Universidade Estadual de Londrina

MARIA LUCIA DE CARVALHO FONTANINI

MODELAGEM MATEMÁTICA X APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA:

UMA INVESTIGAÇÃO USANDO MAPAS CONCEITUAIS

Londrina
2007

MARIA LUCIA DE CARVALHO FONTANINI

MODELAGEM MATEMÁTICA X APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA:

UMA INVESTIGAÇÃO USANDO MAPAS CONCEITUAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação, em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção de título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2007

MARIA LUCIA DE CARVALHO FONTANINI

MODELAGEM MATEMÁTICA X APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA:

UMA INVESTIGAÇÃO USANDO MAPAS CONCEITUAIS

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Lourdes M. Werle de Almeida
Orientadora
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. José Antonio Salvador
Universidade Federal de São Carlos

Profa. Dra. Irinéa de Lourdes Batista
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 23 de março de 2007.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela força e luz, principalmente nos momentos mais difíceis. Ao meu marido José Ítalo pela pelo amor, carinho e apoio.

A meus filhos Ana Raquel e João Vitor por serem minha alegria, meu descanso, meu oásis.

A meus pais pela vida, pelo amor e pelo exemplo.

A minha orientadora a professora Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida, por toda atenção e paciência com que orientou este trabalho.

A professora Dra. Irinéia Batista e ao Professor Dr. José Antonio Salvador pelas valiosas contribuições para o aprimoramento deste trabalho.

Aos professores do curso de Mestrado, pela contribuição de cada um.

Ao engenheiro Fábio Tomczak do LACTEC e aos professores Fernando Diório, Marco Antonio Coelho e Celso Naves de Souza por toda assessoria na área de mecânica.

A direção da instituição em que foi desenvolvida esta pesquisa, à coordenação do curso de Tecnologia em Manutenção Mecânica Industrial da mesma instituição e aos alunos que concordaram em colaborar em minha pesquisa, com minha eterna gratidão.

Aos amigos, Elaine, Beth , Edilene, Cesária e Ivo pelo apoio e orações.

Aos amigos do grupo de estudo em Modelagem, pelas críticas, sugestões e pelo companheirismo nestes dois anos juntos. Em especial ao Fábio e a Karina que com tanto carinho me ajudaram a escanear os mapas.

FONTANINI, Maria Lucia de Carvalho. **Modelagem matemática X aprendizagem significativa:** uma investigação usando mapas conceituais. 2007. 248f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

RESUMO

Apresentamos o resultado de um trabalho de pesquisa fundamentado nos pressupostos teóricos da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, na teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel e nos Mapas Mapas Conceituais de Joseph Novak. Estabelecemos previamente um conjunto de elementos por meio dos quais é possível evidenciar a ocorrência da Aprendizagem Significativa por meio dos Mapas Conceituais, quando as atividades de ensino compõe uma proposta que envolve Modelagem Matemática. A pesquisa foi desenvolvida com 4 alunos que cursavam o primeiro semestre de um curso em Manutenção Industrial Mecânica em uma Universidade no interior do Paraná, durante as aulas de Fundamentos da Matemática, Cálculo Diferencial Integral I e um curso extracurricular. Após um período de familiarização com os Mapas conceituais, os alunos desenvolveram atividades de Modelagem Matemática e construíram mapas a respeito dos conceitos matemáticos e extra-matemáticos envolvidos no problema estudado. Os mapas conceituais elaborados pelos alunos, a observação dos mesmos, aplicação de questionários e entrevistas foram os meios empregados na coleta das informações. Essas informações permitiram perceber avanços no continuum aprendizagem memorística - aprendizagem significativa de conceitos matemáticos trabalhados por meio da Modelagem, potencialidades da associação dos Mapas Conceituais e Modelagem Matemática bem como vantagens e desvantagens em trabalhar com os mesmos.

Palavras-chave: Educação matemática. Modelagem matemática. Aprendizagem significativa. Mapas conceituais.

FONTANINI, Maria Lucia de Carvalho. **Modelagem matemática X aprendizagem significativa:** uma investigação usando mapas conceituais. 2007. 248f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

ABSTRACT

We present the results of a research work based on the theoretical presumptions of Mathematical Modelling in the perspectives of Mathematical Education, Meaningful Learning Theory of David Ausubel and Concepts Maps of Joseph Novak. We previously established a set of elements through which it is possible to elicit the occurrence of Meaningful Learning through the Concepts Maps, when teaching activities compose a proposal involving Mathematical Modelling. The research was developed with 4 students attending the first semester of an Industrial Mechanical Maintenance course in a state University from Paraná, during the classes of Foundations of Mathematics, Integral Differential Calculus I and during an extra-curricular course. After a familiarization period with the Concepts Maps, the students developed Mathematical Modelling activities and they built maps related to the mathematical and extra-mathematical concepts involved in the problem studied. For the collection of information, the concepts maps elaborated by the students, their direct observation, the application of questionnaires and interviews were employed. All these information allowed noticing: progresses in the continuum routine learning-meaningful learning of mathematical concepts using Modelling, the potentialities of association of Concepts Maps and Mathematical Modelling, as well as the advantages and the disadvantages of working with them.

Keywords: Mathematical education. Mathematical modelling. Meaningful learrnig. Concepts maps.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Esquema de Modelagem 20
Figura 3.1 – Sistema de pontuação do RSS 39
Figura 3.2 – Indicadores de aprendizagem 42
Figura 5.1 – Estrutura do primeiro mapa conceitual construído com os alunos....................65
Figura 5.2 – Mapa conceitual 1 final....................65
Figura 5.3 – Mapa sobre o conceito de função 66
Figura 5.4 – Mapa incompleto sobre função de 2º grau 67
Figura 5.5 – Tanque fechado 68
Figura 5.6 – Pressostato 68
Figura 5.7 – Gráfico da ocupação em função da pressão 71
Figura 5.8 – Gráfico do valor pago em função do tempo de duração da ligação....................77
Figura 5.9 – Curva de tendência do tempo x intensidade sonora 79
Figura 5.10 – Gráfico do tempo de exposição em função da intensidade sonora 80
Figura 5.11 – Curva de tendência do diagrama tensão x deformação traçado com os valores da tabela do anexo 9....................85
Figura 5.12 – Curva de tendência do diagrama tensão X deformação com ε variando no intervalo [0,0.003784] 87
Figura 5.13 – Curva de tendência do diagrama tensão x deformação com ε variando no intervalo [0,0.001371] 88
Figura 5.14 – Método de Johnson A 91
Figura 5.15 – Método de Johnson B 91
Figura 5.16 – Método de Johnson C 92
Figura 5.17 – Método de Johnson D 92
Figura 5.18 – Gráfico da função que expressa a tensão em função da deformação no final da fase elástica 95
Figura 6.1 – Mapa da aluna A 2 referente à 1ª atividade de Modelagem.......105
Figura 6.2 – O mapa de referência da atividade 106

Figura 6.3 – Evolução dos alunos em relação aos conceitos, às relações e às relações com poder de transferência no decorrer das atividades 141
Figura 6.4 – Comportamento dos mapas dos alunos em relação à percentagem hierárquicos coerentes com o contexto da atividade 141
Figura 6.5 – Comportamento dos mapas dos alunos com relação ao Número de relações que sinalizam diferenciação progressiva e reconciliação integradora 142

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Relação entre a pressão interna e a ocupação em um tanque 69
Tabela 5.2 – Razão entre a ocupação e a pressão..70
Tabela 5.3 – Comparação entre os valores observados e os obtidos pelo Modelo 70
Tabela 5.4 – Tipos de tarifa conforme horário da chamada 73
Tabela 5.5 – Degraus tarifáricos de acordo com a distância geodésica 74
Tabela 5.6 – Coordenadas geográficas da Cornélio Procópio e Sapopema.....74
Tabela 5.7 – Validação do modelo...78
Tabela 5.8 – Tempo máximo de exposição diária sob alguns valores de intensidade sonora 79
Tabela 5.9 – Dados da tensão e deformação , com valores da deformação próximos de 35 kgf/mm^2..86
Tabela 5.10 – Valores da tensão e da deformação variando com deformação variando de 0% a 0,1371% 87
Tabela 5.11 – Valores de T e de ε , na fase elástica após o limite de proporcionalidade..94
Tabela 6.1 – Resposta dos alunos à pergunta 7 do pré-teste.........................100
Tabela 6.2 – Respostas dos alunos com relação à importância da Matemática...102
Tabela 6.3 – Comparação mapa da aluna A2 e o mapa de referência 107
Tabela 6.4 – Relações expressas pela aluna A2 referentes à 1ª atividade.....109
Tabela 6.5 – Quadro resumo comparativo com o mapa de referência 111
Tabela 6.6 – Quadro resumo dos elementos sinalizadores revelados nos mapas referentes à 1ª atividade de Modelagem 116
Tabela 6.7 – Quadro resumo dos elementos sinalizadores revelados nos mapas referentes à 2ª atividade de Modelagem 119
Tabela 6.8 – Quadro resumo da aprendizagem extra-conteúdo revelada nos mapas da 2ª atividade de Modelagem................................120
Tabela 6.9 – Quadro resumo dos elementos sinalizadores nos mapas referentes à 3ª atividade de Modelagem 123
Tabela 6.10 – Quadro resumo dos elementos revelados nos mapas referentes à 4ª atividade de Modelagem 124

Tabela 6.11 – Quadro resumo dos elementos sinalizadores revelados nos mapas referentes à 5ª atividade de Modelagem 124
Tabela 6.12 – Quadro resumo das aprendizagens extra-matemáticas Reveladas pelos mapas referente à 4ª atividade de Modelagem.. 125
Tabela 6.13 – Quadro resumo das aprendizagens extra-conteúdo reveladas pelos mapas referentes à 5ª atividade de Modelagem............... 125
Tabela 6.14 – Modificações nos conceitos de coeficiente angular Observadas pelos mapas referentes à atividade 1 e referentes às atividades 4 e 5 126
Tabela 6.15 – Tabela resumo dos elementos sinalizadores revelados no a mapa em duplas... 128
Tabela 6.16 – Tabela resumo dos elementos sinalizadores revelados nos mapas finais referentes a função de 1º grau 129
Tabela 6.17 – Quadro resumo dos elementos sinalizadores revelados nos mapas finais referentes ao conceito de função 130
Tabela 6.18 – Modificações no conceito de função do 1º grau observadas nos mapas do aluno A_1 131
Tabela 6.19 – Modificações no conceito de função do 1º grau observadas nos mapas da aluna A_2 132
Tabela 6.20 – Modificações no conceito de função do 1º grau observadas nos mapas do aluno A_3 132
Tabela 6.21 – Modificações no conceito de função do 1º grau observadas nos mapas do aluno A_4 133
Tabela 6.22 – Resultados do teste de Friedmam para os mapas envolvendo função do 1º grau.. 134
Tabela 6.23 – Modificações do conceito de função observadas nos mapas do aluno A_1.. 136
Tabela 6.24 – Modificações ocorridas no conceito de função observada nos mapas da aluna A_2 137
Tabela 6.25 – Modificações ocorridas no conceito de função observadas nos mapas do aluno A_3 138
Tabela 6.26 – Modificações ocorridas no conceito de função observadas nos mapas do aluno A_4 139

Tabela 6.27 – Resumo dos elementos sinalizadores observados no conjunto de mapas dos alunos 143
Tabela 6.28 – Resumo dos elementos sinalizadores observados nos três mapas finais dos alunos 143
Tabela 6.29 – Aprendizagens extra- conteúdo observadas nos mapas 144
Tabela 6.30 – Variação das percentagens de relações entre os 7 mapas 145
Tabela 6.31 – Variação de percentagem de equivalência de relações com poder de transferência nos 7 mapas 145

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 15

1 MODELAGEM MATEMÁTICA 19
1.1 MODELO MATEMÁTICO E MODELAGEM MATEMÁTICA 19
1.2 ASPECTOS HISTÓRICOS DA MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 21
1.3 POSSIBILIDADES DE IMPLANTAÇÃO DA MODELAGEM NA SALA DE AULA 23
1.4 CONTRIBUIÇÕES DA MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 24
1.4.1 Contribuições para a Aprendizagem da Matemática 24
1.4.2 Contribuições do Ponto de Vista dos Aspectos Sociais Envolvidos na Aprendizagem 25
1.4.3 Contribuições da Modelagem que vão além do Conhecimento Matemático 26

2 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA 29
2.1 CARACTERIZAÇÃO DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA 30
2.1.1 Caracterização da Aprendizagem Significativa de Acordo com o tipo de conhecimento aprendido 30
2.1.2 Caracterização da Aprendizagem Significativa de Acordo com o tipo de Relacionamento entre o novo Conhecimento e a Estrutura Cognitiva 31
2.2 PROCESSOS COGNITIVOS ENVOLVIDOS NA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA: DIFERENCIAÇÃO PROGRESSIVA E RECONCILIAÇÃO INTEGRADORA 32
2.3 COMO PERCEBER SE HOUVE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA: ALGUMAS REFERÊNCIAS 33

3 MAPAS CONCEITUAIS 35
3.1 O QUE SÃO MAPAS CONCEITUAIS 35
3.2 AS DIVERSAS APLICAÇÕES DOS MAPAS CONCEITUAIS 36
3.2.1 Uso dos Mapas Conceituais no Planejamento de Ensino 36
3.2.2 Uso dos Mapas Conceituais no Ensino e na Aprendizagem 36
3.2.3 Mapas Conceituais como Recurso de Avaliação 38
3.2.3.1 Algumas formas de pontuar mapas conceituais 38

3.2.3.2 Avaliação dos mapas conceituais sem atribuição de pontos....................41

4 A PESQUISA DESENVOLVIDA: CONSTRUÇÃO DE UM QUADRO TEÓRICO E OS PROCEDIMENTOS USADOS......................................43
4.1 A PERSPECTIVA DE MODELAGEM MATEMÁTICA DA NOSSA PESQUISA 43
4.2 RELAÇÕES ENTRE MODELAGEM E APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA 44
4.3 A BUSCA POR INDÍCIOS DA OCORRÊNCIA DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA...48
4.4 A DEFINIÇÃO DE ELEMENTOS SINALIZADORES DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM ATIVIDADES DE MODELAGEM PERCEPTÍVEIS POR MEIO DOS MAPAS CONCEITUAIS 51
4.4.1 O Conjunto de Conceitos Utilizados pelos Alunos e as Relações Estabelecidas 52
4.4.2 As Relações com Poder de Transferência 53
4.4.3 Sinais de Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integradora 54
4.4.4 Aprendizagens Extra-Conteúdo 56
4.4.5 Modificação nos Subsunçores...57
4.5 PROCEDIMENTOS DO ESTUDO 57
4.5.1 O Contexto Investigado e o Planejamento das Atividades 58
4.5.2 Algumas Informações sobre os Alunos Investigados 60
4.5.3 Os Instrumentos de Coleta de Dados...60
4.5.4 Os Procedimentos de Análise dos Dados 62

5 ATIVIDADES DESENVOLVIDAS...63
5.1 ATIVIDADES DESENVOLVIDAS NA DISCIPLINA DE FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA....64
5.1.1 Introdução aos Mapas Conceituais 64
5.1.2 Outras Atividades Utilizadas para Familiarizar os Alunos com os Mapas 66
5.2 ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DESENVOLVIDAS NA DISCIPLINA DE CÁLCULO I..68
5.2.1 Determinação da Percentagem de Ocupação de um Tanque Fechado.......68
5.2.2 Determinação do Valor da Ligação Telefônica Interurbana..........................72
5.3 ATIVIDADES DE MODELAGEM DESENVOLVIDAS NO CURSO EXTRA CURRICULAR 78
5.3.1 Limite de Tempo de Exposição Segura de Acordo com a Intensidade Sonora 78

5.3.2 Determinação do Módulo de Elasticidade do aço 1020 por meio do Ensaio de Tração....81
5.3.3 Cálculo do Limite de Elasticidade de aço 1020....90

6 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DAS INFORMAÇÕES OBTIDAS....98
6.1 INVESTIGANDO AS CONDIÇÕES PARA A OCORRÊNCIA DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA....99
6.2 ANÁLISE DOS MAPAS EM RELAÇÃO AOS ELEMENTOS SINALIZADORES DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA....102
6.2.1 Análise do Mapa da Aluna A_2, Referente à Primeira Atividade de Modelagem....103
6.2.1.1 O mapa de referência relativo à 1ª atividade....103
6.2.1.2 Os elementos sinalizadores da aprendizagem significativa no mapa da aluna A_2....107
6.2.2. Resultados das Análises Individuais dos Mapas dos Demais Alunos....116
6.2.2.1 Análise dos mapas referentes à primeira atividade de Modelagem....116
6.2.2.2 Análise dos mapas referentes à segunda atividade de Modelagem....119
6.2.2.3 Análise dos mapas elaborados após a terceira atividade de Modelagem....122
6.2.2.4 Análise dos mapas elaborados após a quarta e quinta atividades de Modelagem....123
6.2.3 Análise dos Mapas Buscando Mudanças nos Subsunçores....130
6.2.3.1 Análise da modificação dos subsunçores: conceito de função do 1º grau....131
6.2.3.2 Análise da modificação dos subsunçores: conceito de função....135
6.3 ANÁLISE DO CONJUNTO TOTAL DE MAPAS....140
6.4 UMA ANÁLISE GLOBAL....147

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS....151

REFERÊNCIAS....153

ANEXOS....161
ANEXO 1....162
ANEXO 2....163

ANEXO 3 164
ANEXO 4 198
ANEXO 5 199
ANEXO 6 200
ANEXO 7 201
ANEXO 8 202
ANEXO 9 203
ANEXO 10 208
ANEXO 11 210

INTRODUÇÃO

Uma das finalidades da Educação Matemática é buscar meios para que o aluno aprenda Matemática de forma que se lembre dos conhecimentos matemáticos quando precisar, quer para a aprendizagem de novos conteúdos, quer para resolver problemas com que se depare, na sua vida acadêmica bem como fora dela.

A busca por estes meios nos remete a investigar o que na literatura se conhece como teoria da aprendizagem significativa.

Segundo a literatura consultada com respeito à TAS[1], quando ocorre a aprendizagem significativa o que é aprendido permanece por mais tempo disponível na memória e, mesmo esquecido, é mais facilmente lembrado. Outra característica deste tipo de aprendizagem é que tais conhecimentos possuem um alto poder de transferência, ou seja, eles possibilitam ao aluno aplicá-los quer na aprendizagem de outros conceitos, quer na resolução de problemas (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980; MOREIRA, 1999). Assim considerando estas características, percebemos que a aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos, segundo a concepção de David Ausubel, é um dos objetivos que perseguimos em nossas salas de aula como Educadores Matemáticos.

Segundo Borssoi e Almeida (2004), a Modelagem Matemática é uma alternativa pedagógica que pode favorecer a ocorrência da aprendizagem significativa dos conhecimentos matemáticos, por parte dos alunos. Consultado outras fontes, observamos também vários pontos que parecem indicar contribuições da Modelagem para que a aprendizagem significativa ocorra. Um ponto no entanto permanece como uma interrogação em relação à Modelagem: como perceber que o aluno aprendeu significativamente? A literatura com relação à avaliação em Modelagem é ainda escassa.

Os trabalhos, em geral, abordam a Modelagem Matemática sob diferentes aspectos apresentando, entre outros: contribuições para os processos de ensino e aprendizagem (BRITO; ALMEIDA, 2005; BLUM; NISS, 1991; FERRUZI, 2003; KAISER, 2004; MAASS, 2004), contribuições para o desenvolvimento da

---

[1] TAS abreviatura de teoria da aprendizagem significativa, segundo a concepção de David Ausubel.

cidadania e do senso crítico (JACOBINI; WODEMOTZKI, 2004; SKOVSMOSE, 2004, SILVA, 2005); reflexões sobre a associação entre a Modelagem e as novas tecnologias (BORBA; VILLAREAL, 2005; DELLANINA, 2005; MALHEIROS, 2006); discussões a respeito das relações do professor com a Modelagem e a formação necessária a este para implementá-la em sala de aula (BARBOSA, 2001; DIAS, 2005; FIDELIS, 2005).

A avaliação dos conceitos matemáticos trabalhados por meio das atividades de Modelagem não tem, no entanto, sido objeto específico de pesquisas na área. O assunto aparece nos trabalhos praticamente de forma implícita, apenas sendo citados os meios usados pelos pesquisadores em seus trabalhos. Na bibliografia consultada encontramos apenas o trabalho de Lingefjärd e Holmquist (2004) que trata especificamente do assunto. De modo geral, as formas de perceber a aprendizagem dos conceitos matemáticos apresentadas na literatura consistem em: observação dos trabalhos nos grupos, avaliação da apresentação destes trabalhos, relatórios e provas envolvendo resolução de problemas e exercícios (DELLA NINA, 2005; BORSSOI, 2004; BRITO, 2004).

Quanto a literatura consultada sobre avaliação da aprendizagem significativa (MOREIRA, 1999; NOVAK; GOWIN, 1999) um dos meios ali indicados para proceder a avaliação da mesma, são os mapas conceituais. Estes são instrumentos criados por Novak dentro da teoria da aprendizagem significativa e um dos objetivos de seu uso consiste em perceber a ocorrência ou não desta aprendizagem. Os mapas possuem um especial aspecto, em relação aos outros meios indicados para a avaliação da aprendizagem significativa, além de permitir a observação de sinais de sua ocorrência, eles também podem favorecê-la, quando estão sendo elaborados pelo aluno.

Admitindo que a aprendizagem significativa é um processo que, embora profundamente influenciado por aspectos sociais (COLL, 2002), é algo pessoal (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980; MOREIRA, 1999) e considerando a potencialidade dos mapas conceituais, não somente para avaliação, mas também para proporcionar a aprendizagem significativa (NOVAK; GOWIN, 1999), resolvemos desenvolver nossa dissertação tendo como objetivo: investigar o uso de mapas conceituais na busca de indícios de aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos em atividades de Modelagem Matemática.

Para delimitar o objetivo geral de nossa pesquisa definimos para nosso trabalho dois objetivos específicos:

- Identificar nos mapas conceituais elaborados pelos alunos, relações presentes em sua estrutura cognitiva, referentes aos conceitos envolvidos em uma situação-problema trabalhada por meio da Modelagem Matemática.
- Identificar nestas relações, bem como na forma em que elas se apresentam nos mapas, possíveis indícios da aprendizagem significativa de conceitos envolvidos na situação problema trabalhada por meio da Modelagem Matemática.

Para alcançar estes objetivos desenvolvemos uma pesquisa em que alunos de um curso Superior de Tecnologia em Manutenção Mecânica, matriculados na disciplina de Cálculo I, familiarizados com mapas conceituais e Modelagem Matemática, desenvolvem atividades de Modelagem e constroem mapas referentes a elas, acompanhados de uma explicação oral ou escrita dos mesmos. Nestes mapas e em suas explicações buscamos indícios de aprendizagem significativa. Tais indícios foram investigados a partir de elementos sinalizadores da ocorrência da aprendizagem significativa em atividades de Modelagem que foram definidos baseados na literatura, levando em conta características da aprendizagem significativa, da Modelagem e dos mapas conceituais. Dificuldades e potencialidades encontradas pelos alunos na elaboração dos mapas e nas atividades de Modelagem foram investigadas por meio de questionário e observações.

A estrutura do nosso trabalho está assim definida: no capítulo 1 abordamos aspectos relacionados à Modelagem Matemática; no capítulo 2 fazemos uma breve descrição da teoria da aprendizagem significativa segundo David Ausubel, Novak, Hanesian, Gowin, Moreira e Coll; no capítulo 3 são apresentados os mapas conceituais, seus diversos usos em sala de aula e suas contribuições para os processos de ensino e de aprendizagem em geral; no capítulo 4 apresentamos a nossa perspectiva de Modelagem Matemática, aprendizagem significativa, algumas de suas possíveis relações e, a partir dos referenciais teóricos, definimos um conjunto de elementos sinalizadores de aprendizagem significativa que serão investigados em mapas conceituais. Na seqüência fazemos uma descrição do ambiente pesquisado e da metodologia utilizada para coleta e análise dos dados; no capítulo 5 apresentamos as atividades desenvolvidas com os alunos envolvidos na pesquisa; no capítulo 6, fazemos a apresentação dos dados e sua análise; o capítulo

7 é dedicado às considerações finais do trabalho; em seguida apresentamos as referências bibliográficas que utilizamos; finalmente incluímos alguns anexos.

1 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo, inicialmente fazemos algumas considerações sobre modelo matemático e Modelagem Matemática com a finalidade de esclarecer o significado destes termos neste trabalho. A seguir apresentamos alguns aspectos históricos e abordamos aspectos práticos referentes à implementação da Modelagem Matemática na sala de aula. Na seqüência são abordadas contribuições das atividades de Modelagem para o ensino e para a aprendizagem da Matemática bem como para a formação geral do aluno, encontradas em várias pesquisas já desenvolvidas. A percepção de tais contribuições também influenciou nossa opção para trabalharmos em nossa pesquisa com a Modelagem Matemática buscando a aprendizagem significativa dos alunos.

1.1 MODELO MATEMÁTICO E MODELAGEM MATEMÁTICA

Segundo Caraça (1958), a atividade matemática se desenvolve impulsionada por duas buscas: a busca de respostas a perguntas nascidas no seu interior e a busca da compreensão de fenômenos ou de respostas para problemas da realidade física, social e cultural que envolve o homem.

Nesta busca, o homem se utiliza de representações sobre os problemas ou sobre os fenômenos em estudo. Tais representações são denominadas de modelos (D’AMBRÓSIO, 2003). As representações que utilizam símbolos e relações matemáticas são denominadas modelos matemáticos (BASSANEZI, 2002).

A atividade matemática de criar, validar, aplicar e aperfeiçoar modelos matemáticos é chamada Modelagem Matemática.

De modo geral, a resolução de um problema por meio da Modelagem envolve várias etapas. O esquema da figura 1.1, apresentado por Maass (2004) é uma forma de descrever estas etapas.

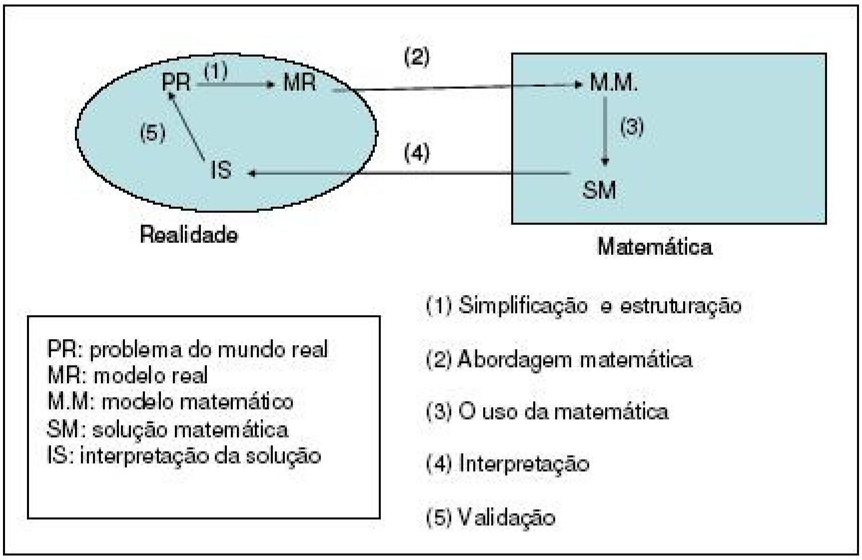


Figura 1.1 – Esquema de Modelagem
Fonte: (MAASS, 2004, p.2)

Segundo Maass (2004), o processo parte de um problema do mundo real[2]. No início do processo a situação em estudo é idealizada e simplificada o que é feito por meio de hipóteses simplificadoras. Esta nova situação obtida a partir da situação real, por meio da simplificações, é um modelo real da situação original. A seguir este modelo deve ser matematizado, o que implica em traduzir o problema e os dados por meio de objetos matemáticos[3]. Trabalhando com este modelo uma solução matemática para o problema é obtida. A seguir, esta solução deve ser interpretada com referência à situação da vida real. Por fim, a validade da solução é investigada pela adequação desta em relação aos valores reais.

As situações investigadas por meio da Modelagem se referem às mais diferentes áreas, não se restringindo somente às ciências exatas como a física e a química. Na biologia modelos matemáticos explicam o crescimento e interação entre as espécies, como por exemplo, o modelo de Lotka-Voltera que estuda as relações presa predador. Neste modelo admite-se como hipótese que as presas

[2] Por mundo real entendemos aqui, como coloca o documento elaborado pelo IPC (International Programme Comittee) do ICMI (International Comission for Mathematical Instruction "... tudo que é relacionado à natureza, sociedade ou cultura, incluindo a vida cotidiana bem como assuntos de escola e universidade ou disciplinas científicas e de estudo diversas da matemática "(IPC, 2003, p.6).
[3] Entendemos aqui objetos matemáticos como os define Fonte *et al* "Objetos matemáticos são qualquer entidade ou coisa a qual nos referimos, ou da qual falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que intervém de algum modo na atividade matemática" (Fonte *et al*, 2005, p.5). Segundo estes autores são exemplos de objetos matemáticos: ponto, número, plano, operações, relações algoritmos, problemas, demonstrações, entre outros.

crescem exponencialmente na ausência dos predadores e que a taxa de mortalidade dos predadores, na ausência das presas é proporcional a sua população em cada instante t. A solução do problema implica na solução de um sistema de equações diferenciais não lineares (BASSANEZI, 2002).

A teoria dos jogos, desenvolvida por John Von Neumann e Oskar Morgenstern e aperfeiçoada por John Nash, é utilizada para análise de conflito e cooperação entre países e empresas e para elaboração de estratégias de segurança global (FRANCHI, 2005).

1.2 Aspectos Históricos da Modelagem Matemática na Educação Matemática

O uso da Modelagem Matemática não se limita à obtenção de modelos explicativos que ajudam o homem a resolver problemas ou compreender fenômenos, mas pesquisas denotam que a Modelagem também pode apresentar um alto potencial educativo (ALMEIDA; DIAS, 2004; BASSANEZI, 2002; BIEMBENGUT, 1999; BRITO; ALMEIDA, 2005; CHAVES, 2005).

A percepção de tais potencialidades começou a ganhar força no início do século XX, quando segundo Niss (1987), surge o movimento utilitarista. Tal movimento percebia na utilidade da Matemática para a ciência e para a sociedade a razão de ser do seu ensino. Assim, influenciadas por tal movimento, as escolas davam ênfase às relações entre a Matemática e outras ciências. O movimento utilitarista, no entanto, se limitava aos aspectos matemáticos e técnicos envolvidos na aplicação. Ou seja, o objetivo era somente utilizar as aplicações para ensinar conceitos e algoritmos matemáticos.

Um momento que merece destaque na inclusão das aplicações no ensino de Matemática foi a realização do Simpósio Lausane realizado em 1968, com o tema: “Como ensinar Matemática de modo que seja útil”. Este simpósio salientou como maior objetivo do ensino da Matemática, o desenvolvimento da capacidade para matematizar situações e modelar problemas e situações não matemáticas (BREITEIG; HUNTLEY, 1993). Percebemos que aqui há uma mudança no objetivo central ao se fazer uso das aplicações no ensino. A preocupação principal passa a ser, desenvolver no aluno a capacidade de aplicar a Matemática aprendida, modelando situações.

Em 1983 se realizou o 1º ICTMA (1st *International Conference on the Teaching of Modelling and Applications*) cujo tema foi ”O ensino da matemática através modelagem e por meio de aplicações”. A este se seguiram outras edições do evento, que ocorrem até hoje bienalmente.

No Brasil as primeiras experiências de Modelagem Matemática no ensino, foram realizadas por um grupo de professores ligados à área de Matemática Aplicada na UNICAMP, na década de 70. Enquanto alguns utilizavam Modelagem Matemática na iniciação científica e em algumas disciplinas relacionadas à Biomatemática, Ubiratam D’Ambrósio desenvolvia estudos teóricos e pedagógicos que foram decisivos para a consolidação da Modelagem no ensino. Na mesma época, o professor Aristides Barreto na PUC-RJ trabalhava com uma estratégia de ensino de Matemática a partir de modelos, foi ele também o responsável pela orientação das duas primeiras dissertações que tratam do uso de modelos matemáticos no ensino, embora não utilizasse o termo Modelagem Matemática para denominar esta forma de trabalho (FIORENTINI, 1996).

Segundo Burak (2004), o ano de 1983 é considerado um marco na história da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática no Brasil. Em Guarapuava no Paraná, na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, hoje Universidade Estadual do Centro Oeste, tem início o primeiro curso de especialização para professores utilizando a Modelagem Matemática como alternativa para o ensino da matemática.

Em 1986, na UNICAMP, é defendido o primeiro trabalho que passou a utilizar e explorar o termo Modelagem Matemática “’Modelos matemáticos no ensino da matemática”, defendido por Maria Cândida Muller e orientado pelo professor Lafayette de Moraes (FIORENTINI, 1996).

Buscando não só a difusão dos trabalhos de Modelagem em sala de aula, mas também o progresso desta como linha de pesquisa na Educação Matemática, passou a ser realizada desde 1999 a Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática – CNMEM . A primeira foi realizada na cidade de Rio Claro – SP, tendo como tema: “A Modelagem no ensino da matemática” com cerca de 200 participantes. Em 2001, na Universidade São Francisco, em Itatiba, foi realizada a segunda, sendo que pela primeira vez foram publicados anais do evento. A terceira foi realizada em 2003, na Universidade Metodista em Piracicaba. A quarta conferência aconteceu em 2005, em Feira de Santana - Bahia com o tema; ”Modelagem Matemática e formação humana”, contando com trabalhos de vários estados brasileiros.

Estes congressos têm proporcionado oportunidades de difusão da Modelagem na perspectiva da Educação Matemática entre os futuros professores, licenciandos de matemática, bem como entre aqueles que já atuam em sala de aula e têm também contribuído para o desenvolvimento da Modelagem como área de pesquisa na Educação Matemática.

Resultados destas pesquisas têm chegado ao professores por meio de publicações, cursos e têm servido de subsídio para aqueles que desejam trabalhar com Modelagem em sala de aula.

Trataremos a seguir de algumas orientações práticas, com relação ao trabalho de sala de aula que estas pesquisas têm apontado. Em nosso trabalho tais orientações serviram para subsidiar a construção do ambiente no qual desenvolvemos nossa pesquisa.

1.3 Possibilidades de Implantação da Modelagem na Sala de Aula

Os trabalhos de Modelagem em sala de aula são geralmente executados em pequenos grupos assessorados pelo professor. Além das etapas já apresentadas na secção 1.1, quando se trabalha a Modelagem na perspectiva da Educação Matemática são incluídos dois novos momentos: um para a sistematização dos conteúdos matemáticos abordados por meio do problema e outro para a apresentação e discussão dos trabalhos desenvolvidos.

A literatura (ALMEIDA; DIAS, 2004; BARBOSA, 2004) sugere que a introdução das atividades de Modelagem Matemática seja feita de forma gradual. Em um primeiro momento o professor pode trazer o problema e os dados e resolvê-lo com os alunos. Em um outro momento pode-se aumentar a participação dos alunos, sugerindo o problema e pedindo que eles coletem os dados e resolvam o problema, assessorados pelo professor. Finalmente, em um terceiro momento, os próprios alunos são responsáveis pela elaboração e resolução do problema.

O objetivo da introdução gradual consiste, essencialmente, em familiarizar os alunos com a Modelagem Matemática. Podemos dizer que, sob alguns aspectos, a Modelagem altera o processo de condução do ensino, tal como ele ocorre em muitas salas de aula. Isso, no início, pode causar aos alunos estranheza e certas dificuldades. De modo geral os alunos estão acostumados com o sistema em que o professor transmite e o aluno escuta numa atitude passiva e tornar-se mais ativo, mais participante das aulas pode, num primeiro instante, causar estranheza.

1.4 Contribuições da Modelagem Matemática para a Educação Matemática

Segundo a literatura, são várias as contribuições que a inclusão de atividades de Modelagem Matemática em sala de aula pode trazer para os processos de ensino e aprendizagem da Matemática, bem como para a formação geral do aluno como pessoa e cidadão.

1.4.1 Contribuições para a Aprendizagem da Matemática

A ênfase dada à linguagem, a preocupação excessiva com o domínio de algoritmos sem a compreensão dos processos realizados, bem como a falta do trabalho com aplicações que muitas vezes caracteriza o ensino da Matemática , têm feito dela, para muitos alunos, um conjunto de regras, escritas numa linguagem estranha e sem sentido. Nas atividades de Modelagem, ao contrário, a introdução de um conceito ou a aplicação de um algoritmo surgem como uma necessidade, como um meio para se obter a solução de um problema, que de um modo geral, não é somente matemático. Dessa forma o saber construído por meio de Modelagem torna-se um saber contextualizado, como apresenta Franchi (1993), e um saber ao qual o aluno atribui sentido, conforme afirmam Brito e Almeida (2005).

Além disso, cabe destacar que tais atividades permitem aos alunos trabalhar com múltiplas representações do objeto matemático, a escrita em linguagem coloquial, muitas vezes a tabular, a gráfica e a algébrica, dando a oportunidade ao aluno de estabelecer relações entre elas, o que contribui para a aprendizagem significativa dos conteúdos matemáticos, segundo a concepção de aprendizagem significativa de David Ausubel (BORSSOI; ALMEIDA, 2004).Cabe ainda salientar em relação à aprendizagem significativa, que as atividades de M.M. se constituem em uma forma de trabalho com resolução de problemas e segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), a resolução de problemas é um tipo especial de aprendizagem significativa.

Além de propiciar condições favoráveis à aprendizagem dos conceitos a Modelagem também contribui para o desenvolvimento de habilidades relacionadas à resolução de problema. Contribuições neste sentido são apontadas por Burak (1992) que afirma que os trabalhos de Modelagem podem contribuir para o desenvolvimento da habilidade de fazer predições, tomar decisões, bem como podem ser um incentivo para que o aluno raciocine, faça estimativas e dê vazão à criatividade numa aproximação da postura científica.

1.4.2 Contribuições do Ponto de Vista dos Aspectos Sociais Envolvidos na Aprendizagem

As atividades de Modelagem são geralmente realizadas em pequenos grupos assessorados pelo professor, propiciando a discussão e troca de idéias entre os alunos. Tal característica se constitui um ponto importante que contribui para a construção do conhecimento nas atividades de Modelagem. Como coloca Fernandes (2000) o trabalho comum, tendo em vista o mesmo objetivo de solucionar um problema, possibilita discutir os méritos de diferentes estratégias que podem ser utilizadas para resolver o problema, o que pode contribuir para a aprendizagem dos conteúdos envolvidos. Este aspecto também é ressaltado por Almeida e Dias (2004). Segundo estas autoras as atividades de Modelagem são atividades essencialmente cooperativas, na qual a cooperação e interação entre os alunos e entre o professor e os alunos têm papel de destaque na construção do conhecimento.

Uma outra contribuição da Modelagem, relativa aos aspectos sociais envolvidos na aprendizagem é apontada em Lingefjärd e Holmquist (2004). Para estes autores as atividades de Modelagem criam uma atmosfera positiva de aprendizagem e propiciam o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao se comunicar. Estas habilidades são estimuladas nas discussões dentro do grupo para resolver o problema, bem como na apresentação dos resultados, quando o aluno entrega um trabalho escrito, relatando o problema e sua solução e faz uma apresentação oral do trabalho para a turma. Tal comunicação envolve também a comunicação em linguagem matemática que, segundo Kaiser (2004), é um dos componentes da alfabetização matemática.

1.4.3 Contribuições da Modelagem que vão além do Conhecimento Matemático

Segundo Franchi (2005), os trabalhos com Modelagem permitem considerar outras dimensões do conhecer, não necessariamente subordinadas à dimensão racional, como a sensorial, intuitiva, emocional e cultural. Tal afirmação é corroborada por vários trabalhos, que apresentam contribuições da Modelagem no desenvolvimento de habilidades e na constituição de conhecimentos, que não se referem especificamente à Matemática, mas que são importantes em outras disciplinas ou que ajudarão o aluno em sua vida fora da escola.

Kaiser (2004) afirma que a necessidade de coletar dados, de organizar encontros fora da sala para desenvolver o trabalho, a busca de formas de apresentá-lo a turma, contribuem para a formação geral do aluno, pois são oportunidades para desenvolver a criatividade e o espírito de iniciativa.

Um ponto que merece destaque, quando nos referimos à formação geral do aluno, são as contribuições da Modelagem para a formação de um cidadão crítico e participante. Segundo Silva (2005), os momentos de discussão propiciados pela Modelagem, seja nos pequenos grupos , seja na discussão com a turma, durante a apresentação, permitem aos estudantes expressar sua opinião, aprender a ouvir, a divergir ou convergir em uma opinião consensual, contribuindo para a formação de um cidadão mais flexível e dinâmico.

Em particular no Brasil, as contribuições da Modelagem com relação à formação para a cidadania e o despertar da consciência crítica, têm merecido a atenção de vários pesquisadores, que abordam as relações entre a Modelagem e a Educação Matemática Crítica. Nesta perspectiva trabalha-se com as atividades de Modelagem não somente visando aspectos referentes à aprendizagem da Matemática ou desenvolvimento de habilidades relacionadas à resolução de problemas, mas existe uma preocupação especial para que o trabalho da sala de aula contribua para que o aluno se torne um cidadão, participando de forma crítica das discussões sobre questões políticas, sociais e econômicas. Almeja-se com estes trabalhos contribuir para que o aluno se torne capaz de utilizar a Matemática não só para compreender tais fenômenos, mas também que seja capaz de fazer uma análise crítica do uso que é feito da Matemática em nossa sociedade e de como, muitas vezes, ela é utilizada como argumento para reforçar e dar credibilidade a resultados, que vão de acordo com interesses particulares de certos grupos na sociedade (SKOVSMOSE, 2001).

Silva (2005, p.123) em seu trabalho, procurando investigar as possíveis contribuições da Modelagem para a formação do cidadão consciente, conforme a proposta apresentada pela Educação Matemática Crítica, conclui que os trabalhos de Modelagem nesta perspectiva, ”podem se tornar um laboratório de cidadania, estimulando o indivíduo à reflexão sobre seu papel social e ampliando sua visão de mundo”.

Todas essas contribuições nos levam a considerar a Modelagem como uma alternativa pedagógica que proporciona oportunidades de educar o aluno pela Matemática. Este processo de educação não envolve somente o domínio do conhecimento matemático, mas este é uma parte importante, pois influencia em outros aspectos da vida do individuo. Como afirma Skovsmose (2001), nossa sociedade é hoje altamente dominada pela tecnologia, sendo a Matemática o sustentáculo lógico do processamento da informação e a base para o desenvolvimento tecnológico. Assim, privar alguém do conhecimento matemático é minar suas possibilidades de ação e participação nessa sociedade. Cabe salientar que tal acesso não pode se limitar a que os alunos conheçam uma lista de fórmulas e saibam resolver alguns exercícios padrão. Mas sim um conhecimento que permita a este aluno, interpretar o mundo em que vive, resolver problemas e avançar na busca por outros conhecimentos, o que é fundamental na sociedade da informação que vivemos.

Mais do que nunca parece ser exigido que o aluno seja capaz de fazer a transferência daquilo que aprendeu para outras situações e contextos. Tal transferência só é possível se ocorreu uma aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos estudados. Vista sob esta perspectiva, a aprendizagem significativa passa a não ser somente algo relacionado ao desenvolvimento cognitivo do aluno, mas uma questão também ligada à cidadania, propiciando condições para que o aluno seja um cidadão do seu tempo.

O termo aprendizagem significativa, como afirma Lemos (2005), é polissêmico no meio da educação, as pessoas o utilizam com diferentes significados. Sendo assim, para fins de esclarecimento, apresentamos o significado dado ao termo neste trabalho e alguns elementos da teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel nos quais nos fundamentamos para planejamento e execução da pesquisa.

2 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

A teoria da aprendizagem significativa teve sua origem em 1963 com David Ausubel e recebeu depois contribuições de vários pesquisadores como Novak, Gowin, Hanesian, Moreira.

Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), a aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação se relaciona de forma substantiva e não arbitrária com aspectos relevantes já presentes na estrutura cognitiva do indivíduo.

O termo “substantiva” indica que o que é incorporado à estrutura cognitiva do aluno é a essência do novo conceito ou proposição e não as palavras que foram usadas para expressá-lo. A não arbitrariedade se refere ao fato do novo conhecimento não se relacionar com idéias quaisquer, mas com idéias relevantes já presentes na estrutura cognitiva do aluno. Tais idéias servem de apoio ou “ancoradouro” para as novas informações e são denominadas de subsunçores (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980).

Durante o processo de aprendizagem significativa a estrutura cognitiva sofre incremento de aspectos quantitativos (inclusão de novos conceitos) e/ou qualitativos (modificação dos subsunçores) (COLL, 2000). Para Hamish et al (apud BARTELS, 1995) a aprendizagem significativa pode resultar, não só na conexão de novos conceitos da estrutura cognitiva, mas também em conexões entre conceitos já aprendidos que eram vistos como isolados.

Contrapondo a aprendizagem significativa, Ausubel, Novak e Hanesian (1980) colocam a aprendizagem memorística. Neste tipo de aprendizagem os novos conceitos pouco ou nada interagem com os subsunçores e a nova informação é armazenada de forma literal. Embora as contrapondo, Ausubel, Novak e Hanesian (1980), não as colocam como se fossem uma oposta à outra, mas concebem-nas como dois pólos de um “continuum”. A proximidade de um pólo ou do outro, afirma Coll (2000), depende dos relacionamentos estabelecidos serem ou não substantivos e não arbitrários:

> Quanto mais se relaciona o novo material de forma substancial e não arbitrária com algum aspecto da estrutura cognitiva prévia que lhe for relevante, mais próximo se esta da aprendizagem significativa. Quanto menos se estabelece este tipo de relação, mais próximo se está da aprendizagem memorística (COLL, 2000, p.232).

A aprendizagem significativa de um conceito é um processo que nunca pode ser considerado como encerrado, pois novos contatos do aluno com o conceito, podem proporcionar estabelecimento de novas relações, ampliando sua compreensão a respeito do mesmo (NOVAK; GOWIN, 1999).

Moreira (2000) afirma que a aprendizagem memorística, em alguns momentos pode ser até necessária, como no caso em que alguém é iniciado em um novo corpo de conhecimentos.

> A aprendizagem mecânica se produz até que alguns elementos do conhecimento nessa área, relevantes com relação às novas informações, existam na estrutura cognitiva e possam servir como subsunçores, ainda que pouco elaborados. À medida que a aprendizagem começa a tornar-se significativa, esses subsunçores vão ficando cada vez mais elaborados e mais capazes de servir de ancoradouro a novas informações (MOREIRA, 2000, p.18).

2.1 CARACTERIZAÇÃO DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

A aprendizagem significativa pode ser classificada de duas formas de acordo com o que está sendo aprendido (se é uma representação, um conceito ou uma proposição) e conforme o tipo de relação que o novo conhecimento estabelece com a estrutura cognitiva.

2.1.1 Caracterização da Aprendizagem Significativa de Acordo com o tipo de Conhecimento Aprendido

O “tipo mais básico de aprendizagem significativa” segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p.39), é a aprendizagem representacional e é ela que condiciona todos os outros tipos de aprendizagem significativa. Tal aprendizagem consiste em aprender o significado de símbolos ou palavras unitárias ou aprender o que estes representam.

Um outro tipo de aprendizagem é a aprendizagem de conceitos. Os conceitos são objetos concretos ou abstratos ou situações que possuem atributos essenciais comuns e o seu significado é expresso por uma palavra ou símbolo. Aprender um conceito significa distinguir e identificar seus atributos essenciais (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980).

O último tipo de aprendizagem significativa é a aprendizagem proposicional. Uma proposição é uma estrutura formada por dois ou mais conceitos unidos por palavras de ligação. Aprender uma proposição implica não somente compreender o significado das palavras componentes isoladas, mas aprender o significado das idéias que são expressas por meio da combinação destas na proposição apresentada (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980; MOREIRA, 1999).

Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), considerando-se o continuum aprendizagem memorística – aprendizagem significativa, a aprendizagem representacional se encontra mais próxima da aprendizagem memorística ou automática e a conceitual e a proposicional podem atingir formas mais complexas de aprendizagem significativa.

2.1.2 Caracterização da Aprendizagem Significativa de Acordo com o tipo de Relacionamento entre o novo Conhecimento e a Estrutura Cognitiva

Como já salientamos anteriormente, o aluno aprende significativamente quando consegue estabelecer relações substantivas e não arbitrárias entre o conhecimento novo e algum conhecimento relevante, presente em sua estrutura cognitiva. Quando os conceitos que o aluno já sabe são mais gerais e mais abrangentes que os novos conceitos aprendidos, temos a aprendizagem subordinada.

A aprendizagem será dita superordenada (ou sobreordenada) quando o novo conceito aprendido for mais geral, inclusivo, e implicar em uma síntese de vários conceitos aprendidos anteriormente. Assim, na estrutura cognitiva os conceitos já aprendidos ficam subordinados a este novo conceito (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980; MOREIRA, 1999). Em Matemática, por exemplo, o aluno aprende o conceito de números reais somente após aprender o conceito de números naturais, inteiros, racionais e irracionais.

Quando os novos conceitos não forem nem subordinados, nem superordenados com relação aos conceitos anteriores, ou seja, quando os conceitos ou proposições aprendidas não são nem subordináveis, nem são capazes de subordinar a algum subsunçor, temos a aprendizagem combinatória.

É interessante salientar aqui também, um diferencial deste tipo de aprendizagem com relação aos anteriores. Enquanto, na aprendizagem subordinada e na superordenada há um relacionamento entre o novo conhecimento e conceitos e proposições particulares já presentes na estrutura cognitiva, na aprendizagem combinatória este relacionamento se dá, não com algum aspecto em específico, mas sim com uma ampla gama de idéias e conceitos. Ausubel, Novak e Hanesian (1980) colocam, como um exemplo desse tipo de aprendizagem, a aprendizagem da heurística de problemas e a demonstração de teoremas. Segundo os autores, estes tipos de aprendizagem se relacionam com um conjunto amplo de aprendizagens e não com alguma aprendizagem em específico.

2.2 Processos Cognitivos Envolvidos na Aprendizagem Significativa: A Diferenciação Progressiva e a Reconciliação Integrativa

Na aprendizagem subordinada o novo conhecimento é aprendido e os conceitos e proposições mais gerais que lhe serviram de apoio, são modificados tornando-se mais abrangentes e ganhando novos significados. Este processo de inclusão, que pode ocorrer uma ou mais vezes, é denominado de diferenciação progressiva do conceito ou proposição que engloba os novos conhecimentos.

No decurso da aprendizagem significativa de um novo conhecimento, pode ocorrer que, idéias já presentes na estrutura cognitiva, mas entre as quais não se havia estabelecido alguma relação, passem a ser percebidas como relacionadas. Isto acarreta uma modificação na estrutura cognitiva que passa a assumir uma nova organização devido à aquisição de novos significados para os conceitos e proposições já presentes na estrutura cognitiva. Tal processo é denominado de reconciliação integrativa (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980; MOREIRA, 1999).

Segundo Novak e Gowin (1999), existem ainda outras situações que podem caracterizar a ocorrência da reconciliação integrativa, por exemplo, quando o aluno consegue: observar similaridades e diferenças entre conceitos correlatos, quando ele resolve inconsistências reais ou aparentes entre os conceitos.

Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), toda aprendizagem que é produto de uma reconciliação integrativa também tem como efeito uma posterior diferenciação progressiva dos conceitos e proposições pré-existentes.

Para promover a reconciliação integrativa, Moreira (1999) salienta que o ensino deve explorar as relações entre os conceitos, destacar as diferenças e similaridades entre eles e resolver inconsistências reais e aparentes.

2.3 Como Perceber se Houve Aprendizagem Significativa: Algumas Referências

Ausubel, Novak, Hanesian (1980) Moreira (1999) afirmam que demonstrar que a aprendizagem significativa ocorreu não se trata de uma tarefa simples e sugerem atividades para evitar que ocorram “simulações da aprendizagem significativa”.

Segundo estes autores, pode-se formular questões e problemas de uma forma nova, não familiar que exija do aluno a transformação do conhecimento aprendido. Pode-se também propor ao aprendiz uma tarefa de aprendizagem que seja dependente daquela que se quer avaliar, no sentido que ele não consiga executá-la sem ter realmente compreendido os conceitos e proposições envolvidas no conhecimento que se quer avaliar.

Uma outra alternativa, mais simples, segundo os mesmos autores, seria pedir aos alunos que diferenciassem idéias relacionadas, mas não idênticas ou identificassem os elementos essenciais de uma lista, contendo elementos de outros conceitos e proposições similares. Um outro método válido seria a resolução de problemas. Mas quanto a estes Ausubel, Novak e Hanesian (1980) e Moreira (1999) fazem uma ressalva. Caso o aluno não consiga resolver o problema, não se pode concluir que ele não aprendeu de forma significativa, pois a resolução de problemas exige do aluno outras habilidades além da compreensão dos conceitos envolvidos.

Borssoi e Almeida (2004) definem um conjunto de aspectos que, segundo as autoras, devem ser investigados para detectar a ocorrência da aprendizagem significativa em atividades de Modelagem, divididos em dois grupos: a) Aspectos ligados à predisposição dos alunos a aprender: envolvimento nas atividades, elaboração de estratégias próprias e aprendizagem extra-conteúdo. b) Aspectos cognitivos: compreensão conceitual, construção e manipulação de múltiplas representações, aplicação do conhecimento a situações novas e retenção do conhecimento por longo tempo.

Segundo Moreira (1999), para diagnosticar a aprendizagem significativa o professor não deve somente fazer uso de adaptações de instrumentos convencionais de avaliação. Ele salienta que além destes o professor deve procurar usar e construir novos instrumentos para tal fim.

Dentre os instrumentos novos já criados para este fim, Moreira (1999) dá destaque aos mapas conceituais. Mas que sinais são estes que os mapas podem revelar? Como se deve proceder para investigá-los? A resposta a essas perguntas carece de uma compreensão sobre como funcionam os mapas, em que princípios se baseiam e como eles vêm sendo utilizados, em várias pesquisas como instrumentos de avaliação da aprendizagem significativa. Assim consideramos de importância em nosso trabalho que abordemos também alguns aspectos referentes aos mapas conceituais e por isso lhes dedicamos o capítulo a seguir.

3 MAPAS CONCEITUAIS

Neste capítulo inicialmente damos uma explicação sobre o que são os mapas conceituais e como eles são construídos. A seguir abordamos algumas formas de utilização dos mesmos nos processos de ensino e aprendizagem, enfatizando seu uso como instrumento de avaliação, tendo em vista o papel que ele desempenha nesta pesquisa.

3.1 O QUE SÃO MAPAS CONCEITUAIS

Mapas conceituais são diagramas bidimensionais, que representam conceitos e relações entre esses conceitos. Os conceitos são representados por palavras normalmente colocados em elipses ou retângulos. A relação entre dois conceitos é representada por uma linha. Uma palavra ou frase pode ser colocada sobre esta linha para explicitar a relação entre os conceitos unidos.

Os mapas criados por Novak têm inspiração na teoria Ausubeliana e caracterizam-se pela apresentação dos conceitos de forma hierárquica. Os conceitos mais gerais e inclusivos devem vir no topo do mapa. A seguir colocam-se os conceitos menos gerais e vai-se assim decrescendo no grau de generalidade e inclusividade até chegar aos exemplos. Tal ordenação ainda se inspira nos processos de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa da teoria de Ausubel que já foram descritos no capítulo anterior (MOREIRA; BUCHWEITZ, 1993; NOVAK; GOWIN, 1999). Segundo Novak: “Os significados que atribuímos a um dado conceito depende não só do número de relações relevantes de que nos apercebemos, mas também da hierarquização (inclusividade) dessas relações em nosso sistema conceitual” (NOVAK; GOWIN, 1999, p.114).

Nos mapas podem ser utilizadas flechas para unir os conceitos, quando a palavra que os une indicar uma relação que ocorre principalmente em um sentido, ou quando se quiser representar uma relação de sobreordenação. Do contrário omitem-se as flechas entendendo-se que a relação expressa pela palavra se dá de cima para baixo (MOREIRA; BUCHWEITZ, 1993).

3.2 AS DIVERSAS APLICAÇÕES DOS MAPAS CONCEITUAIS

São várias as aplicações dos mapas conceituais. Daremos a seguir algumas que foram encontradas na literatura consultada.

3.2.1 Uso dos Mapas Conceituais no Planejamento de Ensino

Os mapas conceituais podem ser utilizados tanto no planejamento de um curso quanto de uma aula. Eles ajudam o professor a refletir sobre quais são os conceitos centrais e quais as principais relações entre estes conceitos, necessárias para o entendimento da disciplina ou parte dela, e nas quais ele deve intensificar seus esforços (MOREIA; BUCHWEITZ, 1993; NOVAK; GOWIN, 1999).

3.2.2 Uso dos Mapas Conceituais no Ensino e na Aprendizagem

No ensino os mapas conceituais podem ser utilizados para representar relações entre os conceitos envolvidos em uma só aula ou as relações entre os conceitos de uma unidade de ensino ou do curso, como um todo. Eles podem ser utilizados no início do curso ou da aula para dar uma visão do todo. No entanto, segundo Moreira; Buchweitz (1993), o ideal é que a apresentação do mapa se dê quando os alunos já têm alguma familiaridade com o assunto. O professor deve explicar os mapas, pois estes não são auto-explicativos. Durante a explicação ele deve partir do conceito mais geral e ir descendo nas cadeias hierárquicas, desta forma ela dá destaque à diferenciação progressiva dos conceitos. No entanto ele deve também, durante a explicação, subir novamente dos conceitos mais específicos para o mais geral, para não perder a visão do geral, e para mostrar como os conceitos mais específicos se relacionam com ele e modificam seu significado. É preciso também explicitar as relações entre os conceitos subordinados entre si, evidenciar semelhanças e diferenças entre os conceitos e resolver contradições reais ou aparentes, operacionalizando a reconciliação integrativa entre os conceitos (FARIA, 1995; MOREIRA; BUCHWEITZ, 1993).

Solicitar aos alunos que construam seus mapas pode trazer diversas contribuições para o processo de aprendizagem. Durante a construção dos mapas os alunos acabam por descobrir relações entre conceitos que antes eles não consideravam relacionados e assim constroem novos significados para os mesmos (BARRODY; BARTELS, 2000, 2001; BOLTE, 1999; NOVAK; GOWIN, 1999; RUIZ - PRIMO, 2004; SCHMITTAU, 2004).

A elaboração dos mapas implica que os alunos reflitam sobre quais são os conceitos mais inclusivos, quais os menos, que conceito deve ser o mais geral; isto implica em um processo que exige a participação ativa do aluno e contribui para a aprendizagem significativa (ELLIS; RUDNITSKY; SILVERSTEIN, 2004; NOVAK; GOWIN, 1999).

Em pesquisa realizada por Conceição e Valadares (2002) os alunos destacaram como pontos positivos da atividade de elaborar mapas conceituais que estes contribuem para o entendimento da matéria, para sua recordação e diminuem o tempo necessário para seu estudo. Em contrapartida, eles apontam como pontos negativos o fato de que os mapas às vezes podem ser confusos e sua elaboração requer muito tempo.

Paulo e Moreira (2005) afirmam que a elaboração de um mapa conceitual pode ser considerada uma verdadeira situação-problema, constituindo-se em um meio de que o professor pode se valer para estimular o aprofundamento conceitual por parte do aluno e a construção dos novos conceitos, bem como para explorar o que o aluno já sabe.

Salvador et al. (2003) destacam que as atividades de mapas conceituais nos quais os alunos são solicitados não só a elaborarem o mapa, mas também a escrever um texto explicativo e explicarem o mapa oralmente, possibilitam ao aluno perceber o seu próprio pensamento, contribuem para que o mesmo construa significados, clareie idéias e conceitos e perceba pontos que ainda estão obscuros.

3.2.3 Mapas Conceituais como Recurso de Avaliação

Considerando que a estrutura cognitiva de um indivíduo em certa área de conhecimento é constituída pelo conteúdo (conceitos e proposições) referente a esta área, bem como, pela organização deste em sua mente, os mapas conceituais podem ser utilizados para representar a estrutura cognitiva (NOVAK; GOWIN, 1999; MOREIRA; BUCHWEITZ, 1993). Eles permitem ao professor avaliar o conhecimento conceitual do aluno, ou seja, avaliar como ele organiza, hierarquiza, relaciona e diferencia os conceitos dentro de um determinado tópico ou disciplina.

Eles permitem a observação da estrutura proposicional e sendo assim permitem ao professor analisar as ligações deficientes ou concepções alternativas, bem como, são indicadores relativamente precisos do grau de diferenciação dos conceitos na estrutura cognitiva do aluno, referentes a uma determinada área de conhecimento (NOVAK; GOWIN, 1999); pelos mapas pode-se também detectar os conhecimentos prévios, ausência de conceitos, bem como mudanças na estrutura cognitiva (MOREIRA; BUCHWEITZ, 1993). Sobre este último aspecto Wanderse (apud. ELLIS; RUDNITSKY; SILVERSTEIN, 2004) destaca que os mapas são instrumentos heurísticos e, portanto, mudanças nos mapas refletem mudanças no entendimento do aluno.

Para que o mapa seja utilizado como recurso de avaliação é preciso primeiramente que os alunos estejam familiarizados com a técnica de mapeamento (FARIA, 1995; MOREIRA; BUCHWEITZ, 1993; NOVAK; GOWIN, 1999), para que os problemas do mapa não possam ser atribuídos às dificuldades na sua elaboração.

3.2.3.1 Algumas formas de pontuar mapas conceituais

São vários os trabalhos que utilizam os mapas conceituais como instrumentos de avaliação (BARALOS, 2002; NOVAK; GOWIN, 1999; PAULO; MOREIRA, 2005; RUIZ - PRIMO, 2004; RUIZ – PRIMO; SHAVELSON, 1996). Em alguns destes trabalhos encontramos a preocupação de exprimir tal avaliação por meio de um número e por isso utilizam alguns sistemas de pontuação.

Apresentamos dois desses sistemas :o *structural system of scoring* de Novak e Gowin (NOVAK; GOWIN, 1999) e o *relational scoring* desenvolvido por Mc-Lure e Bell (MC-LURE; SONAK; SUEN, 1999).

O primeiro deles será apresentado pela sua relevância devido ao fato de ter sido criado pelo idealizador dos mapas conceituais, e o segundo, por que conforme pesquisas desenvolvidas (MC-LURE; SONAK; SUEN, 1999), é o que tem apresentado maior grau de confiabilidade nos resultados obtidos.

- *Relational sistem scoring*

O *relational scoring* foi criado por Mc- Lure & Bell. Nesta técnica de pontuação são identificadas todas as proposições expressas no mapa (aqui as proposições são entendidas como dois conceitos unidos por uma palavra de ligação). Cada proposição é pontuada de 0 a 3 de acordo com sua exatidão. A figura 3.1 permite compreender melhor como ele funciona.

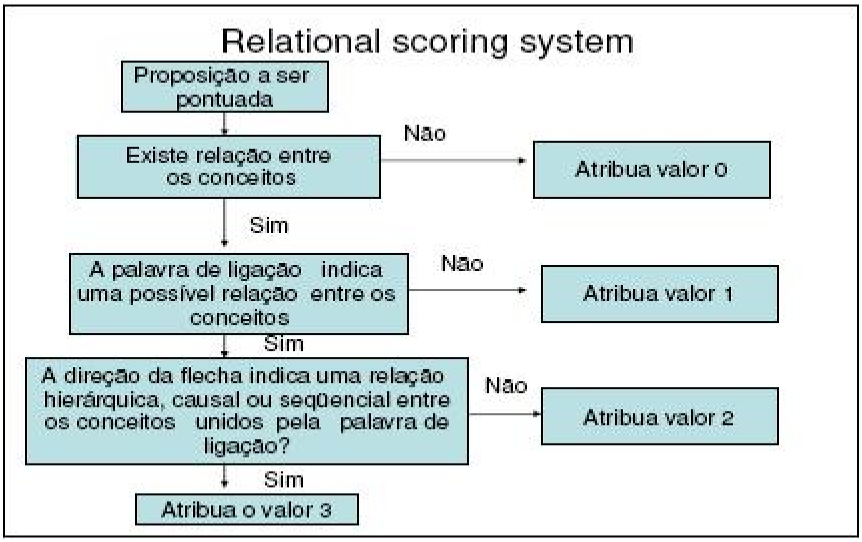


Figura 3.1 – Sistema de pontuação do RSS

Fonte: Baralos, apêndice 1, 2002

Observando a figura 3.1 percebemos que nesta pontuação, inicialmente é avaliada a inclusão ou não do conceito no mapa. Em seguida a existência ou não da relação indicada pela linha que une os dois conceitos, a seguir a exatidão da palavra de ligação empregada, para representar tal relação e, finalmente, a compatibilidade da direção da flecha colocada para unir os conceitos, com relação à palavra utilizada.

- *Structural scoring system*

Este sistema foi desenvolvido por Novak e Gowin (1999). Segundo este sistema:

- Um ponto é atribuído para cada proposição válida.
- A hierarquia do mapa também é pontuada. Para isso deve-se verificar se, do ponto de vista do contexto a que se refere o mapa, cada conceito subordinado é menos geral ou mais específico do que aquele que vem acima dele. Atribui-se 5 pontos para cada nível hierárquico válido. Se os vários ramos conceituais do mapa apresentam tamanhos diferentes, Novak e Gowin (1999) sugerem que sejam contados os níveis do maior ramo.
- São pontuadas as ligações cruzadas entre ramos diferentes da hierarquia conceitual, que indiquem significativas reconciliações integrativas. São atribuídos 10 pontos por ligação.
- Os exemplos também são pontuados e cada exemplo recebe 1 ponto.

Novak e Gowin (1999) também apresentam uma justificativa, para as diferentes atribuições de pontos para cada elemento do mapa pontuado. Segundo estes autores, hierarquias válidas significam a diferenciação progressiva e reconciliação integrativa dos significados conceituais. No entanto, eles consideram que as ligações cruzadas entre dois segmentos distintos da hierarquia, significam possivelmente, reconciliações integrativas importantes e por isso são indicadores melhores da aprendizagem significativa do que os níveis hierárquicos (NOVAK; GOWIN, 1999).

3.2.3.2 Avaliação dos mapas conceituais sem atribuição de pontos

Em outros trabalhos também são mostrados critérios para avaliar os mapas sem, no entanto atribuir pontuações.

Ontoria (apud YOVAL et al, 2004), afirma que no uso de mapas conceituais para avaliar a aprendizagem significativa, quer para emitir juízos qualitativos, quer para emitir juízos quantitativos, deve-se levar em conta as proposições expressas, a hierarquia entre os conceitos, as relações cruzadas e os exemplos.

Gouveia e Valadares (2004) utilizam o que eles chamam de uma “perspectiva holística“ de análise dos mapas. Primeiramente eles procedem uma “análise global” dos mapas. Em tal análise é observada primeiramente a organização dos mapas. Segundo estes pesquisadores, se ela é predominantemente ou exclusivamente linear, denota uma estrutura cognitiva pobre e com problema em relação à ligação entre os conceitos. Se pelo contrário ela é intensamente ramificada, se os conceitos estão bem relacionados e progressivamente definidos, diferenciados e integralmente interelacionados, denota uma estrutura cognitiva rica. A seguir é efetuada o que eles chamam de uma “análise detalhada”. Nesta análise as ligações entre cada conceito são examinadas, verificando se elas são corretas ou revelavam concepções alternativas. Observa-se então se o mapa apresenta diferenciação progressiva adequada e se as ligações cruzadas sinalizam adequadas reconciliações integrativas. Por fim examina-se se os exemplos colocados são válidos.

Guruceaga e Gonzáles (2004) estabeleceram alguns critérios para acompanhar a evolução de uma aprendizagem mais memorística para uma aprendizagem mais significativa, em um programa de educação ambiental. Os critérios estabelecidos são colocados no quadro apresentado na figura 3.2.

Aprendizagem mais significativa	Aprendizagem mais memorísitica/mecânica
São utilizados todos os conceitos	Não se utilizam todos os conceitos
Há uma diminuição de proposições errôneas	Aparecem frequentemente proposições errôneas: hierarquias conceituais não lógicas.
Existe uma organização hierárquica coerente do ponto de vista da natureza inclusiva dos conceitos	Aparece uma organização hierárquica não correta do ponto de vista da organização hierárquica dos conceitos
Aparecem alguns exemplos de superordenação em algum conceito de natureza mais inclusiva	
Os conceitos mais inclusivos apresentam uma complexa diferenciação progressiva	
Aparecem menos relações lineares ou não aparecem em absoluto.	Aparecem relações lineares, estruturas em cadeia entre conceitos.
Aparecem numerosas relações cruzadas reveladoras de reconciliações integrativas de qualidade	Se estabelecerem pouco e errôneos enlaces cruzados, sinalizando reconciliação integrativa deficiente.

Figura 3.2 – Indicadores de aprendizagem

Fonte: Guruceaga e Gonzáles (2004, p.117)

Segundo Afamasaga-Fuata'i (2004), em um estudo envolvendo vários mapas referentes a um mesmo tópico do conhecimento, o aumento no nível de entendimento do aluno sobre o tópico em questão pode ser notado pelo aumento no número de proposições válidas e pela complexidade das cadeias estruturais.

Embora considerando que possam ser utilizados processos qualitativos e quantitativos na análise, Paulo e Moreira (2005) destacam que, em sua opinião, as evidências da aprendizagem significativa devem ser analisadas qualitativamente.

Nosso objetivo nesta pesquisa é investigar o uso dos mapas conceituais na busca de indícios da ocorrência da aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos envolvidos em atividades de Modelagem Matemática. Para isso apresentamos até aqui uma fundamentação teórica que nos permitiu construir uma compreensão sobre cada um dos elementos envolvidos: as atividades de Modelagem, a aprendizagem significativa e os mapas conceituais, mas de forma isolada. O desenho desta pesquisa e sua execução exigem, no entanto, uma reflexão a respeito das relações entre esses três elementos. Esta reflexão será apresentada no capítulo a seguir, bem como o desenho da pesquisa que se originou a partir dela.

4 A PESQUISA DESENVOLVIDA: CONSTRUÇÃO DE UM QUADRO TEÓRICO E OS PROCEDIMENTOS USADOS

Neste capítulo, inicialmente apresentamos algumas considerações sobre a Modelagem Matemática e a aprendizagem significativa decorrentes da reflexão que realizamos. Nestas considerações apresentamos inicialmente a concepção de Modelagem Matemática que permeia nosso trabalho. A seguir procuramos abordar alguns pontos de ligação que percebemos entre a M.M. e a teoria da aprendizagem significativa e que nos levaram a relacioná-las em nossa pesquisa ou, em outras palavras, procuramos levantar, segundo os referenciais consultados, quais elementos a Modelagem possui, entre suas características ou entre as suas diversas contribuições para os processos de ensino e aprendizagem, que possam indicar contribuições para a ocorrência da aprendizagem significativa.

Para investigar o uso dos mapas conceituais na busca de indícios da ocorrência da aprendizagem significativa em atividades de Modelagem Matemática, levando em consideração características da Modelagem Matemática, da aprendizagem significativa e dos mapas conceituais, definimos um conjunto de elementos que são, em nossa pesquisa, elementos sinalizadores da aprendizagem significativa em atividades de Modelagem e são pesquisados nos mapas conceituais.

Finalmente apresentamos como construímos um cenário que possibilitasse a investigação de tais elementos. Um cenário em que alunos, familiarizados com os mapas conceituais, desenvolvem atividades de Modelagem Matemática e elaboram mapas conceituais referentes às mesmas. São apresentados neste capítulo também os instrumentos que nos possibilitaram a coleta de dados, bem como a forma pela qual estes serão analisados.

4.1 A PERSPECTIVA DE MODELAGEM MATEMÁTICA DA NOSSA PESQUISA

A Modelagem Matemática é, no contexto desta pesquisa, entendida como uma alternativa pedagógica, em que os alunos e professores, por meio da matemática, constroem um modelo de uma situação da realidade extra-matemática, com finalidade de compreendê-la, fazer previsões a respeito dela ou resolver problemas que com ela estejam relacionados.

Tal alternativa pode propiciar oportunidades para que os alunos apliquem conhecimentos já construídos, bem como construam novos conhecimentos no estudo de situações-problema.

4.2 Relações entre Modelagem Matemática e Aprendizagem Significativa

O contato com a teoria da aprendizagem significativa e as várias pesquisas referentes à Modelagem Matemática, nos fizeram perceber alguns elementos que parecem indicar contribuições da Modelagem, para que ocorra a aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos. Primeiramente gostaríamos de fazer algumas considerações sobre características da Modelagem que parecem contribuir para que sejam satisfeitas as condições necessárias à ocorrência da aprendizagem significativa.

Ao falar de aprendizagem significativa Ausubel, Novak e Hanesian (1980) colocam três condições:

A primeira condição é que o material que será aprendido deve possuir significado lógico: para isso é necessário que ele seja suficientemente não arbitrário e não aleatório, de forma a poder ser relacionado de forma substantiva e não arbitrária a outras idéias que o ser humano é capaz de aprender. Ausubel, Novak e Hanesian (1980) afirmam que os conteúdos escolares quase que por definição possuem significado lógico. Assim, considerando que por meio da Modelagem abordamos conteúdos da matemática escolar, acreditamos que tal condição é satisfeita.

A segunda condição é a existência, na estrutura cognitiva do aluno, dos subsunçores necessários à aprendizagem do novo conceito. Isto significa que é preciso que, estejam disponíveis e claras as idéias relevantes, com as quais o novo conhecimento deve ser relacionar. Quando o novo material possui significado lógico e o aluno possui os subsunçores claros com os quais o novo material pode se relacionar, dizemos que o material é potencialmente significativo. Ausubel, Novak e Hanesian (1980) ressaltam, no entanto, que para que seja satisfeita a condição do material ser potencialmente significativo, não basta que o conhecimento a ser aprendido seja potencialmente significativo, mas é também preciso que a tarefa de aprendizagem em si, seja potencialmente significativa. Em outras palavras é preciso que ela implique em relacionar de forma não arbitrária e substantiva o novo conteúdo às idéias relevantes presentes na estrutura cognitiva do aluno.

Ao trabalharmos com a Modelagem Matemática percebemos que esta não só envolve elementos significativos (conceitos matemáticos e de outras áreas), mas também a tarefa de construir um modelo, o que implica em um processo de resolução de problemas. Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980) a tarefa de resolução de um problema implica necessariamente numa interação entre os conhecimentos prévios relevantes do individuo e a situação-problema, provocando uma reorganização dos mesmos, para possibilitar a compreensão do problema e sua resolução.

Nas atividades de Modelagem os alunos utilizam muitas vezes, para resolver os problemas, conhecimentos que já possuem. Nossa experiência tem mostrado que um mesmo problema pode ser resolvido de diversas maneiras, utilizando diferentes conceitos matemáticos, dependendo do conhecimento matemático que o aluno possui ou, utilizando a linguagem ausubeliana, poderíamos dizer que para resolver o problema o aluno utiliza os subsunçores de que dispõe em sua estrutura cognitiva. Isto nos permite também dizer que quando o aluno não possui os subsunçores necessários ele não consegue resolver o problema. Cria-se então um momento de impasse em que cabe ao professor intervir. Está previsto no processo de Modelagem, como alternativa pedagógica, um momento para a sistematização dos conteúdos matemáticos envolvidos. Acreditamos que neste momento o professor pode, não só ensinar novos conteúdos necessários à resolução do problema, mas também tentar recordar aqueles conteúdos que o aluno já viu e esqueceu ou não compreendeu plenamente.

A terceira condição que Ausubel estabelece é que o aluno deve desejar aprender significativamente, ou seja, ele deve estar disposto a relacionar de forma substantiva e não arbitrária o material potencialmente significativo aos conhecimentos já presentes em sua estrutura cognitiva.

A respeito dessa última condição dada por Ausubel, Novak (apud MOREIRA, 1999) salienta alguns pontos importantes. Primeiramente ele diz que, para que o aluno deseje aprender é preciso que ele veja relevância no conhecimento aprendido. Vários trabalhos têm demonstrado que a Modelagem Matemática contribui para que o aluno perceba relevância na Matemática que aprende (BLUM; NISS, 1991; BRITO; ALMEIDA, 2005; FERRUZI, 2003). Novak (apud Moreira, 1999) adverte que o desejo de aprender significativamente também está relacionado à experiência afetiva ligada ao evento educativo. Para ele quando o aluno aprende significativamente, compreendendo o conteúdo estudado, ele tem uma sensação positiva que o dispõe a aprender, ao passo que quando ele sente que não está aprendendo gera-se uma sensação de inadequação. Podemos dizer que essa sensação de inadequação se reflete no comportamento de certos alunos diante da Matemática, que após várias experiências mal sucedidas, perdem o interesse pela mesma.

Referindo-se a este tipo de comportamento, Lins (2004) afirma: "[...] o fracasso de tantos com relação à matemática escolar não é um fracasso de quem não consegue aprender embora tente, e sim um sintoma de recusa em sequer se aproximar [...] uma espécie de exclusão auto-induzida" (LINS, 2004, p.95).

As atividades de Modelagem Matemática podem, devido ao seu caráter de conexão com a realidade, desafiar estes alunos e eles, conseguindo resolver o problema, sentem-se capazes de aprender Matemática. Esta contribuição é corroborada pela pesquisa desenvolvida por Galbraith e Clatworthy, (1990). Após desenvolverem um projeto de Modelagem com uma turma, os pesquisadores entrevistaram a mesma, sendo que uma das perguntas versava sobre as contribuições do trabalho, segundo a visão dos alunos participantes. O item que teve maior destaque para eles foi o aumento em sua confiança individual de abordar problemas.

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) afirmam que quando o material é potencialmente significativo estão dadas as condições que possibilitam ao aluno transformar o significado lógico do material em um significado próprio pessoal que se caracteriza por uma compreensão e uma tradução própria do conhecimento aprendido. Essa tradução própria elaborada pelo aluno, fruto da aprendizagem significativa, é denominado significado psicológico do conhecimento aprendido.

No entanto, tal significado pode não ser compatível com o significado que o conceito possui no contexto da disciplina. A aprendizagem significativa não é sinônima de aprendizagem correta (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980; MOREIRA, 1999; LEMOS, 2005). Sendo assim cabe ao professor estar atento para perceber se o significado psicológico atribuído pelo aluno ao novo conhecimento é compatível com o significado lógico que tal conhecimento possui no contexto da disciplina. Ao trabalharmos com aprendizagem escolar nosso objetivo não é apenas que os alunos aprendam significativamente os conceitos abordados, mas também que os significados construídos sejam compatíveis com os significados que estes conceitos possuem no contexto da disciplina.

A aprendizagem significativa que objetivamos exige, portanto, uma constante negociação de significados entre professores e alunos. Dessa forma percebemos que não podemos pensar que a aprendizagem significativa é um processo onde são relevantes fatores meramente individuais. É também preciso considerar as influências exercidas pelas condições que favorecem o intercâmbio e a comunicação entre outros personagens do cenário escolar, no caso professores e colegas. Assim para que os alunos tenham uma aprendizagem significativa dos conceitos abordados e esta possibilite a construção de significados compatíveis com aqueles que estes possuem no contexto da disciplina, é necessário que se criem condições, nas aulas, que favoreçam também a negociação de significados entre professor e aluno e entre os alunos entre si de forma que parcelas cada vez maiores de significado venham a ser compartilhadas (COOL, 2002).

Referindo-se às atividades de Modelagem, Chaves (2005) destaca que a realização destas pode favorecer as relações interpessoais, aluno-aluno e aluno- professor, contribuindo para a criação ou manutenção de ambientes de aprendizagens agradáveis. Acreditamos que a criação de tais ambientes pode facilitar a discussão e a argumentação, entre pares e entre os alunos e o professor, criando espaço para que possíveis incompatibilidades entre os significados construídos, sejam percebidas e tentativas de negociação sejam feitas.

Um outro fator que consideramos apontar para as contribuições da Modelagem Matemática para aprendizagem significativa, é o desenvolvimento da capacidade de tradução. Segundo Ronca (1980), tal capacidade é necessária para que a aprendizagem significativa ocorra. Segundo Bloom (apud RONCA, 1980, p.63), a "tradução" implica na capacidade do indivíduo em, ao entrar em contato com uma forma de comunicação, saber organizá-la em outra linguagem, usando palavras que façam parte da sua estrutura cognitiva. Para Bloom esta capacidade envolve: *capacidade de tradução de um nível de abstração para outro*, o que implica em traduzir um problema da linguagem técnica para outra menos abstrata; traduzir princípios gerais em exemplos; *capacidade de tradução de uma forma simbólica para outra forma* o que envolve, entre outros aspectos, traduzir gráficos, mapas, tabelas, para a forma verbal.

Nas atividades de Modelagem Matemática os alunos têm oportunidades para desenvolver tais capacidades. Como vimos na fig.1 do Capítulo 1 a Modelagem implica em um transitar entre a realidade extra-matemática e a realidade matemática

e, portanto numa transição entre as linguagens dessas duas realidades. O aluno precisa traduzir o problema da linguagem técnica ou corrente para a linguagem matemática, precisa interpretar os dados, que se encontram às vezes em gráficos e tabelas. Ao terminar o problema deve novamente transitar da linguagem matemática para a corrente, interpretando, no contexto do problema, a solução obtida.

Além disso, cabe destacar que tais atividades permitem aos alunos trabalhar com múltiplas representações de um mesmo objeto matemático, a escrita em linguagem coloquial, muitas vezes a tabular, a gráfica e a algébrica, dando oportunidade ao aluno de estabelecer relações entre elas, o que pode contribuir para o desenvolvimento da capacidade de tradução e portanto, para a aprendizagem significativa dos conteúdos matemáticos.

4.3 A Busca por Indícios da Ocorrência de Aprendizagem Significativa em Atividades de Modelagem Matemática

As considerações acima apontam algumas contribuições do desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática para a aprendizagem significativa dos conteúdos matemáticos envolvidos nas mesmas. No entanto elas não se constituem em uma garantia de que ela ocorra. Vale ainda aqui salientar o que afirma Coll (2002): um mesmo ensino dirigido a um grupo de alunos produz significados diferentes em profundidade e amplitude, dependendo dos alunos envolvidos, suas experiências prévias e a maneira como encaram a tarefa de aprendizagem. Assim é preciso que o professor se cerque de meios de verificar quais estão sendo os significados construídos pelos alunos.

Ao analisar a ocorrência da aprendizagem significativa em uma atividade de Modelagem não podemos nos limitar a avaliar o processo, aplicando simplesmente uma prova como acontece tradicionalmente, na qual uma nota é emitida como uma sentença, acima da média aprendeu, abaixo da média não aprendeu. O assunto avaliação em Modelagem é ainda um tema pouco explorado e, na literatura consultada, encontramos apenas o trabalho de Lingefjärd e Holmiquist, (2004) que discute as vantagens de avaliação por pares na Modelagem. Nos demais trabalhos o que encontramos são sugestões de como as atividades podem ser avaliadas.

Alguns autores sugerem propor que os alunos resolvam situações-problema em grupo ou individualmente.

Segundo Moreira (1999) e Ausubel, Novak e Hanesian (1980), esta estratégia tem o seu valor, pois caso o aluno consiga resolver o problema é sinal de que ele realmente aprendeu significativamente. No entanto, eles fazem também uma ressalva: a contra positiva desta afirmação não é verdadeira. Segundo estes autores, caso o aluno não consiga resolver as situações, não se pode concluir que ele não tenha aprendido o conteúdo de forma significativa, pois a resolução de um problema envolve, além da compreensão dos conceitos, habilidades próprias relacionadas ao processo de resolução de problemas.

Uma outra sugestão dada pela literatura é a apresentação de trabalhos oralmente e de forma escrita. O uso destes instrumentos foge da prática usual da avaliação nas aulas de Matemática e permite avaliar outras aprendizagens envolvidas no processo de Modelagem que não estão ligadas somente ao conteúdo matemático, tais como a criatividade, capacidade de expressão oral e escrita. Vale ainda considerar que este instrumento possui a vantagem de além de propiciar a avaliação de tais capacidades, contribuir para que o aluno as desenvolva. As apresentações orais também podem favorecer o debate sobre o modelo entre os alunos, enriquecendo o processo. No entanto, como estas são feitas em conjunto, muitas vezes não se consegue ter uma visão do que cada membro da equipe aprendeu individualmente, no que se refere aos conteúdos matemáticos. Não podemos esquecer que a aprendizagem significativa, embora favorecida por questões sociais, implica na construção do significado, que é algo pessoal. Assim a avaliação da aprendizagem significativa em atividades de Modelagem Matemática mostra-se ainda como um terreno problemático.

Levando-se em consideração esta problemática, os mapas conceituais surgem como um possível caminho para viabilizar a avaliação individual da compreensão dos conteúdos matemáticos envolvidos na atividade, com vistas à aprendizagem significativa. Para utilizá-lo, no entanto, não podemos fazê-lo da forma como procedemos com o velho instrumento da prova. Como destaca Moreira (1999), é preciso que não percamos de vista o conceito de aprendizagem significativa. É necessário que tenhamos em mente, como afirmam Ausubel, Novak e Hanesian (1980), que a aprendizagem memorística e aprendizagem significativa são dois extremos de um continuum. De acordo com estes autores, neste continuum é sempre possível avançar, dependendo dos fatores do contexto e da intenção do aluno. Inclusive em uma mesma atividade consideramos a possibilidade de coexistência das duas. Devemos também considerar, que a aprendizagem significativa de um aluno sobre um determinado conteúdo nunca é um processo contínuo. Novas experiências, em contextos diferentes, com este mesmo conceito, podem permitir a construção de novas relações e, portanto novos significados (NOVAK; GOWIN, 1999). Assim como afirmam Ausubel, Novak e Hanesian (1980), não podemos considerar a avaliação da aprendizagem significativa como uma questão de tudo ou nada. O que podemos analisar é se o conjunto de relações construídas pelo aluno, corresponde àquele que o professor tinha como objetivo ao desenvolver aquelas atividades ou o quanto ele se aproxima ou distancia dele.

Uma das vantagens dos mapas conceituais, além de serem instrumentos criados justamente tendo como um dos objetivos a avaliação da aprendizagem significativa, é que mesmo no momento de avaliação, seu uso pode favorecer ocorrência desta aprendizagem.

Tomando estas considerações como pressupostos é que investigamos nesta pesquisa o uso dos mapas conceituais, na busca de indícios de aprendizagem significativa nas atividades de Modelagem. Assim, o que estamos buscando não são só indícios da ocorrência de aprendizagem significativa de conceitos matemáticos, mas daqueles indícios que indiquem aprendizagens significativas que propiciem a construção de significados que sejam compatíveis com os significados destes conceitos no contexto da disciplina.

Não entendemos aqui que os mapas sejam um meio isolado que possa garantir ou não a ocorrência da aprendizagem significativa. Cremos que todo instrumento possui os seus limites e uma avaliação para ser confiável deve explorar diversos instrumentos. O que pretendemos aqui é analisar o que os mapas nos informam sobre o conhecimento dos alunos, construído por meio de atividade de Modelagem Matemática; que sinais podemos perceber nos mapas que possam ser considerados indícios da ocorrência da aprendizagem significativa dos conteúdos matemáticos envolvidos, que indiquem a construção de significados para os conceitos compatíveis com aqueles que eles possuem no contexto da disciplina (ou indiquem um avançar no continuum aprendizagem memorística - aprendizagem significativa) e quais as potencialidades e dificuldades, com relação aos mapas conceituais e às atividades de Modelagem, apontadas pelos alunos ou percebidas por nós no decorrer do processo.

4.4 A Definição de Elementos Sinalizadores de Aprendizagem Significativa em Atividades de Modelagem Perceptíveis por meio dos Mapas Conceituais

Tendo em vista que nosso instrumento de investigação são os mapas conceituais, se fez necessário que, a partir da literatura, definíssemos alguns elementos sinalizadores da ocorrência da aprendizagem significativa, bem como da compatibilidade dos significados com relação ao contexto da disciplina, que pudessem ser observados por meio dos mapas conceituais. Estes elementos serão pesquisados nos mapas construídos pelos alunos.

No que tange ao uso dos mapas conceituais como instrumentos de avaliação, observando vários trabalhos (AFAMASA-FUATA'I, 2004; BARALOS, 2002; BARRODY; BARTELS, 2000; BARTELS, 1995; BOLTE 1999; CONCEIÇÃO; VALADARES, 2002; GOUVEIA; VALADARES, 2004; GURUCEAGA; GONZALES, 2004; MAC-LURE; SONAK; SUEN, 1999; NOVAK; GOWIN, 1999; RUIZ; PRIMO, 2004; RUIZ-PRIMO; SHAVELSON, 1996; SCHMITTAU, 2004; YOVAL et al, 2004), percebemos alguns elementos comuns. Estes elementos são: a observação das proposições, observação da hierarquia do mapa e observação das ligações cruzadas.

Considerando esses elementos, as características da Modelagem Matemática, características da aprendizagem significativa, as indicações dadas para sua avaliação no capítulo 2 e as especificidades dos mapas conceituais apresentadas no capítulo 3, definimos 5 elementos que podem fornecer indícios da ocorrência da aprendizagem significativa nas atividades de Modelagem ou indicar avanços na direção desta no continuum aprendizagem memorística - aprendizagem significativa, perceptíveis por meio dos mapas conceituais. Estes 5 elementos serão por nós denominados elementos sinalizadores da ocorrência da aprendizagem significativa, por meio dos mapas conceituais. conceituais[4].

4.4.1 O Conjunto de Conceitos Utilizados pelos Alunos e as Relações Estabelecidas

O conjunto de conceitos representados no mapa, conjunto de relações estabelecidas pelo aluno e a presença ou não de linhas de ligação entre os conceitos, bem como o uso do conectivo preciso para indicar a relação envolvida e adequação do mesmo podem ser elementos que sinalizam a ocorrência da aprendizagem significativa. Para Ausubel, Novak e Hanesian (1980), a construção de significado para um conceito envolve a construção de um conjunto de relações que representam seus atributos essenciais, seguida da aprendizagem representacional que consiste em associar a todo objeto que satisfaz este conjunto de atributos, uma palavra. Esta palavra passa então a representar o conceito e o fato de ouvi-la remete o aluno ao conjunto de relações que o caracterizam. Assim por exemplo ao ouvir a palavra função do 1º grau, pode vir à mente do aluno a sua expressão algébrica na forma geral y=ax+b, a figura de uma reta que representa seu gráfico, se ele já estudou derivada, ele pode pensar em funções cuja derivada é uma constante e assim por diante. Segundo Brito e Almeida (2005), as atividades de Modelagem contribuem para a construção do significado para os conceitos matemáticos, ou seja, elas ajudam na construção de relações, que conduzem à compreensão dos conceitos matemáticos.

Para estabelecer as relações é necessário primeiramente que o aluno identifique os conceitos que estão relacionados, assim o conjunto de conceitos utilizados pelo aluno é importante no processo.

---

[4] Por questão de praticidade nós referiremos a eles muitas vezes no trabalho, simplesmente por elementos sinalizadores.

De acordo com Ruiz – Primo (2004), o conjunto de conceitos usados pelo aluno pode ser um ponto a ser avaliado no mapa, caso os conceitos que devem constar não tenham sido dados a priori. Guruceaga e Gonzáles (2004) afirmam que o uso de todos os conceitos considerados relevantes no contexto em que foi construído o mapa é um dos sinalizadores de uma aprendizagem mais próxima à aprendizagem significativa no continuum aprendizagem memorística - aprendizagem significativa. Assim, nos mapas a percentagem dos conceitos presentes em relação àqueles pretendidos pelo professor, pode sinalizar se a aprendizagem está mais próxima da memorística ou mais próxima da significativa.

Após identificar os conceitos o aluno precisa estabelecer as relações. Baralos (2002) coloca que o grau de entendimento do aluno é determinado pela precisão e intensidade das ligações entre os conceitos. Sendo assim, consideramos que a presença de linhas de ligação entre os conceitos e o uso de palavras, que de forma precisa, indiquem a relação envolvida, pode sinalizar a aprendizagem significativa. Pelo contrário a ausência dos conceitos, ausência de linhas de ligação pode indicar que o aluno não percebeu a relação entre dois conceitos (NOVAK; GOWIN, 1999) e a ausência dos conectivos ou palavras que não sejam precisamente adequadas pode indicar um fraco entendimento (BARRODY; BARTELS, 2001).

Neste sentido, Barrody e Bartels (2000) também afirmam que o entendimento dos alunos depende do número, precisão e força das conexões estabelecidas entre os conceitos estudados.

Assim uma forma de avaliar a aprendizagem significativa nas atividades de Modelagem é também identificar, além dos conceitos, o conjunto de relações que ela possibilitou ao aluno construir.

4.4.2 As Relações com Poder de Transferência

Os mapas podem indicar se as relações estabelecidas possuem poder de transferência.

A aprendizagem significativa se caracteriza por possuir alto grau de transferência (COLL, 2002; AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980). Isto é, o que é aprendido dá suporte ao aluno para que construa novos conhecimentos ou para que ele aplique o que foi aprendido na resolução de variados tipos de problemas. No estudo de um problema, nem sempre fazer esta transferência é uma tarefa fácil, as coisas não se justapõem exatamente. É necessário que o aluno abstraia os aspectos essenciais da situação estudada, perceba o que é essencial e o que pode ser deixado em um segundo plano. Segundo Blum (apud BASSANEZI, 2002), as atividades de Modelagem contribuem para o desenvolvimento geral de habilidades relacionadas à resolução de problemas, entre as quais se encontra a capacidade de abstrair e retirar da situação em estudo os aspectos essências. Assim a Modelagem contribui para o desenvolvido de habilidades que favorecem a transferência dos conhecimentos aprendidos para a resolução de problemas.

Para investigar no mapa a funcionalidade das relações construídas é interessante perceber se foram construídas aquelas relações que são as consideradas desejáveis no momento, de forma que possibilitem ao aluno o avanço no processo de construção de outros conhecimentos.

4.4.3 Sinais de Diferenciação Progressiva e de Reconciliação Integrativa

Os mapas podem indicar a ocorrência da reconciliação integrativa e diferenciação progressiva que são processos envolvidos na aprendizagem significativa.

Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), a aprendizagem significativa ocorre através da reconciliação integrativa e da diferenciação progressiva entre os conceitos. Em atividades de Modelagem quando o aluno decide representar um fenômeno por meio de uma função, às vezes ele pode se defrontar com dois ou mais tipos de função que podem ser usados para representá-lo. Assim ele deve estabelecer diferenças e semelhanças entre as funções e entre elas e o fenômeno em estudo, para julgar qual função constitui uma melhor representação. Ou seja, ele deve realizar um processo de reconciliação integrativa entre os conhecimentos sobre as funções que pretende usar como modelo e os conhecimentos que ele teve com relação ao fenômeno.

Conforme afirmam Borba e Bizzeli (1999) a Modelagem permite a espiralização do ensino permitindo que o aluno retome conteúdos já estudados construindo sobre estes novas compreensões. Esta nova compreensão se constitui em um processo de diferenciação da estrutura cognitiva em relação a esse conceito que foi retomado por meio da atividade.

Consideramos também que em nível geral podemos dizer que a Modelagem promove uma reconciliação integrativa entre a Matemática, as outras áreas do saber e a vida dos alunos. A divisão do conhecimento em disciplinas na escola dá ao aluno a visão do conhecimento compartimentalizado, como caixinhas sem relação uma com a outra. O trabalho em sala de aula, privilegiando quase que exclusivamente a resolução de exercícios para treinamento de algoritmos e a apresentação de aplicações artificiais, dão a idéia muitas vezes ao aluno que a Matemática tem pouca relação com sua vida. As atividades de Modelagem contribuem para que o aluno perceba relações entre a Matemática e várias áreas do conhecimento, bem como entre a Matemática e a sua vida cotidiana (BRITO; ALMEIDA, 2005; FERRUZI, 2003; FRANCHI, 1993; MAASS, 2004).

Nos mapas conceituais Novak e Gowin (1999) afirmam que a colocação de hierarquias válidas, significa diferenciação progressiva e reconciliação integrativa. A ligação de conceitos que de outro modo seriam considerados como independentes e ligações transversais entre dois segmentos distintos da hierarquia podem sinalizar a ocorrência da reconciliação integrativa. Estas, segundo os mesmos autores, são consideradas inclusive melhores indicadores da aprendizagem significativa que os níveis hierárquicos. Moreira (1997) afirma que se na explicação do mapa o aluno sobe e desce nas hierarquias conceituais, isto também pode indicar uma reconciliação integrativa.

Assim observar a hierarquia dos conceitos no mapa constitui-se de uma das formas de observação de sinais de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa. Como se trata da Modelagem, na observação da hierarquia dos conceitos também será considerado o contexto do problema em que esses aparecem.

Durante o processo de aprendizagem significativa a estrutura cognitiva sofre incremento de aspectos quantitativos e/ou qualitativos (COLL, 2000). Para Hamish et al (apud BARTELS, 1995) a aprendizagem significativa pode resultar não só na conexão de novos conceitos e a estrutura cognitiva pré-existente, mas também conexões entre conceitos já aprendidos que antes eram vistos como isolados. Isso também se constitui um processo de reconciliação integrativa (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980). Assim ao analisar conceitos que estão presentes em vários mapas, o surgimento de novas relações entre conceitos já conhecidos, pode ser também um indicativo da reconciliação integrativa e, portanto, da aprendizagem significativa. Vale ainda ressaltar que, segundo Ausubel Novak e Hanesian (1980), toda reconciliação integrativa tem como efeito a diferenciação progressiva da estrutura cognitiva pré-existente.

A diferenciação progressiva de um conceito já conhecido ocorre por meio do estabelecimento de relações entre esse conceito e outros conceitos novos ou já conhecidos (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980). Por meio dessas relações vai sendo percebido pelo aluno um conjunto de atributos essenciais que caracterizam esse conceito e os distingue dos demais. Assim nos mapas na observação das relações estabelecidas podem ser percebidos quais os atributos essenciais de um conceito que o aluno já conseguiu identificar.

4.4.4 Aprendizagens Extra-Conteúdo

Buchweitz (2001) e Borssoi (2004) afirmam em suas pesquisas que o fato de uma atividade oportunizar aprendizagens extra-conteúdo pode contribuir para que ocorra a aprendizagem significativa dos conteúdos matemáticos abordados nesta atividade. As atividades de Modelagem, por se referirem ao estudo de problemas da realidade extra-matemática, acabam por envolver informações que pertencem a outras áreas do conhecimento e que até extrapolam os aspectos referentes especificamente aos conteúdos, como vimos elas também colaboram para o desenvolvimento de outras habilidades que não estão relacionadas somente com a dimensão racional do conhecimento, como habilidade de se comunicar de forma oral e escrita, o desenvolvimento do senso crítico etc. Assim consideramos que, quanto a este aspecto de fornecer oportunidades de aprendizagens extra-conteúdo, a Modelagem apresenta várias contribuições.

Quanto à investigação das aprendizagens extra-conteúdo nos mapas consideramos que esta possa ser feita percebendo se houve relações expressas de forma adequada e não literal, entre conceitos extra-matemáticos, ou entre estes e conceitos matemáticos utilizados para o estudo da situação.

4.4.5 Modificação nos Subsunçores

A Modificação nos subsunçores pode ser observada nos mapas conceituais. Segundo Ausubel, Novak e Hanesian, (1980), a aprendizagem significativa implica em um processo de interação entre o novo conhecimento e os subsunçores de forma que ambos se modifiquem. Segundo estes autores, este processo de constitui em uma forma de diferenciação progressiva dos subsunçores. Para Borba e Bizzeli (1999), na M.M. geralmente para resolver os problemas, conceitos já aprendidos são retomados, permitindo que o aluno faça uma recontextualização dos mesmos, fortalecendo-os, bem como os corrigindo. Ou seja, em termos ausubelianos poderíamos colocar que a Modelagem, com sua retomada de conceitos já aprendidos, cria condições que podem favorecer a modificação dos subsunçores.

Quanto à possibilidade de observação de tais mudanças nos mapas queremos salientar o que afirma Wanderse (apud. ELLIS; RUDNITSKY; SILVERSTEIN, 2004). Para o autor os mapas são instrumentos heurísticos e, portanto mudanças nos mapas refletem mudanças no entendimento do aluno. Assim para observar este aspecto ao analisar o conjunto de mapas dos alunos, pode ser observado se existem conceitos que aparecem em mais de um mapa e se nos diferentes mapas foram construídas relações que revelam mudanças na compreensão desses conceitos por parte dos alunos.

4.5 PROCEDIMENTOS DO ESTUDO

Com vistas a investigar os aspectos anteriormente abordados, construímos uma proposta de trabalho com atividades de Modelagem Matemática. Descrevemos nas secções a seguir: a proposta de trabalho desenvolvida, os instrumentos utilizados na coleta de dados, a maneira como organizamos os dados e os procedimentos que adotamos para analisá-los.

4.5.1 O Contexto Investigado e o Planejamento das Atividades

A pesquisa foi realizada com um grupo de quatro alunos selecionados de uma turma do 1º período do curso de Tecnologia em Manutenção Industrial Mecânica em uma Universidade no interior do Paraná durante aulas da disciplina de Fundamentos da Matemática, da disciplina de Cálculo I e de um curso extra-curricular que ministramos na instituição. Estes alunos foram escolhidos por terem disponibilidade para freqüentar o curso extracurricular, bem como por terem entregado todas as atividades que solicitamos no período de familiarização com mapas conceituais, desenvolvidas durante a disciplina de Fundamentos da Matemática e a familiarização com as atividades de Modelagem, que foi realizada no inicio da disciplina de Cálculo I.

Previamente desenvolvemos um planejamento com o professor das disciplinas, para que pudéssemos introduzir os mapas conceituais, e que estes fizessem parte das atividades desenvolvidas no curso. Nosso objetivo era que os alunos já estivessem familiarizados com os mapas conceituais antes de os utilizarmos na coleta de dados, levando em conta Moreira (1997) e Faria (1995), que argumentam que para que os mapas conceituais possam ser usados como recursos de avaliação é preciso que os alunos saibam elaborar mapas. Também foram planejadas atividades para introduzir gradativamente os alunos no processo de Modelagem, seguindo as orientações fornecidas pela literatura exposta na secção 1.3 do capítulo 1. O planejamento feito com o professor consta do anexo1 deste texto.

Fundamentos da Matemática é uma disciplina de 30 horas e sua programação envolve: conjuntos numéricos, intervalos, operações com intervalos, operações com números decimais, notação científica, trigonometria no triângulo retângulo e não retângulo, polinômios, equações polinomiais e noções iniciais de funções. Seu objetivo no curso é relembrar alguns conteúdos de segundo grau que são básicos para a compreensão do Cálculo I, bem como para a disciplina de Física cursada no mesmo semestre. Consideramos que o objetivo da disciplina, utilizando a linguagem da teoria de Ausubel, é tornar disponíveis e claros alguns dos subsunçores, necessários à aprendizagem dos conceitos trabalhados na disciplina de Cálculo I.

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I tem uma carga horária de 90 horas e seu conteúdo programático consiste em: funções de uma variável, funções de primeiro grau, constante, de 2º grau, definida por várias sentenças, modular exponencial e logarítmica, limites laterais, limites de funções reais, limites fundamentais, limites no infinito e infinito, continuidade, e continuidade em funções, significado geométrico da derivada, regras de derivação, regra da derivada primeira e aplicações das derivadas em construções de gráficos, aplicações da derivada na física, integrais indefinidas diretas, integrais por substituição, aplicações de integrais no cálculo de áreas. As duas disciplinas são ministradas pelo mesmo professor, que inicia com Fundamentos e continua com Cálculo no mesmo horário de aula.

O curso extracurricular de introdução à Modelagem Matemática contou com 33 horas, sendo realizados encontros semanais de 3 horas. O curso teve um planejamento inicial, mas este foi sendo também modificado em decorrência dos resultados obtidos em análises prévias dos mapas conceituais, que os alunos foram construindo durante o curso, bem como em decorrência da necessidade de adequação e adaptações que foram se fazendo necessárias no decorrer do processo. O cronograma tal como ele foi realizado se encontra no anexo 2.

Nas atividades que desenvolvemos com o objetivo de introduzir os alunos no processo de Modelagem Matemática, tivemos o cuidado de trabalhar modelos que se referissem às situações ligadas ao curso dos alunos ou vivenciadas por eles em seu dia- a -dia com a finalidade de favorecer condições necessárias à aprendizagem significativa. Na sistematização dos conteúdos trabalhados por meio da Modelagem, procuramos fazer perguntas com o objetivo de contribuir para que os alunos percebessem similaridades e diferenças entre os conceitos vistos e outros anteriores. Pretendíamos com isso favorecer o estabelecimento de relações e contribuir para a diferenciação progressiva e reconciliação integrativa e, consequentemente, para a aprendizagem significativa dos mesmos.

Após cada atividade de Modelagem Matemática desenvolvida, os alunos foram solicitados a elaborarem mapas conceituas sobre os conceitos envolvidos na mesma. Eles também elaboraram um mapa em duplas após a realização da 5ª atividade de Modelagem, este mapa envolvia conceitos matemáticos trabalhados na quarta e quinta atividades de Modelagem que foram fornecidos pela pesquisadora. No final do curso os alunos também elaboram dois mapas um referente ao conceito de função e outro referente ao conceito de função do 1º grau que haviam sido trabalhados em várias atividades, também neste caso fornecemos os conceitos. Solicitamos também aos alunos que anexassem aos mapas uma explicação do mesmo e, em uma das atividades, solicitamos que tal explicação fosse feita de forma oral. Procedemos desta forma levando em conta a argumentação de Moreira (1999), de que os mapas conceituais não são auto-explicativos e por isso requerem explicação por parte de quem os faz.

4.5.2 Algumas Informações sobre os Alunos Investigados

Conforme comentamos anteriormente, participaram de nossa pesquisa quatro alunos. Referir-nos-emos a eles na pesquisa como aluno A1, A2, A3 e A4. Quando foi realizada a pesquisa o aluno A1 tinha 22 anos, havia terminado o ensino médio há seis anos e já trabalhava na área industrial. A aluna A2 tinha 28 anos, terminara o ensino médio há 11 anos e só naquele ano retornava aos estudos. O aluno A3 tinha 21 anos, era técnico em enfermagem e terminara o ensino médio há 4 anos. Todos os três entraram no curso por terem interesse na área de mecânica. O aluno A4 era o mais novo, tinha 19 anos, terminara o ensino médio há dois anos e não sabia ainda muito bem o que queria fazer uma vez que entrou no curso de manutenção por segunda opção, pois sua primeira opção era informática.

4.5.3 Os Instrumentos de Coleta de Dados

Devido aos objetivos da pesquisa, o instrumento principal de coleta foi a análise dos mapas conceituais elaborados pelos alunos. No entanto outras formas de coleta de dados também se fizeram necessárias.

A análise dos mapas foi feita em relação aos elementos sinalizadores definidos na secção 4.4. Os mapas elaborados por cada aluno após as atividades constam do anexo 3 deste texto e suas análises são apresentadas no capítulo 6. Vale destacar que nestas análises não consideramos somente o que o aluno expressou no desenho do mapa em si, mas também o que ele expressou na explicação do mapa, que foi feita em alguns casos de forma oral e em outras de forma escrita.

Outras formas de coletas de dados que usamos são:

a) Entrevistas semi-estruturadas

Estas foram realizadas com a finalidade de esclarecer algumas idéias que não tinham ficado claras nos mapas conceituais, nem em sua explicação oral ou escrita.

b) Observações

Nesta procuramos captar, quer por comportamentos, quer por falas, as percepções dos alunos com relação às atividades desenvolvidas, bem como verificar a ocorrência da condição para a ocorrência da aprendizagem significativa ligada à disposição do aluno para aprender.

c) Provas escritas

No início do curso foi elaborado um pré-teste (anexo 4) que abordava conhecimentos sobre operações com números racionais, potências, equações, sobre o conceito de função e sobre algumas funções que seriam abordadas durante o curso, tais como a função exponencial, função de primeiro grau, função de 2º grau, função constante e função logarítmica. Este pré-teste teve como objetivo avaliar conhecimentos prévios dos alunos com respeito aos conteúdos acima citados, ou seja, identificar a presença dos subsunçores relacionados a alguns dos conceitos que poderiam ser contemplados nas atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas.

d) Questionários

Foram aplicados 2 questionários aos alunos. O primeiro no início do curso de Fundamentos da Matemática, que teve como objetivo conhecer um pouco os alunos, o seu interesse com relação ao curso de Tecnologia em Manutenção Industrial Mecânica, suas percepções com relação à Matemática e ao seu aprendizado e assuntos de interesse, que pudessem ser abordados em problemas de Modelagem. Este questionário se encontra no anexo 5. Um segundo questionário foi aplicado e consta no anexo 6, tendo como objetivo investigar a percepção dos alunos em relação às atividades desenvolvidas.

4.5.4 Os Procedimentos de Análise dos Dados

Como salientamos anteriormente, a pesquisa investiga o uso dos mapas conceituais na busca de indícios de aprendizagem significativa dos conteúdos matemáticos abordados por meio da Modelagem. Para proceder esta investigação, organizamos dois objetivos específicos:

- Identificar nos mapas conceituais elaborados pelos alunos as relações entre os conceitos envolvidos em uma situação problema trabalhada por meio da Modelagem, presentes em sua estrutura cognitiva. Para atingir este objetivo para cada mapa elaborado pelos alunos, identificamos nos mapas os conceitos utilizados e as relações estabelecidas por meio das proposições expressas.
- Identificar nestas relações, bem como na forma como elas se apresentam nos mapas, possíveis indícios de ocorrência da aprendizagem significativa dos conceitos envolvidos na situação problema trabalhada por meio da Modelagem. Estes indícios são investigados usando os elementos sinalizadores da aprendizagem significativa que foram definidos seção 4.4 deste capítulo. A análise de cada mapa é feita em relação a um mapa de referência elaborado pelo pesquisador. Os mapas dos alunos bem como os mapas de referência constam no anexo 3 deste texto. A apresentação detalhada de como eles são utilizados na análise dos elementos sinalizadores, é feita com detalhes, no capítulo 6.

Para obter informações cuja análise é apresentada no capítulo 6 deste texto, selecionamos algumas atividades que foram desenvolvidas com os alunos, com fim de compor um cenário que propiciasse a investigação dos aspectos anteriormente definidos. A descrição dessas atividades se encontra no próximo capítulo.

5 ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Neste capítulo apresentamos as atividades desenvolvidas com os alunos. Inicialmente são apresentadas as atividades que desenvolvemos na disciplina de Fundamentos da Matemática, cujo objetivo era familiarizar os alunos com os mapas conceituais. Várias foram as formas que utilizamos para trabalhar com os alunos os mapas conceituais: solicitamos que construíssem mapas com conceitos dados; pedimos que completassem mapas parcialmente construídos e também utilizamos os mapas como recursos de ensino.

Nas atividades de M.M. nos preocupamos para que a introdução fosse feita de forma gradativa, aumentando-se aos poucos o nível de responsabilidade dos alunos em relação ao desenvolvimento da atividade. Atentamos ainda, para que os problemas fossem relacionados à área industrial, ou que tivessem alguma relação com sua vida cotidiana, de forma que os alunos conseguissem ver alguma relevância em seu estudo, colaborando para o desejo de aprender. Nas três atividades propostas, para iniciar os alunos no processo de Modelagem, procuramos escolher problemas e conduzir o processo de forma que os alunos tivessem uma visão aberta dos problemas de Modelagem e dos processos para obter o modelo. Assim, na primeira atividade partimos de dados em uma tabela, e construímos o modelo, observando a tendência dos dados e deduzindo o modelo, obtendo a expressão algébrica da função, antes de construir seu gráfico. Na segunda atividade optamos por uma situação em que as informações foram variadas e não estavam todas presentes em tabelas, como no primeiro modelo. Na terceira atividade, partimos de uma tabela, só que trabalhando com dados para os quais a simples observação da tabela não permitia a obtenção do modelo de forma simples, como no primeiro problema. Tal fato levou os alunos a buscarem outros caminhos para obtenção do modelo. Procuramos também, na medida do possível, levantar questionamentos sobre os modelos encontrados com o objetivo de levar os alunos a perceberem semelhanças e diferenças entre as funções estudadas por meio dos modelos, procurando assim, favorecer a percepção do significado lógico dos conteúdos, bem como a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa entre os conceitos estudados. Tomamos também o cuidado de escolher para o primeiro contato dos alunos com a Modelagem uma situação relativamente simples, de forma que eles pudessem compreender as várias etapas de construção do modelo e não o encarassem como algo que não seriam capazes de fazer sozinhos.

As atividades de Modelagem Matemática proporcionaram a introdução de novos conceito e a complementação de conteúdos já trabalhados. Após cada atividade de Modelagem foi solicitado aos alunos que construíssem mapas conceituais sobre a atividade desenvolvida.

5.1 Atividades Desenvolvidas na Disciplina de Fundamentos da Matemática

5.1.1 Introdução dos Mapas Conceituais

Para desenvolver a 1ª atividade com vistas a introduzir os mapas conceituais, baseamo-nos nas orientações fornecidas por Novak e Gowin (1999, p.48). Esta primeira atividade teve a duração de 3 aulas de 50 minutos.

Distribuímos aos alunos papéis com as palavras “escola” e “festa”, pedindo que cada um escrevesse no papel, as palavras que representassem as idéias que vinham a sua mente quando ouviam a palavra. Pedimos a algumas pessoas que lessem o que escreveram. Comentamos que o que cada um pensou sobre a palavra recebida constituía o conceito que ele tinha sobre aquele objeto. Explicamos que as palavras eram apenas rótulos e que o significado das palavras era algo pessoal, constituído por todas as idéias que possuíam relacionadas com aquele objeto.

Para introduzir a idéia de hierarquia entre conceitos relacionados, identificando os mais gerais e os mais específicos usamos um conjunto de conceitos de Biologia, escrevendo no quadro as palavras: mamífero, escamas, animais, aves, répteis, vertebrados, invertebrados, pelos, asas, penas , ser vivo, insetos. A disposição das palavras de forma hierárquica foi construída pelos alunos, conforme mostra a figura 5.1.

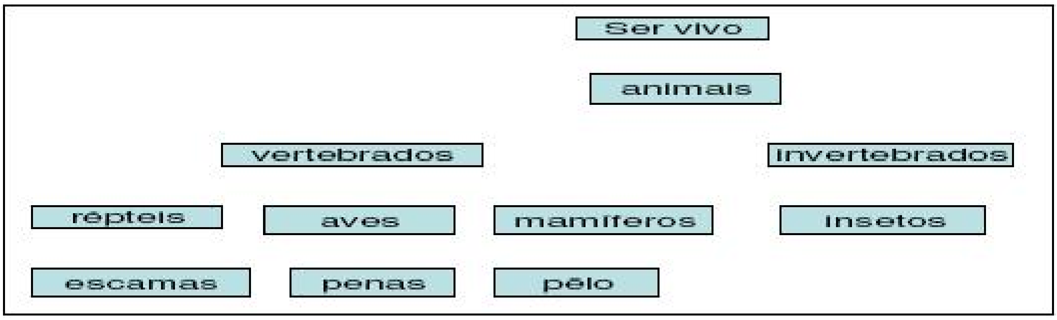


Figura 5.1 – Estrutura do primeiro mapa conceitual construído com os alunos

Tomamos estes conceitos por considerarmos que eles são bem simples e o próprio nome do conceito dá uma idéia do que se trata, ajudando o aluno a recordar-se do seu significado. Estes conceitos também possibilitavam construir um mapa com vários níveis e julgamos que, deixariam clara para o aluno a idéia de ordenação hierárquica, considerando o fato de um conceito estar incluso no outro. Como não conhecíamos a turma tínhamos receio de ao colocar conceitos matemáticos, mesmo aqueles considerados elementares, que os alunos tivessem mais dificuldade de entender a idéia de hierarquização, decorrentes de lacunas na compreensão dos conceitos.

A seguir explicamos o uso das linhas de ligação e das palavras de ligação. Solicitamos a eles quais conceitos que em sua opinião deveriam ser unidos e quais as palavras que eles utilizariam. O mapa com ligações e conectivos sugeridos pelos alunos em sua forma final está apresentado na figura 5.2.

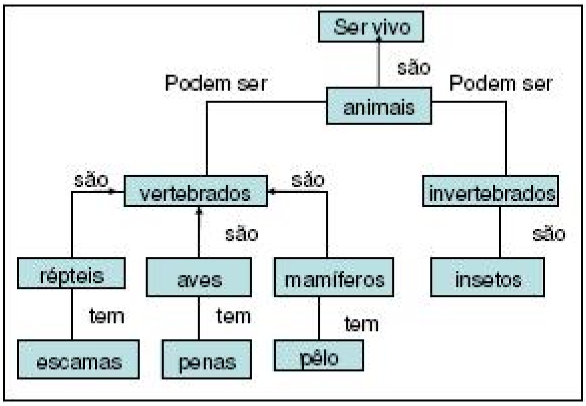


Figura 5.2 – Mapa conceitual 1 final

A próxima atividade consistiu na elaboração de um mapa conceitual pelos alunos a partir dos conceitos sobre conjuntos numéricos apresentados em aula anterior: números inteiros, números naturais, números reais, dízimas periódicas, dízimas não periódicas, raízes não exatas, frações, decimais exatos, raízes exatas, número reais e fornecemos também os seguintes exemplos: , 0.5, 0.33..., -5, ,1.715..., 0, 1, .

Após a elaboração individual dos mapas, os alunos se reuniram em grupos de cinco alunos e discutiram os seus mapas,apresentando e entregando ao final o mapa que eles elaboraram.

Ao corrigirmos os mapas percebemos que havia não só erros referentes à não compreensão dos conceitos envolvidos, mas também erros devido a não compreensão da técnica de mapeamento. Entregamos então para cada aluno, na aula seguinte, o seu mapa acrescido de alguns comentários por escrito. Estes indicavam os erros feitos quanto à execução da técnica e também algumas perguntas para que eles percebessem as incoerências do ponto de vista conceitual. Uma discussão sobre os mapas das equipes a partir de um mapa de referência encerrou esta atividade.

5.1.2 Outras Atividades Utilizadas para Familiarizar os Alunos com os Mapas

Uma outra atividade desenvolvida com a finalidade de familiarizar os alunos com a elaboração dos mapas conceituais, foi realizada a partir de conceitos relativos à função que tinham sido apresentados aos alunos pelo professor da disciplina: função, domínio, imagem, contra domínio, lei de associação, conjuntos. O mapa foi feito em conjunto com toda classe no quadro e é apresentado na figura 5.3.

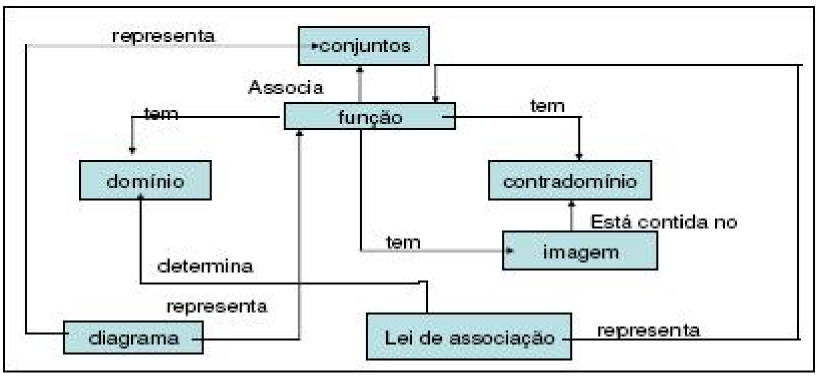


Figura 5.3 – Mapa sobre o conceito de função

Em uma outra atividade, a partir de uma revisão de conceitos de trigonometria, pedimos aos alunos que elaborassem um mapa com os conceitos: ciclo trigonométrico, sentido horário, sentido anti-horário, eixo x, eixo y, quadrantes, 1º quadrante, 2º quadrante, 3º quadrante, e 4º quadrante, arcos, seno e cosseno, positivo, negativo.

Propusemos também aos alunos atividades nas quais eles deveriam completar mapas conceituais já iniciados. Um destes mapas é apresentado na figura 5.4.

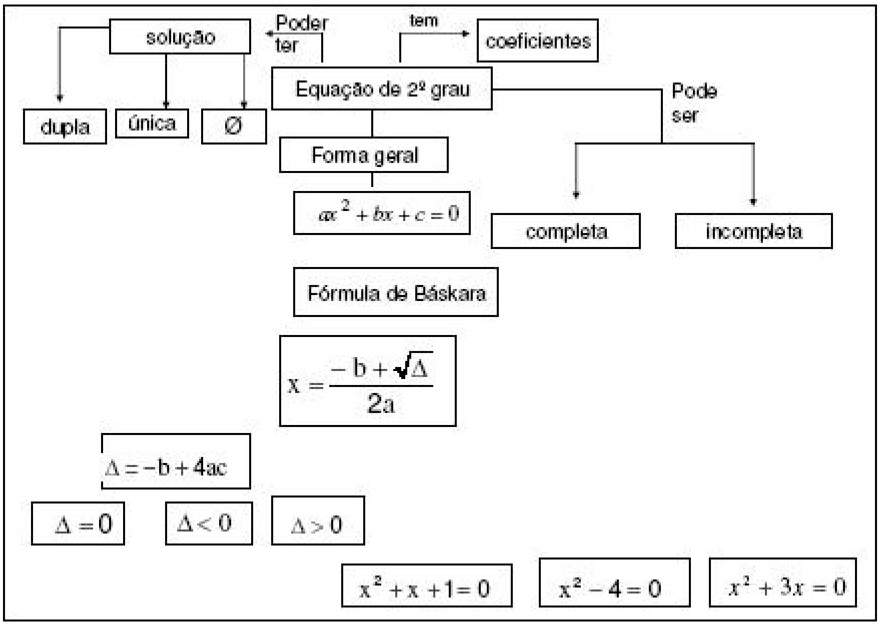


Figura 5.4 – Mapa incompleto sobre função de 2º grau

Na avaliação escrita realizada pelo professor na disciplina de Fundamentos, também acrescentamos uma questão relativa a mapas conceituais que se encontra no anexo 7.

Pela análise geral que fizemos das respostas percebemos que, embora ainda houvesse alguns erros, os alunos demonstravam bom entendimento do processo de elaboração dos mapas conceituais.

5.2 ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DESENVOLVIDAS NA DISCIPLINA DE CÁLCULO I

5.2.1.Determinação da Percentagem de Ocupação de um Tanque Fechado

A primeira atividade de Modelagem Matemática que foi desenvolvida diz respeito a um problema relacionado à indústria de alimentos. Iniciamos explicando que muitas vezes a manufatura de um produto alimentício, como por exemplo, o café solúvel, passa pela produção de subprodutos intermediários. A combinação de subprodutos diferentes e em proporções diferentes dá origem a diferentes produtos. Estes subprodutos ficam armazenados em tanques fechados. O desenho de um destes tanques é apresentado na figura 5.5.

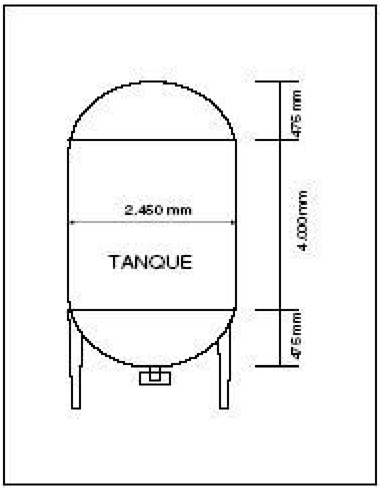


Figura 5.5 – Tanque fechado 8

Figura 5.6 – Pressustato

Fonte: www.colegioimpacto.com

É necessário ter um controle, após cada processo, da quantidade de cada subproduto que ainda está presente em cada um dos tanques. Isto é feito por meio de sensores de pressão presentes em cada tanque (fig.5.6). Estes sensores lêem a pressão exercida pelo líquido no fundo do tanque. Tal valor é então repassado para um computador e este fornece a percentagem de ocupação do tanque.

Por meio destes valores, conhecendo a capacidade total do tanque, é possível estimar quanto de subproduto ele contém. Neste processo não é considerada a pressão que o líquido exerce sobre as paredes laterais do tanque. Os dados da tabela 5.1 foram colhidos em uma empresa que possui este sistema. A pressão é dada em mega bare (Mbar).

Tabela 5.1 – Relação entre a pressão interna e ocupação em um tanque

Pressão (Mbar)	Percentagem de ocupação (%)
5080,32	100
3810,24	75
2540,16	50
1270,08	25

Fonte: Dados coletados junto a uma empresa alimentícia

Baseados nestas informações o problema consiste em estudar: qual a relação entre a pressão exercida pelo líquido sobre o fundo do tanque e a percentagem de ocupação do tanque?

A partir de uma conversação com os alunos foram definidas as variáveis:

p - pressão do líquido

O - percentagem do tanque ocupada pela solução. Desse modo o problema matemático consiste em:

Encontrar uma função que O em função de p **,** isto é, queremos obter

$$y = O(p)$$

Para resolver este problema, iniciamos com os alunos uma discussão sobre os dados da tabela 5.1, com o intuito de que observassem relações entre os mesmos. Uma observação apresentada pelos alunos é que “se um cresce o outro também cresce e se um diminui o outro também diminui”. A partir dessa idéia, foi introduzida a idéia de proporcionalidade. Esclarecendo aos alunos que uma hipótese é um pressuposto assumido como verdadeiro para aquela situação problema, definimos a seguinte hipótese:

"A pressão e a ocupação são proporcionais, ou seja, existe k R tal que p= k O".

A partir da hipótese encontramos que :

$$p = kO$$

De onde advém que

$$k = \frac{O}{p}$$

Os dados da tabela 5.2 apresenta os valores encontrados para K.

Tabela 5.2 – Razão entre a ocupação e a pressão

P *(Mbar)*	*O*	$\frac{O}{p}$
5080,32	100	0,019684
3810,24	75	0,019684
2540,16	50	0,019684
1270,08	25	0,019684

Como todos os valores de *k* ficaram muito próximos de 0,02, foi usada um arredondamento para escrever:

$$O(p) = 0{,}02p$$

que representa o modelo matemático que descreve a situação.

A partir de um esclarecimento aos alunos do que constituiu a validação do modelo, estes compararam os dados observados com aqueles obtidos pelo modelo conforme apresentamos na tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Comparação entre os valores observados e os obtidos pelo modelo

Pressão (Mbar)	Percentagem de ocupação	Percentagem de ocupação fornecida pelo modelo	Erro percentual relativo
5080,32	100	101,60	1,6
3810,24	75	76,20	1,6
2540,16	50	50,80	1,5
1270,08	25	25,40	1,6

Vale esclarecer que houve um entendimento de que os erros percentuais relativos eram aceitáveis, no contexto do fenômeno estudado e que, portanto o modelo era válido.

Pedimos então que os alunos fizessem, em papel milimetrado o gráfico da função. Enfatizamos que o gráfico era uma outra forma de representar essa função, assim como a tabela, contendo os valores da variável dependente e independente. Na construção do gráfico, como as unidades apresentavam muita diferença, foi preciso trabalhar com escalas diferentes. No eixo das abcissas adotamos a escala de 1 para 1000 e no eixo das ordenadas de 1 para 10. A figura 5.7 representa o gráfico.

Figura 5.7 – Gráfico da ocupação em função da pressão

A dúvida de alguns alunos com respeito a que valores deveriam atribuir e se poderiam unir os pontos por uma reta, levou-nos a discutir com os alunos o domínio e a imagem da função, tomando sempre o cuidado de estabelecer relações com todos os conceitos que eles já tinham visto na aula de funções. Apresentamos também os conceitos de coeficiente angular e coeficiente linear e toda teoria referente à função do 1º grau. No final aproveitamos o fato do gráfico ser uma reta para explorar a função constante. Abordamos as diferenças e semelhanças entre a função constante e a função do primeiro grau e trabalhamos ainda, o caso em que o gráfico é uma reta vertical e, portanto não representa uma função. Ao final desta aula os alunos elaboraram um mapa conceitual sobre conceitos usados nesta aula, anexando explicação escrita sobre o mapa.

5.2.2 Determinação do Valor da Ligação Telefônica Interurbana

Quando trabalhamos com os alunos esta atividade eles já conheciam a função definida por várias sentenças. Esta atividade, assim como a anterior, teve como objetivo familiarizar os alunos com as atividades de Modelagem Matemática.

No entanto, nesta aumentamos intencionalmente a participação dos alunos no processo. No contexto da disciplina ela tinha o objetivo de mostrar uma aplicação prática da função definida por várias sentenças, mas devido aos dados obtidos foi necessária também a introdução do conceito de função maior inteiro que os alunos ainda não conheciam. Além de utilizar a função maior inteiro, na construção do modelo, os alunos também utilizaram a função constante e função do primeiro grau que haviam sido trabalhadas na atividade anterior.

Embora não se tratasse de um problema ligado diretamente à futura área de atuação dos alunos, era uma situação que pode ser considerada como sendo do cotidiano dos alunos. Para o desenvolvimento desta atividade solicitamos aos alunos, com duas semanas de antecedência, que escolhessem uma operadora e pesquisassem como era feito o cálculo da ligação interurbana, pelo plano básico oferecido pela mesma operadora. Solicitamos também que eles trouxessem a latitude e a longitude da cidade de Cornélio Procópio e da cidade onde residiam, caso não morassem em Cornélio Procópio.

No dia do desenvolvimento da atividade fizemos uma discussão prévia sobre as informações que os alunos haviam coletado. Como não sabiam do que se tratava a “distância geodésica”, fizemos uma explanação sobre o assunto, apresentando também os procedimentos usados para determiná-la.

Os alunos se dividiram em grupos, sendo que cada grupo incluía um aluno que não residia em Cornélio Procópio. Propusemos que eles escolhessem uma operadora telefônica para determinar como variava o preço da chamada entre Cornélio e a cidade escolhida, de acordo com o tempo de duração, no plano básico. Levando em conta a forma de cobrança de algumas operadoras, precisamos apresentar a alguns grupos a função maior inteiro para expressar a função cobrança.

Descrevemos a seguir a atividade como foi desenvolvida por um dos grupos.

Informações coletadas

Segundo informações encontradas pelos alunos no site da operadora pesquisada, na cobrança de uma ligação interurbana nenhum valor é cobrado se a ligação dura de 0 a 30 segundos. Caso a duração da chamada seja maior do que 30 segundos e menor ou igual há 1 minuto, é cobrado o valor correspondente a um minuto. Para ligações de duração superior a um minuto são computados pulsos a cada seis segundos. O valor cobrado por pulso é 1/10 do valor cobrado por minuto. Para calcular o número de pulsos consumidos, a duração da conversa em segundos é dividida por 6. Se a divisão resulta um número inteiro multiplica-se esse número pelo preço do pulso, obtendo assim o valor a ser pago. Caso o quociente da divisão não seja inteiro, para obter o número de pulsos, arredonda-se o resultado sempre para maior inteiro mais próximo**,** multiplicando-se então este valor pelo preço do pulso, obtendo dessa forma o valor que deve ser pago pela chamada.

O preço por minuto, denominado de tarifa, varia conforme o horário em que é feita a chamada e a distância entre as cidades envolvidas.

De acordo com o horário das chamadas têm-se tarifas variadas. Os horários de chamada são classificados em horário normal; horário reduzido, horário super- reduzido e diferenciado e a variação de preço é apresentada na tabela 5. 4.

Tabela 5.4 – Tipos de tarifa conforme horário da chamada

Freqüência	Horário super reduzido (0,25 HN)	Horário reduzido (0,50 X HN)	Horário normal (1X HN[5])	Horário diferenciado (2X HN)
Segunda-feira a sexta-feira	00h00 às 06h00	06h00 às 07h00 21h00 às24h00	07h00 às 9h00 12h00 às 14h00 18h00 às21h00	09h00 às 12h00 14h00 às 18h00
Sábados	00h00 às 06h00	06h00 às07h00 14h00 às 24h00	07h00 às14h00	
Domingos e feriados	00h00 às 06h00	06h00 às 24h00		

5

Fonte: Telelista 2005/2006

De acordo com a distância entre os centros de tarifação, as ligações

[5] HN é o preço do horário normal.

são classificadas em termos de degraus conforme apresentamos na tabela 5.5. Também têm influência sobre o preço, a operadora escolhida e o plano de telefonia utilizado pelo usuário.

Tabela 5.5 – Degraus tarifários de acordo com a distância geodésica

Distância geodésica	Degrau tarifárico
Até 50 km	Degrau 1
Maior do que 50km até 100 km	Degrau 2
Maior do que 100 km até 300 km	Degrau 3
Acima de 300 km	Degrau 4

Fonte: Telelista 2005/2006

Houve muita discussão nos grupos quando propusemos o problema, pois além do preço e do tempo de chamada, o problema proposto continuava a envolver como variável o horário da chamada. Pedimos então que eles definissem um problema que pudesse ser resolvido com as informações de que dispunham e que envolvesse somente duas variáveis e a seguir o resolvessem conforme as etapas: definição de variáveis, hipóteses, solução, validação.

O grupo dos alunos observado escolheu como problema determinar o preço da ligação telefônica entre as cidades de Cornélio Procópio e Sapopema no horário normal. Segundo o grupo este horário foi escolhido, pois de acordo com a tabela 5.4 é a partir dele que são calculados os preços dos demais horários.

As coordenadas geográficas de Cornélio Procópio e Sapopema são dadas na tabela 5.6.

Tabela 5.6 – Coordenadas geográficas de Cornélio Procópio e Sapopema

Cidade	latitude	Longitude
Cornélio Procópio	-23h:10':52"	-50h:38': 48"
Sapopema	-23h:54': 39"	-50h:34': 49"

Fonte: http://paginas.terrra.com.br/educacao/Astronomia/latPr.html

Como as coordenadas eram apresentadas em graus, minutos e segundos primeiramente efetuou-se a transformação, passando os valores da latitude e longitude para graus e frações de graus.

Efetuando os cálculos eles encontraram:

Latitude de Cornélio Procópio

$$E_c = \frac{-(23.60.60 + 10.60 + 52)}{3600} \cong -23{,}1811 \text{ graus} \qquad (1)$$

Longitude de Cornélio Procópio

$$G_c = \frac{-(50.60.60 + 38.60 + 48)}{3600} \cong -50{,}6467 \text{ graus} \qquad (2)$$

Latitude de Sapopema

$$E_s = \frac{-(23.60.60 + 54.60 + 39)}{3600} \cong -23{,}9108 \text{ graus} \qquad (3)$$

e a Longitude de Sapopema

$$G_c = \frac{-(50.60.60 + 34.60 + 49)}{3600} \cong -50{,}5803 \text{ graus} \qquad (4)$$

Para determinar a distância geodésica entre as duas cidades, foi usada a equação (5), onde a é a medida em graus, do menor arco de circunferência que tem centro, no centro da terra e passa pelas cidades de Cornélio Procópio (PR) e Sapopema (PR).

$$\cos a = \text{sen}(|E_c|).\cos(|E_s|) + \text{sen}(|E_c|).\text{sen}(|E_s|).\cos(G_c - G_b)^6 \qquad (5)$$ [6]

Substituindo os valores obtidos de (1) até (4) na equação (5) obtiveram que:

$$a \cong 0{,}9588\text{graus}$$

---

[6] Como os alunos não tinham condição no momento de deduzir a formula do cosseno esférico, pois essa envolvia conceitos sobre vetores que eles não conheciam, apresentamos a lei dos cossenos esféricos e explicamos o seu significado. A equação 5 foi obtida a partir dessa lei que é dada por Cos a= cos b. cos c+ senb. senc.cosA. Uma explicação mais detalhada da obtenção da equação 5 a partir da lei dos cossenos para triângulos esféricos encontra-se no anexo 8.

Considerando a terra como uma esferacujo círculo máximo mede aproximadamente 40.030km, encontraram por meio de uma regra de três, a medida em km do arco a. Esta medida é distância geodésica entre as cidades de Cornélio Procópio e Sapopema, conforme apresentamos a seguir:

Ângulo	comprimento de Arco
360^0	40.030
0,9588	x

$$x \cong 111{,}17 \text{ km}$$

Como a distância geodésica é encontrada é maior que 100 km e menor 300 km pelas informações fornecidas pela tabela 5.5, os alunos perceberam que se tratava de uma ligação classificada pela companhia telefônica como ligação de degrau tarifárico 3.

A determinação das variáveis: v para o valor pago e t para o tempo de ligação não gerou problemas. No entanto, os alunos tiveram dúvida na definição das hipóteses. Precisamos então, por meio de questionamentos, ajudá-los a defini-las.

As hipóteses definidas pelo grupo foram:

- O plano escolhido é o plano de tarifação básico.
- A ligação será uma chamada no degrau 3, tem início e fim durante um período de tarifação normal.
- O valor do minuto, assumindo as hipóteses acima, na operadora escolhida tem o valor de R$ 0,3359, e o preço do pulso será de R$0,03359.

Ainda iniciantes no processo de Modelagem, os alunos não sabiam muito bem o que deveriam fazer para responder a pergunta do problema. Também foi necessário, que por meio de perguntas, os ajudássemos a perceber como poderiam construir o modelo. Precisamos também apresentar a função "maior inteiro[7]" para que ele pudessem obter o valor da conta telefônica para chamadas

[7] A função maior inteiro associa a cada $x \in \Re$ o maior inteiro menor ou igual a x.

cujo número de pulsos não é inteiro.

Com nossa orientação os alunos continuaram a resolução do problema. A seguir temos a explicação da aluna A 2 sobre o modelo encontrado:

"Para t menor que 30 segundos não vai ser pago nada, assim v(t) = 0 se t<$30''$. Quanto t é maior que 30 até 1 minuto o valor vai ser cobrado como se tivesse ficado falando 1 minuto, então o v(t) =0,3359 para $30'' < t \leq 60''$. Quando o tempo é maior que um minuto tem que calcular os pulsos. Para achar o pulso divide o tempo em segundos por 6. Se o resultado for um número inteiro, a gente pega este número e multiplica pelo valor do pulso que é 0,03359, para encontrar o valor que vai ser pago,por isso a gente escreveu v(t)=0,00359$\frac{t}{6}$ se t é inteiro. Se não der inteiro, a gente tem que fazer o arredondamento, pois é assim que a companhia faz. Arredonda para o próximo inteiro e multiplica o resultado, pelo preço do pulso. Para fazer o arredondamento a como a gente tinha que arredondar para cima tivemos que somar um no resultado do arredondamento antes de multiplicar pelo pulso. Daí então fica v(t)=0,00359($\left\|\frac{t}{6}\right\|+1$) se t não é inteiro. (A_2 , explicando o modelo para a sala)".

A função encontrada pelos alunos pode ser expressa por:

$$v(t) = \begin{cases} 0 \text{ se } t \leq 30 \\ 0{,}3359 \text{ se } 30 < t \leq 60 \\ 0{,}03359\dfrac{t}{6} \quad \text{se } t > 60 \quad \text{e } \dfrac{t}{6} \in z \\ 0{,}03359\left(\left\|\dfrac{t}{6}\right\| + 1\right) \quad \text{se } t > 60 \text{ e } \dfrac{t}{6} \notin z \end{cases}$$

A representação gráfica é apresentada na fig. 5.8, onde v é o valor pago em reais e t o tempo de duração da chamada em segundos.

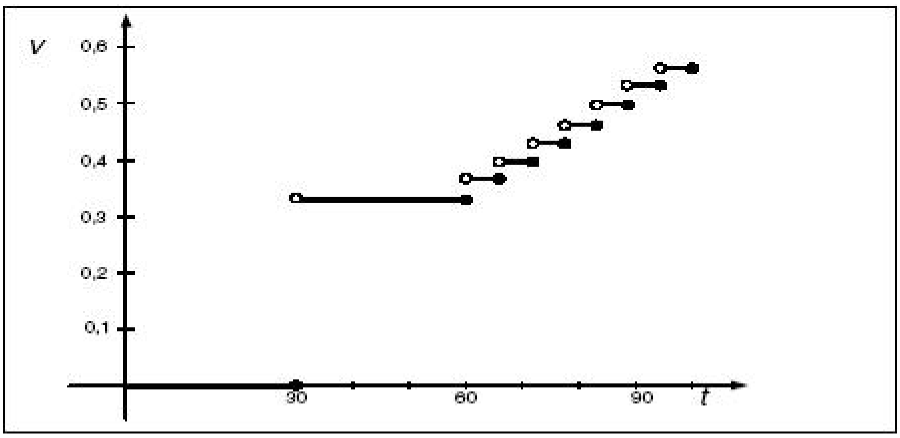


Figura 5.8 – Gráfico do valor pago em função do tempo de duração da ligação

Construído o modelo, a validação foi feita utilizando valores da conta telefônica de um dos alunos da equipe. A validação é apresentada na tabela 5.7.

Tabela 5.7 – Validação do modelo

Duração da chamada (em min. e seg.)	Valor cobrado (conta do aluno) (R$)	Valor estimado pelo modelo (R$)	Erro relativo
10 min. e 5 seg	3,36	3,39	0,89%
12 min. e 30 seg	4,16	4,19	0,89%
15 min.	5,00	5,04	0,79%

Como os valores encontrados pelo modelo estão relativamente próximos dos valores reais, o modelo foi considerado válido pelos alunos.

5.3 ATIVIDADES DE MODELAGEM DESENVOLVIDAS NO CURSO EXTRACURRICULAR

5.3.1 Limite de Tempo de Exposição Segura de Acordo com a Intensidade Sonora

Esta atividade foi desenvolvida em conjunto com os alunos na primeira aula do curso extracurricular de Modelagem. Ela tinha como objetivo que os alunos se familiarizassem com o trabalho de Modelagem e também aprendessem a utilizar o Excel como recurso auxiliar no processo. Dois alunos já conheciam o Excel, mas nenhum deles havia ainda feito uso deste aplicativo para ajustar uma curva a um conjunto de pontos dados, nem para obter a função expressa por esta curva. O problema proposto tinha relação com segurança no trabalho. Inicialmente apresentamos aos alunos a tabela 5.8 (colunas 1 e 2), que fornece alguns valores do tempo máximo de exposição segura, de acordo com valores da intensidade sonora e provocamos algumas discussões sobre o assunto.

Pedimos então aos alunos que determinassem o tempo de exposição segura, sem protetor auricular para a exposição ao barulho de uma furadeira pneumática que produz um som com intensidade de 100 dB (decibéis).

Tabela 5.8 – Tempo máximo de exposição diária sob alguns valores de intensidadade sonora

Nível sonoro (dB)	Tempo máximo de exposição diária	Tempo máximo de exposição diária em horas
92	6 horas	6
95	4 horas	4
97	3 horas	3
102	1h e 30 min	1,5
105	1 hora	1
110	30 min.	0,5
115	15 min	0,25

Fonte: Sociedade Brasileira de Otorrinolaringologia (2005)

O problema gerou bastante interesse, pois este é um tema diretamente ligado à futura atuação dos alunos. Inclusive outras discussões sobre o assunto já haviam sido feitas na disciplina de Segurança do Trabalho. Um aluno que era enfermeiro também enriqueceu a discussão sobre os danos provocados pelo som alto, pois ele já tinha feito um trabalho sobre o assunto, em um curso que tinha realizado de técnico de enfermagem.

No início eles tentaram transformar o tempo em minutos e observar a tendência dos dados pela tabela, como foi feito no problema 1. A mesma tentativa foi feita na seqüência, usando o tempo em horas (terceira coluna da tabela 5.8). Como não conseguiram o grupo estagnou. Sugerimos então que tentassem ver como os dados se comportavam de outra forma e sugerimos que eles representassem os pontos no sistema cartesiano e explicamos com fazê-lo no Excel. A figura obtida pelos alunos é representada na figura 5.9. A partir desta representação concluíram que a função ajustada poderia ser exponencial.

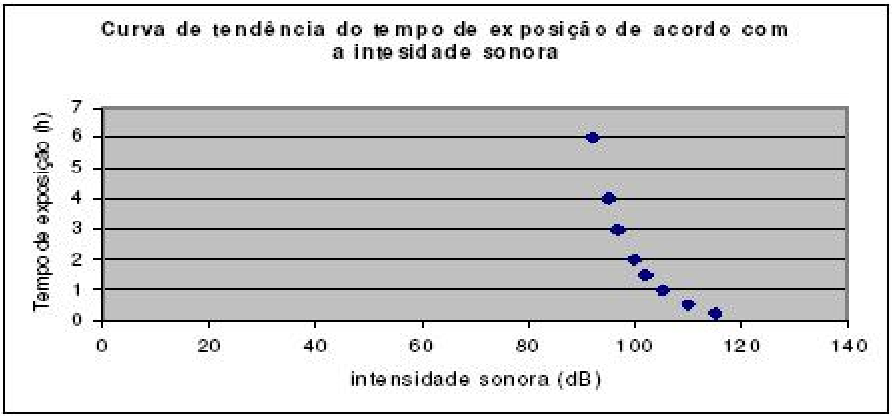


Figura 5.9 – Curva de tendência do tempo X intensidade sonora

Ainda usando o aplicativo Excel os alunos encontraram a função exponencial

$$t(i) = 2.10\ 6.e\ -0,138i$$

Cujo gráfico consta da figura 5.10 em que i é o valor da intensidade sonora em decibéis e t o valor do tempo máximo de exposição segura em horas

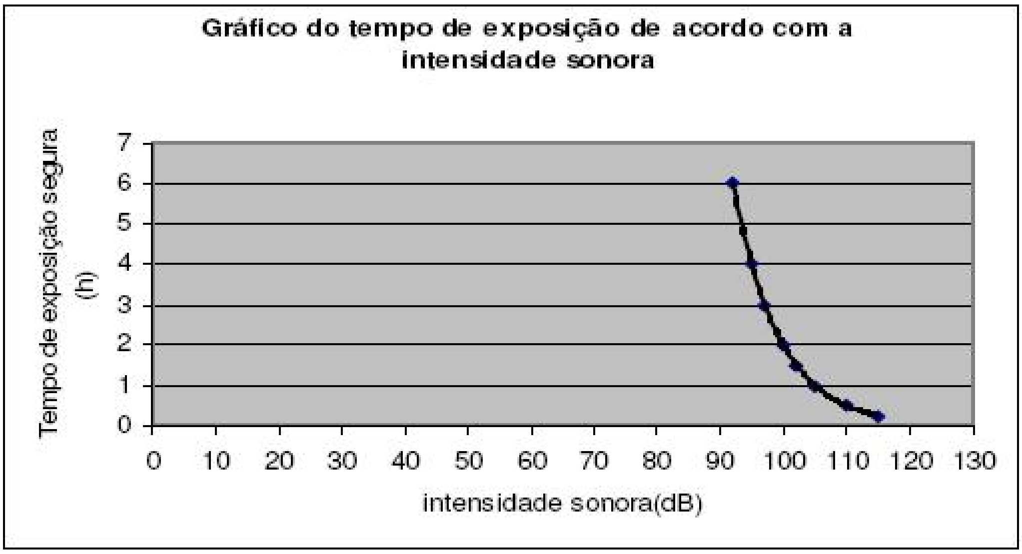


Figura 5.10 – Gráfico do tempo de exposição em função da intensidade sonora

Comparando os valores do tempo de exposição segura informados pela tabela 5.8 e os valores estimados pelo modelo eles fizeram a validação do modelo.

É preciso observar que o modelo encontrado representa a função quando o nível sonoro varia no intervalo (domínio) [92, 115] e o tempo de exposição varia no intervalo (imagem) [0.25, 6]. Isto se fez necessário tendo em vista que a função exponencial é assintótica, o que em termos do fenômeno estudado implica, que não existe um valor de i para qual o tempo de exposição t é nulo, o que não é verdade.

Utilizando o modelo eles encontraram que o tempo de exposição para uma intensidade sonora de 100 dB será de 2,031 horas 2 horas 18 minutos e 36 segundos.

Obs: Após a construção do modelo pedimos aos alunos que calculassem algumas taxas de variação média para alguns valores de i e t, tomando o cuidado de tomar valores inteiros consecutivos para i. Os alunos forneceram os resultados, comentamos então com eles que na função exponencial, para uma mesma variação em i obtínhamos variações diferentes em t, isto significava que a taxa de variação de t com relação a i na função exponencial não era constante, como no caso da função de 1º grau, mas variava de acordo com o valor de i. O objetivo deste trabalho foi favorecer a diferenciação progressiva entre as funções de 1º grau e exponencial, bem como do conceito de taxa de variação.

Ao final desta atividade fizemos ainda outras perguntas aos alunos com a finalidade de que eles observassem as diferenças e semelhanças entre as funções já estudadas, objetivando que efetuassem a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora dos conceitos estudados. Após essa atividade os alunos elaboraram um mapa conceitual sobre o problema estudado.

5.3.2 Determinação do Módulo de Elasticidade de Corpo de Prova de Aço 1020 por Meio do Ensaio de Tração

Esta atividade surgiu a partir de problemas propostos pelos alunos depois de uma visita ao laboratório de ensaio dos materiais Queremos aqui esclarecer que a disciplina de Ensaio dos Materiais pertence à grade do quarto período do Curso de Tecnologia em Manutenção Mecânica Industrial, mas alguns de seus fundamentos teóricos são apresentados em disciplinas em semestres anteriores. No caso, por exemplo, do ensaio de tração, os conhecimentos básicos são de força e tensão, trabalhados na disciplina de Física I, que pertence ao primeiro período.

Informações sobre o ensaio

Na elaboração do projeto de pequenos ou grandes componentes, um dos elementos importantes é a escolha do material de que será feita a peça. Para tal escolha devem ser conhecidas as condições as quais a peça estará sujeita tais como temperaturas, cargas, freqüência de aplicação das mesmas, entre outras.

Conhecidas tais condições é preciso que o profissional conheça também os materiais que tem disponíveis para elaborar a peça, sabendo qual o comportamento com relação às condições de uso acima citadas. O comportamento de um material nas condições de uso é determinado por experimentos chamados ensaios mecânicos. Através destes ensaios são conhecidas várias características do material. Além do uso na elaboração de projetos, os ensaios são realizados, em geral, para conhecer as características de um novo material desenvolvido ou como controle de qualidade de materiais e peças prontas.

Dentre os ensaios mecânicos um dos mais importantes é o ensaio de tração que consiste em colocar um corpo de prova em uma máquina própria para o ensaio. Durante o processo a máquina vai esticando o corpo a uma velocidade, pré- estabelecida pelas regras de ensaios, até que ele se rompa. A máquina de ensaios vai registrando os valores da força e da deformação sofrida pelo corpo durante este processo.

Se chamarmos o comprimento inicial do corpo de L_0 e seu comprimento após ser esticado (pela aplicação de uma força F) de L temos que o alongamento δ sofrido pelo corpo será dado por:

$$\delta = L - L_0$$

Chamamos de deformação a razão entre δ e L_0 ou seja, a deformação representa o percentual relativo de alongamento do corpo com relação ao seu comprimento inicial. A deformação é denotada pela letra grega ε . Assim:

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0}$$

Obs.: Note que ε é adimensional.

Para que o corpo sofra tal deformação é necessário que a máquina aplique uma força esticando o corpo. Ao aplicar esta força a secção transversal do corpo de prova sofre uma tensão que é dada por:

$$T = \frac{F}{A},$$

na qual F é a força aplicada e A é a área da seção transversal.

Com os valores da força é possível, conhecendo a área da seção transversal do corpo, calcular a tensão sofrida por esta região durante o ensaio. Com os dados da deformação e da tensão a própria máquina de ensaio vai traçando um gráfico chamado diagrama tensão X deformação. Por meio deste diagrama são determinadas várias propriedades do material.

Na primeira fase do ensaio a tensão é denominada de fase elástica. Nesta fase, se for suspensa a força que age sobre o corpo ele volta ao seu tamanho normal. Após a fase elástica, temos a fase plástica. Nesta fase, se suspendermos a força que age sobre o corpo, ele não voltará ao seu tamanho normal, temos então uma deformação permanente. A fase plástica se divide em três fases. Primeiro temos a fase do escoamento, no qual o corpo continua se deformando, mas o valor da tensão é praticamente constante. A seguir vem a fase do encruamento, na qual, para que o corpo continue a se deformar é preciso que a força seja aumentada. A força continua a ser aumentada até que se atinja o limite de resistência do corpo. Temos então a fase final do ensaio. Como a área da seção transversal tornou-se menor, é preciso diminuir a força, para que o corpo não rompa imediatamente. Assim diminui-se a força e o corpo continua deformar-se até que se rompe (HIBBELER, 2004; SOUZA, 1992).

Uma das propriedades que pode ser determinada pelo ensaio de tração é o módulo de elasticidade que permite reconhecer se um material metálico está dentro das especificações ou não. O módulo de elasticidade é uma das propriedades que caracteriza um material. Assim, por exemplo, quando um fabricante compra barras de aço 1020 para fabricar algum objeto, ele manda algumas amostras do material para um laboratório que realiza ensaios, para verificar se aquele material que ele comprou, é realmente é aço 1020 ou não. Se pelo ensaio o material apresentar um módulo de elasticidade que difere em mais de 10% do valor tabelado então esse material está fora da especificação.

Durante a maior parte da fase elástica a tensão e a deformação são proporcionais. Assim a relação entre a deformação e a tensão é representada por uma reta que passa pela origem. O módulo de elasticidade simbolizado por E, é dado pela $tg\ \alpha$, sendo α o ângulo que esta reta forma com o eixo das abcissas. Já no final da zona elástica a curva que representa a relação entre a tensão e a deformação já não é uma reta, mas o material ainda possui o comportamento elástico, ou seja, se suspendermos a força ele volta ao seu tamanho normal. O último valor da tensão, no intervalo do diagrama tensão X deformação em que se observa uma relação de proporcionalidade entre a tensão e a deformação, é chamado limite de proporcionalidade. O último valor da tensão para o qual o corpo ainda apresenta deformação elástica é denominado limite de elasticidade.

A determinação do módulo de elasticidade e outras propriedades, a partir do gráfico fornecido pela máquina, são feitas a mão utilizando procedimentos padronizados. No entanto, este processo pode ganhar em precisão se a máquina for acoplada a um computador. Este registra os dados da Força e alongamento e calcula os respectivos valores da tensão e da deformação. Depois trabalha com estes dados para obter os valores referentes às propriedades desejadas.

Baseados nestas informações os alunos propuseram o seguinte problema: de determinar o módulo de elasticidade de um corpo de prova do aço 1020. Os dados se encontram no anexo 9 e foram conseguidos por meio de um professor da Universidade, onde realizamos a pesquisa, junto ao laboratório da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, visto que a Universidade onde foi realizada nossa pesquisa ainda não possuía aparelhagem para realizar o ensaio e coletar os dados via computador, embora estivesse desenvolvendo projetos neste sentido.

O problema inicial foi reformulado pelos alunos em termos matemáticos para: encontrar o coeficiente angular da reta que representa a relação entre a tensão e deformação na fase elástica até o limite de proporcionalidade. A própria transformação do problema em um problema matemático já envolveu subsunçores que foram utilizados na primeira atividade. O aluno A_4 ao ler o texto que explicava como era calculado o módulo de elasticidade, identificou-o com o coeficiente angular da reta que representava a relação entre a tensão e a deformação na fase elástica.

A elaboração das hipóteses foi feita a partir das informações sobre o ensaio e sobre o cálculo do módulo de elasticidade sem o auxílio do computador. Os alunos assumiram como hipóteses iniciais que:

- A temperatura seria de 25º C , pois era esse o valor da temperatura fornecido pelo laboratório que realizou o ensaio. Tal consideração era relevante tendo em vista que a temperatura tem influência sobre os resultados do ensaio.

- As alterações na área da secção durante o ensaio foram consideradas desprezíveis.

- Durante a primeira parte da fase elástica a tensão e a deformação são proporcionais, ou seja, a relação entre elas pode ser representada por uma reta que passa pela origem. Esta também era uma hipótese assumida de acordo as informações sobre o ensaio pesquisadas.

Com o auxílio do Excel os alunos obtiveram a partir dos dados do anexo 9 a curva de tendência do diagrama tensão X deformação representada na figura 5.11.

Foi necessário que se assumissem escalas diferentes, para os dois eixos o que foi feito automaticamente pelo computador, devido a diferença entre os números que representavam a tensão e a deformação.

Observando a figura 5.11 os alunos tiveram a impressão que ela sugeria que a função se comportava segundo uma linha reta até que a tensão chegasse próxima de 35 kgf/mm^2 e que a partir daí começava a fase de escoamento.

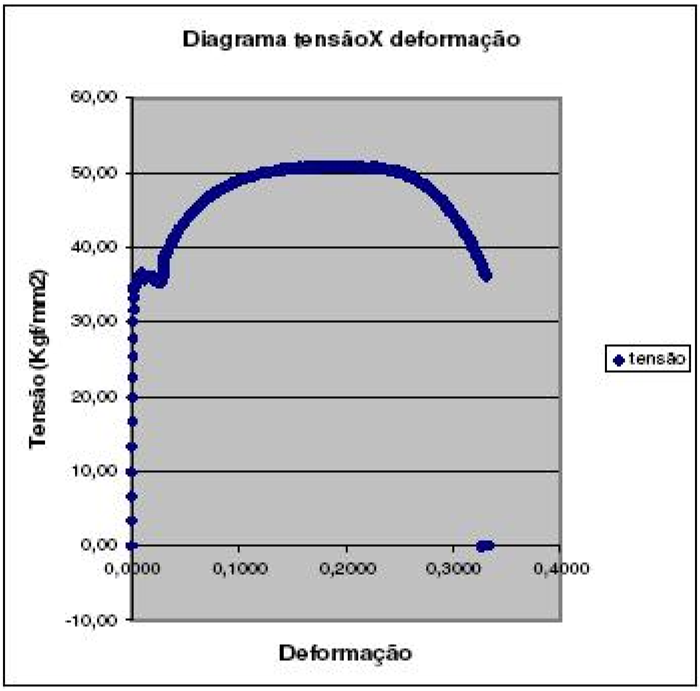


Figura 5.11 – Curva de tendência do diagrama tensão X deformação traçado com os valores da tabela do anexo 9

Baseados nesta observação, eles tomaram no conjunto de pontos apresentados no anexo 9, um conjunto menor, com valores da tensão variando de 0 até próximo de 35 kgf/mm^2, para confirmar se realmente naquele intervalo a curva de tendência sugeria que o gráfico era uma reta. Estes pontos são apresentados tabela 5.9.

Tabela 5 9 – Dados da tensão e deformação, com valores da deformação próximos de 35kgf/*mm*^{2}

Deformação	Tensão (kgf/mm^2)	Deformação	Tensão (kgf/mm^2)
0	0	0,1371 x 10^{-2}	25,3298
0,0183 x 10^{-2}	3,2848	0,1527 x 10^{-2}	27,7959
0,0286 x 10^{-2}	6,6284	0,1751 x 10^{-2}	29,9547
0,0510 x 10^{-2}	9,9808	0,2009 x 10^{-2}	31,6660
0,0631 x 10^{-2}	13,2805	0,2302 x 10^{-2}	33,0965
0,0803 x 10^{-2}	16,6593	0,2647 x 10^{-2}	34,1496
0,0975 x 10^{-2}	19,7220	0,2957 x 10^{-2}	34,7815
0,1165 x 10^{-2}	22,6181	0,3405 x 10^{-2}	34,8341

Fonte: Laboratório de ensaios da UNICAMP

Plotando os pontos da tabela 5.9 no Excel foi obtida a curva de tendência dada pela figura 5.12. Com essa curva os alunos perceberam que o intervalo no qual a tensão e deformação são proporcionais era menor que o suposto. Eles tomaram então, do conjunto de pontos apresentados na tabela 5.9, um subconjunto, com a deformação variando entre 0% e 0,1371%. Estes pontos estão representados na tabela 5.10.

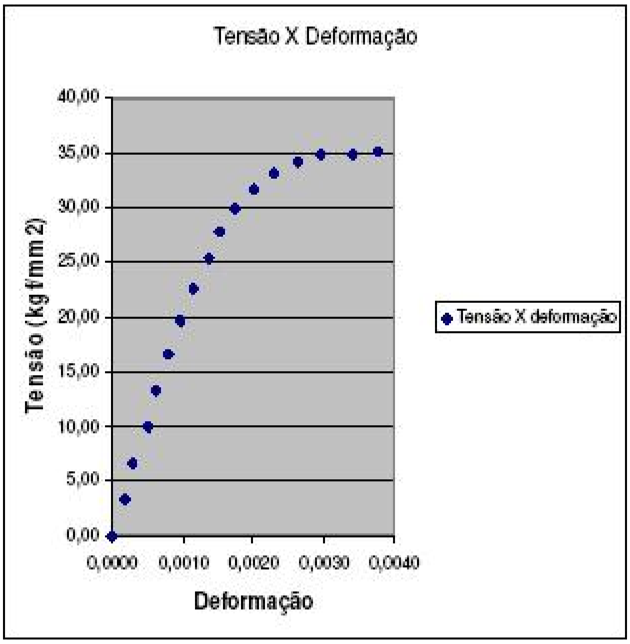


Figura 5.12 – Curva de tendência do diagrama Tensão X deformação com ε variando no intervalo [0, 0.003784]

Tabela 5.10 – Valores da deformação X tensão com deformação variando de 0% a 0,1371 %

Deformação	Tensão Kgf/mm^2
0	0
$0{,}0183 \times 10^{-2}$	3,2848
$0{,}0286 \times 10^{-2}$	6,6284
$0{,}0510 \times 10^{-2}$	9,9808
$0{,}0631 \times 10^{-2}$	13,2805
$0{,}0803 \times 10^{-2}$	16,6593
$0{,}0975 \times 10^{-2}$	19,7220
$0{,}1165 \times 10^{-2}$	22,6181
$0{,}1371 \times 10^{-2}$	25,3298

Plotando estes pontos utilizando o aplicativo Excel foi obtida a curva de tendência apresentada na figura 5.13.

Observando a figura 5.13 os alunos consideraram que para o conjunto de valores tomados na tabela 5.10 a relação entre a tensão e a deformação parecia se comportar como uma reta. Assim considerando as figuras 5.12 e 5.13 eles formularam como hipótese adicional que o limite de proporcionalidade seria 25,3298kgf/mm^2, pois este valor parecia ser, pelas curvas de tendência traçadas, o último valor da tensão, fornecido pelos dados coletados, para o qual a relação entre a tensão e a deformação poderia ser escrita por T=a ε , onde T é a tensão e ε é a deformação.

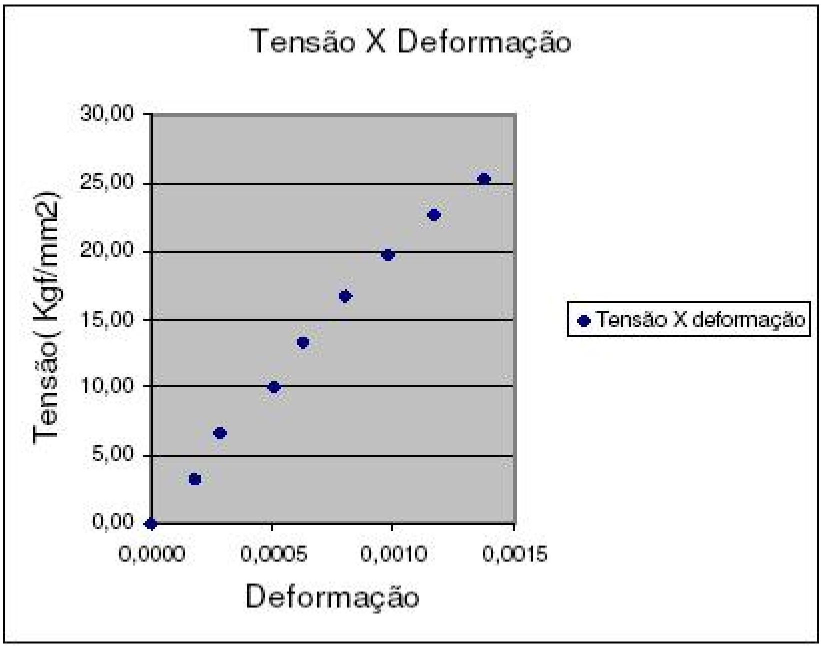


Figura 5.13 – Curva de tendência do diagrama tensão x deformação com ε variando de [0, 0.001371]

Numa primeira tentativa de obter o modelo que representava a relação entre a tensão e a deformação na primeira parte da fase elástica, os alunos linearizaram a curva, utilizando o Excel, e acharam o módulo de elasticidade identificando o "a" da equação obtida pelo aplicativo, obtendo que o módulo de elasticidade era igual a 18924 kgf/ *mm*^{2}. O aluno A_4 deu a explicação do processo**:** *"Olha professora a tg α é o coeficiente angular, então nós encontramos a reta no Excel, pedimos a equação da reta e pegamos o a que é o coeficiente angular".* Percebemos que nesse processo eles utilizaram a aprendizagem feita na aula anterior sobre o Excel e a relação entre o coeficiente angular e a inclinação da reta, que tinha sido expressa pelo aluno A_4 no mapa referente à primeira atividade, como podemos notar observando a explicação do primeiro mapa do aluno A_4: " *O* *coeficiente angular fornece a tg α, onde α é o ângulo que a reta forma com o eixo x*".

Como tínhamos percebido no primeiro mapa conceitual elaborado pelos alunos que não tinham compreendido bem o conceito de coeficiente angular, pedimos que explicassem o significado do coeficiente angular no problema. Revendo suas anotações, os alunos perceberam que poderiam escrever:

$$a=\frac{T_2-T_1}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$$

Demonstrando dúvidas no entanto na escolha de (ε_1,T_1) e (ε_2,T_2). A partir daí começamos a discussão sobre significados do coeficiente angular. Pedimos em seguida a eles que calculassem os valores da taxa de variação da tensão com relação a deformação tomando $(\varepsilon_1,T_1)=(0,0)$ e (ε_2,T_2) variando entre os pontos cujas coordenadas estão na tabela 5.10. Para estes pontos como já foi colocado nas hipóteses, tensão e deformação eram proporcionais e por isso a relação entre elas se comportava como uma reta.

Os alunos obtiveram então vários valores para a taxa de variação. Continuando a discussão sobre qual seria o melhor valor a tomar, os alunos optaram por fazer uma média dos valores da tg α encontrados, obtendo tg α =20303,67. Assim eles concluíram que o módulo de elasticidade valia no caso deste corpo de prova 20303,67 kgf/ mm^2. O valor encontrado apresentou apenas 3,3% de diferença do valor esperado, que era de 21000kgf/ mm^2.

Não foi possível, neste momento, ensinar-lhe o método dos mínimos quadrados, pois este envolveria o conceito de derivada que eles ainda não conheciam.

Sugerimos aos alunos que continuassem o problema e encontrassem uma função que expressasse a relação entre a tensão e a deformação na parte da fase elástica .Considerando o valor para tg α = 20303,67 e admitindo a hipótese de que a relação entre a tensão e a deformação é representada por uma reta que passa pela origem os alunos obtiveram o seguinte modelo:

$$T = 20303{,}67\ \varepsilon$$

Após a obtenção do modelo foi discutido com a turma qual seria o domínio e a imagem desta função. Os alunos concluíram que o Dom T: [0, 0.001371] e a Im T:[0, 25.3298].

A validação do modelo obtido foi feito, comparando-se os valores da tensão coletados com os valores fornecidos pelo modelo. Como os erros foram quase todos inferiores a 10% os alunos consideraram o modelo válido. O valor de 10% no erro é considerado o limite aceitável de erro nos ensaios, segundo nos informou o professor que trabalha com a disciplina de Ensaio dos Materiais.

Solicitamos que os alunos interpretassem a solução encontrada e então eles concluíram que a taxa de variação de T com relação à ε é dada por 20303,67, o que significa um aumento ou diminuição de uma unidade de deformação corresponde um aumento ou diminuição de 20303,67 unidades na tensão.

Em termos do ensaio, o material do qual é feito o corpo de prova, atende as especificações, pois o valor de seu módulo de elasticidade apresenta diferença menor que 10% com o valor padrão.

5.3.3 Cálculo do Limite de Elasticidade do Aço 1020

Com este problema os alunos pretenderam encontrar o limite de elasticidade do corpo de prova. Para isso eles utilizaram os dados do mesmo ensaio anterior e buscaram informações sobre o que era esse limite e também sobre como ele poderia ser calculado por meio do ensaio de tração. Como já foi comentado anteriormente a relação entre a tensão e a deformação pode ser representada por uma reta até um ponto cuja abcissa fornece o limite de proporcionalidade. Logo após este limite em um pequeno intervalo do diagrama tensão X deformação a tendência dos dados não descreve mais uma reta,mas o corpo, continua a apresentar o comportamento elástico (ou seja, se for suspensa a força que age sobre ele, ele retornará ao seu tamanho original). Após este pequeno intervalo já começa a primeira parte da fase plástica que é a fase de escoamento. O último valor da tensão para o qual o corpo ainda se comporta de forma elástica, como já comentamos, é chamado limite de elasticidade.

Isto significa que se submetermos o corpo a uma tensão maior que este valor ele se deformará permanentemente.

A deformação permanente, dependendo do uso da peça, pode representar um risco. Por exemplo, se o que estamos projetando é o cabo de um elevador ou guindaste, e se ultrapassarmos sistematicamente este valor, o corpo irá se esticando até que se romperá. Para obter o limite de elasticidade de um corpo de prova no ensaio de tração um dos métodos utilizados é o método de Johnson. Este método é descrito nos livros de ensaios dos materiais e consiste em uma seqüência de procedimentos geométricos, feitos com régua e esquadro, que determinam a partir do diagrama tensão deformação traçado pela máquina, o limite de elasticidade. A seguir apresentaremos a descrição do método, retirada de um livro de ensaios (TELECURSO 2000,1996):

1. Traça-se uma paralela ao eixo das abcissas em um ponto F qualquer acima do eixo conforme figura 5.14.
2. A seguir prolonga-se a parte reta do gráfico conforme figura abaixo sendo que está corta a paralela no ponto E conforme mostra a figura 5.15.

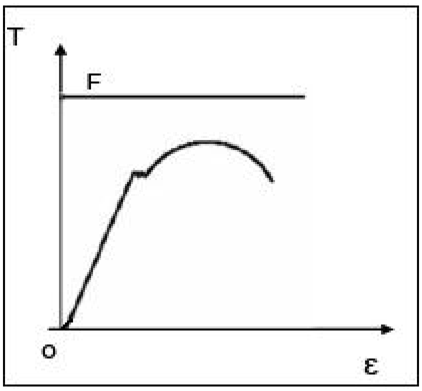


Figura 5.14 – Método de Johnson A

Fonte: Adaptado de telecurso 2000. Ensaio de materiais p.39.

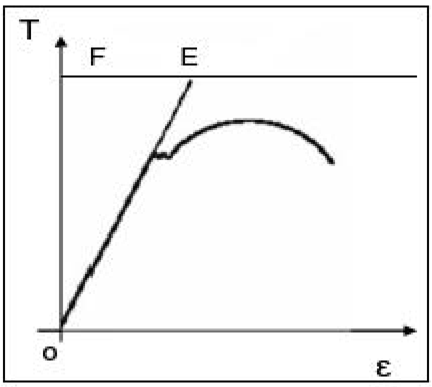


Figura 5.15 – Método de Johnson B

Fonte: Adaptado de telecurso 2000. Ensaio de materiais p.39

3. Marca-se sobre a reta FE um ponto D tal que a distancia de F a D seja uma vez e meio a distância de E a D conforme figura 5.16.
4. Traça-se com o auxilio de um esquadro uma paralela a OD que

seja tangente a curva. O ponto A de tangencia terá como ordenada o limite de elasticidade do corpo. Conforme mostra a figura 5.17.

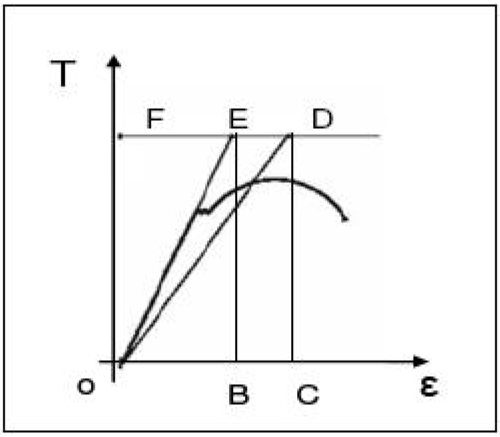


Figura 5.16 – Método de Johnson C

Fonte: Adaptado de telecurso 2000
Ensaio de Materiais p.39

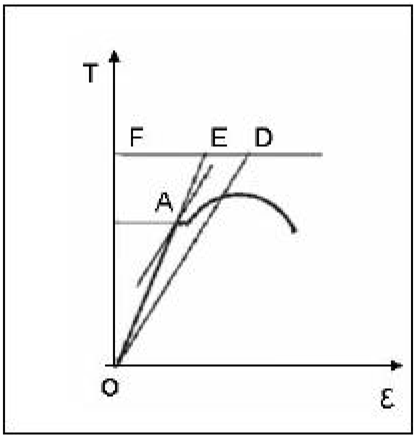


Figura 5.17 – Método de Johnson D

Fonte: Adaptado de telecurso 2000
Ensaio de Materiais p.39

Para os alunos entenderem a seqüência de passos descrita pelo método foi preciso que trabalhássemos com eles os conceitos de reta secante e reta tangente, pois eles não sabiam o seu significado. Após alguma discussão sobre quem seria o ponto A, da figura 5.17, os alunos chegaram a uma primeira definição do problema. Este consistia em determinar a coordenada y do ponto A do diagrama tensão deformação, em que a reta tangente ao gráfico fosse paralela à reta secante a curva que passava por OD.

Os alunos tiveram dificuldade para começar a resolver o problema, pois este implicava logo de início na transformação de informações dadas em termos geométricos para a linguagem algébrica. Precisamos então intervir, sugerindo que eles verificassem a relação entre os valores da inclinação da reta OE e da reta OD.

Chamando de θ o ângulo formado pelo segmento de reta OD e pelo eixo da deformação e de α o ângulo formado pela parte proporcional do diagrama tensão deformação (segmento de reta AO) e o eixo da deformação, eles encontraram a relação entre tg α e tgθ , conforme mostram as equações de (6) até (9).

$$tg\alpha = \frac{EB}{OB} = \frac{FO}{FE} \qquad (6)$$

$$tg\theta = \frac{DC}{OC} = \frac{F0}{FD} \qquad (7)$$

Como FD=*1,5* FE = $\frac{3}{2}FE$, então

$$tg\theta = \frac{FO}{\frac{3}{2}FE} = \frac{2}{3}\frac{FO}{FE} \qquad (8)$$

Comparando (1) com (3) foi encontrado que:

$$tg\theta = \frac{2}{3}tg\alpha \qquad (9)$$

No problema anterior eles já haviam encontrado que $tg\ \alpha$ =20303,67. Assim a questão passou a ser como expressar genericamente a inclinação da reta tangente que passava por A e que era paralela a reta secante OD. Tal necessidade serviu-nos de pretexto para apresentar o conceito de derivada.

O problema inicial foi então reformulado da seguinte forma:

Problema matemático

Determinar uma função que expresse a relação entre a tensão e a deformação, na parte não linear do gráfico que representa a relação entre a tensão e deformação na fase elástica. E determinar o ponto dessa função cuja derivada é igual a $\frac{2}{3}(20303{,}67)$.

Definição de variáveis:

T-tensão

ε - deformação

Formulação das hipóteses:

Para resolver o problema anterior, baseados na observação da curva de tendência apresentada na fig.5.11 e com o auxílio do Excel os alunos admitiram que a fase elástica terminaria em algum ponto em que a tensão estivesse próxima de 35*Kgf/mm*^{2}. Uma outra hipótese admitida foi que o limite de proporcionalidade era 25,3298. Como o valor tomado para o módulo de elasticidade foi o encontrado no problema anterior, assumindo estas hipóteses, os alunos viram por bem, assumir as hipóteses formuladas no problema anterior também para a resolução deste problema. Pelas informações pesquisadas o limite de elasticidade se situa depois do limite de proporcionalidade e antes de começar a fase plástica. Assim foi admitido como hipótese que o limite de elasticidade seria algum valor da tensão variando entre 25,3298 kgf/mm^2 e 35kgf/mm^2.

Considerando esta hipótese os valores do anexo 9 que satisfazem esta condição são apresentados na tabela 5.11.

Tabela 5.11 – Valores da T e da ε , na fase elástica após o limite de proporcionalidade

Deformação	Tensão (kgf/mm^2)
$0,1371 \times 10^{-2}$	25,3298
$0,1527 \times 10^{-2}$	27,7959
$0,1751 \times 10^{-2}$	29,9547
$0,2009 \times 10^{-2}$	31,6660
$0,23021 \times 10^{-2}$	33,0965
$0,2647 \times 10^{-2}$	34,1496
$0,2957 \times 10^{-2}$	34,7815
$0,3405 \times 10^{-2}$	34,8341
$0,3784 \times 10^{-2}$	35,0798

Levando em consideração as características dos dados, orientamos os alunos para o uso de um software para ajustar uma curva aos pontos dados. O software escolhido foi o Curve 1.3, por se tratar de ser um software livre e mais indicado que o Excel para o ajuste de curvas. Neste software o programa quando solicitado a ajustar uma curva aos pontos oferece várias opções de funções. Como os alunos estavam somente iniciando o conceito de derivada e haviam apenas visto a definição, achamos conveniente que ele usassem uma funções polinomial, cujo cálculo da derivada é mais simples que o cálculo da derivada das outras funções apresentadas como opção pelo programa. Também utilizando o Curve eles obtiveram o gráfico e a expressão algébrica da função T(ε), que fornece a relação entre deformação e a tensão, na parte não linear do diagrama tensão deformação que ainda pertence à fase elástica. Esta função é representada pela fig.5.18.

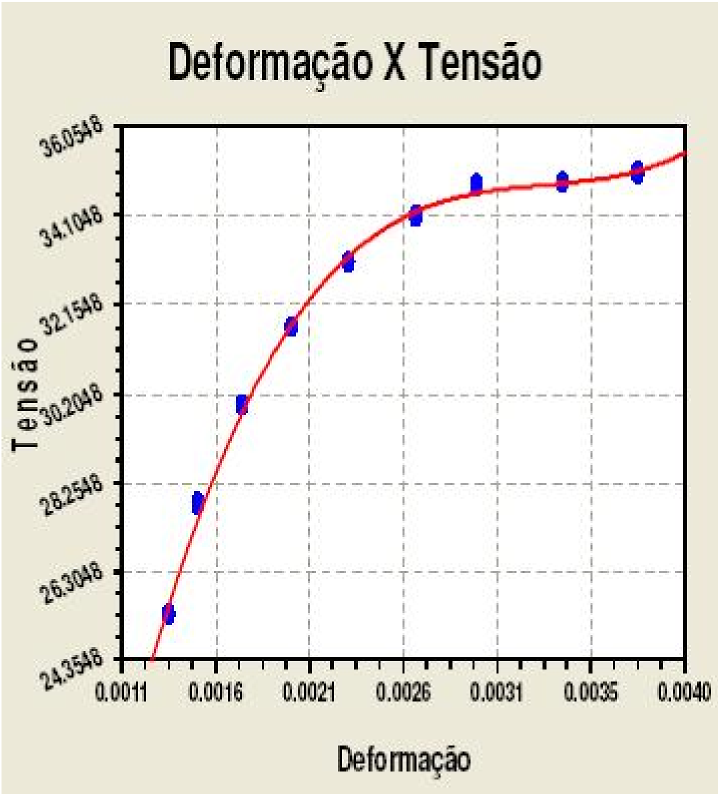


Figura 5.18 – Gráfico da função que expressa a tensão em função da deformação no final da fase elástica

E algebricamente pode ser expressa pela equação (10):

$$T(\varepsilon) = 1,1852092 \times 10^{9} \varepsilon^{3} - 11736984 \varepsilon^{2} + 39111,375 \varepsilon - 9,050779 \qquad (10)$$

Com o auxílio do programa Maple os alunos obtiveram a derivada da função, para determinar o valor da inclinação da reta tangente em um ponto qualquer da curva :

$$T'(\varepsilon) = 0,3555627600 \times 10^{10} \varepsilon^{2} - 23473968 \varepsilon + 39111,375 \qquad (11)$$

Como para o ponto cuja ordenada é o limite de elasticidade o valor da inclinação da reta tangente é igual a 2/3 do módulo de elasticidade, eles igualaram (11) a $\frac{2}{3}.(20303{,}67)$, obtendo uma equação cujas raízes são:

$$\varepsilon_1 = 0{,}005225367742 \quad \text{e} \quad \varepsilon_2 = 0{,}001376551987,$$

Como em decorrência das hipóteses consideradas para resolver o problema a abcissa do ponto cuja ordenada é o limite de elasticidade estaria no intervalo [0,001371; 0,003784]. Levando tal fato em consideração, das raízes encontradas a que satisfaz a condição anterior é $\varepsilon_2 = 0{,}001376551987$.

$$T(0{,}001376551987) = 25{,}6392$$

Que fornece o limite de elasticidade procurado 25,6392 Kgf/mm^2.

Para finalizar os alunos procederam a validação do modelo obtido para representar a relação entre a tensão e a deformação na parte não linear da fase elástica. A validação foi feita, substituindo-se os valores da deformação presentes na primeira coluna da tabela 5.11 na expressão (10), obtendo assim os respectivos valores da deformação, que foram por sua vez comparados com os valores da tensão coletados, presentes na 2º coluna da tabela 5.11. Como os erros percentuais foram inferiores a 10% alunos consideraram o modelo válido.

Após esta atividade os alunos elaboraram um mapa conceitual no programa Power Point sobre as atividades desenvolvidas e fizeram apresentação dos mesmos na aula seguinte.

Os mapas envolviam vários conceitos extra-matemáticos e por isso ficaram bastante complexos. Decidimos então, na aula seguinte, para podermos observar melhor a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos, bem como para proporcionar um momento de troca de idéias entre os alunos, selecionar apenas alguns conceitos matemáticos abordados nos dois problemas e reunir os alunos em dupla a fim de que elaborassem um mapa sobre estes conceitos. Este foi confeccionado em papel tipo Kraft e os alunos fizeram uma explicação escrita sobre o seu mapa. Posteriormente cada dupla fez a apresentação do seu mapa.

Analisando os mapas trabalhados até aqui percebemos que alguns alunos ainda não tinham reconhecido a tabela como uma das formas de representação estática de uma função. As atividades também não tinham oportunizado que eles reconhecessem a derivada como sendo uma função. Como não havia tempo para desenvolver mais uma atividade de Modelagem, resolvemos trabalhar com os alunos alguns exercícios que abordassem esses aspectos. A lista elaborada se encontra no anexo 10. Desta lista foram resolvidos em sala os exercícios do 1 ao 5 e depois discutimos os exercícios com os alunos. A discussão envolveu não só a resolução dos exercícios em si, mas também as funções encontradas, procurando esclarecer conceitos que, percebemos pelos mapas, não haviam ainda sido compreendidos.

Aplicamos também um questionário sobre as atividades desenvolvidas, anexo 6. Neste dia também solicitamos aos alunos que entregassem na aula seguinte dois mapas conceituais sobre funções e sobre função do primeiro grau. Estes conceitos haviam sido trabalhados em várias atividades e queríamos verificar qual a compreensão alcançada e se havia ocorrido uma evolução na compreensão dos mesmos durante o curso. Os alunos entregaram esses mapas na semana seguinte.

Após a realização destas atividades, reunimos os dados coletados, por meio dos mapas, entrevistas, anotações, questionários e pré-teste para podermos proceder a análise. Apresentamos no capítulo 6 as análises desenvolvidas a partir de todo material que foi coletando, envolvendo os mapas e os outros instrumentos de coleta de dados utilizados. Os mapas elaborados pelos alunos se encontram no anexo 3.

6 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DAS INFORMAÇÕES OBTIDAS

Neste capítulo apresentamos as informações que coletamos no decorrer do desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática e fazemos a análise das mesmas em relação ao quadro teórico. Realizamos dois tipos de análise: na primeira parte investigamos se as condições para a ocorrência da aprendizagem significativa estão satisfeitas e na segunda investigamos o uso dos mapas conceituais, buscando indícios de aprendizagem significativa.

Para buscar indícios da aprendizagem significativa dos alunos nos mapas, fazemos:

- Uma análise de cada mapa dos alunos em particular investigando os aspectos apontados nos itens 4.4.1 até 4.4.5 do capítulo 4 quais sejam: o conjunto de conceitos utilizados e as relações estabelecidas pelo aluno, a presença de relações com poder de transferência, sinais de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa, aprendizagem extra-conteúdo e modificação nos subsunçores.
- Uma análise global dos mapas de cada aluno buscando perceber se houve uma evolução na construção dos conceitos durante o processo de elaboração dos mapas. Com tal análise pretendemos investigar elementos que permitam perceber se houve construção de novas relações entre conceitos que antes eram considerados isolados, bem como identificar mudanças nos subsunçores (elemento sinalizador definido na seção 4.4.6). Utilizamos o teste não paramétrico de Friedman buscando detectar diferenças significativas nos elementos sinalizadores da aprendizagem significativa entre os grupos de mapas que se referem à função do 1º grau, conceito abordado em três dos mapas elaborados pelos alunos.
- Uma análise global dos mapas dos 4 alunos, buscando elementos que possam sugerir possíveis influências das atividades de Modelagem e/ou da elaboração dos mapas conceituais sobre os

resultados encontrados em termos dos elementos sinalizadores da aprendizagem significativa que definimos.

- Finalmente, considerando a opinião dos alunos expressa no questionário 2 (anexo 6) e nossas observações, descrevemos possíveis contribuições dos mapas conceituais e da Modelagem Matemática para a ocorrência da aprendizagem significativa, bem como apontamos dificuldades e potencialidades encontradas pelos alunos no decorrer do desenvolvimento das atividades de Modelagem e na elaboração dos mapas.

6.1 Investigando as Condições para a Ocorrência da Aprendizagem Significativa

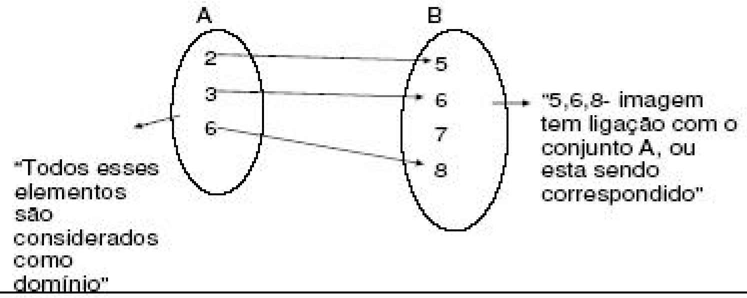
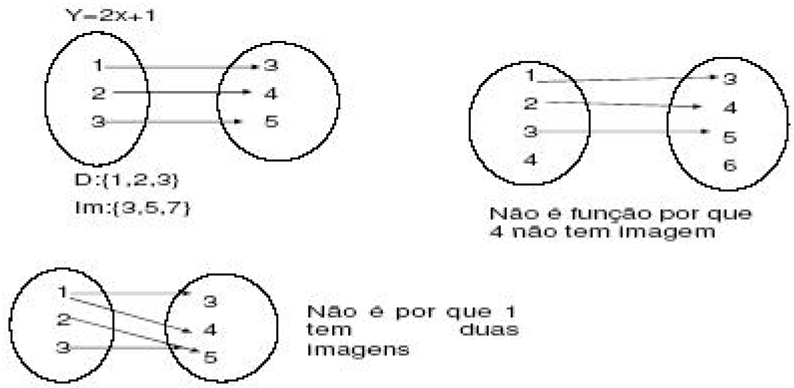
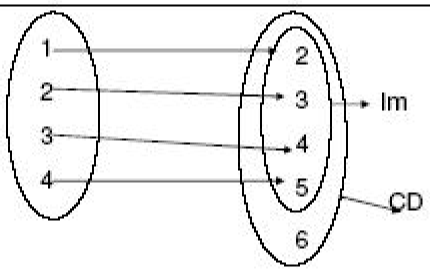
Conforme apresentamos em 4.2, as condições fundamentais para a ocorrência da aprendizagem significativa consistem em presença de subsunçores na estrutura cognitiva dos alunos , predisposição positiva do aluno para aprender e significado lógico do material.

Levando em consideração que as atividades desenvolvidas com os alunos tinham como objetivo desenvolver o estudo de alguns tipos de funções, consideramos que o principal subsunçor é o conceito de função. A existência deste subsunçor na estrutura cognitiva do aluno foi investigada no pré-teste por meio da pergunta: Escreva um texto explicando a um colega o que é função, domínio de uma função e imagem de uma função. A tabela 6.1 apresenta as respostas dos alunos para a questão. Estas respostas indicam que o conceito de função é percebido por três alunos como “relação entre dois conjuntos”, coincidindo com a definição apresentada nos livros didáticos de Matemática, especialmente do Ensino Médio.

Outros conceitos, como por exemplo, ‘coeficiente angular de uma reta’ e ‘coeficiente linear de uma função’ no entanto, parecem estar ausentes ou podem ter sido obliterados na estrutura cognitiva dos alunos. Assim, optamos por abordar, em cada atividade, os subsunçores à medida que eles foram se fazendo necessários para resolver o problema em estudo. Foi este o procedimento que usamos na atividade 5 (Limite de elasticidade) com relação às retas secante e tangente.

O trabalho com pequenos grupos, característico de atividades de Modelagem Matemática, facilitou o processo, pois às vezes, entre os próprios colegas se fazia a reativação dos subsunçores necessários. Um exemplo dessa situação foi no desenvolvimento da atividade de Modelagem 4 (módulo de elasticidade) na qual o aluno A4, relacionando o conceito de módulo de elasticidade com o significado geométrico do coeficiente angular da função, permitiu que o grupo desenvolvesse a atividade e contribuiu para que os outros alunos também construíssem relações que expressam o significado do coeficiente angular.

Tabela 6.1 – Respostas dos alunos à pergunta 7 do pré-teste (anexo 4)

	Respostas dos alunos a questão 7 do pré-teste.Escreva um texto explicando o que é função ,domínio e imagem. (anexo 4)
A_1	Deixou em branco
A_2	
A_3	
A_4	 "Não pode sobrar ninguém no Domínio e cada elemento do domínio Só pode ter uma imagem"

Em outras situações, quando nenhum dos alunos tinha os subsunçores necessários para resolver o problema, a intervenção da pesquisadora era necessária. Foi este o caso, por exemplo, da atividade 5 (limite de elasticidade), quando para entender o método de Johnson e resolver o problema, os alunos precisavam dos conceitos de reta secante e reta tangente. Percebemos desta forma que, como colocam Bisognin e Stiler (2006), as atividades de Modelagem permitem não só a partilha de saberes, mas também das dificuldades, o que pode contribuir para a superação das mesmas.

Em relação ao significado lógico do conteúdo, Moreira (1999) coloca que ele está presente quase que por definição nas disciplinas ensinadas na escola. Neste sentido podemos considerar que, as atividades de Modelagem Matemática, fazendo emergir conteúdos da disciplina de Cálculo I, possuíam significado lógico, segundo a concepção de David Ausubel.

Na condução das atividades de Modelagem com os alunos, procuramos evidenciar tal significado. Isto foi feito por meio de observações e formulação de questões aos alunos, com o intuito de que estes percebessem relações entre os conceitos trabalhados na atividade e conceitos aprendidos anteriormente (na disciplina de Fundamentos, de Cálculo ou em atividades de Modelagem anteriores) e identificassem diferenças e semelhanças entre os vários tipos de funções estudadas.

Em relação à condição do desejo do aluno em aprender significativamente, Novak e Gowin (1999) destacam que um dos elementos que pode contribuir para que o aluno deseje aprender é perceber relevância naquilo que aprende. As perguntas 8 e 9 do Questionário 1 (anexo 5) aplicado na primeira semana do curso de Fundamentos procuravam investigar a importância que os alunos atribuíam à Matemática no curso. As respostas dos alunos que constam da tabela 6.2 evidenciam que os alunos consideram a Matemática relevante, tanto no curso, quanto na futura atuação profissional.

A relevância atribuída à Matemática também foi investigada na parte 1 do questionário 2 (anexo 6) quando pedimos que os alunos pontuassem, em uma escala de 1 a 7, se as atividades de Modelagem desenvolvidas tinham sido interessantes, e em outra pergunta pedimos que também pontuassem de 1 a 7 se estas tinham permitido que se vislumbrasse aplicações da Matemática na sua vida privada e em sua futura área de atuação. A média da turma nas duas perguntas ficou em 6,5 (com desvio padrão 0.58), indicando que consideraram as atividades interessantes e que reconheciam que a Modelagem contribuía para que percebessem utilidade da Matemática. As respostas de alguns dos alunos a outra pergunta, a pergunta 8 do mesmo questionário, sobre os pontos positivos do trabalho com Modelagem Matemática , também evidenciam este aspecto:

"..., mostra por meio de modelo a utilização do conteúdo teórico dado em sala" (Aluno A1)

"... passa a ver a matemática com mais interessante,, pois você vê que a matemática se aplica até mesmo no dia a dia". (Aluno 2)

Tabela 6.2 – Respostas dos alunos com relação à importância da Matemática

	Pergunta 8: Você considera a Matemática importante par o seu desempenho no curso? Por que?	Pergunta 9: Você considera a Matemática importante para a sua atuação profissional futura? Por que?
Aluno A_1	"Sim é a base para todo o curso".	"Sim pois utilizo muito no meu trabalho."
Aluno A_2	"Sim, por que física e cálculo é uma das disciplinas que temos que saber e aprender pois depende delas."	"Sim nesta profissão o cálculo é fundamental, para exercer a profissão depende de cálculos."
Aluno A_3	"Sim."	"Sim, por que ela está no meio de todo momento em nossa vida, principalmente na área tecnológica."
Aluno A_4	"Sim por que o curso envolve muita matemática".	"Sim por que é através dela que podemos realizar projetos importantes."

Além das evidências até aqui citadas, em nossas observações percebemos manifestações e comportamentos dos alunos que podem evidenciar comprometimento com o próprio processo de aprendizagem e desejo de aprender como por exemplo a participação ativa nas aulas, a assiduidade às aulas e a entrega regular das atividades.

6.2 ANÁLISE DOS MAPAS EM RELAÇÃO AOS ELEMENTOS SINALIZADORES DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Primeiramente apresentamos a análise individual dos mapas observando os elementos sinalizadores definidos itens 4.4.1 até 4.4.5 do capítulo 4. A análise será feita em relação a um mapa de referência elaborado em cada atividade pela pesquisadora, que no momento da realização das atividades atuava como docente da turma.

Segundo Moreira (1997), não existe "o" mapa conceitual correto. Assim, não consideramos que o mapa de referência apresentado expresse todas as relações existentes entre os conceitos envolvidos, mas aquelas que almejamos que o aluno identifique por meio da realização da atividade. Esta opção da construção do mapa de referência está apoiada em Paulo e Moreira (2005, p.216) que colocam:

> "O evento educativo é cheio de peculiaridades e talvez só o professor tem consciência de como o processo foi conduzido e qual é, de fato o produto final obtido e se cumpre ou não os objetivos propostos, os critérios podem e devem variar de acordo com as prioridades estabelecidas".

Descrevemos de forma detalhada a análise do primeiro mapa da aluna A2, para que fique mais claro o processo de análise individual dos mapas e a seguir apresentamos tabelas resumo da análise dos elementos sinalizadores dos demais alunos. Os mapas dos alunos bem como os mapas de referência de cada atividade se encontram no anexo 3. Após a apresentação do Quadro-resumo de uma determinada atividade, fazemos também uma análise geral da mesma em termos dos elementos sinalizadores da aprendizagem significativa observados.

6.2.1 Análise do Mapa da Aluna A_2 Referente à Primeira Atividade

O mapa da aluna relativo à atividade de Modelagem Matemática "Ocupação do tanque" bem como as explicações apresentados por ela estão na figura 6.1.

6.2.1.1 O mapa de referência relativo à primeira atividade

O mapa de referência elaborado pela pesquisadora relativo à atividade "Ocupação do tanque" é apresentado na figura 6.2. Este mapa reflete os objetivos específicos que pretendíamos que os alunos atingissem por meio da atividade e pela subseqüente sistematização dos conteúdos nela envolvidos.

No primeiro nível do mapa colocamos as variáveis estudadas no problema e explicitamos sua relação com o problema, caracterizando-as como grandezas proporcionais.

A seguir identificamos a variável dependente e a variável independente.

Na seqüência apresentamos o conceito de função considerado essencial no curso de Cálculo, pois permeia muitos dos demais conteúdos da disciplina. No mesmo nível colocamos os conceitos de domínio e de imagem de uma função. Vislumbramos com esta atividade que os alunos percebessem que o domínio consiste no conjunto de valores da variável independente e que a imagem, por sua vez, constitui o conjunto dos valores da variável dependente. Pretendíamos, além disto, que os estudantes identificassem o domínio e a imagem da função constante e da função do 1º grau.

No sexto nível colocamos os conceitos de função do 1º grau e função constante, tipos especiais de função.

No nível seguinte aparecem atributos que são da função do 1º grau e da função constante, e que também são atributos de uma função qualquer, como por exemplo, que suas representações podem ser gráfico, tabela, equação.

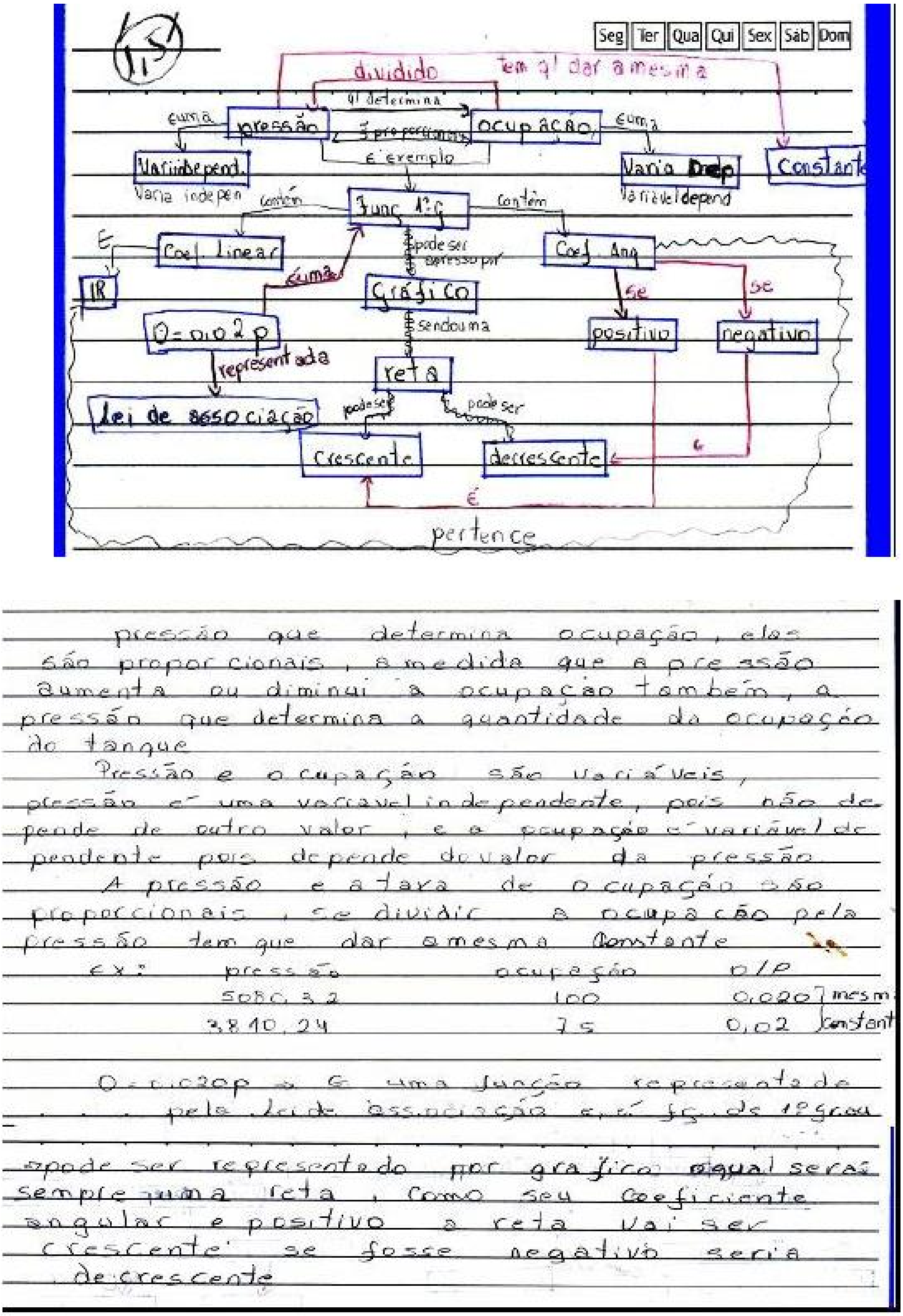
Com esta atividade esperávamos que os alunos estabelecessem relações entre estas diferentes representações, associando adequadamente gráficos, tabelas e expressões algébricas, passando a reconhecer cada uma destas representações para a função do 1º grau e para a função constante.

Na estruturação do mapa de referência, na seqüência colocamos mais duas características da função do 1º grau: o gráfico permite perceber se é a função é crescente ou decrescente; o gráfico corta o eixo da variável independente.

No nível subseqüente da estrutura do mapa especificamos as formas gerais da função de 1º grau e constante e uma característica comum entre duas, que é o fato do gráfico ser uma reta.

No nível seguinte colocamos os conceitos de coeficiente angular e coeficiente linear, que são atributos só da função de primeiro grau. Queríamos que os alunos soubessem distingui-los nas três formas de representação da função, bem como entendessem o seu significado no contexto de um problema, incluindo assim alguns significados destes conceitos.

No último nível do mapa de referência colocamos exemplos.



pressão que determina ocupação, eles são proporcionais, a medida que a pressão aumenta ou diminui a ocupação também, a pressão que determina a quantidade da ocupação do tanque

Pressão e ocupação são variáveis, pressão é uma variavel independente, pois não depende de outro valor, e a ocupação é variável dependente pois depende do valor da pressão.

A pressão e a taxa de ocupação são proporcionais, se dividir a ocupação pela pressão tem que dar a mesma constante

ex:	pressão	ocupação	o/p	
	5080,32	100	0,020	mesma constant
	3810,24	75	0,02	

O = 0,020p é uma função representada pela lei de associação e é fç. de 1º grau

pode ser representado por grafico o qual será sempre uma reta, como seu coeficiente angular é positivo a reta vai ser crescente se fosse negativo seria decrescente

Figura 6.1 – Mapa da aluna

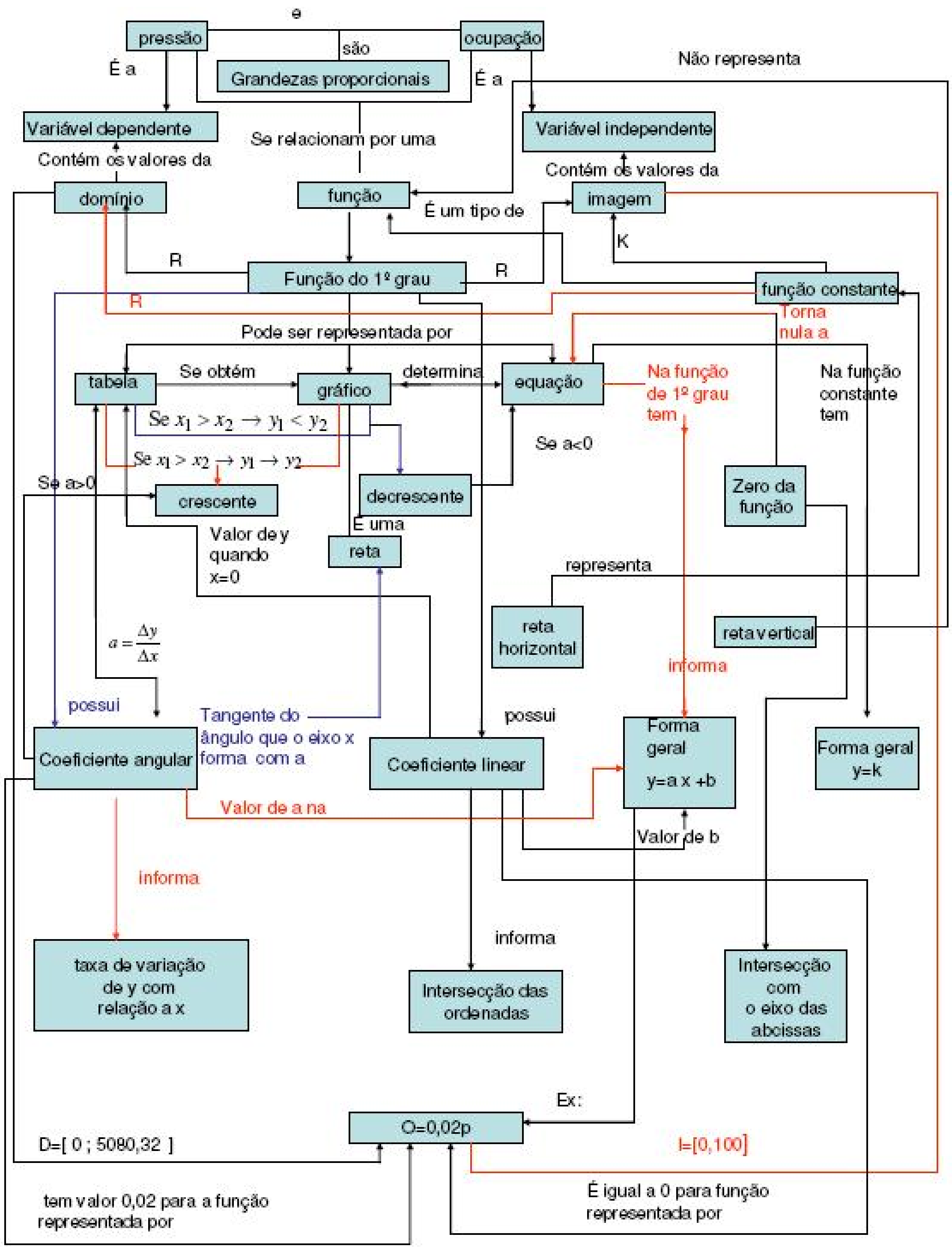


Figura 6.2 – O mapa de referência da atividade

6.2.1.2 Os elementos sinalizadores da aprendizagem significativa no mapa da aluna A_2

Apresentamos aqui os resultados da análise do mapa da aluna apresentado na figura 6.1, estabelecendo comparações com o mapa de referência apresentado na figura 6.2, buscando indícios de aprendizagem significativa por meio dos elementos que definimos na secção 4.4.

- **Em relação aos conceitos utilizados, as relações estabelecidas e as relações com poder de transferência**

A tabela 6.3 estabelece uma comparação entre o mapa da aluna e o mapa de referência em relação aos conceitos usados na elaboração do mapa.

Tabela 6.3 – Comparação entre o mapa da aluna A2 e o mapa de referência

	Mapa de referência	**Mapa da aluna**	**Comuns**
Conceitos utilizados	Pressão, ocupação, grandezas proporcionais variável dependente, variável independente, função , domínio, imagem, função do 1º grau, função constante, tabela, gráfico , equação, coeficiente angular, coeficiente linear, função crescente, função decrescente, reta, intersecção com o eixo das abcissas, intersecção com o eixo das ordenadas, reta vertical, reta horizontal , forma geral *y=k*, forma geral y=ax+b, taxa de variação de O com relação a p **Total:26**	Pressão, ocupação, variável dependente, variável independente, R constante, função do 1º grau, coeficiente angular, coeficiente linear, gráfico, positivo, negativo, reta, crescente, decrescente, lei de associação **Total: 15**	Pressão , ocupação, reta, variável dependente, variável independente, Função do 1º grau coeficiente angular, coeficiente linear, gráfico, lei de associação, grandezas proporcionais. **Total : 11**

Como podemos observar na tabela 6.3, no conjunto de conceitos apresentados pela aluna, faltam 15 conceitos apontados pelo mapa de referência como relevantes no contexto do problema. Como descrevemos em 3.2.3.2, segundo Guruceaga e Gonzáles (2004), a ausência de conceitos no mapa conceitual é um dos sinais de uma aprendizagem mais próxima da aprendizagem memorística no contínuum aprendizagem memorística – aprendizagem significativa. Considerando que, a aluna utilizou menos de 50% dos conceitos considerados relevantes, pelo mapa referência, é possível que a aprendizagem da aluna não esteja muito próxima da aprendizagem significativa.

Outro fator que precisa ser considerado nesta análise é se aluno estabelece relações entre os conceitos e se usa adequadamente o conectivo para expressar a relação entre os conceitos.

Neste sentido, buscando indícios de aprendizagem significativa, buscamos no mapa da aluna as relações estabelecidas e quais delas são equivalentes àquelas apresentadas no mapa de referência. Nas relações expressas pela aluna averiguamos também se o conectivo utilizado para expressar a relação é adequado ou não. Procuramos identificar ainda, conforme colocado na secção 4.4.2, quais das relações expressas possuem poder de transferência.

Para auxiliar neste processo utilizamos uma tabela em que na coluna 1 são apresentadas as relações expressas no mapa de referência. Na coluna 2 são expressas as relações estabelecidas pela aluna. As relações são dispostas de forma que as relações do mapa de referência e do mapa da aluna que são equivalentes fiquem na mesma linha. Uma terceira coluna é ainda destinada à classificação das relações segundo o seguinte critério:

i) Relações não observadas (RNO): quando a relação estiver presente no mapa de referência e não possuir relação equivalente no mapa da aluna.

ii) Relações expressas de forma inadequada (REI): quando a relação expressa pela aluna envolver, dois conceitos que possuam alguma relação, no entanto falta a palavra de ligação ou esta não expressa de forma precisa a relação entre os conceitos envolvidos.

iii) Relações estabelecidas de forma adequada (REA): quando a linha de ligação entre os conceitos vier acompanhada de palavras que expressem de forma precisa a relação entre os conceitos envolvidos.

Para distinguir nas relações do mapa de referência e nas do mapa da aluna, as relações que podem indicar poder de transferência, são utilizados asteriscos colocados na frente da relação. A tabela 6.4 apresenta os resultados desta análise.

Tabela 6.4 – Relações expressas pela aluna A_2 referentes à 1ª atividade

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa da aluna	Classificação das relações
	Pressão que determina ocupação.	REA
*Pressão e ocupação são grandezas proporcionais.	* Pressão dividido (sic) pela ocupação tem que dar a mesma constante.	REA
	*Pressão e ocupação são proporcionais.	REA
*Pressão é a variável dependente.	*Pressão é uma variável independente.	REA
*Ocupação é a variável independente.	*Ocupação é uma variável dependente.	REA
*Pressão e ocupação se relacionam por uma função.		RNO
*A relação entre a pressão é a ocupação é uma função do 1º grau.	*Pressão e ocupação é um exemplo de função do 1º grau.	REA
*A função do 1º grau tem D= R.		RNO
*A função do 1º grau tem I=R.		RNO
*O domínio contém os valores da variável independente.		RNO
*A imagem contém os valores da variável dependente.		RNO
*A função de 1º grau pode ser representada por equação.	* "O=0,02p é uma função representada pela lei de associação."	REA
*A função de 1º grau pode ser representada por tabela.		RNO
*Da tabela se obtém o gráfico.		RNO
*O gráfico determina a equação.		RNO
*A equação determina o gráfico.		RNO
*A equação na função de 1º grau tem forma geral $y=ax+b$.		RNO
*A função de 1º grau pode ser representada por gráfico.	* Função pode ser expressa por gráfico sendo uma reta.	REA
	*Reta pode ser crescente ou decrescente.	REA

Tabela 6.4 – Relações expressas pela aluna A2 referente à 1ªAtividade (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa da aluna	Classificação das relações
*O gráfico representa uma função crescente se $x_1 > x_2$ *então* $y_1 > y_2$.		RNO
*O gráfico representa uma função decrescente se $x_1 > x_2$ *então* $y_1 < y_2$.		RNO
*A tabela representa uma função crescente se $x_1 > x_2$ *então* $y_1 > y_2$.		RNO
*A tabela representa uma função decrescente $x_1 > x_2$ *então* $y_1 > y_2$.		RNO
A função de 1º grau possui coeficiente linear.	Função do 1º grau contém coeficiente linear.	REI
*O coeficiente linear é o valor de b na e na forma geral.		RNO
*O coeficiente linear informa a intersecção com o eixo das ordenadas.		RNO
*O coeficiente linear é o valor de y quando x é zero.		RNO
A função possui coeficiente angular.	Função de 1º grau contém coeficiente angular.	REA
*O coeficiente angular na tabela é dado por $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}$.		RNO
*O coeficiente angular fornece a tangente do ângulo que o eixo x forma com a reta.		RNO
*O coeficiente angular é obtido pelo valor de a na equação $y=ax+b$.		RNO
*O coeficiente angular informa a taxa de variação de y com relação a x.		RNO
*Se coeficiente angular é positivo a função é crescente.	* Coeficiente angular se positivo e crescente a reta .	REA
*Se o coeficiente angular é negativo a função é decrescente.	* Coeficiente angular se negativo é decrescente a reta.	REA
*A equação na função constante tem forma geral $y=k$.		RNO
*A função constante é um tipo de função.		RNO
*Na função constante a I={k}.		RNO

Tabela 6.4 – Relações expressas pela aluna A2 referente à 1ªAtividade (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa da aluna	Classificação das relações
*Na função constante D=R.		RNO
*A função constante é representada por uma reta horizontal.		RNO
*Reta vertical não representa uma função.		RNO
	Coeficiente angular pertence a R.	REA
	Coeficiente linear pertence a R.	REA
O zero da função informa a intersecção com o eixo das abcissas.		RNO
O zero da função torna nula a equação.		RNO
O=0,02p é um exemplo de equação.	*O=0,02p* é uma função representada lei de associação.	REA
	O=0,02p é uma função de 1º grau.	REA
O coeficiente angular é igual 0,02 em O=0,02p.		RNO
Coeficiente linear é igual a 0 em *O=0,02p*.		RNO
D=[0 ; 5080,32] para *O=0,02p*.		RNO
I=[0,100] para *O=0,02p*.		RNO

Considerando os dados expressos na tabela 6.3 e na tabela 6.4 apresentamos um quadro-resumo na tabela 6.5.

Tabela 6.5 – Quadro-resumo comparativo com o mapa de referência

	Conceitos relevantes	Relações expressas adequadamente	Relações que indicam poder de transferência
Mapa de referência	26	45	35
Mapa do aluno	17	15	10
Percentagem de equivalência	42.24%	22.22%	22.85%

As quinze relações expressas de forma adequada pela aluna sinalizam que houve compreensão dos conceitos de variável dependente e variável independente, do conceito de grandezas proporcionais e também que a aluna reconhece a reta como uma representação do gráfico da função do 1º grau. Outras proposições, embora adequadas, carecem de uma complementação como, por exemplo, as que estabelecem que a função de 1º grau tem coeficiente angular e tem coeficiente linear. A aluna apenas cita, não explicitando o significado dos mesmos.

No que se refere às relações com poder de transferência, o mapa da aluna, contendo somente 22.85% da quantidade expressa no mapa de referência, revela que a capacidade da aluna em aplicar os conceitos em novas situações ainda precisa ser aprimorado.

- **Em relação aos sinais de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa**

Nesta secção iremos analisar os indícios referentes à diferenciação progressiva e à reconciliação integradora. Conforme foi apontado na secção 4.4.3, a correta hierarquização do mapa é sinal, tanto da reconciliação integrativa como da diferenciação progressiva.

O mapa da aluna apresenta uma organização hierárquica que parte da situação-problema e a seguir vai apresentando os conceitos matemáticos envolvidos na resolução da mesma. Esta organização pode ser atribuída à influência do envolvimento com a atividade de Modelagem Matemática, no qual parte-se da situação real para estudar e abordar conceitos matemáticos.

Para observar a organização hierárquica no mapa da aluna analisamos em cada nível hierárquico se os conceitos colocados naquele nível podem ser considerados com tendo o mesmo grau de generalidade e se eles podem ser considerados menos gerais que os conceitos colocados no nível imediatamente superior. Levando em consideração estes critérios, observamos que quanto à organização hierárquica o mapa apresenta vários problemas.

O conceito de gráfico vem colocado no quarto nível abaixo de coeficiente angular e linear, quando na verdade ele deveria vir acima deles, pois enquanto o coeficiente angular se refere somente a funções de 1º grau o conceito de gráfico diz respeito a vários tipos de funções.

Outro problema neste nível do mapa é que o conceito de conjunto real é colocado abaixo de coeficiente angular, quando na verdade , consideramos que ele seja mais geral, pois pode ser associado aos valores da variável dependente e independente, por exemplo, que são conceitos mais gerais que o coeficiente angular, pois se aplicam a qualquer função, ao passo que o coeficiente angular só ser refere à função do 1º grau.

No sexto nível a aluna coloca um exemplo de função do 1º grau, O=0,02p, sendo que este deveria vir no último nível do mapa. No oitavo nível o conceito lei de associação vem colocado abaixo do referido exemplo, sendo que deveria vir acima.

Considerando então os nove níveis hierárquicos apresentados pela aluna temos que 66,66% revelam uma ordenação hierárquica dos conceitos coerente com o contexto do problema.

Conforme vimos na secção 4.4.3 a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa, possuem outras formas de manifestação além da organização hierárquica do mapa.

Um dos elementos que sinaliza a ocorrência da reconciliação integradora são ligaçõescruzadas entre ramos diferentes da hierarquia, bem como o estabelecimento de semelhanças e diferenças entre os conceitos. As relações que aparecem no mapa e sinalizam reconciliação integrativa são: a aluna reconhece que o coeficiente angular e o coeficiente linear são números reais; identifica o gráfico e coeficiente angular como sendo atributos da função; relaciona estes conceitos entre si por meio de ligações cruzadas indicando que ambos podem informar se a função é crescente ou decrescente.

Como sinais de diferenciação progressiva temos a separação do conceito de variável em variável dependente e variável independente.

Percebemos também relações que caracterizam a função do 1º grau e a diferenciam das demais como por exemplo, entender que seu gráfico é uma reta, identificar a forma de sua equação, perceber que ela pode ser crescente ou decrescente.

A aluna expressa que a função possui coeficiente angular e linear. No entanto, somente para o coeficiente angular, o mapa esclarece qual relação ela estabelece entre o referido conceito e a função do primeiro grau, indicando que este informa se a função é crescente ou decrescente. Quanto ao coeficiente linear a aluna só cita:"função de primeiro grau tem coeficiente linear", mas a palavra "tem" e o restante do mapa não revelam qual a relação que ela estabelece entre o coeficiente linear e a função do 1º grau. Segundo Barrody e Bartels (2001) a ausência de palavras de ligação ou uso de palavras não precisas, indicam um fraco entendimento ou que realmente o aluno não identificou qual é a relação entre os conceitos envolvidos. Tal fato foi confirmado pela entrevista.

A entrevista revelou que a aluna simplesmente sabia que o coeficiente linear estava relacionado com a função do 1º grau, mas não sabia qual era a relação:

P: Aqui você colocou a função do 1º grau tem coeficiente angular e tem coeficiente linear, explique melhor o que são esses coeficientes?

A2: Bom o coeficiente angular é do x e o linear é da reta y? P: Não entendi.

A2: Hum... (Silêncio) Por exemplo, se a gente tomar essa função O=0,02p o coeficiente angular é 0,02.

P: E o linear...

A2: (Silêncio) O linear é tudo isso aqui? (A aluna circula o 0,02p) .Ann.... Não lembro.

- **Em relação à aprendizagem extra-conteúdo**

Em relação à aprendizagem extra-conteúdo o mapa parece revelar uma compreensão clara da aluna sobre a relação entre as variáveis envolvidas, pressão e ocupação, no contexto do problema estudado. Uma das indicações para tal fato são as cinco primeiras proposições expressas pela aluna na tabela 6.4, as quais se referem à relação entre essas duas grandezas. Sinais dessa compreensão podem também ser observados nos trechos da explicação do mapa apresentados a seguir:

> "A pressão e a ocupação são proporcionais a medida que uma aumenta a outra aumenta....A pressão e a ocupação são proporcionais se dividir a pressão pela ocupação dá sempre a mesma constante (A2)"

> “A pressão e a ocupação são variáveis a pressão é a variável independente pois não depende de nada a ocupação é a variável independente, pois depende do valor da pressão (A2)”.

Considerações a partir da análise do mapa da aluna

A análise do mapa conceitual da aluna parece indicar alguns sinais de aprendizagem significativa, quanto ao conceito de variável dependente, independente e ao conceito de proporcionalidade.

Quanto ao conceito de função do primeiro grau, a aluna parece ter distinguido que sua representação gráfica é uma reta e também parece reconhecer sua representação algébrica.

São poucos os sinais de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa.

O mapa da aluna, pela observação dos elementos sinalizadores, parece indicar uma aprendizagemmais próxima da memorística no contínuum aprendizagem significativa - aprendizagem memorística. Sobre este resultado gostaríamos de comentar que, como colocam Ausubel; Novak e Hanesian (1980) a aprendizagem significativa não ocorre em uma única experiência do aluno com o conceito. No pré-teste (anexo 4) a questão 5 referente à função do 1º grau foi deixada em branco pela aluna. Considerando ainda seus onze anos de afastamento dos bancos escolares, julgamos que este conceito não estava disponível em sua estrutura cognitiva, sendo que realmente ela teve que aprendê-lo novamente. Assim consideramos que esta atividade proporcionou a esta aluna, quase que um primeiro contato com a função do 1º grau. Deste contato a aluna conseguiu estabelecer algumas relações, mas o conceito precisa ser retomado para que ela tenha possibilidade de estabelecer novas relações.

A análise em relação às mudanças nos subsunçores, elemento também apresentado em 4.4.5, requer a análise de diferentes mapas elaborados pela aluna no decorrer do envolvimento com as atividades de Modelagem e será apresentada na seção 6.2.3 juntamente com a análise dos demais alunos.

6.2.2 Resultados das Análises Individuais dos Mapas dos Demais Alunos

Nas seções 6.2.2.1 até 6.2.2.4 são apresentadas quadros-resumo referentes a elementos sinalizadores resultantes da análise dos mapas elaborados pelos alunos. Ao final de cada uma dessas seções fazemos também uma análise de cada atividade, considerando os elementos sinalizadores observados no conjunto de mapas elaborados pelos alunos referentes à esta atividade. Para não tornar o texto demasiado longo, não apresentamos aqui os mapas dos alunos, os mapas de referência e nem as tabelas usadas para auxiliar o processo de análise. Estas informações são apresentadas no anexo 11 deste texto.

6.2.2.1 Análise dos mapas referentes à primeira atividade de modelagem

A primeira atividade desenvolvida com os alunos diz respeito à relação que existe entre a percentagem de ocupação de um tanque contendo líquido e a pressão exercida pelo líquido sobre o fundo do tanque. Com esta atividade foi possível introduzir o estudo de função do 1° grau na disciplina de Cálculo I.

Tabela 6.6 – Quadro-resumo dos elementos sinalizadores revelados nos mapas refentes à 1ª atividade de Modelagem

	Aluno A_1	Aluna A_2	Aluno A_3	Aluno A_4
Percentagem de equivalência de conceitos	53,84%	42,34%	80,7%	46,15%
Percentagem de equivalência de relações	11,11%	22,22%	33,77%	24,44%
Percentagem de equivalência de relações com poder de transferência	13,88%	22,85%	41,67%	22%
Número de relações que indicam de diferenciação progressiva	5	7	13	5
Número de relações que indicam reconciliação integrativa	0	4	3	0
Percentagem de níveis hierárquicos coerentes com o contexto do problema	72,72%	66,66%	50%	87,5%

Em relação à aprendizagem extra-conteúdo, os mapas revelam que no caso dos alunos A_1 e A_2 houve a compreensão da relação entre as variáveis pressão e ocupação, envolvidas no contexto do problema. Já para os alunos A_3 e A_4 os mapas não revelam sinais de aprendizagem extra-conteúdo.

Considerações a partir da análise dos mapas

Na análise do mapa desenvolvido pelos alunos após a primeira atividade de Modelagem (Ocupação de um tanque), com exceção de A_3, os alunos apresentaram percentagens de equivalência em relação aos conceitos menores ou iguais a 54% comparados com o mapa de referência. Segundo Guruceaga e Gonzáles (2004), isto pode sinalizar uma aprendizagem mais próxima da memorística. Quanto a percentagem de equivalência de relações os resultados também são baixos.

Para Ausubel, Novak e Hanesian (1980) a aprendizagem de um conceito implica na distinção de seus atributos essenciais. Deste modo, anotamos como relações com poder de transferência, aquelas que enfocam os atributos essenciais da função do 1º grau e da função constante e que pretendíamos que os alunos distinguissem. Observamos que em todos os mapas os alunos identificaram a reta como forma de representação da função. No geral quanto às percentagens de relações que podem indicar outros atributos da função do primeiro grau, houve bastante variação nos mapas. O aluno que atingiu a percentagem de equivalência mais alta estabeleceu somente 41,67% das relações esperadas. Notamos também nos mapas a falta de um maior inter-relacionamento entre os conceitos que indicam os atributos identificados pelos alunos.

Quanto à hierarquia, uma característica comum nos mapas é que ela parte do problema real, a seguir definem-se as variáveis, na seqüência encontra-se a função, (o modelo matemático) e depois são expressos seus atributos, como domínio, imagem, coeficiente angular e linear. Por fim são apresentados exemplos desses atributos ou seu significado utilizando exemplos do contexto do problema. Este último fato pode ser observado, por exemplo, quando o aluno A_4 coloca em seu primeiro mapa que o domínio neste caso é o intervalo [0, 5080.8], ou quando o aluno A_3 fala que o coeficiente angular é a taxa de variação da ocupação com relação a pressão.

Considerando, como colocam Novak e Gowin (1999), os mapas conceituais como uma aproximação da estrutura cognitiva do aluno em uma determinada área do conhecimento, este tipo de hierarquia utilizada nos mapas, parece refletir influências do processo de Modelagem na organização que os conceitos adquirem na estrutura cognitiva do aluno após a realização da atividade.

Com exceção de A_3, todos os alunos apresentam poucos sinais de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa, como podemos perceber pela tabela 6.6. Percebemos quanto à estruturação dos mapas, que salvo poucas exceções, de cada conceito chega e parte somente uma linha de ligação, indicando predominância de ligações lineares, o que, segundo Gouveia e Valadares (2004), indica que o aluno ainda precisa mais relações entre os conceitos para considerar-se que houve aprendizagem significativa.

Em relação á aprendizagem extra-conteúdo, somente dois mapas revelaram sua ocorrência, os mapas dos alunos A_1 e A_2. Estes mapas parecem sinalizar que houve compreensão da relação entre as variáveis envolvidas e do conceito de proporcionalidade.

No pré-teste (anexo 4) os alunos A_1 e A_2 deixaram a questão referente à função do primeiro grau em branco e os outros dois alunos apenas traçaram o gráfico. Assim, levando em consideração os conhecimentos prévios dos alunos sobre função de 1º grau (manifestos no pré-teste),embora consideremos que os resultados evidenciados pelos mapas estejam distantes de cumprir nossos objetivos com relação a aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos envolvidos na atividade, julgamos que os mapas parecem indicar algum avanço na aprendizagem do conceito de função do 1º grau. Consideramos ainda que, como já havíamos colocado para o caso da aluna A_2, o conteúdo de função do 1º grau estava praticamente obliterado da estrutura cognitiva dos alunos, um único contato não se mostrou suficiente para alcançar a compreensão desejada do conceito. Como colocam Ausubel, Novak e Hanesian (1980) é preciso que o aluno tenha a oportunidade de ter contato com o conceito em diversos contextos para que consiga extrair deles quais são os atributos essenciais que o caracterizam.

6.2.2.2 Análise dos mapas referentes à segunda atividade de modelagem

Esta atividade visa estudar como determinar o valor de uma ligação telefônica interurbana levando em conta o horário e a duração da chamada. Função definida por várias sentenças e função maior inteiro são objetos matemáticos que foram estudados com esta atividade.

Tabela 6.7 – Quadro-resumo dos elementos sinalizadores revelados nos Mapas referentes à 2ª atividade de Modelagem

	Aluno A_1	Aluno A_2	Aluno A_3	Aluno A_4
Percentagem de equivalência de conceitos	54,16%	87,5%	50%	54,16%
Percentagem de equivalência de relações	52,17%	43,47%	60,28%	39,13%
Percentagem de equivalência de relações com poder de transferência	50%	50%	64,28	64,28
Número relações que sinalizam diferenciação progressiva	5	8	8	6
Percentagens de níveis hierárquicos coerentes com o contexto do problema	37,5%	25%	50%	62,5%

Nenhum dos alunos apresentou relações que sinalizam reconciliação integrativa.

Tabela 6.8 – Quadro-resumo da aprendizagem extra-conteúdo revelada pelos mapas referentes à 2ª atividade de Modelagem

	Aluno A_1	Aluno A_2	Aluno A_3	Aluno A_4
Aprendizagem extra-conteúdo revelada pelo mapa	O mapa revela que: - O aluno tem idéia geral de como é feita a cobrança da ligação. E reconhece algumas das variáveis que a influenciam tais como: horário, distância e tempo de duração. No entanto a explicações da vários tipos de degraus, de tarifas são superficiais, não explicitando quais os critérios utilizados. -A compreensão do processo para determinar a distância geodésica também é superficial, só indicando os conceitos matemáticos e geográficos envolvidos.	O mapa revela que: - O aluno tem idéia geral de como é feita a cobrança da ligação. E reconhece algumas das variáveis que a influenciam tais como: horário, distância e tempo de duração. No entanto a explicações da vários tipos de degraus, de tarifas são superficiais, não explicitando quais os critérios utilizados. - A aluna identifica o que é um pulso de interurbano. -Houve entendimento superficial sobre o sistema de degraus de tarifas diferenciadas de acordo com o horário. A aluna sabe determinar o preço da ligação em horário de tarifação normal entre duas cidades do degrau 3.	O mapa revela que: -O aluno entendeu o processo geral como é cobrada a ligação interurbana e as variáveis que a influenciam: tempo, distância, operadora, horário e plano. No entanto ele não explicita quais os tipos de tarifa conforme o horário, e nem descrimina quais são os degraus tarifáricos. -O aluno identifica o que é um pulso. -Quanto ao processo de cálculo da distancia geodésica a explicação é bem superficial, só indicando alguns conceitos matemáticos e geográficos utilizados. O aluno sabe determinar o preço de uma ligação em horário de tarifação normal entre duas cidades do degrau 3	O mapa revela que : _O aluno identifica algumas das variáveis envolvidas na determinação do valor da ligação telefônica: tempo de conversa, distância geodésica, horário e operadora. - Ele cita os degraus tarifáricos, mas não explica como eles funcionam.

Considerações a partir da análise dos mapas

Os mapas parecem indicar que a aprendizagem da distância geodésica se deu de forma memorística, os alunos simplesmente utilizaram a fórmula.

Acreditamos que isso se deve ao fato de que os subsunçores relacionados a este conceito não integram a estrutura cognitiva dos alunos. O professor da disciplina havia feito uma revisão sobre ângulos e trigonometria e os alunos haviam resolvidos alguns exercícios. Observando a dificuldade dos alunos durante a atividade para fazer as transformações de unidades e para operar com o seno e cosseno na calculadora, acreditamos que isto não foi o suficiente para reativar os subsunçores necessários.

A compreensão da fórmula para calcular a distância geodésica também envolvia conceitos de trigonometria esférica com os quais os alunos estavam tendo o primeiro contato. Assim talvez teria sido necessário trabalho maior com estes conceitos antes de avançar na dedução da fórmula. Devemos também considerar que a fórmula da distância geodésica foi obtida a partir da lei dos cossenos para triângulos esféricos, a qual não pudemos deduzir, pois os alunos não tinham o conhecimento necessário sobre vetores. Assim, fazendo uma análise posterior, acreditamos que a ausência de um trabalho mais intensivo para munir os alunos dos subsunçores necessários tenha sido uma possível causa da aprendizagem memorística do conceito de distância geodésica.

Percebemos que os alunos conseguiram selecionar no mínimo 50% dos conceitos relevantes e que também nas proposições com poder de transferência os níveis ficaram próximos desse valor.

Em todos os mapas notamos que os alunos inicialmente colocam o valor de ligação telefônica em um primeiro nível e o valor do tempo, da distância, do horário e da operadora juntos, no nível abaixo. Ao falar de variáveis dependente e independente, os conceitos de valor de ligação e tempo são novamente colocados no mapa e colocados no mesmo nível. O mapa parece assim, novamente refletir o processo de Modelagem, que se inicia com a compreensão do fenômeno em si no contexto real, com toda a sua riqueza de variáveis e passa por uma simplificação para poder ser transformado em um problema matemático que apenas envolve uma variável dependente e uma independente.

Pode-se perceber pelos mapas que os alunos, de forma geral, conseguiram relacionar o fenômeno estudado com funções com as quais já haviam trabalhado na atividade anterior (função do 1º grau e função constante), embora se limitando a representação algébrica das mesmas. Tal fato pode ser encarado como uma forma de transferência de algumas das relações estabelecidas na atividade anterior. Isto pode sinalizar que, sob alguns aspectos, a atividade 1 contribuiu para a aprendizagem significativa de alguns dos conceitos.

Pelo quadro resumo desta atividade (tabela 6.7), comparado com o quadro resumo da atividade anterior (tabela 6.6), percebemos que houve um aumento em relação às percentagens de equivalência das relações estabelecidas de forma adequada, mesmo se tratando de um problema em que a situação estudada envolvia mais informações do que no caso anterior. Acreditamos que um elemento que pode ter favorecido este fato, foi a maior participação dos alunos na atividade, coletando os dados e tentando encontrar o modelo, mesmo que em alguns momentos tenha sido necessária a intervenção do professor. Consideramos também que o trabalho em grupo permitiu discussões que podem ter contribuído para esse aumento no número de relações estabelecidas.

Quantos aos conceitos matemáticos que pretendíamos trabalhar por meio desta atividade, notamos pelos mapas que, houve uma concentração dos alunos especificamente nos aspectos matemáticos que permitiam responder a pergunta feita, ou seja, que permitiam determinar o preço da ligação em função do tempo de duração da chamada. A maioria dos alunos se limitou a apresentar no mapa a expressão algébrica da função e apenas citou que esta também poderia ser representada por gráfico. Atributos da função encontrada como domínio, imagem e gráfico, não foram abordados, embora tenham sido trabalhados com os alunos, no momento da apresentação do trabalho.

6.2.2.3 Análise dos mapas elaborados após a terceira atividade de modelagem

Esta atividade determina a relação entre a intensidade sonora e a exposição segura de uma pessoa à esta intensidade. Desenvolvida com os alunos durante o curso extra-curricular, viabilizou uma retomada ao estudo de funções exponenciais.

A tabela 6.9 apresenta um resumo dos elementos sinalizadores de aprendizagem significativa percebida nos mapas dos alunos elaborados após esta atividade.

Considerações a partir da análise dos mapas

Observamos, pelas relações expressas nos mapas, a percepção do gráfico como forma de representar a função. Nos mapas das atividades anteriores o gráfico era citado, mas percebíamos que os alunos não o consideravam como uma representação da função tal como a equação. Os alunos muitas vezes se limitavam a citar "a função tem gráfico". Nesta atividade todos os alunos destacam que o gráfico representa a função, o que pode ser considerado um avanço em direção a aprendizagem significativa do conceito de função. Consideramos que tal fato se deve ao processo usado para obter o modelo, que deu destaque ao gráfico. Todos os mapas também destacaram o Excel como uma auxiliar na determinação da função. Observamos também que eles não revelam sinais de aprendizagem extra-conteúdo, apesar da atividade ter produzido debate na sala de aula sobre a obediência às normas de segurança nas empresas.

Tabela 6.9 – Quadro-resumo dos elementos sinalizadores revelados nos mapas referentes à 3ª atividade de Modelagem

	Aluno A_1	Aluno A_2	Aluno A_3	Aluno A_4
Percentagem de equivalência de conceitos	76,92%	84,46%	91,66%	53,84%
Percentagem de equivalência de relações	30%	45%	65%	25%
Percentagem de equivalência de relações com poder de transferência	36,84%	42,10%	68,42%	26,31%
Número de relações que sinalizam diferenciação progressiva	5	7	10	5
Número de relações que sinalizam reconciliação integrativa	0	0	6	1
Percentagem de níveis hierárquicos coerentes com o contexto do problema	100%	68,75%	50%	87,5%

6.2.2.4 Análise dos mapas elaborados após a quarta e quinta atividades de modelagem

A atividade 4 – Determinação do módulo de elasticidade de corpo de prova de aço 1020 por meio de ensaio de tração – foi motivada por uma visita dos alunos ao laboratório de ensaio dos materiais e é uma atividade que, necessita de uso de recursos de informática dada a característica dos dados encontrados. A atividade 5, por sua vez, determina o limite de elasticidade do aço 1020 e permite uma interpretação para o problema por meio do uso da derivada da função encontrada.

As tabelas 6.10 e 6.11 resumem os resultados em relação aos elementos sinalizadores de aprendizagem significativa observados nos mapas dos alunos elaborados após o desenvolvimento destas atividades.

Tabela 6.10 – Quadro-resumo dos elementos sinalizadores revelados nos mapas referentes à 4ª atividade de Modelagem

	Aluno A_1	Aluno A_2	Aluno A_3	Aluno A_4
Percentagem de equivalência de conceitos	65%	78,57%	57,14%	60,71%
Percentagem de equivalência de relações	40%	57,5%	42,5%	45%
Percentagem de equivalência de relações com poder de transferência	48%	60%	48%	44%
Número de relações que sinalizam de diferenciação progressiva	6	5	9	7
Número de relações que sinalizam reconciliação integrativa	2	0	1	1
Percentagem de níveis hierárquicos coerentes com o contexto do problema	50%	75%	83%	53%

Tabela 6.11 – Quadro-resumo dos elementos sinalizadores revelados nos mapas referentes à 5ª atividade de Modelagem

	Aluno A_1	Aluno A_2	Aluno A_3	Aluno A_4
Percentagem de equivalência de conceitos	76%	88,88%	60%	76%
Percentagem de equivalência de relações	64%	80%	80%	72%
Percentagem de equivalência de relações com poder de transferência	90%	80%	70%	80%
Número de relações que sinalizam diferenciação progressiva	5	7	4	5
Número de relações que sinalizam reconciliação integrativa	0	0	0	0
Percentagem de níveis hierárquicos coerentes com o contexto do problema	33,33%	66,66%	55,55%	53%

Tabela 6.12 – Quadro-resumo da aprendizagem extra-conteúdo revelada pelos mapas referentes à 4ª atividade de Modelagem

Atividade 4	Aluno A_1	Aluno A_2	Aluno A_3	Aluno A_4
Aprendizagem extra-conteúdo revelada pelo mapa	O mapa revela que o aluno compreende como é feito o diagrama tensão deformação e como determinar o módulo de elasticidade a partir do diagrama tensão deformação.	As relações estabelecidas revelam que a aluna compreendeu: - Quais são as variáveis envolvidas no ensaio de tração, e a relação entre elas no processo do ensaio. -Como a partir do diagrama tensão X deformação pode ser determinado o módulo de elasticidade. - A distinção da fase plástica e da fase elástica.	O mapa revela: -Algum conhecimento sobre o diagrama tensão deformação: quais as variáveis que estão nele representadas e como identificar por meio dele o módulo de elasticidade. - Que o aluno distingue fase plástica e fase elástica.	O mapa revela que: -O aluno compreendeu a relação entre as variáveis envolvidas no ensaio de tração. -O aluno sabe determinar o módulo de elasticidade a partir dos dados obtidos no ensaio de tração.

Tabela 6.13 – Quadro-resumo da aprendizagem extra-conteúdo revelada pelos mapas referentes à 5ª atividade de Modelagem

Atividade 5	Aluno A_1	Aluno A_2	Aluno A_3	Aluno A_4
Aprendizagem extra-conteúdo revelada pelo mapa	O mapa revela que o aluno: -Identifica as variáveis envolvidas no ensaio de tração (força, área da secção, comprimento inicial e final, deformação e tensão) e de uma forma superficial conhece a relação entre elas. - Sabe determinar o módulo de elasticidade e o limite de elasticidade a partir do diagrama tensão deformação.	-O mapa revela que a aluna sabe como utilizar o método de Johnson para determinar o limite	O mapa revela que: - o aluno reconhece no diagrama tensão deformação a fase elástica e fase plástica. -Conhece o método de Johnson para determinação do limite de elasticidade	O mapa revela que: -o aluno identifica as variáveis envolvidas no ensaio de tração (área da secção, tensão d deformação, força) e a relação entre elas neste processo. -Ele sabe distinguir no diagrama tensão deformação a fase plástica da fase elástica e determinar o módulo de elasticidade e limite de elasticidade.

Tabela 6.14 – Modificações no conceito de coeficiente angular observadas pelos mapas referentes às atividades de Modelagem 1 e 4

	Aluno A_1	Aluno A_2	Aluno A_3	Aluno A_4
Mapa referente à atividade 1	-Cita o coeficiente angular mais de forma confusa.	Cita o coeficiente angular e o relaciona com o crescimento e decrescimento da reta.	Relaciona o coeficiente angular com o crescimento e decrescimento da função.	- Identifica o significado geométrico do coeficiente angular.
Mapas referentes às atividades 4	-Atribui significado ao coeficiente angular e o relaciona com o crescimento e decrescimento da função Identifica o coeficiente angular na equação. -Identifica seu significado geométrico	Identifica o significado geométrico do coeficiente angular, bem como seu significado como taxa de variação	-Reconhece o coeficiente angular como o valor da tangente do ângulo que o gráfico forma com o eixo das abcissas.	-Identifica o significado geométrico do coeficiente angular no problema -Identifica o coeficiente angular na equação

Considerações a partir da análise dos mapas

Percebemos pelos mapas que a atividade 4 atividades provocou nos alunos uma modificação, quanto à compreensão do conceito de coeficiente angular em relação à atividade 1. Tal fato pode ser observado pela tabela 6.14 , que foi elaborada a partir das relações expressas nos mapas referentes as duas atividades e expressa em vermelho as modificações referentes ao conceito de coeficiente angular observadas no mapa da atividade 4 com relação ao mapa da atividade 1.

A atividade 4 também provocou mudanças no conceito de função do primeiro grau que são apresentadas e analisadas com mais detalhes na secção 6.2.3, referente à mudança nos subsunçores.

Quanto ao conceito de derivada, no geral, os mapas dos alunos referentes a atividade de Modelagem 5 revelam que eles reconhecem sua definição, sua interpretação geométrica e reconhecem seu uso no contexto deste problema.

Gostaríamos aqui de dar destaque a oportunidade de construção de conhecimento sobre a definição de derivada que a atividade 5 proporcionou. Tal definição muitas vezes é dada só na introdução do conceito e esquecida pelos alunos quando começam a trabalhar com as regras de derivação. Alguns professores inclusive até preferem não apresentá-la e partir logo para as regras de derivação. Nesta atividade a definição de derivada tinha ligação direta com a resolução do problema, fazendo com que o aluno pudesse identificar seu uso em problema não matemático.

Acreditamos que outro fato que pode ter contribuído para a construção das relações referentes ao conceito de derivada, por parte dos alunos, é o fato da atividade 4 ter trabalhado o conceito de coeficiente angular, relacionado-o com a inclinação da reta e com a taxa de variação. O conceito de coeficiente angular tornou-se assim um subsunçor que ancorou o conceito de derivada, na linguagem ausubeliana.

O mapa relativo à atividade 5 revela, no entanto, que o conceito de derivada ainda precisa ser retomado, para que o aluno consiga estabelecer outras relações tais como a relação entre o conceito de derivada como limite e as regras de derivação, bem como para que o aluno identifique a derivada como sendo uma função.

Durante o desenvolvimento da atividade foi interessante uma observação de um aluno ao chegarmos a definição de derivada:

“Agora entendi por que a gente precisa estudar limite na mecânica”(A_1*).*

Assim percebemos que a atividade contribuiu não só para dar sentido e significado ao conteúdo de derivada, mas também para o conteúdo de limite. O conceito de limite passou a ter sentido para este aluno e adquiriu novos significados pela relação estabelecida com derivada. Isto vem confirmar o que colocam Borba e Bizzeli (1999) sobre a espiralização do conteúdo proporcionada pela Modelagem, que cria oportunidades para que conteúdos aprendidos sejam retomados e o aluno desenvolva sobre eles novas compreensões. Estas novas compreensões podem contribuir para que os conceitos envolvidos, conforme coloca Moreira (1999), se tornem mais estáveis e diferenciados na estrutura cognitiva do aluno e mais aptos a subsumir novas informações.

Percebemos, observando os mapas destas atividades, que a estruturação dos mesmos deixou de ser predominantemente linear e passa a integrar mais ligações cruzadas, principalmente nos últimos níveis. Segundo Guruceaga e Gonzáles (2004), menos ligações lineares nos mapas são sinais de aprendizagem mais próxima da significativa no continuum aprendizagem memorística - aprendizagem significativa.

Após a elaboração dos mapas individuais referentes às atividades 4 e 5 e sua apresentação de forma oral, os alunos também elaboraram um mapa em dupla com respeito a conceitos matemáticos envolvidos nas duas atividades. O quadro resumo dos elementos sinalizadores da aprendizagem significativa observados nestes mapas, se encontram na tabela 6.15. Neste caso não foram investigadas aprendizagens extra-conteúdo, tendo em vista que os mapas só abordavam conceitos matemáticos. Também não foram observadas as percentagens de equivalência dos conceitos, pois na elaboração do mapa em duplas eles foram fornecidos pelo pesquisador. Procedemos assim por que queríamos perceber possíveis modificações da primeira atividade com relação às duas últimas na compreensão de alguns conceitos matemáticos específicos.

Tabela 6.15 – Quadro-resumo dos elementos sinalizadores revelados nos mapas elaborados pelas duplas

	Alunos A_1 e A_3	Alunos A_2 e A_4
Percentagem de equivalência de relações	82,14%	67,86%
Percentagem de equivalência de relações com poder de transferência	80,92%	54,54%
Número de relações que sinalizam diferenciação progressiva	7	10
Número de relações que sinalizam reconciliação integrativa	12	5
Percentagem de níveis hierárquicos coerentes com o contexto do problema	78,57%	50%

Com relação à elaboração do mapa em comum percebemos, observando os mapas, que eles contém relações que já estavam presentes nos mapas individuais dos alunos da dupla, bem como relações que não estavam presentes em nenhum dos mapas anteriores dos membros dupla. Por exemplo, no mapa da dupla A_1 e A_3 encontramos a relação “a partir do gráfico é possível obter a equação”, que não estava presente em mapas anteriores de nenhum dos dois alunos.

Notamos também pela tabela 6.15 que houve um aumento considerável do número de diferenciações progressivas e reconciliações integradoras em relação aos mapas anteriores. Assim tal atividade parece ter levado os alunos a uma nova reflexão sobre os conceitos até então estudados, ajudando-os a descobrir novas relações.

Como já comentamos anteriormente os alunos ainda elaboraram dois mapas finais, um sobre o conceito de função do primeiro grau e outro sobre o conceito de funções. A tabela 6.16 e a tabela 6.17 apresentam os resultados em relação aos elementos sinalizadores observados. Limitar-nos-emos nesta seção a apresentá-los.

O objetivo de solicitar a elaboração destes dois mapas finais aos alunos, foi perceber por assim dizer, a compreensão atingida pelos mesmos a respeito de função e função do 1º grau. Assim, a interpretação das informações contidas na tabela 6.16 e na tabela 6.17 carecem de uma confrontação com informações fornecidas pelas tabelas de mapas anteriores. Dessa forma, comentários sobre as informações nelas encontradas são apresentados na seção 6.2.3 onde analisamos a mudança dos subsunçores no decorrer das atividades e na secção 6.3 onde fazemos a análise do conjunto de mapas quanto aos elementos sinalizadores.

Tabela 6.16 – Quadro-resumo dos elementos sinalizadores revelados nos mapas finais referentes à função de 1º grau

	Aluno A_1	Aluno A_2	Aluno A_3	Aluno A_4
Percentagem de equivalência de relações	75%	87,09%	84,5%	77,41%
Percentagem de equivalência de relações com poder de transferência	85,71%	96,42%	71,42%	82,14%
Número de relações que sinalizam diferenciação progressiva	12	15	12	9
Número de relações que sinalizam de reconciliação integrativa	10	11	6	12
Percentagem de níveis hierárquicos coerentes com o contexto do problema	70%	66,66%	60%	48,75%

Tabela 6.17 – Quadro-resumo dos elementos sinalizadores revelados nos mapas finais referentes ao conceito de função

	Aluno A_1	Aluno A_2	Aluno A_3	Aluno A_4
Percentagem de equivalência de relações	63,15%	94,73%	73,68%	57,89%
Percentagem de equivalência de relações com poder de transferência	63,15%	94,73%	73,68%	57,89%
Número de relações que sinalizam diferenciação progressiva	7	9	7	9
Número de relações que sinalizam reconciliação integrativa	9	15	8	5
Percentagem de níveis hierárquicos coerentes com o contexto do problema	83,33	66,66%	85,71%	66,66%

6.2.3 Análise dos Mapas Buscando Mudanças nos Subsunçores

Nesta seção analisamos mudanças que observamos nos mapas em relação aos subsunçores no decorrer do desenvolvimento das atividades. Focalizamos em nossa análise as mudanças relacionadas ao conceito de função e ao conceito de função do 1º grau, analisando compreensões destes conceitos em todos os mapas em que eles se fizeram presentes. Estes conceitos foram escolhidos, pois estiveram presentes em várias das atividades. Sendo assim, é possível perceber pelos mapas se houve ou não modificações na compreensão dos alunos, no decorrer das atividades.

Como já dissemos, consideramos o conceito de função um subsunçor para os vários tipos de funções abordados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral bem como para o conceito de derivadas. Quanto ao estudo da função do 1º grau, este envolve o conceito de coeficiente angular como inclinação da reta que como já vimos, pode apoiar a construção conceito de inclinação da reta tangente que é utilizado em uma das formas de apresentação do conceito de derivada. Avançando um pouco mais no curso de Cálculo I, a relação entre o crescimento e decrescimento da função e o sinal do coeficiente linear na equação, podem servir de apoio para a construção da regra da derivada primeira. Assim consideramos que o conceito de função do 1º grau também é um subsunçor importante em relação a outros conceitos abordados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

6.2.3.1 Análise da modificação dos subsunçores: conceito de função do 1ºgrau

O conceito de função do primeiro grau esteve presente na primeira, na segunda e na quarta atividade que desenvolvemos, sendo portanto conceito presente nos mapas relativos a estas atividades bem como do mapa realizado em duplas referente a quarta e quinta atividade e do mapa final sobre função do 1º grau.

As modificações que observamos em cada um dos 4 alunos investigados podem ser observadas nas tabelas 6.18 a 6.21. Em cada uma das tabelas são apresentadas compreensões reveladas pelos alunos por meio de relações expressas nos mapas, explicação do mapa por escrito ou por explicações orais ou ainda por aquelas que foram percebidas por observação ou entrevista. As modificações percebidas de um mapa com relação ao seu anterior são destacadas em vermelho.

Tabela 6.18 – Modificações no conceito de função do 1º grau observadas nos mapas do aluno A_1

	Compreensão revelada a respeito da função de 1º grau
Mapa da atividade 1	- Discrimina que uma função ser crescente e decrescente. - Identifica que a função pode ser representada por gráfico. - Destaca que o coeficiente linear é o valor onde o gráfico corta o eixo da variável independente - Cita o coeficiente angular, mas seu significado não está claro. - Explicita o que são grandezas proporcionais.
Mapa da atividade 2	- Reconhece pode ser representada por gráfico. - Reconhece a função de 1º grau pela sua expressão algébrica.
Mapa das atividades 4 e 5	- Identifica que a função pode ser representada por gráfico e equação (expressão algébrica). - Atribui significado ao coeficiente angular como estando relacionado com o crescimento e decrescimento da função. - Identifica o coeficiente angular na equação. - Identifica o significado geométrico do coeficiente angular.
Mapa final sobre função do 1º grau	- Identifica que a função pode ser representada por tabela, gráfico e equação. - Sabe a partir de uma representação da função do 1ºgrau, como proceder para obter a outra. - Reconhece o coeficiente linear na equação e identifica seu significado geométrico. - Reconhece o coeficiente angular na equação e na tabela, identifica seu significado geométrico e reconhece que na função de primeiro grau ele é igual a derivada. - Identifica a relação entre o coeficiente angular e o crescimento e decrescimento da função e o significado geométrico do zero da função

Tabela 6.19 – Modificações no conceito de função do 1º grau observadas nos mapas da aluna A_2

	Compreensão revelada pelos mapas a respeito da função de 1º grau
Mapa atividade 1	- Reconhece uma função de 1º grau por sua expressão algébrica. - Reconhece que a função de 1º grau pode ser representada por uma reta. - Identifica que os coeficientes angular e linear são números reais. - Quantos aos coeficientes linear e angular apenas os cita não discriminando seu significado. - Explicita o significado de grandezas proporcionais.
Mapa atividade 2	-O aluno reconhece a função de 1º grau por sua expressão algébrica.
Mapas das atividades 4 e 5	- Reconhece a função de 1º grau por sua expressão gráfica e algébrica. - Identifica o significado geométrico do coeficiente angular, bem como seu significado como taxa de variação.
Mapa final sobre função do 1º grau	- Identifica que a função pode ser representada por gráfico, tabela e equação.(representação algébrica) - Sabe dada uma representação obter as demais - Reconhece a reta como representação geométrica da função de 1º grau. - Identifica se a função é crescente ou decrescente, pela tabela, pela expressão algébrica e pelo gráfico. - Reconhece o coeficiente linear na equação e identifica seu significado geométrico. - Identifica o significado geométrico do zero da função. - Reconhece o coeficiente angular na equação, identifica o seu significado geométrico, identifica o seu significado como taxa de variação. - Reconhece que na função de 1º grau a derivada é igual ao coeficiente angular.

Tabela 6.20 – Modificações no conceito de função do 1º grau observadas nos mapas do aluno A_3

	Compreensão revelada pelos mapas com respeito a função do 1º grau
Mapa da atividade 1	- Reconhece que a função de 1º grau por ser representada por uma reta ou por sua expressão algébrica. - Relaciona o coeficiente angular com o fato da função com o fato dela ser crescente. - Identifica o coeficiente angular como taxa de variação e como tangente do ângulo que o gráfico forma com o eixo das abcissas. - Identifica o coeficiente angular na equação. - Identifica o domínio, imagem da função.
Mapa da atividade 2	- Reconhece a função de 1º grau por sua expressão algébrica.
Mapas das atividades 4 e 5	- Reconhece que a função de 1º grau por ser representada por uma reta ou por sua expressão algébrica. - Relaciona o coeficiente angular com o fato da função ser crescente. - Identifica o coeficiente angular como taxa de variação e como tangente do ângulo que o gráfico forma com o eixo das abcissas. -Identifica o coeficiente angular na equação. Identifica o domínio, imagem da função.
Mapa final função do 1º grau	- Reconhece pelo gráfico se a função é crescente ou decrescente. - Identifica a relação entre o sinal do coeficiente angular e o crescimento e decrescimento da função. - Reconhece o coeficiente angular e linear pela equação e identifica seu significado geométrico. - Identifica o significado geométrico do zero da função. - Reconhece que na função do 1º grau a derivada é igual ao coeficiente angular.

Tabela 6.21 – Modificações no conceito de função do 1º grau observadas nos mapas do aluno A_4

	Compreensão revelada pelos mapas com respeito a função do 1º grau
Mapa da atividade 1	- Identifica que a função do 1º grau é um tipo de função. - Identifica que a função de 1º grau pode ser representada por uma reta. - Identifica que o domínio da função de 1º grau é R. - Identifica o coeficiente angular e linear e seus significados geométricos
Mapa da atividade 2	- O aluno reconhece a função de 1º grau por sua expressão algébrica.
Mapa da atividades 4 e 5	- Identifica que a função de 1º grau pode ser representada por uma reta e por equação. - Identifica o significado geométrico do coeficiente angular e no contexto do problema
Mapa final função do 1º grau	-- Identifica que a função pode ser representada por gráfico, tabela e equação. -Sabe a partir da tabela obter o gráfico e a partir do gráfico obter a equação e vice versa. - Identifica o coeficiente linear na equação e reconhece seu significado geométrico. - Identifica o coeficiente angular na equação, sabe como obtê-lo a partir dos dados da tabela e reconhece seu significado geométrico. - Identifica se a função é crescente e decrescente pela tabela. - Identifica as relações do coeficiente angular com o fato da função ser crescente e decrescente. - Identifica o significado geométrico do zero da função e sabe determiná-lo a partir da equação. -Identifica que na função do 1ºgrau o coeficiente angular é a derivada.

Podemos notar pelos dados das tabelas 6.18 a 6.21 que as modificações, em relação ao conceito de função do 1º grau passaram a ocorrer a partir da quarta e quinta atividades. No último mapa, podemos notar que os alunos passam a reconhecer a tabela como representante da função do 1º grau. Isto é um sinal de reconciliação integradora, pois no mapa comum, embora os alunos usassem a palavra tabela nem todos haviam reconhecido a relação dela com a função. Consideramos como possível causa das modificações a oportunidade de refletir novamente sobre os conceitos matemáticos envolvidos nas atividades, proporcionada pela construção do mapa em duplas (que pode também ter proporcionado negociações de significados) e pela elaboração do próprio mapa final sobre função do 1º grau.

Para analisar modificações ocorridas com relação às percentagens ou números associados aos elementos sinalizadores presentes nos mapas referentes à atividade de Modelagem 1 e à atividade de Modelagem 4 e no mapa final sobre função do 1º grau também foi utilizado o teste não paramétrico de Friedmam (VIEIRA, 2003). A opção por um teste não paramétrico foi decorrência das variáveis ordinais e do número pequeno de indivíduos em cada grupo.

A finalidade do teste é determinar a existência ou não de diferenças significativas, entre grupos de dados pareados. É testada a hipótese H0, que afirma que os vários grupos de dados possuem distribuições iguais. Para aplicação do método estatístico utilizou-se o software BioEstat 4.0 e a estatística do teste é dada por:

$$\chi_r^2 = \frac{12}{NK(K+1)} \sum R^2 - 3N(K+1)$$

onde N é o número de linhas (no nosso caso 4); K o número de grupos analisados (no nosso caso 3); $\sum R^2$ é a soma dos quadrados dos postos dos grupos 1,..,K. O resultado obtido é comparado com o valor crítico tabelado (distribuição de qui- quadrado "χ^2") com grau de liberdade de 5% e n=4.

Caso ocorra diferença significativa entre os grupos de dados analisados, o programa adotado realiza também um teste de comparação múltipla indicando entre quais grupos se verifica a diferença significativa.

Tabela 6.22 – Resultados do teste de Friedmam para os mapas envolvendo função do 1º grau

Elementos sinalizador investigado	p	Resultado do teste
Percentagens de equivalência de relações	0,0183	As percentagens do mapa final são significativamente superiores as do mapa 1.
Percentagens de equivalência de relações com poder de transferência	0,0183	As percentagens do mapa final são significativamente superiores as do mapa 1.
Número de relações que sinalizam reconciliação integrativa	0,0025	As percentagens do mapa final são significativamente superiores as do mapa 1.
Número de relações que sinalizam Diferenciação progressiva	p>0,05	Não há diferenças significativas entre os mapas referente a este aspecto.
Percentagens de níveis hierárquicos coerentes	p>0,05	Não há diferenças significativas entre os mapas referentes a este aspecto.

Em relação ao fato de não terem sido encontradas diferenças significativas entre o número de relações que expressam diferenciação progressiva (embora ela tenha ocorrido) gostaríamos de lembrar o que colocam Ausubel, Novak e Hanesian (1980) “Toda reconciliação integrativa resulta no final em uma diferenciação progressiva dos conceitos pré-existentes”. Assim consideramos que reconciliações integradoras, promoveram uma diferenciação do conceito de função do 1º grau.

Podemos considerar que resultados apontados pela tabela 6.22 sinalizam que as atividades desenvolvidas promoveram um avanço no contínuum aprendizagem memorística - aprendizagem significativa, quanto ao conceito de função do 1º grau para os alunos investigados.

6.2.3.2 Análise da modificação dos subsunçores: conceito de função

No decorrer do desenvolvimento das atividades de Modelagem, alguns conceitos foram se modificando na estrutura cognitiva dos alunos, chegando a um significado mais próximo do que é esperado do aluno no contexto da disciplina de Cálculo. Mudanças nos subsunçores que percebemos nos mapas dos alunos são apresentadas nas tabelas 6.23 até 6.26.

Tabela 6.23 – Modificações no conceito de função observadas nos mapas de aluno A_1

	Compreensão revelada pelos mapas com respeito a conceitos que podem ser transferidos para funções em geral (aluno A_1)
Mapa da atividade 1	- Distinção entre variável dependente e independente. - Reconhecer o gráfico como forma de representação da função.
Mapa da atividade 2	- Identifica o tipo de função pela equação. - Reconhece o gráfico como forma de representação da função.
Mapa da atividade 3	- Identifica que a função pode ser representada por gráfico e por equação. - Reconhece que: os valores da variável independente formam o domínio e os valores da variável dependente formam a imagem. - Reconhece que com o auxílio do Excel pode-se a partir da curva de tendência obter o gráfico e a equação.
Mapa das atividades 4 e 5	- O aluno reconhece que a derivada é a inclinação da reta tangente ao gráfico e é dada por $\lim_{h\to 0}\frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$. - O aluno identifica que a derivada é a taxa de variação instantânea de T com relação a ε
Mapa elaborado em dupla	- Reconhece que a função pode ser representada por gráfico e por equação. -Identifica que pela equação é possível saber como será o gráfico no caso de uma função mais simples. - Identifica que pelo gráfico é possível ter uma idéia de como será a equação. e determiná-la nos casos de função de 1º e 2º grau. - Reconhece que o domínio pode ser obtido projetando o gráfico no eixo das abcissas. - Reconhece que a imagem pode ser obtida projetando o gráfico no eixo da ordenadas. - Identifica a relação do domínio com a imagem afirmando que o domínio substituindo na equação obtém a imagem. -Identifica a derivada como taxa de variação instantânea de T em relação a ε. - Identifica que a partir do $\lim_{h\to 0}\frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ é que se extraem as demais regras de derivação. - Reconhece a derivada como a inclinação da reta tangente.
Mapa final sobre o conceito de funções	- Reconhece que a função pode ser representada por gráfico, tabela e equação. - Reconhece que a imagem depende do domínio. - Identifica que domínio pode ser obtido projetando o gráfico no eixo das abcissas e a imagem projetando o gráfico no eixo das ordenadas. - Identifica que pelo gráfico dá para ter uma idéia de que tipo de função pode ser e com o auxilio do computador é possível obter a equação. - Reconhece que a partir da equação se obtém a tabela e a partir da tabela pode-se construir o gráfico. - Identifica que a derivada é a taxa de variação instantânea de y com relação a x. - Identifica que a derivada fornece a inclinação da reta tangente.

Tabela 6.24 – Modificações no conceito de função observadas nos mapas da aluna A_2

	Compreensão revelada pelos mapas com respeito a conceitos que podem ser transferidos para funções em geral (aluna A_2)
Mapa da atividade 1	- Distingue a variável dependente e independente. - Reconhece que a função pode ser expressa por meio de um gráfico. - Reconhece o gráfico como uma forma de expressar a função.
Mapa da atividade 2	- Reconhece que a função possui representação gráfica. - Reconhece algumas funções por suas expressão algébrica.
Mapa da atividade 3	- Identifica a variável dependente e independente. - Reconhece que a função pode ser representada por gráfico e por equação. - Consegue analisar se uma função é decrescente pelo gráfico. - Reconhece que a partir dos dados de uma tabela com o auxílio do Excel é possível obter a curva de tendência, para encontrar qual função representa o fenômeno.
Mapas das atividades 4 e 5	- Identifica que o eixo das abcissas é o eixo da variável independente e o eixo das ordenadas é o eixo da variável dependente. - Identifica que a função pode ser representada por um gráfico. - Reconhece que a derivada de uma função T(ε) é dada por $\lim_{h \to 0} \frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ - Reconhece a derivada como sendo a inclinação da reta tangente e como a taxa de variação instantânea da variável dependente com relação a independente.
Mapa em dupla	- Reconhece que a função pode ser representada por gráfico tabela e equação. - Identifica a possibilidade de a partir da tabela, obter o gráfico e a seguir a equação. - Identifica a possibilidade de, a partir da equação, montar a tabela. - Reconhece que a substituíndo os valores do domínio na equação é possível achar a imagem e vice versa. - Reconhece que os valores do domínio são obtidos *"refletindo o gráfico no eixo x"* e os valores da imagem são obtidos *"refletindo o gráfico no eixo y"*. - Reconhece a derivada como taxa de variação instantânea da variável dependente com relação a independente e como a inclinação da reta tangente ao gráfico.
Mapa final sobre funções	- Reconhece que a função pode ser representada por gráfico, tabela e equação. - Identifica que a partir do gráfico é possível fazer tabela. - Identifica que a partir da tabela é possível montar o gráfico. - Identifica que a partir da equação é possível montar a tabela. - Identifica que, substituindo os valores do domínio na equação é possível obter a imagem. - Identifica o domínio e imagem pelo gráfico. - Identifica que a função pode ter derivada e que essa é a taxa de variação. -Identifica que derivada é a inclinação da reta tangente no gráfico. -Identifica que a derivada é uma função.

Tabela 6.25 – Modificações no conceito de função observadas nos mapas do aluno A_3

	Compreensão revelada pelos mapas com respeito a conceitos que podem ser transferidos para funções em geral (aluno A_3)
Mapa da atividade 1	- Distingue a variável dependente e independente. - Reconhece que a função pode ser representada por um gráfico. - Identifica o zero da função como o valor onde o gráfico corta o eixo da variável independente.
Mapa da atividade 2	- Distingue a variável dependente e independente. - Reconhece que a função pode ser representada por gráfico. - Reconhece algumas funções pela sua expressão algébrica.
Mapa da atividade 3	- Distingue a variável dependente e independente. - Reconhece que a função pode ser representada por gráfico e por equação. - Identifica o domínio e a imagem da função por meio de gráfico. - Identifica do fato de uma função ser decrescente por meio do gráfico.
Mapas das atividades 4 e 5	- Distingue a variável dependente e a independente. - Reconhece que a função pode ser representada por meio de um gráfico e de uma lei de formação (equação). - Descrimina domínio e imagem como atributos da função e os identifica pelo gráfico. - Reconhece que uma função é crescente pelo gráfico. - Identifica a derivada de uma função por T(ε) é dada por $\lim_{h \to 0} \frac{T(\varepsilon + h) - T(\varepsilon)}{h}$. - Identifica a derivada como a inclinação da reta tangente.
Mapa em dupla	- Reconhece que a função pode ser representada por gráfico e por equação. - Identifica que pela equação é possível saber como será o gráfico no caso de uma função mais simples. - Identifica que pelo gráfico é possível ter uma idéia de como será a equação e determiná-la nos casos de função de 1º e 2º grau, para outras funções precisa usar o computador. - Reconhece que o domínio pode ser obtido projetando o gráfico no eixo das abcissas. - Reconhece que a imagem pode ser obtida projetando o gráfico no eixo da ordenadas. - Identifica a relação do domínio com a imagem afirmando que o domínio substituindo na equação obtém a imagem. - Identifica que a derivada é a taxa de variação instantânea de T com relação a ε. - Identifica que a partir de $\lim_{h \to 0} \frac{T(\varepsilon + h) - T(\varepsilon)}{h}$ podem ser obtidas regras de derivação. - Identifica a derivada como a inclinação da reta tangente.
Mapa final sobre funções	- Distingue o domínio como o conjunto dos valores da variável independente e imagem como o conjuntos dos valores da variável dependente. - Reconhece que a imagem pode ser obtida substituindo os valores do domínio na equação. - Reconhece que a partir da tabela e da equação é possível construir o gráfico. - Reconhece que o domínio pode ser obtido projetando-se o gráfico no eixo das abcissas e que a imagem pode ser obtida substituindo-se o gráfico no eixo das ordenadas. - Identifica a derivada como a inclinação da reta tangente. - Identifica a derivada como a taxa de variação instantânea da variável dependente com relação a independente.

Tabela 6.26 – Modificações no conceito de função observadas nos mapas do aluno A_4

	Compreensão revelada pelos mapas com respeito a conceitos que podem ser transferidos para funções em geral aluno A_4
Mapa da atividade 1	- Distingue a variável dependente e a independente. - Identifica o domínio como um atributo da função. - Identifica que a função pode ser representada por gráfico.
Mapa da atividade 2	- Identifica algumas funções pela sua expressão algébrica.
Mapa da atividade 3	- Distingue a variável dependente e a independente. - Reconhece que a função pode ser representada por meio de um gráfico. - Identifica que a função é crescente por meio do gráfico.
Mapa das atividades 4 e 5	- Diferencia a variável dependente e independente. - Identifica que a função pode ser representada por gráfico e equação. - Identifica que a derivada é dada pelo limite $\lim_{h \to 0} \frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$. - Identifica que a derivada com a inclinação da reta tangente. - Reconhece a derivada como taxa de variação instantânea de T com relação a ε.
Mapa em dupla	- Reconhece que a função pode ser representada por gráfico e equação e tabela. - Identifica a possibilidade de a partir da tabela obter o gráfico e a seguir a equação. - Identifica a possibilidade de a partir da equação montar tabela. - Reconhece que substituindo os valores do domínio na equação é possível achar a imagem e vice versa. - Reconhece que os valores do domínio e da imagem podem ser obtidos pelo gráfico. - Reconhece a derivada como a taxa de variação instantânea da variável dependente com relação a independente e como a inclinação da reta tangente ao gráfico.
Mapa final de funções	- Reconhece que a função pode ser representada por equação, gráfico e tabela. - Identifica a possibilidade de a partir do gráfico encontrar a equação e a partir da equação e da tabela construir o gráfico. - Reconhece que ao substituir os valores do domínio na equação se obtém a imagem. - Identifica que a imagem e o domínio podem ser encontrados por meio do gráfico. "*Se você vai jogando o gráfico sobre o eixo x, você acha o domínio" (esta frase do aluno ele fala enquanto após ter desenhado o gráfico de uma parábola, desenha risquinhos que vão do gráfico na direção do eixo). "Se você vai jogando o gráfico sobre o eixo y acha a imagem".(o aluno fala essa frase repetindo o mesmo movimento só que em direção do eixo y).*

Observando as tabelas 6.23 à 6.26 notamos que da primeira para a segunda atividade houveram poucas modificações no conceito de função. Os alunos se limitaram a expressar no mapa os aspectos matemáticos necessários para responder a pergunta do problema, apresentando somente a expressão algébrica da função. Já na terceira atividade as relações expressas sinalizam atenção para o gráfico. Vale lembrar que nesta atividade a construção do modelo foi fortemente influenciada pela curva de tendência. Na quarta e quinta atividades, além das modificações com relação à função do primeiro grau, houve modificação com relação ao conceito de derivada. Ao final os alunos apresentaram a definição, a interpretação como taxa de variação instantânea e a interpretação geométrica como inclinação da reta tangente.

Os dados das tabelas 6.23 até 6.26 também demonstram que as modificações quanto ao conceito de função se intensificaram no mapa em dupla. Quanto ao mapa final para os alunos A_1, A_3 e A_4 apenas uns poucos aspectos que aparecem no mapa final não haviam aparecido em mapas anteriores; já para o aluno A_2 as modificações observadas no mapa final com relação aos anteriores aparecem atingir uma proporção maior de relações expressas. Os dados das tabelas referentes ao mapa final de função parecem apontar para o fato de que trabalhando com os diversos tipos particulares de função os alunos foram estabelecendo novas relações e diferenciando seu conceito inicial de função. O aluno A_1 dá sinais de uma aprendizagem sobreordenada. Questionado, ao final do curso, sobre o fato de ter deixado em branco a questão a respeito de função no pré-teste ele respondeu: “Eu não sabia nada desse negócio de função, domínio e imagem. Aí a gente foi trabalhando as funções como a função do 1º grau, função de 2º grau, função exponencial .... E eu fui aprendendo”.

6.3 ANÁLISE DO CONJUNTO TOTAL DE MAPAS

Para observar o comportamento dos elementos sinalizadores no decorrer das atividades para um mesmo aluno e para o grupo de alunos construímos os gráficos apresentados nas figuras 6.3, 6.4 e 6.5 e também tabelas onde estão representados os resultados obtidos em termos dos elementos sinalizadores por cada aluno em cada atividade. As tabelas 6.27 e 6.28 resumem resultados em relação aos conceitos e às relações estabelecidas, às relações com poder de transferência, hierarquias coerentes com o contexto, número de relações que sinalizam a reconciliação integradora, número de relações que sinalizam diferenciação progressiva. A tabela 6.29 resume os conhecimentos extra-conteúdo.

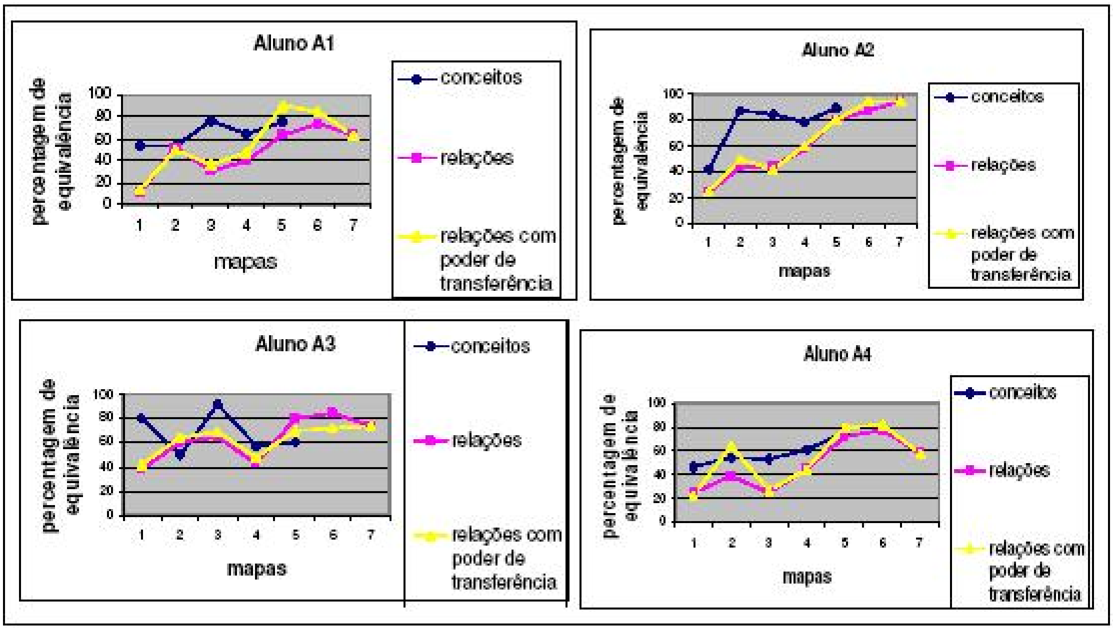


Figura 6.3 – Evolução dos alunos em relação a conceitos, relações e relações com poder de transferência

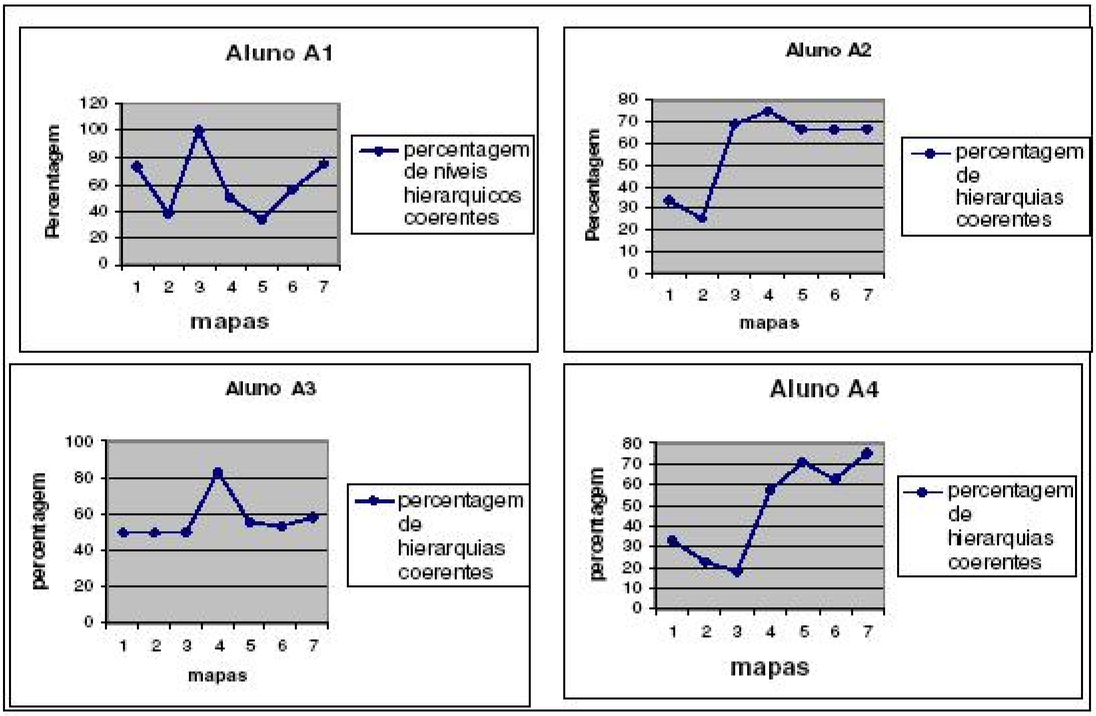


Figura 6.4 – Comportamento dos mapas dos alunos em relação à percentagem níveis hierárquicos coerentes com o contexto da atividade

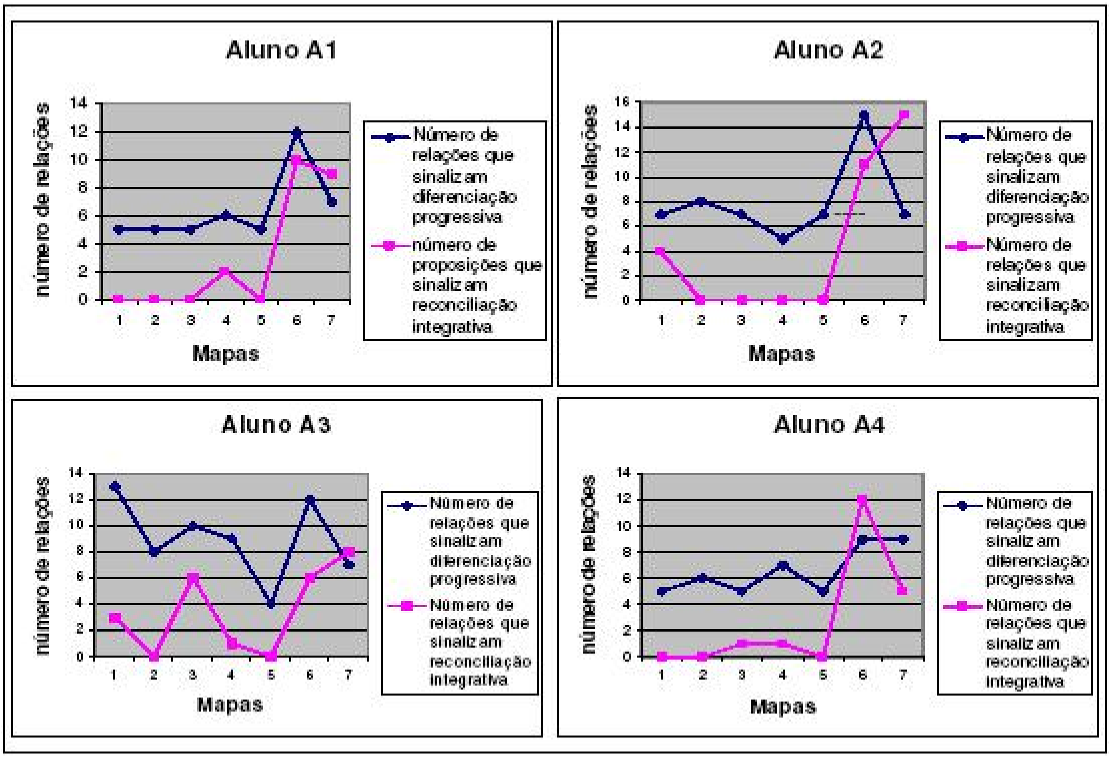


Figura 6.5 – Comportamento dos mapas dos alunos com relação ao número de relações que sinalizam diferenciação progressiva e reconciliação integrativa

Observando as figuras 6.3 ,6.4 e 6.5 notamos que os resultados com relação aos elementos sinalizadores não se mostram crescentes em todos os mapas no decorrer das várias atividades. Os únicos mapas em que podemos verificar tal comportamento são os mapas do aluno A_2, com relação aos conceitos, relações e relações com poder de transferência. Assim consideramos que os resultados obtidos em termos dos elementos sinalizadores não podem ser atribuídos somente a um aperfeiçoamento no processo de mapear os conceitos, mas eles podem possuir relação com a atividade que os originou, bem como com a forma com que cada aluno encarou a atividade. As variações em relação aos alunos e a um mesmo aluno em atividades diferentes, em termos dos elementos sinalizadores reiteram o caráter pessoal da aprendizagem significativa. Consideramos que, como coloca Coll (2002), tais variações são resultado das diferenças das experiências e conhecimentos prévios com os quais cada um enfrenta uma determinada atividade, bem como os interesses que o levam a desenvolvê-la.

Tabela 6.27 – Resumo dos elementos sinalizadores observados no conjunto de mapas dos alunos

	Alunos	Percentagem de equivalência de conceitos (%)	Percentagem de equivalência de relações (%)	Percentagem de equivalência de relações com poder de transferência (%)	Número de relações que sinalizam diferenciação progressiva	Número de relações que sinalizam reconciliação integrativa	Percentagem de níveis hierárquicos corretos em relação ao total de níveis expressos no mapa do aluno (%)
Atividade 1	A_1	53,84	11,11	13,88	5	0	72,72
	A_2	42,24	22,22	22,85	7	4	33,33
	A_3	80,7	37,77	41,67	13	3	50
	A_4	46,15	24,44	22,22	5	0	87,5
Atividade 2	A_1	54,16	52,17	50	5	0	37,5
	A_2	87,5	43,47	50	8	0	25
	A_3	50	60,86	64,28	8	0	50
	A_4	54,16	39,13	64,28	6	0	62,5
Atividade 3	A_1	76,92	30	36,84	5	0	100
	A_2	84,46	45	42,10	7	0	68,75
	A_3	91,66	65	68,42	10	6	50
	A_4	53,84	25	26,31	5	1	87,5
Atividade 4	A_1	65	40	48	6	2	50
	A_2	78,57	57,5	60	5	0	75
	A_3	57,14	42,5	48	9	1	83
	A_4	60,71	45	44	7	1	53
Atividade 5	A_1	76	64	90	5	0	33,33
	A_2	88,88	80	80	7	0	66,66
	A_3	60	80	70	4	0	55,55
	A_4	76	72	80	5	0	53

Tabela 6.28 – Resumo dos elementos sinalizadores observados nos três mapas finais dos alunos

		Relações (%)	Relações com poder de transferência (%)	Numero de sinais de diferenciação progressiva	Número de relações que sinalizam reconciliação integrativa	Percentagem de níveis hierárquicos coerentes (%)
Mapa em dupla	A_1 A3	82,14	80,92	7	12	65
Mapa em dupla	A_2 A_4	67,86	54,54	10	5	43,47
Mapa final sobre função do 1º grau	A_1	75	85,71	12	10	56,25
	A_2	87,09	96,42	15	11	66,66
	A_3	84,5	71,42	12	6	52,94
	A_4	77,41	82,14	9	12	62,5
Mapa final sobre função	A_1	63,15	63,15	7	8	75
	A_2	94,73	94,73	9	15	66,66
	A_3	73,68	73,68	7	8	58,33
	A_4	57,89	57,89	9	5	75

Tabela 6.29 – Aprendizagens extra - conteúdo observadas nos mapas

	INDÍCIOS DE APRENDIZAGEM EXTRA - CONTEÚDO REVELADA PELOS MAPAS CONCEITUAIS				
	Atividade 1	**Atividade 2**	**Atividade 3**	**Atividade 4**	**Atividade 5**
ALUNO 1	-O aluno compreendeu a relação entre variáveis pressão e ocupação no contexto do problema.	- O mapa revela que o aluno tem idéia geral de como é feita a cobrança da ligação. E reconhece algumas das variáveis que a influenciam tais como: horário, distância e tempo de duração. No entanto a explicações da vários tipos de degraus, de tarifas são superficiais, não explicitando quais os critérios utilizados. -A compreensão do processo para determinar a distância geodésica também é superficial, só indicando os conceitos matemáticos e geográficos envolvidos. - O aluno saber determinar o preço da ligação em horário de tarifação normal entre duas cidade do degrau 3, de acordo com a duração da chamada.	-O mapa não apresenta sinais de aprendizagem extra-conteúdo.	-O mapa revela que o aluno compreende como é feito o diagrama tensão deformação e como determinar o módulo de elasticidade a partir do diagrama tensão deformação	O mapa revela que o aluno: -Identifica as variáveis envolvidas no ensaio de tração (força, área da secção, comprimento inicial e final, deformação e tensão) e de uma forma superficial conhece a relação entre elas. -Sabe determinar o módulo de elasticidade e o limite de elasticidade a partir do diagrama tensão deformação.
ALUNO 2	Compreensão da relação entre as variáveis pressão e ocupação no contexto do problema	-. O mapa revela que o aluno tem a idéia geral de como é feita a cobrança da ligação e reconhece algumas das variáveis que a influenciam tais como: horário, distância e tempo de duração. No entanto as explicações dos vários tipos de degraus, de tarifas são superficiais, não explicitando quais os critérios utilizados. -O mapa revela que a aluna identifica o que é um pulso de interurbano. -O aluno saber determinar o preço da ligação em horário de tarifação normal entre duas cidade do degrau 3, de acordo com a duração da chamada. - Sabe determinar o preço de uma ligação em horário de tarifação normal em uma chamada de degrau 3.	O mapa não apresenta sinais de aprendizagem extra-conteúdo.	-As relações estabelecidas revelam que a aluna compreendeu: - Quais são as variáveis envolvidas no ensaio de tração, e a relação entre elas no processo do ensaio. -Como a partir do diagrama tensão deformação pode ser determinado o módulo de elasticidade -A distinção da fase plástica da fase elástica.	-O mapa revela que a aluna sabe como utilizar o método de Johnson para determinar o limite de elasticidade.
ALUNO 3	O mapa não traz indícios a respeito	-O aluno entendeu o processo geral de como é cobrada a ligação interurbana e as variáveis que a influenciam: tempo, distância, operadora, horário e plano. No entanto, ele não explicita quais os tipos de tarifa conforme o horário, e nem discrimina quais são os degraus tarifáricos. - O aluno identifica o que é um pulso. -Sobre o processo de cálculo da distância geodésica a explicação é superficial, só indicando alguns conceitos matemáticos e geográficos utilizados. -Ele sabe determinar o preço da ligação telefônica em horário de tarifação normal em uma chamada do degrau 3	-O mapa não apresenta sinais de aprendizagem extra-conteúdo.	-O mapa revela algum conhecimento sobre o diagrama tensão deformação: quais as variáveis que estão nele representadas e como identificar por meio dele o módulo de elasticidade. -O mapa também revela que o aluno distingue fase plástica da fase elástica.	O mapa revela que: - O aluno reconhece no diagrama tensão deformação a fase plástica e a fase elástica. - Conhece o método de Johnson para determinação do limite de elasticidade.
ALUNO 4	O mapa não traz indícios a respeito	-O aluno identifica algumas das variáveis envolvidas na determinação do valor da ligação telefônica: tempo de conversa, distância geodésica, horário e operadora. -Ele cita os degraus tarifáricos, mas não explica como eles funcionam. -Saber determinar o preço de uma ligação em horário de tarifação normal em uma chamada de degrau 3.	O mapa não apresenta sinais de aprendizagem extra-conteúdo.	-O aluno compreendeu a relação entre as variáveis envolvidas no ensaio de tração. -O aluno sabe determinar o módulo de elasticidade a partir dos dados obtidos no ensaio de tração.	-O mapa revela que o aluno identifica as variáveis envolvidas no ensaio (área da secção, tensão, deformação, força) e a relação entre elas no processo. -Ele sabe distinguir no diagrama tensão deformação a fase plástica e a fase elástica e determinar o módulo de elasticidade e também o limite de elasticidade usando neste último caso o método de Johnson

Nas tabelas 6.27 e 6.28 notamos primeiramente que os maiores percentuais de equivalência em relação aos mapas de referência se referem aos conceitos usados pelos alunos na elaboração dos mapas.

Observando os resultados da tabela 6.27 e 6.28 construímos as tabelas 6.30 e 6.31 referentes às percentagens de equivalência das relações e relações com poder de transferência.

Tabela 6.30 – Variação das percentagens de relações entre os 7 mapas

	Intervalo de variação das percentagens	**Com relação ao mapa anterior os resultados foram**
Mapa 1	inferiores a 25% (Com exceção de A_3)	–
Mapa 2	40% à 60,86%	Todos superiores
Mapa 3	26,31% à 57%	Inferiores (com exceção de A_3)
Mapa 4	40% à 57%	Superiores (com exceção de A_3)
Mapa 5	70% à 90%	Superiores
Mapa 6 (função 1º grau)	75% à 87,09%	Superiores
Mapa 7(função)	57,89% à 94,73%	Inferiores (com exceção de A_2)

Tabela 6.31 – Variação de percentagem de equivalência de relações com poder de transferência nos 7 mapas

	Intervalo de variação das percentagens	**Com relação aos resultados da atividade anterior os resultados foram**
Mapa 1	Inferiores a 22% (com exceção do aluno A_3)	–
Mapa 2	50% a 64%	Superiores
Mapa 3	26,31% a 68,42%	Inferiores (com exceção do aluno A_3)
Mapa 4	44% a 60%	Superiores (com exceção do aluno A_3)
Mapa 5	70 % a 90%	Superiores
Mapa 6 (função do 1º grau)	75 % a 96%	Superiores (com exceção do aluno A_1)
Mapa 7(função)	63,15 % a 94,73%	Inferiores (com exceção do aluno A_3)

Fazendo uma análise dos resultados obtidos levando em consideração as atividades de Modelagem desenvolvidas, notamos que a atividade 1 em que a participação dos alunos foi menor , os resultados foram menos favoráveis que nas atividades seguintes. Já as atividades 2 e 4 em que os alunos participaram da coleta de dados e da obtenção do modelo apresentaram resultados próximos e superiores aos da primeira. Quanto a atividade 3 em que os alunos construíram o modelo , mas não coletaram os dados os resultados embora superiores aos da 1ª atividade, foram menos favoráveis que os da 2ª e da 4ª atividade. Sobre os resultados da quinta atividade gostaríamos de lembrar que, ela foi realizada praticamente na seqüência da 4ª e seus mapas foram elaborados juntos. Consideramos assim que o resultado obtido quanto a estes elementos sinalizadores na quinta atividade não se deve somente a um possível aperfeiçoamento dos alunos no processo de mapeamento, mas revelam que esta atividade proporcionou a construção de relações e relações com poder de transferência em níveis mais próximos daqueles que se pretendia com a atividade desenvolvida. Tal fato pode ser atribuído a vários fatores, tais como: um dos subsunçores principais para esta atividade é o conceito de coeficiente angular e este foi abordado em atividades anteriores; o fato do problema ter sido proposto pelos alunos e estar dentro de sua área de interesse, favorecendo o desejo de aprender significativamente; o significado lógico do conteúdo (o conceito de derivada). Levando em conta essas considerações, os resultados quanto a relações e relações com poder de transferência no conjunto de mapas parecem indicar que em relação a estes dois elementos sinalizadores dois fatores tiveram influência sobre os resultados obtidos: a participação do aluno no processo de resolução do problema e a clareza dos subsunçores necessários para a resolução do problema.

Quanto ao último mapa de funções do 1º grau, as percentagens de relações com poder de transferência parecem apresentar um comportamento quase estável com relação ao mapa anterior, o que pode ser observado pela figura 6.3. Em relação ao último mapa, este comportamento se mantém ou apresenta um pequeno declínio no caso dos alunos A1 e A4.

No que se refere aos níveis hierárquicos, os resultados oscilaram bastante entre os mapas de um mesmo aluno e entre os grupos de mapas das várias atividades, o que pode ser observado tanto pela figura 6.4 quanto pelos dados da tabela 6.27 e 6.28. Não havendo uma atividade em que se pudesse apontar que os resultados em todos os mapas foram superiores aos das demais.

Quanto aos sinais de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa eles variaram bastante nos mapas de um mesmo aluno bem como no conjunto de mapas referentes a uma mesma atividade, como podemos observar pela figura 6.5 . Pela tabela 6.27 podemos perceber que o número de relações tanto as que sinalizam diferenciação progressiva quantoas que sinalizam reconciliação integrativa, apresentam valores baixos no geral nas cinco atividades de Modelagem, só sofrendo um aumento mais expressivo nos mapas em comum e nos dois últimos mapas, o que pode ser observado na tabela 6.28. No que se refere em particular as relações que sinalizam diferenciação progressiva, com exceção do aluno A_3, o maior número de relações foi atingida no mapa final de função do 1º grau. (Para o aluno A_3 o maior valor foi no 1º mapa que também se referia ao conceito de função do 1ºgrau). Assim concluímos que os melhores resultados em termos de reconciliação integradora variaram entre o mapa final de função do 1º grau e o mapa final de funções. Pelas características desses três últimos mapas, consideramos que teve influência sobre o resultado a negociação de significados proporcionada pela construção do mapa em comum e a oportunidade de retomar os conceitos já trabalhados, abstraindo-os do contexto em que foram estudados, o que foi feito por meio da construção de mapas envolvendo somente conceitos matemáticos.

Pela tabela 6.29 podemos observar que as atividades em que os alunos coletaram os dados foram aquelas que proporcionaram aprendizagem extra-conteúdo mais relevante. Isto parece denotar que, para este grupo de alunos, o fato dos dados serem pesquisados por eles, teve influência positiva sobre a aprendizagem de outros conceitos que não os matemáticos, ao passo que, os problemas em que os dados foram fornecidos apresentaram sob este aspecto contribuições menos favoráveis.

6.4 UMA ANÁLISE GLOBAL

Iniciamos nossa pesquisa com o objetivo de investigar o uso dos mapas conceituais na busca de indícios da aprendizagem significativa em atividades de matemática. Para efetuar tal investigação definimos um conjunto de elementos sinalizadores da aprendizagem significativa em atividades de Modelagem. Analisando as informações obtidas, percebemos que os mapas se mostraram eficientes na percepção de tais indícios. A observação dos elementos sinalizadores, possibilitada pelos mapas, nos leva a concluir que para o grupo de alunos investigados, as atividades de Modelagem desenvolvidas parecem ter contribuído para a construção de relações que permitiram aos alunos um avançar no continuum aprendizagem memorística – aprendizagem significativa, em relação aos conceitos de função e função do 1º grau, colaborando para a construção de nova relações, que modificaram o significado dos mesmos conforme podemos observar nas telas 6.18 até 6.26.

Percebemos também que os mapas, além de possibilitar a percepção de tais indícios, permitem observar alguns aspectos particulares com relação à construção de alguns conceitos ocorrida por meio das atividades de Modelagem. Primeiramente gostaríamos de colocar que, quanto ao conceito de função, os resultados parecem apontar para a ocorrência de uma aprendizagem sobreordenada. Trabalhando com os diversos tipos de função os alunos foram abstraindo e aperfeiçoando seu conceito inicial de função. Por isso, como destacam Ausubel, Novak e Hanesian (1980), é importante que um conceito seja abordado em vários contextos diferentes, para que o aluno tenha oportunidade de abstrair os aspectos essenciais. Devido a isto, embora tenhamos particular interesse em utilizar as atividades de Modelagem na introdução de conteúdos, percebemos que mesmo as atividades que abordam conteúdos já trabalhados trazem importantes contribuições para o processo de aprendizagem, pois sempre proporcionam a oportunidade do aluno construir novas relações, avançando em termos da aprendizagem significativa.

Pelos mapas também pode-se notar, influências do processo de Modelagem sobre a construção dos conceitos. Os alunos parecem sempre enfatizar em seus mapas conceitos ligados diretamente a solução do problema, enquanto elementos trabalhados no momento da sistematização dos conceitos nem sempre aparecem.

Quanto à organização dos mapas eles parecem refletir o processo de Modelagem. Os alunos em geral partem das informações extra-matemáticas que contextualizam o problema, identificam as variáveis, apresentam os conceitos matemáticos envolvidos na resolução e por fim apresentam os resultados no contexto do problema.

Quanto à associação entre os mapas e a Modelagem, ela parece apresentar aspectos positivos. Por um lado os alunos apontam que a Modelagem possibilita: trabalhar com problemas de outras áreas, rever a Matemática já estudada, perceber novas áreas onde se pode usar a Matemática, propiciar aplicações do conteúdo teórico visto em sala, o que pode ser observado nas respostas dos alunos:

"Aprender novas áreas que posso trabalhar com matemática" (A$_4$)

"[...] mostra por meio dos modelos a utilização do conteúdo teórico dado em sala. (A$_1$)"

"Aprender resolver problemas de outras áreas, passa a ver a matemática com mais interesse, pois você vê que a matemática se aplica até mesmo no dia a dia" (A$_2$)

"Consegue trabalhar com várias situações tanto da área de mecânica como em outras áreas" (A$_3$)

As respostas parecem apontar tanto para a questão do interesse por aprender, como pela organização de uma espécie de reconciliação integrativa, como já comentamos anteriormente, entre a Matemática e outras áreas do saber, ajudando os alunos a perceberem a existência de relações entre a Matemática e a vida cotidiana e outras áreas do conhecimento.

Por outro lado, a elaboração dos mapas referentes às atividades de Modelagem, representou para alguns alunos uma possibilidade de refletir sobre o processo e aprender mais. Este caráter dos mapas pode ser observado na resposta da aluna A$_2$ sobre as vantagens dos mapas.

"Ajuda a aprender mais ,[...], faz pensar mais sobre o problema."( )

Consideramos que fazer um novo mapa, refletindo somente sob os aspectos matemáticos, parece ter contribuído para que eles abstraíssem dos problemas os conceitos matemáticos estudados, identificassem seus "atributos essenciais" e reorganizassem os mesmos em sua estrutura cognitiva, colaborando assim para um avanço no contínuo aprendizagem significativa aprendizagem memorística. O caráter organizador dos mapas foi percebido pelos alunos, como podemos perceber por algumas respostas apresentadas no questionário final em que perguntamos qual a vantagem dos mapas:

"Aprende mais por que relaciona os conceitos, organiza" (A$_2$).

"Aprende a organizar as matérias"(A$_3$).

"A organização do conteúdo facilita a aprendizagem"(A$_3$).

A elaboração dos mapas ainda permitiu que os alunos construíssem relações que não haviam percebido ao realizar a atividade, como ocorreu na construção do mapa comum, e consideramos também que eles podem ter favorecido a consolidação das relações já estabelecidas.

Atuando como docente da disciplina no curso extra-curricular pudemos acompanhar mais de perto o processo de construção dos conceitos por meio das atividades, perceber lacunas que possibilitaram reorientar o processo, bem como perceber progressos individuais.

Assim para nós os mapas foram importantes auxiliares no processo de orientar o processo com vistas à aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos por parte dos alunos.

Quanto às limitações, o ponto apontado pelos alunos foi a demanda de tempo tanto para realizar as atividades de Modelagem quanto para a elaboração dos mapas. No entanto, essa que parece ser uma limitação é compensada pelos efeitos positivos sobre a construção do conhecimento. No decorrer do processo percebemos que aquela resistência inicial dos alunos em relação à Modelagem e a fazer os mapas, por acharem muito trabalhoso e despenderem muito tempo, foi desaparecendo na medida em que percebiam sua própria evolução e às contribuições que tanto os mapas quanto as atividades de Modelagem, traziam para a sua aprendizagem.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao iniciar nosso trabalho nos propusemos a investigar o uso dos mapas conceituais na busca de indícios da aprendizagem significativa em atividades de Modelagem Matemática, a necessidade de delimitar melhor nosso objetivo levou-nos a reformulá-lo em termos de: identificar nos mapas conceituais elaborados pelos alunos, relações presentes em sua estrutura cognitiva, referentes aos conceitos envolvidos em uma situação-problema trabalhada por meio da Modelagem Matemática; e identificar nestas relações, bem como na forma em que elas se apresentam nos mapas, possíveis indícios da aprendizagem significativa de conceitos envolvidos na situação problema trabalhada por meio da Modelagem Matemática.

Ao findar este trabalho consideramos que identificamos nos mapas dos alunos referentes às atividades de Modelagem, o conjunto de conceitos utilizados e relações construídas. A reflexão sobre referenciais teóricos tanto da Modelagem quanto da aprendizagem significativa, nos permitiram divisar diversas relações entre a Modelagem e a Aprendizagem Significativa, além daquelas que percebíamos no início da pesquisa e nos permitiram definir um conjunto de elementos que podem ser considerados como sinalizadores da aprendizagem significativa em mapas conceituais elaborados pelos alunos após o desenvolvimento de atividades de Modelagem. A investigação desses indícios nos mapas nos permitiu não só identificar possíveis sinais de avanço no continuum aprendizagem significativa – aprendizagem memorística durante o desenvolvimento das atividades de Modelagem, como também possibilitou perceber a influências da Modelagem sobre tais avanços. Para completar, as respostas dos alunos no último questionário bem como nossas observações durante o período de coleta de dados, nos permitiram identificar potencialidades e limitações tanto na elaboração dos mapas, quanto nas atividades de Modelagem.

Os resultados encontrados apontam para o fato de que os mapas se mostraram em nossa pesquisa, instrumentos úteis para a investigação de indícios da aprendizagem significativa em atividades de Modelagem. Os resultados também parecem indicar que a associação, Mapas Conceituais X Modelagem Matemática pode ser frutuosa em termos da busca de propiciar condições que favoreçam a ocorrência da aprendizagem significativa. A Modelagem desperta o interesse dos alunos favorecendo que desejem aprender significativamente; seu caráter de trabalho com resolução de problemas, além de despertar interesse, também favorece, pelo que percebemos, a construção do conhecimento matemático, promovendo um aumento no número de relações e relações com poder de transferência. Os mapas por sua vez, parecem potencializar as características educativas das atividades de Modelagem, promovendo uma maior reflexão sobre os conceitos matemáticos abordados. Em particular os mapas referentes somente aos conceitos matemáticos, parecem ser um passo a mais na direção da abstração dos conceitos matemáticos trabalhados por meio das atividades de Modelagem Matemática. A discussão dos mapas em grupo sobre o problema tem também um caráter socializador do conhecimento e parece promover a negociação dos significados. Eles também, permitiram no caso de nossa pesquisa, que lacunas fossem percebidas e novas atividades fossem elaboradas, reorientando o processo.

Tendo sido o trabalho desenvolvido em pequeno grupo e as análises de caráter qualitativo, os resultados acima mencionados não possuem poder de generalização. Consideramos também que este trabalho não esgota as possibilidades de investigação sobre as relações aos mapas conceituais a Modelagem e a Aprendizagem Significativa, os dados obtidos apontam para outros pontos que podem ser melhor investigados em outras pesquisas. Um deles se refere aos processos de diferenciação progressiva e reconciliação integradora durante o processo de Modelagem.

Nosso trabalho apontou para a ocorrência da aprendizagem sobreordenada em atividades de Modelagem, a partir do estudo de funções particulares os alunos investigados modificaram sua compreensão do conceito de função. Pesquisas futuras acompanhando um grupo por mais tempo, podem investigar a estabilidade da aprendizagem ocorridas e se o aluno com o decorrer do tempo realmente utilizam os conceitos construídos para apoiar outras aprendizagens, realizando assim aprendizagens subordinadas.

Não tendo encontrado na literatura consultada pesquisa semelhante, esperamos que tal trabalho possa trazer contribuições não só para o avanço das pesquisas em relação à Modelagem Matemática , a aprendizagem significativa e os mapas conceituais , mas também possa contribuir para o trabalho dos Educadores matemáticos em sala de aula, objetivando a aprendizagem significativa.

REFERÊNCIAS

AFAMASAGA-FUATA'I,K. *An undergraduate student's understanding of differential equations through concept maps and vee diagrams*. In: FIRST CONFERENCE ON CONCEPT MAPPING, 2004, Pamplona, Espanha. Disponível em: <http://cmc.ihmc.us/CM 2004Programa.html>. Acesso em 15 de jul. 2005.

ALMEIDA, L. M; DIAS, M. R. D. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema*, Rio Claro, Ano 17, n.22, p.19-35, 2004.

AUSUBEL; D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. *Psicologia cognitiva*. Tradução de: Eva Nick et al. 2ª ed. Rio de Janeiro: Editora interamericana, 1980.

BARALOS, G. *Concept mapping as evaluation tool in mathematics.*2002 Disponível em :<http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap 451.pdf>. Acesso em: 5 out. 2005.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 2001. Caxambu. Anais...Caxambú, 2001. 1 CD-ROOM.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática em cursos para não matemáticos. In: CURY, H. N. (Org.). *Disciplinas matemáticas em cursos superiores*. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 63-84.

BARBOSA, J. C. O que pensam os professores sobre modelagem matemática? *Zetétike*, Campinas, v.7, n.11, p.67-85, 1999.

BARRODY, A. J.; BARTELS, B. H. Assessing understanding in mathematics with concept mapping. *Mathematics in Scholl*, 30, nº 3, p.24-27, may. 2001.

BARRODY, A. J.; BARTELS, B.H. Using concept maps to link mathematical ideas. *Mathematics teaching in the middle scholl*, vol. 5, nº9, p.604-609, may. 2000.

BARTELS, B. J. *Examining and promoting mathematical connections with concept mapping.* Tese (Doutorado).1995. University of Illinois at Urbana-Champign. Illinois.

BASSANEZI, R. C*. Ensino –aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. *Modelagem matemática & implicações no ensino e aprendizagem da matemática .* Blumenau: Ed. Furb.,1999.

BISOGNIN, V.; STIELER, M. C. Radiação solar ultravioleta e a modelagem matemática. In: IX ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2006, Caxias do Sul. Anais do IX EGEM. Caxias do Sul: UCS, 2006. 1 CD–ROM.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving modelling, applications, and links to other subjects-state, trends and issues in mathematics, instruction. *Educational Studies in Mathematic,* Netherlands: Klumer Academic Publischers, 22, p. 37-68, 1991.

BOLTE, L. A. Enhancing and assessing preservice teacher's integration and expression of mathematical knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education*, Netherlands: Klumer Academic Publishers, 2 ,p.167-185,1999.

BORBA, M. C.; BIZELLI, M. H. S. S. O conhecimento matemático e o uso de softwares gráficos*. Educação Matemática em revista*, Rio Claro, Ano 6, n. 7, p. 45-54, jul. 1999.

BORBA, M. C.; VILLAREAL, *Humans-with-Media and reorganization of Mathematical Thinking:information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation*. New York:Springer Sience+Bussiness Media, 2005.

BORSSOI, A. H. *A aprendizagem significativa em atividades de modelagem matemática como estratégia de ensino.* 2004. Dissertação (Mestrado)-Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 6, n. 2, p. 91-121, 2004.

BREITEIG, T.; HUNTLEY I., In: KAISER-MESSMER,G. *Teaching and learning mathematics in context*. Chinchester: Ellis Horwood Ltda, 1983. p. 71-90.

BRITO, D. S. *Atribuição de sentido e construção de significados em situações de modelagem matemática*. 2004. Dissertação (Mestrado) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

BRITO, D. S.; ALMEIDA, L. M. O conceito de função em situações de modelagem matemática. *Zetétike*, Campinas, v.13, n.23, p.63-83, jan/jun. 2005.

BUCHWEITZ, B. Aprendizagem Significativa: idéias de estudantes concluintes de curso superior. *Investigação em ensino de ciências*, Porto Alegre, V.6, n.02, p.1-10 ago.2001. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol6/n2/v6_n2_a2.htm.> Acesso em: jan. de 2005.

BURAK, D. *Modelagem matemática: Ações e Interações no Processo Ensino-Aprendizagem. 1992.* Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

BURAK, D. Modelagem matemática em sala de aula. IN: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2004, Anais eletrônicos.....Londrina, 2004. 1CD-ROOM.

CARRAÇA, B. J*. Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática, 1958.

CARREIRA, S. A construção e exploração de modelos matemáticos em situações do mundo real envolvendo trigonometria. *Quadrante,*V.2,nº1,Lisboa,1993.

CHAVES, M. I. A. *Modelando matematicamente questões ambientais relacionadas com água a propósito do ensino-aprendizagem de função na 1ª série do ensino médio*. 2005. Dissertação (mestrado). Núcleo pedagógico de apoio ao desenvolvimento científico, Universidade Federal do Pará, Belém.

COLL, S. C. ET AL. *Psicologia do ensino*. Tradução de: Cristina Maria de Oliveira. Porto Alegre: Artmed, 2000.

COLL, S. C. *Aprendizagem escolar e construção do conhecimento*. Porto Alegre: Artmed, 2002.

CONCEIÇÃO, L.; VALADARES, J. *Mapas conceptuais progressivos como suporte de uma estratégia construtivista de aprendizagem de conceitos mecânicos por alunos do 9º ano de escolaridade- que resultados e que atitudes?*In: IENCONTRO IBERO-AMERICANO SOBRE INVESTIGAÇÃO EM EDUCÇÃO EM CIÊNCIAS, 2002, Burgos, Espanha. Disponível em: <http://www.fc.unesp.br/abrapec/revistas/v2n2a2.pdf>. Acesso em 20 de jul. 2005.

DAMBRÓSIO, U. *Dos fatos reais à modelagem matemática: uma proposta de conhecimento matemático*. Disponível em: <http://vello.site.uol.com.br/modelos.htm>. Acesso em: 05 jun. 2003.

DELLA NINA, C. F. *Modelagem matemática e novas tecnologias: uma alternativa para mudança de concepções em matemática*. 2005. Dissertação (mestrado). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

DIAS, M. R. *Uma experiência com modelagem matemática na formação continuada de professores*. 2005. Dissertação mestrado. Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

ELLIS, G. W.; RUDNITSKY,A. ;SILVERSTEIN, B. Using conceptual maps to enhance understanding in engineering education*. International Journal of Engineering Education*, v.20; nº6, p.1012-1021, 2004. Disponível em: <http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/Pap451.pdf.> Acesso em: 12 de nov. 2005.

FARIA, W. *Mapas conceituais*. São Paulo: EPU,1995.

FERNANDES, E. Fazer matemática compreendendo e compreender fazendo: a apropriação de artefactos da Matemática escolar. *Quadrante,* Lisboa, v.6,n.1,p.49-86, 2000.

FERRUZZI, E. C*. A modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos Superiores de Tecnologia.* 2003. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

FIDELIS, R. *Contribuições da modelagem matemática pra o pensamento reflexivo: um estudo*. 2005. Dissertação (mestrado)-Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

FIORENTINI. D. Brazilian research in mathematical modelling. IN: 8 ºICME-INTERNATIONAL CONFERENCE IN MATHEMATICAL EDUCATION GT.1. 1996, Sevilha ,Espanha, ANAIS.

FONTE, V. *et al*. Enfoque ontosemiótico de las representaciones em educación matemática. IN: IX SIMPOSIO DE LA SIEM, 2005. Córdoba. Disponível em : <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf>. Acesso em: 2 ago. 2006.

FRANCHI, R. H. O. L. *Modelagem matemática como estratégia de aprendizagem do Cálculo diferencial e integral nos cursos de engenharia*. 1993. Dissertação (Mestrado)-Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP Rio Claro, Rio Claro.

FRANCHI, R.H.O.L. Modelagem matemática, interpretação e ação sobre a realidade: um possível passo em direção a transdisciplinariedade. IN: IV CNMEM- CONFERENCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2005, Feira de Santana.Anais. Feira de Santana, 2005. 1CD-ROM

GALBRAITH P.L.; CLATWORTHY, N.J. Beyond standard models, meeting the challenge of modelling. educational. *Studies in Mathematics,* Netherlands: Klume Academic Publishers, 21, p.137-163, 1990.

GOUVEIA, V.; VALADARES,J. Concept maps and the didatic role of assessment. IN: FIRST CONFERENCE ON CONCEPT MAPPING. Pamplona, Espanha, 2004. Dispónível em: <http://cmc.ihmc.us/CM2004Programa.html>. Acesso em :15 de jul. de 2005.

GURUCEAGA, A.; GONZALES, F. M. G. Aprendizage significativo y educación ambiental: análisis de los resultados de una práctica fundamentada teóricamente. *Ensenanza de las ciências*, 22(1), p.115-136, 2004. Disponível em: <http:www.bib.uab.es/pub/ensenanzadelacienciais/02124521v22n1p115pdf.> Acesso em: 2 jun. 2006.

HIBBELER, R.C. *Resistência dos materiais.* Tradução: Joaquim Pinheiro Antunes. 5.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.

IPC - INTERNATIONAL PROGRAMME COMMITTEE . Discussion document of ICMI (International Commission for Mathematical Instruction) study 14- “Application and modeling in mathematics education”. Tradução: Iraci Muller. In: III CNMEM (CONFERENCIA NACIONAL DE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA). 2003. Piracicaba. Universidade Metodista Piracicaba, Anais... Piracicaba, 2003. 1CD-ROOM.

JACONBINI, O, R.; WODEMOTZKI, M.L.L. Mathematical Modelling: a path to political reflection in the mathematics class. IN: 10Th INTERNATIONAL CONGRESS IN MATHEMATICAL EDUCATION, 2004, Copenhagem, Dinamarca. Disponível em: <http://www.icme-organisers.dk/ tsg20/papers.html>. Acesso em: 20 d mai. 2005.

KAISER, G. Development of mathematical literacy-results of an empirical study. IN: 10Th INTERNATIONAL CONGRESS IN MATHEMATICAL EDUCATION, 2004, Copenhagem, Dinamarca. Disponível em: <http://www.icme-organisers.dk/tsg20/papers.html>. Acesso em: 20 mai. 2005.

LEMOS, E. Aprendizagem significativa: estratégias facilitadoras e avaliação. IN: 1ºENCONTRO NACIONAL DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA. 2005, Campo Grande, Anais … Campo Grande: 2005.1CD-ROOM.

LINGEFJÄRD, T.; HOLMQUIST, M. To assess student's attitudes, skills and competencies in mathematical modeling. IN: 10Th INTERNATIONAL CONGRESS IN MATHEMATICAL EDUCATION, 2004, Copenhagem, Dinamarca. Disponível em: <http://www.icme-organisers.dk/ tsg20/papers.html>. Acesso em: 20 mai. 2005.

LINS, R.C. Matemática, monstros, significados e educação matemática. In: BORBA, M. C & BICUDO, M. V. (org.). *Educação matemática pesquisa em movimento,* São Paulo: Cortez editora, 2004*.* p. 92-120*.*

MAASS, K. Barriers to, and opportunities for integration of modelling in mathematics classes-results of na empirical study. IN: 10Th INTERNATIONAL CONGRESS IN MATHEMATICAL EDUCATION, 2004, Copenhagem, Dinamarca. Disponível em: <http://www.icme-organisers.dk/ tsg20/papers.html> Acesso em: 20 mai. 2005.

MALHEIROS. A. P. Contextualizando o design emergente numa pesquisa sobre Modelagem Matemática e Educação a distância. 2006. IN: X EBRAPEM-ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE POS GRADUÇÃO EM EDUCÃO MATEMÁTICA.Disponível em: <http://www.fae.ufmg.br:8080/ebrapem/completos/06-09.pdf>. Acesso em: 8 set. 2006.

MC-LURE, J.; SONAK, B.; SUEN, H. Concept map assessment of classroom learning: reliability, validity and logistical practicality. *Journal of research in science teaching*, Maryland, vol.36, nº4, p.475-492, 1999. Disponível em: <http://www.clab.edc.uoc.gr/hy302/papers%5concept-map-assesment.pdf>. Acesso em 21 abr. 2006.

MOREIRA, M. *Mapas conceituais e aprendizagem significativa*, 1997. Disponível em:<http://www.if.ufrgs/~moreira/mapasport.pdf.> Acesso em: 12 fev. 2005.

MOREIRA, M.A. *Aprendizagem significativa*. Brasilia: Editora da Universidade de Brasília ,1999.

MOREIRA, M.A. *Aprendizaje significativo: teoría y práctica*. Madrid: Visor, 2000.

MOREIRA M. A.; BUCHWEITZ, B. *Novas estratégias de ensino e aprendizagem os mapas conceituais e o vê epistemológico*. Lisboa : Editora Plátanos, 1993.

NISS, M. Applications and modelling in the mathematics curriculum-state and trendes. *International J. Mathe. Educ. Sci. Tecnol*, London , v.18 ,n.4, p.487-505, ,jul-aug.1987.

NOVAK, J. D. & GOWIN. D. B. *Aprender a aprender*. Tradução: Carla Valadares. 2.ed. Lisboa: Editora Plátanos, 1999.

PAULO, I. J. C.; MOREIRA, M. A. Um estudo sobre a utilização dos mapas conceituais como avaliação quantitativa. IN: 1º ENCONTRO NACIONAL DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA, 2005, Campo Grande. Anais...Campo Grande, 2005. CD-ROOM.

RONCA, A. C. C. O modelo de ensino de David Ausubel. In: PENTEADO, W. M. A. (Org.). *Psicologia e Ensino*. São Paulo: Papelivros, 1980.p.59-83.

RUIZ – PRIMO, M.A. *Examining concept maps as an assessment tool*. IN: FIRST CONFERENCE ON CONCEPT MAPPING, Pamplona, Espanha, 2004. Disponível em:< http://cmc.ihmc.us/CM2004Programa.html>Acesso em :15 de jul. de 2005.

RUIZ-PRIMO, M. A. & SHAVELSON, R. J. Problems and issues in the use of concept maps in science assessment. *Journal of research in science teaching*. Maryland, v.33, nº 6, p.569-600, 1996. Disponível em: <http://www.stanford.edu/dept/SUSE/SEAL/Reports_Papers/all.html>.Acesso em:21 abr. 2006

SALVADOR et al. Mapas conceituais e software numérico: experiência no estudo de cálculo numérico. *Tema,* 4, nº1, p.129-138, 2003. Disponível em: <http://www.sbmac.org.br/tema/index.php?seletas/7php>. Acesso em: 10 abr.2005.

SCHMITTAU, J. Uses of concept mapping in teacher education in mathematics. IN: FIRST CONFERENCE ON CONCEPT MAPPING, 2004, Pamplona, Espanha. Disponível em :< http://cmc.ihmc.us/CM2004Programa.html>Acesso em 15 de jul. de 2005.

SILVA, A.G. Modelagem matemática: uma perspectiva voltada para a educação matemática crítica. 2005. Dissertação (Mestrado)- Centro de Ciências Exatas - Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SKOVSMOSE, O. *Educação Matemática crítica a questão da democracia*. Campinas: Papirus, 2001.

SKOVSMOSE, O. Matemática em movimento. In: BORBA, M. C & BICUDO, M. V. (Org.). *Educação matemática pesquisa em movimento.* São Paulo: Cortez editora, 2004. p. 30-54.

SOB – SOCIEDADE BRASILEIRA DE OTORINOLARINOLOGIA. *O som intenso, sem proteção adequada, pode provocar perda de audição. Disponivel* em:<.http://www.saude.auditiva.org.br/noticias/noticias_detalhe.asp?ed=5>Acesso em: 30 set. 2005.

SOUZA, S.A. *Ensaios mecânicos de materiais metálicos. Fundamentos teóricos e práticos*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1982.

TELECURSO 2000. Curso profissionalizante de Mecânica: Ensaio de materiais. São Paulo: Editora Globo. 1996.

VIEIRA, S. *Bioestatística tópicos avançados*. Rio de Janeiro: Editora Campus, 2003.

YOVAL, P.G. et al. *Valoración cuantitativa para evaluar mapas conceptuales*. In: FIRST CONFERENCE ON CONCEPT MAPPING, Pamplona, Espanha, 2004. Disponível em :< http://cmc.ihmc.us/CM2004Programa.html>Acesso em 15 jul. 2005.

ANEXOS

ANEXO 1 – Planejamento das aulas

Fundamentos da Matemática

Fevereiro:

14 Aplicação do questionário. Operações com decimais e notação científica
17 Conjuntos numéricos, intervalos reais, operações com intervalos
21 Atividade de introdução aos mapas conceituais **e** Mapa conceitual conjuntos numéricos.
24 Análise de funções: definição domínio e imagem, construção de um mapa conceitual
3 Análise de funções : determinação de domínio de uma função dada a lei de formação.

Março:

7 Polinômios equações e inequações
10 Trigonometria no triângulo retângulo e não retângulo.
14 Arcos ângulos, medidas em radianos e graus, ciclo trigométrico. Construção do mapa conceitual.
17 Prova
21 Pré teste.

Cálculo Diferencial e Integral I

Março:

24 Funções reais de uma variável: função do 1º grau (modelagem)(mapa conceitual da atividade).
28 Função do 1º grau. Função de 2º grau. Pedir aos alunos que tragam informações a respeito da ligação telefônica interurbana.
31 Função exponencial e logarítmica

Abril:

4 Função modular e de várias sentenças
7 Modelagem da conta telefônica desenvolvida pelos alunos
11 Funções trigonométricas e apresentação do trabalho Modelagem da conta telefônica

OBS:As atividades realizadas em vermelho foram aquelas que estiveram sob nossa direção, as demais estiveram sob a direção do professor da disciplina.

ANEXO 2 – Planejamento do curso extracurricular

Data	Atividade desenvolvida	Tarefa de casa
26 de abril	Trabalho com curva de tendência e resolução do modelo de limite auditivo	Construção de um mapa sobre a atividade.
3 de maio	Visita ao laboratório de resistência dos materiais para assistir um ensaio de tração. Levantamento de situações problema para serem trabalhadas.	Tarefa de casa, pesquisar em livros de ensaios de materiais e resistência dos materias sobre o ensaio de tração e como por meio dos ensaios são determinado o limite de elasticidade . Obter dados sobre um ensaio de tração de algum metal.
10 de maio	Discussão com os alunos a respeito das informações obtidas a respeito do módulo de elasticidade. Inicio do Trabalho sobre o módulo de elasticidade e limite de elasticidade: os alunos trazem informações a respeito do problema, bem como dados obtidos que são discutidas . e iniciamos a construção do modelo	
17 de maio	Continuação da construção do modelo	
24 de maio	Continuação da construção do modelo	
31 de maio	Término da construção do modelo	Elaborar um mapa conceitual sobre a atividade anterior que deve ser feito em power point.
7 de junho	Apresentação do mapa conceitual referente À atividade anterior	
14 de junho	Elaboração do mapa comum referente aos conteúdos matemáticos abordados nos dois mapas construídos pelos alunos	
21 de junho	Resolução de exercícios (anexo 10) em duplas, discussão dos resultados pelo grupo.	
22 de junho	Questionário anexos 6	Elaboração de um mapa conceitual final com respeito de função e função do primeiro grau com conceitos fornecidos

ANEXO 3 – Mapas de referência e mapas elaborados pelos alunos

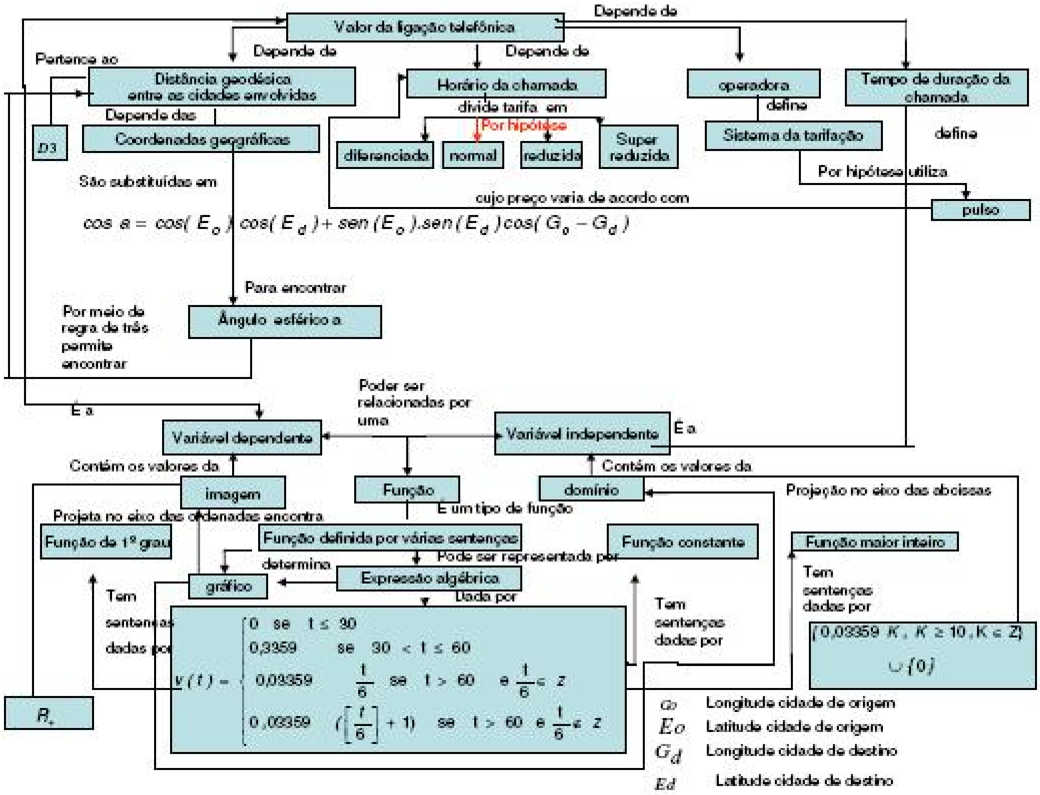


Figura 1 – Mapa de referência da 2ª Atividade de Modelagem

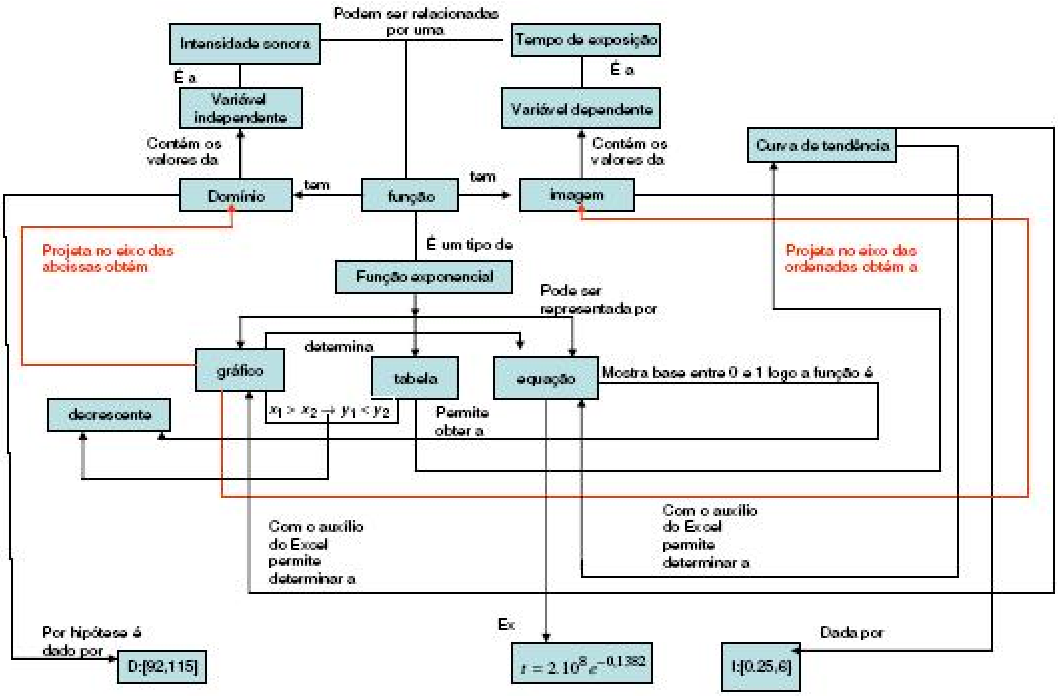


Figura 2 – Mapa de referência da 3ª atividade de Modelagem

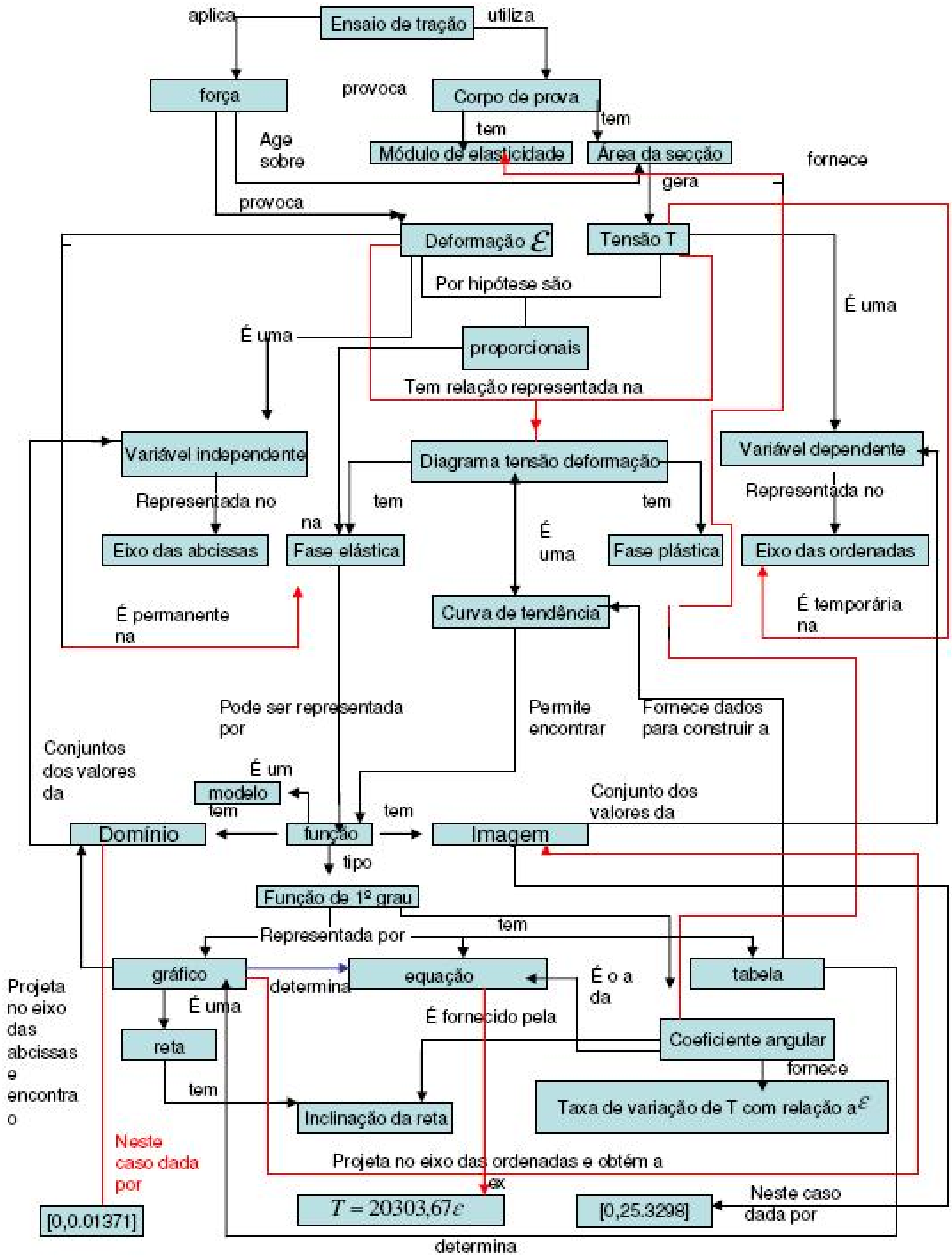


Figura 3 – Mapa de referência da 4ª atividade de Modelagem

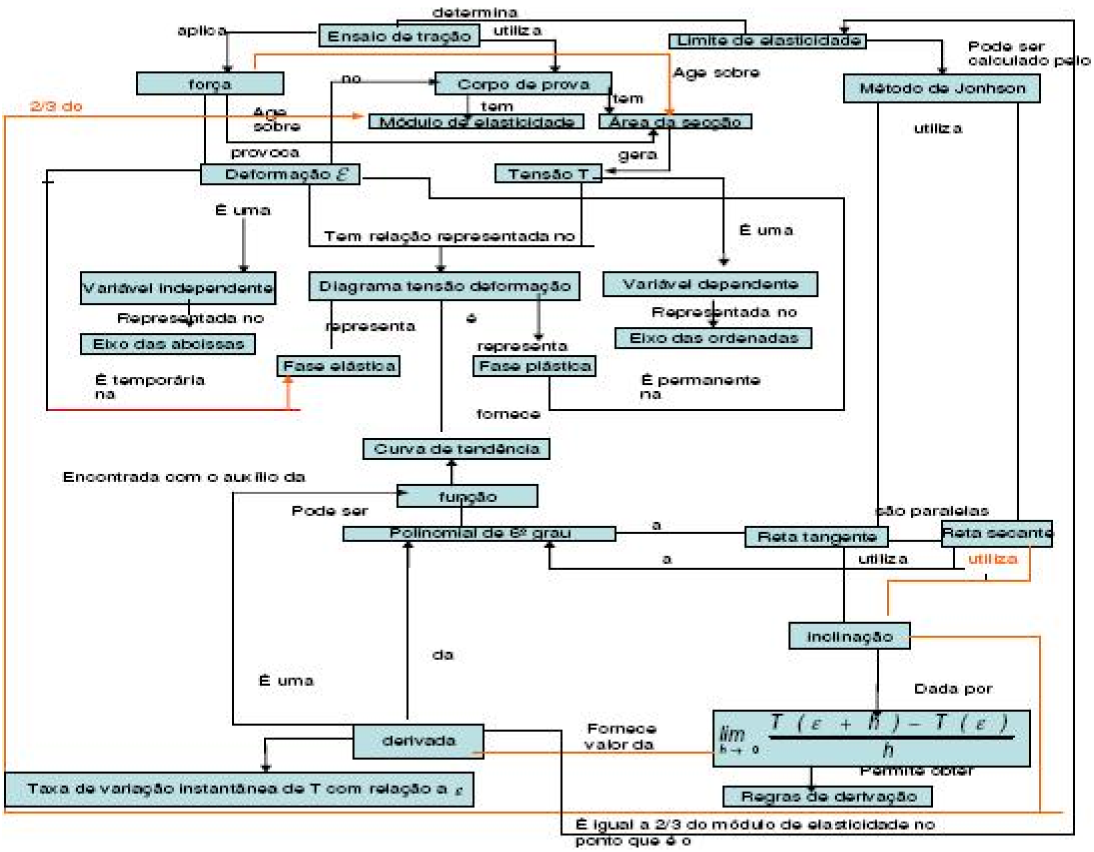


Figura 4 – Mapa de referência da 5ª atividade de Modelagem

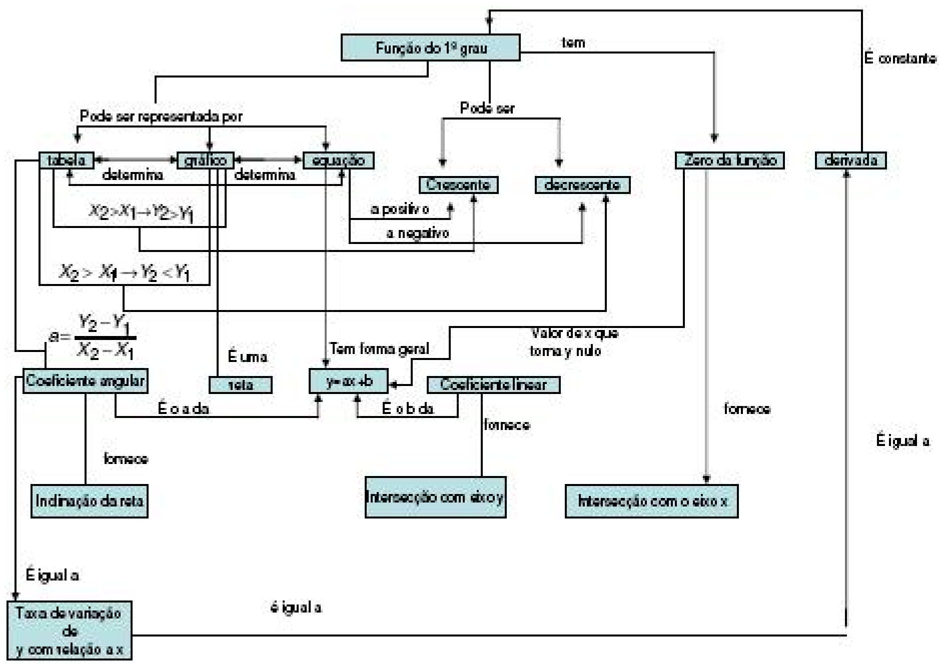


Figura 5 – Mapa de referência a respeito de função do 1º grau

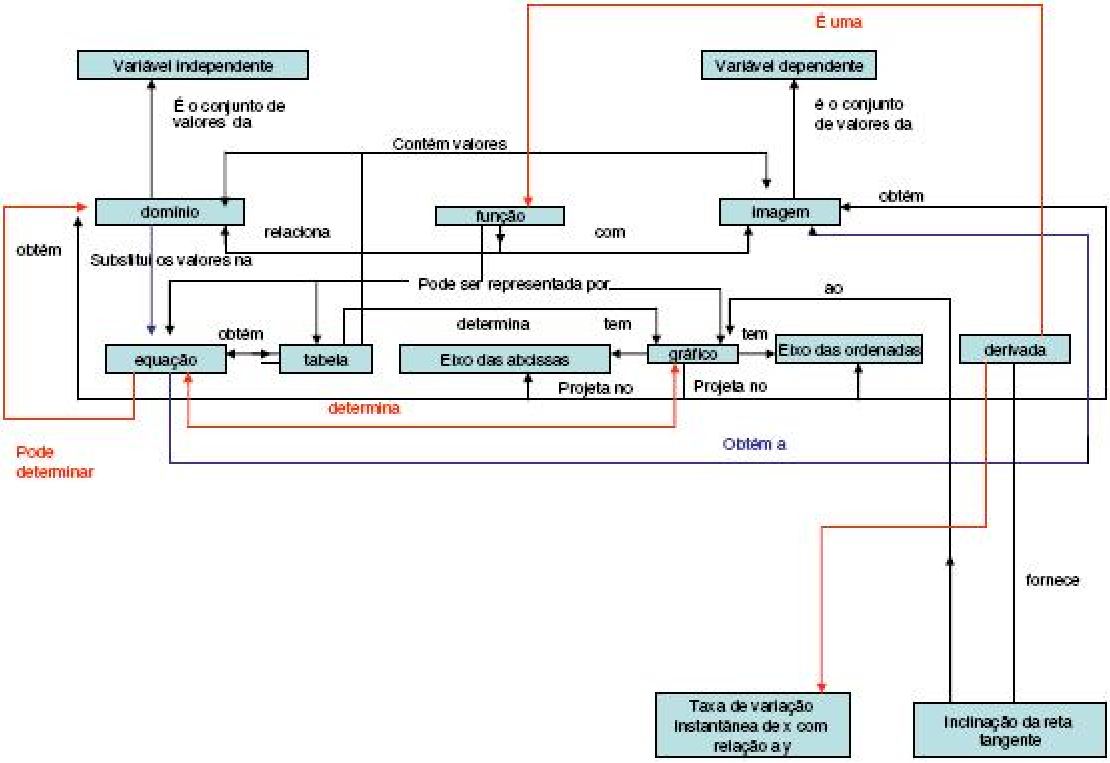


Figura 6 – Mapa de referência sobre o conceito de função

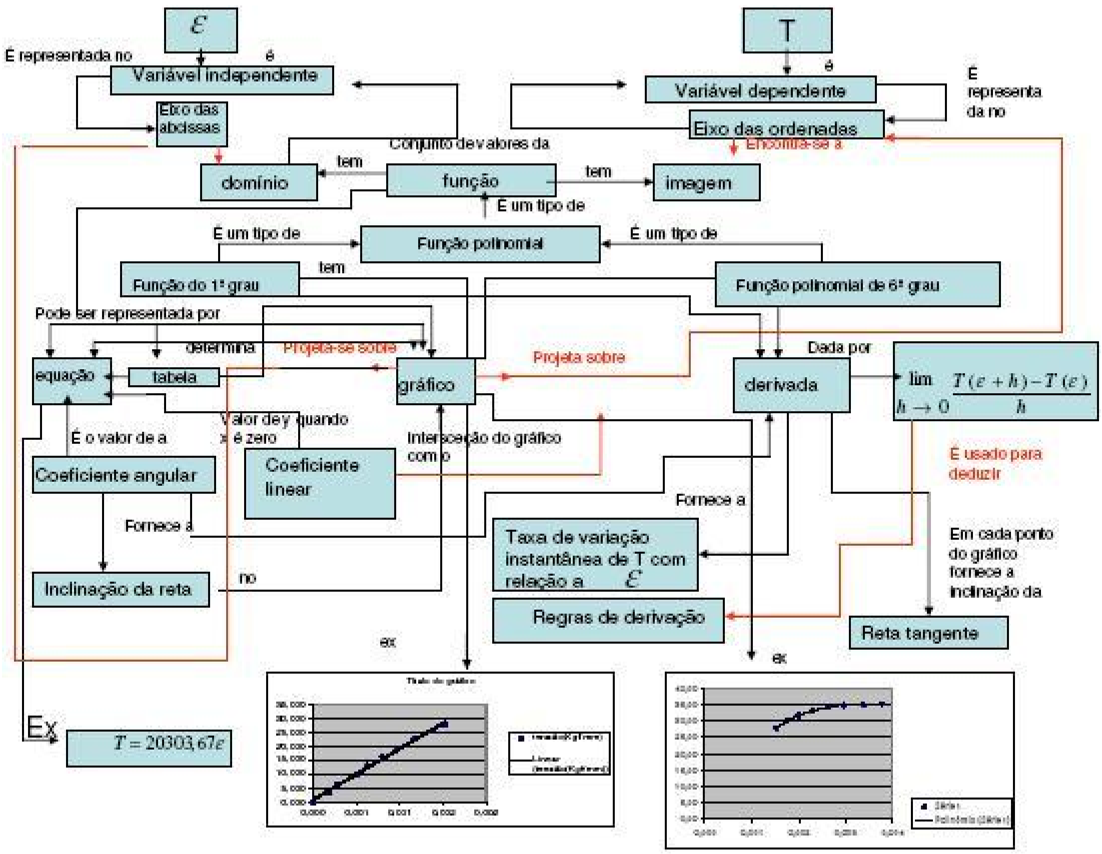
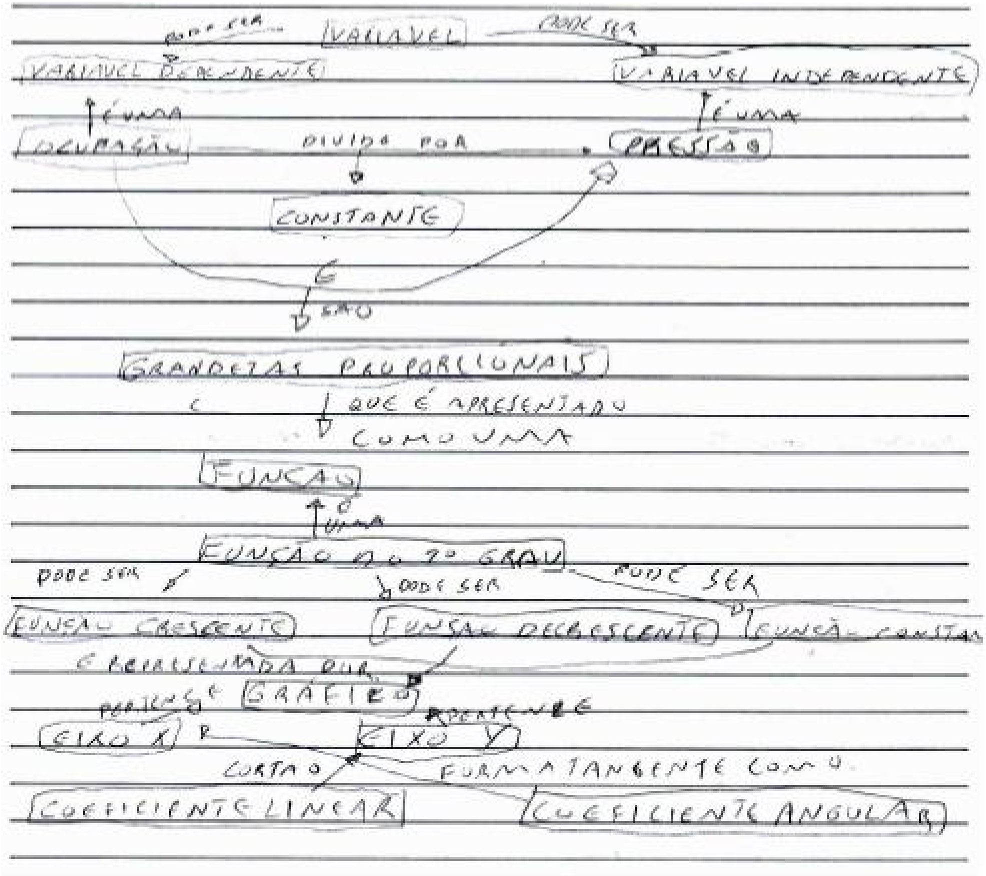
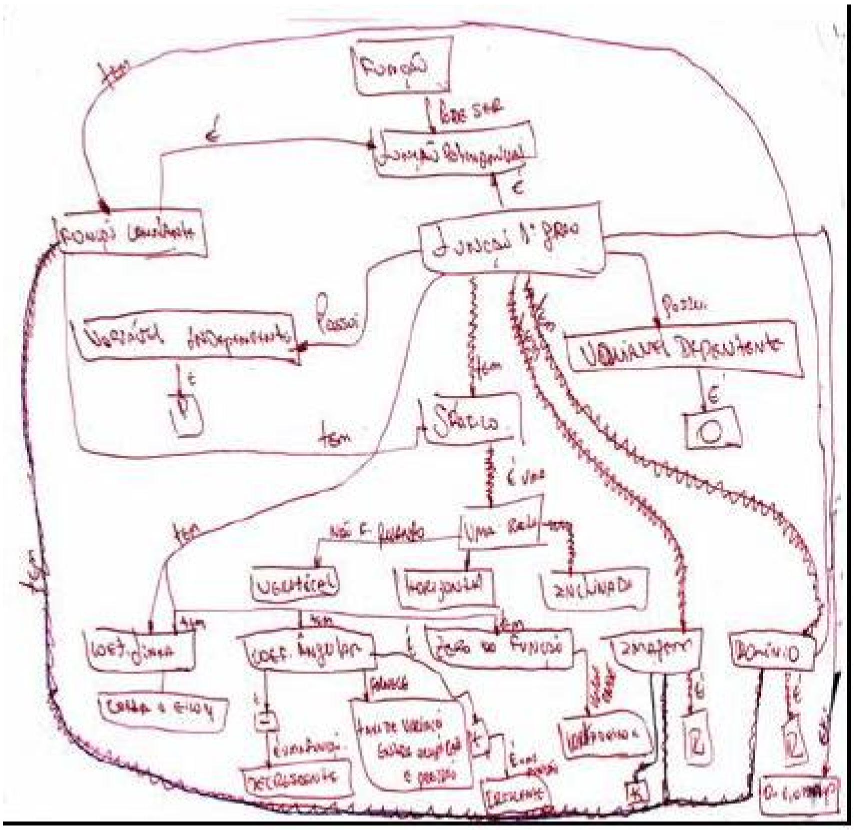


Figura 7 – Mapa de referência do mapa elaborado em duplas



A VARIAVEL PODE SER DEPENDENTE OU INDEPENDENTE, QUE NO PROBLEMA É A OCUPAÇÃO E A PRESSÃO, ONDE QUE SE DIVIDIRMOS TEREMOS UMA CONSTANTE, QUE ENTRE A OCUPAÇÃO E A PRESSÃO SÃO DUAS GRANDEZAS PROPORCIONAIS QUE PODEM SER REPRESENTADOS EM UMA FUNÇÃO, QUE NO EXEMPLO É UMA DE 1º GRAU ONDE DEPENDENDO DOS VALORES TEREMOS UMA FUNÇÃO REPRESENTADA NO GRÁFICO, COMO FUNÇÕES CRESCENTES, DECRESCENTES, CONSTANTES, NO GRÁFICO TEMOS OS EIXOS X E Y, QUE ESTÃO RELACIONADOS COM O COEFICIENTE ANGULAR E LINEAR, POIS O LINEAR É ONDE A RETA CORTA O EIXO Y, E O ANGULAR FORMA UMA TANGENTE COM O EIXO X.

Figura 8 – Mapa elaborado pelo aluno A_1 referente à 1ª atividade de Modelagem



A função pode ser função polinomial, as funções constante e função de 1º grau são funções polinomiais.
As funções tem variáveis dependentes e independentes. No problema em que estudamos tínhamos uma função de 1º grau em que a variável independente é a prestação e variável dependente é a ocupação.
A função de primeiro grau tem gráfico que é uma reta inclinada, tendo imagem e domínio todos R.
Ela tem coeficiente linear que corta o eixo y, coeficiente angular que fornece a taxa de variação entre ocupação e prestação. O coeficiente angular pode ser + ou −, sendo que quando positivo a função é crescente, e negativa a função decrescente. O zero da função é o valor em que corta o eixo x.
A função constante tem gráfico é uma reta horizontal. Tendo domínio todos R e a sua imagem é um número K.
Quando reta for vertical não temos função

Figura 9 – Mapa elaborado pelo aluno A_3 referente à 1ª atividade de Modelagem

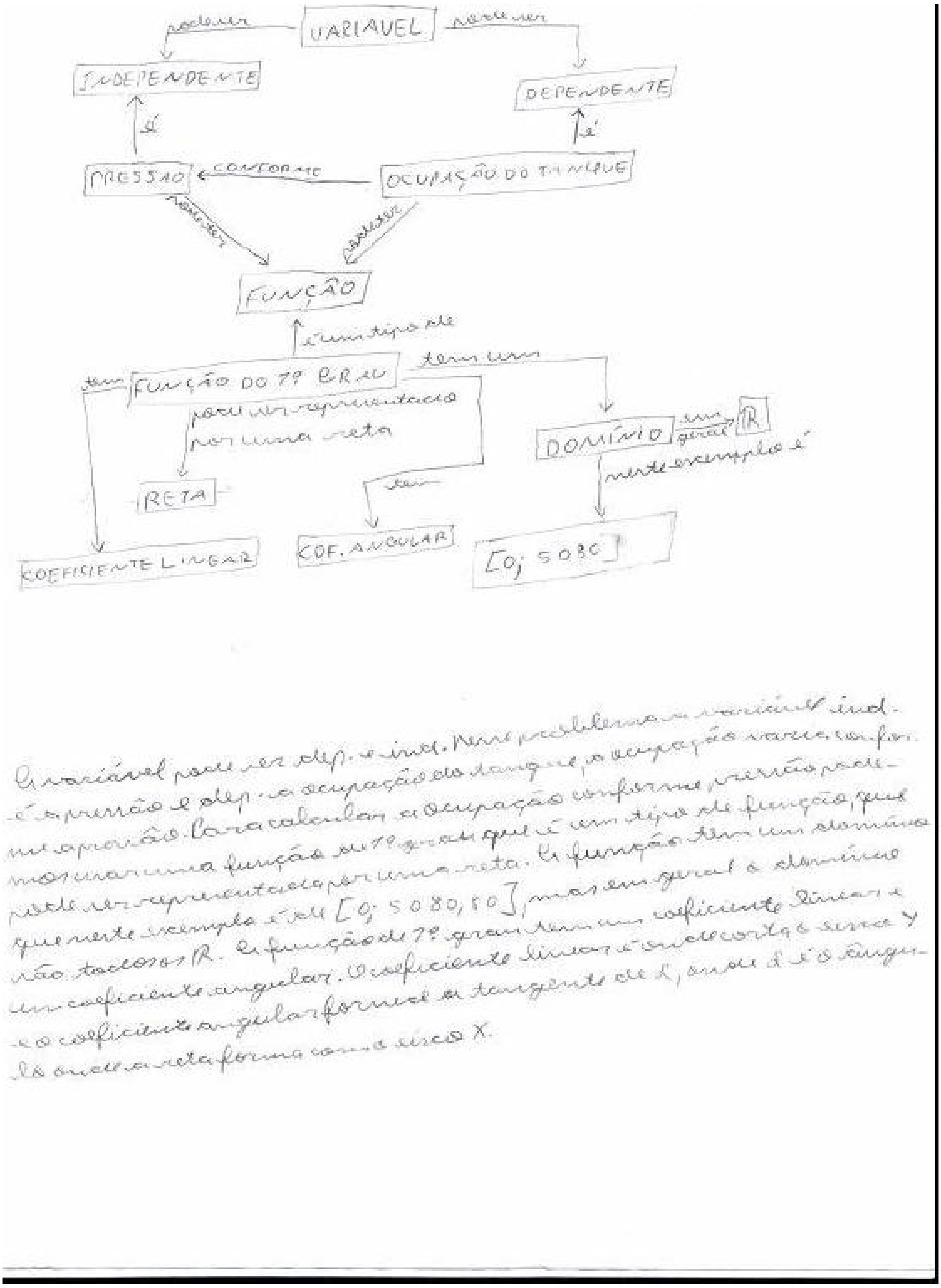
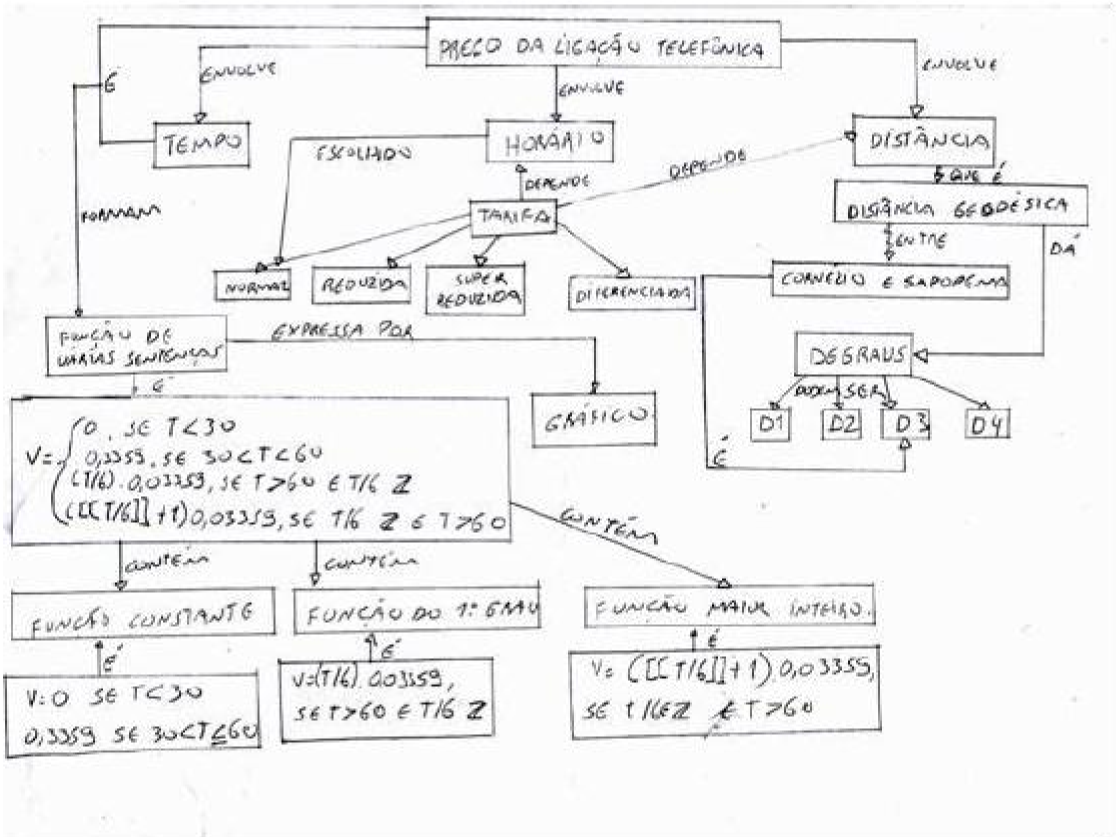
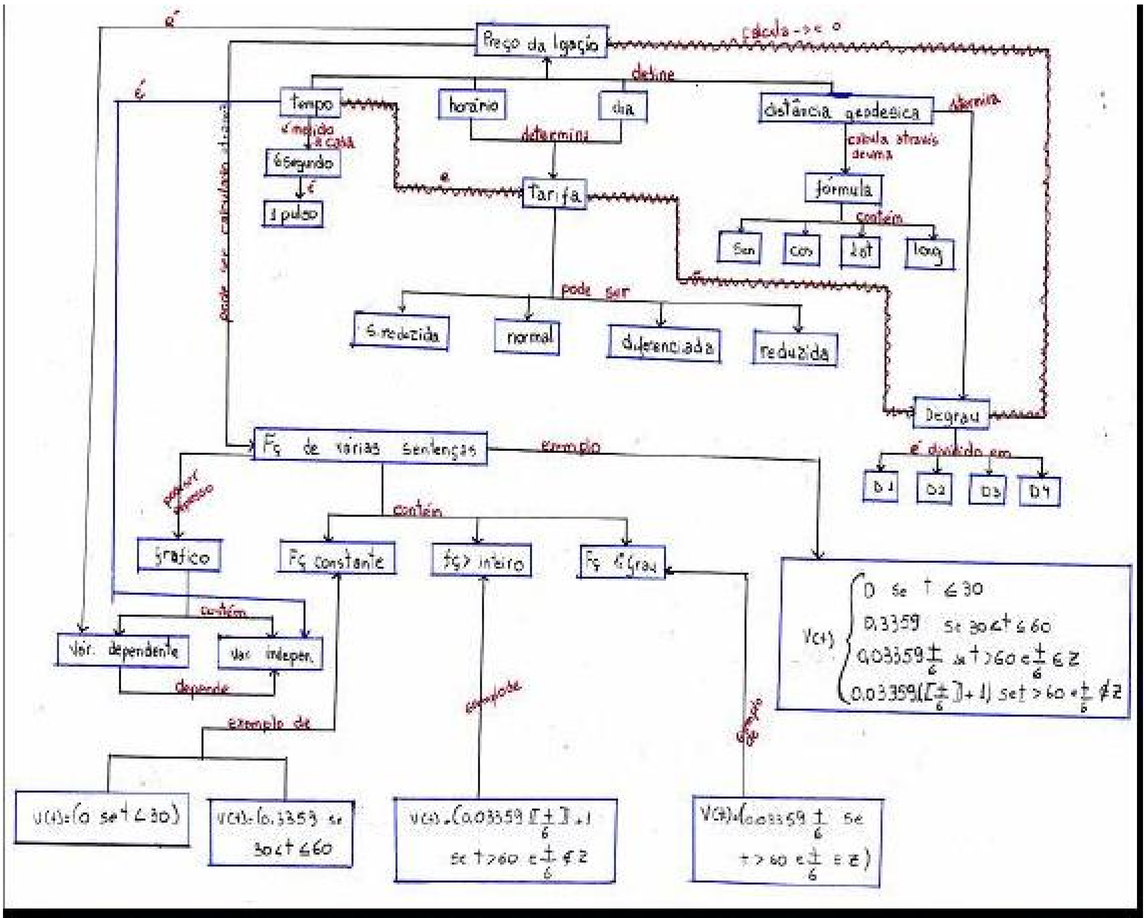


Figura 10 – Mapa elaborado pelo aluno A_4 referente à 1ª atividade de Modelagem



O PREÇO DA LIGAÇÃO TELEFÔNICA ENVOLVE TEMPO, HORÁRIO E DISTÂNCIA. A TARIFA VAI DEPENDER DO HORÁRIO QUE PODE SER NORMAL, REDUZIDA, SUPER REDUZIDA E DIFERENCIADA, NO CASO DESTE TRABALHO FOI ESCOLHIDO A NORMAL, JÁ A DISTÂNCIA É A DISTÂNCIA GEODÉSICA QUE É DIVIDIDA EM DEGRAUS QUE SÃO D1, D2, D3 E D4, QUE PARA ESSE TRABALHO FOI ESCOLHIDO AS CIDADES DE CORNÉLIO E SADOPEMA QUE É O DEGRAU D3. O PREÇO DA LIGAÇÃO ENVOLVENDO O TEMPO DE DURAÇÃO, É DADA PELA FUNÇÃO DE VÁRIAS SENTENÇAS, ONDE: 0, SE $T<30$ (ZERO SE O TEMPO FOR MENOR QUE TRINTA SEGUNDOS), 0,3359 SE $30<T<60$ (0,3359 CENTAVOS SE O TEMPO FOR MAIOR QUE 30 E MENOR QUE 60 SEGUNDOS), $(T/6).0,03359$ SE $T>60$ E $T/6$ Z (TEMPO DIVIDIDO POR 6 VEZES 0,03359 CENTAVOS, SE O TEMPO FOR MAIOR QUE 60 S E TEMPO UM NÚMERO INTEIRO), $([[T/6]]+1).0,03359$ SE $T/6 \notin Z$ E $T>60$, ESTAS FUNÇÕES SÃO EXPRESSAS NO GRÁFICO, E CONTÉM FUNÇÃO CONSTANTE, FUNÇÃO DO 1º GRAU E FUNÇÃO MAIOR INTEIRO.

Figura 11 – Mapa elaborado pelo aluno A1 referente à 2ª Atividade de Modelagem



Através do tempo da ligação, do dia, horário e distancia geodesica que define o preço da ligação.

O tempo é medido e décimo de segundo ou seja 6 segundo que é o mesmo que 1 pulso, tempo minimo é 1 minuto.

A través do dia e horario que descobrimos se a tarifa e normal, diferenciada, Reduzida ou super reduzida.

A Distância Geodesica e calculado através de uma formula que contém seno, cosseno, Lotitude e longitude.

Através da distância geodésica é que descobrimos o Degrau. Conforme a distàcio o Degrau e classificado em Degrau 1, 2, 3, ou 4.

Com o tempo da ligação, a tarifa e o degrau pode calcular o preço da ligação que se da atráves de uma fç de varias sentenças que contem fç constante e fç de maior inteiro.

A fç de varias sentenças pode ser representado por gráfico, que contém variável independente que é o tempo e a variável dependende que é o preço da ligação.

Figura 12 – Mapa da aluna A_2 referente à 2ª atividade de Modelagem

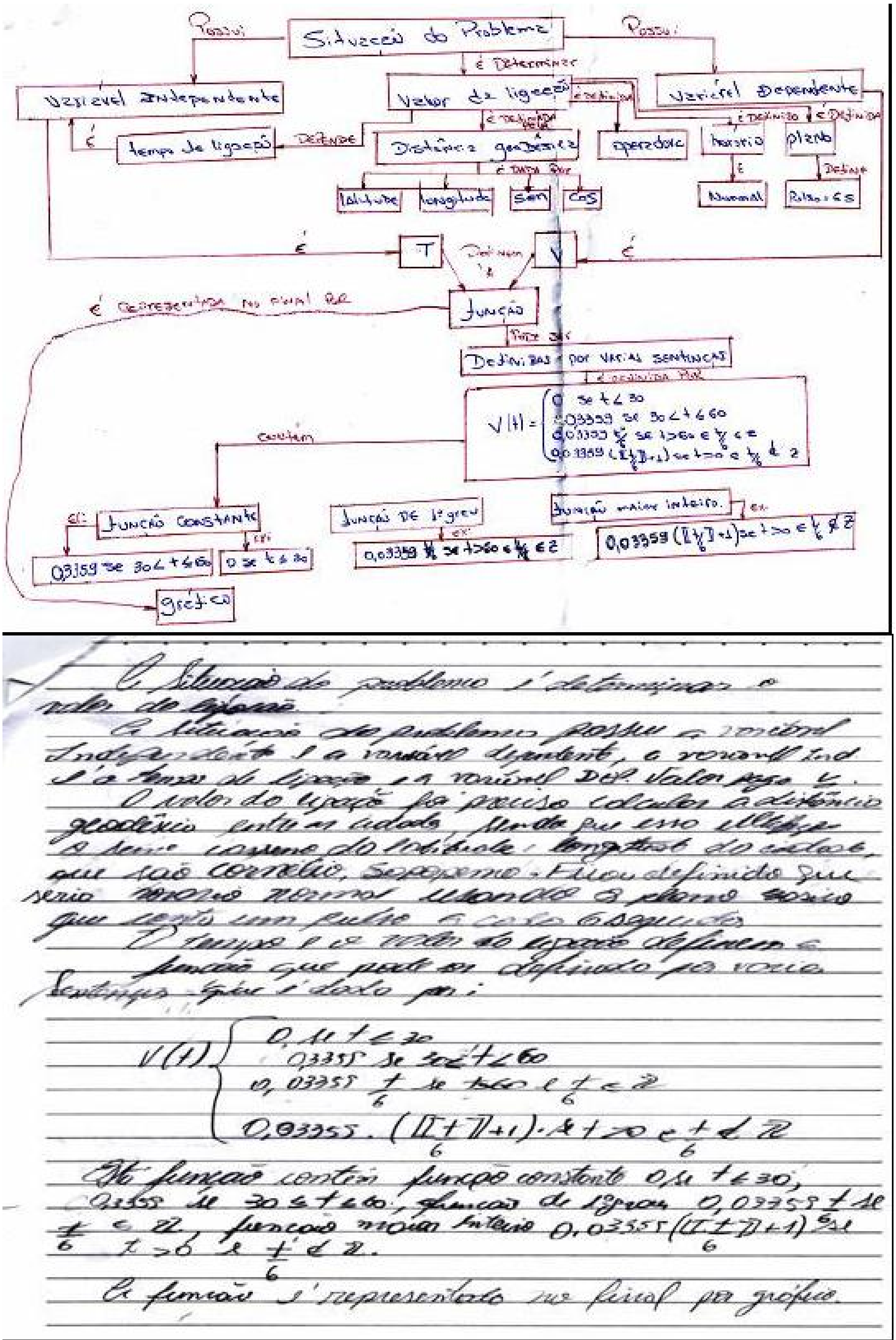


Figura 13 – Mapa do aluno A3 referente à 2ª atividade de Modelagem

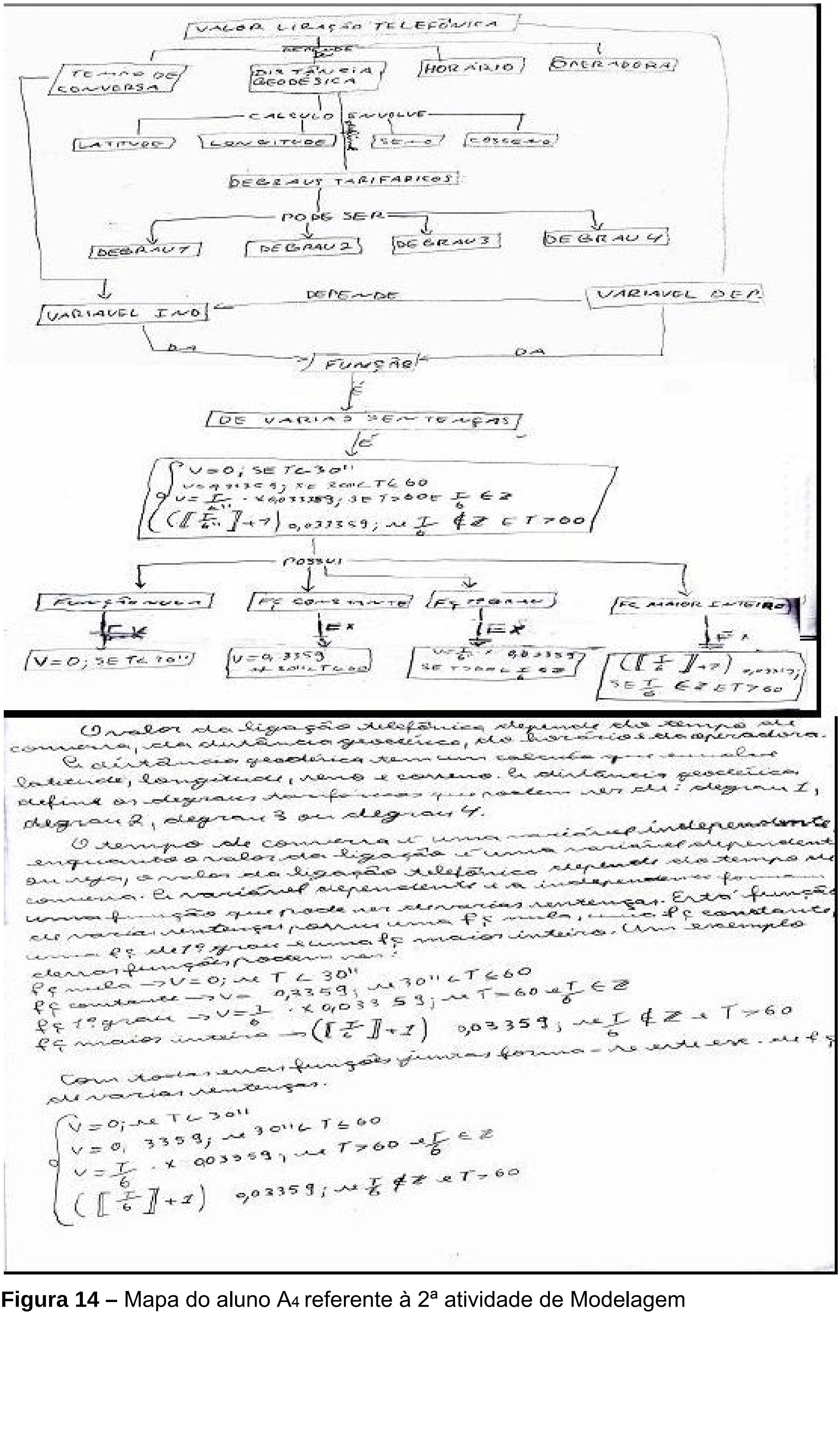
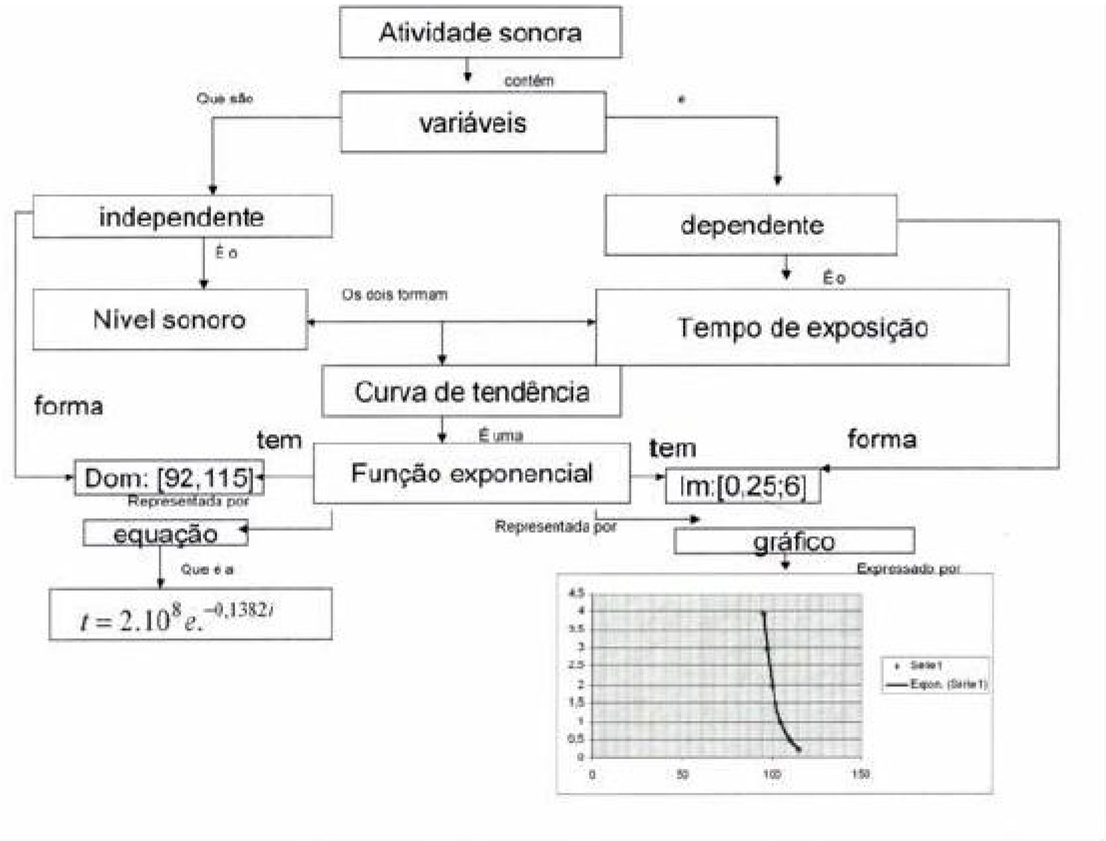


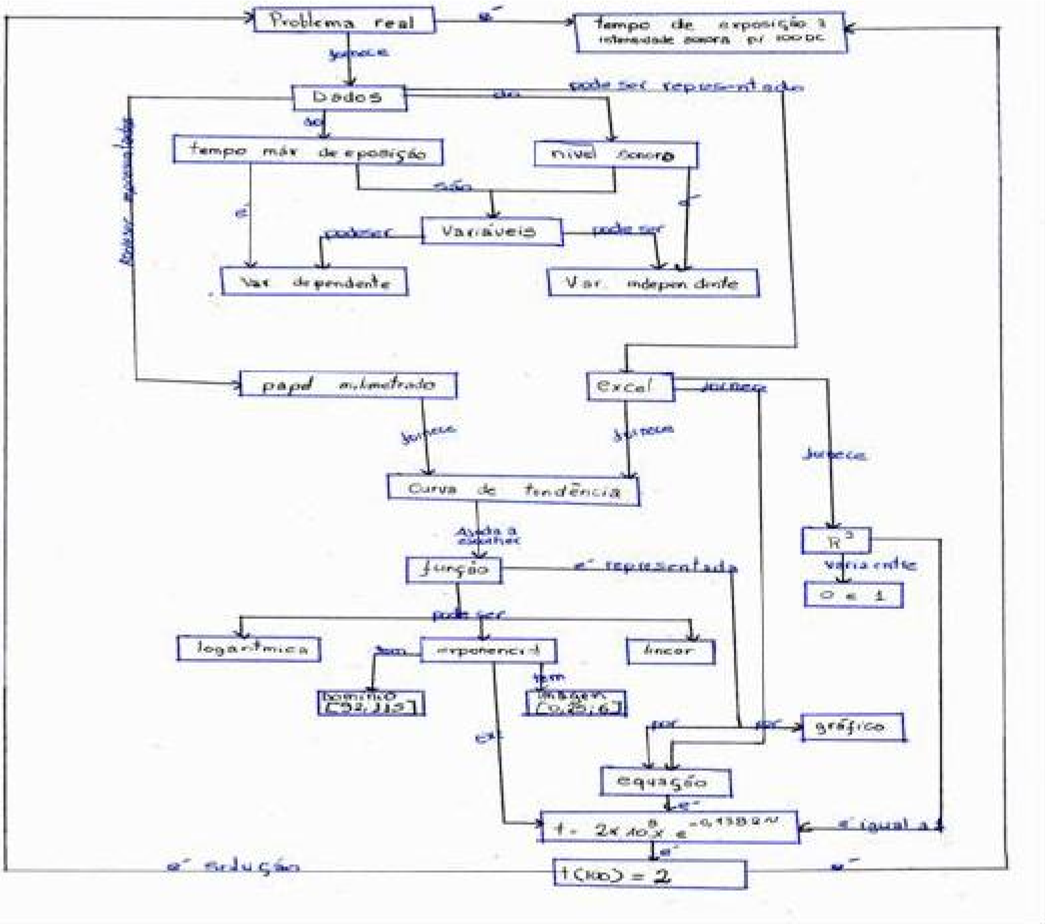
Figura 14 – Mapa do aluno A4 referente à 2ª atividade de Modelagem



ATIVIDADE SONORA

NA ATIVIDADE SONORA TEMOS A VARIÁVEL INDEPENDENTE E DEPENDENTE, A INDEPENDENTE É O NÍVEL SONORO E A DEPENDENTE É O TEMPO DE EXPOSIÇÃO ONDE O NÍVEL SONORO E O TEMPO DE EXPOSIÇÃO VÃO FORMAR A CURVA DE TENDÊNCIA QUE É UMA FUNÇÃO EXPONENCIAL QUE TEM DOMINIO [92,115] E IMAGEM [0,25, 6] E NA FUNÇÃO EXPONENCIAL TEMOS O GRÁFICO QUE É UMA CURVA, E A EQUAÇÃO É DADA POR $T = 2.10^8.e^{-0,1382i}$

Figura 15 – Mapa do aluno A1 referente à 3ª atividade de Modelagem



O problema real é o tempo de exposição à intensidade sonora p/ 100 DC. Esse problema fornece dados que são: tempo máximo de exposição e nível sonoro. O tempo maximo de exposição é uma variável dependente e o nível sonoro é uma variável independente.

Os dados do problema pode ser representado tanto no papel milimetrato, como no excel que fornece a curva de tendência ajudando a escolher a função que melhor se adapta, essa função pode ser logarítmica, exponencial, linear. etc. O excel também fornece o R^2 que varia entre 0 e 1.

A função pode ser representada por gráfico e por equação, a equação desse problema é $t = 1 \times 10^8 \times e^{-0,1382N}$ o R^2 dessa equação é igual a 1, é uma equação exponencial. O resultado dessa equação p/ t(100) = 2 esse é o tempo de exposição à intensidade sonora a 100 DC, sendo também a solução do problema.

Neste caso a função exponencial tem domínio que [92, 115] e imagem que é [0,25; 6].

Figura 16 – Mapa da aluna A_2 referente à 3º atividade de Modelagem

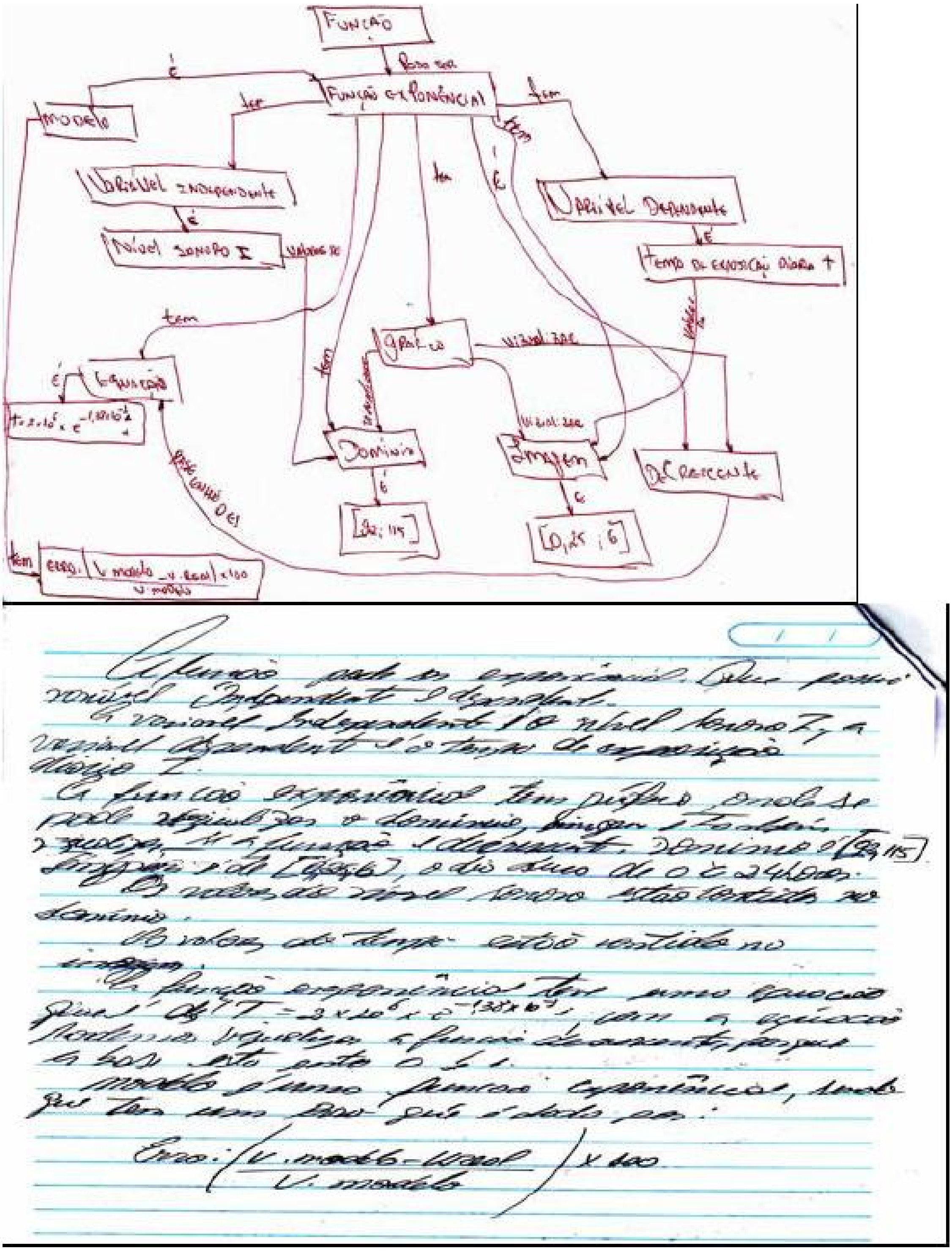


Figura 17 – Mapa do aluno A3 referente à 3ª atividade de Modelagem

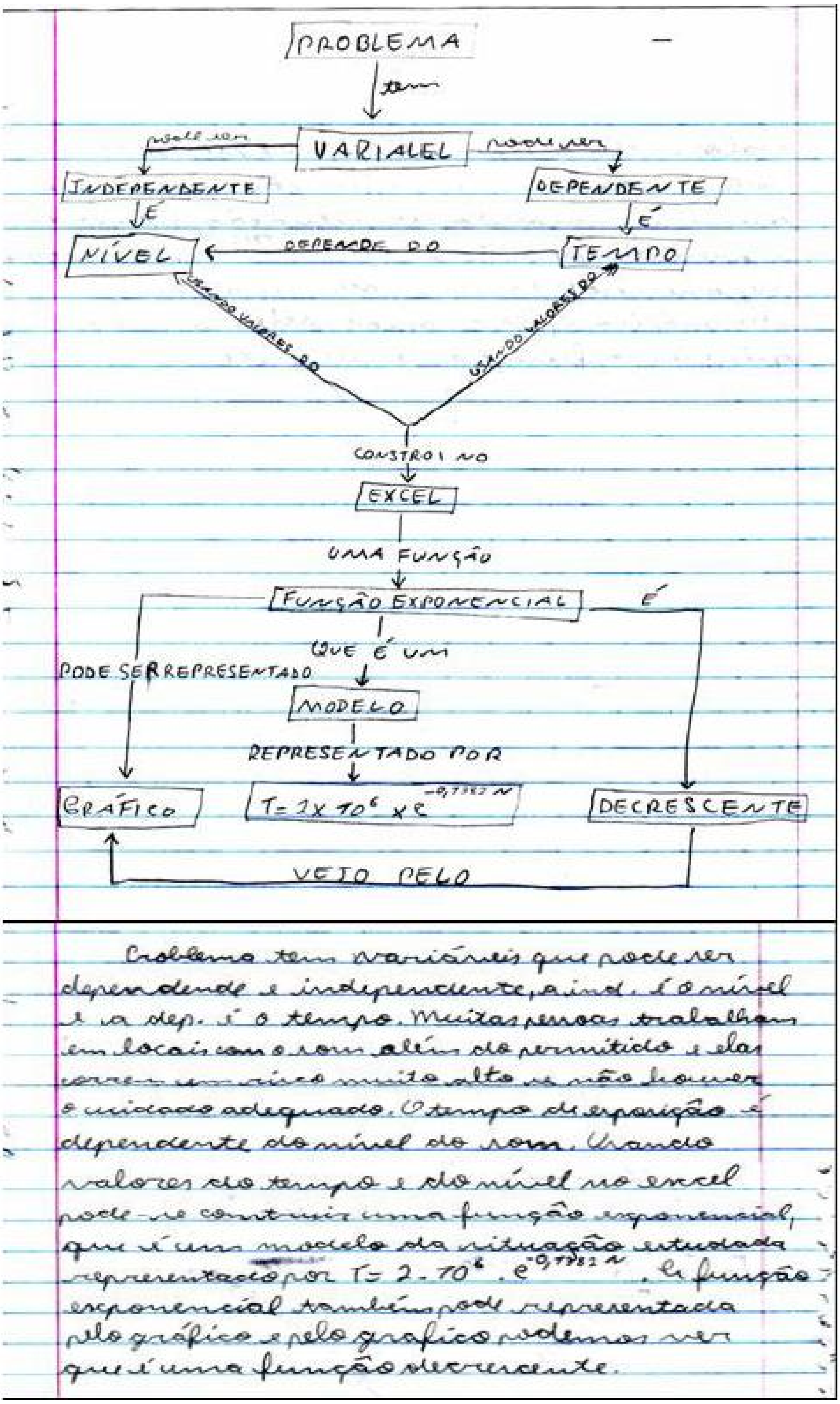


Figura 18 – Mapa do aluno A4 referente à 3ª atividade de Modelagem

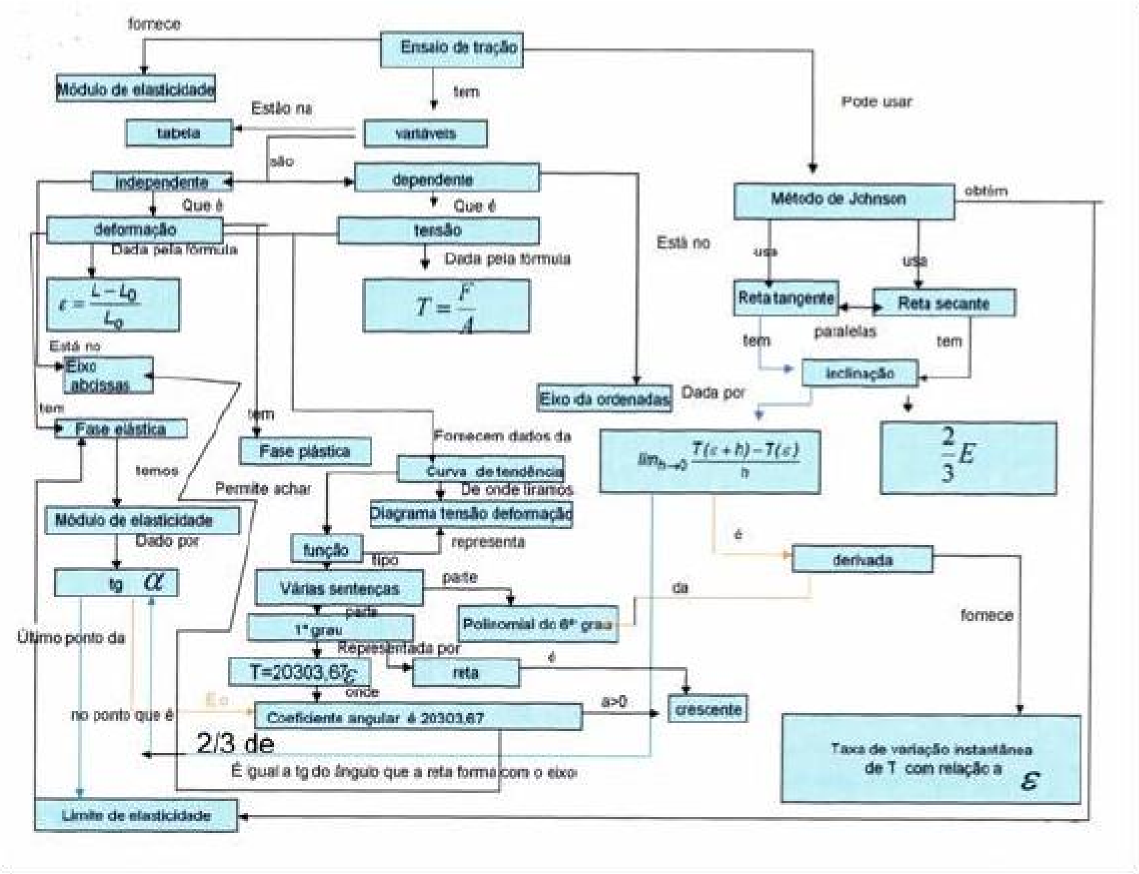


Figura 19 – Mapa do aluno A1 referente à 4ª e à 5ª atividade de Modelagem

“O ensaio de tração fornece o módulo de elasticidade.Temos as variáveis que são independente e dependente que estão na tabela. A dependente que é a tensão dada pela fórmula: tensão é igual a força sobre área da secção do corpo de prova. E a independente que é a deformação que é dada por deformação é igual a comprimento final do corpo de prova, menos o comprimento inicial dividido pelo comprimento inicial. A deformação está no eixo das abcissas e a tensão está no eixo das ordenadas. Isto no diagrama tensão deformação.

Bom, a deformação e a tensão fornecem os dados da curva de tendência. De onde tiramos o diagrama tensão deformação. A curva de tendência permite achar a função que foi representada no diagrama tensão deformação .A função é de várias sentenças. Uma parte é polinomial e a outra é de 1º grau. A de primeiro grau é representada por T=20303,67 ε e o gráfico é uma reta o coeficiente angular é 20303.67. Pelo coeficiente angular é positivo dá para ver que a função vai ser crescente. O coeficiente angular também dá o módulo de elasticidade é o valor de tg α. O α é o ângulo que a reta forma com o eixo x. O método de Johnson nós também usamos no ensaio de tração. O método de Johnson obtém o limite de elasticidade. No método de Johnson nós usamos uma reta tangente e uma reta secante. Elas são paralelas. Primeiro eu traço a secante. A inclinação da secante é igual a dois terços do módulo de elasticidade. A inclinação da tangente é dada por $\lim_{h\to 0}\frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$, que dá derivada da função polinomial do 6º grau .Eu faço a derivada igual a 2/3 de tg α e encontro o ponto onde passa a reta tangente, que é o limite de elasticidade. O limite de elasticidade é o último ponto da fase elástica." (Aluno A_1).

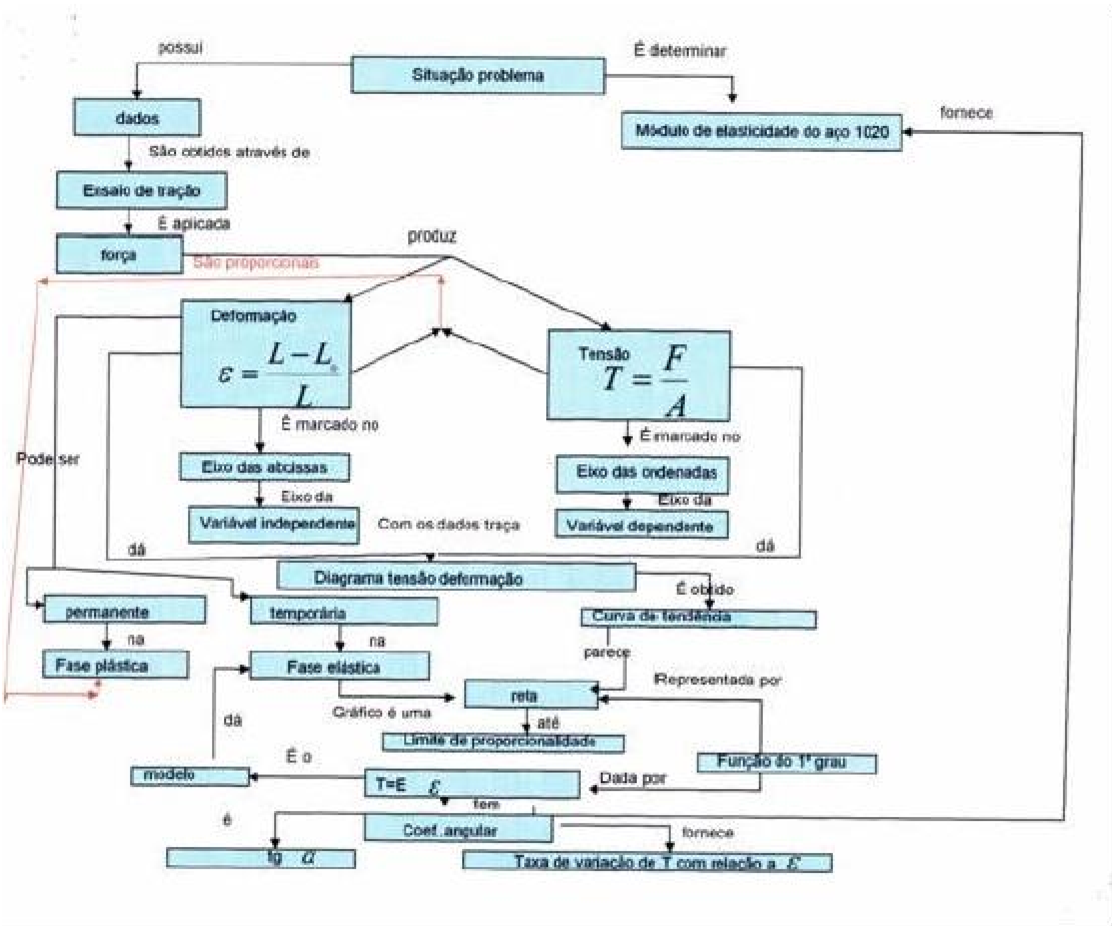


Figura 20 – Mapa da aluna A_2 referente à 4ª atividade de Modelagem

"Situação problema é determinar o módulo de elasticidade do aço 1020. Esta situação possui dados que são obtido através do ensaio de tração.Neste ensaio é aplicada uma força.Esta força produz tensão e deformação. A tensão é marcada no eixo das ordenadas, que é o eixo da variável dependente e a deformação no eixo das ordenadas que é o eixo da variável independente. A deformação pode ser tanto permanente como temporária. Ela é permanente na fase plástica e temporária na fase elástica. Com os dados da tensão e da deformação traçamos o diagrama tensão deformação e obtém-se a curva de tendência. Esta curva de tendência parece uma reta até o limite de proporcionalidade. A função do 1º grau é representada por uma reta. A função do 1º grau é dada por T= $E\varepsilon$ e este é o modelo da fase elástica. A T= E ε tem coeficiente angular que fornece a taxa de variação de T com relação a ε e é igual a $tg\alpha$. Este é o coeficiente angular".

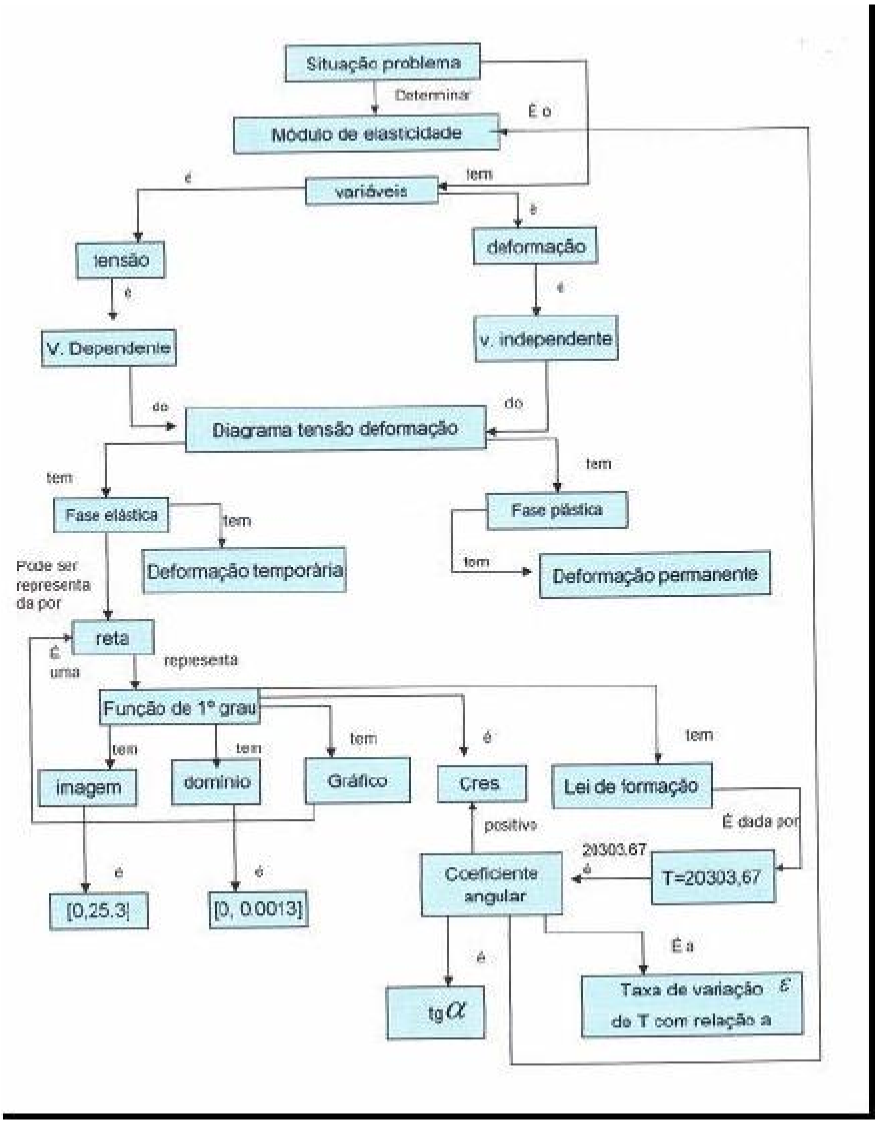


Figura 21 – Mapa do aluno A3 referente à 4ª atividade de Modelagem

A situação problema é determinar o módulo de elasticidade. Ela tem variáveis: a tensão que é a variável dependente do diagrama tensão deformação e a deformação que é a variável independente do diagrama tensão deformação. No diagrama tensão deformação nós temos a fase elástica que tem deformação temporária e a fase plástica que tem deformação permanente. A fase elástica pode ser representada por uma reta, que representa uma função do 1º grau. Essa função tem imagem que é [0,25.3] e domínio que é [0,0.0013]. A função também tem gráfico que no caso como é de primeiro grau é uma reta. Pelo gráfico dá para ver que a função é crescente. A função tem também lei de formação dada por T=20303,67 ε. Pela lei de formação dá para ver que o coeficiente angular é positivo. Este é outro jeito de ver que a função é crescente. O coeficiente angular é o valor de tg α. O α é o ângulo que a reta forma com o eixo x. O coeficiente angular também é a taxa de variação de T com relação a ε." (Aluno A_3)

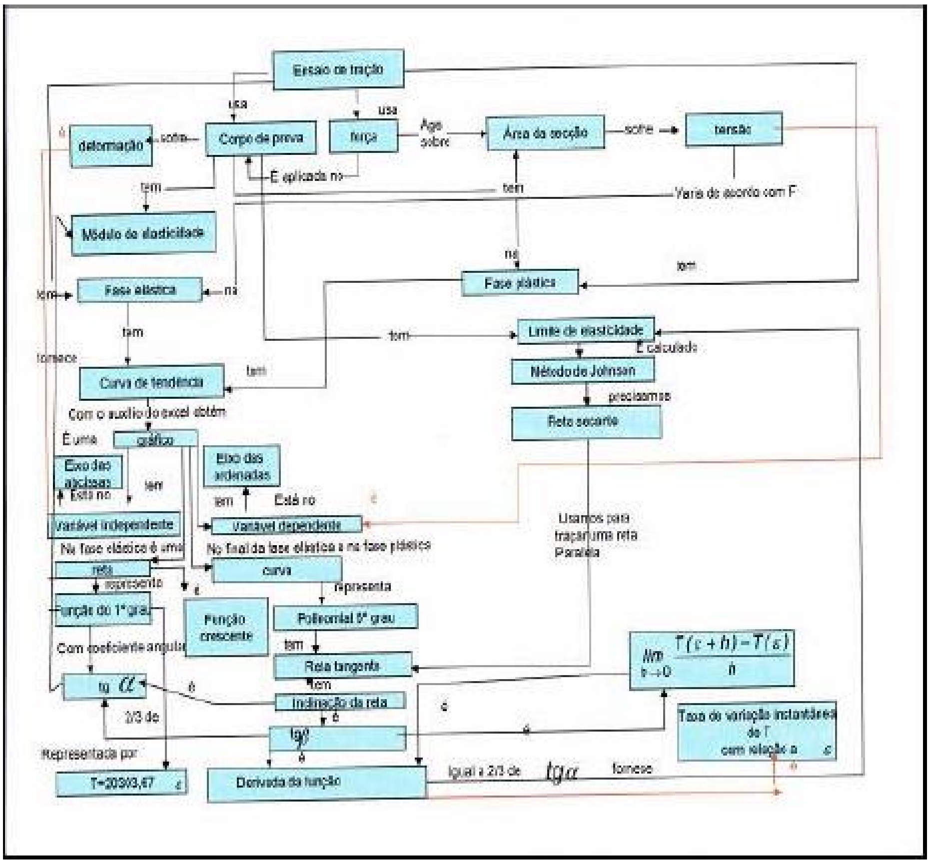


Figura 22 – Mapa do aluno A_4 referente à 4ª e 5ª atividades de Modelagem

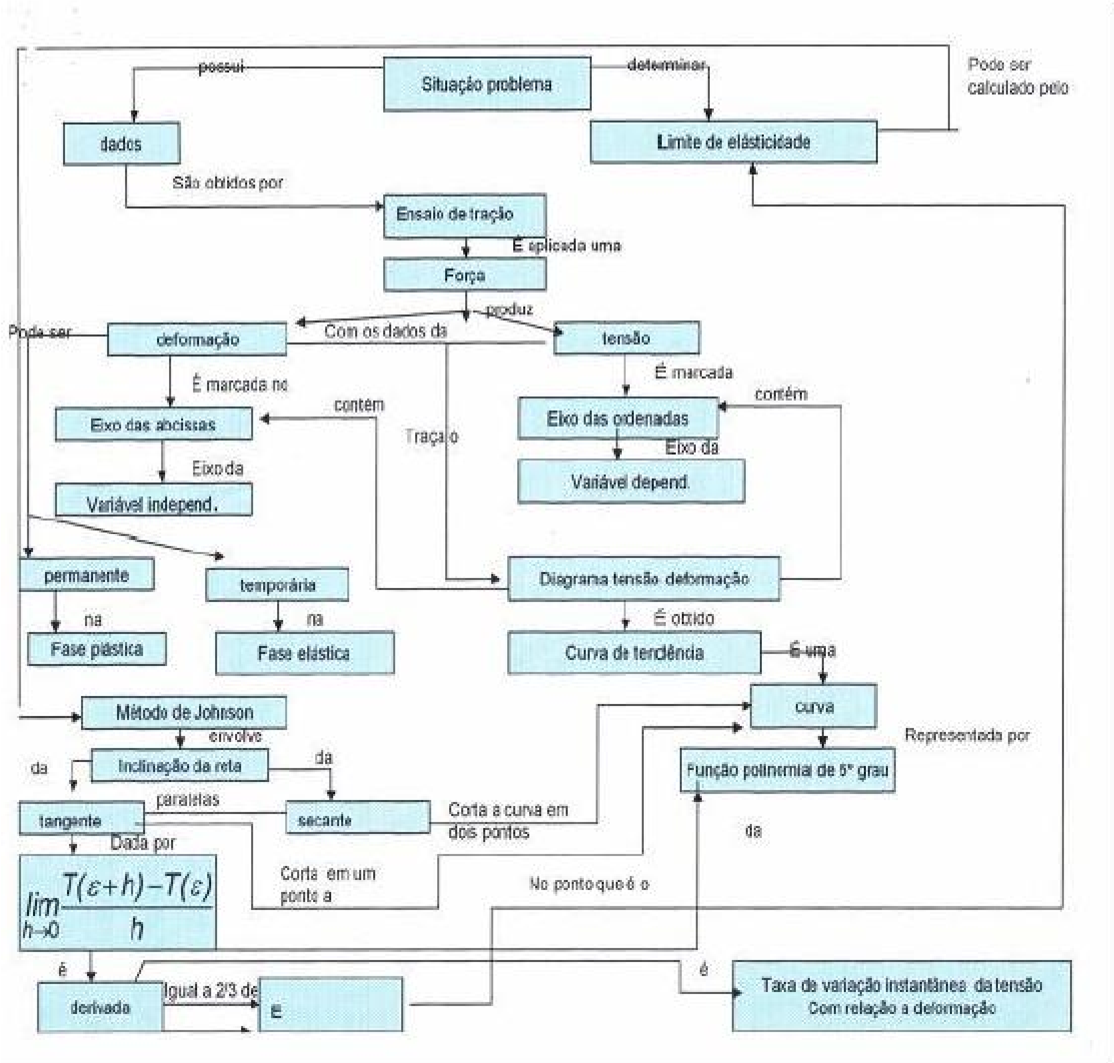
"O ensaio de tração ele usa um corpo de prova e uma força. Daí sobre este corpo de prova é aplicada a força. Esta força faz com que o corpo de prova se deforme. O corpo de prova tem uma secção. A força age sobre a área da secção. Daí conforme eu aplico a força na área da secção ela sofre uma tensão.

O ensaio de tração tem fase plástica e fase elástica. A tensão varia conforme a força na fase plástica e na fase elástica.

O corpo de prova tem módulo de elasticidade. Daí conforme eu aplico a força no corpo de prova eu vou vendo a tensão e a deformação e daí dá para calcular o módulo de elasticidade. Com os dados da deformação é da tensão dá para achar uma curva de tendência usando o excel e como ela eu posso achar o gráfico da tensão e da deformação. O gráfico tem a variável independente que é representada no eixo x e variável dependente no eixo y. O gráfico na fase elástica é uma reta. A reta é uma função representa uma função do 1º grau, que é crescente. O coeficiente angular da reta é tg α que é o módulo de elasticidade. No nosso caso a função de 1º grau é representada por T=20303.67 ε . Aí voltando no corpo de prova... o corpo de prova tem limite de elasticidade o limite de elasticidade por ser calculado pelo método de Johnson. No final da fase plástica e na fase elástica é uma curva. A curva é representada por um polinômio do 6º grau. No método de Johnson nos precisamos de uma reta secante a esta curva.Esta reta secante tem inclinação que é igual a $\frac{2}{3}tg\alpha$.

Usamos a reta secante para traçar uma paralela a ela que seja uma reta tangente a curva. Esta reta tangente tem inclinação igual a tg β é é dada por $\lim_{h\to 0}\frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$.

Este limite é conhecido como a derivada da função T. Quando fazemos a derivada igual a $\frac{2}{3}tg\alpha$ encontramos o limite de elasticidade. A derivada fornece a taxa de variação instantânea de T com relação a ε.” (Aluno A_4)



$$\lim_{h\to 0}\frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$$

Figura 23 – Mapa da aluna A2 referente à 5ª atividade de Modelagem

"A situação problema é determinar limite de elasticidade. A situação problema possui dados que são obtidos através do ensaio de tração. Neste ensaio é aplicada uma força que produz tensão e deformação. A tensão é marcada no eixo das ordenadas que é o eixo da variável independente e a deformação é marcada no eixo das abcissas que é o eixo da variável independente. A deformação pode ser temporária e permanente. Temporária na fase elástica e permanente na fase plástica. Com os dados da tensão e da deformação traça-se o diagrama tensão deformação. Este diagrama contém eixo da ordenadas e o eixo da abcissas. Com este diagrama é obtida a curva de tendência que é uma curva representada por uma função polinomial do 6º grau. O limite de elasticidade por ser calculado pelo método de Johnson. Este método ele envolve a inclinação da reta secante e a inclinação da reta tangente. A reta secante corta a curva da função polinomial de 6º grau em dois pontos e a reta tangente corta em um ponto. Elas são paralelas. A inclinação da reta tangente é dada por $\lim_{h \to 0} \frac{T(\varepsilon + h) - T(\varepsilon)}{h}$ que é a derivada da função tensão. A inclinação da reta secante é dada por $\frac{2}{3} tg\alpha$. Assim a derivada é igual a 2/3 do módulo de elasticidade no ponto que é o limite de elasticidade, por que tg α é o módulo de elasticidade. A derivada também fornece a taxa de variação instantânea de T com relação a ε que é a deformação.” (Aluna A_2)

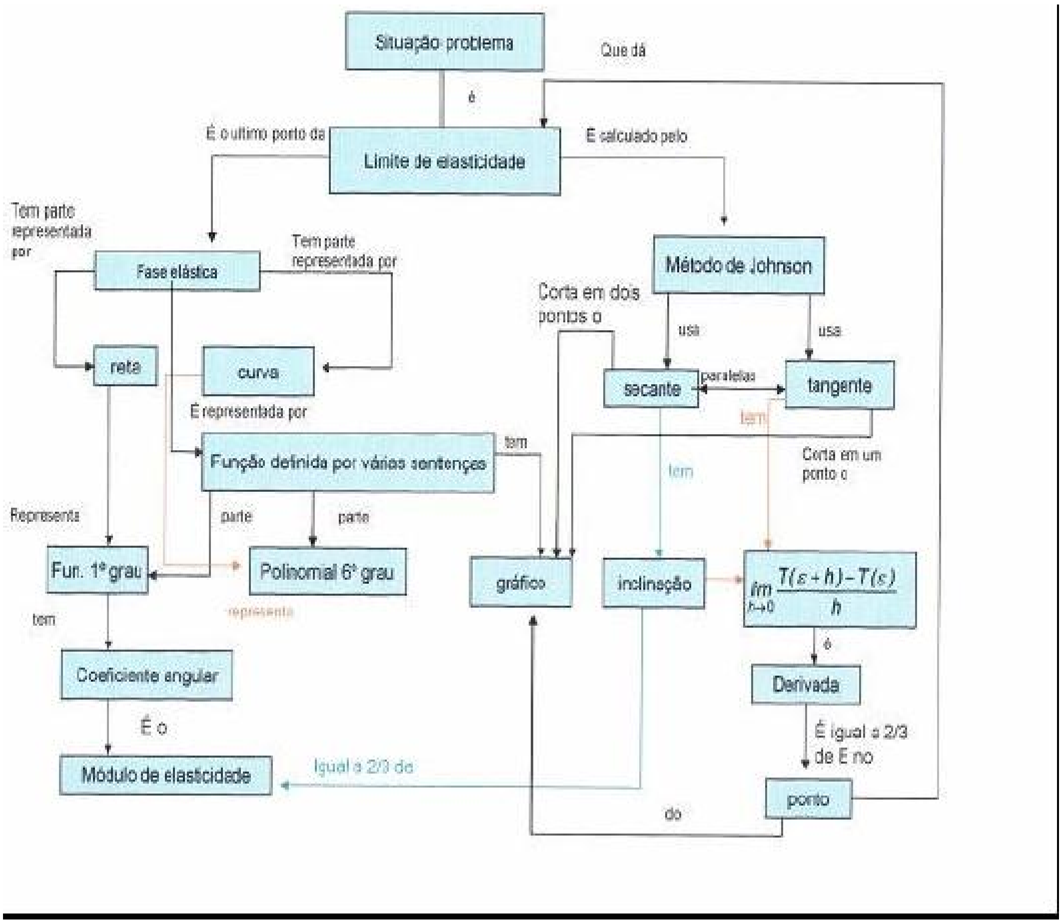
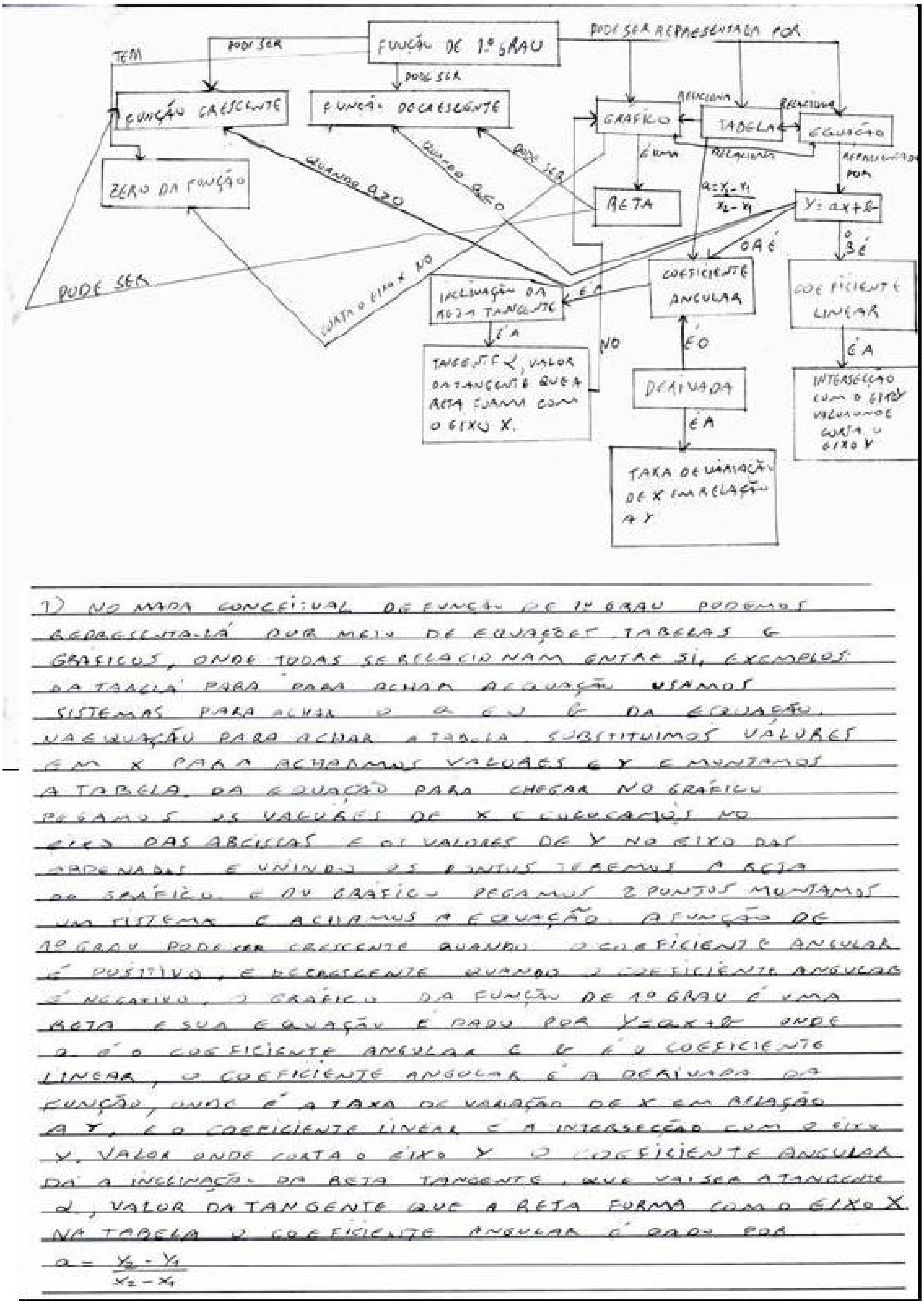


Figura 24 – Mapa do aluno A_3 referente à 5ª atividade de Modelagem

“A situação do problema é achar o limite de elasticidade, que é o último ponto da fase elástica. Ele é encontrado pelo método de Johnson. A fase elástica é representada por uma reta e por uma curva. Para representar a fase elástica a gente usa então uma função de várias sentenças. A parte reta representa uma função de

1º grau e a parte curva uma função polinomial de 6º grau. A função de 1º grau tem coeficiente angular que é o módulo de elasticidade.

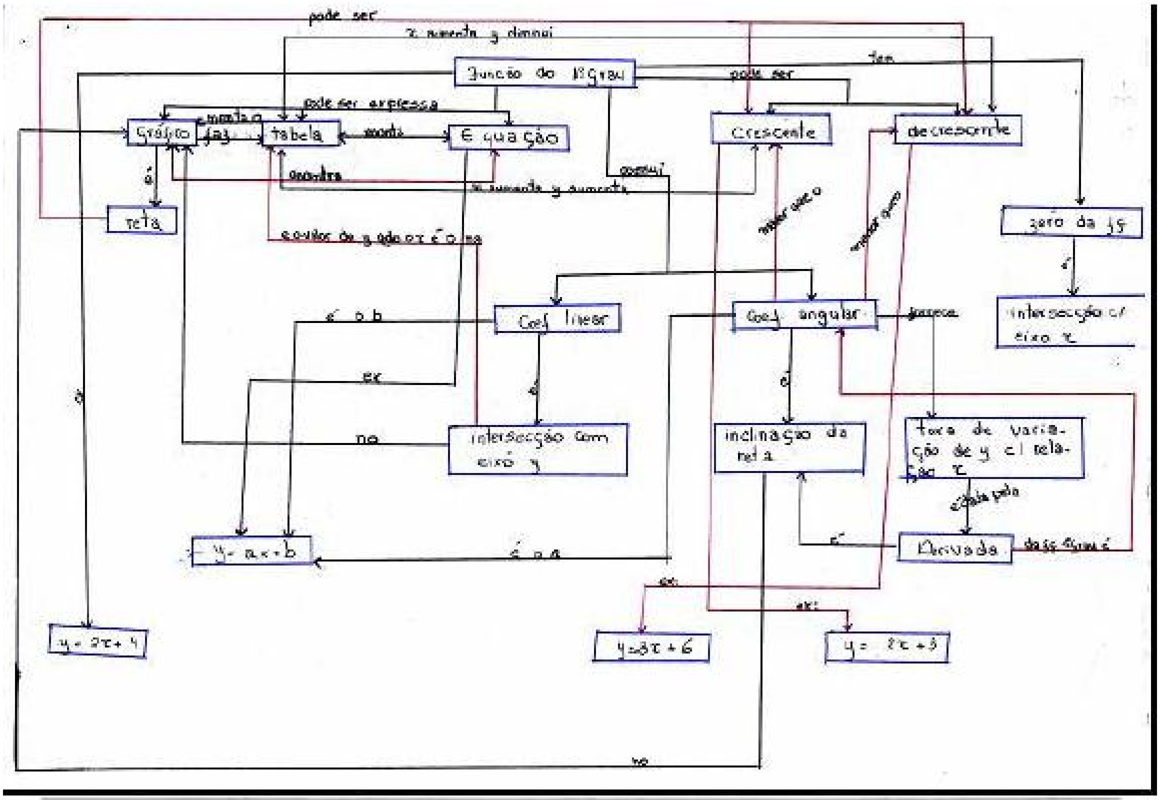
O limite de elasticidade é calculado pelo método de Johnson. O método de Johnson usa uma reta secante que corta a função de várias sentenças em dois pontos e uma reta tangente que corta o gráfico da função em dois pontos. Estas retas são paralelas. A secante tem inclinação igual a 2/3 do módulo de elasticidade. A tangente tem inclinação dada por $\lim_{h \to 0} \frac{T(\varepsilon + h) - T(\varepsilon)}{h}$. Este limite é a derivada da função polinomial do 6º grau, e quando a gente faz ele igual a 2/3 do módulo de elasticidade acha o ponto que é o limite de elasticidade." (Aluno A_3)



1) NO MAPA CONCEITUAL DE FUNÇÃO DE 1º GRAU PODEMOS REPRESENTÁ-LA POR MEIO DE EQUAÇÕES, TABELAS E GRÁFICOS, ONDE TODAS SE RELACIONAM ENTRE SI, EXEMPLOS DA TABELA PARA PARA ACHAR A EQUAÇÃO USAMOS SISTEMAS PARA ACHAR O a E O b DA EQUAÇÃO. NA EQUAÇÃO PARA ACHAR A TABELA, SUBSTITUIMOS VALORES EM X PARA ACHARMOS VALORES E Y E MONTAMOS A TABELA. DA EQUAÇÃO PARA CHEGAR NO GRÁFICO PEGAMOS OS VALORES DE X E COLOCAMOS NO EIXO DAS ABCISSAS E OS VALORES DE Y NO EIXO DAS ORDENADAS E UNINDO OS PONTOS TEREMOS A RETA DO GRÁFICO. E NO GRÁFICO PEGAMOS 2 PONTOS MONTAMOS UM SISTEMA E ACHAMOS A EQUAÇÃO. A FUNÇÃO DE 1º GRAU PODE SER CRESCENTE QUANDO O COEFICIENTE ANGULAR É POSITIVO, E DECRESCENTE QUANDO O COEFICIENTE ANGULAR É NEGATIVO, O GRÁFICO DA FUNÇÃO DE 1º GRAU É UMA RETA E SUA EQUAÇÃO É DADO POR Y=ax+b ONDE a É O COEFICIENTE ANGULAR E b É O COEFICIENTE LINEAR, O COEFICIENTE ANGULAR É A DERIVADA DA FUNÇÃO, ONDE É A TAXA DE VARIAÇÃO DE X EM RELAÇÃO A Y, E O COEFICIENTE LINEAR É A INTERSECÇÃO COM O EIXO Y, VALOR ONDE CORTA O EIXO Y. O COEFICIENTE ANGULAR DÁ A INCLINAÇÃO DA RETA TANGENTE, QUE VAI SER A TANGENTE α, VALOR DA TANGENTE QUE A RETA FORMA COM O EIXO X. NA TABELA O COEFICIENTE ANGULAR É DADO POR

$$a = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

Figura 25 – Mapa do aluno A_1 referente à função do 1º grau



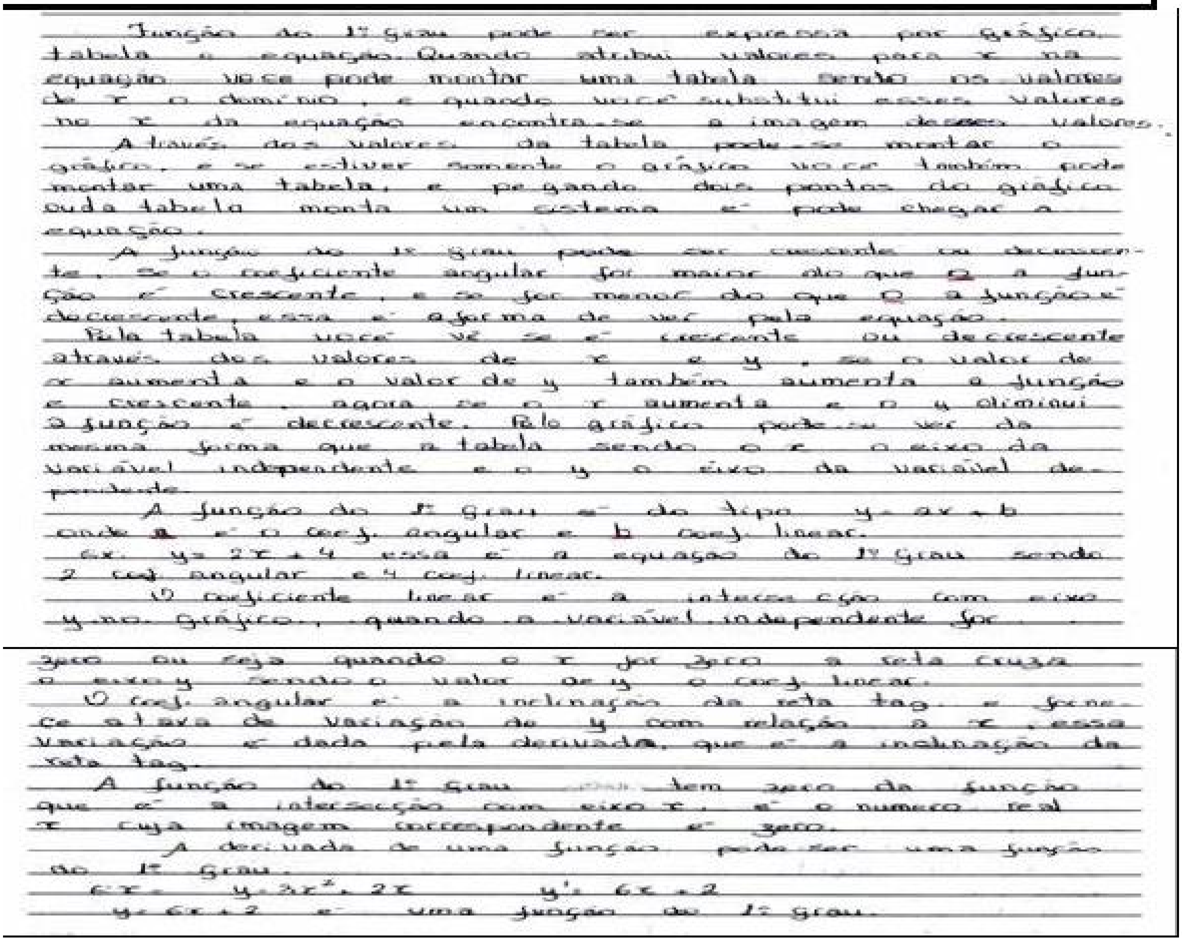

Junção do 1º grau pode ser expressa por gráfico, tabela e equação. Quando atribui valores para x na equação você pode montar uma tabela sendo os valores de x o domínio, e quando você substitui esses valores no x da equação encontra-se a imagem desses valores.
Através dos valores da tabela pode-se montar o gráfico, e se estiver somente o gráfico você também pode montar uma tabela, e pegando dois pontos do gráfico ou da tabela monta um sistema e pode chegar a equação.
A função do 1º grau pode ser crescente ou decrescente, se o coeficiente angular for maior do que 0 a função é crescente, e se for menor do que 0 a função é decrescente, essa é a forma de ver pela equação.
Pela tabela você vê se é crescente ou decrescente através dos valores de x e y, se o valor de x aumenta e o valor de y também aumenta a função é crescente, agora se o x aumenta e o y diminui a função é decrescente. Pelo gráfico pode-se ver da mesma forma que a tabela sendo o x o eixo da variável independente e o y o eixo da variável dependente.
A função do 1º grau é do tipo $y = ax + b$ onde a é o coef. angular e b coef. linear.
ex. $y = 2x + 4$ essa é a equação do 1º grau sendo 2 coef. angular e 4 coef. linear.
O coeficiente linear é a intersecção com eixo y no gráfico, quando a variável independente for zero ou seja quando o x for zero a reta cruza o eixo y sendo o valor de y o coef. linear.
O coef. angular é a inclinação da reta tag. e fornece a taxa de variação de y com relação a x, essa variação é dada pela derivada, que é a inclinação da reta tag.
A função do 1º grau tem zero da função que é a intersecção com eixo x, é o numero real x cuja imagem correspondente é zero.
A derivada de uma função pode ser uma função do 1º grau.
ex. $y = 3x^2 + 2x$ $y' = 6x + 2$
$y = 6x + 2$ é uma função do 1º grau.

Figura 26 – Mapa da aluna A2 referente a função do 1º grau

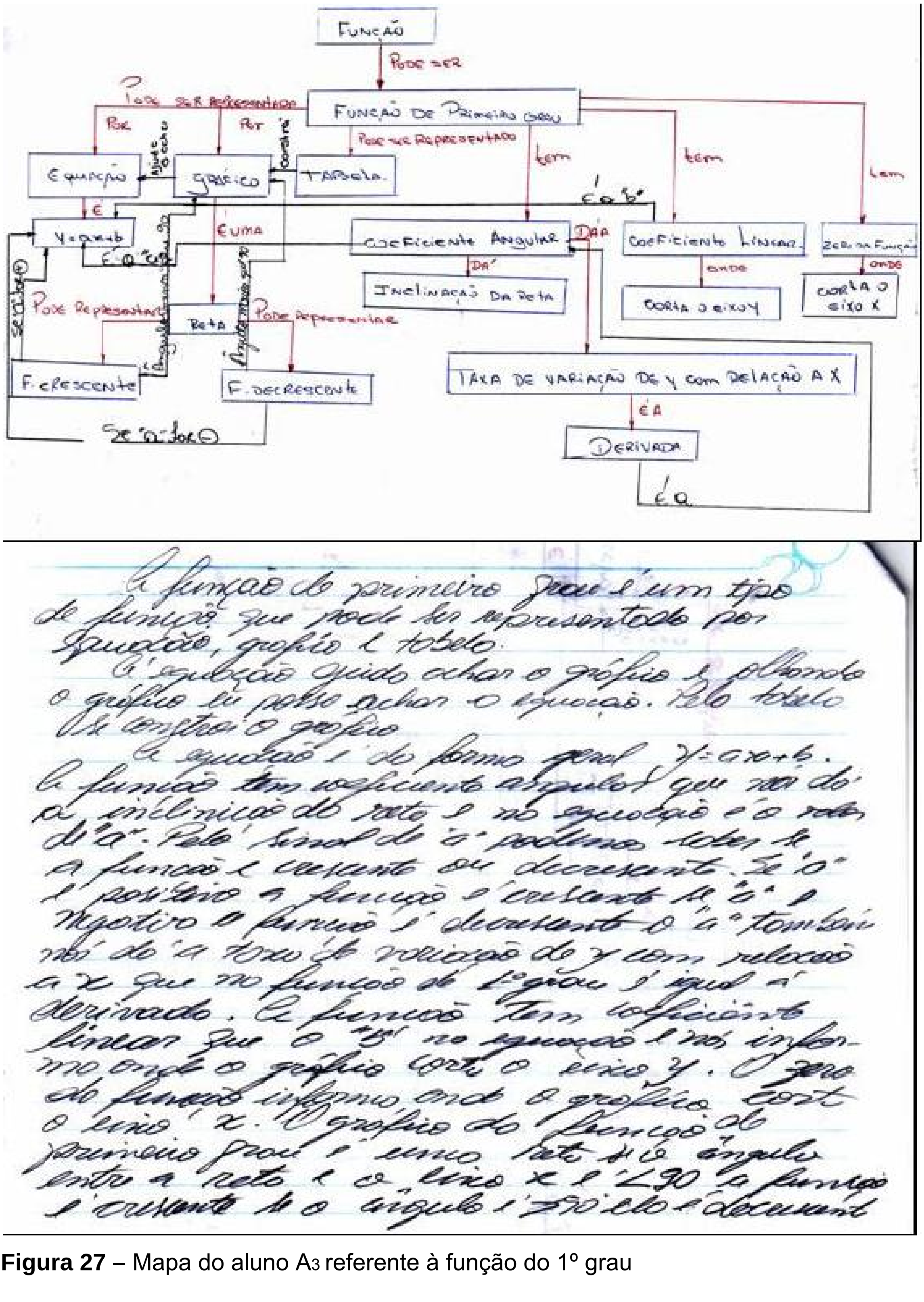


Figura 27 – Mapa do aluno A_3 referente à função do 1º grau

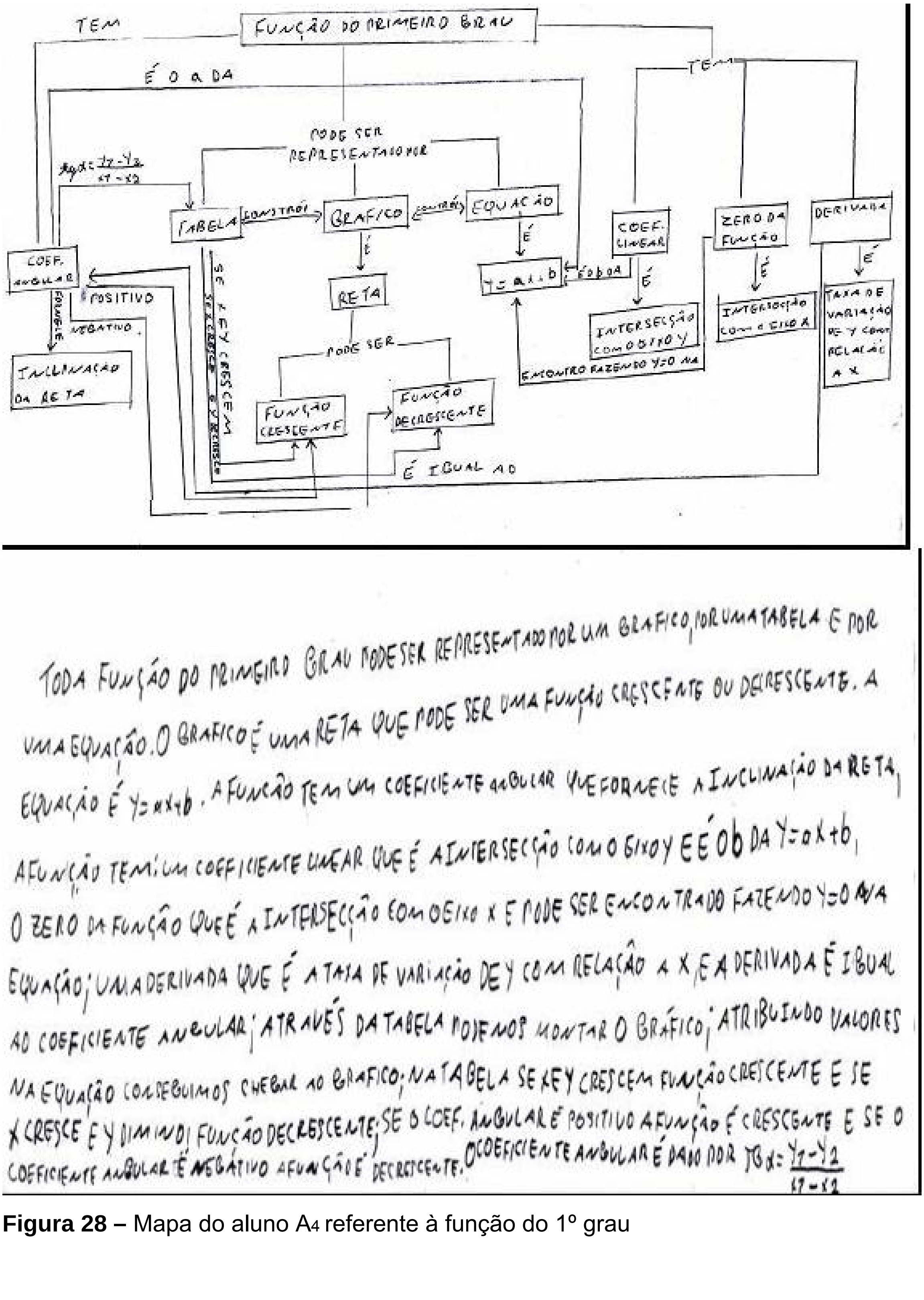
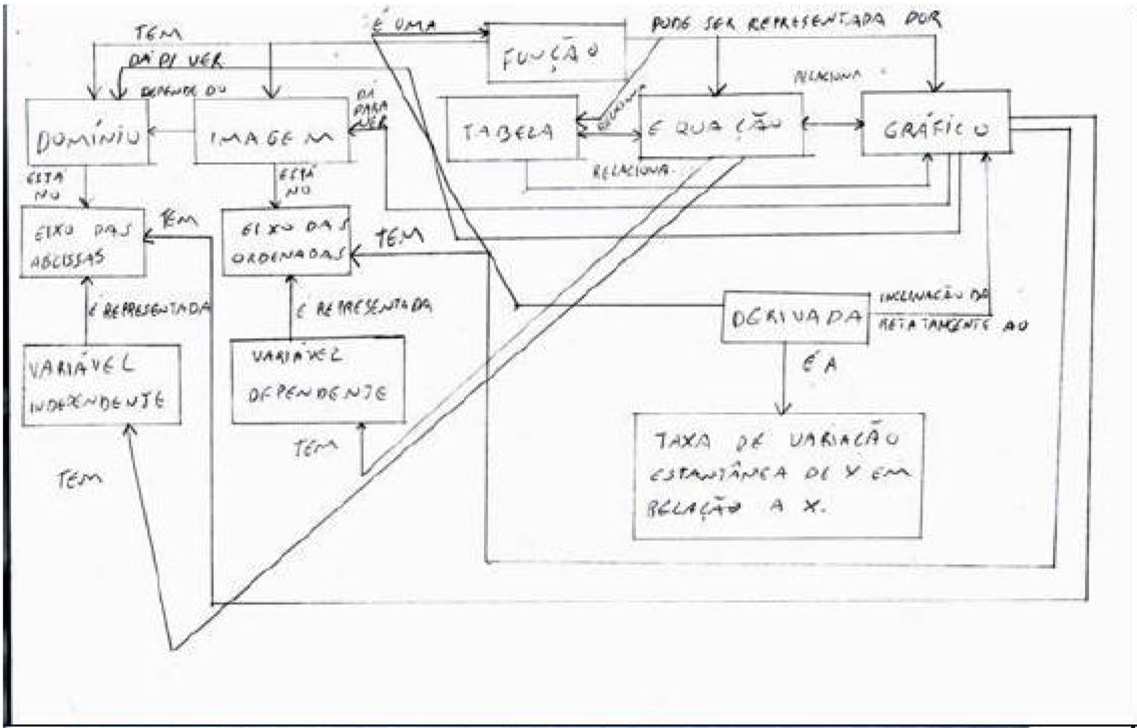


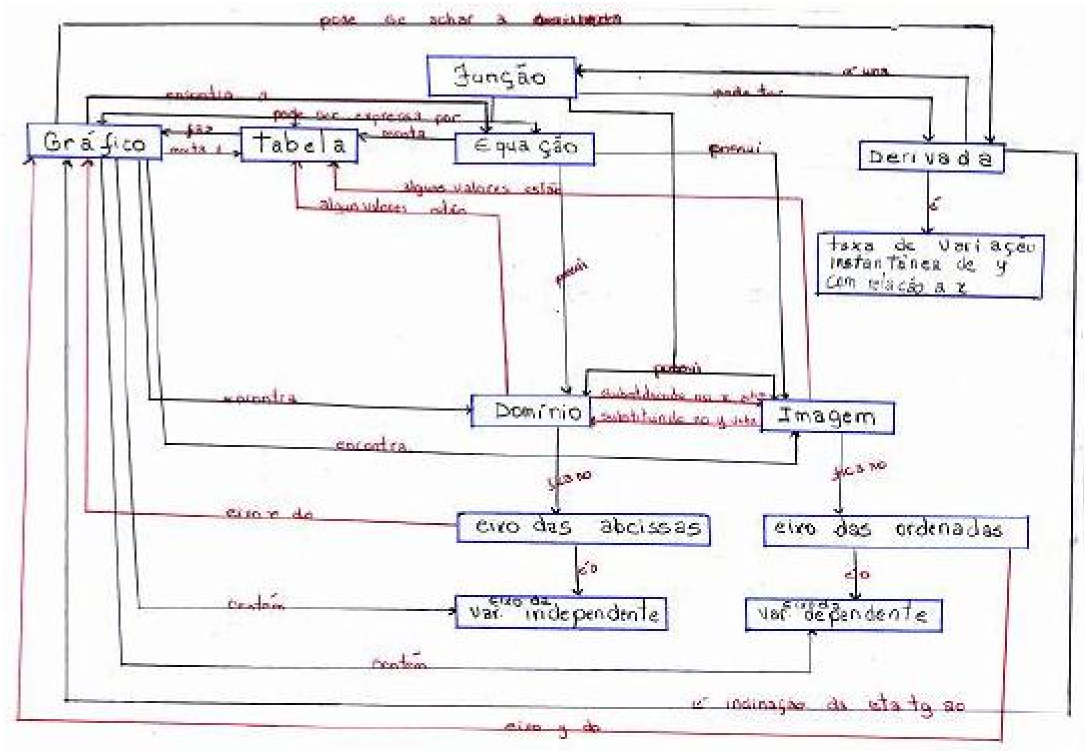
Figura 28 – Mapa do aluno A4 referente à função do 1º grau



NO MAPA CONCEITUAL DE FUNÇÕES PODEMOS REPRESENTÁ-LA POR: EQUAÇÕES, GRÁFICOS E TABELAS. DEPENDENDO DO TIPO DE FUNÇÃO, SERÁ O TIPO DE EQUAÇÃO E DO GRÁFICO, POR EXEMPLO: 1º GRAU É DO TIPO $Y = ax + b$ E SEU GRÁFICO É UMA RETA, A DE 2º GRAU É DO TIPO $Y = ax^2 + bx + c$ E SEU GRÁFICO É UMA PARÁBOLA E QUANDO O GRÁFICO É DE OUTRO TIPO PODEMOS DETERMINAR A EQUAÇÃO COM AUXILIO DO COMPUTADOR E VICE-VERSA. NA EQUAÇÃO DAMOS VALORES PARA X E ACHAMOS VALORES PARA Y E MONTAMOS A TABELA PARA CONSTRUIR O GRÁFICO, DA TABELA PODEMOS PEGAR PONTOS MONTAR UM SISTEMA E ACHAMOS A EQUAÇÃO OU PODEMOS USAR O COMPUTADOR. AS FUNÇÕES TEM DOMINIO E IMAGEM, A IMAGEM VAI DEPENDER DO DOMÍNIO, O DOMÍNIO SUBSTITUINDO NA EQUAÇÃO NOS DÁ A IMAGEM. PELO GRÁFICO DÁ PARA VER O DOMÍNIO PROJETANDO NOS EIXOS DAS ABCISSAS QUE É O EIXO DA VARIÁVEL INDEPENDENTE, E A IMAGEM PODE SER ENCONTRADAS PROJETANTO NAS ORDENADAS QUE É O EIXO DA VARIAVEL DEPENDENTE.

NA FUNÇÃO TEMOS DERIVADA QUE É A TAXA DE VARIAÇÃO ESTANTÂNEA DE Y EM RELAÇÃO A X, ELA É A INCLINAÇÃO DA RETA TANGENTE AO GRÁFICO. A DERIVADA TAMBÉM É UMA FUNÇÃO.

Figura 29 – Mapa do aluno A 1 referente ao conceito de função



A função pode ser expressa por gráfico, tabela e equação.

Atribuindo valores para x na equação você pode montar uma tabela sendo os valores de x o domínio, e quando você substitui esses valores no eixo x na equação, você encontra a imagem destes valores.

Ex: $y = 3x + 1$ → equação de 1º grau

x	y = 3x + 1
1	3.1 + 1 = 4 → imagem
domínio ← 2	3.2 + 1 = 7

Através desses valores da tabela pode-se montar o gráfico você também pode montar uma tabela, e também saber como é a equação.

A função possui domínio e imagem para você encontrar a imagem você atribui valores a x e substitui na equação, o resultado será a imagem e se substituir os valores da imagem no lugar de y na equação você encontrará o valor do domínio. O domínio fica no eixo das abcissas é o eixo da variável independente do gráfico. A imagem fica no eixo das ordenadas que é o eixo da variável dependente do gráfico.

A função pode ter derivada e essa derivada pode ser uma equação que representa uma outra função.

A derivada é a taxa de variação instantânea de y com relação a x, é a inclinação da reta tangente ao gráfico.

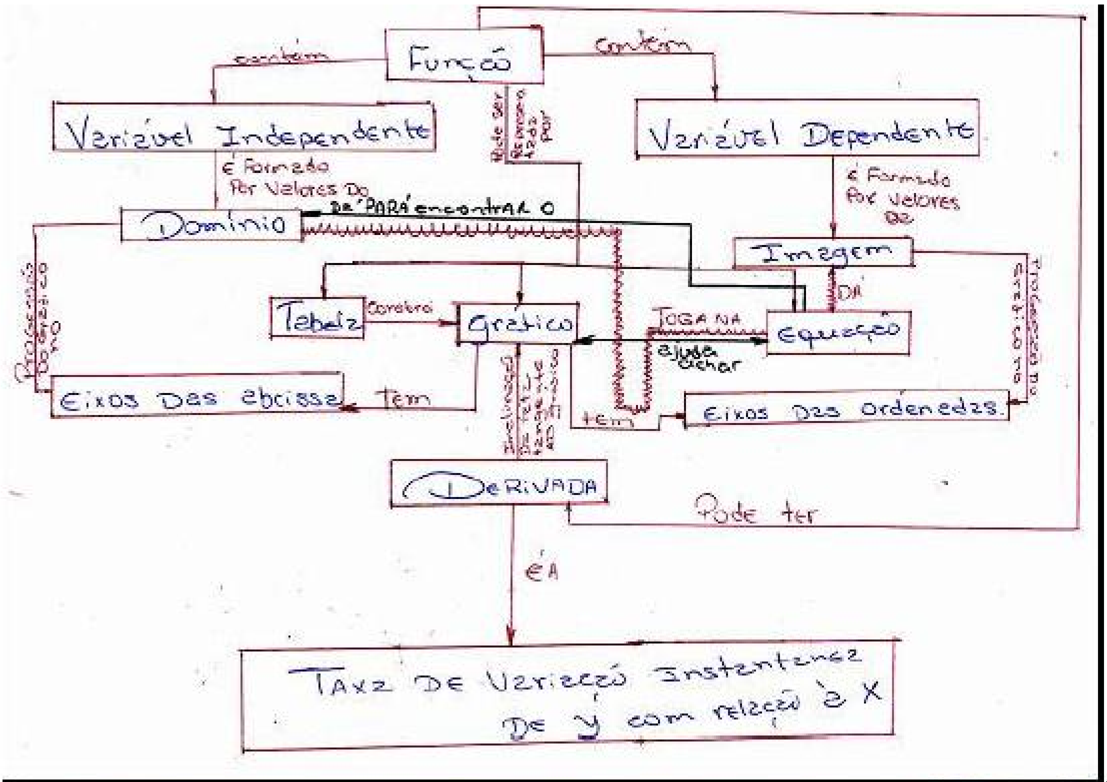
A derivada de uma função, para se você deriva uma função seta da outra função

Ex: Se você derivar uma função polinomial de 3º grau ela vai dar uma função de 2º grau

Ex: $y = 4x^3 + x^2$

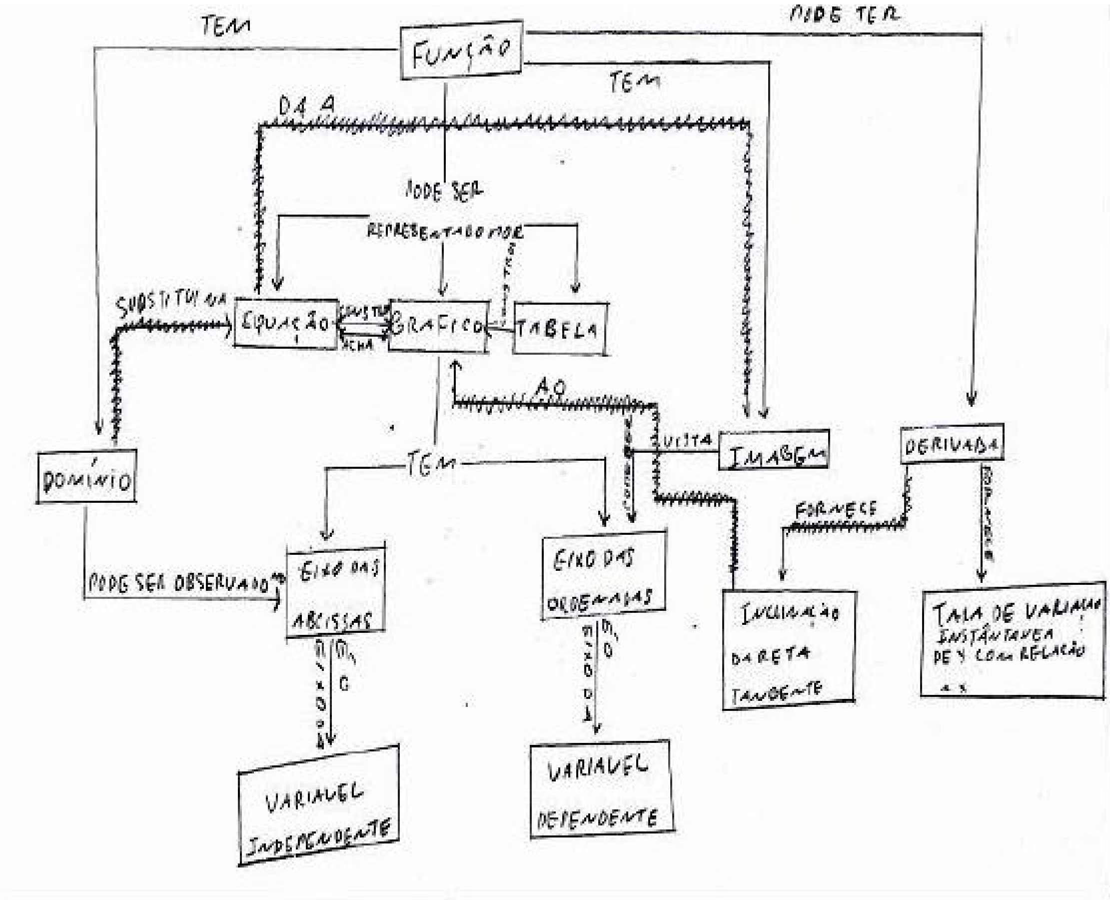
$y' = 12x^2 + 2x$

Figura 30 – Mapa da aluna A2 referente ao conceito de função



A função contém duas variáveis sendo uma dependente e outra independente.
Os valores da variável independente formam o domínio. Os valores da variável dependente formam a imagem.
A função pode ser representada por tabela, por equação e por gráfico. Jogando os valores do domínio na equação encontramos a imagem. Pela equação dá para encontrar o domínio. Com a tabela podemos construir o gráfico. Com a equação podemos construir o gráfico. Pelo gráfico também dá para saber que tipo será a equação por exemplo: se for uma reta vai ser do primeiro grau, projetando o gráfico no eixo das abcissas dá para encontrar o domínio e no eixo das ordenadas dá pra encontrar a imagem.
A função pode ter derivada que é a inclinação da reta tangente no gráfico.
A derivada é também a taxa de variação instantânea de y com relação a x.

Figura 31 – Mapa do aluno A_3 referente ao conceito de função



A FUNÇÃO PODE SER REPRESENTADA POR: EQUAÇÃO, GRAFICO E TABELA: O GRÁFICO PODE SER CONTRUIDO ATRAVÉS DA EQUAÇÃO E DA TABELA. COM O GRÁFICO PODE ACHAR A EQUAÇÃO. O GRAFICO TEM EIXO DAS ABCISSAS Q É O EIXO DA VARIÁVEL INDEPENDENTE E O EIXO DAS ORDENADAS Q É O EIXO DA VARIAVEL DEPENDENTE. A FUNÇÃO TEM DOMÍNIO E IMAGEM, O DOMÍNIO PODE SER OBSERVADO NO EIXO DAS ABCISSAS E A IMAGEM NO EIXO DAS ORDENADAS. A FUNÇÃO PODE TER DERIVADA E A DERIVADA É A TAXA DE VARIAÇAO INSTANTANEA DE Y COM RELAÇÃO A X E FORNECE A INCLINAÇÃO DA RETA TANGENTE.

Figura 32 – Mapa do aluno A_4 referente ao conceito de função

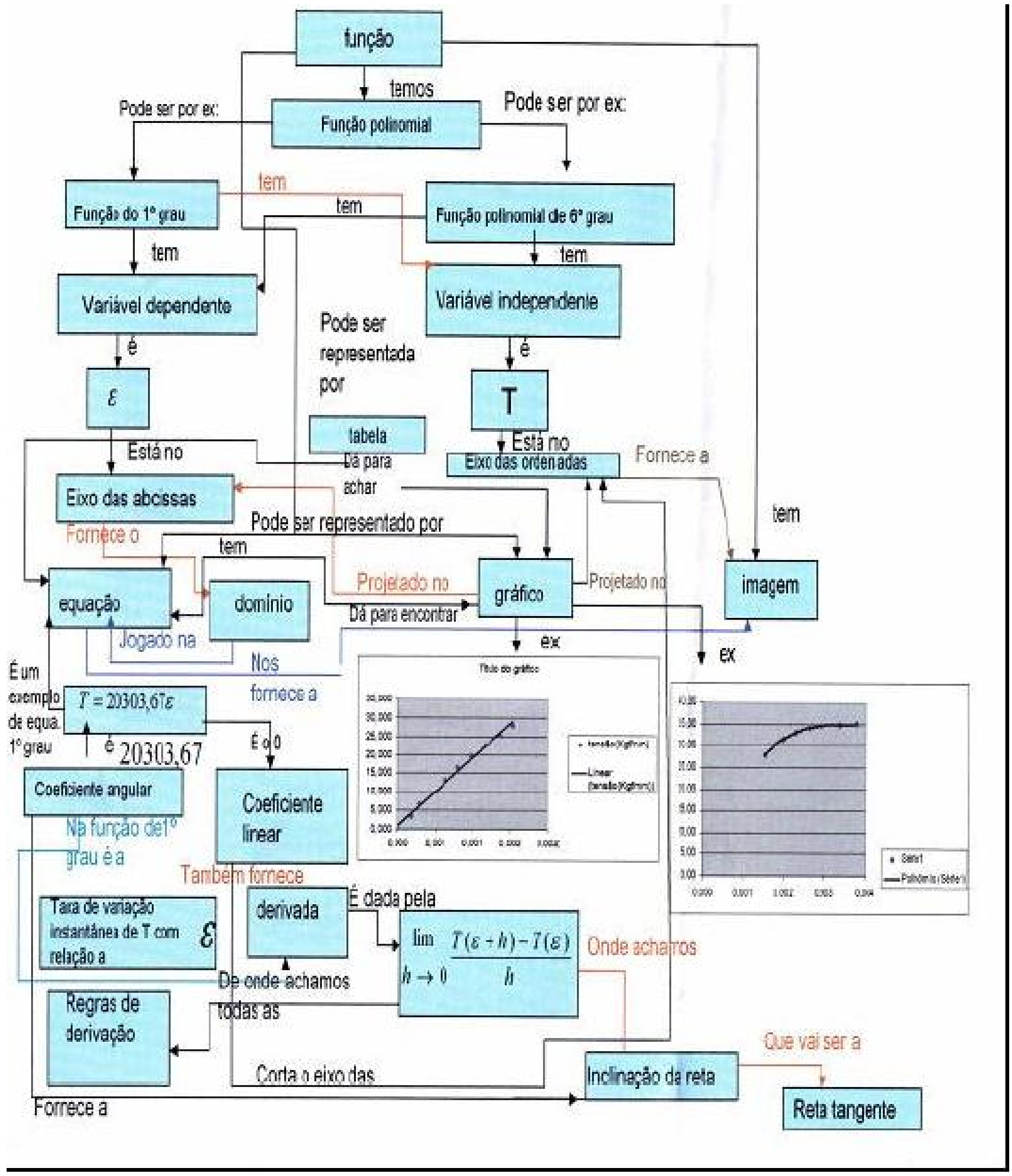


Figura 33 – Mapa da dupla A_1 e A_3

MAPA COMUM

NO MAPA CONCEITUAL TEMOS A FUNÇÃO ONDE FOI CITADA A FUNÇÃO POLINOMINAL A DE 1º GRAU E A POLINOMIAL DE GRAU 6, AS FUNÇÕES TANTO DO 1º GRAU TANTO A DE GRAU 6, ELAS VÃO TER AS VARIAVEIS INDEPENDENTE E DEPENDENTES QUE NO NOSSO CASO É O ε (DEFORMAÇÃO) E T (TENSÃO), ONDE ε ESTÁ NO EIXO DAS ABCISSAS E T NO EIXO DAS ORDENADAS. AS FUNÇÕES TAMBEM PODEM SER REPRESENTADAS POR GRÁFICOS E EQUAÇÕES.

PELA EQUAÇÃO PODEMOS SABER COMO É O GRAFICO, POR EXEMPLO $Y = ax + b$ TEREMOS UM GRAFICO QUE É UMA RETA, OUTRO EXEMPLO: $Y = ax^2 + bx + c$ SABEMOS QUE O GRAFICO É UMA PARABOLA.

PELO GRÁFICO PODEMOS TER UMA IDÉIA DE COMO VAI SER A EQUAÇÃO; EXEMPLO. SE FOR UMA RETA PODE SER DE 1º GRAU OU CONSTANTE, DEPENDENDO DA POSIÇÃO DA RETA. QUANDO É UMA CURVA FICA MAIS DIFICIL DE DETERMINAR A EQUAÇÃO SENDO QUE PODEMOS CONTAR COM A AJUDA DO COMPUTADOR PARA FACILITAR.

COM A TABELA PELO COMPUTADOR TAMBÉM DA PARA ACHAR O GRÁFICO E A EQUAÇÃO.

O GRÁFICO QUANDO PROJETADO NO EIXO DAS ABCISSAS FORNECE O DOMINIO, E QUANDO PROJETADO NO EIXO DAS ORDENAS FORNECE A IMAGEM

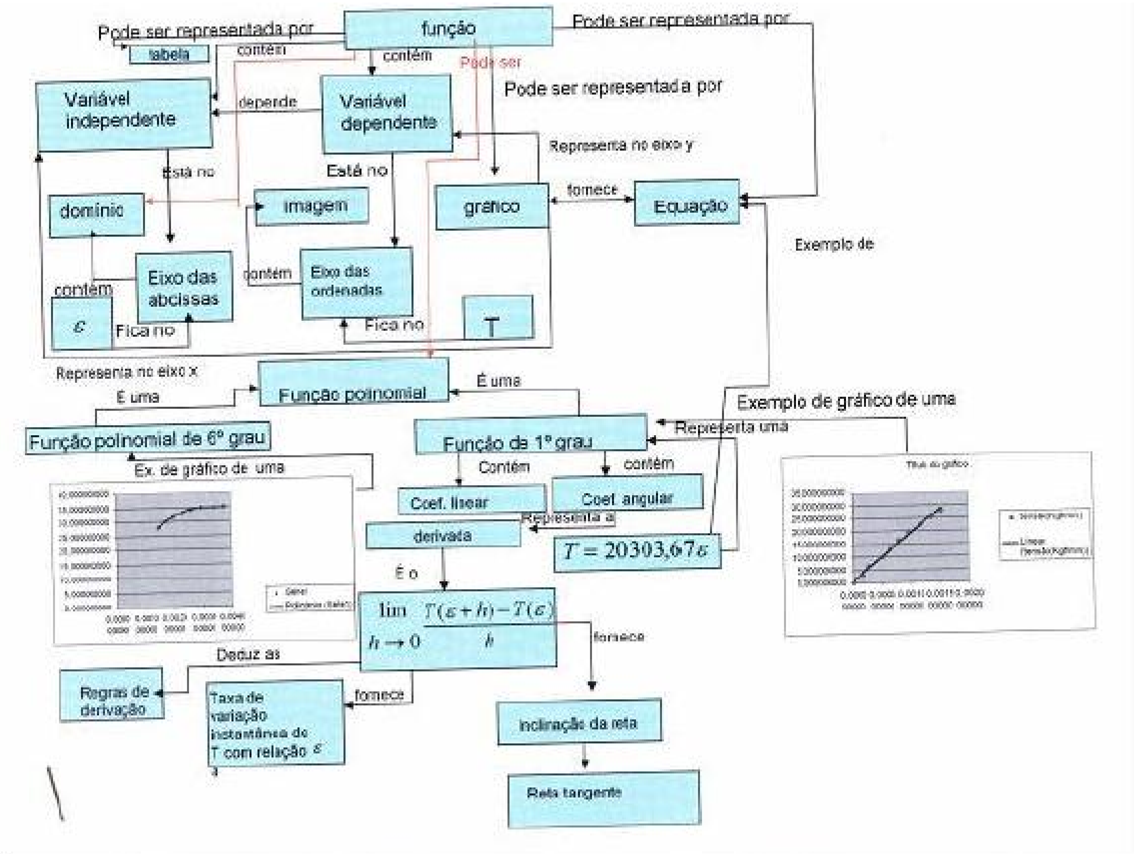
O DOMINIO JOGADO NA EQUAÇÃO FORNECE A IMAGEM.

NA FUNÇÃO DE 1º GRAU REPRESENTADA PELA EQUAÇÃO: $T = 20303{,}67\varepsilon$, TEMOS QUE O COEFICIENTE LINEAR É ZERO, E INDICA QUE O GRAFICO CORTA O EIXO Y, E O COEFICIENTE ANGULAR É DADO POR $a = \frac{T_2 - T_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} = 20303{,}67$ FORNECE A TAXA DE VARIAÇÃO DE T EM RELAÇÃO A ε, A INCLINAÇÃO DA RETA E É IGUAL. A DERIVADA É DADA PELO LIMITE

$$\lim_{h \to 0} \frac{T(\varepsilon + h) - T(\varepsilon)}{h}$$

E É APARTIR DESTE LIMITE QUE CALCULAMOS TODAS AS REGRAS DE DERIVAÇÃO. A DERIVADA FORNECE A TAXA DE VARIAÇÃO ISTANTÂNEA DE T EM RELAÇÃO A ε, E FORNECE A INCLINAÇÃO DA RETA TANGENTE EM CADA PONTO DO GRÁFICO.

Figura 34 – Explicação do mapa da dupla A_1 e A_3



Função contém variável dependente e independente, e pode ser representada por grafico, tabela e equação. toda função possui dominio e imagem. Dominio é os valores da ε e imagem os valores da T

A variável independente está no eixo das abcissas é o eixo que contém a deformação

A variavel dependente está no eixo das ordenadas é o eixo que contém a tensão. A variavel dependente depende da variável independente.

Com a tabela podemos obter o grafico e com o grafico a equação. Com a equação podemos montar a tabela

O grafico representa no eixo y a variável dependente e no eixo x a variável independente, o grafico fornece equação também fornece o gráfico. Com a equação posso fazer o grafico, e com o grafico posso achar a equação.

A função do 1º grau e do 6º grau contem coeficien-linear e angular, o coeficiente angular fornece a taxa de variação, e representa a derivada.

A derivada da função do 6º grau é encontrada pelo $\lim_{h \to 0} \frac{t(\varepsilon + h) - t(\varepsilon)}{h}$ esse limite fornece a taxa de variação de T com relação a ε, e a inclinação da reta tangente, deste limite tambem deduz a regra de derivação.

$t = 20303{,}67\varepsilon$ é um exemplo de função do 1º grau. O coeficiente angular é 20303,67

Figura 35 – Mapa da dupla A_2 e A_4

ANEXO 4 – Pré-Teste

PRÉ TESTE

NOME..TURMA................

Obs: O objetivo deste pré-teste é levantar o nível do conhecimento da turma sobre alguns conteúdos que são básicos para o bom andamento do curso. Resolva-o sem o auxílio do professor ou dos colegas.

1)Resolva as equações abaixo:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ b) $\frac{2}{5}x - 3 = 0$ c) $2^x = 8$ d) $3^x = 5$ e) $\frac{3^x.3^{x+1}}{3^{x-2}} = 9$

f) logx=3

2)Calcule o valor numérico das expressões:

a) $9^{\frac{3}{4}}$ b) $\frac{3}{4}^{-2}$

3)Resolva $\log_4 16$

4)Resolva:

a) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} =$ b) $\frac{2}{3} x \frac{5}{4} =$ c) $\frac{2}{3} \div \frac{6}{8} =$

5) Construa o gráfico da função y= 2x + 3 abaixo e responda:
a) Qual é o coeficiente angular dessa função? O que ele significa?
b)Qual é o coeficiente linear? O que ele significa?
c)Em que ponto o gráfico corta o eixo x?
d)Em que ponto o gráfico corta o eixo y?

6) Construas o gráfico das funções abaixo:

a)y=2
b)y=3x
c)y= $x^2 - 4x + 3$
d) y= 2^x

e) y= $\log_3 x$

7) Escreva um texto explicando a um colega o que é uma função, o que é o domínio de uma função e o que é a imagem de uma função.

8)Quando duas grandezas são proporcionais?

ANEXO 5 – Questionário 1

Leia as questões abaixo e procure respondê-las expressando-se de maneira clara.

1)Idade................

2) Sexo: ( ) Feminino ( ) Masculino

3)Caso não resida em Cornélio. Você:

( ) Passa a semana aqui para estudar. ( ) Vai e volta todos os dias

4) Atualmente está trabalhando?

( ) Sim, em tempo integral. Trabalho em...............................(comércio de, indústria de, banco, prestadora de serviços de) e minha função é.............

( ) Sim, em tempo parcial, em...............................(comércio de, indústria de, banco, prestadora de serviços de) e minha função é............

( ) Não

5)Você tem acesso ao computador?

( ) Não ( ) Sim, em ....(casa, trabalho, escola).

6) Esta fazendo este curso por primeira opção ou gostaria de fazer outro? Qual?

.7) Já cursou esta disciplina:

( ) Não ( ) Sim ...... vezes

8)Você considera a matemática importante para o seu desempenho no curso? Por que?.

9) Você considera a matemática importante na sua atuação profissional? Por que?

10) Nesta questão você pode escolher mais de um item, caso o faça, numere em ordem decrescente de preferências. Além de trabalharmos problemas relacionados à área de mecânica, problemas referentes a quais outros assuntos você acharia interessante que trabalhássemos nas aulas de cálculo:

( ) Saúde ( ) Esporte ( ) Problemas sociais e políticos

( ) Meio ambiente ( ) Outros..................

11) Você sentia dificuldade na disciplina de matemática no ensino médio? Caso sim quais eram essa dificuldades?

12) Você estudava para as provas de matemática no ensino médio? Caso sim o que você fazia para estudar?(Estudo em grupo ou individual, fazia exercícios, lia livros, ou os apontamentos do caderno, fazia resumos, explicava aos colegas a matéria)

ANEXO 6 – Questionário 2

Atenção: As perguntas abaixo (parte 1) serão respondidas na tabela que vem logo a seguir da pergunta.Observe que sua resposta pode variar de um pólo ao outro conforme sua opinião pessoal:

Parte 1

1.Você acha que as atividades de modelagem trabalhadas foram:

Entediante	1	2	3	4	5	6	7	Interessante

2.Você considera que as atividades possibilitaram a você aprender matemática.

Muito pouco	1	2	3	4	5	6	7	Bastante

3.Você considera que as atividades em geral possibilitaram a você aprender sobre a situação envolvida no problema (ocupação de um tanque, preço da ligação telefônica, variação do tempo de exposição de acordo com a intensidade sonora, ensaio de tração).

Muito pouco	1	2	3	4	5	6	7	Bastante

4. As atividades desenvolvidas possibilitaram você vislumbrar aplicações da matemática na sua vida privada e na sua futura área de atuação.

Muito pouco	1	2	3	4	5	6	7	Bastante

5.Quando você começou a construir mapas conceituais achou.

fácil	1	2	3	4	5	6	7	Difícil

6.Ao final do curso você considera construir mapas conceituais.

fácil	1	2	3	4	5	67		Difícil

Parte 2.

1)Explique como você constrói seus mapas conceituais.

2)Em relação a elaboração do mapa conceitual :

a)O que você considera mais fácil:

( ) Escolher os conceitos ( ) Ligar os conceitos relacionados

( ) Organizar o mapa ( ) Colocar a palavra de ligação

b) Qual parte você considera mais difícil:

( ) Escolher os conceitos ( ) Ligar os conceitos relacionados

( ) Organizar o mapa ( ) Colocar a palavra de ligação

3. Se você fosse construir um mapa conceitual sobre função que conceitos você colocaria.
4. Se você fosse construir um mapa conceitual sobre função do primeiro grau quais conceitos você colocaria.
5. Se você fosse construir um mapa conceitual sobre derivada que conceitos você colocaria.

6. Em outras matérias que você estudou neste semestre você utilizou os conteúdos trabalhados em nosso curso?Quais conteúdos e em que disciplinas?
7. Dê um exemplo de uma situação do seu dia a dia ou de outra disciplina que poderia ser expresso por meio de uma função.
8) Cite os pontos positivos de se trabalhar com modelagem matemática.
9) Cite os pontos negativos de se trabalhar com modelagem matemática.
10) Cite os pontos positivos de se trabalhar com mapas conceituais.
11) Cite os pontos negativos de se trabalhar com mapas conceituais.
12) O que você pensa sobre o papel da matemática no curso de tecnologia em manutenção e na sua futura área de atuação após este curso de modelagem?

ANEXO 7 – Questão sobre mapas aplicada na prova de Fundamentos da Matemática

“Abaixo apresentamos alguns conceitos e alguns exemplos. Construa um mapa conceitual mostrando as relações que existem entre eles. Após fazer seu mapa escreva um pequeno texto explicando seu mapa.

Conceitos que devem aparecer no mapa: equação do 1º grau, equação do 2º grau, equação, solução, solução única, sem solução, dupla solução, fórmula de Báskara.

Exemplos: $x^2 = 2x + 1 = 0$, $x^2 - 4x = 0$, $x^2 - 4 = 0$ e $x + 1 = 0$.”

ANEXO 8 – Explicação da fórmula auxiliar para o cálculo da distância geodésica

Assumamos que a terra é uma esfera. Tomemos sobre essa esfera dois pontos B e C que representam respectivamente as cidades de Cornélio e Sapopema, ambas situadas abaixo da linha do equador e a esquerda do Meridiano de Greewich. Tomemos um triângulo esférico ABC, sendo o ponto A situado no pólo norte exatamente sobre o eixo de rotação da terra. Tomemos os arcos AB pertencente ao meridiano que passa por Cornélio e o arco BC pertencente ao meridiano que passa pela cidade de Sapopema. Considerando a latitude igual a Ec e latitude de Sapopema igual a E_G, e considerando que ambas estão abaixo do equador temos que a medida dos arcos AC=c e AB=b em graus serão respectivamente b= $(90^0+|E_c|)$ e c= $(90^o+|E_s|)$. A medida do ângulo Â será dada pela diferença entre a longitude de Cornélio e a longitude de Sapopema assim a medida do angulo Â será dada por $|G_c - G_s|$.Assim substituindo na fórmula do cosseno esférico dada por:

Cos a= cos(b). cos(c) + sen(c).sen(b).cos(A) podemos obter a medida do arco a=BC

Cos a=cos($90^0+ |E_c|$).cos($90^o+|E_s|$) +sen($90^0+|E_c|$)sen($90^o+|E_s|$).cos($|G_c-G_s|$)

Cos a= -sen$|E_c|$. -sen$|E_s|$ +cos($|E_c|$).cos($|E_s|$) .cos(G_c-G_s)

Cosa= sen$|E_c|$.sen$|E_s|$ + cos $|E_c|$cos$|E_s|$. cos(G_c-G_s)

ANEXO 9 – Dados do ensaio de tração

Tabela 1 – Dados do ensaio de tração

Deformação	Tensão kgf/mm²	Deformação	Tensão Kgf/mm²	: Deformação	Tensão (kgf/mm²)	Deformação	Tensão Kgf/mm²
0,000000000	0,000000000	0,077910643	47,330984717	0,162961540	50,744799287	0,256352100	49,858435558
0,000182799	3,284804840	0,078238025	47,243223128	0,163409560	50,692140601	0,256851810	49,463522669
0,000286184	6,628417219	0,078617105	47,225671931	0,163823090	50,551730515	0,257368720	49,560054508
0,000510183	9,980805909	0,079047875	47,348530820	0,164271090	50,850106979	0,257816730	49,744347427
0,000630799	13,280538462	0,079426947	47,339754967	0,164719090	50,639487010	0,258385330	49,507400408
0,000803106	16,659255731	0,079857717	47,471394804	0,165115390	50,578057565	0,258885040	49,612713194
0,000975413	19,722039226	0,080254021	47,699565970	0,165615080	50,832560367	0,259315800	49,349434030
0,001164951	22,618083036	0,080615873	47,515277636	0,165994150	50,560510953	0,259849950	49,524951605
0,001371720	25,329829852	0,081132793	47,541604687	0,166373230	50,762355578	0,260384080	49,516176261
0,001526797	27,795856852	0,081546335	47,567931737	0,166804010	50,437642384	0,260866570	49,244121752
0,001750796	29,954723892	0,081908178	47,515277636	0,167269230	50,569281712	0,261366250	49,410868569
0,002009257	31,666021396	0,082287254	47,594258278	0,167734470	50,586838003	0,261900410	49,261672950
0,002302180	33,096489047	0,082683554	47,673238920	0,168182470	50,718472236	0,262434540	49,165141111
0,002646794	34,149597045	0,083097095	47,629361182	0,168596000	50,885214468	0,262899800	49,358209883
0,002956948	34,781462557	0,083510628	47,690790117	0,169061240	50,613159959	0,263433930	49,279229241
0,003404947	34,834116149	0,083889713	47,699565970	0,169474770	50,613159959	0,263847480	49,033501783
0,003784023	35,079841569	0,084303246	47,761000509	0,169888310	50,893989812	0,264467770	49,288000000
0,004249252	35,018409577	0,084699554	47,848756495	0,170336300	50,788682629	0,264933030	49,024731024
0,004748944	35,193927152	0,085095863	47,971620479	0,170732610	50,657042792	0,265415460	48,831657157
0,005196943	35,483532858	0,085509396	47,954069282	0,171266750	50,727248090	0,265915160	48,840433011
0,005627711	35,755584819	0,085905704	47,875088640	0,171645830	50,727248090	0,266501010	48,857984208
0,006161864	35,773136016	0,086336470	48,041825777	0,172111070	50,613159959	0,266897340	48,726344371
0,006678786	35,360668874	0,086750011	48,041825777	0,172559070	50,736023434	0,267517620	48,752676516
0,007144016	35,632720835	0,087163544	47,918966887	0,172955360	50,709696893	0,268000070	48,717569027
0,007609246	35,939877738	0,087508163	48,068152318	0,173455070	50,867663271	0,268448090	48,700017830
0,008040015	36,247032603	0,087938929	48,068152318	0,173816910	50,542954661	0,269016690	48,761451859
0,008539706	36,378671931	0,088352470	48,164689251	0,174247670	50,67459449	0,269568100	48,629812532
0,008970474	36,536638309	0,088817692	48,234899134	0,174695680	50,560510953	0,269964410	48,427963321
0,009539089	36,317242486	0,089145079	48,129586857	0,175160900	50,876438614	0,270515790	48,638583291
0,009969857	36,378671931	0,089575853	48,103259806	0,175608900	50,692140601	0,271015470	48,261226184
0,010504010	36,466430973	0,089989386	48,234899134	0,176056920	50,648262354	0,271532400	48,506949058

Tabela 1 – Dados do ensaio de tração (continuação)

deformação	Tensão Kgf/mm²	defomação	Tensão Kgf/mm²	deformação	Tensão Kgf/mm²	deformação	Tensão Kgf/mm²
0,010986470	36,422552725	0,090437384	48,287553235	0,176453210	50,665813551	0,272049310	48,261226184
0,011572315	35,843343352	0,090799227	48,331431482	0,176935670	50,674594498	0,272600690	48,542051452
0,012123699	35,580064697	0,091212778	48,278777382	0,177366450	50,736023434	0,273100380	48,217347937
0,012537236	35,825792155	0,091609077	48,322655629	0,177814450	50,788682629	0,273617310	48,454289862
0,013071389	35,922326541	0,092005377	48,410412124	0,178210740	50,621935303	0,274065280	48,375309221
0,013502158	35,869670402	0,092470608	48,436743760	0,178675980	50,815009170	0,274599480	48,191021396
0,014001849	35,992534386	0,092918615	48,410412124	0,179141220	50,771126337	0,275064680	47,980396332
0,014570463	36,001309730	0,093297691	48,384085074	0,179589200	50,753575140	0,275564380	48,076933265
0,015052923	35,922326541	0,093711233	48,480616913	0,180019970	50,674594498	0,276098520	48,199791645
0,015569845	35,992534386	0,094073076	48,471846154	0,180450740	50,753575140	0,276581000	47,804878757
0,016086767	35,843343352	0,094503841	48,498173204	0,180881500	50,823779929	0,277132380	47,725893021
0,016569227	35,878446256	0,094865694	48,559602649	0,181312270	50,648262354	0,277597620	47,620585329
0,017086148	35,904772797	0,095279226	48,664915436	0,181777520	50,604389200	0,278166220	47,848756495
0,017534149	35,966204789	0,095692768	48,629812532	0,182259960	50,999302089	0,278648680	47,603034131
0,018051070	36,132947020	0,096123524	48,717569027	0,182673510	50,797452878	0,279200060	47,541604687
0,018516301	36,264586347	0,096468143	48,612256240	0,183087040	50,744799287	0,279682520	47,436291900
0,019015990	36,089066225	0,096933374	48,673690779	0,183535040	50,657042792	0,280199450	47,339754967
0,019515682	36,115395313	0,097329674	48,761451859	0,183983040	50,762355578	0,280699140	47,550375446
0,019998143	36,185603158	0,097708759	48,691241977	0,184482730	50,665813551	0,281233290	47,173018339
0,020566757	35,711704024	0,098173990	48,735125318	0,184896260	50,753575140	0,281715760	47,173018339
0,021066449	35,483532858	0,098604755	48,787778910	0,185327030	50,683369842	0,282249910	47,401189506
0,021566141	35,395773816	0,099001064	48,814105960	0,185740590	50,613159959	0,282749600	46,927290372
0,022083061	35,553737646	0,099397373	48,963296485	0,186223030	50,885214468	0,283232080	46,874631686
0,022582753	35,738031075	0,099776440	48,840433011	0,186636560	50,718472236	0,283783440	46,971168619
0,023099675	35,474754457	0,100207210	48,884310749	0,187050110	50,648262354	0,284283140	46,848305145
0,023651059	35,211480897	0,100637980	48,866764646	0,187515340	50,841336220	0,284782830	46,742997453
0,024150751	35,386995925	0,101034290	48,901861946	0,187946110	50,683369842	0,285351430	46,874631686
0,024633210	35,588842588	0,101447820	48,954516047	0,188411350	50,885214468	0,285833890	46,593806928
0,025098441	35,694152827	0,101844130	48,989623535	0,188859330	50,753575140	0,286333600	46,655240958
0,025580900	35,790687213	0,102257670	48,963296485	0,189290100	50,718472236	0,286798820	46,497274580
0,026115053	35,711704024	0,102636750	48,998398879	0,189738120	50,727248090	0,287315730	46,646460520
0,026614745	35,114943963	0,103033060	48,998398879	0,190237790	50,832560367	0,287832660	46,374406011
0,027114437	35,062287825	0,103481050	49,059828324	0,190565190	50,736023434	0,288297900	46,269098319
0,027493513	35,185151299	0,103911820	49,051058074	0,191047650	50,762355578	0,288832050	46,181342333
0,027958741	35,404549669	0,104290900	49,112482425	0,191564560	51,016851758	0,289348960	46,111131941
0,028423972	35,562516047	0,104790580	49,130038716	0,192012580	50,700921039	0,289934830	46,260322975
0,028803048	35,834568008	0,105169670	49,130038716	0,192426110	50,744799287	0,290434510	45,961941416
0,029164894	36,089066225	0,105548740	49,130038716	0,192856860	50,700921039	0,290934180	45,926839022
0,029406123	36,115395313	0,105996740	49,156360672	0,193322110	50,727248090	0,291399420	45,733770250
0,029371662	35,878446256	0,106410270	49,200243505	0,193770100	50,893989812	0,291899130	45,654784513
0,029354432	35,895997453	0,106789350	49,191468161	0,194252550	50,841336220	0,292467730	45,707443199
0,029337201	36,247032603	0,107237360	49,235345899	0,194683340	50,700921039	0,292932970	45,435388691
0,029371662	36,580519103	0,107599200	49,252902191	0,195148560	50,876438614	0,293484340	45,347632196
0,029457815	36,949105451	0,107995500	49,252902191	0,195579320	50,700921039	0,294001260	45,426612837

Tabela 1 – Dados do ensaio de tração (continuação)

deformação	Tensão Kgf/mm^2	deformação	Tensão Kgf/mm^2	deformação	Tensão Kgf/mm^2	deformação	Tensão Kgf/mm^2
0,029561200	37,247484463	0,108443500	49,331882832	0,196061800	50,885214468	0,294483720	45,277427407
0,029733508	37,528314315	0,108908740	49,323107489	0,196475330	50,788682629	0,295000650	45,172114620
0,029923046	37,738931737	0,109253350	49,340658686	0,196888870	50,753575140	0,295517580	45,391510443
0,030026431	37,940778910	0,109684120	49,340658686	0,197405800	50,937868059	0,296051710	44,926387163
0,030267661	38,125074376	0,110149350	49,384541518	0,197802090	50,823779929	0,296534190	44,812299032
0,030491660	38,300589913	0,110511200	49,375761080	0,198232860	50,700921039	0,297051110	44,680659705
0,030767353	38,388350993	0,110941960	49,375761080	0,198698100	50,727248090	0,297602480	44,566576159
0,031043043	38,528763627	0,111407190	49,358209883	0,199163320	50,718472236	0,298119410	44,513922567
0,031353199	38,677954152	0,111717350	49,463522669	0,199663010	50,762355578	0,298636320	44,531473765
0,031715043	38,792042282	0,112148110	49,472292919	0,200093780	50,876438614	0,299170480	44,496371370
0,032042425	38,923677025	0,112596110	49,410868569	0,200559010	50,753575140	0,299721870	44,399834437
0,032404270	39,037767702	0,112975190	49,524951605	0,201024250	50,823779929	0,300169870	44,355956190
0,032731657	39,195731533	0,113371500	49,516176261	0,201489470	50,920321956	0,300721260	44,145331126
0,033127961	39,283490066	0,113819490	49,524951605	0,201920220	50,700921039	0,301238190	43,987364748
0,033507040	39,441456444	0,114233040	49,507400408	0,202385460	50,771126337	0,301703400	43,855730515
0,033851655	39,564317881	0,114663800	49,560054508	0,202867930	50,902765665	0,302203100	43,873281712
0,034213500	39,704733062	0,115094570	49,595161997	0,203264240	50,692140601	0,302685570	43,583681100
0,034540882	39,792491594	0,115456410	49,586381049	0,203763920	50,569281712	0,303254170	43,610007641
0,034954419	39,932906775	0,115921640	49,621488538	0,204194700	50,815009170	0,303771080	43,522246561
0,035333498	40,011889964	0,116335180	49,656591442	0,204659920	50,657042792	0,304322490	43,627558839
0,035729804	40,152302598	0,116714260	49,647815588	0,205107920	50,762355578	0,304839400	43,566124809
0,036057186	40,266388181	0,117110560	49,700469180	0,205555920	50,955420275	0,305321850	43,136109017
0,036453493	40,327822720	0,117558570	49,700469180	0,205934980	50,727248090	0,305856000	43,118552725
0,036832571	40,485786551	0,117989330	49,700469180	0,206451910	50,674594498	0,306355690	42,951815588
0,037228875	40,573547631	0,118402870	49,709245033	0,206882690	50,683369842	0,306855390	42,907937341
0,037642417	40,670079470	0,118799170	49,744347427	0,207365150	50,639487010	0,307389530	43,057123281
0,037969799	40,784165053	0,119281640	49,761898625	0,207830370	50,964192562	0,307872010	42,697312277
0,038366106	40,854377993	0,119626250	49,805781966	0,208261150	51,016851758	0,308406140	42,662209883
0,038814106	40,959685176	0,120057020	49,779454916	0,208743610	50,762355578	0,308871400	42,442808966
0,039141488	41,038670912	0,120453320	49,814557820	0,209191610	50,569281712	0,309457230	42,319950586
0,039555025	41,161529801	0,120866860	49,814557820	0,209674070	50,586838003	0,309974140	42,293618441
0,039916871	41,266842588	0,121297630	49,797006113	0,210122070	50,674594498	0,310473840	41,995241977
0,040295949	41,328276617	0,121711170	49,832109017	0,210604520	50,771126337	0,310956310	41,802173204
0,040692258	41,495016302	0,122124700	49,902313805	0,211035310	50,718472236	0,311524930	42,056671421
0,041071329	41,521342843	0,122572710	49,832109017	0,211517750	50,665813551	0,312059080	41,714414671
0,041450410	41,635428935	0,122969010	49,911089659	0,211948510	50,815009170	0,312558780	41,538894549
0,041829481	41,688087621	0,123365330	49,875987264	0,212430990	50,665813551	0,313075700	41,530121243
0,042208562	41,828500255	0,123813310	49,919865003	0,212896210	50,542954661	0,313592620	41,407257259
0,042622099	41,925032094	0,124244090	49,928645950	0,213413140	50,911541009	0,314057830	41,152756495
0,042932253	41,881153846	0,124674860	49,902313805	0,213757760	50,709696893	0,314609240	41,196637290
0,043380251	42,082998472	0,125122850	49,919865003	0,214309140	50,613159959	0,315143380	41,135202751
0,043724861	42,258521141	0,125536400	49,893538462	0,214722670	50,639487010	0,315660310	40,924585329
0,044069476	42,284847682	0,125898250	49,884762608	0,215187890	50,692140601	0,316159990	40,687633214
0,044500246	42,346277127	0,126311780	49,954972491	0,215687600	50,718472236	0,316659660	40,485786551
0,044896555	42,416482425	0,126742540	50,007626592	0,216135600	50,630716251	0,317159370	40,345371370
0,045275631	42,530570555	0,127207780	50,016397351	0,216583580	50,569281712	0,317745210	40,108421803
0,045654707	42,592004585	0,127621310	49,981299542	0,217066060	50,718472236	0,318193210	40,354146714
0,046119938	42,714863474	0,128017630	49,954972491	0,217514060	50,639487010	0,318761830	39,950457972
0,046481781	42,785068772	0,128431160	50,051504840	0,218030990	50,648262354	0,319209820	39,669627611

Tabela 1 – Dados do ensaio de tração (continuação)

deformação	Tensão Kgf/mm^2	deformação	Tensão Kgf/mm^2	deformação	Tensão Kgf/mm^2	deformação	Tensão Kgf/mm^2
0,046843629	42,811395823	0,128913610	50,042728986	0,218478970	50,604389200	0,319761220	39,581871625
0,047274394	42,907937341	0,129275460	50,069056037	0,218875270	50,621935303	0,320295370	39,695957208
0,047670703	43,004469180	0,129706240	49,954972491	0,219340520	50,578057565	0,320777820	39,283490066
0,048049779	43,109781966	0,130154230	50,025177789	0,219822960	50,569281712	0,321329230	39,292265920
0,048428855	43,162435558	0,130498850	50,051504840	0,220322670	50,569281712	0,321828920	39,020213958
0,048807931	43,223865003	0,130981300	50,112938869	0,220874040	50,613159959	0,322397500	39,064094244
0,049204240	43,373056037	0,131377610	50,060280183	0,221287570	50,718472236	0,322845540	38,713059093
0,049652233	43,408158431	0,131756680	50,156817117	0,221701130	50,683369842	0,323396910	38,642851758
0,049962387	43,469592970	0,132239150	50,121709628	0,222200810	50,727248090	0,323913800	38,484885380
0,050341468	43,513466123	0,132600990	50,148036679	0,222666050	50,613159959	0,324413530	38,362023943
0,050737772	43,548573612	0,133014540	50,121709628	0,223148500	50,613159959	0,324964900	38,151401426
0,051134081	43,697764137	0,133479770	50,104158431	0,223596500	50,806228732	0,325499040	38,063642894
0,051547618	43,724091187	0,133893300	50,165592970	0,224078960	50,534179317	0,325929830	37,782812532
0,051978383	43,882057565	0,134324060	50,191919511	0,224526960	50,534179317	0,326463970	37,686280693
0,052374692	43,899608762	0,134720370	50,183144167	0,225043890	50,700921039	0,326963650	37,423002038
0,052771001	43,934711156	0,135133910	50,218246561	0,225526330	50,499076923	0,327583960	37,431777382
0,053150072	44,031242995	0,135564670	50,218246561	0,225957110	50,446422822	0,328049200	36,966656648
0,053563614	44,119004075	0,136047140	50,218246561	0,226456790	50,604389200	0,328600580	36,914000509
0,053959918	44,162882323	0,136408990	50,244578197	0,226939260	50,797452878	0,329134750	36,764809475
0,054287305	44,224316862	0,136839750	50,279676006	0,227404500	50,595608762	0,329720570	36,501535914
0,054752536	44,285751401	0,137287750	50,262124809	0,227869720	50,542954661	0,330134090	36,299688742
0,055148840	44,364732043	0,137684070	50,270905247	0,228386650	50,516628120	0,330685500	36,036412634
0,055510688	44,373507387	0,138132060	50,463968925	0,228869090	50,446422822	0,325947040	-0,102687239
0,055872531	44,461263882	0,138528370	50,244578197	0,229317110	50,455198675	0,326463970	0,081606373
0,056337762	44,636781457	0,138959130	50,349885889	0,229782330	50,560510953	0,326929210	0,107934030
0,056682377	44,628005604	0,139389910	50,332329598	0,230350950	50,428871625	0,327463340	0,099158151
0,057078681	44,610454407	0,139803440	50,297232298	0,230816170	50,560510953	0,327997510	0,090382267
0,057457757	44,838626083	0,140303130	50,235797759	0,231264170	50,674594498	0,328479960	0,072830489
0,057940221	44,829855323	0,140664990	50,279676006	0,231694950	50,428871625	0,328979640	0,081606373
0,058267603	44,864952624	0,141044050	50,253348956	0,232177410	50,604389200	0,329496570	0,099158151
0,058681140	44,891284768	0,141492060	50,148036679	0,232677100	50,578057565	0,330030710	0,081606373
0,059060216	44,943938360	0,141922820	50,613159959	0,233159560	50,402544575	0,330495950	0,064054600
0,059456525	45,058026490	0,142353580	50,332329598	0,233642020	50,604389200	0,331047330	0,064054600
0,059887290	45,119461029	0,142767120	50,437642384	0,234124470	50,428871625	0,331478080	0,064054600
0,060249138	45,154558329	0,143197900	50,420091187	0,234624180	50,393764137	0,332012290	0,081606373
0,060610986	45,215992868	0,143663130	50,463968925	0,235089400	50,428871625	0,332563630	0,064054600
0,061058979	45,330080998	0,144093890	50,349885889	0,235554620	50,569281712	0,333011630	0,064054600
0,061438060	45,312524707	0,144490200	50,569281712	0,236054330	50,341110545	0,328600580	36,914000509
0,061834369	45,382735099	0,144869270	50,367437086	0,236519550	50,341110545	0,329134750	36,764809475
0,062247906	45,488042282	0,145300050	50,306003057	0,237019250	50,341110545	0,329720570	36,501535914
0,062644215	45,505598574	0,145782500	50,578057565	0,237536160	50,297232298	0,330134090	36,299688742
0,063040519	45,531925624	0,146178820	50,384988283	0,238001400	50,367437086	0,330685500	36,036412634
0,063471289	45,663564952	0,146609570	50,472749873	0,238449400	50,499076923	0,325947040	-0,102687239
0,063815899	45,628457463	0,147023120	50,455198675	0,238983550	50,200695364	0,326463970	0,081606373
0,064212213	45,698662761	0,147471120	50,630716251	0,239431550	50,279676006	0,326929210	0,107934030
0,064642982	45,803975038	0,147901880	50,446422822	0,239914000	50,367437086	0,327463340	0,099158151
0,065004826	45,751321447	0,148315420	50,402544575	0,240430930	50,218246561	0,327997510	0,090382267
0,065366673	45,882955680	0,148728950	50,700921039	0,240896150	50,165592970	0,328479960	0,072830489
0,065797434	45,882955680	0,149159740	50,613159959	0,241413080	50,191919511	0,328979640	0,081606373

Tabela 1 – Dados do ensaio de tração (continuação)

deformação	Tensão Kgf/mm²	deformação	Tensão Kgf/mm²	deformação	Tensão Kgf/mm²	deformação	Tensão Kgf/mm²
0,066228204	45,979497708	0,149573270	50,358661742	0,241878300	50,183144167	0,329496570	0,099158151
0,066658974	45,988268467	0,149969570	50,376212939	0,242412470	50,481525217	0,330030710	0,081606373
0,066986361	46,111131941	0,150417570	50,411315334	0,242894920	50,297232298	0,330495950	0,064054600
0,067451591	46,058478349	0,150882800	50,507852267	0,243377380	50,121709628	0,331047330	0,064054600
0,067744508	46,163786042	0,151348030	50,683369842	0,243825380	50,218246561	0,331478080	0,064054600
0,068175282	46,225220071	0,151692650	50,384988283	0,244359530	50,060280183	0,332012290	0,081606373
0,068606052	46,216439633	0,152192340	50,367437086	0,244824750	50,253348956	0,332563630	0,064054600
0,068950663	46,321752420	0,152640330	50,490295976	0,245324460	50,148036679	0,333011630	0,064054600
0,069398656	46,391962303	0,153019420	50,446422822	0,245824150	50,288456444	0,328600580	36,914000509
0,069829431	46,348078961	0,153467410	50,516628120	0,246306610	49,998850739	0,329134750	36,764809475
0,070242968	46,444615894	0,153915410	50,595608762	0,246737380	49,954972491	0,329720570	36,501535914
0,070604811	46,506045339	0,154294490	50,674594498	0,247254300	49,946192053	0,330134090	36,299688742
0,071035581	46,532372389	0,154776950	50,455198675	0,247805670	50,095382578	0,330685500	36,036412634
0,071431885	46,576255222	0,155190490	50,586838003	0,248288150	50,042728986	0,325947040	-0,102687239
0,071810961	46,620133469	0,155586800	50,446422822	0,248805070	49,963743250	0,326463970	0,081606373
0,072241731	46,620133469	0,156052030	50,516628120	0,249321990	50,376212939	0,326929210	0,107934030
0,072638035	46,795651044	0,156500020	50,648262354	0,249787220	50,139265920	0,327463340	0,099158151
0,073034348	46,716665308	0,156913550	50,779901681	0,250304110	49,840884361	0,327997510	0,090382267
0,073396192	46,786875700	0,157361560	50,569281712	0,250786570	49,797006113	0,328479960	0,072830489
0,073826962	46,909739175	0,157757860	50,516628120	0,251303500	50,069056037	0,328979640	0,081606373
0,074206033	46,997495670	0,158188630	50,665813551	0,251785960	49,832109017	0,329496570	0,099158151
0,074602346	46,936066225	0,158653860	50,525403464	0,252268450	49,805781966	0,330030710	0,081606373
0,075033107	46,953617422	0,159032950	50,525403464	0,252768100	49,954972491	0,330495950	0,064054600
0,075463877	47,050149261	0,159498180	50,525403464	0,253285030	49,814557820	0,331047330	0,064054600
0,075808496	47,050149261	0,160807700	50,621935303	0,253784710	49,700469180	0,331478080	0,064054600
0,076273727	47,067705553	0,161255700	0,551730515	0,254318900	49,981299542	0,332012290	0,081606373
0,076601105	47,146686195	0,161652010	50,841336220	0,254801330	49,682917983	0,332563630	0,064054600
0,077014651	47,129134997	0,162065560	50,551730515	0,255335480	49,665366786	0,333011630	0,064054600
0,077428188	47,181789098	0,162513540	50,718472236	0,255749020	49,586381049		

Fonte: UNICAMP

ANEXO 10 – Mais algumas aplicações da noção de derivada

Mais algumas aplicações da noção de derivada.

A velocidade e a aceleração instantâneas:

Uma questão fundamental na cinemática consiste em determinar a velocidade de um móvel em um instante qualquer quando é conhecida a equação de seu movimento(ou equação horária), ou seja, a expressão que nos dá o espaço(posição) em função do tempo. S= f(t).

Quantitativamente a velocidade exprime em geral, a razão de variação do espaço em relação ao tempo. Quando esta razão é constante, temos o movimento uniforme. Ou seja, se o móvel percorre um espaço ΔS em um intervalo de tempo Δt, a velocidade é dada pelo quociente v=$\frac{\Delta S}{\Delta t}$, que é uma razão constante.

Quando , porém, temos um movimento variado ou seja, o móvel percorre espaços diferentes em tempos iguais, é necessário e fundamental distinguir a velocidade média da velocidade instantânea.

Se um automóvel percorre 120 Km em 2 horas, não podemos concluir deste fato que sua velocidade em cada instante t tenha sido 60Km/h.Se durante o percurso nos ativéssemos ao velocímetro constataríamos que a velocidade apresentou uma variação, ora para mais, ora para menos. Portanto, a velocidade de 60 Km/h que obtivemos dividindo 120 Km pelo tempo 2 h gasto em percorre-lo é o que chamamos de velocidade média.A velocidade que observamos a cada instante no velocímetro do veículo se denomina de velocidade instantânea.

Consideremos um móvel de equação horária s=f(t) que se desloca sobre uma trajetória retilínea de origem o e que em um instante t_1 ocupe uma posição S_1 e num instante t_2 ocupe uma posição S_2. Sabemos que o espaço percorrido pelo móvel entre uma posição e outra é $\frac{\Delta S}{\Delta t}=S_2 - S_1$ ou ΔS = f(t_2)$-f(t_1)$ e que o tempo gasto para percorrê-lo é $\Delta t = t_2 - t_1$.Logo, sua velocidade média neste percurso é:

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Com a definição de velocidade média e considerando a variação do tempo tendendo a zero podemos estabelecer a velocidade instantânea, no instante t_1, dada por:

$$V=\frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim \frac{f(t_2)-f(t)_1}{t_2 - t_1}$$

Mas $t_2 - t_1 = \Delta t \Rightarrow t_2 = t_1 + \Delta t$ e considerando t_1 um instante genérico t, temos $t_2 = t + \Delta t$, logo:

$$V= Lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

Que é a derivada da função f em relação à sua variável independente t, ou seja:

Se S=f(t) então $\frac{dS}{dt} = v$ ou S'=v(t) ou ainda $\dot{S}$=v(t).Ou em outras palavras a velocidade é a derivada do espaço com relação ao tempo.

Raciocinando de forma semelhante se pode chegar ao resultado que se a velocidade de um corpo em um instante t é dado por v=g(t) então g'(t)=$\frac{dv}{dt} = a$, onde a é a aceleração do móvel em cada instante t.Ou seja a aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo, e a derivada segunda do espaço com relação ao tempo.

Obs. a= $S'' = \ddot{S}$.

Obs: Se uma função f depende de uma variável x a derivada $f(x)'$ nos fornece a taxa de variação instantânea de f com relação a x.

Exercícios:

1)Um móvel se desloca numa trajetória segundo a equação:

S= $5t^2 + 2t$,S em metros e t em segundos.

a)Determine a velocidade e a aceleração instantânea do móvel para t= 3 seg.

b)Construa o gráfico que representa espaço percorrido em função do tempo.

c)Construa o gráfico que representa velocidade em cada instante em função do tempo.

d)Construa o gráfico que represente a aceleração em função do tempo.

e)Em cada uma das situações dê o domínio e a imagem das funções envolvidas.

2)A tabela abaixo representa velocidade de um corpo que se desloca em função do tempo. Encontre:

a) A equação que representa a velocidade em função do tempo.

b)Construa o gráfico que representa a a velocidade em função do tempo.

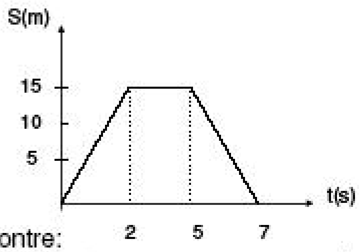
c).Encontre o valor da aceleração para t= 3seg.

d) Dê o domínio e a imagem da função que expressa a velocidade em função do tempo.

d) Dê o domínio e a imagem da função que fornece a aceleração em função do o tempo.

tempo	Velocidade
0	7
1	9
2	11
5	17

3) O gráfico abaixo representa o espaço percorrido por um corpo em função do tempo.



Encontre:

a) A equação que representa esta função.

b) Determine uma equação que forneça a velocidade em função do tempo.

c) Construa o gráfico que represente a velocidade em função do tempo.

4)O braço AO de 0,9 m de comprimento gira ao redor de O seu movimento está definido pela relação $\theta = 0{,}15t^2$, onde θ está expresso em radiano e t em segundos. O cursor B desliza ao longo do braço, sendo que seu deslocamento é relação a O é dado por r= $0{,}9 - 0{,}12t^2$, onde r é expresso em metros e t em segundos. Determine a velocidade e a aceleração total do cursor B após o braço AO ter girado de 30^0.

Obs:

Velocidade total é dada por:

V= $\sqrt{{v_r}^2 + v_\theta^2}$

Onde

V é a velocidade total.

v_r componente radial da velocidade

v_θ a velocidade angular.

A= $\sqrt{{a_r}^2 + a_\theta^2}$

A- aceleração total.

a_r componente tangencial da aceleração.

a_θ aceleração angular.

5)Um balão é inflado. Determine a taxa na qual o volume V variação do volume com relação ao raio (Sabendo que $V = \frac{4}{3}\pi r^3$).

ANEXO 11 – Tabelas auxiliares da análise das relações presentes nos mapas conceituais

Nas tabelas apresentadas para distinguir nas relações dos mapas dos alunos, as relações que podem indicar poder de transferência,são utilizados asteriscos colocados na frente da relação. Também utilizamos elipses coloridas, para indicar a presença de alguns dos elementos sinalizadores. As elipses são colocadas na tabela no final das proposições expressas pela aluna, que parecem indicar a presença de algum elemento sinalizador conforme a seguinte convenção:

Diferenciação progressiva	**RNO**- relação não observada
Reconciliação integrativa	**REA** –Relação expressa de forma adequada
Aprendizagem extra-conteúdo	**REI** -Relação expressa de forma não adequada

Também é utilizada uma elipse na cor preta, quando a proposição expressa, indicar compreensão dos conceitos envolvidos que não seja compatível com o significado que os mesmos possuem no contexto da disciplina. Na ultima coluna C não colocamos legenda para poupar espaço, mas esta se destina a classificação das relações conforme os critérios já estabelecidos no capítulo 6.

Tabela 1 – Relações expressas pelo aluno A $_1$ referentes à 1ª atividade de Modelagem

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
*Pressão é a variável dependente	*Variável pode ser dependente ou independente	REA
*Pressão e ocupação são grandezas proporcionais	*Pressão dividida por ocupação dá constante	REA
	*Pressão e ocupação são grandezas proporcionais	REA
*Pressão é a variável dependente		RNO
*Ocupação é a variável independente		RNO
*Pressão e ocupação se relacionam por uma função	*Pressão e ocupação são grandezas proporcionais que é apresentado como uma função	REA
*A relação entre a pressão é a ocupação é uma função do 1º grau	"Que no exemplo é uma função do 1º grau"	REA
*A função do 1º grau tem D=R		RNO
*A função do 1º grau tem |=R		RNO
* O domínio contém os valores da variável dependente		RNO
*A imagem contém os valores da variável dependente		RNO
*A função de 1º grau pode ser representada por equação		RNO
*A função do 1º grau pode ser representada por tabela		RNO
*Da tabela se obtém a equação		RNO
*Da tabela se obtém o gráfico		RNO
*Da equação se obtém tabela		RNO
*A equação na função de 1º grau tem forma geral y=ax +b		RNO
A função do 1º grau pode ser representada por gráfico	* e pode ser representada por gráfico	REA
	Função do 1º grau pode ser crescente	REA

Tabela 1 – Relações expressas pelo aluno A $_1$ referentes à 1ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	**Relações expressas no mapa do aluno**	**C**
	Função de 1º grau pode ser decrescente	RNO
	Função do 1º grau pode ser constante	RNO
*O gráfico é uma reta		RNO
	Eixo x pertence ao gráfico	REI
	Eixo y pertence ao gráfico	REI
* O gráfico representa uma função crescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 > y_2$		RNO
* O gráfico representa uma função decrescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 < y_2$		RNO
* A tabela representa uma função crescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 > y_2$		RNO
*A tabela representa uma função decrescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 < y_2$		RNO
A função do 1º grau possui coeficiente linear		RNO
* O coeficiente linear é o valor de b na forma geral		RNO
* O coeficiente linear informa a intersecção com o eixo das ordenadas	* "Coeficiente linear é onde corta o eixo y"	REA
O coeficiente linear é o valor de y quando x é zero		RNO
	"Coeficiente angular forma tangente com o eixo x"	REI
A função possui coeficiente angular		RNO
* O coeficiente angular na tabela é dado por a=$\frac{\Delta y}{\Delta x}$		RNO
* O coeficiente angular fornece a tangente do ângulo que o eixo forma com a reta		RNO
* O coeficiente angular é obtido pelo valor de a na equação na forma geral		RNO
* O coeficiente angular informa a taxa de variação de y com relação a x		RNO
* Se coeficiente angular é positivo a função é crescente		RNO
*Se o coeficiente angular é negativo a função é decrescente		RNO
*A equação da função constante tem forma geral y=k		RNO
*A função constante é um tipo de função		RNO
*Na função constante D=R		RNO
* Na função constante I={k}		RNO
*A função constante é representada por uma reta horizontal		RNO
*A reta vertical não representa uma função		RNO
O zero da função informa a intersecção com o eixo das abcissas		RNO
O zero da função torna a equação nula		RNO
O= 0,02p é um exemplo de equação		RNO
O coeficiente angular é igual a 0,02 em O=0,02p		RNO
Coeficiente linear é igual a 0 em O=0,02p		RNO
D=[0;5080,32] para O=0,02p		RNO
I=[0,100] para O=0,02p		RNO

Tabela 2 – Relações expressas pelo aluno A_3 referente à 1ª atividade de Modelagem

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
	Função do 1º grau possui variável independente e dependente	REA
*Pressão é a variável independente	*Variável independente é a pressão	REA
* Ocupação é a variável dependente	*Variável dependente é a ocupação	REA
* Pressão e ocupação se relacionam por uma função		RNO
*A relação entre a pressão e a ocupação é uma função do 1º grau		RNO
*A função do 1º grau tem D=R	* Função do 1º grau tem domínio R	REA
*A função do 1º grau tem I=R	* Função do 1º grau tem imagem R	REA
*O domínio contém os valores da variável dependente		RNO
*A imagem contém os valores da variável dependente		RNO
*A função de 1º grau pode ser representada por equação		RNO
*A função de 1º grau pode ser representada por tabela		RNO
*Da tabela se obtém o gráfico		RNO
* O gráfico determina a equação		RNO
*Equação determina gráfico		RNO
*A equação na função de 1º grau tem forma geral y=ax +b		RNO
*A função de 1º grau pode ser representada por gráfico	*Função do 1º grau tem gráfico é uma reta inclinada	REA
O gráfico é uma reta		
* O gráfico representa uma função crescente se $x_1 > x_2$ *então* $y_1 > y_2$		RNO
* O gráfico representa uma função decrescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 < y_2$		RNO
A função de 1º grau possui coeficiente linear	Função de 1º grau tem coeficiente linear	REA
*A tabela representa uma função crescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 > y_2$		RNO
*A tabela representa uma função decrescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 < y_2$		RNO
* O coeficiente linear é o valor de b na forma geral		RNO
*coeficiente linear informa intersecção com o eixo das ordenadas	*Coeficiente linear corta o eixo y	REA
* O coeficiente linear é o valor de y quando x é zero		RNO
A função possui coeficiente angular	Função de 1º grau tem coeficiente angular	REA
* O coeficiente angular na tabela é dado por a = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$		RNO
* O coeficiente angular na tabela é dado por a = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$		RNO
* O coeficiente angular fornece a tangente do ângulo que o eixo x foram com a reta		RNO

Tabela 2 – Relações expressas pelo aluno A_3 referente à 1ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
* O coeficiente angular é obtido pelo valor de a na equação na forma geral		RNO
* O coeficiente angular informa a taxa de variação de y com relação a x	*Coeficiente angular fornece taxa de variação entre ocupação e pressão	REI
* Se coeficiente angular é positivo a função é crescente	*Coeficiente angular é positivo é uma função crescente	REA
*Se o coeficiente angular é negativo a função é decrescente	*Coeficiente angular negativo é uma função decrescente	REA
*A equação da função constante tem forma geral y=k		RNO
*A função constante é um tipo de função		RNO
*Na função constante I=k	*Função constante tem imagem é K	REA
* Na função constante D=R	*Função constante tem domínio é R	REA
*A função constante é representada por uma reta horizontal	*A função constante tem gráfico é uma reta horizontal	REA
*Reta vertical não representa uma função	* Reta não é função quando vertical	REA
	Função do 1º grau tem zero da função	REA
* O zero da função informa a intersecção com o eixo das abcissas	*Zero da função valor onde corta o eixo x	REA
O zero da função torna nula a equação		RNO
O=0,02p é um exemplo de equação		RNO
	Função de 1º grau ex :O= 0,01968 p	REA
O coeficiente angular é igual a 0,02 em O=0,02p		RNO
Coeficiente linear é igual a 0 em O=0,02p		RNO
D=[0;5080,32] para O=0,02p		RNO
I=[0,100] para O=0,02p		RNO

Tabela 3 – Relações expressas pelo aluno A_4 referente à 1ª atividade de Modelagem

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
	Variável pode ser independente e dependente	REA
Pressão e ocupação são grandezas proporcionais		RNO
* Pressão é a variável independente	* Pressão é a variável independente	REA
* Ocupação é a variável dependente	* Ocupação é a variável dependente	REA
* Pressão e ocupação ser relacionam por uma função	* Pressão pode ter função,ocupação pode ter função	REI
*A relação entre a pressão e a ocupação é uma função do 1º grau	* Para calcular a pressão conforme a ocupação usamos função do 1º grau	REA
	Função do 1º grau é um tipo de função	REA
*A função do 1º grau tem D=R	* Função do 1º grau tem domínio R em geral	REA
*A função do 1º grau tem I=R		RNO
* O domínio contém os valores da variável dependente		RNO
*A imagem contém os valores da variável dependente		RNO
*A função de 1º grau pode ser representada por equação		RNO
*A função de 1º grau pode ser representada por tabela		RNO
*Da tabela se obtém gráfico		RNO

Tabela 3 – Relações expressas pelo aluno A_4 referente à 1ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
* O gráfico determina a equação e		RNO
*Equação determina gráfico		RNO
*A equação na função de 1º grau tem forna geral y=ax +b		RNO
*A função de 1º grau pode ser representada por gráfico		RNO
* O gráfico é uma reta	* Função de 1º grau pode ser representada por uma reta	REA
* O gráfico representa uma função crescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 > y_2$		RNO
*O gráfico representa uma função decrescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 < y_2$		RNO
*A tabela representa uma função crescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 > y_2$		RNO
*A tabela representa uma função decrescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 < y_2$		RNO
A função do 1º grau possui coeficiente linear	Função do 1º grau contém coeficiente linear	REA
* O coeficiente linear é o valor de b na forma geral		RNO
*O coeficiente linear informa a intersecção com o eixo das ordenadas	* Coeficiente linear é onde a reta corta o eixo y	REA
O coeficiente linear é o valor de y quando x é zero		RNO
A função possui coeficiente angular	Função de 1º grau contém coeficiente angular	REA
* O coeficiente angular na tabela é dado por a= $\frac{\Delta y}{\Delta x}$		RNO
* O coeficiente angular fornece a tangente do ângulo que o eixo x forma com a reta	* Coeficiente angular é tg α, onde α é o ângulo que a reta forma com o eixo x	REA
* O coeficiente angular é obtido pelo valor de a na equação na forma geral		RNO
* O coeficiente angular informa a taxa de varição de y com relação a x		RNO
*Se o coeficiente angular é positive a função é crescente		RNO
*Se o coeficiente angular é negativo a função é decrescente		RNO
*A equação na função constante tem forma y=k		RNO
*A função constante é um tipo de função		RNO
* Na função constante a I={k}		RNO
*Na função constante D=R		RNO
*A função constante é representada por uma reta horizontal		RNO
*Reta vertical não representa uma função		RNO
O zero da função informa a intersecção com o eixo das abcissas		RNO
O zero da função torna nula equação		RNO

Tabela 3 – Relações expressas pelo aluno A_4 referente à 1ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressa no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
O=0,02p é um exemplo de equação		RNO
O coeficiente angular é igual a 0,02 em O=0,02p		RNO
O coeficiente linear é igual a 0 em O=0,02p		RNO
D:[0;5080,32] para O=0,02p	Neste exemplo é [0;5080]	REA
I=[0,100] para O=0,02p		RNO

Tabela 4 – Relações expressas pelo aluno A_1 referente à 2ª atividade de Modelagem

Relações expressas no mapa no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
Valor da ligação depende da operadora		RNO
Valor da ligação depende do horário da chamada	Preço da ligação envolve horário	REA
Horário da chamada divide a tarifa em reduzida, normal e super-reduzida, diferenciada	Tarifa depende do horário	REA
	Tarifa pode ser normal, reduzida, super-reduzida e diferenciada	REA
Por hipótese o horário sera o horário normal	Horário escolhido é o normal	REA
Operadora define sistema de tarifação		RNO
Sistema de tarifação por hipótese utiliza pulso		RNO
	Preço envolve tempo	REA
Valor da ligação depende da distância geodésica	Preço da ligação envolve distância	REA
	Que é a distância geodésica entre Sapopema e Cornélio	REA
	Distância geodésica dá degraus	REA
	Degraus pode ser D_1, D_2, D_3 e D_4	REA
Distância geodésica depende das coordenadas geográficas entre as cidades envolvidas		RNO
Coordenadas geográficas são substituídas em $\cos a = sen(E_O).sen(E_d) +$ $\cos(E_O).\cos(E_d)\cos(G_O - G)_d$ Para encontrar arco esférico a, cuja medida linear é a distância geodésica		RNO
Por hipótese é D_3	Cornélio Sapopema é D_3	REA
*Valor da ligação telefônica é a variável dependente		RNO
* Tempo de duração da chamada é a variável independente		RNO
* Domínio contém os valores da variável independente		RNO
* Imagem contém os valores da variável dependente		RNO
*Variável dependente e variável independente podem ser relacionadas por uma função	* Preço da ligação telefônica e tempo forma função	REA
*Função definida por várias sentenças é um tipo de função	* E uma função definida por várias sentenças	REA
*Função definida por várias sentenças pode ser expressa por gráfico	* Função definida por várias sentenaças pode ser expressa por gráfico	REA
*Equação determina gráfico		RNO
*O gráfico projeta no eixo das abscissas se obtém o domínio		RNO
* O gráfico projeta no eixo das ordenadas se obtém a imagem		RNO

Tabela 4 – Relações expressas pelo aluno A_1 referente à 2ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
*A função definida por várias sentenças pode ser expressa algebricamente por $v(t)=\begin{cases}0 \text{ se } t\le 30\\ 0{,}3359 \text{ se } 30<t\le 60\\ 0{,}03359\frac{t}{6} \text{ se } t>60 \text{ e } \frac{t}{6}\in z\\ 0{,}03359(\left[\!\left[\frac{t}{6}\right]\!\right]+1) \text{ se } t>60 \text{ e } \frac{t}{6}\notin z\end{cases}$	*Função definida por várias sentenças é : $v(t)=\begin{cases}0 \text{ se } t\le 30\\ 0{,}3359 \text{ se } 30<t\le 60\\ 0{,}03359\frac{t}{6} \text{ se } t>60 \text{ e } \frac{t}{6}\in z\\ 0{,}03359(\left[\!\left[\frac{t}{6}\right]\!\right]+1) \text{ se } t>60 \text{ e } \frac{t}{6}\notin z\end{cases}$	REA
*V(t) tem sentenças dadas por função do 1º grau	*V contém função do 1º grau	REA
*V(t) tem sentenças dadas por função constante	*V contém função constante	REA
*V(t) tem sentenças dadas por função maior inteiro	*V contém função maior inteiro	REA
	$v=0 \text{ se } t<30$ $0{,}3359 \text{ se } 30<t\le 60$ é função constante	REA
	$v=\frac{t}{6}.0{,}00359 \text{ se } t>60 \text{ e } \frac{t}{6}\in Z$ É função do 1º grau	REA
	$0{,}03359(\left\|\frac{t}{6}\right\| \text{ se } t>0 \text{ e } \frac{t}{6}\notin Z$ e t>60é função maior inteiro	REA
D: R_+		RNO
Im: $\{0\}\cup\{0{,}03359K, K\ge 10, K\in Z\}$		RNO

Tabela 5 – Relações expressas pela aluna A_2 referente à 2ª atividade de Modelagem

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa da aluna	C
Valor da ligação depende da operadora		RNO
Valor da ligação depende do horário da chamada Valor da ligação depende da distância geodésica	"Através do tempo de ligação , do dia , do horário e distância geodésica que define o preço da ligação"	REA
	Tempo é medido a cada 6 segundos que é 1 pulso	REA
Por hipótese o horário sera o horário normal		RNO
Operadora define sistema de tarifação		RNO
Horário da chamada divide a tarifa em reduzida normal e super reduzida	Através do horário e do tempo é que descobrimos se a tarifa é super-reduzida , normal, diferenciada ou reduzida	REA
Por hipótese o horário será o horário normal		RNO
Valor da ligação depende da distância geodésica		RNO
Distância geodésica depende das coordenadas geográficas entre as cidades envolvidas	Distância geodésica é calculada através de uma fórmula que contém seno, cosseno, latitude e longitude	REI
Distância geodésica depended as coordenadas geográficas entre as cidades envolvidas	Distância geodésica é calculada através de uma fórmula que contém seno, cosseno, latitude e longitude	REI

Tabela 5 – Relações expressas pela aluna A_2 referente à 2ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa da aluna	C
Coordenadas geográficas são substituídas em : $\cos a = sen(E_O).sen(E_d) + \cos(E_O).\cos(E_d)\cos(G_O - G)_d$ para encontrar a medida angular do arco a , cuja medida linear é a distância geodésica		RNO
	Distância geodésica determina degrau, que é classificado em degrau 1, degrau 2, degrau 3 e degrau 4	REA
Por hipótese é D_3		REA
*Valor da ligação telefônica é a variável dependente	Preço da ligação é a variável dependente	REA
* Tempo de duração da chamada é a variável independente	*Tempo é a variável independente	REA
*Domínio contém os valores da variável independente		RNO
* Imagem contém os valores da variável dependente		RNO
*Variável dependente e variável independente podem ser relacionadas por uma função		RNO
*Função definida por várias sentenças é um tipo de função		RNO
*Função definida por várias sentenças pode ser expressa por gráfico	*Função definida por várias sentenças pode ser expressa por gráfico	REA
	Gráfico contém variável dependente e variável independente	REA
	Variável dependente depende da independente	
A função definida por várias sentenças pode ser expressa algebricamente por : $v(t) = \begin{cases} 0 \text{ se } t \leq 30 \\ 0{,}3359 \text{ se } 30 < t \leq 60 \\ 0{,}03359\frac{t}{6} \text{ se } t > 60 \text{ e } \frac{t}{6} \in z \\ 0{,}03359(\left\|\frac{t}{6}\right\| + 1) \text{ se } t > 60 \text{ e } \frac{t}{6} \notin z \end{cases}$	* Preço da ligação pode ser calculado através de função definida por várias sentenças: $v(t) = \begin{cases} 0 \text{ se } t \leq 30 \\ 0{,}3359 \text{ se } 30 < t \leq 60 \\ 0{,}03359\frac{t}{6} \text{ se } t > 60 \text{ e } \frac{t}{6} \in z \\ 0{,}03359(\left\|\frac{t}{6}\right\| + 1) \text{ se } t > 60 \text{ e } \frac{t}{6} \notin z \end{cases}$	REA
*Equação determina gráfico		RNO
Gráfico projeta no eixo das abscissas se obtém o dominio		RNO
*V(t) tem sentenças dadas por função do 1º grau *V(t) tem sentenças dadas por função constante *V(t) tem sentenças dadas por função maior inteir	*Função de várias sentenças contém função constante, função maior inteiro, função do 1º grau	REA
	V(t)= 0 se t< 30 é um exemplo de função constante	REA
	V(t) = 0,03359 se $30 \leq t \leq 60$ é um exemplo de função constante	REA
D: R_+		RNO
Im: $\{0\} \cup \{0{,}03359K, K \geq 10, K \in Z\}$		RNO

Tabela 5 – Relações expressas pela aluna A_2 referente à 2ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressa no mapa da aluna	C
	$0{,}03359(\left\|\frac{t}{6}\right\|$ se $t > 0$ e $\frac{t}{6} \not\in Z$ e t>60 é um exemplo de função maior inteiro	REA
	$v(t) = (0{,}03359\frac{t}{6})$ se $t > 60$ e $\frac{t}{6} \in Z$ é um exemplo de função do 1º grau	REA

Tabela 6 – Relações expressas pelo aluno A_3 referentes à 2ª atividade de Modelagem

Relações expressa no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
	Situação problema é determinar o valor da ligação telefônica	REA
	Situação problema possui variável dependente	REA
	Situação problema possui variável independente	REA
Valor da ligação depende da operadora	Valor da ligação é definida pela operadora	REA
Valor da ligação depende do horário da chamada	Valor da ligação é definido pelo horário	REA
Valor da ligação depende da distância geodésica	Valor da ligação é definida pela distância geodésica	REA
	Distância geodésica é dada por latitude	REI
	Distância geodésica é dada por longitude	REI
	Distância geodésica é dada por seno	REI
	Distância geodésica é dada por cosseno	REI
Valor da ligação depende do tempo da chamada	Valor da ligação depende do tempo de ligação	REA
Horário da chamada divide a tarifa em reduzida, super-reduzida, normal e diferenciada		RNO
Por hipótese o horário sera o horário normal	Horário é normal	REI
	Valor da ligação é definido pelo plano	REA
Operadora define sistema de tarifação		
Sistema de tarifação por hipótese utiliza pulso	Plano define pulso	REA
Distância geodésica depended as coordenadas geográficas entre as cidades envolvidas		RNO
Coordenadas geográficas são substituídas em $\cos a = sen(E_O).sen(E_d) + \cos(E_O).\cos(Ed)\cos(G_O - G)_d$ Para encontra a medida em graus do arco esférico a , cuja medida linear é a distância geodésica		RNO
Por hipótese é D_3		RNO
*Valor da ligação telefônica é a variável dependente	*Valor da ligação é a variável dependente	REA
*Tempo de duração da chamada é a variável independente	* Tempo de ligação é a variável independente	REA
* Domínio contém os valores da variavél independente		RNO

Tabela 6 – Relações expressas pelo aluno A_3 referentes à 2ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressas pelo mapa de referência	Relações expressas pelo mapa do aluno	C
* Imagem contém os valores da variável dependente		RNO
*Variável dependente e variável independente podem ser relacionadas por uma função	*T e v definem a função	REA
*Função definida por várias sentenças é um tipo de função	* Função pode ser definida por várias sentenças	REA
* A função definida por várias sentenças pode ser representada por gráfico	* Função pode ser representada por gráfico	REA
*A função definida por várias sentenças pode ser expressa por: $v(t)=\begin{cases}0 \text{ se } t\le 30\\ 0{,}3359 \text{ se } 30<t\le 60\\ 0{,}03359\frac{t}{6} \text{ se } t>60 \text{ e } \frac{t}{6}\in z\\ 0{,}03359(\left\|\frac{t}{6}\right\|+1) \text{ se } t>60 \text{ e } \frac{t}{6}\notin z\end{cases}$	* Função definida por várias sentenças é definida por : $v(t)=\begin{cases}0 \text{ se } t\le 30\\ 0{,}3359 \text{ se } 30<t\le 60\\ 0{,}03359\frac{t}{6} \text{ se } t>60 \text{ e } \frac{t}{6}\in z\\ 0{,}03359(\left\|\frac{t}{6}\right\|+1) \text{ se } t>60 \text{ e } \frac{t}{6}\notin z\end{cases}$	REA
*Equação determina gráfico		RNO
* O gráfico projeta no eixo das abscissas se obtém o domínio		RNO
* O gráfico projeta no eixo das ordenads se obtém a imagem		RNO
*V(t) tem sentenças dadas por função do 1º grau	*V(t) contém função constante	REA
*V(t) tem sentenças dadas por função constante	*V(t) contém função de 1º grau	REA
*V(t) tem sentenças dadas por função maior inteiro	*V(t) contém função maior inteiro	REA
D: R_+		RNO
Im: $\{0\}\cup\{0{,}03359K, K\ge 10, K\in Z\}$		RNO
	Função constante ex:0,3359 se $30<t\le 60$ e 0 se $t\le 30$	REA
	Função do 1º grau exemplo 0,03359t/6 se t>60 e $t/6\in Z$	REA
	Função maior inteiro $0{,}03359(\left\|\frac{t}{6}\right\|$ se $t>0$ e $\frac{t}{6}\notin Z$ e t>60	REA

Tabela 7 – Relações expressas pelo aluno A_4 referente à 2ª atividade de Modelagem

Relações expressas no mapa de referencia	Relações expressas no mapa do aluno	C
Valor da ligação depende do horário da chamada	Valor a ligação depende do horário	REA
Valor da ligação depended a distância geodésica	Valor da ligação depende da distância geodésica	REA
Valor da ligação depende do tempo de duração da chamada	Valor da ligação depende do tempo de conversa	REA
Horário da chamada divide a tarifa em reduzida, normal , super-reduzida e diferenciada		RNO

Tabela 7 – Relações expressas pelo aluno A_4 referente à 2ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressas no mapa de referencia	Relações expressas no mapa do aluno	C
Por hipótese sera horário normal		RNO
Operadora define sistema de tarifação		RNO
Sistema de tarifação por hipótese utiliza pulso		RNO
Distância geodésica depende das coordenas geográficas das cidades envolvidas		RNO
Coordenadas geográficas são substituídas em $\cos a = sen(E_O).sen(E_d)+\cos(E_O).\cos(E_d)\cos(G_O - G)_d$ para encontrar a medida em graus do arco esférico a, cuja medida linear é a distância geodésica		RNO
	Distância geodésica define degraus tarifaricos	REA
	Distância geodésica cálculo envolve, latitude, longitude, seno e cosseno	REI
	Degraus tarifáricos pode ser degrau 1, degrau 2, degrau 3, degrau 4	REA
Por hipótese é D_3		RNO
*Valor da ligação telefônica é a variável dependente	* Valor da ligação é a variável dependente	REA
*Tempo de duração da chamada é a variável independente	*Tempo de conversa é a variável independente	REA
*Dominio contém os valores da variável independente		RNO
* Imagem contém os valores da variável dependente		RNO
*Variável dependente e independente podem ser relacionadas por uma função	* Variável dependente e a independente formam função	REA
*Função definida por várias sentenças é um tipo de função		RNO
*A função de várias sentenças pode ser expressa por gráfico		
*Equação determina gráfico		RNO
*Gráfico projeta no eixo das abscissas se obtém domínio		RNO
*Gráfico projeta no eixo das ordenadas se obtém imagem		RNO
*V(t) tem sentença dada por função do 1º grau	*V(t) possui função do 1º grau	REA
*V(t) tem sentença dada por função constante	*V(t) possui função constante	REA
*V(t) tem sentença expressa por função maior inteiro	*V(t) contém função maior inteiro	REI
	*V(t) possui função nula	REI
D:R_+		RNO
Im: $\{0\} \cup \{0{,}03359K, K \geq 10, K \in Z\}$		RNO
	Função nula ex: v=0 se t<30'	REA
	Função constante ex: v=0,3359 se 30'<t≤60'	REA

Tabela 7 – Relações expressas pelo aluno A_4 referente à 2ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressas no mapa de referencia	Relações expressas no mapa do aluno	C
Função definida por várias sentenças pode ser expressa algebricamente por $v(t)=\begin{cases} 0 \text{ se } t \leq 30 \\ 0{,}3359 \text{ se } 30 < t \leq 60 \\ 0{,}03359\frac{t}{6} \text{ se } t > 60 \text{ e } \frac{t}{6} \in z \\ 0{,}03359(\left\Vert \frac{t}{6} \right\Vert +1) \text{ se } t > 60 \text{ e } \frac{t}{6} \notin z \end{cases}$	*Função de várias sentenças é $v(t)=\begin{cases} 0 \text{ se } t \leq 30 \\ 0{,}3359 \text{ se } 30 < t \leq 60 \\ 0{,}03359\frac{t}{6} \text{ se } t > 60 \text{ e } \frac{t}{6} \in z \\ 0{,}03359(\left\Vert \frac{t}{6} \right\Vert +1) \text{ se } t > 60 \text{ e } \frac{t}{6} \notin z \end{cases}$	REA
	$V = \frac{t}{6} 0{,}03359$ se $t>60$ e $\frac{t}{6} \in Z$	REA
	$0{,}03359(\left\Vert \frac{t}{6} \right\Vert$ se $t > 0$ e $\frac{t}{6} \notin Z$ e $t>60$	REA

Tabela 8 – Relações expressas pelo aluno A_1 referentes à 3ª atividade de Modelagem

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
	Atividade sonora contém variáveis	REA
*O nível de intensidade sonora é a variável independente.	* Variável independente é o nível sonoro	REA
*O tempo é a variável dependente.	* Variável dependente é o tempo	REA
*A intensidade sonora e o tempo de exposição podem ser relacionados por uma função		RNO
A função exponencial é um tipo de função		
*O domínio contém os valores da variável independente		
*A imagem contém os valores da variável dependente.		
*Função exponencial tem por hipótese D:[92,115]	* Função exponencial tem D:[92,115]	REA
*A função exponencial tem I: [0.25,6].	* Função exponencial tem Im: [0.25,6]	REA
*A função exponencial pode ser representada por gráfico.	*Função exponencial pode ser representada por gráfico.	REA
*A função exponencial pode ser representada por tabela.		RNO
*A função exponencial pode ser representada por equação. Por ex: $t = 2.10^8.e^{-0,1382}$		RNO
*Gráfico projeta no eixo das abcissas e se obtém a imagem.		RNO
*A tabela permite obter a curva de tendência.	* Nível sonoro e o tempo de exposição formam a curva de tendência	REI
	Curva de tendência é uma função exponencial	REI
*Gráfico projeta no eixo das ordenadas e se obtém o domínio.		RNO
*Por meio da curva de tendência se obtém com o auxílio do excel a equação		RNO
* Por meio da curva de tendência se obtém com o auxílio do Excel o gráfico		RNO

Tabela 8 – Relações expressas pelo aluno A_1 referentes à 3ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
*Pela tabela como $x_1 > x_2$ **implica** $y_1 < y_2$ temos que a função é decrescente		RNO
*Pelo gráfico como para $x_1 > x_2$ **implica** $y_1 < y_2$ temos que a função é decrescente		RNO
* Na equação como a base está entre 0 e 1 temos que a função é decrescente		RNO

Tabela 9 – Relações expressas pela aluna A_2 referentes à 3ª atividade de Modelagem

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa da aluna	C
	Problema real é tempo de exposição a intensidade sonora p/ 100Dc.	REI
	Dados do tempo de exposição e do nível sonoro podem ser representados no Excel	REA
	Dados do tempo de exposição e do nível sonoro podem ser representados no papel milimetrado	REA
	Variáveis podem ser dependente e independente.	REA
*O nível de intensidade sonora é a variável independente.	*Nível sonoro é variável independente.	REA
*O tempo é a variável dependente.	*Tempo máximo de exposição é variável dependente	REA
*A intensidade sonora e o tempo de exposição podem ser relacionados por uma função		
A função exponencial é um tipo de função	Função pode ser exponencial	REA
	Função pode ser logarítmica	REA
	Função pode ser linear	REA
*O domínio contém os valores da variável independente		
*A imagem contém os valores da variável dependente.		
*Função exponencial tem por hipótese D:[92,115].	*Exponencial tem D:[92,115]	REA
*A função exponencial tem I: [0.25,6].	*Exponencial tem Imagem [0.25,6]	REA
*A função exponencial pode ser representada por gráfico.	*Função pode ser representada por gráfico	REA
*A função exponencial pode ser representada por tabela.		
*A função exponencial pode ser representada por equação. Por ex: $t = 2.10^8.e^{-0,1382}$	*Função pode ser representada por equação que é $t = 2.10^8.e^{-0,1382}$	REA
*Gráfico projeta no eixo das abcissas e se obtém a imagem.		
*A tabela permite obter a curva de tendência		
*Gráfico projeta no eixo das ordenadas e se obtém o domínio.		
*Por meio da curva de tendência se obtém com o auxílio do Excel a equação	* Excel fornece a curva de tendência que ajuda a escolher a função. *Excel fornece equação	REA REA

Tabela 9 – Relações expressas pela aluna A_2 referentes à 3ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa da aluna	C
*Por meio da curva de tendência se obtém com o auxílio do excel o gráfico	* Excel fornece gráfico	REA
	* Excel fornece R^2	REA
	*R^2 varia entre 0 e 1	REA
	R^2= 1 para t= $t = 2.10^8.e^{-0,1382}$	REA
*Pela tabela como $x_1 > x_2$ implica $y_1 < y_2$ temos que a função é decrescente.		RNO
Gráfico determina equação		RNO
*Pelo gráfico como $x_1 > x_2$ implica que $y_1 > y_2$ então a função é decrescente.		RNO
*Na equação como a base está entre 0 e 1 temos que a função é decrescente		RNO
	t(100)=2 é o tempo de exposição a intensidade sonora p/100 Dc.	REA
	T(100)=2 é a solução do problema real	REA

Tabela 10 – Relações expressas pelo aluno A_3 referentes à 3ª atividade de Modelagem

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
*A intensidade sonora e o tempo de exposição podem ser relacionados por uma função		RNO
	* Modelo é função exponencial	REA
	*Modelo tem erro dado por $erro = \frac{(v.\mathrm{mod}elo - v.real).100}{v.\mathrm{mod}elo}$	REA
*O nível de intensidade sonora é a variável independente.	*Variável independente é nível sonoro	REA
*O tempo é a variável dependente.	*Variável dependente é tempo de exposição	REA
*A função exponencial é um tipo de função	*Função pode ser função exponencial	REA
	Função exponencial tem variável dependente	REA
	Função exponencial tem variável independente.	REA
*O domínio contém os valores da variável independente	*"Os valores do nível sonoro estão contidos no domínio "	REA
*A imagem contém os valores da variável dependente.	*"Os valores do tempo de exposição estão contidos na imagem"	REA
	Função exponencial tem domínio	REA
*Função exponencial tem por hipótese D:[92,115].	*Domínio é [92,115]	REA
*A função exponencial tem I: [0.25,6].	*Imagem é [0.25; 6]	REA
*A função exponencial pode ser representada por gráfico.	*Função exponencial tem gráfico	REA
*A função exponencial pode ser representada por tabela.		RNO
*A função exponencial pode ser representada por equação. Por ex: $t = 2.10^8.e^{-0,1382}$	* Função exponencial tem equação que é $t = 2.10^6.{-1,38.10^{-1}i}$	REA

Tabela 10 – Relações expressas pelo aluno A_3 referentes à 3ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
*Gráfico projeta no eixo das abcissas e se obtém a imagem.		RNO
*A tabela permite obter a curva de tendência		RNO
Gráfico determina equação		RNO
*Gráfico projeta no eixo das ordenadas e se obtém o domínio.	*Gráfico vizualiza domínio	REA
*Por meio da curva de tendência se obtém com o auxilio do Excel a equação	*Gráfico vizualiza imagem	REA
*Por meio da curva de tendência se obtém com o auxílio do Excel o gráfico		RNO
	Função exponencial é decrescente	REA
*Pela tabela como $x_1 > x_2$ implica $y_1 < y_2$ temos que a função é decrescente	*Gráfico vizualiza que a função é decrescente	REA
* Na equação como a base está entre 0 e 1 temos que a função é decrescente	*Equação base entre 0 e 1 decrescente	REA

Tabela 11 – Relações expressas pelo aluno A_4 referentes à 3ª atividade de Modelagem

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
	Problema tem variável	REA
	Variável pode ser dependente	REA
	Variável pode ser independente	REA
*A intensidade sonora e o tempo de exposição podem ser relacionados por uma função		RNO
	Tempo depende do nível	REA
*O nível de intensidade sonora é a variável independente.	* Tempo é a variável dependente	REA
*O tempo é a variável dependente.	* Nível é a variável independente	REA
*A função exponencial é um tipo de função		RNO
*O domínio contém os valores da variável independente		RNO
*A imagem contém os valores da variável dependente.		RNO
*Função exponencial tem por hipótese D:[92,115].		RNO
A função exponencial tem imagem I:[0.25,6]		RNO
*A função exponencial pode ser representada por gráfico.	*Função exponencial pode ser representada por gráfico	REA
*A função exponencial pode ser representada por tabela.		RNO
*A função exponencial pode ser representada por equação. Por ex: $t = 2.10^8.e^{-0,1382i}$	*Função exponencial pode ser representada por $t = 2.10^8.e^{-0,1382n}$	REA
*Gráfico projeta no eixo das abcissas e se obtém a imagem.		RNO
*Tabela permite obter curva de tendência		RNO

Tabela 11 – Relações expressas pelo aluno A_4 referentes à 3ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
	"Usando os valores do nível e do tempo no Excel pode-se construir uma função exponencial	REA
	Função exponencial é um modelo	REA
Por meio da curva de tendência se obtém com o auxílio do Excel o gráfico		RNO
*Gráfico projeta no eixo das ordenadas e se obtém o domínio.		RNO
*Por meio da curva de tendência se obtém com o auxilio do Excel a equação		RNO
*Por meio da curva de tendência se obtém com o auxílio do Excel o gráfico		RNO
*Gráfico determina a equação		RNO
	*Função exponencial é decrescente	REA
*Pela tabela como $x_1 > x_2$ implica $y_1 < y_2$ temos que a função é decrescente.		RNO
*Pelo gráfico como $x_1 > x_2$ implica $y_1 < y_2$ temos que a função é decrescente.	*Decrescente vejo pelo gráfico	REA
*Na equação como a base está entre 0 e 1 temos que a função é decrescente		RNO

Tabela 12 – Relações expressas pelo aluno A_1 eferente à 4ª atividade de Modelagem

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
Ensaio de tração utiliza corpo de prova		RNO
Corpo de prova tem módulo de elasticidade		RNO
Ensaio de tração aplica força		RNO
Corpo de prova tem área da secção		RNO
Força age sobre a área da secção e gera tensão	$T = \frac{F}{A}$	REA
Força provoca deformação do corpo de prova		RNO
*Tensão e deformação por hipótese são proporcionais		RNO
Tensão e deformação tem relação representada no diagrama tensão deformação		RNO
	Ensaio de tração tem variáveis	REA
	Variáveis estão na tabela	REI
	Variáveis são dependentes e independentes	REA
*Tensão é a variável dependente	* Tensão é variável dependente	REA
*A variável dependente é representada no eixo das ordenadas	* Variável dependente está no eixo das ordenadas	REA
*A variável independente é representada no eixo das abcissas	*Variável independente é a deformação	REA
*Deformação é a variável independente	*Variável independente está no eixo das abcissas	REA
Deformação é permanente na fase plástica		RNO
Deformação é Temporária na fase elástica		RNO
Diagrama tensão deformação tem fase plástica	Deformação tem fase plástica	REA

Tabela 12 – Relações expressas pelo aluno A_1 eferente à 4ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
Diagrama tensão deformação tem fase elástica	Deformação tem fase elástica	REA
Diagrama tensão deformação é uma curva de tendência		RNO
	*Função é do tipo de várias sentenças	REA
*Fase elástica é representada por um modelo que é uma função	*Função represente o diagrama tensão deformação	REA
*A tabela fornece dados que permitem construir a curva de tendência.	* deformação é a tensão fornecem dados da curva de tendência de onde tiramos o diagrama tensão deformação	REA
*A curva de tendência permite encontrar o modelo.		RNO
*O gráfico é uma reta *O tipo de função é função do 1º grau.	*Parte da função é de 1º grau *Função do 1º grau pode ser representada por uma reta	REA REA
	Reta é crescente	REA
*A função do1º grau pode ser representada por equação Ex: T=20303,67 ε .	*Função do 1º grau é representada por T=20303,67 ε	REA
*A função do 1º grau pode ser representada por gráfico		RNO
*Como se $x_1 > x_2$ então $y_1 > y_2$ a função é crescente		RNO
A função do primeiro grau tem domínio		RNO
*O domínio é o conjunto de valores da variável independente		RNO
A função do 1º grau possui imagem		RNO
*A imagem é o conjunto dos valores da variável dependente		RNO
*A função do 1º grau pode ser representada por tabela		RNO
*A reta possui inclinação		RNO
* O gráfico determina a equação		RNO
*Tabela determina gráfico		RNO
* O coeficiente angular é fornecido pela inclinação da reta O coeficiente angular fornece o módulo de elasticidade	* Coeficiente angular é igual a tg do ângulos que o gráfico forma com o eixo das abcissas Fase elástica temos módulo de elasticidade dado por tg α	REA REA
*O coeficiente angular fornece a taxa de variação de T com relação a ε		RNO
* O coeficiente angular é o a da equação	* T= 20303,67 ε onde coeficiente angular é 20303,67	REA
*T=20303,67 é um exemplo de função crescente Como o coeficiente angular é maior que zero a função é crescente	* Coeficiente angular é 20303,67 a>0 reta é crescente	REA
*Gráfico projeta no eixo das abcissas fornece o domínio que é dado por D:[0,0.1371]		RNO
*O gráfico projeta no eixo das ordenadas e obtém a imagem que é dada por I:[0,25.3298]		RNO

Tabela13 – Relações expressas pela aluna A_2 referentes à 4ª atividade de Modelagem

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa da aluna	C
	Situação problema é determinar o módulo de elasticidade do aço 1020	REA
	Situação problema possui dados	REA
	Dados são obtidos através de ensaio de tração	REA
Ensaio de tração utiliza corpo de prova		RNO
Corpo de prova tem módulo de elasticidade		RNO
Ensaio de tração aplica força	No ensaio de tração é aplicada força	REA
Corpo de prova tem área da secção Força age sobre a área da secção e gera tensão	Força produz tensão $T=\frac{F}{A}$	REA
Força provoca deformação do corpo de prova	Força produz deformação $\varepsilon=\frac{L-L_0}{L}$	REA
*Tensão e deformação por hipótese são proporcionais	*Deformação e tensão são proporcionais	REA
Tensão e deformação têm relação representada no diagrama tensão deformação	Com os dados da Tensão e da deformação traça o diagrama tensão deformação	REA
*Tensão é a variável dependente *A variável dependente é representada no eixo das ordenadas	*Tensão é marcada no eixo das ordenadas que é o eixo da variável dependente.	REA
*Deformação é a variável independente *A variável independente é representada no eixo das abcissas	*Deformação é marcada no eixo das abcissas que é o eixo da variável independente	REA
Deformação é permanente na fase plástica Deformação é temporária na fase elástica	Deformação pode ser permanente e temporária Permanente na fase plástica Temporária na fase elástica	REA REA REA
Diagrama tensão deformação tem fase plástica		RNO
Diagrama tensão deformação tem fase elástica		RNO
Diagrama tensão deformação é uma curva de tendência	Do Diagrama tensão deformação é obtidos a curva de tendência	REI
	Curva de tendência parece uma reta até o limite de elásticidade	REA
Como para $x_1 > x_2$ tempos $y_1 > y_2$ a função ´é crescente		RNO
A função do 1º grau tem domínio		RNO
O domínio é o conjunto dos valores da variável independente		RNO
A função do 1º grau contém imagem		RNO
A imagem é o conjunto dos valores da variável dependente		RNO
*A função do 1º grau pode ser representada por tabela		RNO
*A reta possui inclinação		RNO
* O gráfico determina a equação		RNO

Tabela 13 – Relações expressas pela aluna A_2 referentes à 4ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa da aluna	C
*Fase elástica é representada por um modelo que é uma função *A tabela fornece dados que permitem construir curva de tendência *A curva de tendência permite encontrar o modelo * O tipo de função é função do 1º grau *A função do 1º grau pode ser representada pela equação ex:T=20303,67 ε *A função do 1º grau pode ser representada por gráfico.*O gráfico é uma reta	*Com os dados da tensão e da deformação montamos o diagrama tensão deformação * Diagrama tensão deformação é obtido da curva de tendência * Curva de tendência é uma reta até o fim da fase elástica Fase elástica gráfico é uma reta A reta representa a função de 1º grau * Função do 1º grau é dada por T=E ε *T=E ε é o modelo da fase elástica	REA REA REA REA REA REA REA
Tabela determina gráfico		RNO
* O coeficiente angular é fornecido pela inclinação da reta	* Coeficiente angular é tg α	REA
*O coeficiente angular fornece a taxa de variação de Te com relação a ε	*Coeficiente angular fornece taxa de variação de T com relação a ε	REA
* O coeficiente angular é o a da equação	*T-E ε Coeficiente angular fornece o módulo de elasticidade do aço 1020	REA
*Como coeficiente angular é positivo a função é crescente		RNO
*Gráfico projeta no eixo das abcissas fornece o domínio que é dado por D:[0,0.1371]		RNO
*O gráfico projeta no eixo das ordenadas e obtém a imagem que é dada por I:[0,25.3298]		RNO
O coeficiente angular fornece o módulo de elasticidade	Coeficiente angular é o módulo de elasticidade do aço 1020	REA

Tabela 14 – Relações expressas pelo aluno A_3 referentes à 4ª atividade de Modelagem

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
	Situação problema determinar módulo de elasticidade	REA
	*Situação problema tem variáveis	REA
Ensaio de tração utiliza corpo de prova		RNO
Corpo de prova tem módulo de elasticidade		RNO
Ensaio de tração aplica força		RNO
Corpo de prova tem área da secção		RNO
Força age sobre a área da secção e gera tensão		RNO
Força provoca deformação do corpo de prova		RNO
*Tensão e deformação por hipótese são proporcionais		RNO
Relações expressas no mapa de referência	**Relações expressas no mapa do aluno**	**C**
Tensão e deformação tem relação representada no diagrama tensão deformação		RNO
*Tensão é a variável dependente	*Tensão é a variável dependente do diagrama tensão deformação	REA
*A variável independente é representada no eixo das abcissas		RNO
*Deformação é a variável independente	*Deformação é a variável independente do diagrama tensão deformação	REA
*A variável dependente é representada no eixo das ordenadas		RNO
Deformação é permanente na fase plástica	Fase plástica tem deformação permanente	REA
Deformação é temporária na fase elástica	Fase elástica tem deformação temporária	REA
Diagrama tensão deformação tem fase plástica	Diagrama tensão deformação tem fase plástica	REA
Diagrama tensão deformação tem fase elástica	Diagrama tensão deformação tem fase elástica	REA
Diagrama tensão deformação é uma curva de tendência		RNO
*Fase elástica é representa por um modelo que é uma função.		RNO
*A tabela fornece dados que permitem construir a curva de tendência.		RNO
*A curva de tendência permite encontrar o modelo		RNO
*O gráfico é uma reta *O tipo de função é função do 1º grau.	Fase elástica pode ser representada por uma reta * Reta representa uma função do 1º grau *Função de 1º grau tem gráfico que é uma reta	REA REA REA
*A função do1º grau pode ser representada por equação Ex: $T=20303{,}67\varepsilon$.	* Função do 1º grau tem lei de formação é da por $T=20303{,}67\varepsilon$	REA
*A função do 1º grau pode ser representada por gráfico		RNO
*Como para $x_1 > x_2$ temos $y_1 > y_2$ a função é crescente		RNO
*A função do primeiro grau tem domínio	*Função do 1º grau tem domínio e o domínio é [0,0.0013]	REA
*O domínio é o conjunto de valores da variável independente		RNO

Tabela 14 – Relações expressas pelo aluno A_3 referentes à 4ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
*A função de 1º grau possui imagem [0,25,3298]	* Função do 1º grau tem imagem é [0,0.25.3]	REA
*A imagem é o conjunto dos valores da variável dependente		RNO
*A função do 1º grau pode ser representada por tabela		RNO
*A reta possui inclinação		RNO
* O gráfico determina a equação		RNO
*Tabela determina gráfico		RNO
*O coeficiente angular é fornecido pela inclinação da reta	*Coeficiente angular é tg α	REA
	Função do 1º grau tem coeficiente angular	REA
*O coeficiente angular é fornecido pela inclinação da reta	*Coeficiente angular é tg α	REA
*O coeficiente angular fornece a taxa de variação de T com relação a ε	* Coeficiente angular 20303,67 é a taxa de variação de T com relação a ε	REA
*O coeficiente angular é o a da equação	*T=20303,67 ε 20303,67 é o coeficiente angular	REA
*T=20303,67 ε é um exemplo de função crescente	* Função do 1º grau é crescente	REA
*Como o coeficiente angular é maior que zero a função é crescente	* Coeficiente angular é positivo função crescente.	REA
*Gráfico projeta no eixo das abcissas fornece o domínio que é dado por D:[0,0.1371]		RNO
*O gráfico projeta no eixo das ordenadas e obtém a imagem que é dada por I:[0,25.3298]		RNO
O coeficiente angular fornece o módulo de elasticidade	Coeficiente angular é o módulo de elasticidade	REA

Tabela 15 – Relações expressas pelo aluno A_4 referentes à 4ª atividade de Modelagem

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
Ensaio de tração utiliza corpo de prova	Ensaio de tração usa corpo de prova	REA
Corpo de prova tem módulo de elasticidade	Corpo de prova tem módulo de elasticidade	REA
Ensaio de tração aplica força Corpo de prova tem área da secção Força age sobre a área da secção e gera tensão Força provoca deformação do corpo de prova	Ensaio de tração usa força Força age sobre o corpo de prova Corpo de prova sofre deformação Força age sobre área da secção Área da secção sofre tensão	REA REA REA REA REA
*Tensão e deformação por hipótese são proporcionais		RNO
Tensão e deformação tem relação representada no diagrama tensão deformação		RNO
	Tensão varia de acordo com a força na fase plástica	REA
*Tensão é a variável dependente	*Tensão é a variável dependente	REA
*A variável dependente é representada no eixo das ordenadas	*Variável dependente está no eixo das ordenadas	REA
*A variável independente é representada no eixo das abcissas	*Variável independente está no eixo das abcissas	REA
*Deformação é a variável independente	*Deformação é a variável independente	REA
	Ensaio de tração tem fase elástica	REA
	Ensaio de tração tem fase plástica	REA
	Fase elástica tem curva de tendência	REA
Deformação é permanente na fase plástica		RNO
Deformação é Temporária na fase elástica		RNO
Diagrama tensão deformação representa fase elástica		RNO
Diagrama tensão deformação é uma curva de tendência		RNO
*Fase elástica é representa por um modelo que é uma função.		RNO
*A tabela fornece dados que permitem construir a curva de tendência.		RNO
*A função do1º grau pode ser representada por equaçãoEx: $T=20303,67\varepsilon$.	* Função do 1º grau representada por $T=20303,67\varepsilon$	REA
*A curva de tendência permite encontrar o modelo. *A função do 1º grau pode ser representada por gráfico *O gráfico é uma reta *O tipo de função é função do 1º grau.	*Curva de tendência com o auxílio do excel obtém gráfico * gráfico na fase elástica é uma reta * Reta representa função de 1º grau	REA REA REA
	*Reta é função crescente	REA
*Como para $x_2 > x_1$ temos $y_2 > y_1$ a função é crescente		RNO
A função do primeiro grau tem domínio		RNO
*O domínio é o conjunto de valores da variável independente		RNO

Tabela 15 – Relações expressas pelo aluno A_4 referentes à 4ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
A função de 1º grau possui imagem		RNO
*A imagem é o conjunto dos valores da variável dependente		RNO
*A função do 1º grau pode ser representada por tabela		RNO
*O gráfico determina a equação		RNO
*Tabela determina gráfico		RNO
*O coeficiente angular é fornecido pela inclinação da reta *A reta possui inclinação	* Coeficiente angular é tg α * Inclinação da reta é tgα é	REA REA
O coeficiente angular fornece o módulo de elasticidade	tg α fornece módulo de elasticidade	REA
*O coeficiente angular fornece a taxa de variação de T com relação a ε		RNO
* O coeficiente angular é o a da equação		RNO
*T=20303,67ε é um exemplo de função crescente		RNO
*Como o coeficiente angular é maior que zero a função é crescente		RNO
*Gráfico projeta no eixo das abcissas fornece o domínio que é dado por D:[0,0.1371]		RNO
*O gráfico projeta no eixo das ordenadas e obtém a imagem que é dada por I:[0,25.3298]		RNO

Tabela 16 – Relações expressas pelo aluno A_1 referentes à 5ª atividade de Modelagem

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
Ensaio de tração aplica força que provoca deformação no corpo de prova		RNO
Força age sobre a área da secção e gera tensão	$T = \frac{F}{A}$	REA
*	Ensaio tem variáveis	REA
	Variáveis estão na tabela	REA
	Variáveis são dependentes e independentes	REA
*A variável dependente é representada no eixo das ordenadas *A tensão é a variável dependente	* Variável dependente está no eixo das ordenadas * "Tensão está no eixo das ordenadas"	REA REA
*A variável independente é representada no eixo no eixo das abcissas *Deformação é uma variável independente	*Deformação está no eixo das abcissas * Variável independente está no eixo das abcissas	REA REA
	Deformação e a tensão fornecem dados da curva de tendência de onde tiramos o diagrama tensão deformação	REA
*Diagrama tensão deformação é curva de tendência		RNO
	Deformação tem fase plástica	REA
	Deformação tem fase elástica	REA
*A fase plástica é representada no diagrama tensão deformação		RNO
A fase elástica é representada no diagrama tensão deformação		RNO
A deformação é temporária na fase elástica		RNO

Tabela 16 – Relações expressas pelo aluno A_1 referentes à 5ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
A reta tangente é paralela a reta secante	Reta tangente e reta secante são paralelas	REA
Diagrama tensão deformação representa a fase elástica		RNO
A deformação é permanente na fase plástica		RNO
Na fase plástica a relação entre a tensão e a deformação pode ser representada por uma função *A função é encontrada com o auxílio da curva de tendência	Tensão e Deformação fornecem dados da curva de tendência de onde tiramos o diagrama tensão deformação * Função representa diagrama tensão deformação	REA REA
	Função é do tipo de várias sentenças	REA
A função pode ser polinomial do 6º grau	[...] e parte é polinomial do 6º grau	REA
Ensaio de tração determina limite de elasticidade		
Limite de elasticidade pode ser calculado pelo método de Johnson	Ensaio de tração pode usar o método de Johnson que obtém o limite de elasticidade	REA
O método de Johnson utiliza reta secante a função polinomial de 6º grau que tem inclinação igual a 2/3 do módulo de elasticidade	Método de Johnson usa reta secante Reta secante tem inclinação igual a $\frac{2}{3}E$	REA
O método de Johnson utiliza reta secante	Método de Johnson usa reta secante	REA
O método de Johnson utiliza reta tangente a função polinomial de 6º grau	Método de Johnson usa reta tangente	REA
A reta tangente é paralela a reta secante	Reta tangente e reta secante são paralelas	REA
*A reta tangente tem inclinação dada por $\lim\limits_{h \to 0} \frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$	* Reta tangente tem inclinação dada por $\lim\limits_{h \to 0} \frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$	REA
* $\lim\limits_{h \to 0} \frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ fornece o valor da derivada de polinomial do 6º grau	* $\lim\limits_{h \to 0} \frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ é a derivada da polinomial de 6º grau	REA
* $\lim\limits_{h \to 0} \frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ permite obter as regras de derivação		RNO
*A derivada fornece a taxa de variação de T com relação a ε	* Derivada fornece taxa de variação instantânea de t com relação a ε	REA
A derivada é igual a 2/3 do módulo de elasticidade no ponto que é o limite de elasticidade	* $\lim\limits_{h \to 0} \frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ é igual a 2/3 de tg α no ponto que é o limite de elasticidade	REA

Tabela 17 – Relações expressas no mapa da aluna A_2 referentes à 5ª atividade de Modelagem

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa da aluna	C
	Situação problema posssui dados	REA
Ensaio de tração aplica força que provoca deformação no corpo de prova Força age sobre a área da secção e gera tensão	Ensaio de tração aplica uma força, produz tensão e deformação	REA
*Deformação é uma variável independente	* Deformação é marcada no eixo das abcissas	REA
*A variável dependente é representada no eixo das abcissas	* Eixo das abcissas é o eixo da variável independente	REA
*A tensão é a variável dependente	* Tensão é marcada no eixo das ordenadas	REA
*A variável dependente é representada no eixo no eixo das ordenadas	* Eixo das ordenadas é o eixo da variável dependente	REA
A tensão e a deformação tem relação representada no diagrama tensão deformação	Com os dados da tensão e da deformação traça o diagrama tensão deformação	REA
*Diagrama tensão deformação é curva de tendência	* Diagrama tensão deformação é obtido da curva de tendência	REA
	A curva de tendência é uma curva	REA
A fase plástica é representada no diagrama tensão deformação		RNO
A fase elástica é representada no diagrama tensão deformação		RNO
A deformação é temporária na faz elástica	Deformação pode ser temporária na fase plástica	REA
Diagrama tensão deformação representa a fase elástica		RNO
A deformação é permanente na fase plástica	Deformação pode ser permanente na fase elástica	REA
*A função é encontrada com o auxílio da curva de tendência		RNO
A função pode ser polinomial do 6º grau	Curva representada por função polinomial de 6º grau	REA
Ensaio de tração determina limite de elasticidade	Situação problema é determinar o módulo de elasticidade	REA
	Dados são obtidos por ensaio de tração	REA
Limite de elasticidade pode ser calculado pelo método de Johnson	Dados são obtidos por ensaio de tração	REA
* $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ fornece o valor da derivada de polinomial do 6º grau	* $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ é derivada da polinomial de 6 grau	REA
O método de Johnson utiliza reta secante a função polinomial de 6º grau que tem inclinação igual a 2/3 do módulo de elasticidade	Método de Johnson envolve inclinação da reta, da reta secante e da reta tangente	REA
O método de Johnson utiliza reta tangente a função polinomial de 6º grau	Secante e tangente paralelas	REA
A reta tangente é paralela a reta secante	Inclinação da reta tangente é dada por * $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$	REA
*A reta tangente tem inclinação dada por $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$	*Reta tangente corta a curva em um ponto	REA
	*Reta secante corta a curva em dois pontos	REA
* $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ permite obter as regras de derivação		RNO
*A derivada fornece a taxa de variação instantânea de T com relação a ε	*Derivada é a taxa de variação instantânea de T com relação a ε	REA
A derivada é igual a 2/3 do módulo de elasticidade no ponto que é o limite de elasticidade	Derivada é igual a 2/3 de E no ponto que é o limite de elasticidade	REA

Tabela 18 – Relações expressas pelo aluno A_3 referentes à 5ª atividade de Modelagem

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
	"Situação problema é determinar o limite de elasticidade"	REA
	Limite de elasticidade é o último ponto da fase elástica	REA
	Fase elástica tem parte representada por reta	REI
	Fase elástica tem parte representada por curva	REA
	Reta representa função do 1º grau	REA
	Curva é representada por função polinomial do 6º grau	REA
	Função do 1º grau tem coeficiente angular	REA
	Coeficiente angular é o módulo de elásticidade	REA
	Função de várias setenças tem gráfico	REA
Ensaio de tração aplica força que prova deformação no corpo de prova Força age sobre a área da secção e gera tensão		RNO RNO
*Deformação é uma variável independente	Estava presente no mapa anterior	REA
*A variável dependente é representada no eixo das abcissas	Estava presente no mapa anterior	REA
*A tensão é a variável dependente	Estava no mapa anterior	REA
*A variável dependente é representada no eixo no eixo das ordenadas	Estava presente no mapa anterior	REA
A tensão e a deformação tem relação representada no diagrama tensão deformação	Estava presente no mapa anterior	REA
*Diagrama tensão deformação é curva de tendência		RI
*A fase plástica é representada no diagrama tensão deformação	Estava presente no mapa anterior	REA
A fase elástica é representada no diagrama tensão deformação	Estava presente no mapa anterior	REA
A deformação é temporária na fase elástica	Estava presente no mapa anterior	REA
Diagrama tensão deformação representa a fase elástica	Estava presente no mapa anterior	REA
A deformação é permanente na fase plática	Estava presente no mapa anterior	REA
Na fase plástica a relação entre a tensão e deformação pode ser representada por uma função	Fase elástica é representada por função definida por várias sentenças	REA
*A função é encontrada com o auxílio da curva de tendência		RNO
A função pode ser polinomial do 6º grau	Fase elástica é representada por função de varias sentenças , função de várias sentenças tem parte que é polinomial de 6º grau	REA
Ensaio de tração determina limite de elasticidade		RNO
Limite de elasticidade pode ser calculado pelo método de Johnson	Limite de elasticidade é calculado pelo método de Johnson	REA
O método de Johnson utiliza reta secante à função polinomial de 6º grau que tem inclinação igual a 2/3 do módulo de elasticidade	Reta secante tem inclinação igual a 2/3 do módulo de elasticidade	REA
O método de Johnson utiliza reta secante	Método de Johnson usa reta secante	REA
O método de Johnson utiliza reta tangente a função polinomial de 6º grau	Método de Johnson usa reta tangente	REA
A reta tangente é paralela à reta secante	Reta tangente reta secante paralelas	REA
*A reta tangente tem inclinação dada por $\lim_{h\to 0} \frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$	Reta tangente tem inclinação dada por $\lim_{h\to 0} \frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$	REA
	Reta tangente corta o gráfico em um ponto	REA
	Reta secante corta o gráfico em dois pontos	REA
	Reta secante tem inclinação igual a 2/3 do módulo de elasticidade	REA

Tabela 18 – Relações expressas pelo aluno A_3 referentes à 5ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
* $\lim_{h\to 0} \frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ fornece o valor da derivada de polinomial do 6º grau	$\lim_{h\to 0} \frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ é a derivada	REA
* $\lim_{h\to 0} \frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ permite obter as regras de derivação		RNO
*A derivada fornece a taxa de variação de T com relação a ε		RNO
A derivada é igual a 2/3 do módulo de elasticidade no ponto que é o limite de elasticidade	Derivada é igual a 2/3 do E no ponto do gráfico que dá o limite de elasticidade.	REA

Tabela 19 – Relações expressas pelo aluno A_4 referentes à 5ª atividade de Modelagem

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
Ensaio de tração aplica força que provoca deformação no corpo de prova Força age sobre a área da secção e gera tensão	Ensaio de tração usa força	REA
	Força é aplicada no corpo de prova	REA
	Corpo de prova sofre deformação	REA
	Força age sobre área da secção	REA
	Área da secção sofre tensão	REA
*A variável independente é representada no eixo das abcissas	* Variável independente está no eixo das abcissas	REA
*Deformação é uma variável independente	*Deformação é variável independente	REA
*A variável dependente é representada no eixo no eixo das ordenadas	* Variável dependente está no eixo das ordenadas	REA
*A tensão é a variável dependente	* Tensão é variável dependente	REA
*Diagrama tensão deformação é curva de tendência		RNO
*A fase plástica é representada no diagrama tensão deformação		RNO
A fase elástica é representada no diagrama tensão deformação		RNO
A deformação é temporária na fase elástica		RNO
Diagrama tensão deformação representa a fase elástica		RNO
A deformação é permanente na fase plástica		RNO
Na fase plástica a relação entre a tensão e deformação pode ser representada por uma função *A função é encontrada com o auxílio da curva de tendência A função pode ser polinomial do 6º grau	Fase plástica tem curva de tendência	REA
	* Curva de tendência com o auxílio do Excel obtém gráfico	REA
	Gráfico no final da fase elástica e na fase plástica curva	REA
	Curva representa função polinomial de 6º grau	REA

Tabela 19 – Relações expressas pelo aluno A_4 referentes à 5ª atividade de Modelagem (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
Ensaio de tração determina limite de elasticidade		RNO
Limite de elasticidade pode ser calculado pelo método de Johnson	Limite de elasticidade é calculado pelo método de Johnson	REA
O método de Johnson utiliza reta tangente a função polinomial do 6º grau O método de Johnson utiliza reta secante O método de Johnson utiliza reta secante a função polinomial de 6º grau que tem inclinação igual a 2/3 do módulo de elasticidade A reta tangente é paralela a reta secante	Função de 6º grau tem reta tangente Método de Johnson precisamos reta secante , Reta secante que usamos para traçar uma reta paralela tangente Polinomial de 6º grau tem inclinação igual a tg β Tg β é igual a $\frac{2}{3}tg\alpha$ Tg α é módulo de elasticidade	REA REA REA REA REA REA
*A reta tangente tem inclinação dada por $\lim_{h\to 0}\frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$	*tg β é $\lim_{h\to 0}\frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$	REA
* $\lim_{h\to 0}\frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ fornece o valor da derivada de polinomial do 6º grau	* $\lim_{h\to 0}\frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ é derivada da função	REA
* $\lim_{h\to 0}\frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ permite obter as regras de derivação		RNO
*A derivada fornece a taxa de variação de T com relação a ε	*Derivada é taxa de variação instantânea de T com relação a ε.	REA
A derivada é igual a 2/3 do módulo de elasticidade no ponto que é o limite de elasticidade	* Derivada é igual a $\frac{2}{3}tg\alpha$ fornece limite de elasticidade	REA

Tabela 20 – Relações expressas no mapa da duplaA$_1$ e A$_3$

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa dos alunos	C
	Função de 1º grau tem variável dependente e independente	REA
	Função de 6º grau tem variável dependente e independente	REA
*ε é a variável independente	*Variável independente é ε	REA
	* ε está no eixo das abcissas	REA
*T é a variável dependente	*Variável dependente é T	REA
	* T está no eixo das ordenadas	REA
*Função pode ser representada por tabela		RNO
*Domínio é o conjunto de valores da variável independente		RNO
*Imagem é o conjunto de valores da variável dependente		RNO

Tabela 20 – Relações expressas no mapa da duplaA$_1$ e A$_3$ (continuação)

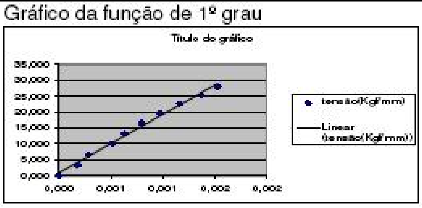
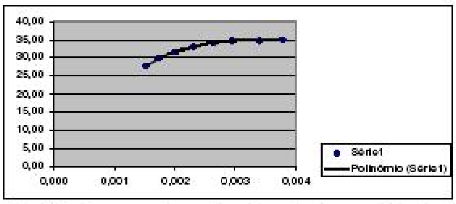
Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa dos alunos	C
Função polinomial é um tipo de função	Função temos função polinomial	REA
Função de 1º grau é um tipo de função polinomial	Função polinomial pode ser por ex: função do 1º grau	REA
Função de 6º grau é um tipo de função polinomial	Função polinomial pode ser por ex função polinomial de 6º grau	REA
	* Domínio joga na equação fornece a imagem	REA
*Gráfico determina equação	*"Pela equação podemos saber como vai ser o gráfico[...]	REA
*Equação determina gráfico		RNO
*Tabela determina equação	*Pela tabela dá para achar a equação	REA
	Pela tabela dá para achar o gráfico	REA
*A função pode ser representada por equação	*Função pode ser representada por equação	REA
*A função pode ser representada por gráfico	*Função pode ser representada por gráfico	REA
*Gráfico projeta-se no eixo das abcissas obtém dominio	*Gráfico projetado no eixo das ordenadas fornece a imagem	REA
*Gráfico projeta-se no eixo das ordenadas obtém imagem	*Gráfico projetado no eixo das abcissas fornece domínio	REA
*A função polinomial tem derivada . A deriva é dada por $\lim\limits_{h \to 0} \frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$	*Derivada é dada por $\lim\limits_{h \to 0} \frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$	REA
*O coeficiente angular é o valor de a na equação	*Coeficiente angular é 20303,67 ε em T=20303,67 ε	REA
*O coeficiente angular fornece a inclinação da reta no gráfico	*Coeficiente angular fornece a inclinação da reta	REA
*Coeficiente linear é a intersecção com o eixo das ordenadas	*Coeficiente linear corta o eixo das ordenadas	REA
*Coeficiente linear é o b da equação	*Coeficiente linear é 0 em T=20303,67 ε	REA
*A derivada fornece a inclinação da reta tangente em cada ponto do gráfico	* Derivada é dada pela $\lim\limits_{h \to 0} \frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ onde achamos inclinação da reta que vai ser a reta tangente	REA
*Derivada fornece a taxa de variação isntantânea de T com relação a ε	*Derivada também fornece taxa de variação instantânea de T com relação a ε	REA
T=20303,67 é um exemplo de equação	T=20303,67 é um exemplo de equação do 1º grau	REA
Exemplo de gráfico	Gráfico da função de 1º grau 	REA
Exemplo de gráfico	Gráfico da função polinomial de 6º grau é 	REA
* Função de 1º grau tem derivada e o coeficiente angular fornece a derivada	*Coeficiente angular na função de 1º grau é a derivada	REA
* $\lim\limits_{h \to 0} \frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ é usado para deduzir as regras de derivação.	* $\lim\limits_{h \to 0} \frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ de onde achamos as regras de derivação	REA

Tabela 21 – Relações presentes no mapa da dupla A_2 e A_4

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa dos alunos	C
	Função contém variável dependente e variável independente	REA
	Variável dependente depende da independente	REA
* ε é a variável independente		RNO
*T é a variável dependente		RNO
*Função pode ser representada por tabela	Função pode ser representada por tabela	REA
*Domínio é o conjunto de valores da variável independente	* "O domínio é os valores de ε " *Eixo das abcissas contém domínio * Variável independente está no eixo das abcissas. ε fica no eixo das abcissas.	REA REA REA REA
*Imagem é o conjunto de valores da variável dependente	*"[...] e imagem os valores de T" * Variável dependente está no eixo das ordenadas T fica no eixo das ordenadas	REA REA REA
Função polinomial é tum tipo de função	Função pode ser função polinomial	REA
Função de 1º grau é um tipo de função polinomial	Função de 1º grau é uma função polinomial	REA
Função de 6º grau é um tipo de função polinomial	Função polinomial de 6º grau é uma função polinomial	REA
*Gráfico determina equação	*Gráfico fornece equação	REA
*Equação determina gráfico	*Equação fornece o gráfico	REA
*Tabela determina equação		RNO
*Tabela determina gráfico		RNO
*A função pode ser representada por equação	*Função pode ser representada por equação	REA
*A função pode ser representada por gráfico	*Função pode ser representada por gráfico	REA
*Gráfico projeta-se no eixo das abcissas obtém domínio		RNO
*Gráfico projeta-se no eixo das ordenadas obtém imagem		RNO
	Função polinomial de 1º grau contém coeficiente linear	REI
*Função polinomial tem derivada Derivada é dada por $\lim_{h \to 0} \frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$	*Derivada é o $\lim_{h \to 0} \frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$	REA
	Função polinomial de 1º grau contém coeficiente angular	REI
*O coeficiente angular é o valor de a na equação		RNO

Tabela 21 – Relações presentes no mapa da dupla A_2 e A_4

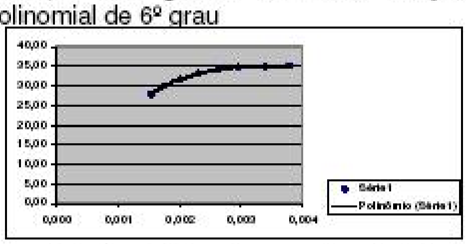
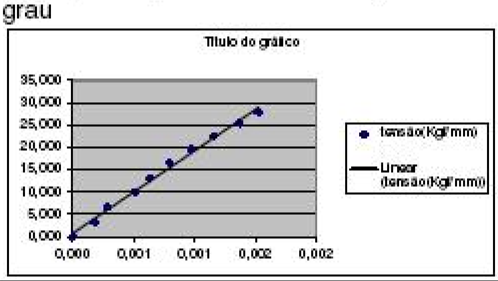
Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa dos alunos	C
Função polinomial é tum tipo de função	Função pode ser função polinomial	REA
*O coeficiente angular fornece a inclinação da reta no gráfico	* Coeficiente angular representa a derivada * Derivada é o $\lim_{h\to 0}\frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ * $\lim_{h\to 0}\frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ fornece a inclinação da reta , reta tangente	REA REA REA
*Coeficiente linear é a intersecção com o eixo das ordenadas		RNO
*Coeficiente linear é o valor de b na equação		RNO
*A derivada fornece a inclinação da reta tangente em cada ponto do gráfico	* $\lim_{h\to 0}\frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ fornece a inclinação da reta, reta tangente	REA
*Derivada fornece a taxa de variação instantânea de T com relação a ε	* $\lim_{h\to 0}\frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ fornece a taxa de variação instantânea de T com relação a ε	REA
* Função de 1º grau tem derivada e o coeficiente angular fornece a derivada	*Coeficiente angular representa a derivada	REA
* $\lim_{h\to 0}\frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ é usado para deduzir as regras de derivação.	* $\lim_{h\to 0}\frac{T(\varepsilon+h)-T(\varepsilon)}{h}$ deduz as regras de derivação	REA
T=20303,67 é um exemplo de equação	T=20303,67 ε exemplo de equação	REA
	T=20303,67 ε representa uma função polinomial de 1º grau	REA
Exemplo de gráfico	Exemplo de gráfico de uma função polinomial de 6º grau 	REA
Exemplo de gráfico	Exemplo de gráfico de uma função de 1º grau 	REA

Tabela 22 – Relações expressas pelo aluno A_1 referentes à função de 1º grau

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
*A função de 1º grau pode ser representada por gráfico	*Função pode ser representada por gráfico	REA
* A função de 1º grau pode ser representada por equação	*Função pode ser representada por equação	REA
* A função de 1º grau pode ser representada por tabela	* Função pode ser representada por tabela	RNO
* A tabela determina o gráfico	* Tabela relaciona gráfico	REA
*O gráfico determina a equação	*Gráfico relaciona equação	REA
*Equação determina gráfico	* Equação relaciona gráfico	REA
*Tabela determina equação	*Tabela: relaciona equação	REA
*Equação determina tabela	*Equação realciona tabela	REA
* A equação na função do 1º grau tem a forma geral y=ax +b	*Equação é representada por y=ax+b	REA
* O gráfico é uma reta	* Gráfico é uma reta	REA
* A função de 1º grau pode ser crescente	* Função pode ser crescente	REA
*A função de 1º grau pode ser decrescente		REA
* O gráfico representa uma função crescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 > y_2$	* Reta pode ser crescente	REA
* O gráfico representa uma função decrescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 < y_2$	* Reta pode ser função decrescente	REA
* A tabela representa uma função crescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 > y_2$		RNO
* A tabela representa uma função decrescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 < y_2$		RNO
* Se na equação o coeficiente angular é positivo a função é crescente	y= ax + b quando a> 0 função crescente	REA
* Se na equação o coeficiente angular é negativo a função é decrescente	y=ax + b quando a<0 função decrescente	REA
A função de 1º grau possui coeficiente linear		RNO
* O coeficiente linear é o valor de b em y = ax + b	* y= ax + b o b é o coeficiente linear	REA
* O coeficiente linear informa a intersecção com o eixo y	* Coeficiente linear é a intersecção com o eixo y, valor onde corta o eixo y	REA
A função possui coeficiente angular		RNO
* O coeficiente angular na tabela é dado por $a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	* Na tabela o coeficiente angular é dado por $a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	REA
*O coeficiente angular fornece a inclinação da reta	* Coeficiente angular é a inclinação da reta tangente	REA
	* Inclinaçao da reta tangente é a tangente de α, valor da tangente que a reta forma com o eixo x	REA
* O coeficiente angular é obtido pelo valor de a na equação na forma geral	* y = ax +b o a é o coeficiente angular	REA
A função de 1º grau possui zero		RNO
* O zero da função é a intersecção com o eixo x	* Gráfico corta o eixo x no zero da função	REA
*Zero da função é o valor que torna y igual a zero em y = ax + b		RNO
* Na função de 1º grau a derivada é constante		RNO
* O coeficiente angular é igual a taxa de variação de y com relação a x	* Derivada é a taxa de variação de y com relação a x * derivada é o coeficiente angular	REA
* A taxa de variação de y com relação a x é igual a derivada	* Derivada é a taxa de variação de y com relação a x	REA

Tabela 23 – Relações expressas pelo aluno A_2 referentes à função do 1º grau

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
* A função de 1º grau pode ser representada por gráfico	* Função do 1º grau pode ser expressa por gráfico	REA
* A função de 1º grau pode ser representada por equação	* Função do 1º grau pode ser expressa por equação	REA
* A função de 1º grau pode ser representada por tabela	* Função do 1º grau pode ser expressa por tabela	REA
* A tabela determina o gráfico	* Tabela faz gráfico	REA
Gráfico determina tabela	* Gráfico faz tabela	REA
*Tabela determina equação	* Tabela monta equação	REA
*Equação determina tabela	* Equação monta tabela	REA
* O gráfico determina a equação	* Gráfico encontra equação	REA
*Equação determina gráfico	*Equação encontra gráfico	REA
*A equação na função do 1º grau tem foram geral y=ax + b		RNO
*Gráfico é uma reta	*Gráfico é reta	REA
*A função de 1º grau pode ser crescente	*Função do 1º grau pode ser crescente	REA
*A função de 1º grau pode ser decrescente	*Função do 1º grau pode ser decrescente	REA
	* Reta pode ser crescente.	REA
	* Reta pode ser decrescente.	REA
*A tabela representa uma função crescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 > y_2$	* "Tabela se x aumenta e y aumenta a função é crescente."	REA
*Tabela representa uma função decrescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 < y_2$	* "Tabela se x aumenta e y diminui é decrescente."	REA
*Gráfico representa uma função crescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 > y_2$	* "Pelo gráfico pode-se ver da mesma forma que na tabela"	REA
* O gráfico representa uma função decrescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 > y_2$	* "Pelo gráfico pode-se ver da mesma forma que na tabela."	REA
	* "Eixo x é o eixo da variável independente".	REA
	* "Eixo y é o eixo da variável dependente"	REA
*Se na equação o coeficiente angular é positvo a função é crescente	* "se o coeficiente angular é maior que 0 é crescente"	REA
*Se na equação o coeficiente angular é negativo a função é decrescente	* "Se for menor que 0 é decrescente"	REA
*A função de 1º grau possui coeficiente linear	*Função de 1º grau possui coeficiente linear	REA
*O coeficiente linear é o valor de b em y= ax + b	* Coeficiente linear é o b y=ax+b	REA
* O coeficiente linear informa intersecção com o eixo y	* O coeficiente linear é a intersecção com o eixo y no gráfico	REA
	* "[...] quando a variável independente for zero ou seja quando o x é zero a reta cruza o eixo y sendo o valor de y o coeficiente linear"	REA
*A função possui coeficiente angular		REA
* o coeficiente angular na tabela é dado por $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}$		RNO
* O coeficiente angular é obtido pelo valor de a na equação na forma geral	* Coeficiente angular é o a y=ax +b	REA
*A função de 1º grau possui zero	* Função de 1º grau tem zero da função	REA
* O zero da função é a intersecção com o eixo x	* Zero da função é intersecção com o eixo x	REA
*Zero da função é o valor que torna y igual a zero em y=ax +b		

Tabela 23 – Relações expressas pelo aluno A_2 referentes à função do 1º grau (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa da aluna	C
* Na função de 1º grau a derivada é constante		
*O coeficiente angular fornece a inclinação da reta	*Coeficiente angular é inclinação da reta no gráfico	REA
*O coeficiente angular é igual a taxa de variação de y com relação a x.	* Derivada é a inclinação da reta	REA
*A taxa de variação de y com relação a x é igual a derivada	* Coeficiente angular fornece taxa de variação instantânea de x com relação a y	REA
	* Taxa de variação de y com relação a x é dada pela derivada da função de 1º grau que é coeficiente angular	REA
*A função possui coeficiente angular	y 2x + 4 é exemplo de função de 1º grau	REA
	y=3x + 6 é exemplo de função decrescente	REA
	Y= 2x+3 é exemplo de função crescente	REA

Tabela 24 – Relações expressas pelo aluno A $_3$ referentes à função do 1º grau

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
	Função pode ser função de 1º grau	REA
	Função pode ser função de 1º grau	REA
*A função de 1º grau pode ser representada por gráfico	* Função pode ser representada por gráfico	REA
*A função de 1º grau pode ser representada por equação	* Função pode ser representada por equação	REA
*A função de 1º grau pode ser representada por tabela	* Função pode ser representada por tabela	REA
*A tabela determina o gráfico	*Tabela constrói gráfico	REA
*O gráfico determina a equaçaõ	Gráfico ajuda a achar equação	REA
*A equação determina o gráfico		RNO
*A equação determina tabela		RNO
*A tabela determina a equação		RNO
*A equação na função do 1º grau tem foram geral y= ax + b	*Equação é y=ax + b	REA
*O gráfico é uma reta	* Gráfico é uma reta	REA
*A função de 1º grau pode ser crescente		RNO
*A função de 1º grau pode ser decrescente		RNO
* O gráfico representa uma função crescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 > y_2$	Reta pode representar função crescente *Função crescente se o ângulo for maior que 90^0	REA REA
* O gráfico representa uma função decrescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 < y_2$	Reta pode representar função decrescente *Função é decrescente se o ângulo for maior que 90^0	REA REA
*A tabela representa uma função crescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 > y_2$		RNO
*A tabela representa uma função decrescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 < y_2$		RNO
*Se na equação o coeficiente angular é positivo a função é crescente	* função é crescente se a for + em y= ax + b	REA
*Se na equação o coeficiente angular é negativo a função é decrescente	* Função é decrescente se a for – em y= ax+b	REA

Tabela 24 – Relações expressas pelo aluno A_3 referentes à função do 1º grau (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa da aluna	C
*A função de 1º grau possui coeficiente linear	*Função de 1º grau tem coeficiente linear	REA
*O coeficiente linear é o valor de b em y = ax + b	* y= ax + b b é o coeficiente linear	REA
* O coeficiente linear informa a intersecção com o eixo y	*Coeficiente linear é onde corta o eixo y	REA
*A função possui coeficiente angular	*Função de 1º grau tem coeficiente angular	REA
* O coeficiente angular na tabela é dado por $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}$		RNO
* O coeficiente angular fornece a inclinação da reta	Coeficiente angular dá a inclinação da reta	REA
*O de a na equação na coeficiente angular é obtido pelo valor forma geral	*Coeficiente angular é o a em y=ax + b	REA
*A função de 1º grau possui zero	* Função de 1º grau tem zero da função	REA
* O zero da função é a intersecção com o eixo x	*Zero da função onde corta o eixo x	REA
*Zero da função é o valor que torna y igual a zero em y = ax + b		RNO
* Na função de 1º grau a derivada é constante		RNO
O coeficiente angular é igual a taxa de variação de y com relação a x	*Coeficiente angular dá a taxa de variação de y com relação a x	REA
A taxa de variação de y com relação a x é igual a derivada	* Taxa de variação de y com relação a x é a derivada	REA
	Derivada é o coeficiente angular	REA

Tabela 25 – Relações expressas pelo aluno A_4 referentes à função do 1º grau

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
*A função de 1º grau pode ser representada por gráfico	* Função do 1º grau pode ser representada por gráfico	REA
*A função de 1º grau pode ser representada por equação	* Função do 1º grau pode ser representada por equação	REA
*A função de 1º grau pode ser representada por tabela	* Função do 1º grau pode ser representada por tabela	REA
*A tabela determina o gráfico	*Tabela constrói gráfico	REA
*Equação determina tabela		RNO
Tabela determina equação		RNO
* O gráfico determina a equação	*Gráfico constrói equação	REA
A equação determina gráfico	Equação constrói gráfico	REA
*A equação na função de 1º grau tem forma geral y= ax +b	*Equação é y =ax+b	REA
*O gráfico é uma reta	*Gráfico é reta	REA
*A função de 1º grau pode ser crescente		RNO
A função de 1º grau pode ser decrescente		RNO
* O gráfico representa uma função crescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 > y_2$		RNO
* O gráfico representa uma função decrescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 < y_2$		RNO

Tabela 25 – Relações expressas pelo aluno A_4 referentes à função do 1º grau (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
*A tabela representa uma função crescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 > y_2$	*Tabela se x e y crescem funçaõ crescente	REA
*A tabela representa uma função decrescente se $x_1 > x_2$ então $y_1 < y_2$	*Tabela se x cresce e y decresce função decrescente	REA
*Se na equação o coeficiente angular é positivo a função é crescente	*Função crescente coeficiente angular positivo	REA
*Se na equação o coeficiente angular é negativo a função é decrescente	*Função decrescente coeficiente angular negativo	REA
*A função de 1º grau possui coeficiente angular	* Função de 1º grau tem coeficiente linear	REA
* O coeficiente linear é o valor de b em y= ax + b	* Coeficiente linear é o b da y=ax +b	REA
* O coeficiente linear informa a intersecção com o eixo y	* Coeficiente linear é a intersecção com o eixo y	REA
*A função possui coeficiente angular	* Função de 1º grau tem coeficiente angular	REA
* O coeficiente angular na tabela é dado por a= $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	*Coeficiente angular é dado por tg $\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ na tabela	
*O coeficiente angular fornece a inclinação da reta	*Coeficiente angular fornece inclinação da reta	REA
* O coeficiente angular é obtido pelo valor de a na equação na forma geral	*Coeficiente angular é o a da equação	REA
*A função de 1º grau possui zero	* Função de 1º grau tem zero da função	REA
* O zero da função é a intersecção com o eixo x	*Zero da função é intersecção com o eixo x	REA
*zero da função é o valor que torna y igual a zero em y= ax + b	*Zero da função encontro fazendo y igual a zero na y=ax + b	REA
* Na função de 1º grau a derivada é constante		RNO
	Função de 1º grau tem derivada	RNO
*A derivada é a taxa de variação de y com relação a x	*Derivada é a taxa de variação de y com relação a x	REA
* Na função do 1º grau a derivada é igual ao coeficiente angular	* Derivada é igual ao coeficiente angular	REA

Tabela 26 – Relações expressas pelo aluno A_1 referentes ao conceito de função

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
*Domínio é o conjuntos dos valores da variável independente		RNO
	*Domínio está no eixo das abcissas	REI
	* Imagem está no eixo das ordenadas	REA
	*Variável independente é representada no eixo das abcissas	REA
	*Variável dependente é representada no eixo das ordenadas	REA
* Imagem é o conjunto dos valores da variável dependente		RNO
Função pode ser representada por uma equação	*Função pode ser representada por equação	REA

Tabela 26 – Relações expressas pelo aluno A_1 referentes ao conceito de função (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
*Função pode ser representada por tabela	*Função pode ser representada por tabela	REA
*Função pode ser representada por gráfico	*Função pode ser representada por gráfico	REA
*Tabela obtém equação	* Equação relaciona tabela	
*Equação obtém tabela	*Equação relaciona tabela	REA
*Gráfico determina equação	*Gráfico relaciona equação	REA
*Equação determina gráfico	*Equação relaciona gráfico	REA
*Tabela determina gráfico	*Tabela relaciona gráfico	REA
*Tabela contém valores do domínio		RNO
Tabela contém valores da imagem		RNO
*Gráfico projeta no eixo das abcissas obtém o domínio	* "Gráfico dá para ver domínio projetando no eixo das abcissas '	REA
*Gráfico projeta no eixo das ordenadas obtém a imagem	*"Gráfico dá para ver a imagem,projetando no eixo das ordenadas."	REA
*Equação determina domínio		RNO
	Imagem depende do domínio	REA
*Domínio substitui na equação obtém imagem		RNO
*Derivada fornece a inclinação da reta tangente ao gráfico em cada ponto	*Derivada é a inclinação da reta tangente	REA
*Derivada é a taxa de variação instantânea de y com relação a x	*Derivada é a taxa de variação estantânea(Sic) de y com relação a x	REA
*Derivada é uma função	*Derivada é uma função	REA

Tabela 27 – Relações expressas pela aluna A_2 referentes ao conceito de função

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa da aluna	C
*Domínio é o conjunto dos valores da variável independente	*Domínio fica no eixo das abcissas	REA
	* Eixo das abcissas é o eixo da variável independente	REA
* Imagem é o conjunto dos valores da variável dependente	* Imagem fica no eixo das ordenadas	REA
	* Eixo das ordenadas é o eixo da variável dependente	REA
*Função relaciona domínio com imagem	Função possui domínio e imagem	REA
	*Domínio substituíndo no x acha a imagem	REA
	* Imagem substituíndo no y acha domínio	REA
*Função pode ser representada por tabela	* Função pode ser expressa por tabela	REA
*Função pode ser representada por gráfico	* Função pode ser expressa por gráfico	REA
*Função pode ser representada por equação	* Função pode ser expressa por equação	REA
*Equação obtém tabela	*Equação monta tabela	REA
*Gráfico determina equação	*Gráfico encontra equação	REA
*Equação determina gráfico	*Equação encontra gráfico	REA
*Tabela determina gráfico	*Tabela monta gráfico	REA
	*Gráfico faz tabela	REA

Tabela 27 – Relações expressas pela aluna A_2 referentes ao conceito de função (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa da aluna	C
*Tabela contém valores do domínio	*Domínio alguns valores estão na tabela	REA
*Tabela contém valores da imagem	* Imagem alguns valores estão na tabela	REA
	Gráfico contém eixo da variável dependente	REA
	Gráfico contém eixo da variável independente	REA
*Gráfico projeta no eixo das abcissa obtém o domínio	*Gráfico encontra domínio	REA
*Gráfico projeta no eixo das ordenadas obtém a imagem	*Gráfico encontra imagem	REA
*Equação determina domínio	*Equação possui domínio	REA
	Equação possui imagem	REA
*Domínio substituí na equação obtém imagem		
*Derivada fornece a inclinação da reta tangente ao gráfico em cada ponto do domínio	* Derivada é inclinação da reta tangente ao gráfico Gráfico dá para achar a derivada	REA
*A derivada fornece a taxa de variação instantânea de y com relação a x	* Derivada é taxa de variação instantânea de y com relação a x	REA
*A derivada é uma função	* Derivada é uma função	REA
	* Função pode ter derivada	REA

Tabela 28 – Relações expressas pelo aluno A_3 referentes ao conceito de função

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
	Função contém variável independente	RNO
	Função contém variável dependente	RNO
*domínio é o conjunto de valores da variável independente	*Domínio é formado pelos valores da variável independente	REA
* Imagem é o conjunto dos valores da variável dependente	* Imagem é formada pelos valores da variável dependente	REA
*Função pode ser representada por tabela	* Função pode ser representda por tabela	REA
*Função pode ser representada por gráfico	*Função pode ser representada por gráfico	REA
*Função pode ser representada por equação	*Função pode ser representada por equação	REA
*Equação obtém tabela		RNO
*Tabela obtém equação		RNO
*Gráfico determina equação	*Gráfico ajuda achar equação	REA
*Equação determina gráfico	*Equação ajuda a achar gráfico	REA
*Tabela determina gráfico	*Tabela constrói gráfico	REA
*Tabela contém valores do domínio		RNO
*Tabela contém valores da imagem		RNO
*Gráfico projeta no eixo das abcissas obtém o domínio	"*Domínio progeção(sic) gráfico no eixo das abcissas"	REA
*Gráfico projeta no eixo das ordenadas obtém a imagem	* "Imagem progeção(sic) do gráfico no eixo das ordenadas"	REA
*Equação determina domínio	*Equação dá para encontrar o domínio	REA
*Domínio substituí na equação obtém imagem	*Domínio joga na equação dá imagem	REA
	Gráfico tem eixo das abcissas	REA
	Gráfico tem eixo da ordenadas	REA
	Função pode ter derivada	REA

Tabela 28 – Relações expressas pelo aluno A_3 referentes ao conceito de função (continuação)

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
*Derivada fornece a inclinação da reta tangente ao gráfico em cada ponto do domínio	* Derivada é inclinação da reta tangente no gráfico	REA
*Derivada fornece a taxa de variação instantânea de y com relação a x	* Derivada é a taxa de variação instantânea de y com relação a x	REA
*A derivada é uma função		RNO

Tabela 29 – Relações expressas pelo aluno A_4 referentes ao conceito de função

Relações expressas no mapa de referência	Relações expressas no mapa do aluno	C
* O domínio é o conjunto dos valores da variável independente	Eixo das abcissas é o eixo da variável independente Domínio pode ser observado no eixo das abcissas	REA REA
* Imagem é o conjunto dos valores da variável dependente	* Eixo das ordenadas é o eixo da variavel * Imagem pode ser observada no eixo das ordenadas	REA
	Funçaõ tem domínio	REA
	Função tem imagem	REA
*Função pode ser representada por tabela	* Função pode ser representada por tabela	REA
*Função pode ser representada por gráfico	* Função pode ser representada por gráfico	REA
*Função pode ser representada por equaçaõ	* Função pode ser representada por equação	REA
*Equação obtém tabela		RNO
*Gráfico determina equação		RNO
*Equação determina gráfico	* Gráfico pode ser construído através da equação	REA
*Tabela determina gráfico	* Gráfico pode ser construído através da tabela	REA
	* Gráfico tem eixo das abcissas	REA
*Tabela determina equação		RNO
	Gráfico tem eixo das ordenadas	REA
*Tabela contém valores do domínio		RNO
*Tabela contém valores da imagem		RNO
*Gráfico projeta no eixo das abcissa obtém domínio	* Domínio pode ser observado no eixo das abcissas	REA
	*Eixo das abcissas é o eixo da variável independente	REA
*Gráfico projeta no eixo das ordenadas obtém a imagem	* Imagem pode ser observado no eixo das ordenadas	REA
	*Eixo das ordenadas é o eixo da variável dependente	REA
*Equação determina domínio		RNO
*domínio substitui na equação obtém a imagem		RNO
	Função pode ter derivada	REA
*Derivada fornece inclinação da reta tangente em cada ponto do domínio	*Derivada é a inclinação da reta tangente	REA
*Derivada fornece a taxa de variação instantânea de y com relação a x	*Derivada é a taxa de variação instantânea de y com relação a x	REA
*A derivada é uma função		RNO