Universidade Estadual de Londrina

CRISTIANO FORSTER

Um olhar realístico para tarefas de função afim em livros didáticos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Doutor.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Regina Luzia Corio de Buriasco.

Londrina
2020

CRISTIANO FORSTER

Um olhar realístico para tarefas de função afim em livros didáticos

Tese apresentadada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Doutor.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Regina Luzia Corio de Buriasco.

Londrina
2020

CRISTIANO FORSTER

Um olhar realístico para tarefas de função afim em livros didáticos

Tese apresentadada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Doutor.

BANCA EXAMINADORA

____

Profª. Drª. Regina Luzia Corio de Buriasco (Orientadora)
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____

Profª. Drª. Marcele Tavares Mendes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

____

Profª. Drª. Márcia Cristina de C. T. Cyrino
Universidade Estadual de Londrina – UEL

____

Prof. Dr. Marcos Antônio Gonçalves Júnior
Universidade Federal de Goiás

____

Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Londrina, 17 de fevereiro de 2020.

Aos meus pais (Noly e Marlene)

e a minha orientadora (Regina)

por todo amor e carinho dedicados

a mim.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por estar sempre comigo.

À minha família, em especial aos meus pais, por todo carinho, incentivos e momentos felizes que passamos juntos.

À professora Regina, por ter aceitado me orientar neste trabalho e ter dado abertura para construirmos uma bela amizade. Não esquecerei seus eternos ensinamentos, seus preciosos conselhos e sua inestimável confiança.

Aos professores, Marcele Tavares Mendes, Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino, Marcos Antonio Gonçalves Junior e Rodolfo Eduardo Vertuan por aceitarem fazer parte da minha banca e por todas as considerações apresentadas.

Aos membros do GEPEMA, em especial àqueles que estiveram mais próximos de mim nesse período, pela amizade, pela convivência prazerosa e pelos muitos momentos de aprendizagem.

À CAPES pelo auxílio financeiro que me foi concedido nesse período.

Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram para que eu pudesse chegar até aqui e concluir esta etapa.

FORSTER, Cristiano. **Um olhar realístico para tarefas de função afim em livros didáticos.** 2020. 112f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo analisar e discutir tarefas matemáticas contidas no capítulo de Função Afim dos livros didáticos do 1º. Ano do Ensino Médio aprovados pelo PNLD de 2018, com base na abordagem ao ensino de matemática denominada Educação Matemática Realística. Nessa abordagem teórica, a aprendizagem matemática está intimamente ligada ao processo de matematizar a realidade, em que os alunos são confrontados por situações realísticas que podem gerar tarefas contextualmente ricas. Para alcançar os objetivos da pesquisa, essas tarefas, inicialmente, foram agrupadas por semelhança de acordo com o modelo que as descrevem. A partir desses agrupamentos, feitas considerações da maneira pela qual poderiam ser conduzidas intervenções (na forma da abordagem e/ou no seu enunciado) que resultassem em um modo de trabalho voltado para o que é defendido pelos princípios da Educação Matemática Realística. Foi possível reconhecer que a maioria das tarefas encontradas nos livros analisados apresenta características do nível de reprodução, ou seja, exigem apenas procedimentos rotineiros já apresentados pelo professor durante as aulas. Além disso, pelo menos 88% dessas tarefas fornecem exatamente as informações necessárias para resolvê-las sem dar oportunidade para os alunos selecionarem informações relevantes por si mesmos. Menos de 25% podem ser consideradas como tarefas de conexão e menos de 5% são tarefas de reflexão, consideradas tarefas com o nível mais alto de demanda cognitiva. As considerações geradas por este estudo foram feitas para possibilitar que as tarefas sejam implementadas de modo a colocar os alunos em movimento de aprendizagem, esperando que eles assumam um papel ativo no seu processo de aprender.

Palavras-chave: Educação Matemática Realística. Função Afim. Tarefas de Livros Didáticos de Matemática. Oportunidade de Aprendizagem.

FORSTER, Cristiano. **A realistic look at related function tasks in textbooks**. 2020. 112 f. Thesis (Sciences and Mathematics Education Post-Graduate Program) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

ABSTRACT

This research aimed to analyze and discuss math tasks contained in the Affine Function chapter of the 1st year High School textbooks approved by the PNLD 2018, based on the approach to teaching mathematics denominated Realistic Mathematics Education. In this theoretical approach, mathematics learning is closely linked to the process of mathematizing reality, in which students are confronted by realistic situations that can generate contextually rich tasks. To achieve the research objectives, these tasks were initially grouped by similarity according to the model that describes them. From these groupings, considerations were made on the way in which interventions could be conducted (in the form of the approach and/or in its statement) that would result in a way of working focused on what is defended by the principles of Realistic Mathematical Education. It was possible to recognize that most of the tasks found in the analyzed books presents characteristics of the level of reproduction, that is, require only routine procedures already presented by the teacher during classes. Furthermore, at least 88% of these tasks provide exactly the information needed to solve them without giving students an opportunity to select relevant information by themselves. Less than 25% can be considered as connection tasks and less than 5% are reflection tasks, considered tasks with the highest level of cognitive demand. The considerations generated by this study were made to enable the tasks to be implemented in a way that puts students in a learning movement, expecting them take on an active role in their learning process.

Key words: Realistic Mathematics Education. Affine Function. Mathematics Textbook Tasks. Learning opportunity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PECEM – iniciou suas atividades no ano de 2002 e, no ano de 2004, o GEPEMA – Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação - iniciou oficialmente suas atividades. Instituído no Departamento de Matemática da UEL – Universidade Estadual de Londrina - o grupo conta com alunos de Graduação e de Pós-Graduação que desenvolvem seus estudos e pesquisas sob a coordenação da Profª Drª Regina Luzia Corio de Buriasco e com professores pesquisadores que já concluíram a Pós-Graduação e que desenvolvem suas pesquisas com temas relacionados aos de interesse do grupo. No ano de 2019, o GEPEMA completou 15 anos de existência e possui uma quantidade expressiva de trabalhos publicados na área de Educação Matemática, incluindo dissertações e teses.

Com as investigações já realizadas pelos integrantes do GEPEMA, foi possível apresentar a avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem, conhecer como estudantes e professores dos diferentes níveis de escolaridade lidam com questões rotineiras e não rotineiras de matemática por meio da análise da produção escrita[1]; estudar os pressupostos da Educação Matemática Realística (RME) e conhecer aspectos relacionados ao processo de matematização; trabalhar com diferentes instrumentos de avaliação da aprendizagem escolar, tais como a Prova-Escrita-em-Fases, a Prova-Escrita-com-Cola.

De certo modo, pode-se considerar que as primeiras ideias presentes no grupo já se apresentavam na dissertação de mestrado da coordenadora, na qual Buriasco (1988) discutiu a forma pela qual a matemática de fora da escola pode participar da construção da matemática de dentro da

---

[1] A análise da produção escrita utilizada no GEPEMA como estratégia de investigação, desde 2005, permite obter informações acerca dos processos de ensino e de aprendizagem em matemática. Considerando que tem sido apontada nessas investigações como uma alternativa para a (re)orientação da avaliação escolar e (re)orientação da prática pedagógica e como uma possibilidade para a implementação da avaliação numa perspectiva de prática de investigação, pode-se afirmar que a análise da produção escrita em matemática pode ser considerada como uma estratégia de avaliação (SANTOS, 2014, p.22).

escola de alunos do 1ª série do antigo 1º Grau sem nenhuma escolarização anterior. Nesse estudo, foi “excluída toda avaliação em termos de respostas certas ou não” (BURIASCO, 1988, p. 6), enfatizando a ideia da avaliação como um meio de revelar o que o aluno sabe até aquele momento. Em 1999, Buriasco defendeu a tese intitulada “Avaliação em Matemática: um estudo das respostas de alunos e professores”. Nessa pesquisa, buscou evidenciar como alunos e professores lidaram com as questões de matemática da prova da 8ª série do Programa de Avaliação do Sistema Educacional do Paraná – AVA – de 1997.

Os primeiros estudos realizados no GEPEMA abordavam questões ligadas ao modo como os alunos lidavam com conceitos matemáticos considerados básicos; com os recursos de avaliação da aprendizagem que cumprem tanto a função de avaliação quanto a função de orientação dos processos de ensino e de aprendizagem; com a compreensão da prática do professor relacionada aos aspectos de avaliação e com as estratégias metodológicas que acredita utilizar em sala de aula.

Oito dissertações foram produzidas entre os anos 2003 e 2007, como mostra o Quadro 9 (Apêndice A). Essas investigações analisaram a produção escrita de estudantes e professores dos diferentes níveis de escolaridade presente em questões de matemática, consideradas rotineiras[2], da prova da AVA-2002. De forma sintética, pode-se dizer que nesses trabalhos a avaliação é tomada como um dos fios condutores do trabalho do professor e dos alunos.

A partir do ano de 2006, mantendo ainda o foco dos estudos na análise da produção escrita, o GEPEMA passou a estudar a produção escrita de alunos, professores e estudantes de Licenciatura em Matemática em questões consideradas não-rotineiras[3]. As questões desses estudos fizeram parte de provas do PISA[4] e foram escolhidas por serem consideradas já validadas. Devido às referências encontradas em documentos do PISA, foi iniciado o estudo da abordagem para o ensino de matemática chamada Educação

---

[2] No GEPEMA considera-se rotineira a questão proposta com frequência nos livros didáticos ou em aulas de matemática.
[3] No GEPEMA, considera-se não rotineira a questão que raramente é proposta em livros didáticos ou em aulas de matemática.
[4] PISA – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes. Para mais informações acessar <http://portal.inep.gov.br/pisa-programa-internacional-de-avaliacao-de-alunos>

Matemática Realística (RME[5]). Nesse período foram elaboradas seis dissertações cujos temas estão apresentados no Quadro 10 (Apêndice A).

A partir do ano de 2010, o GEPEMA continuou seus estudos adotando então a perspectiva da RME como fundamentação de seus trabalhos. Entre os anos de 2011 e 2019, foram desenvolvidas mais 12 dissertações. O Quadro 11 (Apêndice A) mostra os autores, o ano e o tema de cada um desses estudos e, assim, revela um panorama do que vem sendo discutido nas dissertações nos últimos anos no GEPEMA.

Desses estudos, seis caracterizavam-se como investigações teóricas e, em sua maioria, buscaram configurar expressões presentes na abordagem da RME ou relacionadas com a avaliação. Como exemplo disso, tem-se o trabalho de Pedrochi Júnior (2012), que configura a avaliação como oportunidade de aprendizagem e de Silva (2015) que estabelece uma configuração para a expressão reinvenção guiada. Os outros seis trabalhos apresentavam um viés mais ligado às práticas de sala de aula e buscavam apresentar modos de trabalho com algum instrumento de avaliação ou maneiras de se efetivar o trabalho de sala de aula pautados por princípios da RME. Um exemplo é o estudo de Prestes (2015), que apresenta um modo com o qual alunos do 5º ano lidaram com uma prova em fases, instrumento que tem sua origem atribuída a autores da RME e que também é coerente com a perspectiva de avaliação de participantes do GEPEMA.

Direcionando agora o olhar para as teses produzidas no interior do GEPEMA, tem-se, no ano de 2012, a primeira tese defendida por um membro do GEPEMA[6]. Desde então, até o ano de 2019, foram defendidas mais 11 teses abordando temas diversos, uns com carácter mais teóricos, outros com aspectos mais práticos; uns buscando aprofundamento dentro da RME, outros buscando relações (ou aproximações) de autores da RME com outros autores que também abordam o ensino de matemática; uns que apresentam modos de utilização de instrumentos de avaliação que oportunizem a aprendizagem, outros que apresentam modos de se lidar com tarefas matemáticas em sala de aula.

---

[5] RME – *Realistic Mathematics Education* (Educação Matemática Realística).

[6] CIANI, 2012.

Para dar um panorama das teses defendidas, tem-se, no Quadro 9 (Apêndice A), a apresentação dos autores, o ano e o tema de cada uma dessas investigações, revelando-se, assim, os principais temas que estão sendo abordados e discutidos no interior do grupo.

A primeira tese do GEPEMA, defendida por Ciani (2012), adotou a abordagem Educação Matemática Realística como base teórica para realizar uma meta-análise da produção de estudantes, apresentada em outros três trabalhos do Grupo que utilizaram questões não rotineiras do PISA. As demais (onze) teses, que foram concluídas até o final de 2018, também estão relacionadas aos pressupostos teóricos da Educação Matemática Realística e apresentam:

a) um quadro de referência, fundamentado pela RME, para a análise de enunciados de tarefas matemáticas[7];

b) uma construção teórica que dá suporte à utilização da análise da produção escrita em aulas de matemática como estratégia de ensino na perspectiva da RME[8];

c) uma busca por aproximações entre aspectos da RME e outros autores[9];

d) uma narrativa de prática letiva que buscou identificar os princípios e ideias da abordagem Educação Matemática Realística[10];

e) uma proposta de ampliação no modo de se enxergar a avaliação da aprendizagem, tomando-a como fio condutor da prática pedagógica[11].

f) um estudo da utilização de uma prova em fases[12].

Entre as três teses que abordaram a utilização de uma prova em fases na perspectiva da Educação Matemática Realística, uma analisou a prova como um meio de realização da reinvenção guiada[13]; outra tomou as

---

[7] FERREIRA, 2013.
[8] SANTOS, 2014.
[9] PASSOS, 2015; SCHASTAI ,2017.
[10] MARQUES, 2017.
[11] SILVA, 2018.
[12] PIRES, 2013; TREVISAN, 2013; MENDES 2014.
[13] PIRES, 2013.

informações coletadas a partir de uma experiência com a prova em fases para repensar a própria prática avaliativa[14] e a terceira utilizou a prova em fases como um meio de promover a regulação da aprendizagem[15].

Na dissertação, este pesquisador trabalhou com a utilização de uma Prova-Escrita-com-Cola como recurso para a aprendizagem. Em um primeiro momento, tinha a intenção, no estudo de tese, de investigar as maneiras de lidar com esse instrumento em provas de matemática com alunos da Educação Básica. Todavia, em um seminário no GEPEMA, no ano de 2017, foi apresentado e discutido um texto[16] que tratava da oportunidade de aprendizagem de resolver tarefas baseadas em contextos presentes em livros didáticos. O estudo desse texto foi o mote para a escolha do tema desta pesquisa.

De modo geral, neste trabalho, tem-se por intenção analisar e discutir tarefas matemáticas contidas nos capítulos de Função Afim dos livros didáticos do 1º. Ano do Ensino Médio aprovados pelo PNLD de 2018.[17]

Para ter certeza de escolher livros que são, de fato, utilizados em sala de aula do Ensino Médio, decidiu-se examinar todos os livros aprovados pelo PNLD - Programa Nacional do Livro e do Material Didático[18] - de 2018. A partir do exame dos livros foi escolhido, por conveniência[19], o tema Função Afim.

Com as condições materiais que se tem e no momento histórico atual, uma alternativa viável é apresentar uma exploração possível das tarefas propostas pelos livros didáticos escolhidos para este trabalho. Ainda assim, há de se considerar que não é desejável que os livros atuem como o único fator norteador ou mediador do currículo a ser adotado pelos professores, mas não se pode ignorar a influência deles em sala de aula.

---

[14] TREVISAN, 2013.
[15] MENDES, 2014.
[16] WIJAYA, Ariyadi; van den HEUVEL-PANHUIZEN, Marja; DOORMAN, Michiel. Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. Educational **Studies in Mathematics.** May 2015,Volume 89, pp 41–65.
[17] Não se pretende aqui apresentar um estudo ou uma discussão do livro didático, qus será utilizado apenas como fonte das tarefas estudadas.
[18] http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld
[19] Em 2017, o autor atuou como professor no 1º. Ano do Ensino Médio de uma escola pública e considerou interessante o trabalho que desenvolveu com os alunos. Essa foi a conveniência.

De acordo com van den Heuvel-Panhuizen e Wijers (2005), ainda são os livros didáticos as ferramentas mais utilizadas no trabalho diário dos professores na sala de aula. De acordo com essas autoras,

> falar sobre livros didáticos muitas vezes suscita uma associação negativa. De fato, muitos movimentos de reforma visam se livrar dos livros didáticos. Nos Países Baixos, no entanto, o contrário é o caso. Aqui, a melhoria da educação matemática foi amplamente estimulada pelo desenvolvimento de novos livros didáticos que refletem a abordagem da RME (VAN DEN HEUVEL PANHUIZEN e WIJERS, 2005, p. 291).

Freudenthal (1973) argumenta que os alunos conseguem reinventar a Matemática por meio da matematização, embora também reconheça que eles não conseguem simplesmente reinventar a Matemática, que levou centenas de anos para ser elaborada. Por isso, o autor propõe a reinvenção guiada. Segundo ele, os professores e os livros didáticos têm de ajudar os alunos nesse processo, garantindo que eles experienciem a aprendizagem como um processo de invenção da Matemática por eles próprios (GRAVEMEIJEIR, 2005, p. 92, tradução nossa).

A escrita de livros didáticos parece dominada por outros objetivos alheios aos de uma matemática que poderia ser útil. Seria desejável que a elaboração curricular fosse realizada a partir de uma construção social que trouxesse consigo contribuições de pesquisadores e professores envolvidos diretamente com o ensino e a educação, aspecto pouco claro no processo desenvolvido até a segunda versão do texto da BNCC (PINTO, 2017). Outra crítica que esse autor faz em relação ao documento da BNCC diz respeito ao silêncio que em relação aos aspectos teórico-metodológicos já consolidados no campo da Educação Matemática, em específico, as produções realizadas no âmbito da Etnomatemática, da História da Matemática e da Modelagem Matemática. Para ele, a proposta da BNCC representa um retorno ao passado, tempos em que o currículo escolar se estabelecia como um modelo fixo, numa perspectiva de conceber a prática docente a partir das orientações emanadas por especialistas, ainda que envolvidos num aparente processo de discussão e debates com os professores (PINTO, 2017).

Infelizmente, por um lado, situações em que o professor é apenas um recurso para o livro didático em sala de aula são ainda muito frequentes, ou seja, o professor[20] tem apenas a responsabilidade de ler ou propor tarefas que já estejam nos livros, ele não elabora coisa alguma, apenas reproduz o que está lá. Em alguns casos, ao corrigir a resolução de um aluno, limita-se a dizer "está errada porque não está igual à resposta do livro". Por outro, ainda há pouco incentivo das políticas públicas para a elaboração de livros ou outros materiais didáticos que valorizem a diversidade e a pluralidade da escola pública brasileira.

A situação esperada caminharia na direção de que são os professores que devem dominar o livro, usá-los como recurso, fazer uso deles (mas não apenas) para prepararem suas aulas e não se colocar como refém deles. Em outras palavras, "é o livro didático que deve ser o recurso escrito para o professor e não o professor que deve atuar como recurso audiovisual para o livro"[21].

É importante trabalhar com tarefas matemáticas presentes em livros didáticos, por se acreditar que é possível que as mudanças ocorram a partir do que se apresenta, do que já está posto, dos livros que estão publicados, das tarefas que estão propostas. Mesmo porque, na sala de aula, frequentemente, é a partir da proposição de tarefas que pode se dar a atividade dos alunos.

Assim, de modo geral, a intenção desta pesquisa é analisar e discutir tarefas matemáticas contidas em livros didáticos[22]. Considera-se que, mesmo se e quando as tecnologias educacionais (os *tablets*, os *smartphones*, os diferentes softwares, os diversos aplicativos) estiverem presentes na realidade de muitas escolas e em muitos lares de alunos, os livros didáticos não devem ser vistos como materiais que se opõem a eles. A ideia é que se faça uso dos mais variados recursos que auxiliem os alunos, até porque ainda se vive em um mundo, mais precisamente, em um país, em que as desigualdades sociais estão fortemente presentes. Nesse sentido, é possível considerar que

---

[20] Ressalta-se que o objetivo aqui não é colocar a culpa nos professores. Eles, em sua maioria, são também vítimas de um sistema que não os forma adequadamente e não lhes proporciona boas condições de trabalho, nem de formação continuada, impedindo, desse modo, que possam fazer um trabalho diferente do tradicional.
[21] Fala frequente da Profa. Regina Buriasco em suas aulas.
[22] Reiterando, não se pretende aqui apresentar um estudo ou uma discussão do livro didático, que será utilizado apenas como fonte das tarefas estudadas.

os grandes avanços que o mundo tecnológico pode proporcionar é de fato realidade para uma minoria da população.

Para realizar esta investigação, elencam-se os seguintes objetivos:

- analisar e discutir tarefas matemáticas contidas nos capítulos de Função Afim dos livros didáticos do 1º. Ano do Ensino Médio aprovados pelo PNLD de 2018;
  - construir modelos que descrevam as tarefas do capítulo de Função Afim dos livros didáticos selecionados;
  - identificar e agrupar as tarefas do capítulo de Função Afim dos livros didáticos selecionados de acordo com o modelo que as descrevem;
  - inventariar aspectos de demanda cognitiva nas tarefas do capítulo de Função Afim dos livros didáticos selecionados;
  - apresentar, na perspectiva da RME, possibilidades de intervenção nas tarefas do capítulo de Função Afim dos livros didáticos selecionados.

Este trabalho está estruturado em quatro capítulos, além desta introdução, que apresenta uma breve descrição do caminhar das pesquisas do GEPEMA, algumas considerações a respeito da utilização de livros didáticos e tarefas em sala de aula, bem como as justificativas e os objetivos que orientam esta investigação.

O primeiro capítulo traz aspectos essencias da RME e algumas considerações acerca de tarefas e demandas cognitivas.

A caracterização do tipo de pesquisa que é feita, uma primeira análise mais descritiva das tarefas do capítulo de Função Afim dos livros didáticos selecionados e a descrição dos procedimentos que foram realizados no decorrer desta investigação constituem o segundo capítulo.

No terceiro capítulo, apresentam-se algumas explorações dos diferentes agrupamentos de tarefas, a indicação de algumas possibilidades de intervenção e diferentes modos de lidar com elas na perpectiva da RME.

O quarto e último capítulo traz algumas discussões e considerações a respeito do tema, bem como alguns indicativos de possíveis pesquisas que possam surgir em decorrência deste trabalho.

Uma das intenções deste estudo é ampliar os olhares para as maneiras de se lidar com tarefas presentes em livros didáticos, buscando alternativas para a utilização desse recurso (o livro didático) nas salas de aula. E esse é um dos aspectos com o qual se acredita estar dando continuidade aos estudos do GEPEMA.

1. RME: UMA BASE PARA OPERAÇÕES[23]

A Educação Matemática Realística é uma abordagem para o ensino de matemática que teve sua origem inspirada nas ideias e contribuições do matemático Hans Freudenthal (1905-1990). Entre o final dos anos 60 e início dos anos 70, suas ideias foram desenvolvidas na Holanda com o intuito de fazer oposição ao movimento da Matemática Moderna que tinha como base uma perspectiva estruturalista (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).

As ideias de Freudenthal ainda continuam presentes e em desenvolvimento, tanto por membros do Instituto Freudenthal[24] quanto por outros grupos de pesquisa que adotam a abordagem da Educação Matemática Realística como foco de estudo. O GEPEMA é um desses grupos.

Para Freudenthal (1979, p. 321), a matemática é

> uma atividade humana simultaneamente natural e social, tal como a palavra, o desenho e a escrita. Figura entre as primeiras atividades cognitivas conhecidas e foi a primeira disciplina a ser ensinada, mas evoluiu e transformou-se sob a influência das modificações sociais, bem como a sua Filosofia e a maneira de ser ensinada.

Como atividade humana é[25] conectada à realidade, deve estar ao alcance dos estudantes e ter relevância para a sociedade, para que, desse modo, tenha valor humano (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996). Estar próximo à realidade, muitas vezes, pode dar a ideia de que aos estudantes devem ser oferecidas tarefas com contextos estritamente ligados à sua realidade cotidiana imediata, mas não é isso que Freudenthal afirma. Para ele, o real não é ligado ao mundo do espaço-tempo, não se destina a ser entendido ontologicamente, portanto nem metafisicamente (Platão), nem fisicamente (Aristóteles), nem psicologicamente, mas em sentido comum, e inclui objetos e atividades mentais (FREUDENTHAL, 1991, p.17 tradução nossa). Tal afirmação parece uma negação das abordagens clássicas da ontologia (ciência do ente = ser) e da psicologia (talvez no viés cognitivista). Essa visão parece

---

[23] Tomada aqui como conjunto de noções, princípios, características utilizadas para fundamentar o planejamento e as ações desenvolvidas neste estudo.
[24] www.uu.nl/en/research/freudenthal-institute
[25] O verbo ser é utilizado aqui como predicativo: propriedade intrínseca (HOUAISS, 2001).

mais próxima do entendimento do real como aquilo que é vivido (numa visão mais existencialista) e de que se deve lidar com aquilo que temos em mãos.

Para Freudenthal, a matemática é

> uma atividade de resolução de problemas, de procura por problemas, mas é também uma atividade de organização de um determinado assunto. Este pode ser um assunto da realidade que deve ser organizado de acordo com modelos ou padrões matemáticos caso os problemas da realidade devam ser resolvidos. Também pode ser um assunto matemático, resultados novos ou antigos, de seu próprio país ou de outros, que devem ser organizados de acordo com novas ideias, para serem mais bem compreendidos, em um contexto mais amplo ou por meio de uma abordagem axiomática (FREUDENTHAL, 1971, p. 413-414, tradução nossa).

Ao adotar a perspectiva da matemática como uma atividade humana, assume-se, entre outras coisas, que aprender matemática significa fazer matemática, ou, como propõe a RME, ser capaz de matematizar. Os alunos, por assim dizer, são chamados a redescobrir alguns "pedaços" da matemática. Nesse processo, "os alunos, em vez de serem os receptores de uma matemática pronta, são tratados como participantes ativos no processo educacional, no qual eles mesmos desenvolvem todos os tipos de ferramentas matemáticas e *insights*" (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p.11, tradução nossa). Desse modo, um dos propósitos da Educação Matemática Realística é dar aos alunos a oportunidade de serem "guiados" para "reinventar" a Matemática. Tanto professor quanto aluno assumem um papel central na perspectiva da reivenção-guiada.

> A sistematização é uma grande virtude da matemática e, se possível, o aluno também precisa aprender essa virtude, a própria atividade de sistematizar, não o seu resultado. O resultado é um sistema, um belo sistema fechado, sem entrada e saída. Em sua perfeição mais alta, pode até ser manuseado por uma máquina. Mas, para o que pode ser realizado por máquinas, não precisamos de humanos. O que os humanos precisam aprender não é a matemática como um sistema fechado, mas como uma atividade, o processo de matematizar a realidade e, se possível, até o de matematizar a matemática (FREUDENTHAL, 1968, p. 07, tradução nossa).

Essencialmente, a RME caracteriza-se pelos princípios da Atividade, da Realidade, de Níveis, do Entrelaçamento, da Interatividade e da

Orientação (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2010; van den HEUVEL-PANHUIZEN e WIJERS, 2005; van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).

O **Princípio da Atividade** garante que, como uma atividade humana, a matemática seja impulsionada pelo ato de matematizar e, sendo assim, os alunos são tratados como participantes ativos no processo de aprendizagem e aprendem matemática fazendo-a.

Freudenthal (1979) não concebe a matemática como o corpo do conhecimento matemático, mas como uma atividade de busca e resolução de problemas e, de modo mais geral, como a atividade de organizar e lidar matematicamente com ela. O autor denominou essa atividade de "matematização". A ideia de matematização refere-se ao princípio de matemática como uma atividade que, segundo Freudenthal (1971, 1973, 1991), pode ser mais bem aprendida fazendo-a. De qualquer forma, assim como matematizar é didaticamente traduzido como reinventar, a realidade a ser matematizada é a do estudante, matematizar é a atividade própria dele. O que é a realidade para alguém depende de muitas variáveis, assim como o que é matemático, o que não é matemático (FREUDENTAL, 1991).

De acordo com Freudenthal (1973), o uso de currículos cientificamente estruturados, nos quais os estudantes são confrontados com a matemática pronta, é uma "inversão anti-didática". Baseia-se, falsamente, na suposição de que os resultados do pensamento matemático, colocados em uma estrutura de assunto, podem ser transferidos diretamente para os alunos.

Ainda em relação a esse princípio, as "produções próprias" dos alunos desempenham um papel importante (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN e WIJERS, 2005), uma vez que "a ênfase não está em aprender os algoritmos, mas no processo de algoritmização; não está na álgebra, mas na atividade de algebrizar; não está nas abstrações, mas na ação de abstrair; não está na estrutura, mas na ação de estruturar" (SCHASTAI, 2017, p. 21).

Trabalhar em uma perspectiva que respeita o Princípio da Atividade implica ter um entendimento de que os alunos devem ser confrontados com situações-problema, nas quais, mesmo que inicialmente partindo de uma maneira informal de trabalho, podem caminhar em direção a um modo de trabalho cada vez mais formalizado.

Essa ideia de progresso está fortemente relacionada ao conceito de matematização progressiva, que é o processo pelo qual os estudantes constroem (ou reconstroem) uma (nova) matemática, em que matematizam tanto horizontal[26] quanto verticalmente[27].

De Lange (1999, P.18) aponta algumas das atividades, nas quais se reconhece matematização:

- identificar as especificidades matemáticas em um contexto geral;
- esquematizar;
- descobrir relações e regularidades;
- visualizar e formular um problema de diferentes formas; traduzir um problema realístico em um problema matemático;
- reconhecer similaridades em diferentes problemas;
- representar uma relação em uma fórmula;
- provar regularidades;
- refinar e ajustar modelos;
- combinar e integrar modelos;
- generalizar.

Para De Lange, quando o sujeito raciocina dentro de um modelo matemático, ele se sente impulsionado a construir novos modelos matemáticos que levam o modelo original a um nível mais abstrato (DE LANGE, 1987, p. 44). De acordo com esse mesmo autor, a divisão de grupos de atividades de matematização é, de certo modo, arbitrária, contudo, a divisão de sua descrição pode ser útil, não apenas para descrever a matematização mais claramente, mas também para oportunizar distintas condutas do professor quando da reinvenção guiada (DE LANGE, 1987).

---

[26] Matematização horizontal, conforme nos diz Freudenthal, (1971, 1973, 1991) pode ser identificada no movimento do mundo real para o mundo dos símbolos. No que se refere à matematização horizontal, as atividades descritas por De Lange (1987) são, basicamente, atividades mentais e, embora elas estejam explicitadas, identificá-las no trabalho do aprendiz pode ser uma tarefa complexa.

[27] Matematização vertical envolve lidar com a matemática por ela mesma, dentro do mundo dos símbolos, refinando e aprofundando o conhecimento matemático. Essa componente envolve atividades como representar uma relação em uma fórmula, provar regularidades, refinar e ajustar modelos, usar diferentes modelos, combinar e integrar modelos, formular um novo conceito matemático, generalizar.

Gravemeijer e Terwel (2000) apresentam algumas características da Matemática a serem trabalhadas: generalidade, certeza, exatidão e concisão, que podem ser analisadas em termos das atividades relacionadas a cada uma delas. Generalidade envolve atividades como classificar, estruturar e procurar por relações; certeza: envolve atividades como refletir, justificar, provar (usando uma abordagem sistemática, elaborando e testando conjecturas etc.); exatidão envolve atividades como modelar, simbolizar, definir (limitando interpretações e validade); concisão envolve atividades como simbolizar e esquematizar (desenvolvimento de procedimentos padrão e notações).

O **Princípio da Realidade** estabelece que, desde o seu início, o processo de aprendizagem é marcado por tarefas com contextos ricos[28] e que necessitam de certa organização matemática para que aos alunos seja oportunizado o lidar com o conhecimento matemático em situações realísticas, ou seja, imagináveis por eles.

Um dos grandes objetivos da Educação Matemática é que os alunos aprendam a usar sua compreensão matemática e ferramentas para resolver problemas. Isso implica que eles devem aprender “matemática para ser útil” (FREUDENTHAL, 1968). Na RME, no entanto, esse princípio de realidade não é apenas reconhecível no final do processo de aprendizagem na área de aplicação; a realidade também é concebida como uma fonte para aprender matemática.

Freudenthal (1968) reconhecia que a matemática se mostra indispensável para a compreensão e o controle tecnológico, não apenas do mundo físico, mas também da estrutura social. Com isso, não se pode mais deixar de considerar a necessidade de o ensino da matemática ser útil, mesmo porque a matemática não é necessária para poucas pessoas, mas praticamente para todas.

> A matemática se distingue de outras disciplinas de ensino pelo fato de que, mesmo em sua totalidade real, ela é um corpo de conhecimento relativamente pequeno, de uma generalidade tão grande que se aplica a uma variedade mais rica de situações do

---

[28] Na RME, contexto rico é aquele que oportuniza alguma matematização.

> que qualquer outra disciplina de ensino (FREUDENTHAL, 1968, p. 5 tradução nossa).

Assim como a matemática surge da matematização da realidade, o aprendizado da matemática também deve se originar na matematização da realidade. Em vez de começar com certas abstrações ou definições a serem aplicadas posteriormente, começar com tarefas que possuam contextos que possam ser matematizados (FREUDENTHAL, 1979, 1968). Com isso, ao trabalhar com as tarefas, os alunos podem desenvolver ferramentas matemáticas com compreensão (van den HEUVEL-PANHUIZEN e WIJERS, 2005).

Para que isso ocorra, aos alunos devem ser oferecidas oportunidades tanto para lidar com características essenciais das tarefas quanto para a prática necessária no tratamento dessas mesmas características. Em outras palavras, é crucial que as tarefas forneçam informações que possam ser organizadas matematicamente e ofereçam oportunidades para que os alunos usem seus conhecimentos e experiências (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2005).

Os alunos, na aprendizagem da matemática, passam por diferentes níveis de compreensão desde o desenvolvimento de resoluções informais, relacionadas ao contexto, até as mais sofisticadas para conhecer as relações entre os conceitos e estratégias. Este é o **Princípio de Níveis**.

Parece usual que, primeiro, os alunos desenvolvam estratégias intimamente ligadas ao contexto. Mais tarde, certos aspectos da situação do contexto podem se tornar mais gerais, o que significa que o contexto adquire cada vez mais o caráter de um modelo e, como tal, pode dar suporte para a solução de outros problemas.

Eventualmente, os modelos dão aos alunos acesso a conhecimentos matemáticos mais formais. Com isso, ocorre uma mudança de um “modelo de” para um “modelo para”, isto é, uma mudança de um modelo de uma situação particular para um que atenda todas as outras situações equivalentes. A condição para chegar ao próximo nível é a capacidade de refletir sobre as atividades realizadas. Essa reflexão pode ser provocada pela interação, por exemplo, entre alunos e professor, alunos entre si, alunos e diferentes materiais de apoio.

A força do Princípio de Níveis é que ele traz ao currículo uma coerência longitudinal. Essa perspectiva de longo prazo é característica da RME, na relação entre o que foi aprendido antes e o que será (ou poderá ser) aprendido mais tarde.

Segundo o **Princípio do Entrelaçamento** há uma integração entre os diferentes domínios do conhecimento matemático. Aos alunos devem ser propostas tarefas nas quais possam utilizar vários conhecimentos e ferramentas matemáticas. Essa ideia, de não haver tantas divisões, não se refere apenas aos diferentes domínios da matemática, mas também deve ser aplicada a tópicos que estão no interior de cada domínio. Na cadeia de números, por exemplo, tópicos como o senso numérico, aritmética mental, estimativa e algoritmos estão intimamente relacionados (van den HEUVEL-PANHUIZEN e WIJERS, 2005).

Assim, os domínios dentro da matemática não podem ser separados. Eles estão todos ligados uns aos outros. Além disso, para a resolução de tarefas de contextos ricos, geralmente é necessário aplicar uma ampla gama de ferramentas e entendimentos matemáticos (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2000). Os contextos são vistos em sentido amplo na RME. Podem abordar situações da vida cotidiana, do mundo da fantasia e situações dentro do próprio mundo da matemática. O importante é que o contexto da tarefa seja adequado para a matematização - os alunos sejam capazes de imaginar a situação ou evento para que possam fazer uso de suas próprias experiências e conhecimentos (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2005, p. 3).

A força do Princípio do Entrelaçamento é que ele traz coerência ao currículo (van den HEUVEL-PANHUIZEN e WIJERS, 2005; van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2000). Essa coerência pode ser entendida pelo fato de que trabalhar com os domínios entrelaçados assemelha-se à atividade dos matemáticos que, em muitos casos, solucionam problemas lidando com diferentes temas matemáticos ou não.

De acordo com Freudenthal (1991, p.48), seria ideal se

> os estudantes repetissem o processo de aprendizagem da humanidade, não como isso de fato ocorreu, mas, sim, como ele teria sido feito se as pessoas no passado conhecessem um pouco mais do que nós sabemos agora.

O **Princípio da Interatividade** refere-se às oportunidades dadas aos alunos para que compartilhem com seus colegas suas estratégias, invenções e descobertas. A aprendizagem da matemática não acontece apenas em uma atividade pessoal, mas também em uma atividade social. Compartilhar com os colegas as estratégias, invenções e descobertas pode ajudar os alunos a desenvolverem suas estratégias e realizar reflexões, que podem levá-los a um nível maior de entendimento da tarefa proposta. Ao ouvir o que os outros descobriram e discutir essas descobertas, os alunos podem obter ideias para refinar suas próprias estratégias.

A adoção do Princípio da Interatividade implica assumir que todos devem estar envolvidos no processo de ensino, a aula deve acontecer para todos. No entanto, isso não significa que toda a turma esteja se desenvolvendo coletivamente e que cada aluno esteja seguindo o mesmo caminho e atingindo o mesmo nível de desenvolvimento no mesmo momento. Os estudantes são considerados individualmente, cada um seguindo um caminho próprio de aprendizagem. (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN e WIJERS, 2005 e VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).

De acordo com o **Princípio da Orientação**[29]**,** os trabalhos são desenvolvidos no sentido de "guiar" os alunos para "reinventar" a matemática.

Tanto professores quanto programas educacionais deveriam se basear em trajetórias coerentes de ensino e aprendizagem de longo prazo. Elas orientam o processo de aprendizagem, mas não de forma fixa, demonstrando o que os alunos têm que aprender. Para isso, é desejável que os professores criem um ambiente de aprendizagem no qual esse processo de matematização possa emergir. Os programas educacionais devem conter cenários que tenham o potencial de funcionar como alavancas na mudança do entendimento dos alunos. É importante que esses cenários tenham a perspectiva do processo de aprendizagem de longo prazo, com base nos objetivos que a educação

[29] Esse princípio está relacionado com a Reinvenção Guiada, método de ensino da RME.

matemática visa. Em outras palavras, no Princípio da Orientação, o "como" e o "o quê" se encontram (van den HEUVEL-PANHUIZEN e WIJERS, 2005).

Uma das funções do professor na sala de aula é a de validar a matemática que os estudantes estão utilizando para a resolução das tarefas com base no conhecimento matemático, historicamente construído e já validado (DRIJVERS,2003) como mostra o Quadro 1.

Quadro 1- Alguns aspectos da dinâmica da aula sob a perspectiva da reinvenção guiada

- ✓ O trabalho em sala de aula tem início com a proposição de uma situação realística que possibilita diferentes níveis de matematização.
- ✓ Após resolverem a situação, os alunos podem interagir uns com os outros e terem a oportunidade de analisar e discutir estratégias e procedimentos que utilizaram.
- ✓ Durante e após o trabalho dos alunos, o professor pode fazer questionamentos para explorar as resoluções que apresentaram, bem como as diferenças existentes entre elas, e discutir aspectos matemáticos subjacentes a essas resoluções encorajando-os a se interessar por esses aspectos.

Fonte: Santos (2014, p. 38)

Os seis princípios estão sustentados pelos três pilares da RME: os pontos de vista sobre o assunto; a maneira como esse deveria ser ensinado; a maneira como se aprende.

Tomando o segundo pilar da RME, a maneira como o conteúdo deveria ser ensinado, as boas tarefas na perspectiva da RME, de acordo com a indicação de Van den Heuvel-Panhuizen (1996), devem ser:

- *informativas*: fornecer o máximo de informações possível a respeito do conhecimento dos alunos, isto é, mostrar uma imagem do aprendizado dos alunos o mais completa possível;
- *significativas*: convidativas para os alunos, desafiadoras, de modo que eles sintam que valha a pena resolver e que sua solução pode ser útil para prover uma ou várias respostas, e devem refletir objetivos importantes, pois, se

não apresentarem motivos para ser aprendidas, não serão consideradas úteis;

- *transparentes*: permitem que os alunos mostrem o nível de aprendizagem em que se encontram, assim, não podem ser tão fechadas a ponto de serem resolvidas de apenas uma maneira, impedindo que os alunos demonstrem seu conhecimento, mesmo que seja por meio de modelos informais;
- *elásticas/flexíveis*: podem ser resolvidas por meio de diferentes estratégias em diferentes níveis de aprendizagem, o que pode oportunizar aos alunos dar suas respostas com suas próprias palavras;
- *acessíveis*: apresentam enunciados o mais claros possível, de modo que os alunos possam, no mínimo, refletir a respeito dos assuntos envolvidos, o que não quer dizer que o enunciado deva indicar estratégias ou sugerir uma solução, mas, sim, possibilitar identificar do que ela trata.

Para Stein e Smith (1998), diferentes tipos de tarefas constituem diferentes oportunidades de aprendizagem, uma vez que algumas têm o potencial de provocar formas complexas de pensamento. A partir das intenções do professor, a proposição da tarefa pode auxiliar na criação de um ambiente de sala de aula que instigue o aluno a lidar com ela. Além disso, os níveis de demanda cognitiva podem ser utilizados como parte de estratégias desenvolvidas em sala de aula, nas quais o professor ou o aluno são protagonistas (RAJADELL, 2012). Estratégia, aqui, é tomada como ações realizadas intencional e conscientemente pelo professor para o trabalho em sala de aula. Assim, as estratégias de ensino como ações planejadas possuem uma dimensão de planejamento, concernente a “o que” e a “como” pode ou deve ser feito e uma dimensão de ação que se refere à execução do que foi planejado, sendo que uma estratégia abarca, entre outras ações, as decisões tomadas pelo professor para escolher e propor tarefas aos alunos (SANTOS, 2014).

Os estudantes devem aprender a analisar e organizar as tarefas e aplicar a matemática com flexibilidade em situações significativas para eles. Do ponto de vista do estudante, as tarefas, portanto, devem ser acessíveis, convidativas e valer a pena resolver. Também devem ser igualmente desafiadoras (TREFFERS, 1987).

Neste estudo, a tarefa matemática é tema de interesse e objeto a ser analisado e considerar-se-á que uma tarefa designa o item ou o conjunto de itens (exercício, problema) que o professor apresenta (ou atribui) aos alunos como proposta de trabalho, algo que um professor usa para demonstrar matemática, buscar interativamente com os alunos ou para pedir que os alunos façam alguma coisa. Tarefa também pode ser qualquer coisa que os alunos decidam fazer por si mesmos em uma situação particular.

As tarefas, portanto, são as ferramentas mediadoras para o ensino e para a aprendizagem da matemática (WATSON, *et al*, 2012).

Ainda de acordo com os autores[30], entende-se que as tarefas matemáticas podem, por exemplo:

- proporcionar o ponto de partida para o desenvolvimento da atividade matemática;
- ser importantes veículos para o desenvolvimento da capacidade do aluno de raciocinar e raciocinar matematicamente;
- ser ferramentas mediadoras para ensinar e aprender;
- estimular o estabelecimento de conexões e o desenvolvimento coerente de ideias matemáticas;
- oportunizar que os alunos se comuniquem e justifiquem seus procedimentos e entendimentos, promovendo, assim, comunicação a respeito do que foi feito;
- mostrar a matemática como uma atividade humana permanente;
- oportunizar aos alunos interpretar a razoabilidade de suas ações e soluções.

---

[30] STEIN e SMITH, 1998, 2009; HENNINGSEN e STEIN, 1997; BISPO, RAMALHO, HENRIQUES, 2008; SHIMIZU, 2010; DOYLE, 1988; CHRISTIANSEN e WALTER, 1986; MASON e JOHNSTON-WILDER, 2006; WATSON et al, 2012; MÅSØVAL, 2013; STEPHAN; AKYUZ, 2013.

Logo, cabe ao professor tomar consciência do tipo de tarefas que propõe a seus alunos. Elas devem estimulá-los a querer progredir com os estudos. Uma tarefa não pode simplesmente impedir ou colocar-se como uma barreira para o desenvolvimento do aluno. Isso não significa que o aluno, ao ver uma tarefa, precise ter de imediato o desenho do caminho a ser seguido na busca da solução, nem mesmo a resposta. É preciso que aquela situação proposta seja ao menos intrigante a ponto de colocá-lo em movimento. Exercícios de reprodução (calcule – resolva) não cumprem bem essa função.

De acordo com Stein e Lane (1996), a natureza das tarefas que são propostas aos alunos determina o que os alunos aprendem, daí a importância do nível de demanda das tarefas se o objetivo final é fazer com que os alunos desenvolvam a capacidade de pensar, raciocinar e resolver problemas. Mesmo que selecionar e configurar bem uma tarefa não garanta o envolvimento dos alunos, começar com uma boa tarefa parece ser uma condição necessária.

As ações que ocorrem relacionadas a uma tarefa são fortemente dependentes do modo como a tarefa é proposta ou apresentada, das interações professor e aluno e da maneira como o trabalho é conduzido. Para Stein et al (2009, p.13), a Figura 1 pode ser utilizada para orientar as análises das aulas, bem como, para fornecer uma representação resumida das fases de uma tarefa na dinâmica em sala de aula (NAGY CYRINO, 2014).

Figura 1 - Quadro de tarefas

Fonte: Stein et al. (2009, p. 13)

De Lange (1999) apresenta três níveis de tarefas de acordo com o que demandam. As tarefas de Nível I envolvem ações relacionadas com a memorização e reprodução de conhecimentos frequentemente praticados em sala de aula e a utilização de procedimentos rotineiros, como reconhecimentos de fatos e representações, de objetos matemáticos e propriedades, desenvolvimento de habilidades técnicas e aplicação de algoritmos padrão. Nesse nível, as tarefas geralmente são pontuais, sem ligação com situações reais ou imaginárias. Podem ser resolvidas por meio do uso de um algoritmo, ou um procedimento passo a passo, que é especificamente pedido; estão focadas na produção de respostas corretas sem o envolvimento de compreensão matemática, explicação, quando muito, a descrição do procedimento que foi usado.

No Nível II, as tarefas demandam ações de estabelecimento de conexões, tais como lidar com diferentes formas de representação, integrar informações, tomadas de decisão, decodificar, interpretar linguagem simbólica ou formal, relacionar a linguagem natural frequentemente pela mudança da linguagem escrita com palavras para uma linguagem matemática adequada de modo a poder utilizar os algoritmos apropriados, que são explícita ou implicitamente indicados, estabelecer relações entre diferentes vertentes e domínios da matemática.

As tarefas de Nível III demandam reflexão, análise e avaliação a partir de um pensamento complexo e não algorítmico. Não contém em seu enunciado pista alguma para sua resolução, e, muitas vezes, a primeira coisa a fazer é identificar o problema inerente, cuja solução vai ajudar a "manejar" as próprias situações da tarefa. Nelas, o aluno é convidado a matematizar situações, o que envolve análise, interpretação, desenvolvimento de modelos e estratégias, muitas vezes próprias, argumentações, proposições, provas, generalizações, incluindo reflexões a respeito do processo como um todo, em um considerável esforço cognitivo. Não raro, exigem intervenções do professor e regulação dos estudantes na mobilização de conhecimentos e experiências relevantes.

De Lange (1999) afirma, ainda, que as tarefas de um nível demandam ações requeridas pelo nível anterior, ou seja, em tarefas de análise, são suscitadas conexão e reprodução, e em tarefas de conexão, reprodução.

Doyle (1988) argumenta que tarefas com diferentes demandas cognitivas provavelmente induzem diferentes tipos de aprendizado. De acordo com esse autor, as tarefas podem variar não apenas em relação ao conteúdo de matemática, mas também com relação aos processos cognitivos envolvidos no trabalho com elas. Apenas boas tarefas oferecem aos alunos a oportunidade de ampliar o que sabem e estimular seu aprendizado. Tarefas que exigem que os alunos resolvam problemas complexos podem ser consideradas tarefas cognitivamente exigentes. Em contraste, tarefas cognitivamente pouco exigentes são aquelas que dão menos oportunidades para os alunos se envolverem em processos cognitivos de alto nível.

Por conseguinte, considerar as diferentes demandas cognitivas pode permitir ao professor escolher tarefas em consonância com as oportunidades de aprendizagem que elas podem proporcionar. No entanto, escolher e propor tarefas de elevado nível de demanda cognitiva não garante que o aluno se envolva ao lidar com elas, mas na perspectiva da RME já é um passo. Nessa perspectiva, as tarefas matemáticas com as quais os alunos se envolvem determinam não apenas o que aprendem, mas também como pensam, desenvolvem, usam e compreendem a matemática. Com isso, Stein e Baxter (1989) discutem a maneira como se dá a configuração e a implementação de uma tarefa. Para elas, a configuração de uma tarefa é definida pelo modo como ela é proposta pelo professor. Pode incluir diversas orientações, a distribuição de materiais e ferramentas ou pode simplesmente dizer aos alunos para começarem a trabalhar em algo do livro didático.

Recursos de uma tarefa dizem respeito a aspectos que são considerados importantes para o engajamento do pensamento, do raciocínio e da criação de sentido dos alunos, por exemplo, a possibilidade

- de diversas estratégias e/ou de múltiplas soluções,
- de a tarefa se prestar a múltiplas representações,
- da exigência de explicações e/ou justificativas dos alunos.

As demandas cognitivas durante a fase de configuração da tarefa referem-se ao tipo de processo de pensamento envolvido na solução da tarefa, reconhecido pelo professor. Isso pode variar da memorização ao uso de procedimentos e algoritmos (com ou sem atenção a conceitos ou compreensão), ao emprego de estratégias complexas de raciocínio que seriam típicas de "fazer matemática" (por exemplo, conjecturar, justificar, interpretar etc.).

Na fase de implementação da tarefa, que é definida pela maneira como os alunos realmente trabalham, as demandas cognitivas são entendidas como os processos cognitivos nos quais os alunos se envolvem enquanto trabalham na tarefa.

Hadji (2001), ao discutir a ideia de tarefas serem desencadeadores privilegiados para a aprendizagem, afirma que uma característica desejável é que o aluno é quem escolhe como vai abordá-la e que procedimentos utilizará para isso, tendo também a autonomia de resposta.

Butts (1997) apresenta uma classificação para cinco tipos típicos de problemas matemáticos (tarefas) que podem ajudar no entendimento da familiaridade com problemas de matemática. Para ele, uma tarefa pode ser

- um Exercício de Reconhecimento que demanda reconhecer ou recordar um fato específico;
- um Exercício Algorítmico que pode ser resolvido com um procedimento passo a passo, frequentemente, um algoritmo;
- um Problema de Aplicação que exige, para sua resolução, a mudança da linguagem escrita com palavras para uma linguagem matemática adequada de modo que se possam utilizar os algoritmos apropriados.
- um Problema de Pesquisa Aberta que não contém no seu enunciado pista alguma para sua resolução;
- uma Situação Problema na qual a primeira coisa a fazer é identificar o problema inerente, cuja solução vai ajudar a lidar com ela.

Conforme aponta Butts (1997), uma alta porcentagem de exercícios e problemas propostos em livros didáticos recai nas três primeiras categorias. Esses problemas possuem como traço característico, a indicação de uma estratégia de resolução em seu enunciado e, o obstáculo a vencer é a tradução da tarefa para uma forma matemática apropriada, de modo que algoritmos adequados possam ser aplicados. Por essa razão, apenas os problemas das duas últimas categorias são considerados *problemas* de fato.

Em resumo, as tarefas usadas nas salas de aula de matemática influenciam muito os tipos de processos de pensamento nos quais os alunos se envolvem, o que, por sua vez, influencia os resultados da aprendizagem dos alunos.

Autores que adotam a perspectiva teórica da Educação Matemática Realística defendem que tarefas de ensino (as que são utilizadas no dia a dia da sala de aula) não devem ser distintas das tarefas que se usam em momentos de avaliação da aprendizagem dos alunos, e desse modo, as tarefas desempenham um papel primordial quando atuam como fatores desencadeadores de atividades de ensino (e consequentemente de aprendizagem) e de avaliação.

O Quadro 2 apresenta algumas informações a respeito de aspectos da dinâmica dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática na perspectiva da Educação Matemática Realística.

Quadro 2 - Aspectos da dinâmica dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática na perspectiva da RME

Aspectos	Informações
Aprendizagem Matemática	✓ Considerada uma atividade social. ✓ Originada na atividade de matematizar.
Papel do professor	✓ Trabalha por meio da reinvenção guiada. ✓ Organiza o trabalho com os alunos oportunizando contextos que podem ser matematizados em diferentes níveis e que possibilitam a construção de modelos. ✓ Utiliza a fenomenologia didática[31] para a escolha dos problemas que serão fonte de trabalho.
Papel do aluno	✓ Participa ativamente no processo educacional. ✓ Vivencia processos de fazer matemática similares aos dos matemáticos. ✓ Analisa e discute produções com os demais colegas.

[31] Para definir fenomenologia didática de acordo com sua perspectiva, Freudenthal (1971), antes, faz uma distinção entre fenômeno (*phainómenon*) e objeto de pensamento (*nooumenon*): fenômenos são situações ou objetos realísticos e o *nooumenon* serve para descrever e organizar um *phainómenon* (FREUDENTHAL, 1971). Para ele, fenomenologia didática trata da questão da aprendizagem e da do ensino, como fenômenos situados.

	✓ Tem a possibilidade de aprimorar suas estratégias de resolução.

Fonte: Santos (2014, p. 34)

Com base nisso, conhecer e refletir sobre o papel que as tarefas desempenham em sala de aula é um aspecto vital para professores que realmente buscam a aprendizagem de seus alunos, pois esse conhecimento pode permitir-lhe escolher tarefas que oportunizem estabelecer conexões significativas com ideias e conceitos matemáticos e iniciar a atividade de matematização. O conhecimento e a reflexão do papel que as tarefas desempenham em sala de aula também podem permitir que o professor reconheça que elas podem expressar muito mais do que o conteúdo, que podem, por exemplo, ser o fio condutor de aulas.

Frequentemente, ao planejarem suas aulas, professores escolhem as tarefas que estão contempladas em livros didáticos, com base nos conteúdos que estão sendo trabalhados. Com isso, as tarefas costumam compor listas dadas pelo professor, que os estudantes se limitam a resolver de forma, muitas vezes, mecânica e, não raro, a partir de um exemplo explicado pelo professor, que passa a ser um modelo para uma resolução correta. Nesse tipo de situação, elas envolvem memorização e/ou reprodução de fatos, de regras, de fórmulas ou definições, e quase nada além disso. Essas tarefas, se pensadas nessa perspectiva e se o trabalho do estudante é definido por realizá-las diariamente, em última instância, não constituem uma oportunidade de efetiva aprendizagem.

2. PROCEDIMENTOS E DESENVOLVIMENTO DO ESTUDO

Este espaço é destinado a apresentar, com a maior clareza possível, os passos que foram seguidos durante a realização desta pesquisa. Por entender que esses passos foram sempre dados por alguém que só caminha de acordo com o seu próprio modo de caminhar e sempre tem as suas intenções, escolho escrever este capítulo na primeira pessoa do singular. Desse modo, entendo que as impressões pessoais podem ser mais bem explicitadas.

Assumo de antemão que a pesquisa aqui apresentada se caracteriza como de natureza qualitativa, marcada pela interação do pesquisador com a situação estudada, visto que o interesse está em compreender o processo e não os resultados, porque, mais do que testar teorias, buscam-se modos de entender a realidade. A interpretação é um importante elemento nesta pesquisa e acontece de forma simultânea com as inferências, tornando, assim, a investigação carregada de subjetividade, o que, neste caso, reforça mais ainda a natureza qualitativa da pesquisa.

> A pesquisa qualitativa não procura enumerar e/ou medir os eventos estudados nem emprega instrumental estatístico na análise dos dados. Parte de questões ou focos de interesses amplos, que vão se definindo à medida que o estudo se desenvolve. Envolve obtenção de dados descritivos sobre pessoas, lugares e processos interativos pelo contato direto do pesquisador com a situação estudada, procurando compreender os fenômenos segundo a perspectiva dos sujeitos, ou seja, dos participantes da situação em estudo (GODOY, 1995, p.58).

Outra caracterização para a pesquisa qualitativa é dada por Garnica (2004). Segundo ele, a pesquisa qualitativa tem como características:

> (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re) configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (GARNICA, 2004, p. 86).

Depois que decidimos, minha orientadora e eu, pelo tema, passei, então, a me concentrar mais em analisar propriamente os livros. Inicialmente, apresento um primeiro olhar com a intenção de situar-me (ter as primeiras noções) a respeito do material que seria trabalhado. Em relação aos a livros que são a fonte para as tarefas, destaco aspectos gerais, tais como o número de capítulos e de páginas de cada livro, número de páginas do capítulo de Função Afim, bem como a quantidade de tarefas (resolvidas, propostas, complementares e de auto-avaliação)[32].

Os livros escolhidos estão apresentados no Quadro 3. O critério arbitrário para nomear os livros foi a ordem alfabética dos nomes dos primeiros autores dos livros.

Quadro 3 - Livros didáticos aprovados no PNLD em 2018

Livro 1	CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante Matemática**, 1º ano: Ensino Médio. – 1. ed. – São Paulo: Edições SM, 2016.
Livro 2	LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões com a Matemática 1**. – 3.ed. São Paulo: Moderna, 2016.
Livro 3	IEZZI, Gelson... [et. al.]. **Matemática**: ciência e aplicações: Ensino Médio. Volume 1. – 9. ed . – São Paulo: Saraiva. 2016.
Livro 4	SOUZA, Joamir; GARCIA, Jacqueline. # **Contato Matemática 1**. – 1. ed. – São Paulo: FTD, 2016.
Livro 5	SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática para compreender o mundo 1**. – 1. ed. – São Paulo: Saraiva, 2016.
Livro 6	DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Contexto & Aplicações: Ensino Médio. – 3. ed. – São Paulo: Ática, Volume 1, 2016.
Livro 7	PAIVA, Manoel. **Matemática**: Paiva. – 3. ed. – São Paulo: Moderna, Volume 1, 2016.
Livro 8	BALESTRI, Rodrigo. **Matemática**: interação e tecnologia, Volume 1. – 2. ed. – São Paulo: Leya, 2016.

Fonte: o autor

[32] Tarefas resolvidas, propostas, complementares e de autoavaliação são utilizadas por serem da nomenclatura usual dos livros didáticos. As tarefas resolvidas (ou exercícios resolvidos) são apresentadas como exemplos, geralmente vêm na sequência de uma explicação de um novo conceito ou procedimento. As tarefas propostas são as que usulamente os professores propõem aos seus alunos. As tarefas complemataresou de autoavaliação geralmente estão apresentadas nos finais dos capítulos e solicitam dos alunos uma revisão do conteúdo aprendido.

As duas próximas tabelas apresentam, então, os aspectos mais gerais que se deram a partir do primeiro olhar para os livros didáticos escolhidos.

Tabela 1 - Quantidade de páginas e de capítulos de cada livro e quantidade de páginas e de tarefas de Função Afim por livro do 1º. Ano do Ensino Médio

	Nº de páginas do livro	**Nº de Capítulos do livro**	**Nº de páginas de Função Afim**	**Total[33] de Tarefas do Capítulo de Função Afim**
Livro 1	288	10	25	35
Livro 2	271	11	23	68
Livro 3	288	13	23	49
Livro 4	290	9	30	53
Livro 5	288	11	19	62
Livro 6	288	8	28[34]	51
Livro 7	280	10	21	38
Livro 8	288	8	20	35

Fonte: o autor

Tabela 2 - Quantidade de tarefas do capítulo da Função Afim de cada um dos livros

	Total[35] de tarefas analisadas	**Nº de tarefas resolvidas**	**Nº de tarefas propostas**	**Nº de tarefas complenta-res**	**Nº de tarefas de auto-avaliação**
Livro 1	35	7	35	--	--
Livro 2	68	15	39	19	10
Livro 3	49	6	49	--	--
Livro 4	53	12	53	--	--
Livro 5	62	12	48	14	--
Livro 6	51	6	51	--	--
Livro 7	38	10	26	12	--
Livro 8	35	6	35	--	--

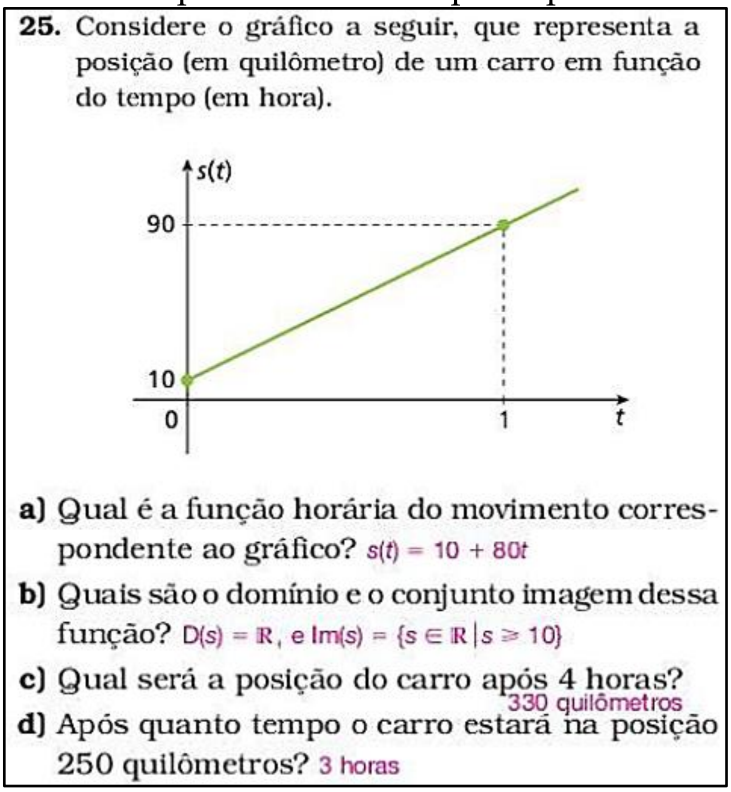
Fonte: o autor

[33] Para esse primeiro olhar, considerei apenas a quantidade de tarefas, conforme a numeração indicada em cada livro, não importando se estava dividido em itens ou não.
[34] Nesse livro, o conteúdo de função modular é abordado como uma seção do capítulo de Função Afim. No entanto, serão consideradas apenas as questões que tratam exclusivamente de Função Afim.
[35] Resultante da quantidade de tarefas propostas, complementares e de autoavaliação.

Depois desse primeiro olhar, era preciso voltar, propriamente, às tarefas dos livros, entender o que era solicitado em cada uma delas, analisar se eram semelhantes (se solicitavam a mesma coisa do aluno) ou se eram muito diferentes em sua proposição. Decidi, então, procurar por esses padrões nas tarefas de cada um dos livros.

Para facilitar essa busca de características comuns, as tarefas passaram a ser consideradas também com base nos itens que as compunham. Por exemplo, a tarefa L2T25 tem quatro itens, que foram identificados como L2T25a[36], L2T25b, L2T25c, L2T25d, totalizando quatro tarefas. Por exemplo, a Figura 1 apresenta a vigésima quinta tarefa do livro 2 com os seus quatro itens, que foram desmembrados em quatro tarefas.

Figura 2- Exemplo de tarefa composta por vários itens


25. Considere o gráfico a seguir, que representa a posição (em quilômetro) de um carro em função do tempo (em hora).

a) Qual é a função horária do movimento correspondente ao gráfico? $s(t) = 10 + 80t$

b) Quais são o domínio e o conjunto imagem dessa função? $D(s) = \mathbb{R}_+$ e $Im(s) = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geq 10\}$

c) Qual será a posição do carro após 4 horas? 330 quilômetros

d) Após quanto tempo o carro estará na posição 250 quilômetros? 3 horas

Fonte: LEONARDO (2016, p. 96)

Quando comecei a fazer a descrição do que cada uma das questões pedia, pensava que, feito isso para um ou dois livros, as demais tarefas, dos outros livros, poderiam integrar os mesmos agrupamentos.

---

[36] L2T25a – Significa que é o item a da 25ª tarefa (T) do livro (L) 2.

De início, não foi bem o que aconteceu. O primeiro exercício de agrupar tarefas resultou em muito mais agrupamentos do que imaginava. Agrupei as tarefas do livro 2 e resultou em mais de cem agrupamentos. Pensei, então, "esse negócio em vez de diminuir está aumentando – se estou agrupando coisas, o total de agrupamentos não pode ser maior do que a quantidade de coisas que eu tinha antes de agrupar". Agora vejo que era praticamente certo que daria uma grande quantidade de agrupamentos, pois estava deixando de considerar as tarefas apenas como são apresentadas nos livros. Cada item estava sendo entendido como uma tarefa e, às vezes, um mesmo item era colocado em dois agrupamentos.

Além disso, havia considerado uma descrição muito particular para cada item, que não abarcava outras tarefas, de outros livros, que pediam a mesma coisa, mas que tinham contexto diferente. Em conjunto com minha orientadora, decidi definir agrupamentos mais amplos, que contemplassem a maior quantidade possível de itens em cada um deles.

Com isso, é claro que se perderam especificidades de algumas tarefas, pois uma quantidade grande delas foi colocada em um mesmo lugar, mas, sem tal mudança, não seria possível fazer, de fato, um agrupamento de tarefas. As particularidades de cada uma delas e os motivos que as fizeram estar nos agrupamentos são analisados nas explorações de cada um desses agrupamentos.

Não foi fácil agrupar essa quantidade de tarefas. Mesmo com os agrupamentos mais amplos, eu fazia uma classificação e sempre sobravam tarefas. Depois, ao trabalhar com outro livro, acabava criando outros agrupamentos, implicando reclassificação das tarefas dos livros que já haviam sido feitos. Essa fase foi bastante longa e de muitas idas e vindas até que os agrupamentos ficassem satisfatórios. O Quadro 04[37] apresenta então os agrupamentos finais, que passaram por vários refinamentos, até que ficaram da forma como estão.

Quadro 4 - Descritor e quantidade (N) de tarefas em cada um dos livros

Código	Descritor	Livro	N
01		1	06

[37] No Apêndice B está apresentado com mais detalhes o agrupamento das tarefas.

Código	Descritor	Livro	N
	Calcular $f(x)$ para algum x dada uma situação que pode ser modelada por uma função afim $f(x)=ax+b$.	2	06
		3	05
		4	22
		5	01
		6	06
		7	08
		8	04
		Total	**58**
02	Calcular x para algum $f(x)$ dada uma situação que pode ser modelada por uma função afim $f(x)=ax+b$.	1	03
		2	07
		3	03
		4	12
		5	02
		6	03
		7	03
		8	03
		Total	**36**
03	Apresentar uma lei de formação para a função que descreve uma situação enunciada que pode ser modelada por uma função afim $f(x)=ax+b$,	1	12
		2	09
		3	09
		4	32
		5	00
		6	09
		7	15
		8	10
		Total	**96**
04	Resolver inequações (simultâneas, produto ou quociente), sistemas de inequações e situações problemas que resultam em inequações ou sistemas de inequações.	1	18
		2	24
		3	21
		4	08
		5	19
		6	13
		7	09
		8	12
		Total	**124**
05	Identificar e classificar, a partir de algumas leis de formação de funções, quais delas são afim (ou não), linear constante ou identidade. Mostrar que uma função dada é afim. Determinar coeficientes algébricos de polinômios, para que sejam funções lineares.	1	01
		2	13
		3	00
		4	06
		5	04
		6	00
		7	01
		8	05
		Total	**30**
06	Calcular (determinar) o zero ou a raiz de funções afins dadas algebricamente ou graficamente.	1	06
		2	03

Código	Descritor	Livro	N
	Determinar as coordenadas dos pontos onde funções afins intersectam o eixo x e o eixo y.	3	06
		4	06
		5	06
		6	07
		7	02
		8	04
		Total	**40**
07	Realizar o estudo de sinal de funções afins que são dadas algebricamente ou graficamente.	1	05
		2	07
		3	15
		4	08
		5	06
		6	07
		7	04
		8	08
		Total	**60**
08	Construir (esboçar) os seus gráficos a partir das leis de formação de funções afins (que podem estar definidas por partes).	1	03
		2	16
		3	12
		4	08
		5	17
		6	17
		7	16
		8	08
		Total	**97**
09	Estudar coeficientes angulares, dados algebricamente, de funções afins de modo a analisar se a função é crescente ou decrescente ou constante.	1	08
		2	07
		3	05
		4	06
		5	12
		6	01
		7	06
		8	12
		Total	**57**
10	Determinar o sistema de equações para o qual se tem a solução representada geometricamente. Determinar um sistema linear a partir de uma situação e resolvê-lo. Resolver equações de 1º grau.	1	02
		2	00
		3	14
		4	01
		5	38
		6	00
		7	00
		8	00
		Total	**55**
11	Representar graficamente as equações de um sistema linear e, sem resolvê-lo, classificá-lo em possível e	1	04
		2	00
		3	00

Código	Descritor	Livro	N
	determinado, possível e indeterminado ou impossível	4	00
		5	00
		6	00
		7	00
		8	00
		Total	**04**
12	Determinar o montante, o tempo de investimento, o capital investido ou a taxa de juros em investimentos realizados com regime de capitalização de juros simples.	1	05
		2	00
		3	00
		4	00
		5	00
		6	00
		7	00
		8	00
		Total	**05**
13	Determinar a taxa de variação de uma função afim, identificar o coeficiente angular e o coeficiente linear de funções dadas algebricamente ou graficamente.	1	04
		2	11
		3	14
		4	03
		5	01
		6	10
		7	06
		8	03
		Total	**52**
14	Explorar ideias relacionadas à proporcionalidade. Dada uma relação, analisar se ela é de proporcionalidade, ou determinar a constante de proporcionalidade de uma relação.	1	02
		2	00
		3	08
		4	04
		5	00
		6	05
		7	00
		8	02
		Total	**21**
15	Escolher um gráfico que representa uma dada situação descrita.	1	02
		2	01
		3	01
		4	01
		5	01
		6	00
		7	01
		8	00
		Total	**07**
16	Determinar o domínio e a imagem de uma função afim.	1	01
		2	15
		3	00
		4	00

Código	Descritor	Livro	N
		5	00
		6	03
		7	00
		8	05
		Total	**24**
17	Determinar o ponto de interseção de duas retas que representam duas funções com as leis de formação dadas e calcular em qual valor de x as funções assumem o mesmo valor.	1	02
		2	06
		3	04
		4	00
		5	01
		6	01
		7	01
		8	00
		Total	**15**
18	Analisar preços de um serviço realizado por duas empresas e determinar qual delas oferece o preço mais vantajoso do ponto de vista do menor preço.	1	01
		2	07
		3	04
		4	04
		5	01
		6	05
		7	00
		8	05
		Total	**27**
19	Escrever a lei de formação de função afim conhecendo o valor dos seus coeficientes, o valor de um dos coeficientes e o valor da função em um ponto, o valor da função em dois pontos, o gráfico da função com dois pontos definidos ou as coordenadas de dois pontos por onde a função passa.	1	04
		2	09
		3	08
		4	10
		5	10
		6	24
		7	02
		8	09
		Total	**76**
20	Determinar o valor numérico de uma função afim para alguns valores dados Determinar o valor de x quando se conhece $f(x)$ de algum valor dado. Realizar operações com valores numéricos de funções	1	00
		2	09
		3	00
		4	00
		5	01
		6	04
		7	00
		8	00
		Total	**14**
21	Explorar ideias de Progressão Aritmética junto com conceitos de função afim	1	00
		2	00
		3	00
		4	00
		5	00

Código	Descritor	Livro	N
		6	05
		7	00
		8	00
		Total	**05**
22	Trabalhar com situações que envolvem posições relativas entre retas.	1	00
		2	01
		3	00
		4	00
		5	23
		6	00
		7	00
		8	00
		Total	**24**
23	Tarefas “discordantes”	1	02
		2	19
		3	13
		4	05
		5	43
		6	05
		7	09
		8	07
		Total	**103**

Fonte: o autor

Em relação aos agrupamentos, ressalto que o último deles foi, às vezes, muito maior do que está atualmente. As idas e vindas eram feitas, na maioria das vezes, para tentar refinar os agrupamentos, com a intenção de que ficassem em menor número. No último agrupamento, não foi encontrada uma característica comum às tarefas que o compõem. Pertencem a ele as tarefas que não se ajustavam às características que definiam os outros agrupamentos.

Depois dessa primeira etapa concluída e com o quadro dos agrupamentos feito, chegou-se à etapa de análise propriamente dita. Conforme indicado na introdução, um dos objetivos foi apresentar possibilidades de intervenção no trabalho com tarefas de Função Afim de livros didáticos do Ensino Médio aprovados no PNLD 2018. Para atender tal objetivo, foi feita a análise de alguns dos agrupamentos. Essa análise levou em consideração algumas semelhanças entre os agrupamentos. Alguns deles foram novamente reagrupados conforme o tipo de intervenção que se pretendia discutir, como por exemplo os agrupamentos 4 e 7 que, para as considerações foram então alocados em uma mesma seção.

3. CONSIDERAÇÕES ACERCA DOS AGRUPAMENTOS DE TAREFAS

Neste espaço serão discutidos e analisados alguns[38] dos agrupamentos feitos no capítulo anterior. Apesar de os agrupamentos terem sido feitos com base em algumas semelhanças (no sentido de solicitarem a mesma coisa) entre as tarefas, elas também apresentam particularidades que podem ser explicitadas quando se olha para cada um dos agrupamentos em específico.

Busca-se apresentar um detalhamento dos modos pelos quais as tarefas de cada um dos agrupamentos se apresentam em cada um dos livros e, a partir disso, apresentar panoramas de trabalho (roteiros, caminhos, trajetórias, possíveis encaminhamentos), que podem ser adotados, quando se pretende explorar esse tipo de tarefa em sala de aula tendo como pano de fundo os princípios e propósitos da RME.

3.1 CONSIDERAÇÕES ACERCA DE TAREFAS DOS AGRUPAMENTOS 1, 2 E 20

Nesta primeira seção serão tecidas algumas considerações a respeito do modo de trabalho com as tarefas dos agrupamentos 1, 2 e 20. O descritor de cada um desses agrupamentos está apresentado no Quadro 5.

Quadro 5 - Descritores dos agrupamentos 1, 2 e 20

Agrupamentos	Descritor
1	Dada uma situação que pode ser modelada por uma função afim ($f(x)=ax+b$), calcular $f(x)$ para algum x dado.
2	Dada uma situação que pode ser modelada por uma função afim ($f(x)=ax+b$), calcular x para algum $f(x)$ dado.
20	Determinar o valor numérico de uma função afim para alguns valores dados Determinar o valor de x quando se conhece $f(x)$ de algum valor dado. Realizar operações com valores numéricos de funções

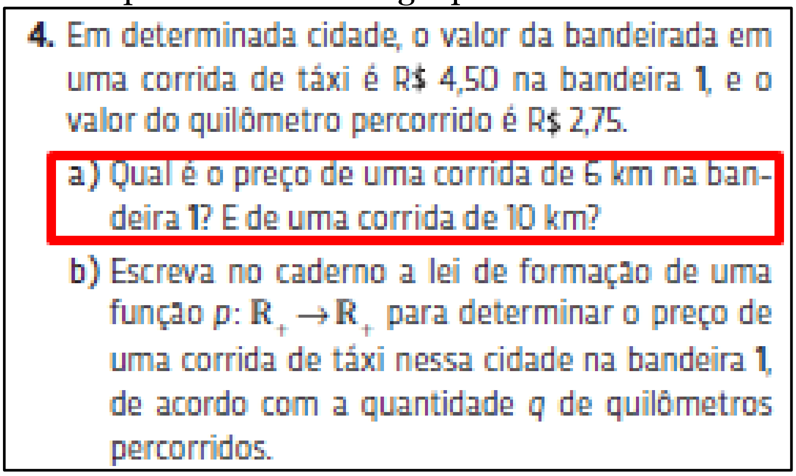
Fonte: o autor

[38] Devido ao grande número de agrupamentos, optou-se por analisar os quatro primeiros reagrupados e o último deles por ser considerado “discordante”.

Esses três agrupamentos serão analisados juntos por tratar-se de tarefas que lidam com o valor numérico de uma função. Os dois primeiros partem de situações ligadas a diversos fenômenos, enquanto o último apresenta situações mais voltadas ao “mundo da matemática”, não importando mais o fenômeno em si. Já é dada uma lei de formação e é a partir dela que o aluno deve agir.

Todos os livros estudados traziam tarefas do agrupamento 1. O Livro 4 foi o que mais apresentou tarefas (22) com as características desse agrupamento, enquanto o Livro 5 foi o que apresentou a menor quantidade (1). Os demais livros não variaram tanto, apresentando entre quatro e oito tarefas. A Figura 2 e a 3 apresentam exemplos de tarefas[39] que foram colocadas nesse agrupamento.

Figura 3 - Exemplo de tarefa do agrupamento 1 retirada do Livro 1



4. Em determinada cidade, o valor da bandeirada em uma corrida de táxi é R$ 4,50 na bandeira **1**, e o valor do quilômetro percorrido é R$ 2,75.

a) Qual é o preço de uma corrida de 6 km na bandeira 1? E de uma corrida de 10 km?

b) Escreva no caderno a lei de formação de uma função $p: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ para determinar o preço de uma corrida de táxi nessa cidade na bandeira **1**, de acordo com a quantidade q de quilômetros percorridos.

Fonte: CHAVANTE E PRESTES (2016, p. 82)

[39] Alguns dos exemplos de tarefas apresentam resposta, outros não. Essa variação se deu pelo tipo de livro que se acessou para fazer o recorte das tarefas. Alguns eram livros do professor, outros não.

Figura 4 - Exemplo de tarefa do agrupamento 1 retirada do Livro 2

22. Um marceneiro vende alguns modelos de armário para cozinha ao preço de R$ 450,00 a unidade. Ele gasta com matéria-prima um valor fixo mensal de R$ 2.250,00, além de R$ 75,00 de mão de obra por armário produzido.

a) Se forem vendidos 3 armários em um mês, o marceneiro terá lucro ou prejuízo? De quanto? prejuízo; de R$ 1.125,00

b) Escreva a lei de formação das funções: v, que relaciona o valor das vendas com o número x de armários vendidos; g, que relaciona o gasto na produção com o número x de armários produzidos; l, que relaciona o lucro obtido com o número x de armários vendidos.

c) Para não ter lucro nem prejuízo, quantos armários o marceneiro precisará vender em um mês? 6 armários

d) Quantos armários ele deve vender para ter lucro mensal de R$ 1.500,00? 10 armários

e) Qual será o lucro desse marceneiro com a venda de 15 desses armários? R$ 3.375,00

f) As funções v, g e l são afins? Justifique sua resposta. Não, porque o domínio dessas funções não é $\mathbb{R}$.

Fonte: LEONARDO (2016, p. 94)

Em relação ao agrupamento 2, todos os livros investigados traziam tarefas. O Livro 4 foi o que mais apresentou tarefas (12) com as características desse agrupamento, enquanto o Livro 5 foi o que apresentou a menor quantidade (2). Os demais livros variaram entre três e sete itens. Nas figuras a seguir estão apresentados alguns exemplos de tarefas que fazem parte desse agrupamento.

Figura 5 - Exemplo de tarefa do agrupamento 2 retirada do Livro 1

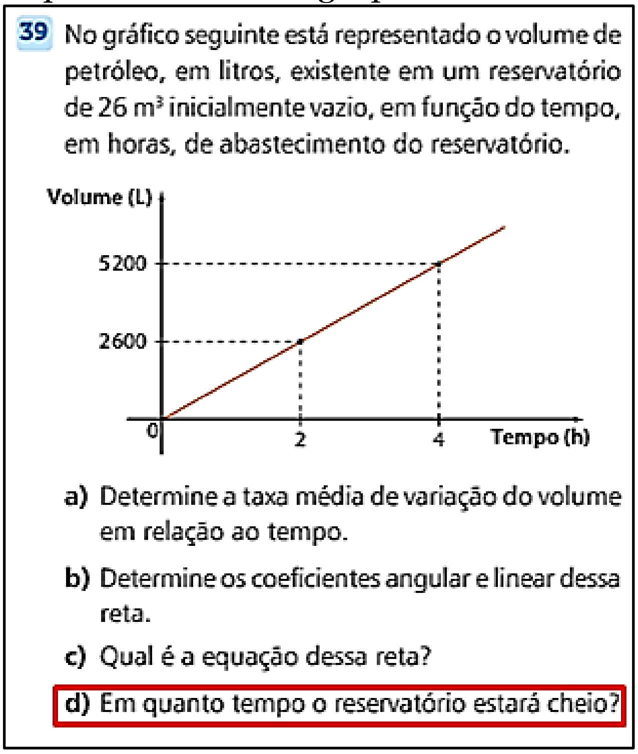
17. Camila passou a economizar mensalmente R$ 150,00 de seu salário, a partir do mês de seu aniversário, para uma viagem que custará R$ 1800,00.

a) Qual é a lei de formação da função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que relaciona o tempo x, em meses, com a quantia economizada $f(x)$, em reais?

b) Mantendo essa economia, em quantos meses Camila terá dinheiro suficiente para realizar essa viagem?

Fonte: CHAVANTE E PRESTES (2016, p. 82)

Figura 6 - Exemplo de tarefa do agrupamento 2 retirada do Livro 3



39 No gráfico seguinte está representado o volume de petróleo, em litros, existente em um reservatório de 26 m³ inicialmente vazio, em função do tempo, em horas, de abastecimento do reservatório.

a) Determine a taxa média de variação do volume em relação ao tempo.

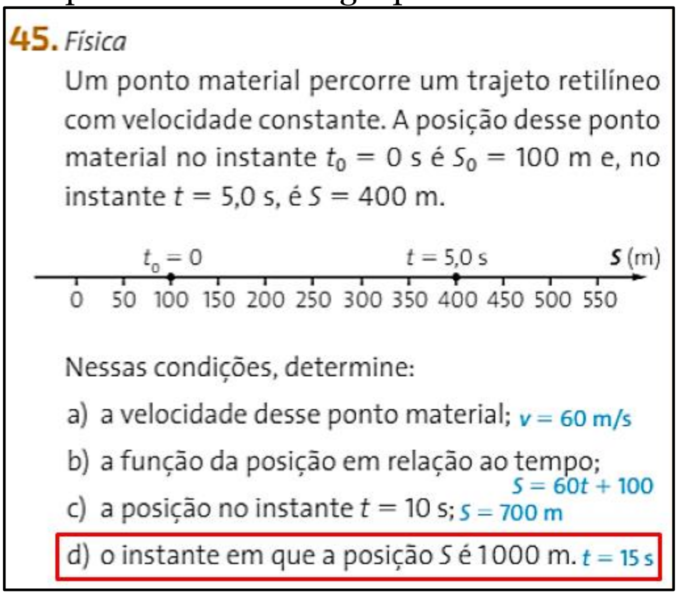
b) Determine os coeficientes angular e linear dessa reta.

c) Qual é a equação dessa reta?

d) Em quanto tempo o reservatório estará cheio?

Fonte: IEZZI [et. al.] (2016, p. 86)

Figura 7 - Exemplo de tarefa do agrupamento 2 retirada do Livro 6



45. *Física*

Um ponto material percorre um trajeto retilíneo com velocidade constante. A posição desse ponto material no instante $t_0 = 0$ s é $S_0 = 100$ m e, no instante $t = 5{,}0$ s, é $S = 400$ m.

Nessas condições, determine:

a) a velocidade desse ponto material; $v = 60$ m/s

b) a função da posição em relação ao tempo; $S = 60t + 100$

c) a posição no instante $t = 10$ s; $S = 700$ m

d) o instante em que a posição S é 1000 m. $t = 15$ s

Fonte: DANTE (2016, p. 93)

Apenas três livros traziam tarefas do agrupamento 20. O Livro 2 trouxe 9 tarefas, o Livro 6, quatro e o Livro 5, apenas uma. Os demais livros não apresentaram tarefas para esse agrupamento. Nas figuras 7, 8 e 9 estão apresentados alguns exemplos de tarefas que fazem parte desse agrupamento.

Figura 8 - Exemplo de tarefa do agrupamento 20 retirada do Livro 2

2. Considerando a função f, dada por $f(x) = -3x + 1$, calcule:

a) $f(-2)$ 7 **c)** $f(\sqrt{2})$ $-3\sqrt{2} + 1$

b) x, para $f(x) = 0$ $\frac{1}{3}$ **d)** x, para $f(x) = 19$ -6

- Para quais valores de x temos $f(x)$ maior que zero? E menor que zero?
- Você conhece alguma forma de representar essa função de maneira que possa estudá-la melhor?

Fonte: LEONARDO (2016, p. 86)

Figura 9 - Exemplo de tarefa do agrupamento 20 retirada do Livro 2

6. Dada a função f, com $f(x) = 3x - 1$, determine:

a) $f(1) - f(0)$ 3 **c)** $f(3) - f(2)$ 3

b) $f(2) - f(1)$ 3 **d)** $f(4) - f(3)$ 3

- Observando os itens anteriores, identifique a variação que ocorre no valor de $f(x)$ quando é acrescentada uma unidade ao valor de x.
- Sem fazer contas, determine o valor de $f(28) - f(27)$.
- Refaça os itens anteriores para $g(x) = -3x - 1$.
- Os valores encontrados relacionam-se com o valor do coeficiente de x na lei da função? De que forma?
- Que conclusão podemos estabelecer?

Fonte: LEONARDO (2016, p. 86)

Figura 10 - Exemplo de tarefa do agrupamento 20 retirada do Livro 6

1. Determine o valor numérico da função afim $f(x) = -3x + 4$ para:

a) $x = 1$ $f(1) = 1$ c) $x = 0$ $f(0) = 4$

b) $x = \frac{1}{3}$ $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3$ d) $x = k + 1$ $f(k + 1) = -3k + 1$

Fonte: DANTE (2016, p. 93)

As tarefas desse agrupamento, por si só, não atendem aos Princípios da RME, nem possuem as características de boas tarefas, porque não dão oportunidade de matematização sem a interação com o professor. Com esse tipo de tarefa, a implementação é fortemente dependente das intervenções do professor na interação com os alunos, o que demanda grande disposição para a condução do trabalho em sala de aula.

Caso a ação do professor seja apenas indicar quais tarefas do livro os alunos devem fazer, as desse agrupamento não podem ser consideradas ricas, pois exigem apenas reconhecimento e reprodução.

A partir desse tipo de tarefa, é possível explorar diferentes situações que estão bem próximas à realidade de boa parte dos alunos, por exemplo, utilizar o contexto da cantina da escola. No entanto, o solicitado é, muitas vezes, apenas um procedimento de reprodução, já apresentado em aula, e isso faz delas tarefas rotineiras. A resposta é gerada diretamente do procedimento empregado.

Segundo Butts (1997), algumas dessas tarefas são classificadas como “exercícios algorítmicos” e outras como “problema de aplicação”, sendo que nessas últimas a maior dificuldade é traduzir o enunciado para uma linguagem matemática de modo que se possam utilizar os algoritmos já conhecidos para a sua resolução. Não demandam formulação de hipótese, nem justificativas ou qualquer argumentação.

Tarefas pontuais, que apenas guiam os alunos na aprendizagem de alguma técnica específica podem ser utilizados em sala de aula, mas é preciso que não sejam apenas essas. Nesse caso, por exemplo, os alunos precisariam entender por que estão aplicando a função em determinados pontos (ou valores). O que esses valores representam? Qual o significado que se pode atribuir ao valor que, ao ser aplicado na função, resulta em um valor de imagem nulo? Será possível aplicar qualquer valor real em função do tipo $f(x)=ax+b$?

Especificamente, qual o significado do valor resultante de uma operação (adição ou subtração) com os valores numéricos de funções aplicadas em dois pontos determinados. Por que foram escolhidos esses dois pontos? Eles representam alguma coisa? E a imagem deles? Representa alguma coisa em particular?

Os problemas que são sugeridos aos alunos não se constituem de fato em problemas, que despertem o interesse deles, colocando-os a pensar, a conjecturar e a buscar uma solução. Talvez seja esse um dos motivos por que os alunos mostrem pouco interesse pela matemática.

Para oportunizar uma mudança no nível de demanda cognitiva, poder-se ia pedir que os alunos resolvessem utilizando outras estratégias ou outros procedimentos, de tantas maneiras quanto possível. Questionar se, nesse caso, a resposta seria sempre a mesma e o porquê disso acontecer. Há informações suficientes para ser resolvido? Haveria outra que poderia auxiliar na resolução? O conteúdo necessário para a resolução é apenas do capítulo específico do livro? Consulte um marceneiro e verifique os preços que ele cobra no enunciado. Há diferenças? Quais e por quê? Se o marceneiro (conforme Figura 3) quiser ter o dobro do lucro, bastaria considerar o dobro da fórmula da lei de formulação da função, ($f(x) = 2(ax+b)$)? Por quê?

3.2 CONSIDERAÇÕES ACERCA DE TAREFAS DO AGRUPAMENTO 3 E 19

Apresentam-se, nesta seção, algumas considerações a respeito do modo de trabalho que se poderia ter com as tarefas dos agrupamentos 3 e 19. O descritor de cada um desses agrupamentos está apresentado no Quadro 6.

Quadro 6 - Descritores dos agrupamentos 3 e 19.

Agrupamentos	Descritor
3	Dada uma situação que pode ser modelada por uma função afim ($f(x) = ax+b$), apresentar uma lei de formação para a função que descreve a situação enunciada.
19	Escrever a lei de formação de função afim conhecendo: o valor dos seus coeficientes, o valor de um dos coeficientes e o valor da função em um ponto, o valor da função em dois pontos, o gráfico da função com dois pontos definidos ou as coordenadas de dois pontos por onde a função passa.

Fonte: o autor

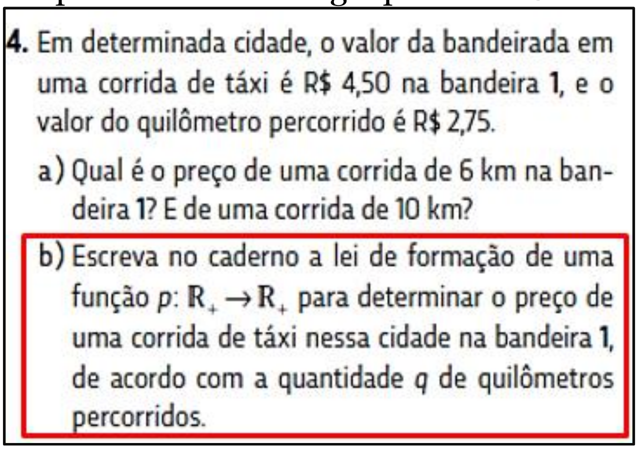
A justificativa que se tem para analisar esses dois agrupamentos juntos é que ambos requerem do aluno a formulação de uma lei de formação para uma função afim. As tarefas do agrupamento 3 requerem a lei de formação a partir de diversas situações (fenômenos), enquanto as tarefas do agrupamento 19 requerem a lei de formação a partir de dados matemáticos (gráficos, coordenadas de um ponto e coeficiente angular, coordenadas de dois pontos).

Pode-se entender que as tarefas do agrupamento 3 estão mais ligadas à tradução de um problema escrito na linguagem materna para a escrita matemática e que o agrupamento 19 traz tarefas mais ligadas ao processo de lidar com um fenômeno dentro da própria matemática.

Em relação ao agrupamento 3, o Livro que apresenta mais tarefas com as características desse agrupamento é o 4 (32 tarefas), enquanto o Livro 5 não apresenta questão alguma com tais características. Os demais livros apresentavam entre 7 e 12 questões.

Em algumas tarefas, pede-se, explicitamente, a lei de formação, como é o caso do exemplo da Figura 10. Em outras, a lei de formação de uma função não é pedida explicitamente, como é mostrado na Figura 11.

Figura 11 - Exemplo de tarefa do agrupamento 3 retirada do Livro 1



4. Em determinada cidade, o valor da bandeirada em uma corrida de táxi é R$ 4,50 na bandeira **1**, e o valor do quilômetro percorrido é R$ 2,75.

a) Qual é o preço de uma corrida de 6 km na bandeira 1? E de uma corrida de 10 km?

b) Escreva no caderno a lei de formação de uma função $p: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ para determinar o preço de uma corrida de táxi nessa cidade na bandeira **1**, de acordo com a quantidade q de quilômetros percorridos.

Fonte: CHAVANTE E PRESTES (2016, p. 71)

Figura 12 - Exemplo de tarefa do agrupamento 3 retirada do Livro 3

4 Uma caixa-d'água, de volume 21 m³, inicialmente vazia, começa a receber água de uma fonte à razão de 15 litros por minuto. Lembre-se de que 1 m³ equivale a 1 000 litros.

a) Quantos litros de água haverá na caixa após meia hora?

b) Após **x** minutos de funcionamento da fonte, qual será o volume (**y**) de água na caixa, em litros?

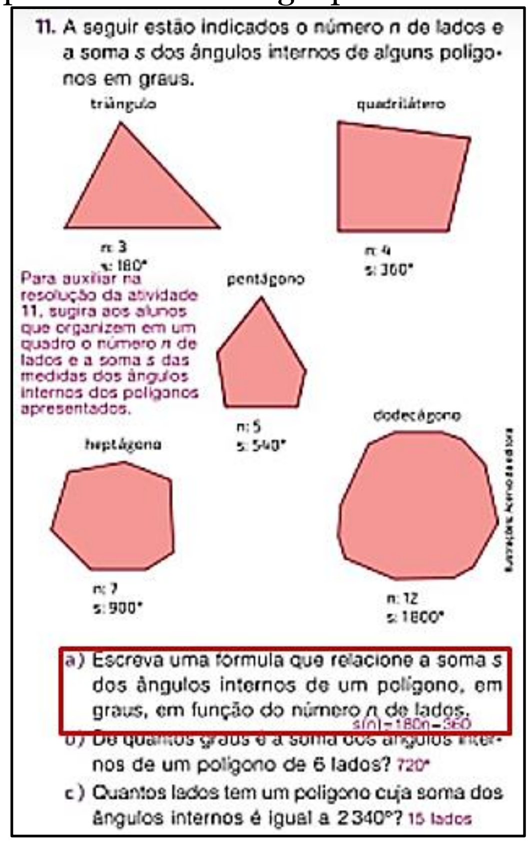
c) Após **x** minutos de funcionamento da fonte, qual será o volume (**y**) de água (em litros) necessário para preencher completamente a caixa?

d) Em quanto tempo a caixa estará cheia?

Fonte: IEZZI [et. al.] (2016, p. 75)

Há também tarefas que exploram situações especificamente matemáticas. O "mundo da matemática" deve ser também um mundo imaginável para os alunos. Assim como diversos contextos são propícios para a matematização, os fenômenos matemáticos também devem ser explorados em sala de aula. A Figura 12 apresenta um exemplo de tarefa desse tipo

Figura 13 - Exemplo de tarefa do agrupamento 3 retirada do Livro 4


11. A seguir estão indicados o número *n* de lados e a soma *s* dos ângulos internos de alguns polígonos em graus.

Para auxiliar na resolução da atividade 11, sugira aos alunos que organizem em um quadro o número *n* de lados e a soma *s* das medidas dos ângulos internos dos polígonos apresentados.

a) Escreva uma fórmula que relacione a soma *s* dos ângulos internos de um polígono, em graus, em função do número *n* de lados. $s(n) = 180n - 360$

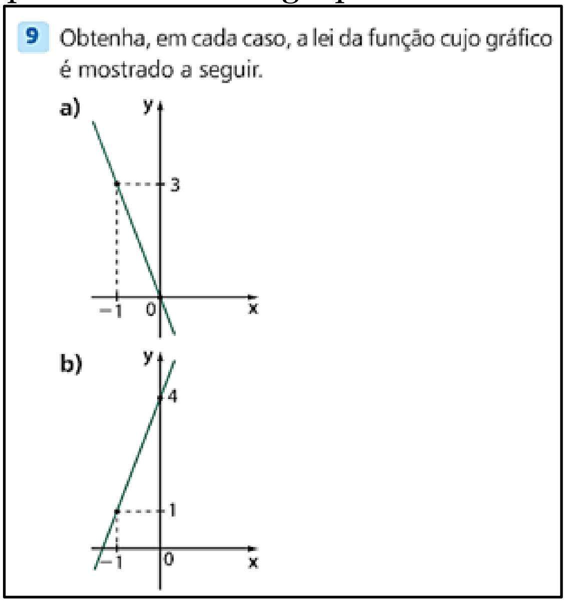
b) De quantos graus é a soma dos ângulos internos de um polígono de 6 lados? 720°

c) Quantos lados tem um polígono cuja soma dos ângulos internos é igual a 2340°? 15 lados

Fonte: SOUZA e GARCIA (2016, p. 78)

Em relação ao agrupamento 19, o Livro que apresenta mais tarefas com as características desse agrupamento é o 6 (24 tarefas), enquanto os demais livros apresentavam entre 2 e 10 questões. As próximas três figuras apresentam tarefas que compunham esse agrupamento.

Figura 14 - Exemplo de tarefa do agrupamento 19 retirada do Livro 3



Fonte: IEZZI [et. al.] (2016, p. 76)

Figura 15 - Exemplo de tarefa do agrupamento 19 retirada do Livro 5

08. Obtenha a função de 1º grau cujo gráfico passa por

a) $A(0,3)$ e $B(-1,2)$

b) $K(1,6)$ e $L(-2,-3)$

c) $C(3,7)$ e $D(0,0)$

d) $M(-1,3)$ e $N(0,0)$

Fonte: SMOLE e DINIZ (2016, p.102)

Figura 16 - Exemplo de tarefa do agrupamento 19 retirada do Livro 6

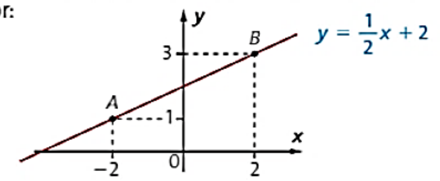
24. Qual é a equação da reta que:

a) passa pelo ponto $A(4, 6)$ e tem coeficiente angular $a = 3$? $y = 3x - 6$

b) passa pelo ponto $B(-4, 0)$ e tem coeficiente angular $a = -2$? $y = -2x - 8$

c) passa pelos pontos $D(0, 4)$ e $E(-2, -6)$? $y = 5x + 4$

25. Escreva no caderno a equação da reta representada por:



Fonte: DANTE (2016, p.84)

Também nesses agrupamentos, segundo Butts (1997), algumas tarefas são classificadas como “exercícios algorítmicos” e outras como “problema de aplicação”.

Nesses agrupamentos, as tarefas requerem, especificamente, a representação da situação envolvida no enunciado por meio de uma fórmula matemática. O processo de passagem (ou tradução) de um problema escrito na língua materna para uma linguagem matemática pode ser parte de um processo de matematização, dependendo da exploração que o professor fizer (DE LANGE, 1987).

Em relação aos princípios da RME, podem-se indicar algumas possibilidades de trabalho a partir desse tipo de tarefa. Por exemplo, ao se propor que os alunos partam de uma (ou várias) situação(ões) que pode(m) ser modelada(s) por uma função afim, na direção de encontrar uma fórmula matemática que represente aquele fenômeno[40], encontra-se aí uma oportunidade para matematizar.

Não há necessariamente um ponto de partida exato ou caminho certo para seguir quando se quer que um aluno matematize, qualquer tarefa pode ser um disparador para que o professor, com a oportuna intervenção, ajude o aluno a matematizar. No entanto, em relação às tarefas desse agrupamento, salienta-se que pode ser mais propício para a atividade de matematizar quando se colocam os alunos a investigar diferentes situações e, a partir dessa investigação, concluam que aqueles fenômenos possuem uma mesma maneira matemática de representação – todos podem ser modelados por uma função do tipo $f(x) = ax + b$.

Em relação ao princípio da realidade, tem-se a oportunidade de explorar os diversos contextos dos fenômenos que podem ser modelados por uma função afim. Ressalta-se, no entanto, que a utilização de diferentes contextos não deve ocorrer apenas ao final de um capítulo. É desejável ter uma tarefa em que alunos investiguem alguns fenômenos e, após essa investigação, cheguem à conclusão de que as funções que modelam aqueles fenômenos são todas do mesmo tipo, ou seja, nesse caso, funções afins.

Em relação aos demais princípios da RME, assume-se também que estarão, de alguma forma, mais próximos de serem contemplados à

---

[40] Em relação às tarefas, neste trabalho, utiliza-se situação ou fenômeno como qualquer fato ou evento realístico que pode ser descrito e explicado.

medida que se caminhe na direção de um trabalho investigativo. Desse modo, por exemplo, a interação entre os alunos, o engajamento deles no sentido de se buscar soluções cada vez mais formalizadas (ideia do princípio de níveis) ficam mais próximos de acontecer.

Quando se fala dessa ideia de começar com uma tarefa, deixando os alunos explorarem todas as possibilidades para só depois definir as coisas, pode-se dizer então que se está trabalhando mais próximo do método de ensino da RME, a Reinvenção Guiada[41] (SANTOS, 2014).

Na perspectiva da RME, indica-se partir de produções próprias dos alunos e caminhar no sentido de ter uma produção do aluno cada vez mais formalizada. O contrário disso, iniciar de uma matemática já formalizada para, só depois, trabalhar com situações particulares e que permitam soluções informais, foi chamado por Freudenthal de inversão antididática.

Iniciar o ensino de um novo conteúdo diretamente pela definição daquele objeto matemático, como se tudo o que se sabe a respeito daquele assunto decorresse daquela definição, ignora o fato de que, em muitos casos, a definição de um objeto matemático é algo a que se chegou depois de muito trabalho, muitas tentativas, muitos erros.

As tarefas desse agrupamento seriam, em sua maioria, classificadas como problemas de aplicação segundo a classificação de Butts (1997). Ou seja, são problemas que envolvem aplicações de algoritmos, e as suas resoluções requerem: a) a formulação simbólica do problema para, então, b) a manipulação dos símbolos de acordo com um ou vários algoritmos

Há uma certa variedade de situações[42] que podem ser modeladas matematicamente por uma função afim, e isso fica explícito quando se observam as tarefas que compõem esta investigação. No entanto, deve-se ter o devido cuidado para que a abordagem desses contextos não seja feita apenas de maneira superficial. Não é o fato de se pedir ao aluno que

---

[41][...] pode-se entender a reinvenção guiada como método de ensino, como elemento de dimensão ampla no campo da prática docente já que oferece ao professor uma visão geral do caminho que ele poderá utilizar para orientar suas ações de modo a auxiliar os alunos a serem autores dos seus próprios conhecimentos em Matemática (SANTOS, 2014, p. 71).

[42] Corrida de táxi, conta de telefone, conta de energia, conta de água, serviços de plano de saúde, plano de acesso à Internet, entre outros.

escreva a lei de formação de uma função que modela uma corrida de táxi que efetiva um trabalho que explorou esse tema.

Pode-se pensar em diferentes questionamentos que possam orientar o trabalho do professor a guiar os seus alunos para explorarem de fato o contexto de uma tarefa. Por exemplo, em relação a corridas de táxis, o professor pode fazer questionamentos do tipo: será que na sua cidade existem táxis? Seria possível conversar com um taxista e saber como ele faz a cobrança das suas corridas? Existem outros meios de transporte, parecido com o do táxi, por exemplo, via aplicativos de celulares, que também prestam esse tipo de serviço na cidade? Como esses aplicativos estabelecem o preço de suas corridas? Existe serviço de transporte coletivo na cidade? Como as empresas que operam esse serviço estabelecem o preço a ser cobrado de cada passageiro? Será que tanto uma viagem feita com o auxílio de aplicativos quanto uma feita por meio do sistema de transporte coletivo pode ser modelada por uma função afim? Existe outro meio de transporte na cidade?

E a questão dos impostos? Todos esses meios de transporte pagam os mesmos impostos e, proporcionalmente, o mesmo valor? Por que a diferença de preço é tão alta de um serviço para outro? Quais os fatores que são determinantes para o estabelecimento do preço de um serviço?

É preciso pensar e discutir essas questões juntamente com os alunos. Talvez a partir de uma tarefa como essa (exploração matemática do preço de uma corrida de táxi) fosse possível estabelecer outros passos na direção de os alunos investigarem os meios de transporte que existem na cidade. Por exemplo, os alunos poderiam ser divididos em pequenas equipes e, após essa divisão, cada uma dessas equipes investigaria um outro meio de transporte, apresentando uma exploração matemática para cada um desses meios de transporte.

Em outra direção, poder-se-ia discutir por que, em um país tão grande, o transporte ferroviário é tão pouco explorado? Seria por ser mais caro? Será que o professor de Geografia poderia ajudar na discussão mostrando o mapa da malha ferroviária da região circunvizinha? Ao Estado? Ao país? Seria possível saber quanto custaria?

Esse tipo de exploração pode possibilitar, por exemplo, que se tenham pessoas mais engajadas com a questões políticas da cidade onde vivem. No caso do transporte coletivo, por exemplo, algumas prefeituras ou órgãos municipais, juntamente com as empresas prestadoras de serviço de transporte, promovem debates (ou fóruns) com a comunidade para decidir (ou pensar) no preço da passagem de ônibus, entre outras coisas, e a participação da comunidade nesses eventos geralmente é muito baixa.

O que se pretende é que, pela matemática, formem-se cidadãos empenhados na busca de solução, pelo menos, para os problemas a sua volta; que a matemática seja útil para as pessoas compreenderem a sua realidade e, a partir desse entendimento, lutarem pela realidade com a qual sonham. É esse tipo de utilidade a que Freudenthal (1968) se refere ao propor que a Matemática deve ser útil para quem está aprendendo.

Outro contexto que também aparece com certa frequência em tarefas que solicitam que os alunos escrevam uma lei de formação de função é a ideia de planos de saúde. O professor pode discutir questões do tipo: Há hospitais na sua cidade? Será que há pessoas na sua cidade que possuem planos de saúde? Todos dependem de atendimento de saúde via SUS[43]? Como será que as prefeituras pagam o SUS? É parecido com um plano de saúde? Por quê?

Conforme aponta van den Heuvel Panhuizen (2005), O importante é que o contexto da tarefa seja adequado para a matematização e que os estudantes sejam capazes de imaginar a situação ou evento, para que possam fazer uso das suas próprias experiências e conhecimentos. Isso também poderia ser verdade para problemas numéricos simples, que podem ser significativos fora de qualquer contexto da vida real.

Com isso não se quer dizer que, em uma cidade que não possui um hospital, não se pode trabalhar com esse tipo de problema com os alunos. Apenas deve-se tomar o cuidado para que o fenômeno possa ser imaginável pelos alunos, que faça algum sentido para eles. Em alguns lugares pode haver pessoas que não possuem plano de saúde. Nesse caso, os alunos podem

---

[43]Sistema Único de Saúde

investigar a situação e levantar questões: Por que existem pessoas que não possuem plano de saúde na cidade? Como poderiam ter? O que precisariam fazer para ter? É preciso que todos tenham?

Esse tipo de discussão pode incitar o aluno a investigar diversos fenômenos do seu entorno, passando, então, a caminhar muito mais próximo de ter uma educação pela matemática

Especificamente, quando se trabalha em uma perspectiva realística, não se tem a intenção trabalhar apenas com contextos que estejam imediatamente próximos dos estudantes. Por exemplo, o filho de um agricultor não deve apenas explorar tarefas que tenham contextos que abordem situações de agricultura. Ele tem que conhecer novas coisas, ampliar seu horizonte de entendimento e conhecimento. E fazer isso é prerrogativa também da escola.

Outro elemento importante, também indicado em van den Heuvel Panhuizen (2005), é que os estudantes podem moldar uma determinada situação problema para que eles próprios tenham, em um certo sentido, o domínio da situação, isto é, eles são os "donos" do problema.

As próximas três figuras mostram exemplos de outros contextos que poderiam ser explorados nesse sentido. Por exemplo, quando o fenômeno a ser modelado aborda comida, há todo um debate que pode ser feito em relação ao acesso (ou não) que as pessoas têm a essa comida. Outro exemplo, quando um professor estiver trabalhando em um bairro de periferia, como deverá ser feita a abordagem de uma tarefa que trata de pessoas indo fazer suas refeições em restaurantes ou pizzarias? Será que aqueles alunos têm acesso àquele serviço? Se não têm, por quê? Quanto custaria para uma pessoa alimentar-se com três refeições saudáveis[44] por dia? Questões desse tipo estão sempre presentes na mente de um professor que busca trabalhar na abordagem da RME.

A tarefa do livro didático já está lá, e que bom que esteja. Então, a partir dela, é desejável estar preparado para explorar diferentes caminhos com os alunos. É como que se estivesse trabalhando em algo que nunca tem

[44] Saudável aqui significando com todos os nutrientes necessários diariamente para se ter saúde.

um fim, que não tem um limite preestabelecido ou uma maneira única de fazer. A aprendizagem não se dá de maneira linear, tijolinhos após tijolinhos, e é para enfrentar esse processo caótico em que ela acontece que se deve estar preparado.

Figura 17 - Exemplo de tarefa do agrupamento 3 retirada do Livro 8

20. Em alguns restaurantes os clientes se servem à vontade e pagam pela quantidade de comida, em quilogramas, que está no prato. Supondo que em certo estabelecimento cada 100 g de comida custe R$ 2,20:

a) Escreva a lei de formação da função que determina o valor a ser pago (V), em reais, em função da quantidade de comida em quilogramas (*c*). $V(c) = 22c$

b) Esboce um gráfico que representa essa situação. Professor(a): Veja a resposta deste item na Assessoria Pedagógica.

Fonte: BALESTRI (2016, p. 80)

Figura 18 - Exemplo de tarefa do agrupamento 3 retirada do Livro 4

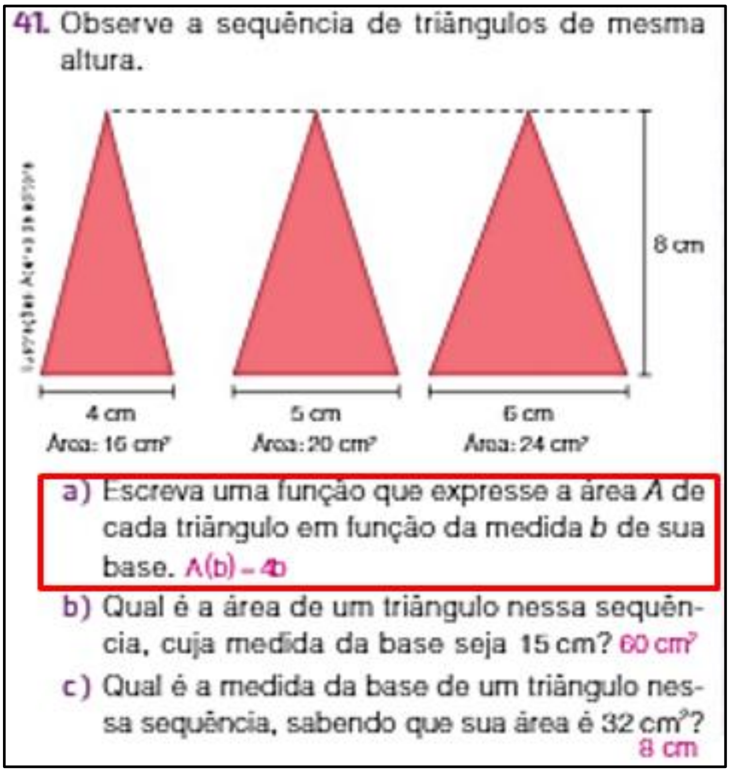
4. Uma pizzaria oferece serviço de entrega e cobra por isso uma taxa fixa de R$ 2,00 mais R$ 0,80 por quilômetro rodado no trajeto entre o estabelecimento e o local da entrega.

a) Qual será o valor da taxa se o local da entrega for a 13 km da pizzaria? E se o local for a 8,5 km? R$ 12,40; R$ 8,80

b) Escreva uma função que permita calcular o valor *t* da taxa de entrega, em reais, em função da distância *d* percorrida, em quilômetros. $t(d) = 2 + 0{,}8d$

Fonte: SOUZA e GARCIA (2016, p. 77)

Figura 19 - Exemplo de tarefa do agrupamento 3 retirada do Livro 4



41. Observe a sequência de triângulos de mesma altura.

a) Escreva uma função que expresse a área *A* de cada triângulo em função da medida *b* de sua base. A(b) = 4b

b) Qual é a área de um triângulo nessa sequência, cuja medida da base seja 15 cm? 60 cm²

c) Qual é a medida da base de um triângulo nessa sequência, sabendo que sua área é 32 cm²? 8 cm

Fonte: SOUZA e GARCIA (2016, p. 94)

3.3 Considerações acerca de tarefas dos agrupamentos 4 e 7

Nesta seção serão tecidas algumas considerações em relação à maneira pela qual o trabalho com as tarefas dos agrupamentos 4 e 7 poderia acontecer. O descritor de cada um desses agrupamentos está apresentado no Quadro 7.

Quadro 7 - Descritores dos agrupamentos 4 e 7.

Agrupamentos	Descritor
4	Resolver inequações (simultâneas, produto ou quociente), sistemas de inequações e situações problemas que resultam em inequações ou sistemas de inequações.
7	Realizar o estudo de sinal de funções afins que são dadas algebricamente ou graficamente.

Fonte: o autor

As considerações a respeito das tarefas dos agrupamentos 4 e 7 foram colocadas juntas pela semelhança matemática que há nessas tarefas. Saber analisar o sinal de uma função é saber encontrar os pontos para os quais aquela sentença, que define a função, é igual, maior ou menor que zero, sendo tais características as que também definem o que é resolver uma inequação.

Todos os livros analisados apresentam grande quantidade de tarefas com as características do agrupamento 4. Foram colocados 124 itens nesse agrupamento. O Livro 2 e o 3 foram os que mais apresentaram itens, 24 e 21, respectivamente. Os demais apresentaram entre 8 e 19 itens. As Figuras 16, 17, 18, 19 e 20 mostram exemplos de tarefas que compõem esse agrupamento.

Figura 20 - Exemplo de tarefa do agrupamento 4 retirada do Livro 3

42 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações seguintes, estudando o sinal das funções envolvidas:

a) $2x - 1 \geqslant 0$

b) $-4x + 3 < 0$

c) $-2x \leqslant 0$

d) $3x + 6 > 0$

e) $x - 3 \leqslant -x + 5$

f) $3(x - 1) + 4x \leqslant -10$

g) $-2(x - 1) - 5(1 - x) > 0$

43 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $\frac{x-1}{3} - \frac{x-2}{2} \leqslant 2$

b) $\frac{2(3-x)}{5} + \frac{x}{2} \geqslant \frac{1}{4} + \frac{2(x-1)}{3}$

c) $\frac{3x-1}{4} - \frac{x-3}{2} \geqslant \frac{x+7}{4}$

d) $(x-3)^2 - (4-x)^2 \leqslant \frac{x}{2}$

e) $\frac{4x-3}{5} - \frac{2+x}{3} < \frac{3x}{5} + 1 - \frac{2x}{15}$

Fonte: IEZZI [et. al.] (2016, p. 89)

Figura 21 - Exemplo de tarefa do agrupamento 4 retirada do Livro 2

36. Encontre a solução das inequações em $\mathbb{R}$.

a) $5 \leqslant 3x - 4 < x + 2$ $S = \varnothing$

b) $\frac{3x}{5} \leqslant \frac{5x+2}{4} \leqslant \frac{-x+1}{2}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{10}{13} \leqslant x \leqslant 0\right\}$

c) $\begin{cases} x + 3 \geqslant 0 \\ 4x - 7 \leqslant x - 4 \end{cases}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 1\}$

d) $\begin{cases} 5x - 2 > 4 - x \\ 2(7 - x) \leqslant 5(2x + 4) \\ 2 - 3(4 + 2x) < 6 + 2(1 - 2x) \end{cases}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

Fonte: LEONARDO (2016, p. 101)

Figura 22 - Exemplo de tarefa do agrupamento 4 retirada do Livro 4

50. Para a produção de bolos, uma confeitaria tem uma despesa mensal de R$ 3 500,00 em mercadorias e mais R$ 2 500,00 em outros gastos. Cada bolo produzido nessa confeitaria é vendido por R$ 40,00.

a) Escreva a função que determina o lucro L dessa confeitaria, em função da quantidade q de bolos vendidos. $L(q) = 40q - 6\,000$

b) Para quais valores de q a função que você escreveu no item a assume valores positivos? O que podemos concluir nesse caso?

Resposta no final do livro.

51. Uma bomba-d'água envia 1 500 L de água por minuto para um reservatório. Qual é o tempo mínimo de funcionamento dessa bomba para que ela envie uma quantidade maior ou igual a 22 500 L de água para o reservatório? 15 min

Fonte: SOUZA e GARCIA (2016, p. 97)

Figura 23 - Exemplo de tarefa do agrupamento 4 retirada do Livro 6

31. Resolva no caderno, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações usando o processo que julgar mais conveniente:

a) $3 - 4x > x - 7$ $\quad S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

b) $\dfrac{x}{4} - \dfrac{3(x-1)}{10} \leqslant 1$ $\quad S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -14\}$

32. Resolva no caderno os sistemas de inequações em $\mathbb{R}$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 4\}$

a) $1 \leqslant x + 1 < 5$

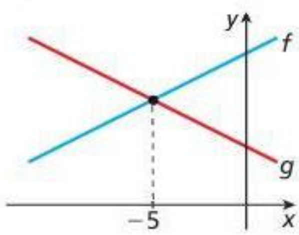
$S = \left\{x \in R \mid \frac{1}{2} \leqslant x < 3\right\}$

b) $\begin{cases} 5 - 2x \leqslant 4 \\ x - 5 < 1 - x \end{cases}$

Fonte: DANTE (2016, p. 89)

Figura 24 - Exemplo de tarefa do agrupamento 4 retirada do Livro 2

28. Os gráficos de duas funções, f e g, estão representados no plano cartesiano abaixo.



Analisando o gráfico, resolva as questões a seguir.

a) Para qual valor de x tem-se $f(x) = g(x)$? $x = -5$

b) Qual é o conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$? $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5\}$

c) Determine o conjunto solução da inequação $g(x) \geqslant f(x)$. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -5\}$

Fonte: LEONARDO (2016, p. 98)

Segundo a classificação de Butts (1997), a maioria das tarefas desse agrupamento está classificada como exercícios algorítmicos, que podem ser resolvidos com um procedimento passo a passo e que privilegiam procedimentos no nível de reprodução.

As tarefas do agrupamento 7 possuem uma forte ligação com as do agrupamento 4. Requerem também procedimentos de reprodução, no entanto, quando exploradas podem demandar procedimentos do nível de conexão e/ou análise.

Todos os livros apresentaram tarefas com essas características que definem o agrupamento 7. O Livro que apresentou mais tarefas foi o 3, com quinze itens. Os demais livros variaram entre quatro e oito tarefas. As figuras a seguir mostram exemplos de tarefas que foram colocadas no agrupamento 7.

Figura 25 - Exemplo de tarefa do agrupamento 7 retirada do livro 1

20. Estude o sinal de cada função afim definida a seguir.

a) $f(x) = 2x - 3$

b) $f(x) = x + 2$

c) $f(x) = -2x - 8$

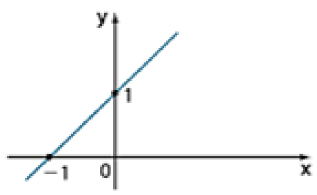
d) $f(x) = \frac{x}{3} + 2$

Fonte: CHAVANTE E PRESTES (2016, p. 82)

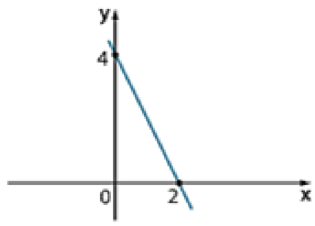
Figura 26 - Exemplo de tarefa do agrupamento 7 retirada do livro 3

40 Em cada caso, estude o sinal da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ representada no gráfico.

a)



b)



41 Estude o sinal de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ seguintes:

a) $y = 4x + 1$

b) $y = -3x + 1$

c) $y = -7x$

d) $y = \frac{x - 3}{5}$

e) $y = \frac{x}{2}$

f) $y = 3 - x$

Fonte: IEZZI [et. al.] (2016, p. 87)

Figura 27 - Exemplo de tarefa do agrupamento 7 retirada do livro 6

27. Estude a variação do sinal das seguintes funções afins:

a) $f(x) = x + 4$

b) $f(x) = -2x + 1$

c) $f(x) = 3x - 5$

d) $f(x) = -1 + \frac{1}{2}x$

Veja a resolução no Manual do Professor.

Fonte: DANTE (2016, p.87)

Figura 28 - Exemplo de tarefa do agrupamento 7 retirada do livro 8

21. Realize o estudo do sinal de cada função.
Professor(a): Veja a resposta desta atividade no final do livro.

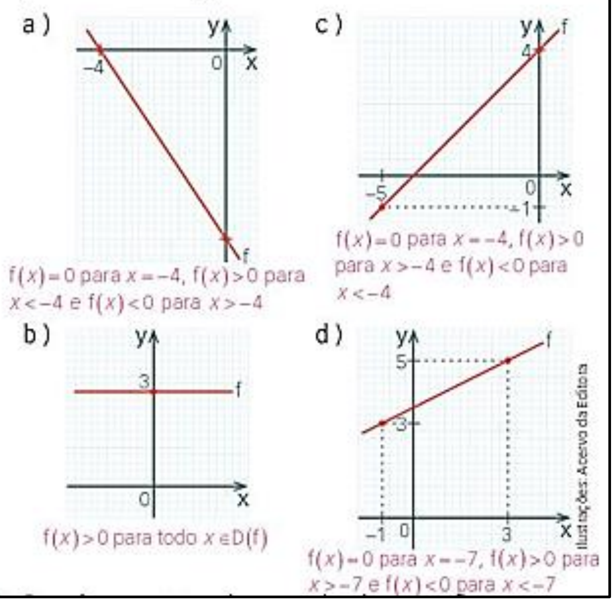
a) $f(x)=4x-2$

b) $g(x)=\frac{2}{3}x+6$

c) $h(x)=7-x$

d) $m(x)=\frac{x}{2}$

22. Faça o estudo do sinal de cada função afim representada no gráfico.



Fonte: BALESTRI (2016, p.83)

As tarefas desse agrupamento, segundo a classificação de Butts (1997), seriam problemas de aplicação que requerem a formulação simbólica do problema para, então, manipulá-la de acordo com um ou vários algoritmos.

De modo geral, nas questões que envolvem o trabalho com as tarefas desses dois agrupamentos, destaca-se a ideia de não se ter em sala de aula um trabalho que apenas valorize procedimentos rotineiros, que dão margem a caminhos sequenciais e passíveis de memorização. É desejável que se trabalhe em uma perspectiva mais ampla, na qual cada aluno possa aprender trilhando seu próprio caminho e os professores encontrem nas produções dos alunos indicativos para os próximos passos a serem seguidos no processo de ensino.

É preciso pensar em questões tais como: O que é resolver uma inequação? Por que trabalhar com inequações quando se está estudando função afim? Qual a relação entre o que uma equação mostra e o que mostra uma inequação? Por que, quando se faz uma divisão por um número negativo o sinal da desigualdade fica invertido? Um bom trabalho de sala de aula dificilmente será bem conduzido se quem o conduz não reflete sobre questões que envolvem desde o porquê daquele assunto a ser ensinado até como entender de que maneira a aprendizagem daquele assunto poderia se dar.

Nas situações em que é preciso apenas resolver uma inequação ou um sistema de inequações, é sempre desejável que elas sejam oriundas (ou que deem origem) de algum problema, que não seja apenas um amontoado de letras, números e símbolos que o aluno, se conseguir lidar com aquilo, reorganiza de outra maneira e diz que essa nova organização é uma resposta, mesmo não entendendo o que está respondendo.

Nas tarefas que focalizam a análise de sinais de funções, pode-se pensar que é uma aplicação no próprio campo da matemática e, desse modo, não haveria muitos caminhos a seguir, basta seguir as regras convencionalmente aceitas dentro da matemática. Mas não precisa ser assim. O professor pode, pelo menos, alternar entre as resoluções algébricas e gráficas, mostrando que esse tipo de tarefa não precisa ser explorado com base em um único tipo de representação.

O trabalho com diferentes modos de representação pode permitir que o aluno tenha mais possibilidades de lidar com aquela tarefa, argumentar sobre fatos que se apresentam e formular hipóteses no que diz respeito às diferentes interpretações que se pode ter em relação a um mesmo fenômeno.

É claro que tarefas que enfatizam a aprendizagem de uma técnica específica, do tipo "resolva", "calcule", entre outras, podem ser usadas em sala de aula, no entanto é preciso que se tenha sempre o cuidado para não permanecer apenas com esse tipo de tarefa. É necessário ter um equilíbrio na proposição de tarefas e um posicionamento dinâmico e aberto para saber lidar com as diferentes respostas que podem surgir de uma tarefa.

A ideia é que haja sempre situações que permitam que os alunos tenham a oportunidade de matematizar. Para isso não há, necessariamente, sempre um mesmo ponto de partida. Os alunos podem, por exemplo, a partir de uma inequação ou sistema de inequação, pensar em um problema que tenha como modelo matemático aquela inequação ou sistema de inequação.

3.4 Considerações acerca de tarefas dos agrupamento 5 e 9.

Esta seção traz algumas considerações em relação ao modo pelo qual o trabalho com as tarefas dos agrupamentos 5 e 9 poderia acontecer. O Quadro 8 apresenta o que foi considerado como o descritor de cada um desses agrupamentos.

Quadro 8 - Descritores dos agrupamentos 5 e 9.

Agrupamentos	Descritor
5	Identificar e classificar, a partir de algumas leis de formação de funções, quais delas são afim (ou não), linear constante ou identidade. Mostrar que uma função dada é afim. Determinar coeficientes algébricos de polinômios, para que esses sejam funções lineares.
9	Dadas as leis de formação de funções afins, classificá-las em crescente, decrescente ou constante. Estudar coeficientes angulares, dados algebricamente, de funções afim de modo a analisar se a função é crescente ou decrescente.

Fonte: o autor

Mesmo apresentando itens diferentes, as considerações em relação às tarefas dos agrupamentos 5 e 9 foram feitas conjuntamente por se entender que ambos os agrupamentos possuem tarefas que requerem procedimentos de reconhecimento por parte do aluno para resolvê-las. O primeiro caso requer o reconhecimento de algumas definições de funções e o segundo solicita o reconhecimento de uma característica específica de uma função, que é reconhecer se ela é crescente ou decrescente.

O Livro 2 é o que mais apresenta tarefas com as características do agrupamento 5, 13 tarefas, enquanto no Livro 3 e no 6 não se encontra tarefa alguma alocada nesse agrupamento. As figuras a seguir mostram exemplos de tarefas que foram colocadas nesse agrupamento.

Figura 29 - Exemplo de tarefa do agrupamento 5 retirada do livro 2

1. Das funções abaixo, identifique quais são leis de funções afins. Nesses casos, determine o valor dos coeficientes a e b.

a) $g(x) = 2x + 4$ $a = 2$ e $b = 4$ **c)** $f(x) = -\sqrt{3}$ $a = 0$ e $b = -\sqrt{3}$

b) $i(x) = 2 + x^2$ Não é função afim.

- Por que algumas dessas funções não são afins?

A função i não é afim, porque não assume forma $ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Fonte: LEONARDO (2016, p. 86)

Figura 30 - Exemplo de tarefa do agrupamento 5 retirada do livro 5

11. Determine **m** e **n** para que as funções **f** e **g** definidas abaixo sejam lineares

a) $f(x) = (m-3)x^2 + 5x + n + 4$

b) $mx^3 + (n-5)x^2 + 2x + 2m + n - 5$

12. Mostre que f é uma função afim.

a) $f(x) = (x-6)^2 - (x-3)(x-12)$ b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 2x}{3x^2 + 3}$

Fonte: SMOLE e DINIZ (2016, p.102)

Figura 31 - Exemplo de tarefa do agrupamento 5 retirada do livro 8

1. Em quais dos itens a função é afim? a; c

a) $f(x) = 3x - 1$ d) $m(x) = x^2 + 6x - 0{,}8$

b) $g(x) = 2^x + 9$ e) $p(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $h(x) = \dfrac{x}{4} - 7$

Fonte: BALESTRI (2016, p. 72)

A maioria das tarefas desse agrupamento, quando classificadas segundo Butts (1997), são exercícios de reconhecimento em que se questiona se o resolvedor conhece ou relembra um fato específico, uma definição ou o enunciado de um teorema.

Em relação ao agrupamento 9, todos os livros apresentavam tarefas com as características desse agrupamento. O Livro 5 e o 8, com 12 itens cada um, foram os que mais apresentaram tarefas. Os demais livros apresentaram entre 1 e 8 tarefas para esse agrupamento. As figuras a seguir apresentam exemplos de tarefas que foram colocadas nesse agrupamento.

Figura 32 - Exemplo de tarefa do agrupamento 9 retirada do livro 1

8. Classifique em crescente, decrescente ou constante a função afim definida por:

a) $f(x) = 4x + 2$ b) $g(x) = 20$ c) $h(x) = -x + 5$ d) $m(x) = 12 - 5x$

Fonte: CHAVANTE E PRESTES (2016, p.76)

Figura 33 - Exemplo de tarefa do agrupamento 9 retirada do livro 2

14. Classifique cada função polinomial do 1º grau abaixo como crescente ou decrescente.

a) $f(x) = -5x + 2$
decrescente

b) $h(x) = -3 + \frac{x}{2}$
crescente

c) $g(x) = x - \frac{3}{4}$
crescente

d) $f(x) = 1 - 2x$
decrescente

Fonte: LEONARDO (2016, p 94)

Figura 34 - Exemplo de tarefa do agrupamento 9 retirada do livro 3

37 Para cada uma das funções afim dadas pelas leis seguintes, identifique o coeficiente angular (**a**) e o coeficiente linear (**b**). Classifique a função em crescente ou decrescente.

a) $y = 3x - 2$

b) $y = -x + 3$

c) $y = \frac{5 - 2x}{3}$

d) $y = 9x$

e) $y = (x + 3)^2 - (x + 1)^2$

Fonte: IEZZI [et. al.] (2016, p. 86)

Figura 35 - Exemplo de tarefa do agrupamento 9 retirada do livro 8

14. Classifique cada uma das funções afins em crescente ou decrescente.

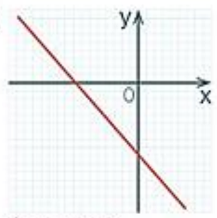
a) $m(x) = 8{,}3 - 2{,}9x$ decrescente

b) $n(x) = -\frac{2x}{5} - \frac{1}{3}$ decrescente

c) $p(x) = 6\left(x + \sqrt{13}\right)$ crescente

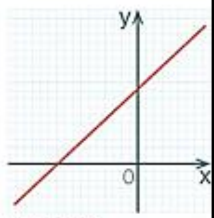
d) $q(x) = x\left(\pi - \frac{7}{2}\right)$ decrescente

e)



decrescente

f)



crescente

Fonte: BALESTRI (2016, p.79)

As tarefas do agrupamento 9 também são, em sua maioria, classificadas, segundo Butts (1997), como exercícios de reconhecimento em que o resolvedor é questionado se conhece ou lembra de um fato específico ou uma definição.

Basicamente, o que diferencia as tarefas dos agrupamentos 5 e 9 é que, enquanto as do primeiro questionam se os alunos (ou resolvedores) relembram de alguma definição, as tarefas do segundo requerem que os resolvedores relembrem de um fato específico, que, nesse caso, é o de saber que uma função afim é crescente quando possui coeficiente angular maior do que zero e é decrescente quando possui coeficiente angular menor do que zero.

Uma solução apontada por Butts (1997) para a retomada das definições ou fatos básicos pode ser a solicitação, por parte dos professores, para que os alunos deem exemplos de definições ou fatos que entendem que sejam importantes. Nas tarefas desses agrupamentos poderiam ser pedidos exemplos de funções que são ou não são afim, ou, ainda, exemplos de funções afins que fossem crescentes, constantes ou decrescentes.

Às vezes, uma simples alteração na proposição já pode modificar o nível de demanda cognitiva de uma tarefa, que passa de um item fechado para um aberto, com várias possibilidades de resposta, com diferentes meios para se encontrar a resposta, com procedimentos diferentes dos de memorização, deixando de ser uma tarefa de reprodução para ser uma de conexão

Com a ideia de pedir exemplos aos alunos em vez de apenas solicitar que identifiquem determinada característica ou definição, pode-se pensar em propor uma tarefa que não apresente solução alguma.

Essas ideias de que tarefas matemáticas sempre apresentam solução e, mais ainda, que ela é sempre única deve ser aos poucos desvinculada da prática dos professores. Trabalhar com tarefas que admitam mais de uma resposta, que possam ser resolvidas por diferentes métodos ou que até mesmo não tenham solução, é até desejável em uma perspectiva realística.

Com a intenção de oportunizar a matematização, poder-se-ia conduzir um trabalho mais voltado para atividades investigativas que abordassem diferentes características de determinadas funções, que não apenas a função afim, e em diferentes temas. Isso poderia gerar o aparecimento de um tipo diferente que seria utilizado para introduzir outros modelos de função.

As tarefas desses agrupamentos necessitam de uma disposição do professor em caminhar *pari passu* com os alunos, fazendo intervenções que ampliem o alcance das tarefas apresentadas nos livros. Esse alcance buscaria, em última instância, oportunizar alguma matematização. Para isso, é fundamental que o professor tenha muito conhecimento do conteúdo, além de um compromisso consciente com a aprendizagem dos alunos. Uma condição é a capacidade de refletir sobre as atividades realizadas. Essa reflexão pode ser provocada pela interação, por exemplo, entre alunos e professor, alunos entre si, alunos e diferentes materiais de apoio. É preciso lembrar que a aprendizagem da matemática não acontece apenas em uma atividade pessoal, mas também em uma atividade social, uma vez que a aula deve acontecer para todos; mesmo que em ritmos e trajetórias distintas.

3.5 Considerações acerca de tarefas do agrupamento 23

Nesta seção serão apresentadas algumas considerações a respeito das 103 tarefas que compõem o agrupamento 23. Essas tarefas não atenderam a descritor algum dos outros 22 agrupamentos, bem como não foi possível agrupá-las sob outro critério que não fosse com a denominação “agrupamento discordante”. Isso quer dizer que essas tarefas não se enquadram em nenhum outro agrupamento e que cada uma pode gerar um agrupamento diferente.

A distribuição da quantidade de tarefas desse agrupamento por livro é mostrada no quadro a seguir.

L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	total
02	19	13	05	43	05	09	07	103

As próximas oito figuras apresentam um exemplo de cada um dos livros do tipo de tarefa que compõe esse agrupamento.

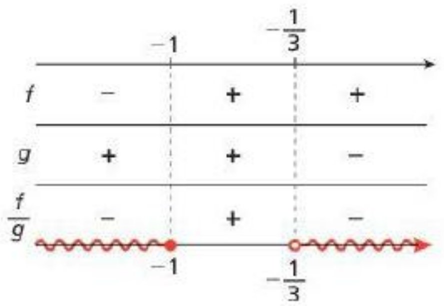
Figura 36 - Exemplo de tarefa do agrupamento 23 retirada do livro 1

12. Desafio Considere as funções afins $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que $f(4) = g(4)$. Sabendo que f é crescente e g é decrescente, podemos afirmar que o coeficiente linear de f é menor do que o coeficiente linear de g? Justifique.

Fonte: CHAVANTE E PRESTES (2016, p. 77)

Figura 37 - Exemplo de tarefa do agrupamento 23 retirada do livro 2

35. Sabendo que f e g são funções afins, analise este quadro de sinais, usado para resolver uma inequação.



b) f é crescente e g é decrescente.

a) Qual é o zero da função f? E da função g? -1; $-\frac{1}{3}$

b) As funções f e g são crescentes ou decrescentes?

c) Esse quadro de sinais está sendo usado para resolver uma inequação-produto ou uma inequação-quociente? inequação-quociente

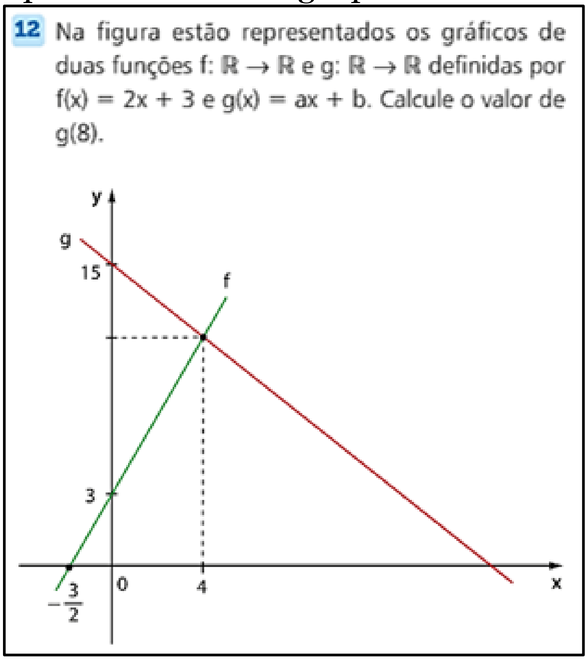
d) De acordo com esse quadro de sinais, qual é a solução da inequação? $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x > -\frac{1}{3}\right\}$

e) A inequação $\frac{3x + 3}{-3x - 1} < 0$ poderia ter a solução apresentada no quadro de sinais? Por quê?

f) Escreva uma inequação cuja solução seja a resposta apresentada no quadro de sinais. Apresente para os colegas a inequação que você encontrou e analise as inequações encontradas por eles. Há somente uma opção de resposta?

Fonte: LEONARDO (2016, p. 100)

Figura 38 - Exemplo de tarefa do agrupamento 23 retirada do livro 3


12 Na figura estão representados os gráficos de duas funções f: ℝ → ℝ e g: ℝ → ℝ definidas por f(x) = 2x + 3 e g(x) = ax + b. Calcule o valor de g(8).

Fonte: IEZZI [et. al.] (2016, p. 76)

Figura 39 - Exemplo de tarefa do agrupamento 23 retirada do livro 4


36. Para alugar um automóvel, Paulo consultou duas locadoras. Ele obteve os seguintes preços para o aluguel de um automóvel da mesma categoria:

a) Escreva a lei de formação que relaciona o preço total *V* a ser pago em função dos quilômetros rodados *x* para o automóvel de cada locadora.
locadora A: V(x) = 82 + 0,52x; locadora B: V(x) = 76 + 0,55x

b) Sabendo que Paulo pretende rodar cerca de 75 km, em qual das locadoras será mais vantajoso alugar o automóvel? locadora B

c) Determine o intervalo de quilômetros rodados em que cada locadora oferece o menor preço.
Resposta no final do livro.

Fonte: SOUZA e GARCIA (2016, p. 91)

Figura 40 - Exemplo de tarefa do agrupamento 23 retirada do livro 5

L5T08. Obtenha a função de 1º grau cujo gráfico passa por

a) $A(0, 3)$ e $B(-1, 2)$
c) $C(3, 7)$ e $D(0, 0)$
b) $K(1, 6)$ e $L(-2, -3)$
d) $M(-1, 3)$ e $N(0, 0)$

L5T09. Escolha um dos pares de pontos da atividade anterior e, propositadamente, cometa um erro no cálculo da função afim que passa por ele. Troque com um colega para que vocês descubram os erros um do outro.

Fonte: SMOLE e DINIZ (2016, p.102)

Figura 41 - Exemplo de tarefa do agrupamento 23 retirada do livro 6

20. As retas das funções afins f e g e da função constante h determinam um triângulo.

a) Determinem os vértices desse triângulo, sabendo que as leis dessas funções são $f(x) = x - 3$, $g(x) = -x + 3$ e $h(x) = 3$. $A(3, 0)$; $B(0, 3)$ e $C(6, 3)$.

b) Construam os três gráficos no caderno em um mesmo sistema de eixos.

Fonte: DANTE (2016, p. 82

Figura 42 - Exemplo de tarefa do agrupamento 23 retirada do livro 7

15 Dois recipientes, A e B, contêm água. Durante determinado período, a temperatura y da água do recipiente A, em grau Celsius, variou em função do tempo x, em minuto, de acordo com a função $y = 30 + 2x$, e a temperatura y da água do recipiente B, em grau Celsius, variou em função do tempo x, em minuto, de acordo com a função $y = 5 - 3x$. Qual das afirmações abaixo é correta, considerando apenas o período mencionado?

alternativa a

a) Com o passar do tempo, a temperatura da água do recipiente A aumentou e a temperatura da água do recipiente B diminuiu.

b) Com o passar do tempo, a temperatura da água do recipiente A diminuiu e a temperatura da água do recipiente B aumentou.

c) A temperatura da água dos dois recipientes aumentou com o passar do tempo.

d) A temperatura da água dos dois recipientes diminuiu com o passar do tempo.

e) Durante um intervalo de tempo $[x_1, x_2]$, com $x_1 \neq x_2$, do período mencionado, a temperatura de um dos recipientes permaneceu constante.

Fonte: PAIVA (2016, p. 165)

Figura 43 - Exemplo de tarefa do agrupamento 23 retirada do livro 8

Fonte: BALESTRI (2016, p. 73)

Quando os agrupamentos foram construídos, a intenção era reduzir a quantidade de tarefas que “sobrariam”, aquelas que ficaram juntas no agrupamento 23, sem um descritor. Agora, examinando essas tarefas conclui-se que não é necessário que as tarefas que o compõem sejam todas agrupadas por padrões que rotineiramente são trabalhados em sala de aula.

Pelo contrário, é até esperado que surjam tarefas com características próprias em diferentes livros e nas mais diversas situações. Acredita-se que as tarefas não rotineiras, aquelas que não são usualmente propostas por livros didáticos ou por professores em sala de aula, podem, quem sabe, possibilitar um trabalho diferente do usual, que deem outros resultados, que não apenas ocupem os alunos, que os coloquem em movimento quando aprendem, que os levem a situações desafiadoras, que possibilitem a matematização, enfim, que levem à aprendizagem. Tomando como base os exemplos mostrados de tarefas, podem-se sugerir alguns indicativos de trabalho a partir delas.

Esse agrupamento contém o maior número de tarefas não rotineiras e são as que mais se aproximam das que oportunizam a matematização.

A tarefa 9 retirada do Livro 5, por exemplo, solicita aos alunos que, ao determinar a equação de uma reta que passa por dois pontos dados, cometam um erro e depois discutam essa resolução com um colega de sala. Essa pode ser considerada uma boa tarefa, pois, ao escolher qual erro vai cometer, o nível de aprendizagem do aluno se torna mais claro e isso possibilita que o professor obtenha informações a respeito do seu conhecimento. O enunciado é claro, o que permite ao aluno pensar naquela situação. Também pode ser considerada flexível, pois possibilita diversas resoluções

A tarefa 8 do Livro 5 é usualmente trabalhada nas salas de aula no conteúdo função afim – “dadas as coordenadas de dois pontos, solicitar a equação da reta que passa por esses dois pontos” – e, na maioria dos casos, é o ponto final para a atividade dos alunos. Contudo, a proposição de uma tarefa como a 9 possibilita ir além de um procedimento de reprodução, permite que os alunos construam argumentações, que discutam com os colegas diferentes modos de resolução e, desse modo, cria-se um ambiente mais favorável à aprendizagem.

Com proposições do tipo da que é feita na tarefa 9 no Livro 5, pode-se pensar em fazer um trabalho no qual os alunos compreendam melhor o que estão fazendo. Esse tipo de tarefa pode ser produtivo quando se pretende fazer um trabalho diferente do usual em sala de aula. Seria possível pensar, por exemplo, que não há, nesse caso, uma resposta certa a ser encontrada, cada aluno deve encontrar a sua resposta, que pode ser totalmente diferente das demais repostas apresentadas pelos seus colegas de sala. O “erro” passa da situação de vilão, que deve ser combatido, para uma de aliado do professor, que atua em favor da aprendizagem dos alunos, que pode proporcionar situações nas quais os alunos tenham a oportunidade de lidar com a matemática que estão aprendendo; e mais, discutir a respeito dela.

Considerar que o erro faz parte do processo de aprendizagem é também uma das ideias defendidas por autores que estudam a RME, pois, além de possibilitar ao professor um trabalho com mais ambientes que possam atuar em favor da aprendizagem dos alunos, a consideração de que errar faz parte do processo de aprendizagem leva em conta a realidade na qual se dá a construção do conhecimento da humanidade, que se desenvolve por idas e vindas, por buscas em labirintos sem caminhos predefinidos, por muitas tentativas e erros.

Na Educação Matemática Realística, existe um forte apreço por tarefas que possibilitam esse tipo de abordagem. A ideia é que os alunos tenham ambientes propícios para matematizar, que tenham a oportunidade de lidar com diferentes fenômenos e, a partir desse lidar, possam construir a sua aprendizagem matemática.

Outra ideia também presente nesses exemplos é a não explicitação, no enunciado da tarefa, de todos os passos que devem ser seguidos para encontrar a resposta. Por exemplo, na tarefa retirada do Livro 3, não há indicação de que o aluno precisará encontrar a lei de formação da função g(x), no entanto, isso é necessário para que se encontre o valor solicitado.

Também, seguindo essa ideia de deixar alguns procedimentos implícitos, tem-se a tarefa do Livro 8 que solicita a identificação das coordenadas do ponto de interseção de duas retas. Como a figura mostra o gráfico das duas retas em uma malha quadriculada e com alguns pontos definidos, o aluno pode até fazer algumas hipóteses, conjecturar um intervalo possível no qual o ponto solicitado possa estar definido, no entanto, para chegar à resposta correta, é preciso que encontre, a partir dos pontos que estão definidos, a lei de cada uma das funções para, então, encontrar as coordenadas do ponto solicitado.

Nesses dois casos, apenas alguns indicativos de caminhos para encontrar a resposta foram suprimidos do enunciado da tarefa. Contudo, é válido também, quando se quer que os alunos tenham a oportunidade de matematizar, que se lhes proponham tarefas com informações em excesso ou em falta, para que, assim, tenham a oportunidade de fazer escolhas (ou suposições), que conjecturem e que decidam o melhor caminho que deve ser seguido.

Trabalhar com esse tipo de tarefa pode, incialmente, ser um pouco mais trabalhoso, nem professores, nem os alunos estão acostumados com isso. Todavia, são tarefas que apresentam diversos modos de resolução, que não possuem apenas uma única resposta, que deixam implícitos em seus enunciados alguns procedimentos que podem ser seguidos ou até tenham informações em falta ou em excesso que possibilitam um trabalho mais próximo do que é indicado quando se quer ter como base os princípios da RME.

Uma tarefa por si só não é suficiente para garantir aprendizagem dos alunos, aliás nada seria capaz disso. No entanto, defende-se que um trabalho escolar ou uma experiência de ensino que se der a partir da proposição de uma boa tarefa apresenta maiores chances de oportunizar a aprendizagem.

4. POR ORA, À GUISA DE ENCERRAMENTO

Pois bem, é chegada a hora de revisar todo o percurso até aqui percorrido. Hora de analisar se as metas estabelecidas foram cumpridas e entender o que os resultados da pesquisa mostram e, a partir deles, pensar novas possibilidades de discussões e pesquisas.

Esta pesquisa buscou analisar e discutir tarefas matemáticas contidas nos capítulos de Função Afim dos livros didáticos do 1º. Ano do Ensino Médio aprovados pelo PNLD de 2018. Com isso, pretendeu-se apresentar um estudo que mostrasse um panorama de como estão propostas as tarefas nos livros didáticos e, a partir disso, discutir possibilidades de intervenções com a intenção de ter um trabalho mais próximo da perspectiva da abordagem da RME.

As tarefas estão presentes nas aulas de forma marcante, em todas as áreas do conhecimento e constituem-se um meio de o professor "colocar o aluno em ação." Na perspectiva da RME, quando professores e alunos se dispõem a organizar uma situação, aceitam um desafio, comprometem-se com isso. Aprender é estar sempre em movimento, e um desses momentos é dar sentido para conhecer e conviver com seus desafios. O processo de aprender matemática supõe utilizar diferentes linguagens que se expressam pela leitura e a escrita, pelas explicações científicas, por modos de resolução de problemas, por argumentações compartilháveis socialmente e que nos tornam presentes no mundo.

Existem, no entanto, casos de professores que propõem tarefas aos seus alunos para ocupá-los, para se desocuparem enquanto fazem outras coisas. Contudo, na perspectiva aqui adotada, colocar os alunos a fazer uma tarefa requer também do professor atitudes condizentes com as ações que se esperam dos alunos, principalmente quando as tarefas que são adotadas não são ricas, pois assim as ações que os alunos farão são fortemente dependentes das intervenções do professor na interação com eles, e isso demanda grande disposição para a condução do trabalho em sala de aula.

Segundo a perspectiva teórica da RME, a aprendizagem matemática está intimamente ligada ao processo de matematizar a realidade, isto é, a partir de situações contextualmente ricas, os alunos são confrontados com situações que podem gerar todo tipo de tarefa, por exemplo, que contêm tanto problemas sem solução, quanto aqueles com diversas soluções, ou até mesmo com diversos modos de resolução.

Portanto, acredita-se que as tarefas atuariam justamente nessa frente, fazendo com que os alunos iniciem a ação de matematizar, desencadeando reflexões e possibilitando que investiguem as mais diversas situações realísticas. No entanto, neste estudo, foi possível reconhecer que a maioria das tarefas trazidas pelos livros analisados apresentam características do nível de reprodução, exigindo, basicamente, procedimentos rotineiros já apresentados pelo professor durante as aulas. Além disso, pelo menos 88% dessas tarefas fornecem exatamente as informações necessárias para resolvê-las sem dar oportunidade para os alunos selecionarem informações relevantes por si mesmos. Menos de 25% podem ser consideradas tarefas de conexão e menos de 5% são tarefas de reflexão, considerado o nível mais alto de demanda cognitiva.

Mesmo que as tarefas dos livros didáticos apresentem-se sempre com uma perspectiva tradicional, mais voltadas à reprodução e estimulando procedimentos de memorização, os professores podem também seguir seus próprios roteiros ao ensinar ou propor uma tarefa. Costuma-se falar muito em ter alunos críticos, com capacidade de tomar decisões e tantas outras habilidades requeridas, mas não se pode esquecer que essas atitudes são também esperadas dos professores.

Os livros didáticos, que são a fonte para a maioria das tarefas propostas aos alunos, em muitos casos, na sua concepção, não foram propriamente pensados para a aprendizagem dos alunos. Muitas vezes, os autores de livros didáticos apenas cumprem as regras explicitadas por um edital e, desse modo, o tipo de tarefa que compõe o livro é, nesses casos, direcionado por um agente externo que está distante do que realmente acontece na sala de aula. O que se quer dizer com isso é que as grandes transformações começam dentro da sala de aula. A escola deve ser um lugar onde aluno e professor sejam protagonistas de sua aprendizagem.

Adotar a abordagem de RME não tira da escola e, por conseguinte, dos professores, a responsabilidade e o compromisso com o conhecimento historicamente produzido pela humanidade. A educação serve na mediação e instrumentalização do indivíduo para lidar com a compreensão da realidade.

As considerações geradas por este estudo foram feitas para possibilitar que as tarefas sejam implementadas de modo a colocar os alunos em movimento de aprendizagem, esperando que eles assumam um papel ativo no seu processo de aprender. Por exemplo, é desejável utilizar dados reais, tanto no tipo de informação quanto nos valores numéricos utilizados, e seria razoável que a resposta de um problema tivesse uma razão para ser procurada.

As tarefas contidas no livros didáticos estão localizadas ao final das seções e são pedidas após a explicação do professor. Assim, o procedimento de matemática a ser aplicado é mais ou menos dado e os alunos não têm de identificá-los por eles mesmos, e, consequentemente, eles não estão tendo experiência suficiente para desenvolver a sua capacidade de transformar uma tarefa em uma questão ou problema matemático. Essa conclusão acompanha as de vários outros estudos[45] que mostraram que a falta de experiência dos alunos em um determinado tipo de tarefa corresponde às suas dificuldades com a tarefa.

Uma característica ausente nas tarefas dos livros didáticos é o uso de informações incompletas ou irrelevantes, considerada fundamental[46] para desenvolver a capacidade dos alunos para aplicar a matemática em problemas do mundo real. Também deve ser dada atenção às exigências cognitivas das tarefas. Os livros didáticos investigados contêm poucas tarefas de reflexão para permitir que os alunos desenvolvam sua capacidade em raciocínio complexo.

Acredita-se que esses resultados sugerem que a falta de oportunidade de aprender nas tarefas dos livros didáticos pode causar dificuldades aos estudantes na resolução, por exemplo, das provas do PISA. Os resultados de todas as aferições pode comprovar essa hipótese.

---

[45] Por exemplo, McNeil et al. (2006), Haines e Crouch (2007), Li et al. (2008).
[46] De acordo com Forman e Steen (2001), e Greer, Verschaffel e Mukhopadhyay (2007).

Uma alternativa mais geral seria um livro didático, para qualquer nível de ensino, em que a reflexão local e global dos processos de ensino e de aprendizagem, estivesse implícita no próprio texto. Por exemplo, poderia ser assumida pelo professor a tarefa de colocar perguntas que tenham em vista a resolução do aluno. Perguntas tais como: por que você pensou isso? Isso foi pedido? Você poderia utilizar outra estratégia? Você poderia utilizar outro procedimento? Você conhece alguma situação em que isso se aplique? Nesse procedimento que você utilizou, qual seria um erro comum? Você acha que aprendeu algo? O quê? Em que outra situação você utilizaria a mesma estratégia? Esse tipo de perguntas pode ser uma maneira de fazer com que os professores e os alunos, cada um no seu papel, reinventem o desenvolvimento das tarefas do livro.

Trabalhar com tarefas mais ricas, que apresentam diferentes maneiras de solução ou até mesmo que nem apresentem solução, que não deixem sempre os procedimentos a serem adotados tão explícitos ou que apresentem informações em excesso ou em falta, com certeza, exigirão mais do professor, mas também podem ser pontos de início para que os alunos tenham, de fato, a oportunidade de matematizar e, ao fazer isso, aprender alguma matemática.

Uma das limitações deste estudo é que, embora os livros sejam, em grande parte, usados como os principais recursos de ensino e aprendizagem na sala de aula, os professores também têm um papel importante. Afinal são eles que determinam as formas como os alunos trabalham com os livros didáticos, como os livros didáticos são usados nas salas de aula e quais tarefas devem ser resolvidas. Os professores têm um papel crucial na integração das experiências e culturas dos alunos na aprendizagem de matemática. Assim, se os professores assumem que a matemática é um corpo fechado de conhecimento e que a aprendizagem é a reprodução de fatos, procedimentos e verdades, eles deixarão de envolver os alunos em tarefas com informações em falta ou supérfluas. Considerando isso, acredita-se, também, que é desejável investigar a prática docente dos professores, suas crenças e conhecimento das tarefas.

Enfim, este é o trabalho desenvolvido. Espera-se que a apresentação de alguns modos de lidar com as tarefas na perspectiva da RME, bem como, possibilidades de intervenção na proposição dessas mesmas tarefas, sirvam para desencadear boas discussões a respeito do tema e que tragam contribuições para o ensino e para a aprendizagem de matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, V. L. C. de. **Questões não-rotineiras:** a produção escrita de alunos da graduação em Matemática. 2009. 144f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2009.

ALVES, R. M. F.. **Estudo da produção escrita de alunos do Ensino Médio em questões de matemática**. 2006. 158f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2006.

BALESTRI, R.. **Matemática**: interação e tecnologia, Volume 1. – 2. ed. – São Paulo: Leya, 2016.

BARRETTO, A. C.. **Procedimentos da análise da produção escrita em matemática no contexto do GEPEMA: um olhar para dentro**. 2018. 116f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

BENEDITO, J. E. G.. **Um estudo do caráter de continuidade na avaliação didática**. 2018. 63f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

BEZERRA, G. C.. **Registros escritos de alunos em questões não-rotineiras da área de conteúdo quantidade**: um estudo. 2010. 183f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2010.

BISPO, R.; RAMALHO, G.; HENRIQUES, N.. Tarefas matemáticas e desenvolvimento do conhecimento matemático no 5º ano de escolaridade. **Análise Psicológica**, Lisboa, v. 1, n. 26, p. 3-14, 2008.

BURIASCO, R. L. C. de. **Matemática de fora e de dentro da escola**: do bloqueio à transição. 1988. 168f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro -S.P., 1988.

BURIASCO, R. L. C. de. **Avaliação em matemática**: um estudo das respostas de alunos e professores. 1999. 238f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Marília – S.P., 1999.

BUTTS, T. Formulando problemas adequadamente. In: KRULIK, S. e REYS, R. E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. São Paulo: Atual, p. 32-48. 1997.

CELESTE, L. B.. **A Produção escrita de alunos do Ensino Fundamental em questões de matemática do PISA**. 2008. 85f. Dissertação (Mestrado em

Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2008.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D.. **Quadrante Matemática**, 1º ano: ensino médio. – 1. ed. – São Paulo: Edições SM, 2016.

CIANI, A. B.. **O realístico em questões não-rotineiras de Matemática**. 2012. 166 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

CHRISTIANSEN, B.; WHALTER, G. Task and activity. In: CHRISTIANSEN, B.; HOWSON, A. G.; OTTE, M. (Ed.). **Perspective on mathematics education**. Dordrecht: Reidel, 1986. p. 243-307.

DALTO, J. O.. **A produção escrita em matemática**: análise interpretativa da questão discursiva de matemática comum à 8ª série do Ensino Fundamental e a 3ª série do Ensino Médio da AVA/2002. 2007. 100f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2007.

DANTE, L. R.. **Matemática**: Contexto & Aplicações: ensino médio. – 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

DE LANGE, J. Mathematics, Insight and Meaning. Utrecht: OW&OC, 1987.

DE LANGE, J. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Madison: WCER, p.72. 1999.

Doyle, W.. Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. **Educational Psychologist**, 23: p.167–180, 1988.

FERREIRA, P. E. Alves. **Análise da produção escrita de professores da educação básica em questões não-rotineiras de matemática**. 2009. 166f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2009.

FERREIRA, P. E. Alves. **Enunciados de Tarefas de Matemática**: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística. 2013. 121f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

FORSTER, C.. **A utilização da prova-escrita-com-cola como recurso à aprendizagem**. 2016. 123f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

FREUDENTHAL, H.. Why to teach mathematics so as to be useful. **Educational Studies in Mathematics.** Holanda, v. 1, n. 1-2, p. 3-8, 1968.

______. Geometry between the devil and the deep sea. **Educational Studies in Mathematics**. Holanda, v. 3, n. 3-4, p. 413-435, 1971.

_______. Mathematics as an Educational Task. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1973.

______. Matemática nova ou educação nova? **Perspectivas,** Portugal, v. 9, n.3, p. 317-328, 1979.

______. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, M.C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, p.77-98, 2004.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de Administração de Empresas.** São Paulo, v.35, n.2, p.57-63; mar/ag. 1995.

GRAVEMEIJER, K.;; TERWEL, J.. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. **Journal of Curriculum Studies**, v. 32, n. 6, p. 777-796, nov--dez. 2000.

GRAVEMEIJER, K. P. E. O que torna a Matemática tão difícil e o que podemos fazer para o alterar?. **Educação matemática**: caminhos e encruzilhadas. Lisboa: APM, p. 83-101. 2005.

HADJI, C. **A Avaliação Desmistificada**. Porto Alegre: ARTMED Editora, 2001.

HENNINGSEN, M.; STEIN, M. K.. Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 28, n. 5, p. 524-549, nov. 1997.

HOUAISS, A. Dicionário eletrônico da Língua Portuguesa. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. CD-ROM.

IEZZI, G.... [et. al.]. **Matemática**: ciência e aplicações: ensino médio. Volume 1. – 9. ed . – São Paulo: Saraiva. 2016.

LEONARDO, F. M. de. **Conexões com a Matemática 1**. – 3.ed. São Paulo: Moderna, 2016.

LOPEZ, J. M. S.. **Análise interpretativa de questões não-rotineiras de matemática**. 2010. 141f. Dissertação (Dourado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2010.

MÅSØVAL, H. S.. Shortcomings in the *milieu* for algebraic generalisation arising from task design and vagueness in mathematical discourse. In: MARGOLINAS, Claire (Ed.). **Task Design in Mathematics Education**.

Proceedings of ICMI Study 22. Oxford, United Kingdom., p. 231-239, jul. 2013.

MARQUES, A. F.. **AULAS DE MATEMÁTICA: narrativas de uma professora em transição.** 2017. 82f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

MASON, J. e JOHNSTON-WILDER, S.. Designing and using mathematical tasks. Hartfordshire, UK. Tarquin Milton Keynes Open University, 2006.

MENDES, M. T.. **Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. 275f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina 2014.

MORAES, M. A. G.. **Correção de uma prova escrita de matemática:** algumas considerações. 2013. 91f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

NEGRÃO de LIMA. R. C.. **Avaliação em Matemática:** análise da produção escrita de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental em questões discursivas. 2006. 181f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2006.

OLIVEIRA, R. C. de. **Matematização**: estudo de um processo. 2014. 62f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PAIVA, Manoel. **Matemática**: Paiva. – 3. ed. – São Paulo: Moderna, 2016.

PAIXÃO, A. C. G.. **Uma prova em fases de matemática**: da análise da produção escrita ao princípio de orientação. 2016. 101f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

PASSOS, A. Q.. **Van Hiele, Educação Matemática Realística e GEPEMA**: algumas aproximações. 2015. 147f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina 2015.

PEDROCHI JUNIOR, O.. **Avaliação como oportunidade de aprendizagem em Matemática**. 2012. 56f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

PEDROCHI JUNIOR, O.. **A Avaliação Formativa como Oportunidade de Aprendizagem**: fio condutor da prática pedagógica escolar. 2018. 69 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

PEREGO, S. C.. **Questões abertas de matemática:** um estudo de registros escritos. 2005. 103f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2005.

PEREGO, F.. **O que a produção escrita pode revelar?** Uma análise de questões de matemática. 2006. 128f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2006.

PEREIRA JUNIOR, A.. **Enunciados de Itens de provas de Matemática**: um estudo na perspectiva da Educação Matemática Realística. 2014. 65f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PINTO, A. H.. A Base Nacional Comum Curricular e o Ensino de Matemática: Flexibilização ou engessamento do currículo escolar. **Bolema**, Rio Claro (SP), v.31, n.59, p.1045-1060, dez 2017.

PIRES, M. N. M.. **Oportunidade para aprender**: uma Prática da Reinvenção Guiada na Prova em Fases. 2013. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

PRESTES, D. B. **Prova em fases de Matemática:** uma experiência no 5º ano do Ensino Fundamental. 2015. 122f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

RAJADELL, N. A importância das estratégias didáticas em toda ação formativa. In: SUANNO, M. V. R.; RAJADELL, N. **Didática e formação de professores**: perspectivas e inovações. Goiânia: CEPED Publicações e PUC Goiás, p. 105-132, 2012.

ROSSETTO, H. H. P.. **Trajetória Hipotética de Aprendizagem sob um olhar realístico**. 2016. 104f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

SANTOS, E. R. dos. **Estudo da produção escrita de alunos do Ensino Médio em questões discursivas não rotineiras de matemática**. 2008. 166f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2008.

SANTOS, E. R. dos. **Análise da produção escrita em matemática**: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

SCHASTAI, M. B.. **TALL e Educação Matemática Realística:** algumas aproximações. 2017. 179f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

SEGURA, R. de O.. **Estudo da produção escrita de professores em questões discursivas de matemática**. 2005. 176f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2005.

SHIMIZU, Y. et al. The Role of Mathematical Tasks in Different Cultures. In: SHIMIZU, Yoshinori et al. (Eds.) **Mathematical Tasks in Classrooms Around the World**, Rotterdam: Sense Publishers, p. 1-14, 2010.

SILVA. F. da. **Um caráter de validade da avaliação na perspectiva da Educação Matemática Realística**. 2018. 46f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

SILVA, G. dos S. e. **Uma configuração da reinvenção guiada**. 2015. 94f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

SILVA, G. dos S. e. **Um olhar para os processos de aprendizagem e de ensino por meio de uma trajetória de avaliação**. 2018. 166f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

SILVA, M. C. N.**. Do observável ao oculto**: um estudo da produção escrita de alunos da 4ª série em questões de matemática. 2005. 114f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2005.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.. **Matemática para compreender o mundo 1**. – 1. ed. – São Paulo: Saraiva, 2016.

SOUZA, J.; GARCIA, J.. # **Contato Matemática 1**. – 1. ed. – São Paulo: FTD, 2016.

SOUZA, J. A. de. **Cola em Prova Escrita**: de uma conduta discente a uma estratégia docente. 2018. 146 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2018.

Stein, M. K., & Baxter, J. A. **Teachers' use of texts.** Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco. 1989.

STEIN, M. K. LANE, S. Instructional Tasks and the Development of Student Capacity to Think and Reason: An Analysis of the Relationship between Teaching and Learning in a Reform Mathematics Project, **Educational Research and Evaluation,** 2:1, p. 50-80, 1996.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S.. Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 3, n. 4, p. 268-275, jan. 1998.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S.. Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática. **Educação e Matemática**, n. 105, p. 22-28, nov-dez. 2009.

STEPHAN, M.; AKYUZ, D.. An Instructional Design Collaborative in One Middle School. In: MARGOLINAS, Claire (Ed.). **Task Design in Mathematics Education**. Proceedings of ICMI Study 22. Oxford, United Kingdom, p. 509-518, jul. 2013.

TREFFERS, A. **Three Dimensions**: a model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987.

TREVISAN, A. L.. **Prova em fases e um repensar da prática avaliativa em Matemática**. 2013. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Assessment and Realistic Mathematics Education**. Utrecht: CD-ß Press/Freudenthal Institute, Utrecht University, 1996.

______. Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. **Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9.** Utrecht: Utrecht University, 2000. CD-ROM.

______. The role of contexts in assessment problems in mathematics. **For the Learning Mathematics**, Alberta-Canadá, v. 25, n. 2, p. 2-9. 2005.

______. Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In: **The Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**, Australia, p. 3-7, 2010.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M.; WIJERS, M.. Mathematics standards and curricula in the Netherlands. Utrecht. **ZDM**, p.287-307. Vol. 37 (4) 2005.

VIOLA DOS SANTOS, J. R.. **O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática**. 2007. 108f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2007.

WATSON, A. et al. Introduction. In: MARGOLINAS, Claire (Ed.). **Task Design in Mathematics Education**. Proceedings of ICMI Study 22. Oxford, United Kingdom. p. 7-14, jul. 2013.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

BARABASH, M.; GUBERMAN, R.. Developing Young Students' Geometric Insight Based on Multiple Informal Classifications as a Central Principle in the Task Design. In: MARGOLINAS, Claire (Ed.). **Task Design in Mathematics Education**. Proceedings of ICMI Study 22. Oxford, United Kingdom. p. 293-301, jul. 2013.

BURIASCO, R. L. C. de; FERREIRA, P. E. A.; PEDROCHI JUNIOR, O. Aspectos da avaliação da aprendizagem escolar como prática de investigação. In: BURIASCO, R. L. C. de (Org.). **GEPEMA**: espaço e contexto de aprendizagem. Curitiba, PR: CRV, 1. Ed. p. 13-32, 2014,

COLES, A.; BROWN, L.. Task design for ways of working: making distinctions in teaching and learning mathematics. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 19, p. 149-168, abr. 2016.

DÍAZ, V.; POBLETE, A. Competencias en Matemáticas y Tipos de problemas. In: CIBEM – Proccedings V Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, n. 5, 2005, Portugal. **Anais...** Portugal: Publicaciones con Comité Editorial, 2005.

DING, L.; JONES, K.; PEPIN, B.. Task design in a school-based professional development programme. In: MARGOLINAS, Claire (Ed.). **Task Design in Mathematics Education**. Proceedings of ICMI Study 22. Oxford, United Kingdom, p. 441-449, jul. 2013.

DRIJVERS, P. H. M. **Learning algebra in a computer algebra environment**. 2003. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade de Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute, The Netherlands, 2003.

ERNEST, P.. Problem Solving: Its Assimilation to the Teacher’s Perspective. In: PONTE, João Pedro da; et al (Eds.). **Mathematical Problem Solving and New Information Technologies**, Berlin: Springer-Verlag, p. 287-300, 1992.

GARDNER, K.. Applying the Phenomenographic Approach to Students’ Conceptions of Tasks. In: MARGOLINAS, Claire (Ed.). **Task Design in Mathematics Education**. Proceedings of ICMI Study 22. Oxford, United Kingdom. p. 193-201, jul. 2013.

HATTIE, J.; FISHER, D.; FREY, N.. **Visible Learning for Mathematics, Grades K-12**: What works best to optimize student learning. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2016.

HEALY, L.; FERNANDES, S. H. A. A.; FRANT, J. B.. Designing tasks for a more inclusive school mathematics. In: MARGOLINAS, Claire (Ed.). **Task Design in**

Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22. Oxford, United Kingdom, p. 61-68, jul. 2013.

LILJEDAHL, P.; CHERNOFF, E.; ZASKIS, R.. Interweaving mathematics and pedagogy in task design: a tale of one task. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Dordrecht, v. 10, n. 6, p. 239-249, dez. 2007.

LIN, Pi-Jen; TSAI, Wen-Huan. A Task Design for Conjecturing in Primary Classroom Contexts. In: MARGOLINAS, Claire (Ed.). **Task Design in Mathematics Education**. Proceedings of ICMI Study 22. Oxford, United Kingdom, p. 249-257, jul. 2013.

LITHNER, J..Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. **ZDM**, v. 49, p. 937–949, nov. 2017.

OLIVEIRA, H. M.; SEGURADO, M. I.; PONTE, J. P.da. Tarefas de Investigação em Matemática: Histórias da Sala de Aula. In: VI Encontro de Investigação em Educação Matemática, Portalegre. **Anais...** Portalegre: SPCE-SEM, p. 107-125, 1998.

OR, A. C. M. Designing Tasks to Foster Operative Apprehension for Visualization and Reasoning in Dynamic Geometry Environment. In: MARGOLINAS, Claire (Ed.). **Task Design in Mathematics Education**. Proceedings of ICMI Study 22. Oxford, United Kingdom, p. 89-97, jul. 2013.

SMITH, M. S.; STEIN, M. K. Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 3, n. 5, p. 344-350, fev. 1998.

THANHEISER, E. et al. Reflective Analysis as a Tool for Task Redesign: The Case of Prospective Elementary Teachers Solving and Posing Fraction Comparison Problems. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 19, p. 123-148, abr. 2016.

TORNROOS, J. Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. **Studies in Educational Evaluation**, 31(4), p. 315–327, 2005.

XIN, Y. P. Word problem solving tasks in textbooks and their relation to student performance. **Journal of Educational Research**, 100(6), p. 347–359, 2007.

YEO, J. B. W. Mathematical tasks: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment. **Technical Report ME2007-01**, Singapore, National Institute of Education, Nanyang Technological University, jul. 2007.

APÊNDICES

APENDICE A – TEMAS DAS DISSERTAÇÕES E TESES DE PARTICIPANTES DO GEPEMA ATÉ 2018

Quadro 9 - Tema dos estudos de participantes do GEPEMA (2005 - 2007)

AUTOR (ANO)	Tema
SILVA (2005)	A produção escrita de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental na Prova de Questões Abertas de Matemática do AVA/2002.
PEREGO, S. (2005)	A produção escrita de alunos da Licenciatura em Matemática em uma prova contendo questões abertas de matemática do AVA/2002.
SEGURA (2005)	A produção escrita de professores em uma prova contendo questões abertas de matemática do AVA/2002.
ALVES (2006)	A produção escrita de alunos da 3ª série do Ensino Médio na Prova de Questões Abertas de Matemática da AVA/2002.
NEGRÃO DE LIMA (2006)	A produção escrita de alunos da 4ª série do Ensino Fundamental na Prova de Questões Abertas de Matemática da AVA/2002.
PEREGO, F. (2006)	A produção escrita de alunos da 8ª série do Ensino Fundamental na Prova de Questões Abertas do Matemática do AVA/2002.
DALTO (2007)	A produção escrita de alunos da rede estadual na questão comum à 8ª série do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio da Prova de Questões Abertas de Matemática do AVA/2002.
VIOLA DOS SANTOS (2007)	A produção escrita de alunos da rede estadual na questão comum à 4ª e à 8ª série do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio da Prova de Questões Abertas de Matemática do AVA/2002.

Fonte: adaptação do autor de Barreto (2018)

Quadro 10 – Tema dos estudos de participantes do GEPEMA (2008 - 2010)

AUTOR (ANO)	Tema
CELESTE (2008)	A produção escrita de alunos do Ensino Fundamental em uma prova contendo questões discursivas não-rotineiras de Matemática do PISA.
SANTOS (2008)	A produção escrita de alunos do Ensino Médio em uma prova contendo questões discursivas não-rotineiras de Matemática do PISA.
ALMEIDA (2009)	A produção escrita de alunos da graduação em Matemática em uma prova contendo questões discursivas não-rotineiras de Matemática do PISA.
FERREIRA (2009)	A produção escrita de professores que ensinam matemática na Educação Básica em uma prova

	contendo questões não-rotineiras de Matemática do PISA.
BEZERRA (2010)	A produção escrita de alunos paranaenses em questões discursivas de matemática da área de conteúdo Quantidade da aferição do PISA/2006.
LOPEZ (2010)	A produção escrita de alunos paranaenses em questões discursivas de matemática da área de conteúdo Mudança e relações da aferição do PISA/2006.

Fonte: adaptação do autor com base em Barreto (2018)

Quadro 11 - Temas dos estudos de participantes do GEPEMA (2011 - 2019)

AUTOR (ANO)	TEMA
PEDROCHI JUNIOR (2012)	Um estudo com o propósito de apresentar uma avaliação como oportunidade de aprendizagem.
MORAES (2013)	Descrição, análise e discussão de um episódio de multicorreção de uma mesma prova de matemática.
OLIVEIRA (2014)	Um estudo, em nível teórico, do sentido/significado da expressão matematização na perspectiva da Educação Matemática Realística.
PEREIRA JUNIOR (2014)	Um estudo dos enunciados de itens de provas de matemática do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental.
PRESTES (2015)	Uma análise de como que alunos do 5º ano do Ensino Fundamental lidam com tarefas não-rotineiras de matemática em uma prova em fases.
SILVA (2015)	Uma configuração para a expressão "reinvenção guiada", com base em textos de autores da Educação Matemática Realística
FORSTER (2016)	Um estudo da utilização de uma Prova-Escrita-com-Cola como recurso à aprendizagem na avaliação como oportunidade de aprendizagem.
PAIXÃO (2016)	Um estudo que analisa a produção escrita de professores que ensinam matemática na Educação Básica em uma prova em fases.
ROSSETTO (2016)	Um estudo que descreve e analisa a elaboração de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) com a intenção de conhecer como professores que ensinam matemática na Educação Básica lidam com ela.
BARRETTO (2018)	Um estudo que investiga os procedimentos metodológicos empregados pelos participantes do GEPEMA que utilizaram a análise da produção escrita como prática de investigação.
BENEDITO (2018)	Um estudo que apresenta o caráter de continuidade na avaliação didática.
SILVA (2018)	Um estudo que apresenta características do caráter de validade da avaliação da matemática escolar na perspectiva da RME.

Fonte: o autor

Quadro 12 - Temas das teses de participantes do GEPEMA (2012 - 2019)

AUTOR (ANO)	TEMA
CIANI (2012)	Apresenta duas propostas de intervenção como subsídio operacional para a constituição de oportunidade de aprendizagem, por meio da análise da produção escrita, como prática de investigação.
FERREIRA (2013)	Investiga e classifica enunciados de tarefas de matemática propostos em um livro didático, com o estudo compõe um quadro de referência que possibilita analisar tais enunciados à luz da RME.
PIRES (2013)	Utiliza uma prova em fases como oportunidade para praticar a reinvenção guiada na perspectiva da Educação Matemática Realística e, desta forma, conduzir as professoras participantes a revisitar conteúdos matemáticos presentes em tarefas matemáticas.
TREVISAN (2013)	Apresenta reflexões acerca da utilização de uma prova em fases como instrumento avaliativo em aulas de Matemática, em uma turma de Educação Profissional de Nível Médio.
MENDES (2014)	Apresenta e discute a utilização da Prova em Fases como um recurso para regulação da aprendizagem em uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.
SANTOS (2014)	Investiga a utilização da análise da produção escrita em aulas de matemática, sob a luz da reinvenção guiada, para além da perspectiva de estratégia de avaliação.
PASSOS (2015)	Investiga as possíveis relações entre os princípios de avaliação da Educação Matemática Realística e as fases do processo de aprendizagem propostas por Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele buscando aproximações com os trabalhos do GEPEMA.
MARQUES (2017)	Apresenta narrativas com aspectos de uma prática letiva em que se buscou identificar os princípios e ideias da abordagem Educação Matemática Realística.
SCHASTAI (2017)	Apresenta um estudo em que se discute aproximações entre o Quadro Teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de David Tall e a abordagem Educação Matemática Realística.
PEDROCHI JUNIOR (2018)	Apresenta um estudo que objetiva ampliar a perspectiva de avaliação escolar como oportunidade de aprendizagem, apresentando-a como fio condutor da prática pedagógica.
SILVA (2018)	Investiga os processos de aprendizagem, de avaliação e de ensino em uma disciplina de Geometria e Desenho a partir do desenvolvimento (concepção, elaboração, implementação e avaliação) de uma trajetória de

	avaliação, na perspectiva do GEPEMA (Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação).
SOUZA (2018)	Apresenta um estudo que subverte a ideia de cola em provas escritas, desenvolvido com estudantes de um Curso de Licenciatura em Matemática utilizando a cola em uma prova-escrita-em-fases.

Fonte: o autor

APENDICE B – AGRUPAMENTO DETALHADO DAS TAREFAS

Código	**Descritor**	**Tarefas**	**Total**
01	Dada uma situação que pode ser modelada por uma função afim ($f(x)=ax+b$), calcular $f(x)$ para algum x dado.	L1T04a, L1T06b, L1T07b, L1T13b, L1T16a, L1T19b,	06
		L2T05a, L2T21a, L2T22e, L2T25c, L2T26a, L2T47d,	06
		L3T01a, L3T02a, L3T04a, L3T20a, L3T36a,	05
		L4T02a, L4T04a, L4T05b, L4T06b, L4T09b, L4T10a, L4T11b, L4T15a, L4T20c, L4T21b, L4T21d, L4T23a, L4T26a, L4T27a, L4T36b, L4T37a, L4T37c, L4T40a, L4T41b, L4T42b, L4T47a, L4T49c,	22
		L5T18b	01
		L6T04c, L6T05a, L6T10b, L6T12b, L6T45c, L6T51a,	06
		L7T03b, L7T03c, L7T05b, L7T06b, L7T31b, L7T37a, L7T37b, L7T37c,	08
		L8T03b, L8T04b, L8T18b, L8T19b	04
		Total	**58**
02	Dada uma situação que pode ser modelada por uma função afim ($f(x)=ax+b$), calcular x para algum $f(x)$ dado.	L1T03c, L1T17b, L1T30b	03
		L2T05b, L2T21c, L2T22d, L2T25d, L2T47b, L2T47c, L2T51b,	07
		L3T04d, L3T20c, L3T39d,	03
		L4T06a, L4T09c, L4T10c, L4T11c, L4T13c, L4T19a, L4T21c, L4T21d, L4T39b, L4T41c, L4T47c, L4T49b,	12
		L5T17, L5T45a,	02
		L6T33c, L6T45d, L6T51b,	03
		L7T04b, L7T29b, L7T30,	03
		L8T03c, L8T04c, L8T29b,	03
		Total	**36**
03	Dada uma situação que pode ser modelada por uma função afim ($f(x)=ax+b$), apresentar	L1T02a, L1T02b, L1T02c, L1T03a, L1T04b, L1T06a, L1T07a, L1T11a, L1T13a, L1T17a, L1T19a, L1T30a,	12

Código	Descritor	Tarefas	Total
	uma lei de formação para a função que descreve a situação enunciada.	L2T05c, L2T21b, L2T22b, L2T37a, L2T37b, L2T38a, L2T38b, L2T47a, L2T60,	09
		L3T01c, L3T02b, L3T03a, L3T04b, L3T04c, L3T20b, L3T36b, L3T46a, L3T49a,	09
		L4T02b, L4T04b, L4T05a, L4T06c, L4T07, L4T08, L4T09a, L4T10b, L4T11a, L4T12b, L4T13a, L4T13b, L4T19b, L4T20b, L4T21a, L4T23b, L4T26b, L4T27b, L4T28a, L4T29a, L4T35a, L4T36a, L4T37b, L4T39a, L4T40b, L4T41a, L4T42a, L4T43c, L4T46a, L4T47b, L4T49a, L4T50a,	32
			00
		L6T04a, L6T05c, L6T06a, L6T07a, L6T08a, L6T33a, L6T36b, L6T40, L6T45b,	09
		L7T05a, L7T06a, L7T08b, L7T10a, L7T12a, L7T18b, L7T19, L7T28, L7T29c, L7T29d, L7T29e, L7T30, L7T31a, L7T33a, L7T37d,	15
		L8T03a, L8T04a, L8T17a, L8T18a, L8T19a, L8T20a, L8T27a, L8T30a, L8T32a, L8T35a,	10
		Total	**96**
04	Resolver inequações (simultâneas, produto ou quociente), sistemas de inequações e situações problemas que resultam em inequações ou sistemas de inequações.	L1T22a, L1T22b, L1T22c, L1T22d, L1T23a, L1T23b, L1T23c, L1T23d, L1T24a, L1T25a, L1T25b, L1T25c, L1T25d, L1T31, L1T34a, L1T34b, L1T35a, L1T35b,	18
		L2T19e, L2T27a, L2T27b, L2T27c, L2T28b, L2T28c, L2T29b, L2T30d, L2T31a, L2T31b, L2T31c, L2T31d, L2T31e, L2T32, L2T33, L2T34, L2T36a, L2T36b, L2T36c, L2T36d, L2T38d, L2T63, L2T66, L2T67,	24

Código	Descritor	Tarefas	Total
		L3T42a, L3T42b, L3T42c, L3T42d, L3T42e, L3T42f, L3T42g, L3T43a, L3T43b, L3T43c, L3T43d, L3T43e, L3T44, L3T46b, L3T46c, L3T47, L3T48a, L3T48b, L3T48c, L3T48d, L3T48e,	21
		L4T44a, L4T44b, L4T44c, L4T44d, L4T45, L4T46b, L4T50b, L4T51,	08
		L5T39a, L5T39b, L5T39c, L5T39d, L5T41a, L5T41b, L5T41c, L5T41d, L5T42a, L5T42b, L5T42c, L5T42d, L5T43a, L5T43b, L5T44a, L5T44b, L5T44c, L5T48a, L5T48b,	19
		L6T31a, L6T31b, L6T32a, L6T32b, L6T33b, L6T33d, L6T33e, L6T34a, L6T34b, L6T35a, L6T35b, L6T40, L6T41,	13
		L7T24a, L7T24b, L7T24c, L7T24d, L7T24e, L7T25, L7T26, L7T38a, L7T38b,	09
		L8T23a, L8T23b, L8T23c, L8T23d, L8T24a, L8T24b, L8T30b, L8T31, L8T34a, L8T34b, L8T34c, L8T34d,	12
		Total	**124**
05	Identificar e classificar, a partir de algumas leis de formação de funções, quais delas são afim (ou não), linear constante ou identidade. Mostrar que uma função dada é afim. Determinar coeficientes algébricos de polinômios, para que sejam funções lineares.	L1T01a,	01
		L2T01a, L2T01b, L2T01c, L2T22f, L2T40a, L2T40b, L2T40c, L2T40d, L2T59a, L2T59b, L2T59c, L2T59d, L2T61,	13
			00
		L4T01a, L4T01b, L4T01c, L4T01d, L4T01e, L4T01f,	06
		L5T11a, L5T11b, L5T12a, L5T12b.	04
			00
		L7T10c,	01

Código	Descritor	Tarefas	Total
		L8T01a, L8T01b, L8T01c, L8T01d, L8T01e,	05
		Total	**30**
06	Calcular (determinar) o zero ou a raiz de funções afins dadas algebricamente ou graficamente. Determinar as coordenadas dos pontos onde funções afins intersectam o eixo x e o eixo y.	L1T09a, L1T09b, L1T09c, L1T09d, L1T10b, L1T21b,	06
		L2T44c, L2T44d, L2T64,	03
		L3T22a, L3T22b, L3T22c, L3T22d, L3T22e, L3T22f,	06
		L4T14a, L4T14b, L4T14c, L4T14d, L4T15b, L4T34c,	06
		L5T01a, L5T01b, L5T01c, L5T01d, L5T24b, L5T24c,	06
		L6T18c, L6T19a, L6T26a, L6T26b, L6T26c, L6T26d, L6T30,	07
		L7T02b, L7T22a, L7T27,	02
		L8T12a, L8T12b, L8T12c, L8T12d,	04
		Total	**40**
07	Realizar o estudo de sinal de funções afins que são dadas algebricamente ou graficamente.	L1T20a, L1T20b, L1T20c, L1T20d, L1T21d,	05
		L2T15a, L2T15b, L2T30a, L2T30b, L2T30c, L2T52, L2T65,	07
		L3T40a, L3T40b, L3T41a, L3T41b, L3T41c, L3T41d, L3T41e, L3T41f, L3T42a, L3T42b, L3T42c, L3T42d, L3T42e, L3T42f, L3T42g	15
		L4T31a, L4T31b, L4T31c, L4T31d, L4T32a, L4T32b, L4T32c, L4T34d,	08
		L5T38a, L5T38b, L5T38c, L5T38d, L5T38e, L5T38f,	06
		L6T27a, L6T27b, L6T27c, L6T27d, L6T28a, L6T28b, L6T29,	07
		L7T21a, L7T21b, L7T23b, L7T23c,	04
		L8T21a, L8T21b, L8T21c, L8T21d, L8T22a, L8T22b, L8T22c, L8T22d,	08
		Total	**60**
08		L1T01b, L1T10a, L1T21c	03

Código	Descritor	Tarefas	Total
	Dadas as leis de formação de funções afins (que podem estar definidas por partes), construir (esboçar) os seus gráficos.	L2T07b, L2T07c, L2T08a, L2T08b, L2T08c, L2T08d, L2T20d, L2T23, L2T29, L2T44a, L2T49a, L2T46b, L2T48, L2T49a, L2T49b, L2T49c,	16
		L3T01c, L3T05a, L3T05b, L3T05c, L3T05d, L3T05e, L3T05f, L3T06a, L3T06b, L3T06c, L3T06d, L3T20b,	12
		L4T19c, L4T20d, L4T21e, L4T23c, L4T26c, L4T29c, L4T30, L4T52a,	08
		L5T02a, L5T02b, L5T02c, L5T02d, L5T02e, L5T02f, L5T05a, L5T06, L5T07b, L5T13*, L5T25, L5T26, L5T29a, L5T29b, L5T30a, L5T30b, L5T30c,	17
		L6T13a, L6T13b, L6T13c, L6T13d, L6T14a, L6T14b, L6T14c, L6T14d, L6T14e, L6T15, L6T18b, L6T20b, L6T21, L6T23a, L6T23b, L6T36c, L6T51,	17
		L7T01a, L7T01b, L7T01c, L7T01d, L7T01e, L7T08b, L7T10b, L7T11, L7T16a, L7T16b, L7T16c, L7T16d, L7T17a, L7T17b, L7T17c, L7T18a,	16
		L8T05a, L8T05b, L8T05c, L8T05d, L8T20b, L8T29a, L8T32b, L8T35c,	08
		Total	**97**
09	Dadas as leis de formação de funções afins, classificá-las em crescente, decrescente ou constante. Estudar coeficientes angulares, dados algebricamente, de funções afins de modo a analisar se a	L1T01c, L1T08a, L1T08b, L1T08c, L1T08d L1T10c, L1T11b, L1T21a	08
		L2T14a, L2T14b, L2T14c, L2T14d, L2T20b, L2T44b, L2T46c,	07
		L3T37a, L3T37b, L3T37c, L3T37d, L3T37e,	05

Código	Descritor	Tarefas	Total
	função é crescente ou decrescente.	L4T25, L4T26c, L4T27c, L4T28b, L4T29b, L4T30,	06
		L5T33a, L5T33b, L5T33c, L5T33d, L5T34a, L5T34b, L5T34c, L5T34d, L5T35a, L5T35b, L5T35c, L5T35d,	12
		L6T19b,	01
		L7T14a, L7T14b, L7T14c, L7T14d, L7T23a, L7T36,	06
		L8T14a, L8T14b, L8T14c, L8T14d, L8T14e, L8T14f, L8T15a, L8T15b, L8T15c, L8T15d, L8T24a, L8T24b,	12
		Total	**57**
10	Determinar o sistema de equações para o qual se tem a solução representada geometricamente. Determinar um sistema linear a partir de uma situação e resolvê-lo. Resolver equações de 1º grau.	L1T32a, L1T32b,	02
			00
		L3T24a, L3T24b, L3T24c, L3T24d, L3T24e, L3T24f, L3T25, L3T26a, L3T26b, L3T27, L3T28, L3T29a, L3T29b, L3T30,	14
		L4T48,	01
		L5T49a, L5T49b, L5T49c, L5T49d, L5T49e, L5T49f, L5T49g, L5T49h, L5T49i, L5T49j, L5T49k, L5T49l, L5T49m, L5T49n, L5T49o, L5T49p, L5T49q, L5T49r, L5T49s, L5T49t, L5T49u, L5T50a, L5T50b, L5T50c, L5T50d, L5T50e, L5T50f, L5T50g, L5T50h, L5T50i, L5T51, L5T51b, L5T51c, L5T51d, L5T51e, L5T51f, L5T51g, L5T51h,	38
			00
			00
			00
		Total	**55**
11	Representar graficamente as equações de um sistema linear e, sem resolvê-lo, classificá-lo em possível e determinado,	L1T33a, L1T33b, L1T33c, L1T33d,	04
			00
			00
			00

Código	Descritor	Tarefas	Total
	possível e indeterminado ou impossível		00
			00
			00
			00
		Total	**04**
12	Determinar o montante, o tempo de investimento, o capital investido ou a taxa de juros em investimentos realizados com regime de capitalização de juros simples.	L1T26a, L1T26b, L1T26c, L1T27, L1T28,	05
			00
			00
			00
			00
			00
			00
			00
		Total	**05**
13	Determinar a taxa de variação de uma função afim, identificar o coeficiente angular e o coeficiente linear de funções dadas algebricamente ou graficamente.	L1T18a, L1T18b, L1T18c, L1T19c,	04
		L2T01a, L2T01b, L2T01c, L2T19a, L2T19b, L2T19c, L2T20a, L2T40a, L2T40b, L2T40c, L2T40d,	11
		L3T13b, L3T31a, L3T31b, L3T31c, L3T31d, L3T37a, L3T37b, L3T37c, L3T37d, L3T37e, L3T38a, L3T38b, L3T39a, L3T39b,	14
		L4T12a, L4T16, L4T34a	03
		L5T26b,	01
		L6T02a, L6T02b, L6T04b, L6T05d, L6T06b, L6T07b, L6T08b, L6T08c, L6T09, L6T18a,	10
		L7T02a, L7T08c, L7T12b, L7T32a, L7T32b, L7T33b,	06
		L8T10a, L8T11b, L8T13,	03
		Total	**52**
14	Explorar ideias relacionadas à proporcionalidade. Dada uma relação, analisar se ela é de proporcionalidade, ou determinar a constante de proporcionalidade de uma relação	L1T16b, L1T16c,	02
			00
		L3T15a, L3T15b, L3T16, L3T17, L3T18a, L3T18b, L3T19a, L3T19b,	08
		L4T40c, L4T43a, L4T43b, L4T43d,	04
			00

Código	Descritor	Tarefas	Total
		L6T46, L6T47, L6T48, L6T49, L6T50,	05
			00
		L8T17b, L8T18c,	02
		Total	**21**
15	Dada uma situação e alguns gráficos, escolher qual deles representa a situação descrita.	L1T05, L1T15,	02
		L2T43,	01
		L3T21,	01
		L4T24,	01
		L5T24a,	01
			00
		L7T20	01
			00
		Total	**07**
16	Determinar o domínio e imagem de uma função afim.	L1T03b,	01
		L2T23, L2T25b, L2T39a, L2T39b, L2T39c, L2T39d, L2T39e, L2T42, L2T44e, L2T48, L2T54a, L2T54b, L2T54c, L2T54d, L2T68,	15
			00
			00
			00
		L6T37a, L6T37b, L6T37c,	03
			00
		L8T27b, L8T28a, L8T28b, L8T28c, L8T28d,	05
		Total	**24**
17	Dada uma situação de comparação de duas funções, calcular em qual valor de x as funções assumem o mesmo valor. Determinar o ponto de interseção de duas retas que representam duas funções com as leis de formação dadas.	L1T06c, L1T24b,	02
		L2T09, L2T19d, L2T28a, L2T37c, L2T38c, L2T44f,	06
		L3T03c, L3T14a, L3T14b, L3T14c,	04
		L5T04,	01
		L6T41,	01
		L7T07,	01
			00
		Total	**15**
18	Analisar preços de um serviço realizado por duas empresas e determinar qual delas oferece o preço mais vantajoso do	L1T06d,	01
		L2T12, L2T21d, L2T26b, L2T37d, L2T37e, L2T38e, L2T38f,	07

Código	Descritor	Tarefas	Total
	ponto de vista do menor preço.	L3T45a, L3T45b, L3T49b, L3T49c,	04
		L4T18b, L4T35b, L4T38, L4T52b	04
		L5T47,	01
		L6T06c, L6T36a, L6T38a, L6T38b, L6T39,	05
		L8T10c, L8T10d, L8T32c, L8T35b, L8T35d,	05
		Total	**27**
19	Escrever a lei de formação de função afim conhecendo o valor dos seus coeficientes, o valor de um dos coeficientes e o valor da função em um ponto, o valor da função em dois pontos, o gráfico da função com dois pontos definidos ou as coordenadas de dois pontos por onde a função passa.	L1T14a, L1T29a, L1T29b, L1T29c,	04
		L2T07a, L2T09, L2T16, L2T20c, L2T24, L2T25a, L2T45, L2T50, L2T51a,	09
		L3T07, L3T08, L3T09a, L3T09b, L3T09c, L3T13a, L3T19c, L3T39c	08
		L4T03a, L4T03b, L4T03c, L4T03d, L4T03e, L4T03f, L4T17b, L4T18a, L4T22, L4T34b	10
		L5T07a, L5T08a, L5T08b, L5T08c, L5T08d, L5T10a, L5T10b, L5T10c, L5T18a, L5T22a,	10
		L6T03a, L6T03b, L6T03c, L6T03d, L6T09, L6T10a, L6T11a, L6T11b, L6T12a, L6T16a, L6T16b, L6T21, L6T22a, L6T22b, L6T22c, L6T22d, L6T22e, L6T22f, L6T22g, L6T22h, L6T24a, L6T24b, L6T24c, L6T25,	24
		L7T03a, L7T04a	02
		L8T02a, L8T02b, L8T02c, L8T02d, L8T06, L8T08a, L8T08b, L8T10b, L8T11a,	09
		Total	**76**
20	Determinar o valor numérico de uma função afim para alguns valores dados		00
		L2T02a, L2T02b, L2T02c, L2T02d, L2T06a, L2T06b, L2T06c, L2T06d, L2T41,	09

Código	Descritor	Tarefas	Total
	Determinar o valor de x quando se conhece $f(x)$ de algum valor dado. Realizar operações com valores numéricos de funções		00
			00
		L5T07c,	01
		L6T01a, L6T01b, L6T01c, L6T01d,	04
			00
			00
		Total	**14**
21	Explorar ideias de Progressão Aritmética junto com conceitos de função afim		00
			00
			00
			00
			00
		L6T42a, L6T42b, L6T42c, L6T43, L6T44,	05
			00
			00
		Total	**05**
22	Trabalhar com situações que envolvem posições relativas entre retas.		00
		L2T62,	01
			00
			00
		L5T24d, L5T25, L5T26a, L5T26c, L5T27a, L5T27b, L5T27c, L5T28a, L5T28b, L5T28c, L5T28d, L5T29a, L5T29b, L5T30a, L5T30b, L5T30c, L5T31, L5T32a, L5T32b, L5T32c, L5T61a, L5T61b, L5T61c	23
			00
			00
			00
		Total	**24**
23	Tarefas "discordantes"	L1T12, L1T14b,	**02**
		L2T03, L2T04, L2T05d, L2T07d, L2T10, L2T11, L2T13, L2T17, L2T18, L2T22a, L2T22c, L2T30e, L2T35, L2T46a, L2T53, L2T55, L2T56, L2T57, L2T58,	**19**
		L3T01b, L3T02c, L3T03b, L3T06b, L3T10, L3T11,	**13**

Código	Descritor	Tarefas	Total
		L3T12, L3T13c, L3T23, L3T32, L3T33, L3T34, L3T35.	
		L4T17a, L4T20a, L4T33, L4T36c, L4T53,	**05**
		L5T03, L5T05b, L5T05c, L5T09, L5T14, L5T15, L5T16, L5T19, L5T20, L5T21, L5T22b, L5T23, L5T36, L5T37, L5T40, L5T45b, L5T46, L5T52a, L5T52b, L5T52c, L5T52d, L5T52e, L5T52f, L5T53a, L5T53b, L5T53c, L5T53d, L5T54, L5T55, L5T56, L5T57, L5T58a, L5T58b, L5T58c, L5T58d, L5T58e, L5T58f, L5T58g, L5T59a, L5T59b, L5T59c, L5T62a, L5T62b	**43**
		L6T05b, L6T12c, L6T17, L6T20a, L6T45a,	**05**
		L7T8a, L7T09, L7T13, L7T15, L7T22b, L7T22c, L7T29a, L7T34, L7T35	**09**
		L8T07, L8T09, L8T11c, L8T16, L8T25, L8T26, L8T33,	**07**
		Total	**103**

Fonte: o autor