírem em andares diferentes, assim como apresenta um cálculo em que encontra o número total das escolhas, e posteriormente, encontra o número de possibilidades, como nos mostra a figura 44:

Figura 44 – Registro escrito presente na resolução da questão 03 do estudante E3



Ao calcular o número de escolhas que as cinco pessoas podem fazer ao saírem em andares diferentes, E3 utiliza o conceito de Combinação, ao invés de utilizar o de Arranjo. Este é um erro que se comete muitas vezes quando não se entende a definição de tais conceitos de Análise Combinatória.

Apesar disso, calcula o número total de escolhas que podem acontecer quando cinco pessoas estão em um elevador em um prédio com oito andares. Este cálculo nos mostra que o estudante compreende o conceito de probabilidade, pois após este cálculo, realiza a divisão do evento (números de escolhas das 5 pessoas saírem em andares diferentes) pelo total de escolhas.

Analisando os processos do Pensamento Matemático Avançado, encontramos evidências de dois deles. O primeiro se refere ao de *representação simbólica*, pois o estudante apresenta:

- Notação para se referir a um cálculo de combinação, quando escreve C_5^8;
- Notação para se referir a um cálculo de probabilidade, ao escrever P;
- Notação aritmética para se referir ao cálculo de combinação;
- Notação aritmética para se referir ao cálculo de probabilidade.

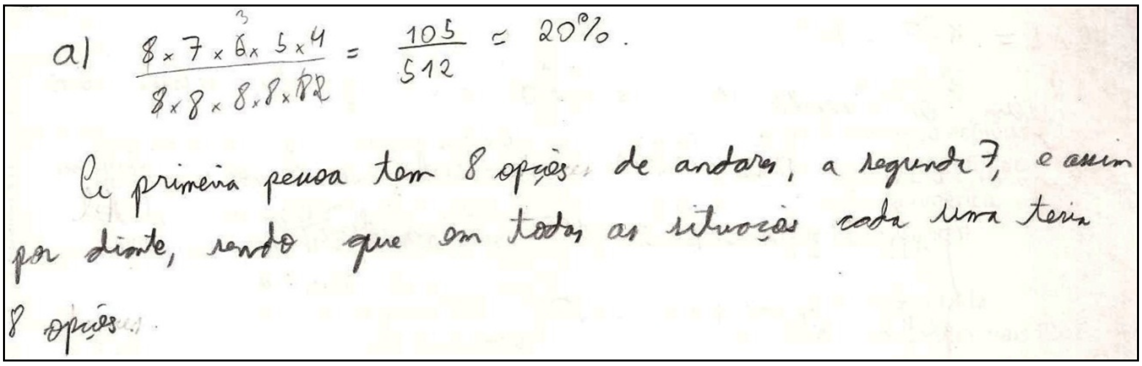
O segundo processo diz respeito ao de *sintetização*. Para resolver a questão o estudante E3 utiliza:

- Noção do conceito de combinação;
- Noção do conceito de probabilidade.

4.3.4 Resolução do Estudante E4

O estudante E4 resolveu a questão 03 de maneira completa, apresentando resoluções para as alternativas (a) e (b). Na primeira alternativa, o estudante a resolve de um modo mais prático, como podemos ver na figura a seguir:

Figura 45 – Registro escrito presente na resolução da questão 03 do estudante E4


a) $\frac{8\times7\times\overset{3}{\cancel{6}}\times5\times4}{8\times8\times8\times8\times\cancel{8}} = \frac{105}{512} \simeq 20\%$.

A primeira pessoa tem 8 opções de andares, a segunda 7, e assim por diante, sendo que em todas as situações cada uma teria 8 opções.

E4 faz o cálculo, aparentemente simples, mas que envolve o conceito de Princípio Multiplicativo, ao escrever $8\times7\times6\times5\times4$; assim como o número total de configurações, $8\times8\times8\times8\times8$; além de utilizar o conceito de probabilidade ao realizar a divisão, chegando a um resultado que consideramos estar correto. Podemos observar ainda que quando o estudante chega ao resultado, encontra a resposta em termos de porcentagem. O estudante ainda faz um comentário explicando sua resolução.

Ao analisar os processos do Pensamento Matemático Avançado presentes na resolução, encontramos evidências de três. O primeiro é o de *representação simbólica*, pois o estudante utiliza:

- Notação aritmética para se referir ao cálculo de arranjo;
- Notação aritmética para se referir ao cálculo de todas as possíveis configurações;
- Noção aritmética para se referir a resposta percentual;
- Notação aritmética para se referir ao cálculo de probabilidade.

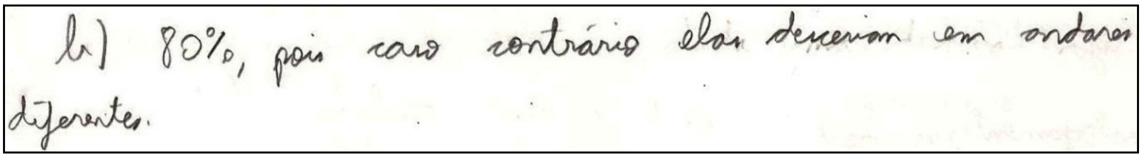
O segundo processo se refere ao de *sintetização*. Para resolver a questão, o estudante utiliza alguns conceitos matemáticos, como:

- Noção do conceito de Arranjo e Princípio Multiplicativo;
- Noção do conceito de Probabilidade.

O terceiro processo é o de *mudança de representações e tradução entre elas*, quando o estudante traduz o enunciado da questão para sua resolução.

O estudante ainda resolve a alternativa (b), como podemos ver na figura a seguir:

Figura 46 – Registro escrito presente na resolução da questão 03 do estudante E4



b) 80%, pois caso contrário elas desceriam em andares diferentes.

Para resolver esta alternativa, o estudante utiliza o resultado que encontrou anteriormente, de *20%*, obtendo agora *80%*. Podemos inferir que E4 resolve desta maneira, pois sabe que as somas das possibilidades de um evento deve resultar *100%*. Além disso, sabe que tal resultado se refere a um evento complementar do evento da alternativa (a).

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados nesta resolução (figura 46), temos presente três processos. Um se refere ao de *representação simbólica*, pois E4 apresenta notação aritmética para se referir a um resultado percentual. O outro processo é o de *sintetização*, pois o estudante teve que mobilizar:

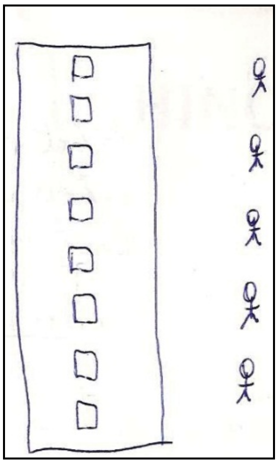
- Noção do conceito de Probabilidade;
- Noção de complementaridade de um evento.

E o terceiro processo é o de *mudança de representações e tradução entre elas*, pois o estudante compreende o enunciado da questão, como vimos em sua resolução. Portanto, o estudante E4 em sua resolução da questão 03 evidenciou os processos de *representação simbólica*, *mudança de representações e tradução entre elas* e *sintetização*.

4.3.5 Resolução do Estudante E6

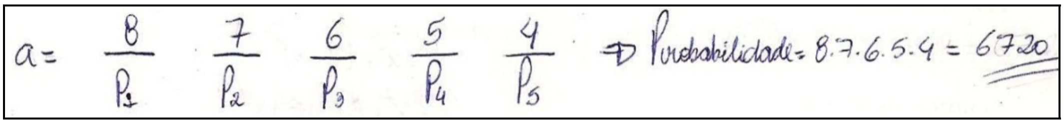
O estudante E6 resolveu a questão 03 de modo completo, mas não chegou aos resultados esperados para as duas alternativas ((a) e (b)). Antes de iniciar sua resolução, E6 faz o seguinte desenho:

Figura 47 – Registro escrito presente na resolução da questão 03 do estudante E6



Podemos inferir que o estudante faz o desenho, representando um prédio com oito andares e cinco pessoas, para compreender e visualizar o enunciado da questão. Para a alternativa (a), E6 faz a seguinte resolução:

Figura 48 – Registro escrito presente na resolução da questão 03 do estudante E6



Para indicar as possibilidades de cada pessoa, o estudante faz as seguintes notações: P_1 (que significa “primeira pessoa” e tem 8 possíveis escolhas), P_2 (que significa “segunda pessoa” e tem 7 possíveis escolhas), e assim por diante. Ao multiplicar os resultados de todas as possíveis escolhas (Princípio Multiplicativo) das cinco pessoas ao saírem em andares diferentes, E6 chama esta operação de “probabilidade”, e é neste momento que o estudante evidencia que não conhece a definição do conceito, dando como resultado o valor *6720*.

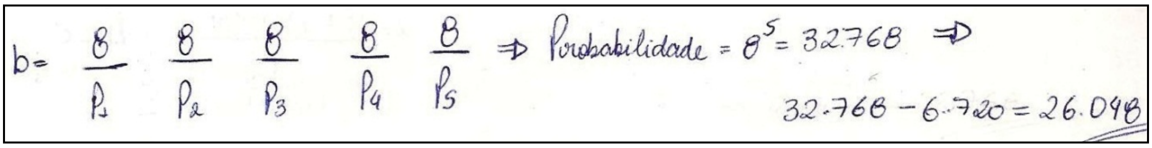
Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado, há evidências de dois deles. O primeiro é o de *representação simbólica*, quando o estudante apresenta:

- Notação aritmética para se referir ao cálculo do arranjo, sendo utilizado o Princípio Multiplicativo;
- Notação para se referir às pessoas, ao escrever, por exemplo, P_1.

O outro processo é o de *visualização*, que segundo Dreyfus (2002) é uma maneira de o indivíduo compreender a situação matemática. E6 evidencia este processo quando faz o desenho que representa o prédio e as pessoas, referente ao enunciado da questão.

Para a alternativa (b), o estudante apresenta a seguinte resolução:

Figura 49 – Registro escrito presente na resolução da questão 03 do estudante E6



Novamente E6 faz as mesmas notações para se referir as pessoas que estão no elevador, como: P_1 a “primeira pessoa” a sair do elevador, tendo 8 possibilidades; P_2 a “segunda pessoa” a sair do elevador que tem, ainda, 8 possibilidades; e para cada pessoa restante no elevador, todas apresentando 8 possibilidades. Por meio do Princípio Multiplicativo chega ao resultado de *32768*, o qual o estudante chama de probabilidade. E observamos aqui que o E6 não sabe o conceito de probabilidade, por não fazer a operação de modo correto. Para finalizar, faz a diferença do resultado encontrado nesta alternativa (*32768*) com o resultado da alternativa (a) (*6720*).

O que podemos analisar desta resolução é que o estudante encontra corretamente o valor para a situação em que todas as pessoas saem em andares diferentes e o valor para a situação em que considera todas as possíveis escolhas das pessoas. Mas o que o estudante não mostra é o conhecimento a respeito da definição de probabilidade, pois não faz os devidos cálculos em que deveria fazer a divisão de *6720* por *32768* na alternativa (a), e encontrar o complemento deste evento para a alternativa (b).

Para a segunda alternativa, temos a evidência do processo de *representação simbólica*, pois o estudante apresenta:

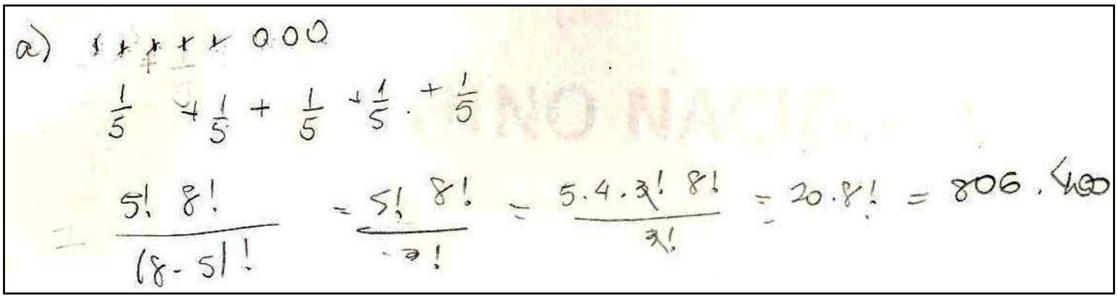
- Notação para se referir às pessoas, ao escrever, por exemplo, P_1;
- Notação aritmética para o cálculo do arranjo, utilizando o Princípio Multiplicativo.

Portanto, na questão 03 o estudante E6 evidenciou os processos de *representação simbólica* e *visualização*.

4.3.6 Resolução do Estudante E10

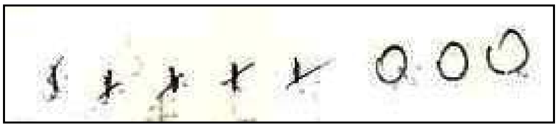
O estudante E10 resolveu a questão 03 de modo completo, apresentando uma resolução para cada alternativa. Mas em nenhuma chega às respostas que consideramos estarem corretas. Para a alternativa (a), E10 apresenta a seguinte resolução:

Figura 50 – Registro escrito presente na resolução da questão 03 do estudante E10



Observe que o estudante faz o desenho representado na figura 51 para visualizar a situação:

Figura 51 – Registro escrito presente na resolução da questão 03 do estudante E10



Em seguida faz a resolução, apresentando um cálculo que aparenta ser referente à Combinação, mas a utiliza de maneira errada, chegando ao resultado *806.400*. O estudante não faz o cálculo da probabilidade, o que nos permite inferir que não compreendeu a questão ou não sabe o conceito do termo.

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados na resolução da alternativa (a), encontramos evidências de dois processos. O primeiro se refere ao de *representação simbólica*, pois E10 apresenta notações aritméticas relativas aos cálculos efetuados.

Outro processo se refere ao de *visualização*, pois o estudante faz um desenho (figura 51) com o intuito de compreender a situação matemática do enunciado.

Para a resolução da alternativa (b) acompanhemos a figura 52:

Figura 52 – Registro escrito presente na resolução da questão 03 do estudante E10

$$\frac{(5-2)!\,.\,8!}{(8-5)!} = \frac{3!\,8!}{3!} = 8! = 40.320$$

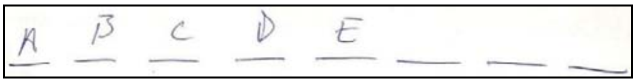
Com os cálculos que o estudante apresenta, podemos inferir que E10 novamente utiliza a fórmula da Combinação de maneira errada, além de mostrar que não compreendeu o enunciado da questão e de não saber o conceito de probabilidade.

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado, há apenas evidências do processo de *representação simbólica*, em especial, a representação aritmética.

4.3.7 Resolução do Estudante E11

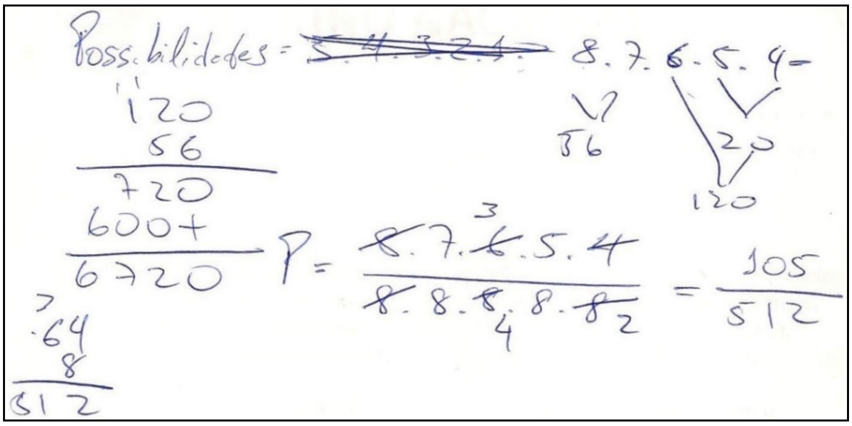
O estudante E11 resolveu todas as alternativas da questão 03, e ao fazer uma análise *a priori*, observamos que chega às respostas corretas. Para compreender a situação matemática do enunciado, E11 faz o seguinte desenho:

Figura 53 – Registro escrito presente na resolução da questão 03 do estudante E11



Podemos inferir que as letras A, B, C, D e E se referem às cinco pessoas que estão no elevador, e os traços "_" correspondem aos oito andares. Dando continuidade em sua resolução, o estudante apresenta os seguintes cálculos:

Figura 54 – Registro escrito presente na resolução da questão 03 do estudante E11



O estudante ao calcular, em uma primeira tentativa, as possíveis escolhas apresenta a seguinte multiplicação: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, mas logo muda sua estratégia quando faz outro cálculo multiplicativo: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$. Podemos inferir, ainda, que o estudante compreende o enunciado quando calcula a probabilidade do evento. Isso acontece ao dividir a multiplicação das possíveis escolhas das pessoas ao saírem em andares diferentes pelo total de possíveis escolhas destas pessoas.

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado, há evidências de quatro processos. O primeiro é o de *representação simbólica*, pois o estudante apresenta:

- Notação aritmética para se referir ao cálculo do Princípio Multiplicativo, ao escrever $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$;

- Notação aritmética para se referir ao cálculo de Probabilidade;
- Notações aritméticas que se referem às operações multiplicativas, quando escreve, por exemplo, 120×56.

O segundo processo diz respeito à *visualização*, quando o estudante apresenta um desenho que se refere à situação do enunciado da questão.

O terceiro processo é o de *mudança de representações e tradução entre elas*, quando E11 traduz a linguagem do enunciado para a linguagem matemática em sua resolução.

E o quarto processo se refere ao de *sintetização*, pois o estudante mobiliza conhecimentos a respeito do Princípio Multiplicativo e de Probabilidade.

Para a alternativa (b), E11 faz a seguinte resolução:

Figura 55 – Registro escrito presente na resolução da questão 03 do estudante E11

b) $P = 1 - \frac{105}{512} = \frac{512}{512} - \frac{105}{512} = \frac{407}{512}$

Como o enunciado pede a probabilidade de duas ou mais pessoas descerem em um mesmo andar, E11 utiliza o conceito de complementaridade, pois percebe que este evento é complementar ao evento da alternativa (a) e, portanto, chega a resposta correta. Além disso, o estudante mostra, em seus cálculos, conhecimento a respeito da operação de subtração com números fracionários.

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado há evidências de dois processos. O primeiro é o de *representação simbólica*, pois o estudante apresenta uma representação aritmética para se referir ao cálculo da probabilidade, representando por *P* este cálculo.

Outro processo manifestado é o de *mudança de representações e tradução entre elas*, quando E11 compreende o enunciado da questão e consegue traduzi-lo utilizando o conceito de complementaridade.

Portanto, o estudante E11 evidenciou os processos de *representação simbólica*, *visualização*, *mudança de representações e tradução entre elas* e *sintetização*.

4.3.8 Agrupamentos Referentes as Resoluções da Questão 03 dos Estudantes E2, E3, E4, E6, E10 e E11

Após descrevermos e analisarmos as resoluções dos estudantes em relação ao "modo" que os processos do Pensamento Matemático Avançado foram manifestados, conforme a teoria de Dreyfus (2002), construímos os agrupamentos, referentes as resoluções da questão 03 dos estudantes E2, E3, E4, E6, E10 e E11. No quadro 10 apresentamos tais agrupamentos:

Quadro 10 – Descrição dos agrupamentos relativos às resoluções da questão 03

		Agrupamentos	**Estudantes**
Representação	**A**	Utiliza notações para se referir a conceitos de análise combinatória e de probabilidade.	E3, E10, E11
	B	Apresenta cálculos referentes à combinação, arranjo ou probabilidade.	E2, E3, E4, E6, E11
	C	Apresenta imagens para representar a situação do enunciado: cinco pessoas em um elevador de um prédio com oito andares.	E6, E10, E11
	D	Retira informações do enunciado fazendo ligações com as demais representações e notações referentes a conceitos de análise combinatória e probabilidade utilizadas na resolução.	E3, E4, E11
Abstração	**E**	Evidencia um domínio referente a conceitos matemáticos, por meio do uso de: cálculos de arranjo (ou Princípio Multiplicativo); cálculos de combinação ou cálculos de probabilidade.	E3, E4, E11

Fonte: do autor.

4.4 ANÁLISE DA QUESTÃO 04

Nesta seção, faremos uma descrição das resoluções da resposta Padrão do Enade e dos estudantes em relação à questão 04, assim como uma análise dos processos do Pensamento Matemático Avançado que foram evidenciados. Para isso, segue abaixo o enunciado da questão:

Considere a sequência numérica definida por

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = \dfrac{4a_n}{2+a_n^2} \end{cases} \text{, para } n \geq 1.$$

Use o princípio de indução finita e mostre que $a_n < \sqrt{2}$, *para todo número natural* $n \geq 1$ *e para* $0 < a < \sqrt{2}$, *seguindo os passos indicados nos itens a seguir:*

a) *escreva a hipótese e a tese da propriedade a ser demonstrada;*

b) *mostre que* $s = \dfrac{4a}{2+a^2} > 0$, *para todo* $a > 0$*;*

c) *prove que* $s^2 < 2$, *para todo* $0 < a < \sqrt{2}$*;*

d) *mostre que* $0 < s < \sqrt{2}$*;*

e) *suponha que* $a_n < \sqrt{2}$ *e prove que* $a_{n+1} < \sqrt{2}$*;*

f) *conclua a prova por indução.*

Os registros escritos que foram analisados são dos estudantes E4, E5 e E7.

Para esta questão, descrevemos a resolução de todas as alternativas de cada estudante, fazendo, logo em seguida, uma análise em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado.

4.4.1 Resolução e Análise da Resposta Padrão do Enade

Segundo o padrão de resposta da questão discursiva 4[30] da prova do Enade de 2011, a alternativa (a): *Hipótese:* $\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = \dfrac{4a_n}{2+a_n^2} \end{cases}$, *para* $n \geq 1$ *e para* $0 < a_1 = a < \sqrt{2}$*. E tese:* $a_n < \sqrt{2}$, *para todo* $n \geq 1$*.*

Alternativa (b): *Como* $a > 0$*, então o numerador e o denominador da fração são positivos. Logo,* $s > 0$*.*

Alternativa (c): *Temos* $0 < a < \sqrt{2}$*. Logo,*

$s^2 = \dfrac{16a^2}{(2+a^2)^2} = \dfrac{16a^2}{4+4a^2+a^4} = \dfrac{16a^2}{(2-a^2)^2+8a^2} < \dfrac{16a^2}{8a^2} = 2$, *pois* $(2-a^2) \neq 0$ *e, assim,* $(2-a^2)^2 + 8a^2 > 8a^2$*.*

[30] Disponibilizada pelo site: http://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/padrao_resposta/2011/MATEMATICA.pdf.

Alternativa (d): *Como a função raiz quadrada é uma função crescente, de (b) e (c) segue que* $0 < s < \sqrt{2}$.

Alternativa (e): *Tendo-se* $0 < a_n < \sqrt{2}$, *então, pelos itens (b) e (d),* $a_{n+1} < \sqrt{2}$.

Alternativa (f): *Para* $n = 1$, *tem-se que* $0 < a_1 < \sqrt{2}$, *portanto a propriedade é válida. Suponhamos que* $0 < a_n < \sqrt{2}$. *Pelo item (e), temos que* $0 < a_{n+1} = \dfrac{4a_n}{2 + a_n^2} < \sqrt{2}$, *para todo* $n \geq 1$.

Ao analisar as resoluções de todas as alternativas em relação a teoria utilizada, inferimos que há evidências do processo de *representação simbólica*, quando se utiliza:

- Notações algébricas que se referem às propriedades a serem demonstradas;
- Notações algébricas que se referem as condições de existência das propriedades.

Mudança de representações e tradução entre elas é outro processo evidenciado, pois para resolver as alternativas foi preciso interpretar o enunciado, traduzindo as informações para a linguagem matemática utilizada.

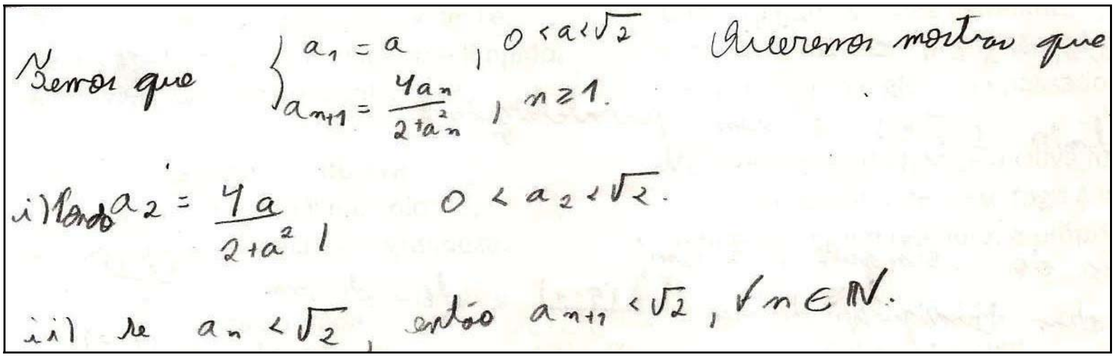
Outro processo mobilizado é o de *generalização*, pois ao longo das resoluções foram utilizados notações algébricas que representam a generalidade das propriedades a serem provadas.

E por fim, há indício do processo de *sintetização*, quando se utiliza conceitos da Teoria dos Números, como o Princípio de Indução Finita.

4.4.2 Resolução do Estudante E4

O estudante E4 resolveu as alternativas (a), (b) e (c). Na primeira alternativa, que consiste em escrever a hipótese e a tese da questão, E4 apresenta a seguinte resolução:

Figura 56 – Registro escrito presente na resolução da questão 04 do estudante E4



Temos que $\begin{cases} a_1 = a, & 0 < a < \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \dfrac{4a_n}{2+a_n^2}, & n \geq 1. \end{cases}$ Queremos mostrar que

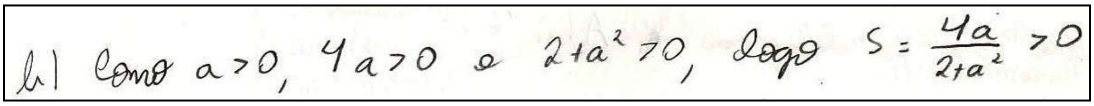
i) Sendo $a_2 = \dfrac{4a}{2+a^2}$, $0 < a_2 < \sqrt{2}$.

ii) se $a_n < \sqrt{2}$, então $a_{n+1} < \sqrt{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

O estudante E4 utiliza a hipótese da questão, a sequência numérica $\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = \dfrac{4a_n}{2+a_n^2} \end{cases}$, com $n \geq 1$ e para $0 < a < \sqrt{2}$, para obter a base da hipótese de indução, (descrito em (i)) assumindo $n = 1$, obtendo a_2. Em (ii), E4 descreve a tese assumindo que se a propriedade é verdadeira para $a_n < \sqrt{2}$ então será verdadeira para $a_{n+1} < \sqrt{2}$. O que podemos inferir é que o estudante em (i) confunde a hipótese do enunciado com a base da hipótese de indução, isto é, ao descrever o caso $n = 1$, E4 deveria garantir $a_1 < \sqrt{2}$ e não substituir $n = 1$ na hipótese da questão.

Para a alternativa (b), acompanhemos a figura abaixo:

Figura 57 – Registro escrito presente na resolução da questão 04 do estudante E4

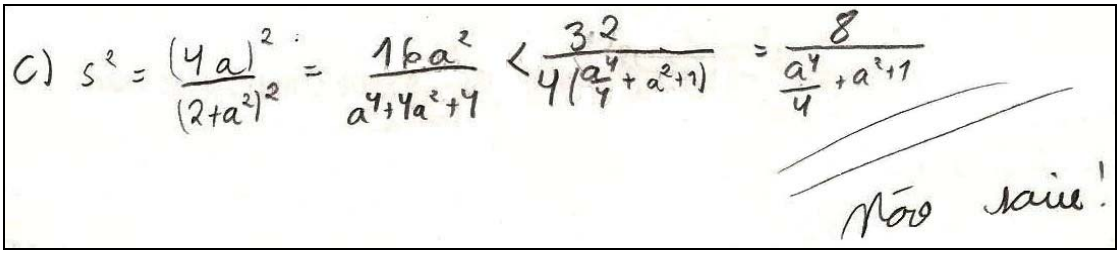


b) Como $a > 0$, $4a > 0$ e $2+a^2 > 0$, logo $S = \dfrac{4a}{2+a^2} > 0$

Como se deve provar que $s = \dfrac{4a}{2+a^2} > 0$, para todo $a > 0$, o estudante E4 prova que $4a > 0$, pois $a > 0$ e que $2 + a^2 > 0$, também devido à $a > 0$. Logo, $s > 0$. E4 apresenta uma demonstração simples e correta, o que nos faz inferir que compreende a questão.

Em relação a alternativa (c), vejamos a figura 58:

Figura 58 – Registro escrito presente na resolução da questão 04 do estudante E4



Deve-se provar que $s^2 < 2$, para todo $0 < a < \sqrt{2}$. Assim, E4 calcula s^2 obtendo $\frac{16a^2}{a^4+4a^2+4}$. Como $a < \sqrt{2}$, então $a^2 < 2$. Com isso, o estudante sabe e descreve que $16a^2 < 16 \cdot 2$, logo $\frac{16a^2}{a^4+4a^2+4} < \frac{16 \cdot 2}{a^4+4a^2+4} = \frac{32}{4 \cdot \left(\frac{a^4}{4}+a^2+1\right)}$. Além disso, E4 sabe que a condição $a^2 < 2$ não pode ser utilizada no denominador da fração de s^2. Mas o estudante não consegue resolver, chegando em $\frac{8}{\frac{a^4}{4}+a^2+1}$.

Ao analisar a resolução em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado, inferimos que há evidências de quatro processos. O primeiro se refere à *representação simbólica*, pois E4 apresenta:

- Notações algébricas que se referem às propriedades a serem demonstradas;
- Notações algébricas que se referem às condições de existência das propriedades.

Mudança de representações e tradução entre elas foi outro processo evidenciado, quando E4 compreende o enunciado da questão e das alternativas traduzindo as informações para sua resolução, em linguagem matemática, especialmente em notações algébricas.

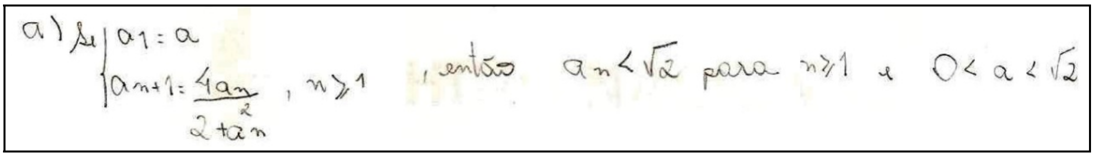
Outro processo manifestado é o de *generalização*, pois o estudante utiliza conceitos e propriedades genéricas ao longo de sua resolução, que valem para uma grande variedade de casos.

E por fim, o processo de *sintetização* foi evidenciado. O estudante E4 mobilizou alguns conceitos da Teoria dos Números, quando utiliza o Princípio da Indução Finita e condições de existência.

4.4.3 Resolução do Estudante E5

O estudante E5 resolveu as alternativas, (a), (b), (c) e (d). Esta foi a única questão que o estudante tentou resolver e mesmo assim mostrou não compreender o aspecto genérico da questão. Abaixo segue a resolução da alternativa (a):

Figura 59 – Registro escrito presente na resolução da questão 04 do estudante E5

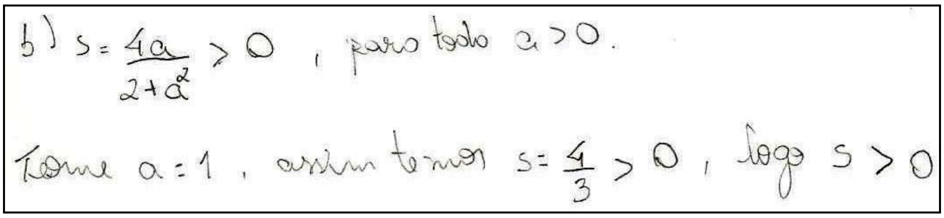


a) Se $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = \frac{4a_n}{2+a_n^2} \end{cases}$, $n \geq 1$, então $a_n < \sqrt{2}$ para $n \geq 1$ e $0 < a < \sqrt{2}$

E5 descreve que a hipótese da propriedade é a sequência numérica definida no enunciado, ou seja, $\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = \dfrac{4a_n}{2+a_n^2} \end{cases}$, tendo $n \geq 1$, e a tese sendo $a_n < \sqrt{2}$, para $n \geq 1$ e $0 < a < \sqrt{2}$. Consideramos estar correto, assim como o padrão de respostas do Enade.

Em relação à alternativa (b), o estudante desenvolve a seguinte resolução:

Figura 60 – Registro escrito presente na resolução da questão 04 do estudante E5



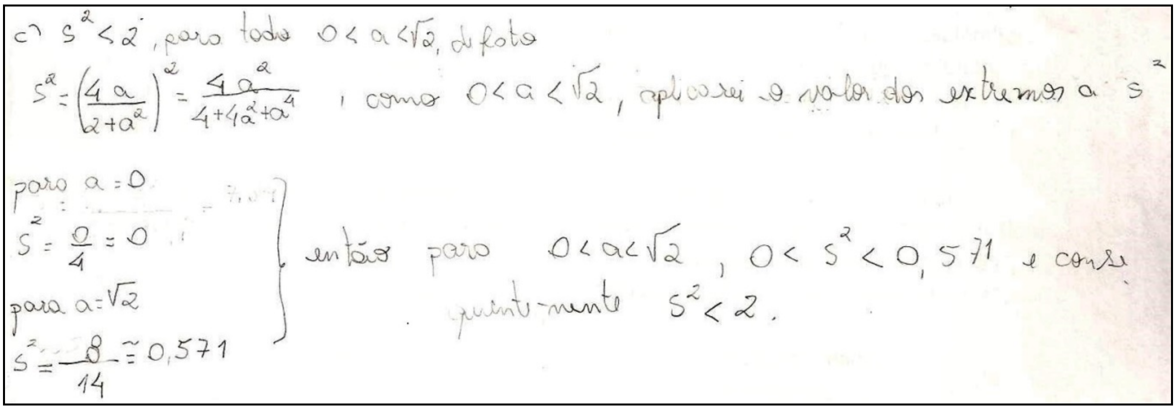
b) $s = \frac{4a}{2+a^2} > 0$, para todo $a > 0$.

Tome $a = 1$, assim temos $s = \frac{4}{3} > 0$, logo $s > 0$

Para provar que $s = \dfrac{4a}{2+a^2} > 0$, o estudante assume um valor para a, considerando que $a = 1$. Podemos inferir que E5 fez isso porque a condição para realizar a prova é que $a > 0$, então deve ter escolhido um valor maior que a. Esta resolução nos mostra que o estudante não possui uma maturidade em relação à natureza da questão.

Na resolução da alternativa (c), em que se deve provar que $s^2 < 2$, E5 a desenvolve do seguinte modo:

Figura 61 – Registro escrito presente na resolução da questão 04 do estudante E5


c) $s^2 < 2$, para todo $0 < a < \sqrt{2}$, de fato

$s^2 = \left(\frac{4a}{2+a^2}\right)^2 = \frac{4a^2}{4+4a^2+a^4}$, como $0 < a < \sqrt{2}$, aplicarei o valor dos extremos a s^2

para $a = 0$

$s^2 = \frac{0}{4} = 0$

para $a = \sqrt{2}$

$s^2 = \frac{8}{14} \cong 0{,}571$

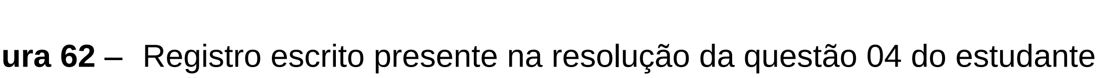
então para $0 < a < \sqrt{2}$, $0 < s^2 < 0{,}571$ e consequentemente $s^2 < 2$.

Ao calcular $\widehat{MB}$, o estudante não eleva ao quadrado o número quatro, obtendo $s^2 = \dfrac{4a^2}{4 + 4a^2 + a^4}$. Em seguida, assume valores que são substituídos em s^2, como $a = 0$ e $a = \sqrt{2}$, obtendo, respectivamente, $s^2 = 0$ e $s^2 = 0{,}571$. Com isso, E5 chega ao resultado $s^2 < 2$, pois $0 < s^2 < 0{,}571$.

O que podemos inferir nesta resolução, é que o estudante não tem domínio a respeito dos conceitos de função e de intervalo, dado por uma desigualdade. Com tais conceitos é possível encontrar o conjunto imagem da função $s^2(a)$. Ao atribuir valores para $a = 0$ e $a = \sqrt{2}$ poderia ajudar a encontrar a solução, porém este não é o caminho. Portanto, a resolução é incoerente.

E a última alternativa resolvida pelo estudante E5, que consiste em provar que $0 < s < \sqrt{2}$, pode ser visualizada na figura abaixo:

Figura 62 – Registro escrito presente na resolução da questão 04 do estudante E5


d) como $0 < s^2 < 0{,}571$, temos que $0 < s < \sqrt{0{,}571} \rightarrow 0 < s < 0{,}755 < \sqrt{2}$

O estudante utiliza os valores que foram encontrados na alternativa (c), $0 < s^2 < 0{,}571$, que leva a $0 < s < 0{,}755$. Como $0{,}755 < 2$, então $0 < s < \sqrt{2}$.

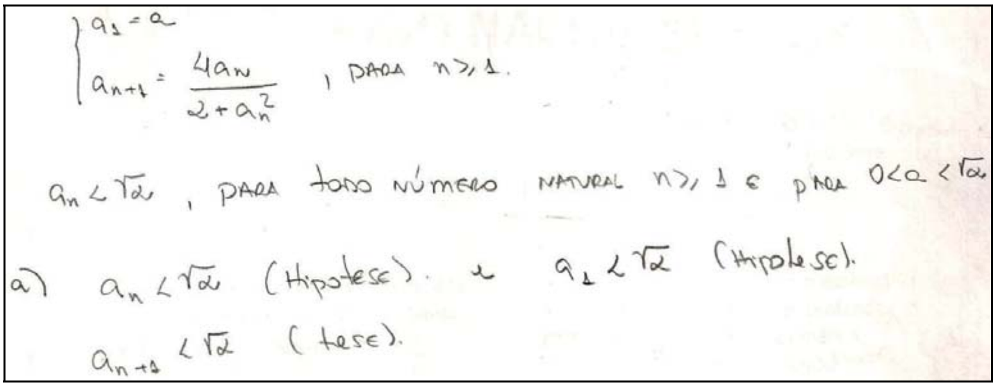
Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado, foi evidenciado o de *representação simbólica*, pois o estudante apresenta:

- Notações algébricas que se referem às propriedades a serem demonstradas;
- Notações algébricas que se referem às condições das propriedades.

4.4.4 Resolução do Estudante E7

O estudante E7 resolveu todas as alternativas. Para a primeira, podemos ver a resolução na figura 63:

Figura 63 – Registro escrito presente na resolução da questão 04 do estudante E7



$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = \dfrac{4a_n}{2+a_n^2} \end{cases}$, PARA $n \geq 1$.

$a_n < \sqrt{2}$, PARA TODO NÚMERO NATURAL $n \geq 1$ e PARA $0<a<\sqrt{2}$

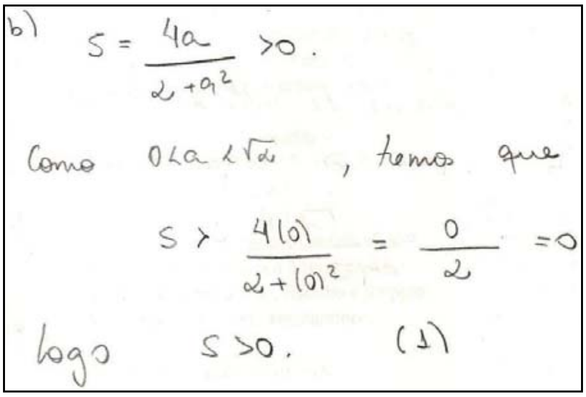
a) $a_n < \sqrt{2}$ (Hipótese). e $a_1 < \sqrt{2}$ (Hipótese).

$a_{n+1} < \sqrt{2}$ (tese).

A resposta desta alternativa foi baseada no Princípio de Indução Finita, pois E7 assumiu como hipóteses que: $a_1 < \sqrt{2}$ e $a_n < \sqrt{2}$; e como tese que $a_{n+1} < \sqrt{2}$. Podemos considerar como correto, já que no enunciado da questão pedia para utilizar tal princípio.

Para a alternativa (b), E7 apresenta a seguinte resolução:

Figura 64 – Registro escrito presente na resolução da questão 04 do estudante E7



b) $S = \dfrac{4a}{2+a^2} > 0$.

Como $0<a<\sqrt{2}$, temos que

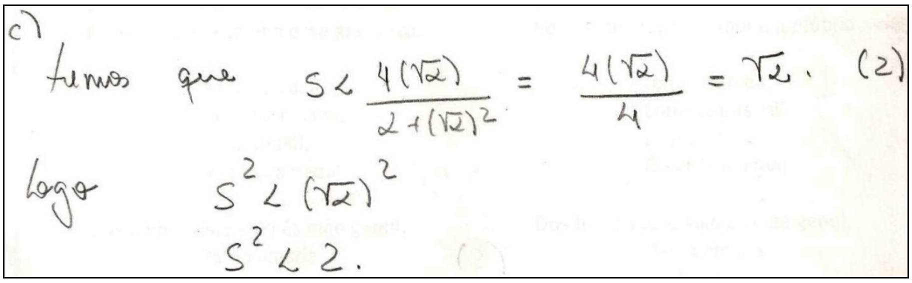
$S > \dfrac{4(0)}{2+(0)^2} = \dfrac{0}{2} = 0$

logo $S > 0$. (1)

O estudante deve provar que $s = \dfrac{4a}{2+a^2} > 0$. Como $a > 0$, E7 já afirma que $s > \dfrac{4 \cdot 0}{2+0^2} = 0$, sem ter feito um estudo a respeito dos termos $4a$ e $2+a^2$, considerando a condição $0 < a < \sqrt{2}$. Portanto, podemos concluir que a resolução é falha, pois não há garantia de que a divisão $\dfrac{4a}{2+a^2}$ é menor que zero, sem ter estudado os termos já citados.

Na figura abaixo, acompanhemos a resolução da alternativa (c):

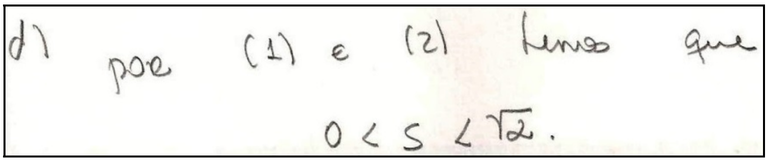
Figura 65 – Registro escrito presente na resolução da questão 04 do estudante E7



Deve ser provado que $s^2 > 0$. Do mesmo modo que o estudante substitui o valor de zero na alternativa (b), o faz nesta. Além disso, como $0 < a < \sqrt{2}$, E7 afirma que $s < \dfrac{4 \cdot \sqrt{2}}{2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$, mas se esquece de que não pode substituir no denominador. Mesmo tendo chegado à resposta correta, a resolução não está.

Em relação à alternativa (d), o estudante faz a resolução a seguir:

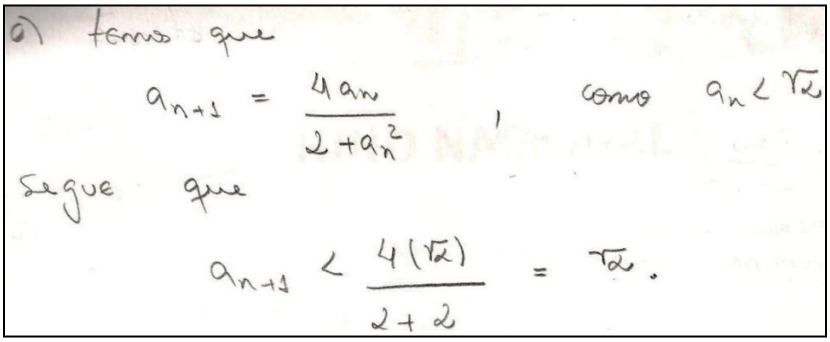
Figura 66 – Registro escrito presente na resolução da questão 04 do estudante E7



Com as condições que foram encontradas em (1), $s > 0$, e em (2), $s^2 < 2$, o estudante obtém $0 < s < \sqrt{2}$, resposta que consideramos estar correta.

Para a alternativa (e), E7 deveria supor que $a_n < \sqrt{2}$ para provar que $a_{n+1} < \sqrt{2}$. Esta alternativa é a mais importante, pois o estudante tem que utilizar tudo o que já foi provado. Vejamos a figura seguinte:

Figura 67 – Registro escrito presente na resolução da questão 04 do estudante E7



e) temos que

$$a_{n+1} = \frac{4a_n}{2+a_n^2}, \quad \text{como } a_n < \sqrt{2}$$

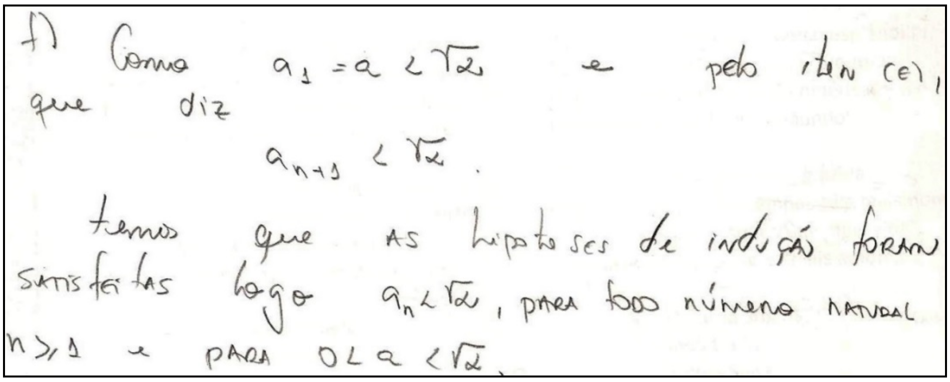
segue que

$$a_{n+1} < \frac{4(\sqrt{2})}{2+2} = \sqrt{2}.$$

E7 ao considerar que $a_n < \sqrt{2}$, obtém $a_{n+1} < \frac{4(\sqrt{2})}{2+2} = \sqrt{2}$, mas substitui $\sqrt{2}$ em a_n no denominador, o que mostra que o estudante não sabe que $a_n < \sqrt{2}$ equivale a $\frac{1}{a_n} > \sqrt{2}$. Coincidentemente, E7 chega à resposta correta.

Para a última alternativa, que se deve concluir a prova por indução, vejamos a figura 68:

Figura 68 – Registro escrito presente na resolução da questão 04 do estudante E7



f) Como $a_1 = a < \sqrt{2}$ e pelo item (e), que diz

$a_{n+1} < \sqrt{2}$.

temos que as hipóteses de indução foram satisfeitas logo $a_n < \sqrt{2}$, para todo número natural $n \geq 1$ e para $0 < a < \sqrt{2}$.

E7, utilizando o Princípio de Indução Finita, prova para $n = 1$, obtendo $a_1 = a < \sqrt{2}$, e como na resolução da alternativa (e) o estudante chega à $a_{n+1} < \sqrt{2}$, consegue satisfazer as hipóteses de indução, chegando a resposta correta.

Ao analisar esta resolução em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado, inferimos que há evidências dos seguintes processos. Um se refere ao de *representação simbólica*, pois o estudante apresenta:

- Notações algébricas que se referem às propriedades a serem demonstradas;
- Notações algébricas que se referem às condições das propriedades.

Outro processo evidenciado é o de *mudança de representações e tradução entre elas*. O estudante E7 interpreta o enunciado e o traduz para sua resolução, apresentando notações algébricas que se referem aos conceitos matemáticos utilizados.

Generalização é outro processo que foi manifestado. O estudante, em suas resoluções, utiliza notações algébricas, que representam a generalidade das propriedades a serem provadas.

E o quarto processo manifestado diz respeito ao de *sintetização*. O estudante utiliza conceitos da Teoria dos Números para resolver a questão, quando apresenta:

- Noção a respeito do Princípio de Indução Finita.

4.4.5 Agrupamentos Referentes as Resoluções da Questão 04 dos Estudantes E4, E5 E E7

Com as resoluções dos estudantes descritas e analisadas conforme os processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados, construímos os agrupamentos referentes as resoluções da questão 04 dos estudantes E4, E5 e E7. No quadro abaixo descreveremos tais agrupamentos:

Quadro 11 – Descrição dos agrupamentos relativos às resoluções da questão 04

		Agrupamentos	Estudantes
Representação	**A**	Utiliza notações para se referir a conceitos de sequência numérica e de condição de existência.	E4, E5, E7
	B	Apresenta cálculos referentes às sequências numéricas.	E4, E5, E7
	C	Escreve a hipótese e a tese da propriedade a ser demonstrada.	E4, E5, E7
	D	Retira informações do enunciado, fazendo ligações com as demais representações e notações referentes a conceitos de sequência numérica e condição de existência utilizadas na resolução.	E4, E5, E7, E11
Abstração	**E**	Evidencia um domínio referente a conceitos matemáticos, por meio do uso de: sequência numérica, condição de existência ou Princípio de Indução Finita.	E4, E7
	F	Utiliza notações algébricas que se referem a conceitos genéricos, como sequência numérica.	E4, E7

Fonte: do autor.

4.5 RESUMINDO OS PROCESSOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO EVIDENCIADOS

A seguir, apresentamos o quadro 12, que tem por objetivo sintetizar todos os processos do Pensamento Matemático Avançado que foram evidenciados nas resoluções dos estudantes, conforme já descritos nas análises anteriores:

Quadro 12 – Processos do PMA evidenciados pelos estudantes nas quatro questões do instrumento

PROCESSOS	Questão 01	Questão 02	Questão 03	Questão 04
Representação simbólica	E1, E2, E3, E4, E7, E8, E9	E2, E4, E7	E2, E3, E4, E6, E10, E11	E4, E5, E7
Visualização	-	-	E6, E10, E11	-
Mudança de representações e tradução entre elas	E1, E3, E7, E8	E2, E4	E4, E11	E4, E7
Modelação	-	E2, E4	-	-
Sintetização	E1, E3, E7, E8	E2, E4, E11	E3, E4, E11	E4, E7
Generalização	-	-	-	E4, E7

Fonte: do autor.

Com este quadro, podemos ter uma visão geral de quais processos foram evidenciados por estudante na resolução de cada questão. Os processos de *representação simbólica*, de *mudança de representações e tradução entre elas*, e o de *sintetização* foram manifestados nas resoluções das quatro questões. O processo de *visualização* foi manifestado somente na questão três, pois entendemos que este processo se refere ao modo que o estudante interpreta as informações do enunciado utilizando de desenhos (tabelas, gráficos, entre outros). O processo de *modelação* foi evidenciado em resoluções da questão dois. E o processo de *generalização* foi evidenciado na questão quatro.

Além disso, temos quais processos cada estudante manifestou em suas resoluções:

E1: representação simbólica, mudança de representações e tradução entre elas, e sintetização;

E2: representação simbólica, mudança de representações e tradução entre elas, modelação, sintetização;

E3: representação simbólica, mudança de representações e tradução entre elas, e sintetização;

E4: representação simbólica, mudança de representações e tradução entre elas, modelação, sintetização, generalização;

E5: representação simbólica;

E6: representação simbólica e visualização;

E7: representação simbólica, mudança de representações e tradução entre elas, sintetização e generalização;

E8: representação simbólica, mudança de representações e tradução entre elas, e sintetização;

E9: representação simbólica;

E10: representação simbólica e visualização;

E11: representação simbólica, visualização, mudança de representações e tradução entre elas, e sintetização.

E12 e E13 não resolveram nenhuma questão e, portanto, não apresentaram nenhum dos processos do PMA.

Conforme as análises destas resoluções, acreditamos que para um processo ser mobilizado durante o desenvolvimento da resolução de uma questão, além de depender do estudante, do conhecimento que possui, (entre outros fatores), a natureza da questão ainda influencia. Logo, podemos inferir que as questões escolhidas para constituir nosso instrumento de coletas de informações permitiram que os estudantes evidenciassem os processos descritos acima.

Outro fato que consideramos é que os processos evidenciados por cada estudante se referem a conceitos/objetos matemáticos específicos. Por exemplo, um processo de *generalização* foi manifestado quando se tratava do conceito de área de um paralelogramo, mas não quer dizer que o estudante que mobilizou tal processo o faça novamente para outro conceito/objeto matemático.

4.6 CATEGORIZAÇÃO

Depois de termos construído os agrupamentos (unidades de registro) a partir das resoluções de cada questão, em que fizemos algumas inferências e interpretações a respeito dos processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados, passaremos para a etapa de reagrupamento em categorias. Segundo Bardin (2004), a categorização fornece “[..] por condensação, uma representação simplificada dos dados brutos” (p.112).

Como o objetivo desta pesquisa é *descrever e discutir indícios/características dos processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados na produção escrita de estudantes de Matemática da Universidade Estadual de Londrina ao resolverem questões discursivas do Enade*, utilizaremos o processo de categorização em que o sistema de categorias é fornecido previamente, assim

> [...] repartem-se da melhor maneira possível os elementos, à medida que vão sendo encontrados. Este é o procedimento por ‘caixas’ [...] aplicável no caso da organização do material decorrer diretamente dos funcionamentos teóricos hipotéticos (BARDIN, 2004, p. 113).

Portanto, nossas categorias serão os próprios processos do Pensamento Matemático Avançado (somente os que foram evidenciados nas resoluções). A seguir, apresentamos o quadro 13 que tem por finalidade resumir as categorias que desta pesquisa:

Quadro 13 – Descrição das categorias referentes aos indícios/características dos processos do PMA em relação às resoluções dos estudantes

CATEGORIAS		
Representação	**Representação Simbólica**	*Utilizam de símbolos para representar algum conceito/objeto matemático.*
	Mudança de representações e tradução entre elas	*Transitam por distintas representações matemáticas de um mesmo conceito/objeto matemático.* *Traduzem as informações de enunciado para enunciado utilizando linguagem matemática.*
	Visualização	*Utilizam de alguma imagem simbólica para compreender/representar uma situação matemática.*
	Modelação	*Utilizam de uma função para modelar uma situação matemática.*
Abstração	**Sintetização**	*Utilizam de diversos conceitos/objetos matemáticos para resolver a questão.*
	Generalização	*Utilizam conceitos/objetos matemáticos que se referem a resultados genéricos.*

Fonte: do autor.

É importante destacar que estas categorias satisfazem a condição de *exclusão mútua*[31], pois cada agrupamento (unidades de registro) existe apenas em uma das divisões feitas.

Nos próximos itens, descreveremos as categorias em detalhes.

4.6.1 Categoria 1: Representação Simbólica

A primeira categoria se refere ao processo de *representação simbólica*. Conforme os seguintes agrupamentos das quatro questões, temos:

Questão 01:

- Utiliza notações para se referir a conceitos geométricos, como: segmentos, ângulos, triângulos, área de um triângulo ou área de um paralelogramo.
- Apresenta cálculos referentes às áreas de um triângulo e de um paralelogramo.

[31] De acordo com Bardin (2004), categorias boas devem satisfazer a esta propriedade.

Questão 02:

- Utiliza notações para se referir a conceitos geométricos, como: segmentos, triângulos, retângulo, paralelogramo, área de um triângulo, área de um retângulo, área de um paralelogramo ou vértice de uma parábola.
- Apresenta: cálculos referentes às áreas de um triângulo, de um retângulo e de um paralelogramo; cálculos utilizando o teorema de Pitágoras.

Questão 03:

- Utiliza notações para se referir a conceitos de análise combinatória e de probabilidade.
- Apresenta cálculos referentes à combinação, arranjo ou probabilidade.

Questão 04:

- Utiliza notações para se referir a conceitos de sequência numérica e de condição de existência.
- Apresenta cálculos referentes às sequências numéricas.

Todos estes agrupamentos se referem ao que Dreyfus (2002) assume como simbologia, ou seja, tais notações e cálculos representam um conceito matemático, sendo uma *representação simbólica*. Em cada questão (1 à 4) foi possível que os estudantes apresentassem várias notações, para se referir a diversos conceitos, como os de geometria, de análise combinatória e até mesmo aqueles que se referem às sequências numéricas.

Estes símbolos tornam explícito um conhecimento e “cada um de nós o relaciona com algo que temos em mente” (DREYFUS, 2002, p. 31: Versão nossa)[32]. Os estudantes, em suas resoluções, puderam explicitar os símbolos, cada um a sua maneira. O que pode acontecer, e é o mais provável, é que a maioria dos estudantes que conseguiu resolver chegue a notações parecidas, mas suas representações mentais podem diferenciar.

---

[32] Versão nossa de: “each one of us relates to something we have in mind”.

Assim, ao analisar todos estes agrupamentos que se referem ao processo de representação simbólica, podemos, de modo geral, dizer que os estudantes:

Utilizam de símbolos para representar algum conceito/objeto matemático.

Estamos considerando, nesta categoria, para aqueles estudantes que somente utilizaram de símbolos (pois ainda consideramos aqueles que apresentaram cálculos), que apresentar uma notação que se refere a algum conceito não significa que o estudante saiba manipulá-lo. Por exemplo, escrever uma sequência numérica não quer dizer que compreenda o conceito.

4.6.2 Categoria 2: Mudança de Representações e Tradução Entre Elas

A segunda categoria se refere a outro processo que foi evidenciado nas resoluções dos estudantes, que diz respeito à *mudança de representações e tradução entre elas*. Os agrupamentos que se encaixam nesta categoria, são:

Questão 01:

- Retira informações do enunciado, fazendo ligações entre a figura do paralelogramo ABCD (representação geométrica) com as demais representações e notações utilizadas na resolução.

Questão 02:

- Retira informações do enunciado, fazendo ligações entre a figura do retângulo ABCD circunscrito no paralelogramo IJKL (representação geométrica) com as demais representações e notações utilizadas na resolução.

Questão 03:

- Retira informações do enunciado fazendo ligações com as demais representações e notações referentes a conceitos de análise combinatória e probabilidade utilizadas na resolução.

Questão 04:

- Retira informações do enunciado, fazendo ligações com as demais representações e notações referentes a conceitos de sequência numérica e condição de existência utilizadas na resolução.

Entendemos que estes agrupamentos se referem ao processo de *mudança de representações e tradução entre elas*, pois os estudantes puderam por meio das representações, sejam elas simbólicas ou mentais, utilizar de modo flexível os conceitos matemáticos. Muitos estudantes apresentaram representações do tipo algébrico e aritmético, mas para isso foi preciso, primeiramente, gerar uma representação mental do tipo geométrica, por exemplo, a fim de compreender o enunciado da questão.

Consideramos, além disso, nesta categoria aqueles estudantes que compreenderam o objetivo da questão, ao resolvê-la chegando a uma resposta, não levando em conta se esta estava correta ou incorreta. Dreyfus (2002) afirma que é importante a transferência de informações de uma representação para outra. Para o autor, é necessário que o estudante construa um esquema mental para ocorrer a transferência de informações com o intuito de resolver a questão.

De um modo geral, podemos dizer que estes estudantes:

Transitam por distintas representações matemáticas de um mesmo conceito/objeto matemático.

Traduzem as informações de enunciado para enunciado utilizando linguagem matemática.

4.6.3 Categoria 3: Visualização

A terceira categoria diz respeito ao processo de *visualização*, manifestado somente em resoluções da questão três do instrumento de coleta de informações. Para esta categoria, temos o seguinte agrupamento:

Questão 03:

- Apresenta imagens para representar a situação do enunciado: cinco pessoas em um elevador de um prédio com oito andares.

Consideramos que para o estudante evidenciar este processo, deve, inicialmente, ter gerado uma representação mental da situação que o enunciado da questão sugere. O desenho apresentado nos registros escritos seria o modo que o estudante pensou a respeito da situação. Nem sempre podemos inferir a respeito deste processo, *visualização*, pois de acordo com as resoluções analisadas, as imagens mentais não são "transferidas" para o papel.

De acordo com Domingos (2003), a visualização nos oferece intuição e compreensão, em que podemos formar imagens, permitindo utilizá-las na descoberta de conceitos matemáticos.

Podemos de um modo geral, afirmar que estes estudantes:

Utilizam de alguma imagem simbólica para compreender/representar uma situação matemática.

4.6.4 Categoria 4: Modelação

A quarta categoria se refere ao processo de *modelação*, sendo evidenciado em resoluções da questão dois. O agrupamento que se insere nesta categoria, é:

Questão 02:

- Utiliza a incógnita x para obter a função que determina a área do paralelogramo IJKL.

Entendemos que este agrupamento diz respeito ao processo de *modelação*, pois, de acordo com Dreyfus (2002), o modelo encontrado, no caso da questão dois a função encontrada, "pode ser utilizado para estudar o comportamento do objeto" (DREYFUS, 2002, p. 34: Versão nossa)[33]. Os estudantes que apresentarem este processo puderam obter uma função que fornece a área de um paralelogramo. Para isso, tiveram que utilizar a estrutura matemática envolvida na figura plana.

De um modo geral, podemos afirmar que estes estudantes:

Utilizam de uma função para modelar uma situação matemática.

[33] Versão nossa de: "can then be used in order to study the behavior of the object".

4.6.5 Categoria 5: Sintetização

A quinta categoria se refere ao processo de *sintetização*, evidenciado em resoluções das quatro questões. Os agrupamentos que se encaixam nesta categoria seguem abaixo:

Questão 01:

- Evidencia um domínio referente a conceitos matemáticos representados pelas notações, por meio do uso de: propriedades de figuras planas (triângulo e paralelogramo), área de figuras planas (triângulo e paralelogramo), caso de semelhança de triângulos ou propriedades de triângulos semelhantes.

Questão 02:

- Evidencia um domínio referente a conceitos matemáticos representados pelas notações, por meio do uso de: propriedades de figuras planas (triângulo, retângulo e paralelogramo); cálculos das áreas de figuras planas (triângulo, retângulo e paralelogramo); cálculos utilizando o teorema de Pitágoras.

Questão 03:

- Evidencia um domínio referente a conceitos matemáticos, por meio do uso de: cálculos de arranjo (ou Princípio Multiplicativo); cálculos de combinação ou cálculos de probabilidade.

Questão 04:

- Evidencia um domínio referente a conceitos matemáticos, por meio do uso de: sequência numérica, condição de existência ou Princípio de Indução Finita.

Acreditamos que tais agrupamentos se referem ao processo de *sintetização*, pois os estudantes que o mobilizaram tiveram que associar e combinar conceitos matemáticos distintos, os quais Dreyfus (2002) nomeia de “partes”, para resolver a questão, tratado pelo autor como sendo o “todo”. Consideramos estes conceitos matemáticos como aqueles representados por notações/símbolos ou pela linguagem natural (o estudante descreve o conceito/objeto matemático que está utilizando).

Este processo ao ser evidenciado nos registros escritos nos faz inferir que os estudantes precisaram fazer uma busca pelos conceitos/objetos matemáticos apropriados para resolver a questão, relacionando as representações mentais de cada conceito em um esquema mental.

Para Dreyfus (2002), o processo de síntese ainda possibilita a compreensão da Matemática. Cremos que isto se deve ao fato de podermos relacionar diversos conceitos/objetos matemáticos. Nas resoluções, os estudantes puderam evidenciar uma relação com diversos conceitos a respeito de figuras planas, como o cálculo de áreas e caso de semelhança e congruência de triângulos; além disso houve a relação dos conceitos de arranjo e probabilidade; e outros com sequência numérica e princípio de Indução Finita.

De um modo geral, podemos afirmar que os estudantes que mobilizaram este processo,

Utilizam de diversos conceitos/objetos matemáticos para resolver a questão.

4.6.6 Categoria 6: Generalização

A sexta categoria se refere ao processo de *generalização* que foi manifestado em resoluções da questão 04. O agrupamento que se insere nesta categoria, é:

Questão 04:

- Utiliza notações algébricas que se referem a conceitos genéricos, como sequência numérica.

Entendemos que este agrupamento se refere ao processo de *generalização*, uma vez que os estudantes que o mobilizaram utilizaram notações e conceitos/objetos matemáticos “que estabelece um resultado para uma grande classe de casos” (DREYFUS, 2002, p.35: Versão nossa)[34]. Na questão quatro, ao fazer o estudo dos sinais das sequências numéricas, o estudante ainda deveria considerar as condições de existências, trabalhando apenas com resultados genéricos.

Podemos afirmar, que de um modo geral, os estudantes que mobilizaram este processo:

Utilizam conceitos/objetos matemáticos que se referem a resultados genéricos.

[34] Versão nossa de: “it establishes a result for a large class of cases”.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após o caminhar desta pesquisa, cabe aqui lembrarmos o objetivo que orientou este estudo: *descrever e discutir indícios/características dos processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados na produção escrita de estudantes de Matemática da Universidade Estadual de Londrina ao resolverem questões discursivas do Enade*.

E a pergunta que norteou esta investigação: que processos do Pensamento Matemático Avançado são evidenciados por estudantes de Matemática ao resolverem questões discursivas do Enade?

Para atingirmos tal objetivo e respondermos a pergunta, elaboramos um instrumento com quatro questões discursivas do Enade e o aplicamos em uma turma do quarto ano do curso de Matemática. Para análise dos registros escritos, recorremos à metodologia de Análise de Conteúdo, segundo Bardin (2004), em que por meio dos agrupamentos (unidades de registro) descrevemos uma síntese dos processos do Pensamento Matemático Avançado que foram evidenciados nas resoluções. As categorias, que foram definidas *a priori*, referem-se aos processos do PMA que foram mobilizados.

Com as descrições e análises de cada registro escrito dos participantes e das respostas[35] Padrão do Enade à luz do referencial teórico adotado, e da matriz[36] de competências e habilidades do Enade, foi possível chegarmos a algumas reflexões e conclusões acerca da problemática desta pesquisa.

Ao analisar a resposta Padrão do Enade da questão 01, pudemos inferir que houve mobilização dos processos de *representação simbólica*, *mudança e tradução de representações e tradução entre elas* e *sintetização* do Pensamento Matemático Avançado. Quando analisadas as resoluções da questão 01 dos estudantes participantes desta pesquisa, inferimos que estes mesmos processos foram evidenciados.

Para análise da resposta Padrão da questão 02, foram mobilizados os processos do Pensamento Matemático Avançado de *representação simbólica*,

---

[35] As análises das respostas Padrão do Enade foram descritas nas seções 4.1.1, 4.2.1, 4.3.1 e 4.4.1 do capítulo 4.
[36] Citada na página 17.

mudança de representações e tradução entre elas, *sintetização* e *modelação*. Em relação às análises das resoluções desta questão dos estudantes, inferimos que foram evidenciados os mesmos processos.

Da análise da reposta Padrão da questão 03, inferimos que houve mobilização dos processos do PMA de *representação simbólica*, *mudança de representações e tradução entre elas* e *sintetização*. Quando analisadas as resoluções dos estudantes da questão 03, além destes, pudemos inferir que foi evidenciado o processo de *visualização*.

Ao analisar a questão 04, tanto para a resposta Padrão do Enade quanto para as resoluções dos estudantes, inferimos que houve mobilização dos processos do Pensamento Matemático Avançado de *representação simbólica*, *mudança de representações e tradução entre elas*, *sintetização* e *generalização*.

Destas análises podemos concluir que os mesmos processos evidenciados nas respostas Padrão do Enade são mobilizados em algumas resoluções dos estudantes, com exceção da questão 03, em que os estudantes E6, E10 e E11 mobilizaram um processo a mais, o de *visualização*.

É importante salientar que os estudantes que mobilizaram os processos nas resoluções das quatro questões se referem a uma parte do total de participantes (treze) desta pesquisa: onze estudantes mobilizaram o processo de *representação simbólica*, três estudantes mobilizaram o processo de *visualização*, sete estudantes o de *mudança de representações e tradução entre elas*, dois estudantes o de *modelação*, sete estudantes o de *sintetização* e dois estudantes o processo de *generalização*.

Outro resultado decorrente das análises, é que as quatro questões do instrumento permitiram que os estudantes evidenciassem alguns processos, mas não todos. Isso se deve, ainda, a natureza da questão, e não somente do estudante. Mas, como os estudantes participantes da pesquisa são possíveis formandos, esperávamos que resolvessem todas as questões do instrumento, assim como mobilizassem processos do PMA, e consequentemente, apresentassem indícios de um Pensamento Matemático Avançado.

Ainda que estes processos tenham sido evidenciados, o que nos permitiu abordar a respeito de todos é que os mesmos foram mobilizados de maneira ocasional entre as resoluções das quatro questões pelos estudantes, não sendo mobilizados por apenas um estudante, por exemplo.

Dos treze estudantes, somente onze mobilizaram algum tipo de pensamento, nos fazendo concluir que a maioria não desenvolveu o Pensamento Matemático Avançado. O estudante E4 em seus registros escritos apresentou indícios de cinco processos do PMA; os estudantes E2, E7 e E11 mostraram indícios de quatro processos; os estudantes E1, E3 e E8 mobilizaram três processos do PMA; E6 e E10 dois processos e os estudantes E5 e E9 mobilizaram apenas um processo.

A resolução de cada estudante nos permite dizer que tais processos são evidenciados de maneiras diferentes, pois para cada um as notações/símbolos matemáticas(os) possuem significados individuais, bem como as relações que se podem constituir entre os diversos conceitos/objetos matemáticos.

Das análises que realizamos nesta pesquisa, achamos pertinente fazer uma relação entre aquilo que a prova do Enade pretende avaliar (matriz de competências e habilidades) com os resultados obtidos no processo de categorização. A seguir exibimos esta relação, descrevendo as características do Pensamento Matemático Avançado juntamente com o(s) elemento(s) da matriz de competências e habilidades do Enade, (BRASIL, 2005), em que acreditamos ser correspondente:

Quadro 14 – Relação entre as Características do Pensamento Matemático Avançado com os Elementos da matriz de competências e habilidades do Enade

Características do Pensamento Matemático Avançado	**Elementos da matriz de competências e habilidades do Enade**
Utilizam de símbolos para representar algum conceito/objeto matemático.	"*d) Utilizar diferentes representações para um conceito matemático*" (BRASIL, 2005, p.63).
Transitam por distintas representações matemáticas de um mesmo conceito/objeto matemático. Traduzem as informações de enunciado para enunciado utilizando linguagem matemática.	"*d) Utilizar diferentes representações para um conceito matemático, transitando por representações simbólicas, gráficas e numéricas, entre outras*"[37]; "*f) Interpretar e utilizar a linguagem matemática com a precisão e o rigor que lhe são inerentes*"[38]; "*g) Ser capaz de ler e interpretar textos*"[39].
Utilizam de alguma imagem simbólica para compreender/representar uma situação matemática.	"*d) Utilizar diferentes representações para um conceito matemático, transitando por representações simbólicas, gráficas e numéricas, entre outras*"[40].
Utilizam de uma função para modelar uma situação matemática.	"*c) Utilizar conceitos e procedimentos matemáticos para analisar dados, elaborar modelos, resolver problemas, e interpretar suas soluções*"[41].
Utilizam de diversos conceitos/objetos matemáticos para resolver a questão.	"*a) Estabelecer relações entre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos da matemática*"[42].
Utilizam conceitos/objetos matemáticos que se referem a resultados genéricos.	"*b) Formular conjecturas e generalizações, elaborar argumentações e demonstrações matemáticas e examinar consequências do uso de diferentes definições*"[43].

Fonte: do autor.

[37] Ibidem.
[38] Ibidem.
[39] Ibidem.
[40] Ibidem.
[41] Ibidem.
[42] Ibidem.
[43] Ibidem.

Enfim, corroboramos com os autores estudados nesta investigação que os processos do PMA se fazem importantes, os quais permitem que os estudantes compreendam uma gama de conceitos matemáticos. Neste sentido, Dreyfus (2002) afirma que tais processos não acontecem por si mesmos e nem sempre são conscientes por parte do estudante. Sendo assim, acreditamos que os professores ainda são responsáveis por “provocar” o desenvolvimento dos processos do PMA na formação escolar dos estudantes.

Uma maneira de os professores oportunizarem o desenvolvimento dos processos do Pensamento Matemático Avançado é por meio das fases[44] de aprendizagem matemática, segundo Dreyfus (2002) (fase i) utiliza uma única representação; fase ii) utiliza várias representações em paralelo; fase iii) estabelece ligações entre as representações paralelas; fase iv) integra as representações e flexibiliza a mudança entre elas).

Cabe ressaltar que ao longo desta pesquisa buscamos novos questionamentos acerca do ensino e da aprendizagem de estudantes dos cursos de Licenciatura em Matemática. Esperamos que os resultados e inquietude desencadeados nesta investigação possam motivar novas pesquisas a respeito do Pensamento Matemático Avançado, sobretudo, como professores podem “motivar e provocar” estes processos em seus alunos.

[44] Tais fases não foram utilizadas para análise das resoluções dos estudantes, uma vez que não participamos do processo de aprendizagem dos mesmos, já que nosso objetivo era estudar o pensamento matemático avançado que os estudantes pudessem mobilizar.

REFERÊNCIAS

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. 3. ed. Lisboa: Edições 70, 2004.

BARREYRO, Gladys Beatriz. Do Provão ao SINAES: o processo de construção de um novo modelo de avaliação da educação superior. **Avaliação**: revista da Rede de Avaliação Institucional da Educação Superior, Campinas, SP, v.8, n.4, p.37-49, 2004.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BRANDEMBERG, João Cláudio. **Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo**. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

BRASIL. Decreto nº 2.026, de 10 de outubro de 1996. Estabelece procedimentos para o processo de avaliação de cursos e instituições de ensino superior. **Casa Civil**, Brasília, DF, 1996. Disponível em: <http:/www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto/Antigos/D2026.htm>. Acesso em: 12 jan. 2012.

BRASIL. Lei nº.9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil**, Brasília, DF, 23 dez. 1996.

DOMINGOS, António. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no ensino superior**. 2003. Tese. (Doutorado em Ciências de Educação) - Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova Lisboa, Lisboa, 2003.

DREYFUS, Tommy. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, David. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer. 2002. p. 25-41.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio. Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**, Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação – Unicamp. v. 4, n. 1, p.78-91. Campinas: Cortez Editora.

GOUVEIA, Andréa Barbosa, SILVA, Antonio Almeida, SILVEIRA, Adriana A. Dragone, JACOMINI, Márcia Aparecida, BRAZ, Terezinha Pereira. Trajetória da Avaliação da Educação Superior no Brasil: singularidades e contradições. **Estudos em Avaliação Educacional**: revista da Fundação Carlos Chagas, São Paulo, v. 16, n. 31, p. 101-132, jan./jun. 2005.

GRAY, Eddie; PINTO, Marcia; PITTA, Demetria; TALL, David. Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 38, n. 1-3, p. 111-133.1999.

HAREL, Guershon; SELDEN, Annie; SELDEN, John. Advanced mathematical thinking. In: GUTIÉRREZ, Angel; BOERO, Paolo. **Handbook of research on the**

psychology of mathematics education: Past, present and future. Rotterdam: Sense Publishers, 2006, p.147-172.

PINTO, Márcia Maria Fusaro. Educação Matemática no Ensino Superior. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n.36, dez. 2002.

POLIDORI, Marlis Morosini; ARAUJO, Claisy M. Marinho; BARREYRO, Gladys Beatriz. SINAES: Perspectivas e desafios na avaliação da educação superior brasileira. **Ensaio**: avaliação políticas públicas. Educação, Rio de Janeiro, v.14, n.53, p. 425-436, out/dez. 2006.

RESNICK, Lauren B. **Education and learning to think**. Washington: National Academy Press, 1987.

TALL, David. The psychology of advanced mathematical thinking. In: ______, **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer. 2002. p. 3-21.

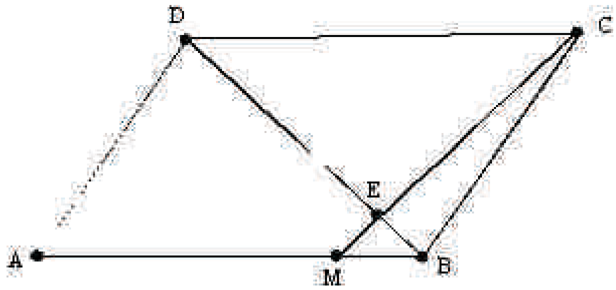
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA. Resolução CEPE 0230/2009. **Reformula o Projeto Pedagógico do Curso de Matemática – Habilitação: Licenciatura, a ser implantado a partir do ano letivo de 2010**. Londrina, 2009. Disponível em: <http://www.uel.br/prograd/docs_prograd/resolucoes/2009/resolucao_229_09.pdf>. Acesso em 29 jul. 2013.

ANEXOS

ANEXO A

Instrumento Piloto

Questão 01 – Em um paralelogramo ABCD, considere M o ponto da base AB tal que $\overline{MB} = \frac{1}{4}\overline{AB}$ e E o ponto de interseção do segmento CM com a diagonal BD, conforme figura a seguir.

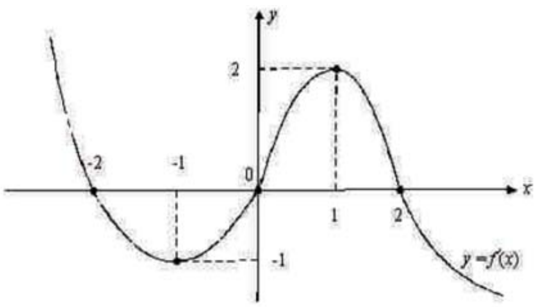


Prove, detalhadamente e de forma organizada, que a área do triângulo BME é igual a $\frac{1}{40}$ da área do paralelogramo ABCD.

No desenvolvimento de sua demonstração, utilize os seguintes fatos, justificando-os:

- os triângulos BME e DCE são semelhantes;
- a altura do triângulo BME, relativa à base BM, é igual a $\frac{1}{4}$ da altura do triângulo DCE relativa à base DC.

Questão 02 – Considere *f: R→R* uma função derivável até a ordem 2, pelo menos, tal que *f(-2)=0, f(-1)=-1, f(0)=-2, f(1)=1* e *f(2)=2*. O gráfico da derivada de primeira ordem, *f´*, tem o aspecto apresentado abaixo.



Com base nos valores dados para a função *f* e no gráfico de sua derivada *f´*, faça o que se pede nos itens a seguir.

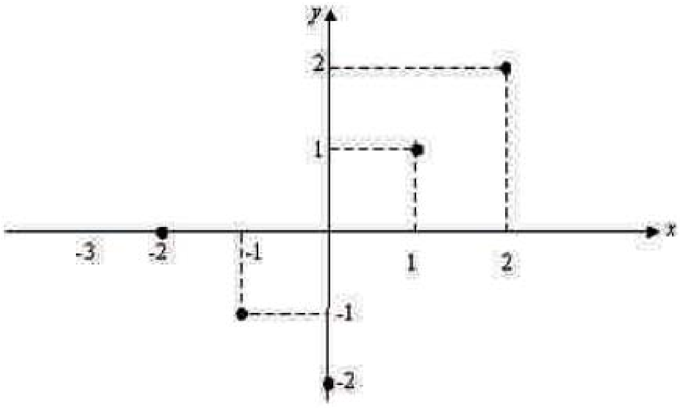
a) Na reta abaixo, represente com setas (→) ou (←) os intervalos em que a função *f* é crescente ou decrescente, respectivamente.

b) Calcule: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

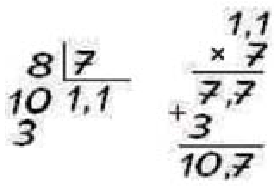
c) Quais são os pontos de máximo e de mínimo relativos (locais) de f?

d) Quais são os pontos de inflexão de f?

e) No sistema de eixos coordenados abaixo, faça um esboço do gráfico da função f.



Questão 03 – Em uma avaliação de matemática de 5ª série, a situação proposta exigia que fosse calculado o quociente entre 8 e 7. O professor observou que uma aluna registrou o seguinte.



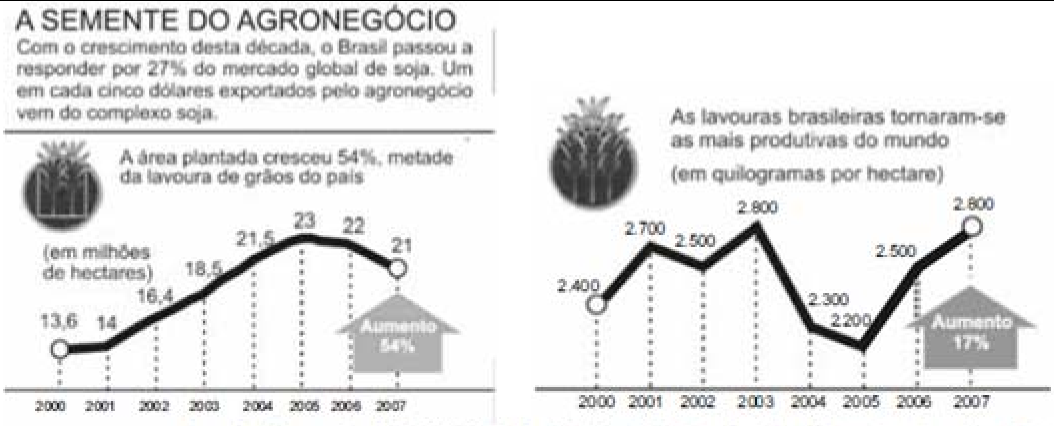
A partir da análise dessa situação, responda as seguintes questões:

a) Qual o erro da aluna na sua produção matemática?

b) Que fatores pedagógicos fazem com que tal erro seja gerado?

c) Que tipo de intervenção pode realizar o professor para que essa aluna reflita sobre o erro cometido e supere tal dificuldade?

Questão 04 – Os gráficos abaixo mostram informações a respeito da área plantada e da produtividade das lavouras brasileiras de soja com relação as safras de 2000 a 2007.



A proteína do campo. *In*: **Veja**, 23/7/2008, p. 79 e Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento (com adaptações).

Com base nessas informações, resolva o que se pede nos itens a seguir e transcreva suas respostas para o Caderno de Respostas, nos locais devidamente indicados.

a) Considere I = área plantada (em milhões de ha), II = produtividade (em kg/ha) e III= produção total de soja (em milhões de toneladas), preencha a tabela abaixo.

ano	I	II	III
2000			
2001			
2002			
2003			
2004			
2005			
2006			
2007			

b) Faça o esboço do "gráfico de linhas" que representa a quantidade de quilogramas de soja produzidos no Brasil, em milhões de toneladas, no período de 2000 a 2007. Nomeie as variáveis nos eixos de coordenadas e de um título adequado para seu gráfico.

Questão 05 – Considere a sequencia numérica definida por

$$a_1 = \sqrt{a}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{a + \sqrt{a_n}}$$, para *n* = 1, 2, 3, ...

Usando o princípio de indução finita, mostre que $a_n < a$ para todo $n \geq 1$ e $a \geq 2$.

Para isso, resolva o que se pede nos itens a seguir e transcreva suas respostas para o Caderno de Respostas, nos locais devidamente indicados.

a) Escreva a hipótese e a tese da propriedade a ser demonstrada.

b) Prove que $a(a-1) > 0$ para $a \geq 2$.

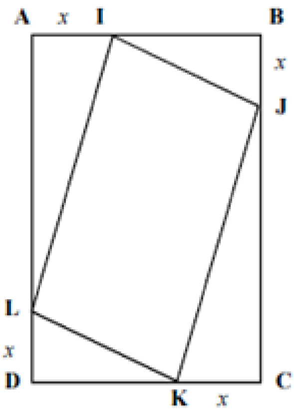
c) Mostre que $\sqrt{a} < a$, para todo $a \geq 2$.

d) Supondo que $a_n < a$, prove que $a_{n+1} < \sqrt{2a}$.

e) Mostre que $a_{n+1} < a$.

f) A partir dos passos anteriores, conclua a prova por indução.

Questão 06 – No retângulo ABCD ao lado, o lado AB mede 7 cm e o lado AD mede 9 cm. Os pontos I, J, K e L foram marcados sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, de modo que os segmentos AI, BJ, CK e DL são congruentes.



Com base nessa situação, faça o que se pede nos itens a seguir e transcreva suas respostas para o Caderno de Respostas, nos locais devidamente indicados.

a) Demonstre que o quadrilátero IJKL é um paralelogramo.

b) Escreva a função que fornece a área do paralelogramo IJKL em função de x e determine, caso existam, seus pontos de máximo de mínimo.

c) Na resolução desse problema, que conceitos matemáticos podem ser explorados com alunos do ensino fundamental e do ensino médio?

Questão 07 – Em um prédio de 8 andares, 5 pessoas aguardam o elevador no andar térreo. Considere que elas entrarão no elevador e sairão, de maneira aleatória, nos andares de 1 a 8.

Com base nessa situação, faça o que se pede nos itens a seguir, apresentando o procedimento de cálculo utilizado na sua resolução.

a) Calcule a probabilidade de essas pessoas descerem em andares diferentes.

b) Calcule a probabilidade de duas ou mais pessoas descerem em um mesmo andar.

Questão 08 – Considere a sequencia numérica definida por

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = \dfrac{4a_n}{2+a_n^2} \end{cases}, \text{ para } n \geq 1.$$

Use o princípio de indução finita e mostre que $a_n < \sqrt{2}$, para todo número natural $n \geq 1$ e para $0 < a < \sqrt{2}$, seguindo os passos indicados nos itens a seguir:

a) escreva a hipótese e a tese da propriedade a ser demonstrada;

b) mostre que $s = \dfrac{4a}{2+a^2} > 0$, para todo $a > 0$;

c) prove que $s^2 < 2$, para todo $0 < a < \sqrt{2}$;

d) mostre que $0 < s < \sqrt{2}$;

e) suponha que $a_n < \sqrt{2}$ e prove que $a_{n+!} < \sqrt{2}$;

f) conclua a prova por indução.

Questão 09 – O Teorema do Valor Intermediário é uma proposição muito importante da análise matemática, com inúmeras aplicações teóricas e práticas. Uma demonstração analítica desse teorema foi feita pelo matemático Bernard Bolzano [1781-1848]. Nesse contexto, faça o que se pede nos itens a seguir:

a) Enuncie o Teorema do Valor Intermediário para funções reais de uma variável real;

b) Resolva a seguinte situação-problema.

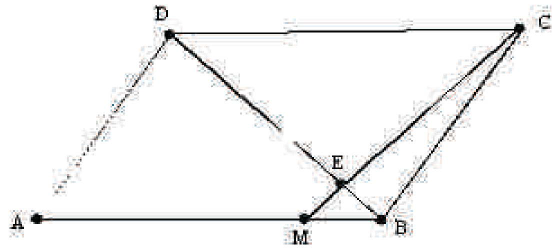
O vencedor da corrida de São Silvestre-2010 foi o brasileiro Mailson Gomes dos Santos, que fez o percurso de 15 km em 44 min e 7 seg. Prove que, em pelo menos dois momentos distintos da corrida, a velocidade instantânea de Mailson era de 5 metros por segundo.

c) Descreva uma situação real que pode ser modelada por meio de uma função contínua *f*, definida em um intervalo [a,b], relacionando duas grandezas *x* e *y*, tal que $k \in (a,b)$ com $f(x) \neq f(k)$, para todo $x \in (a,b)$, $x \neq k$. Justifique sua resposta.

ANEXO B

Instrumento

Questão 01 – Em um paralelogramo ABCD, considere M o ponto da base AB tal que $\overline{MB} = \frac{1}{4}\overline{AB}$ e E o ponto de interseção do segmento CM com a diagonal BD, conforme figura a seguir.

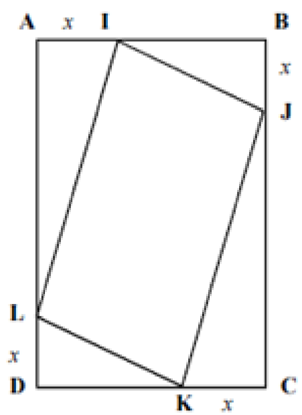


Prove, detalhadamente e de forma organizada, que a área do triângulo BME é igual a $\frac{1}{40}$ da área do paralelogramo ABCD.

No desenvolvimento de sua demonstração, utilize os seguintes fatos, justificando-os:

- os triângulos BME e DCE são semelhantes;
- a altura do triângulo BME, relativa à base BM, é igual a $\frac{1}{4}$ da altura do triângulo DCE relativa à base DC.

Questão 02 – No retângulo ABCD ao lado, o lado AB mede 7 cm e o lado AD mede 9 cm. Os pontos I, J, K e L foram marcados sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, de modo que os segmentos AI, BJ, CK e DL são congruentes.



Com base nessa situação, faça o que se pede nos itens a seguir e transcreva suas respostas para o Caderno de Respostas, nos locais devidamente indicados.

a) Demonstre que o quadrilátero IJKL é um paralelogramo.

b) Escreva a função que fornece a área do paralelogramo IJKL em função de x e determine, caso existam, seus pontos de máximo de mínimo.

c) Na resolução desse problema, que conceitos matemáticos podem ser explorados com alunos do ensino fundamental e do ensino médio?

Questão 03 – Em um prédio de 8 andares, 5 pessoas aguardam o elevador no andar térreo. Considere que elas entrarão no elevador e sairão, de maneira aleatória, nos andares de 1 a 8.

Com base nessa situação, faça o que se pede nos itens a seguir, apresentando o procedimento de cálculo utilizado na sua resolução.

a) Calcule a probabilidade de essas pessoas descerem em andares diferentes.

b) Calcule a probabilidade de duas ou mais pessoas descerem em um mesmo andar.

Questão 04 – Considere a sequencia numérica definida por

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = \dfrac{4a_n}{2+a_n^2} \end{cases} \text{, para } n \geq 1.$$

Use o princípio de indução finita e mostre que $a_n < \sqrt{2}$, para todo número natural $n \geq 1$ e para $0 < a < \sqrt{2}$, seguindo os passos indicados nos itens a seguir:

a) escreva a hipótese e a tese da propriedade a ser demonstrada;

b) mostre que $s = \dfrac{4a}{2+a^2} > 0$, para todo $a > 0$;

c) prove que $s^2 < 2$, para todo $0 < a < \sqrt{2}$;

d) mostre que $0 < s < \sqrt{2}$;

e) suponha que $a_n < \sqrt{2}$ e prove que $a_{n+!} < \sqrt{2}$;

f) conclua a prova por indução.

ANEXO C

Termo de Consentimento

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ____,
portador do R.G. ______________________ autorizo por meio do presente termo, a estudante **Laís Cristina Viel Gereti**, do mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL, a utilizar, integralmente ou em partes, sem restrições de prazo, meus registros escritos para fins de pesquisa acadêmica, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que estará garantido meu direito ao anonimato.

Data: _____/______/2013

____

Assinatura