



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

ELAINE CRISTINA FERRUZZI

**INTERAÇÕES DISCURSIVAS E APRENDIZAGEM EM
MODELAGEM MATEMÁTICA**

Londrina
2011

ELAINE CRISTINA FERRUZZI

**INTERAÇÕES DISCURSIVAS E APRENDIZAGEM EM
MODELAGEM MATEMÁTICA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito para obtenção do título de doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2011

Catálogo na publicação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

F398i	<p>Ferruzzi, Elaine Cristina. Interações discursivas e aprendizagem em modelagem matemática / Elaine Cristina Ferruzzi. – Londrina, 2011. 218 f.: il.</p> <p>Orientadora: Lourdes Maria Werle de Almeida. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2011. Inclui bibliografia.</p> <p>1. Educação matemática – Teses. 2. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 3. Modelos matemáticos – Teses. 4. Análise de interação em educação – Teses. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU 51:37.02</p>
-------	--

ELAINE CRISTINA FERRUZZI

**INTERAÇÕES DISCURSIVAS E APRENDIZAGEM EM MODELAGEM
MATEMÁTICA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito para obtenção do título de doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
UEL – Londrina - PR

Prof. Dra. Angela Marta das Dores Savioli
UEL – Londrina - PR

Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa
UFB – Salvador - BA

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba
UNESP – Rio Claro - SP

Profa. Dra. Mirian Buss Gonçalves
UFSC – Florianópolis - SC

Londrina, 19 de abril de 2011.

AGRADECIMENTOS

À Deus, fonte de minha esperança, pela vida maravilhosa;

À minha família, pelo incentivo, oportunidade, confiança e carinho;

Aos amigos, de perto e distantes, que estiveram sempre presentes nesta caminhada. Obrigada pelo carinho e confiança;

À minha orientadora, Prof^a Dr^a Lourdes Maria Werle de Almeida pela paciência, dedicação, confiança e amizade;

Ao Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa, Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba e Prof^a. Dr. Márcia Cristina de C. Trindade Cyrino pelas relevantes contribuições na construção deste trabalho;

À prof^a Dr^a. Mirian Buss Gonçalves por fazer parte da minha caminhada acadêmica;

Aos professores do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, em especial à professora Dr^a Regina Buriasco pelos ensinamentos e companheirismo;

Às professoras Angela Marta e Lilian Akemi pelas palavras de incentivo e demonstração de confiança;

Aos amigos do Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT), com quem tive o privilégio de conviver estudando, discutindo, concordando e, às vezes, discordando sobre os mais variados temas; em especial, aos amigos Karina, Adriana, Rodolfo, Cláudia, Camila, Gabi, Bárbara, Reginaldo e Michele.

Aos alunos do terceiro período do Curso de Engenharia Ambiental, matriculados na disciplina Matemática 2 no primeiro semestre de 2009, pela dedicação aos estudos, pela participação em minha pesquisa, pelo tempo dispensado, pelo carinho e pela amizade que construímos.

Aos amigos da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *campus* Londrina e *campus* Cornélio Procópio pelo carinho, pelas palavras de incentivo, pela amizade. Seria injusto citar nomes, mas saibam estão sempre presentes no meu pensamento;

Aos professores de Matemática da UTFPR- *campus* Londrina, por assumirem minhas aulas durante o período de meu afastamento, em especial, à amiga Adriana Borssoi e ao amigo Reginaldo Fidelis por estarem sempre presentes, oferecendo palavras de incentivo e confiantes em nosso trabalho;

À direção da UTFPR- *campus* Londrina pela oportunidade de realização desta pesquisa.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para que este trabalho fosse realizado.

*“Tudo é do Pai, toda honra e toda a glória.
É dEle a vitória alcançada em minha vida”.*

Frederico Cruz.

FERRUZZI, Elaine Cristina. **Interações discursivas e aprendizagem em Modelagem Matemática**. 2011. 218 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo “Investigar as interações que emergem durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática na sala de aula”, procurando identificar características que podem nos oferecer subsídios para compreender o papel destas interações na aprendizagem dos alunos. Observamos na literatura da área que diversas pesquisas têm sido realizadas tratando do desenvolvimento de atividades de Modelagem em sala de aula, apresentando argumentos favoráveis à sua inserção. Por outro lado, outras tantas sinalizam o papel fundamental das interações para a aprendizagem do indivíduo, apresentando características de interações que favorecem a aprendizagem. Diante disto, em nossa pesquisa nos preocupamos em investigar se estas características estavam presentes nas interações oportunizadas pela Modelagem em sala de aula. Com este intuito desenvolvemos com um grupo de alunos de uma Universidade Tecnológica Federal atividades de Modelagem Matemática. Com os dados obtidos da observação, filmagem e gravação em áudio do desenvolvimento destas atividades e, com base no referencial teórico adotado nesta pesquisa, concluímos que as atividades de Modelagem Matemática contribuem com a ocorrência de interações que possuem características que favorecem a aprendizagem dos alunos. Estas características estão alinhadas com as condições elencadas por Noreen Webb, Anna Sfard, Mortimer e Scott (2002) e Alro e Skovsmose (2006). Respeitando-se as limitações desta pesquisa concluímos que as interações oportunizadas pelo desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática contribuem significativamente para a aprendizagem do aluno.

Palavras-chave: Modelagem matemática. Interações discursivas. Educação matemática. Contexto.

FERRUZZI, Elaine Cristina. **Discursive Interactions and learning in Mathematical Modeling**. 2011. 218 f. Thesis (Doctorate on the Teaching of Sciences and Mathematical Education) - State University of Londrina, Londrina, 2011

ABSTRACT

This study aimed to “Investigate the interactions that emerge on the development of Mathematical Modeling activities in the classroom”, trying to identify some characteristics that may offer us foundations to understand the role played by these interactions in the students’ learning. In the field literature, we noticed that several researches have been carried out dealing with the development of Modeling activities in the classroom, presenting favorable arguments to its introduction. On the other hand, many other researches signalize the interactions fundamental role in the individual learning, presenting some interaction characteristics that favor the learning. In the face of it, in our research we concerned with investigating whether these characteristics were present in the interactions provided by Modeling in the classroom. For this purpose we have developed Mathematical Modeling activities with a group of students of a Federal University of Technology. With the data obtained through observation, recording in audio and video of the development of these activities, and based on the theoretical references adopted in this research, we concluded that Mathematical Modeling activities contribute to provide interactions that have the characteristics that favor the students’ learning. These characteristics are in line with the conditions listed by Noreen Webb, Anna Sfard, Mortimer and Scott (2002) and Alro and Skovsmose (2006). Respecting this research limitations, we conclude that the interactions provided by the development of Mathematical Modeling activities significantly contribute to the student learning.

Keywords: Mathematical modeling. Discursive interactions. Mathematical education. Context.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Mapa conceitual representando o conceito de zdp.....	32
Figura 2 – Sequências de condições que conduzem à aprendizagem na Perspectiva de noreen webb	56
Figura 3 – Dados sobre a concentração de cálcio em rios	83
Figura 4 – Tendência dos dados: concentração de cálcio em relação à profundidade do rio.....	84
Figura 5 – Resumo da análise da interação apresentada no episódio1	91
Figura 6 – Resumo da análise da interação apresentada no episódio2	92
Figura 7 – Tendência dos dados: concentração de cálcio em relação à profundidade do rio.....	93
Figura 8 – Quadro resumo da análise do episódio 3	97
Figura 9 – Quadro-resumo do episódio 4	101
Figura 10 – Quadro-resumo da análise do episódio 5	103
Figura 11 – Resolução da equação diferencial pelo grupo 1	104
Figura 12 – Primeira tentativa de determinação dos parâmetros pelo grupo 1.....	104
Figura 13 – Quadro-resumo da análise do episódio 6	107
Figura 14 – Recorte do questionário final	110
Figura 15 – Quadro-resumo da análise do episódio 7	111
Figura 16 – Segunda tentativa de determinação dos parâmetros pelo grupo 1.....	112
Figura 17 – Quadro-resumo da análise do episódio 8	114
Figura 18 – Simulação de um ajuste línea.....	115
Figura 19 – Quadro-resumo da análise do episódio 9	120
Figura 20 a – Determinação dos parâmetros e desenvolvimento do modelo pelo grupo 3	121
Figura 20 b – Determinação dos parâmetros e desenvolvimento do modelopelo grupo 3- continuação	122
Figura 21 – Determinação dos parâmetros e desenvolvimento do modelo pelo grupo 1	123
Figura 22 – Quadro-resumo da análise de todos os episódios.....	124
Figura 23 – Área de cultivo de soja no brasil em relação ao tempo	127
Figura 24 – Quadro-resumo da análise do episódio 10	132
Figura 25 – Área de cultivo de soja no brasil em relação ao tempo	133

Figura 26 – Esboço de um Gráfico de uma Curva Logística	134
Figura 27 – Quadro-Resumo da Análise do Episódio 11	136
Figura 28 – Quadro-Resumo da Análise do Episódio 12	138
Figura 29 – Recorte do Relatório Final: Resolução da Equação Diferencial	139
Figura 30 – Quadro-Resumo da Análise do Episódio 13	142
Figura 31 – Definição do Modelo Subjacente à s_1	143
Figura 32 – Procedimentos dos Alunos para Determinar “ $-rt$ ”	144
Figura 33 – Recorte do Relatório Final sobre a Validação do Modelo e Definição de s_2	145
Figura 34 – Representação Gráfica do Quarto Modelo	148
Figura 35 – Consideração Finais do Grupo 1 para a Atividade 3	148
Figura 36 – Quadro-Resumo da Análise do Episódio 14	150
Figura 37 – Quadro-Resumo da Análise de Todos os Episódios	150
Figura 38 – Tendência dos Dados: Concentração em Relação ao Tempo	154
Figura 39 – Quadro-Resumo da Análise do Episódio 15	159
Figura 40 – Quadro-Resumo da Análise do Episódio 17	163
Figura 41 – Dados Estabelecidos em Laboratório.....	164
Figura 42 – Recorte das Notas do Aluno a7 no Estabelecimento da Hipótese	165
Figura 43 – Recorte das Notas da Aluna a6 no Estabelecimento da Hipótese	166
Figura 44 – Notas do Aluno a7: Reescrita da Equação Diferencial Definida por Duas Sentenças em uma Equação Compacta, Utilizando a Função Degrau Unitário.....	167
Figura 45 – Notas da Aluna a6: Definição da Função Degrau Unitário e sua Utilização para Reescrever uma Função Definida p em uma Forma Compacta	167
Figura 46 – Anotações do Aluno a7	170
Figura 47 – Anotações da Aluna a6	170
Figura 48 – Anotações da Aluna a6	172
Figura 49 – Anotações do Aluno a7	172
Figura 50 – Anotações da Aluna a6	173
Figura 51 – Anotações de a7	173
Figura 52 – Notas da Resolução da Aluna a6	174
Figura 53 – Notas da Resolução do Aluno a7	175
Figura 54 – Quadro-Resumo da Análise do Episódio 17	177

Figura 55 – Quadro-Resumo da Análise do Episódio 18	180
Figura 56 – Quadro-Resumo da Análise dos Episódios da Atividade 3	181
Figura 57 – Quadro-Resumo da Análise das Interações Apresentadas na Descrição das Três Atividades.....	183
Figura 58 – E-mail do Grupo 2 a um Professor de Física	200

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Número de faltas dos alunos em um total de 76h/aulas e porcentagem de presença.....	70
Tabela 2 – Taxa média da concentração de cálcio em relação à profundidade	94
Tabela 3 – Validação do modelo encontrado pelo grupo 1 por meio do ‘teste 1’.....	107
Tabela 4 – Validação do modelo encontrado por meio do ‘teste 2’	112
Tabela 5 – Dados referentes á área de cultivo de soja no Brasil	127
Tabela 6 – Dados referentes á área de cultivo de soja no Brasil	133
Tabela 7 – Validação do modelo supondo $y_0 = 36000$ ha e $k = 57677000$	133
Tabela 8 – Validação do modelo supondo $y_0 = 36000$ ha e $k = 25000000$	146
Tabela 9 – Validação do terceiro modelo	147
Tabela 10 – Validação do quarto modelo.....	148
Tabela 11 – Dados referentes à concentração de acetato de etila em relação ao tempo	154
Tabela 12 – Dados referentes à concentração de acetato de Etila em relação ao tempo coletados em laboratório	164
Tabela 13 – Validação do Modelo.....	176

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	9
APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA	9
ESTRUTURA DO TEXTO	13
CAPÍTULO 1 – MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM CONTEXTO PARA A APRENDIZAGEM	14
1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	14
1.2 MODELAGEM MATEMÁTICA EM SALA DE AULA: UM CONTEXTO-SIMULADO PARA A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA	19
CAPÍTULO 2 – INTERAÇÕES NA SALA DE AULA E SUAS RELAÇÕES COM A APRENDIZAGEM	25
2.1 AS INTERAÇÕES NA SALA DE AULA: O QUE REVELAM ALGUMAS PESQUISAS	25
2.2 INTERAÇÕES SOCIAIS NA PERSPECTIVA DA TEORIA SOCIO-HISTÓRICO-CULTURAL.....	29
2.3 O PAPEL DO PROFESSOR NO PROCESSO INTERACIONAL	33
CAPÍTULO 3 – QUALIDADE DA COMUNICAÇÃO E APRENDIZAGEM	41
3.1 INTERAÇÃO COMO ‘DIÁLOGO’	41
3.2 CONDIÇÕES APRESENTADAS POR NOREEN WEBB PARA QUE AS INTERAÇÕES FAVOREÇAM A APRENDIZAGEM	51
3.3 SOBRE A ABORDAGEM COMUNICACIONAL	57
3.3.1 Análise Focal	60
3.3.2 Análise Preocupacional	63
CAPÍTULO 4 – ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA	66
4.1 PROBLEMA E OBJETIVO DA PESQUISA	66
4.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	67

4.3 A PESQUISA.....	68
4.3.1 A Coleta dos Dados.....	70
4.3.2 Os Sujeitos da Pesquisa.....	70
4.3.3 O Curso de Engenharia Ambiental da UTFPR	71
4.3.4 A Condução das Atividades.....	71
4.3.5 A Condução das Análises.....	71
CAPÍTULO 5 – AS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS E SUAS ANÁLISES	79
5.1 DESCRIÇÃO E ANÁLISE ESPECÍFICA DAS ATIVIDADES 1, 3 E 8.....	79
5.1.1 Atividade 1: Variação da Concentração de Cálcio em Sedimentos do Rio Limoeiro.....	81
5.1.2 Atividade 3: Estudo do Resfriamento de um Corpo de Alumínio	82
5.1.3 Atividade 8: Contaminação Dupla de uma Mistura com Acetato de Etila.....	85
5.2 ANÁLISE GERAL DAS ATIVIDADES.....	126
5.2.1 Interações Dialógicas Durante Atividades de Modelagem Matemática em Sala de Aula e Interações que podem ser Caracterizadas como ‘Diálogo’	126
5.2.2 Condições de Noreen Webb para que a Interação Favoreça a Aprendizagem e Condições Propostas por Anna Sfard para que a Comunicação seja Efetivada	129
5.2.3 O Papel do Professor na Constituição dos Tipos e Padrões de Interação.....	152
5.2.4 Influência das Características das Situações-Problema Investigadas Durante as Atividades de Modelagem Matemática para a Ocorrência das Interações e para o Tipo de Interação	152
5.3 Considerações dos Alunos Quanto ao Desenvolvimento das Atividades de Modelagem Matemática e à Importância das Interações.....	194
CAPÍTULO 6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	202
REFERÊNCIAS.....	207

INTRODUÇÃO

APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA

O debate sobre a Modelagem Matemática na Educação Matemática tem crescido consideravelmente nos últimos anos e, por conseguinte, as pesquisas que tratam da Modelagem¹ em sala de aula vêm se consolidando e abordando diferentes aspectos.

Dentre os focos de pesquisa dos últimos anos, estão as investigações sobre a interação entre os alunos e entre estes e o professor, tratando dos encontros entre os envolvidos nas atividades de Modelagem Matemática com o propósito de discutir uma tarefa e sua condução, denominados por Barbosa (2008; 2007; 2006) de “espaços de interação”.

Por um lado, o interesse pelas interações advém da própria estrutura de aulas mediadas pela Modelagem em sala de aula, em que se podem estabelecer interações entre alunos, entre alunos e professor, entre alunos e profissionais diversos, entre alunos e professores de disciplinas diferentes da Matemática.

Por outro lado, este interesse deriva das argumentações de Vygotsky (1993, 1993b, 2007) quanto à importância da interação para a aprendizagem. Para ele é a interação consigo mesmo e com os outros que propicia ao indivíduo a aprendizagem², considerando que, o conhecimento é construído na, e pela interação.

Vygotsky (1993) considera que em interação o indivíduo realiza mais do que poderia realizar sozinho e deste modo, atribui importância significativa ao ‘outro’ no processo de desenvolvimento do indivíduo.

Para explicar o papel da interação no desenvolvimento do indivíduo Vygotsky recorre ao conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP³), que caracteriza-se pela ‘distância’ entre o que o indivíduo é capaz de realizar sozinho e o que é capaz de realizar com a ajuda do ‘outro’. De acordo com as idéias de Vygotsky (1993) a interação em sala de aula, entre alunos e entre estes e o

¹ Para evitar repetições, utilizaremos, algumas vezes, o termo Modelagem para nos referir à Modelagem Matemática.

² Neste estudo percebemos a aprendizagem como um processo de mudança nas formas discursivas, conforme caracterizado por Sfard (2001, 2001a, 2006).

³ Tratamos deste conceito no Capítulo 2.

professor, pode operar na ZDP, permitindo-se trabalhar as funções que se encontram em desenvolvimento.

Deste modo, ancorados nas idéias de Levy Vygotsky vários pesquisadores têm investigado e apresentado argumentos favoráveis à introdução de atividades que oportunizem interações em sala de aula com vistas a contribuir para a aprendizagem do indivíduo.

Alro e Skovsmose (2006) por exemplo, assumindo que “a mera resolução de exercícios é uma atividade muito mais limitante para o aluno do que qualquer tipo de investigação” (p. 52), consideram que para quebrar o ‘paradigma do exercício’, e ampliar os tipos de padrões de interações presentes em aulas tradicionais⁴, é aconselhável trabalhar em ‘cenários de investigação’. Cenários de investigação são por natureza abertos, onde os alunos têm a oportunidade de formular questões e planejar as estratégias a serem utilizadas na solução de seus problemas. Para os autores, na mudança do paradigma do exercício para os cenários de investigação “os padrões de comunicação podem mudar e abrir-se para novos tipos de cooperação e para novas formas de aprendizagem” (ALRO; SKOVSMOSE, 2006, p. 58).

Para estes autores aulas ditas tradicionais são caracterizadas pelo ‘paradigma do exercício’, ou seja, a repetição de uma série de exercícios, os quais geralmente são oriundos de livros textos e portanto, preparados por uma autoridade externa à sala de aula, sem a participação dos alunos ou professor e, por padrões de interações do tipo triádicas I-R-A (Iniciação do professor, Resposta do aluno, Avaliação ou Feedback do professor). Este padrão apresenta um aspecto de controle, caracterizando-se como uma relação desigual entre professores e alunos, enfatizando a existência de uma autoridade em sala de aula. Ainda de acordo com estes autores “(...) Michael Stubbs (1976, p. 99) coloca: ‘Qualquer coisa que o aluno diga é ‘sandwichado’ em alguma coisa que o professor diz’. O professor faz uma pergunta, o aluno responde, e o professor avalia a resposta” (ALRO; SKOVSMOSE, 2006, p. 27).

Para estes autores neste tipo de interação (triádica) o professor geralmente conhece as respostas às suas questões e espera que o aluno ‘adivinha’

⁴ O termo ‘aulas tradicionais’ será entendido nesta tese como caracterizado por Alro e Skovsmose (2006): “ambiente escolar em que os livros-texto ocupam papel central, onde o professor atua trazendo novos conteúdos, onde aos alunos cabe resolver exercícios e onde o ato de corrigir e encontrar erros caracteriza a estrutura geral da aula” (p. 16).

o que tem em mente. Deste modo, a experiência dos alunos fica fragmentada, não sendo possível formar uma imagem geral da atividade, e, de modo geral, os alunos concentram-se mais no processo de adivinhação do que no conteúdo matemático. Por outro lado, cenários de investigação, por suas características, favorecem a ocorrência de interações não triádicas.

Entretanto, alguns pesquisadores, entre eles Anna Sfard, Noreen Webb, Helle Alro e Ole Skovsmose, consideram que algumas interações em especial, contribuem mais do que outras para a aprendizagem.

Para Anna Sfard e Noreen Webb a influência das interações para a aprendizagem está atrelada ao cumprimento de algumas condições⁵. Já Alro e Skovsmose (2006, p. 11), com o intuito de compreender o papel da comunicação na aprendizagem da matemática, partem da premissa de que “as qualidades da comunicação na sala de aula influenciam as qualidades da aprendizagem da matemática”. Com esta perspectiva os autores caracterizam o termo ‘diálogo’, considerando que um diálogo não é uma conversa qualquer, e sim, uma comunicação com certas qualidades, onde os participantes ‘se encontram’, influenciando-se, provocando e sofrendo mudanças. Para estes autores, ‘diálogo’ é uma conversa que visa a aprendizagem. Neste sentido, os autores preconizam o diálogo como uma ferramenta para o sucesso no processo de aprendizagem.

Com base nestes pesquisadores compreendemos que algumas características das interações podem favorecer a aprendizagem e, diante disto, em sintonia com Barbosa (2006a) de que a qualidade das atividades de Modelagem Matemática depende da qualidade das interações ali estabelecidas, optamos por investigar as interações que emergem durante o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática em sala de aula, procurando diagnosticar características que podem nos oferecer subsídios para compreender o papel destas interações na aprendizagem dos alunos.

Assim, nosso problema de pesquisa consiste em: **Investigar as interações que emergem durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática na sala de aula.** Com este intuito estamos interessados em investigar:

⁵ Estas condições são apresentadas no Capítulo 3.

- i) a ocorrência de interações dialógicas⁶ durante atividades de Modelagem Matemática em sala de aula;
- ii) a ocorrência de interações que podem ser caracterizadas como um 'diálogo';
- iii) em que medida as interações contemplam as condições elencadas por Noreen Webb para que a interação favoreça a aprendizagem;
- iv) em que medida as interações contemplam as condições propostas por Anna Sfard para que a comunicação seja efetivada;
- v) o papel desempenhado pelo professor na constituição dos tipos e padrões de interações⁷;
- vi) a influência das características de situações-problema tratadas pela Modelagem Matemática para a ocorrência das interações e para o tipo de interação.

Este problema de pesquisa procura ir além das pesquisas que tratam da importância atribuída às interações em sala de aula e/ou em atividades desenvolvidas por meio da Modelagem Matemática. Procuramos, para além desta importância, investigar elementos que sinalizam a interação como constituinte da aprendizagem do aluno em sala de aula.

Com o intuito de obter dados cuja análise subsidie nossa investigação, foram desenvolvidas atividades de Modelagem Matemática, no âmbito da Disciplina Matemática 2 em um curso de Engenharia Ambiental de uma Universidade Tecnológica Federal.

⁶ O termo 'interações dialógicas' é definido no Capítulo 2.

⁷ Os padrões de interações são apresentados no Capítulo 2.

ESTRUTURA DO TEXTO

A estrutura do texto compreende seis capítulos, além da introdução e das referências bibliográficas.

Na *introdução*, elaboramos o problema de pesquisa e definimos os objetivos.

No primeiro capítulo, apresentamos a Modelagem Matemática como um contexto para a aprendizagem da Matemática.

No segundo capítulo abordamos as interações como geradoras de aprendizagem.

No terceiro capítulo discutimos a qualidade da comunicação para a aprendizagem, com base em Noreen Webb, Anna Sfard, Mortimer e Scott (2002) e Alro e Skovsmose (2006).

No quarto capítulo retomamos o problema e as questões que orientam esta pesquisa, apresentando em seguida os procedimentos metodológicos. Na sequência apresentamos aspectos da pesquisa em si: como ocorreu a coleta de dados, os sujeitos da pesquisa, aspectos gerais do curso em que os sujeitos estavam matriculados, a condução das atividades e a condução das análises.

No quinto capítulo descrevemos e analisamos três atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas por alunos de um curso de Engenharia Ambiental no âmbito da disciplina Matemática 2.

No capítulo 6 elaboramos nossas considerações finais sobre o trabalho e, finalmente, apresentamos as referências bibliográficas utilizadas para o desenvolvimento da pesquisa.

CAPÍTULO 1

MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM CONTEXTO PARA A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Muitas são as definições ou caracterizações encontradas na literatura para o termo 'Modelagem Matemática'. Em termos gerais, Modelagem Matemática

refere-se à busca de uma representação matemática para um objeto ou um fenômeno, que pode ser matemático ou não. Neste sentido, trata-se de um procedimento criativo e interpretativo que estabelece uma estrutura matemática que deve incorporar as características essenciais do objeto ou fenômeno que pretende representar. (ALMEIDA; FERRUZZI, 2009, p. 120).

Considerando que a construção desta representação pode ocorrer em sala de aula, diversos focos de pesquisa têm sido evidenciados: a relação entre conhecimentos matemáticos e extra-matemáticos (ALMEIDA; BRITO, 2005; BISOGNIN E; BISOGNIN V; ISAIA, 2009; ALMEIDA; FERRUZZI, 2009. FERRUZZI; ALMEIDA; GONÇALVES, 2006); critérios para avaliação da utilização da Modelagem Matemática na sala de aula (BORBA; MENEGHETTI; HERMINI, 1999); o envolvimento dos alunos e do professor (SOUZA, 2007; BARBOSA, 2008, 2006a; FOX, 2006; ZBIEK ; CONNER, 2006); o uso das tecnologias de comunicação e informação em atividades de Modelagem Matemática (BORBA; MALHEIROS, 2007; BORBA; MENEGHETTI; HERMINI, 1997), entre outros.

Neste sentido, muitos educadores da área de Educação Matemática têm apresentado argumentos favoráveis à sua introdução em sala de aula. Esta introdução tem sido pontuada sob diferentes justificativas, levando em consideração: a reflexão dos alunos sobre o papel da Matemática na sociedade (SKOSMOSE, 2001; OLIVEIRA; CAMPOS; SILVA, 2009); a aprendizagem de conceitos matemáticos (CHINNAPPAN; THOMAS, 2003; STILLMAN et al., 2007; ALMEIDA; FERRUZZI, 2009; SANT'ANA 2007); a oportunidade para aluno exercer um papel investigativo (ALMEIDA;FERRUZZI, 2009; SANTOS; BISOGNIN, 2007); a motivação

para a aprendizagem (BURAK, 2004, SANTOS; BISOGNIN, 2007); o desenvolvimento da capacidade de solucionar problemas oriundos do cotidiano (BISOGNIN, E; BISOGNIN, V; ALONSO RAYS, 2004), entre outras.

Estas argumentações estão, de modo geral, fundamentadas nas ações daqueles envolvidos nas atividades de Modelagem. De modo geral, a Modelagem Matemática inicia com uma situação-problema que pode ser investigada e, ao deparar-se com esta situação, o modelador precisa compreendê-la e elaborar/formular o problema a ser investigado (ALMEIDA; SILVA, 2010). O termo problema é entendido aqui como uma situação na qual o indivíduo não possui esquemas *a priori* para sua solução.

Tendo definido o problema a ser investigado, o modelador, na expectativa de buscar soluções, investe na construção de um modelo matemático. De acordo com Almeida e Silva (2010), este modelo deve representar a situação-problema e ser passível de descrever uma solução para a mesma. Neste momento é necessário que o modelador utilize sua experiência e seu conhecimento matemático, realizando inferências sobre o problema e construindo hipóteses, levando em consideração os conceitos matemáticos que representam a situação.

Assim, ainda que a situação tenha origem fora da Matemática, torna-se um “problema matemático” a ser resolvido, respeitando-se limitações, condições e características da situação inicial, solucionando o problema por meio da matemática. Com os resultados o modelador interpreta o problema inicial, o que resulta na etapa de validação do modelo encontrado.

Deste modo, no encaminhamento dado às atividades de Modelagem Matemática na sala de aula, os envolvidos realizam um conjunto de ações, como a compreensão da situação-problema, a busca de informações sobre o fenômeno a ser estudado, a identificação e seleção de variáveis, a elaboração de hipóteses, a simplificação do problema, a obtenção e validação de um modelo matemático, identificando a sua aceitabilidade ou não e a comunicação dos resultados. Segundo Almeida e Ferruzzi (2009), estas ações estão associadas à:

- a) a formulação de um problema: os envolvidos com a atividade de modelagem precisam se apropriar de um problema e definir metas para a resolução; compreender a situação-problema por meio da Matemática implica em procurar respostas para o problema suscitado por esta situação;
- b) um processo investigativo: remete ao ato de investigar; ‘investigar’, (...) significa ‘seguir os vestígios’, ‘fazer diligências para achar’, ‘pesquisar’; ações como buscar informações, identificar e selecionar variáveis, definir hipóteses, fazer simplificações, constituem, portanto, elementos desse processo e requerem uma interpretação adequada e certo grau de intuição para superar a “falta de compreensão” (...);
- c) a busca por uma representação matemática (ou modelo matemático): de modo geral, a situação-problema se apresenta em linguagem natural, e não parece diretamente associada a uma linguagem matemática; gera-se assim a necessidade da transformação de uma representação (linguagem natural) para outra (linguagem matemática); esta linguagem matemática evidencia o problema matemático a ser resolvido; a busca e elaboração de uma representação matemática são mediadas por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente estas características; (...);
- d) a análise de uma resposta para o problema: a análise da resposta constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica em uma validação da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto a adequação da representação para a situação;
- e) a comunicação de resultados para outros: esta comunicação implica essencialmente em desenvolver uma argumentação que possa convencer aos próprios modeladores e àqueles aos quais estes resultados são acessíveis que a solução apresentada é razoável e é consistente, tanto do ponto de vista da representação matemática e dos artefatos matemáticos a ela associados quanto da adequação desta representação para a situação em estudo. (ALMEIDA; FERRUZZI, 2009, p. 121).

A importância da comunicação em atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas em sala de aula é enfatizada por diversos pesquisadores. Para Lau et al (2009) por exemplo, na comunicação dos resultados os ‘apresentadores’ têm a responsabilidade de explicar e justificar sua maneira de pensar e solucionar o problema e esta responsabilidade conduz o aluno a compreender melhor os conceitos e melhorar suas habilidades comunicativas: “para os alunos uma coisa é pensar em uma solução em particular, mas outra bem diferente é expressar seu pensamento para os outros” (LAU et al, 2009, p. 318, tradução nossa⁸). Assim como este autor, outros tantos (FROTA, (2006); STEIN;

⁸ Texto original: For the students, it is one thing to think through a solution privately but quite another to express their thinking to others.

SMITH, (1998); VISEU; PONTE, (2009), entre outros) atribuem importância a esta justificação de idéias.

Na mesma linha Onrubia (1999) considera que

a tentativa de formular verbalmente a própria representação para comunicá-la aos demais obriga a reconsiderar e re-analisar aquilo que se pretende transmitir; ajuda a detectar incongruências e incorreções; força a ser mais explícitos e precisos; obriga a buscar formulações alternativas para uma mesma idéia; ajuda, em suma a rever e enriquecer o próprio ponto de vista. (ONRUBIA, 1999, p. 146).

Para Miguel (2005) o sucesso desta comunicação está atrelado à reflexão sobre o que foi realizado, à construção de esquemas de pensamento elaborados e à organização do pensamento e ações.

Em relação ao processo investigativo desenvolvido pelo aluno, Franchi (1993) afirma que o método de investigação, por si só se justifica, mesmo que o problema abordado não esteja relacionado diretamente com a área profissional, pois os modelos construídos são as primeiras aproximações da realidade com os quais os alunos estão lidando. O método proporciona o “desenvolvimento de hábitos de rigor, precisão, raciocínio dedutivo, manifestação da capacidade criadora e julgamento pessoal” (FRANCHI, 1993, p. 50), que proporcionam um entendimento da Matemática, além de ser útil “como forma de estudo e abordagem científica de outros tantos assuntos ligados a qualquer atividade que ele se dedique posteriormente em sua vida profissional”. (FRANCHI, 1993, p. 50). Neste sentido, Borba (2010, p. 4) argumenta que “uma abordagem que privilegia uma postura investigativa pode possibilitar um envolvimento maior dos estudantes com o conteúdo e os levar a uma investigação de conceitos (...)” e Oliveira (2007, p. 1), considera que quando se trabalha em sala de aula com atividades investigativas propicia-se uma oportunidade dos alunos “trilhar” os caminhos dos matemáticos profissionais e compreender o processo de construção do conhecimento matemático. Deste modo, entendemos que as ações desenvolvidas pelo aluno no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, desde o entendimento do problema até sua validação, configuram-se como um resgate de um método científico, iniciando o aluno aos métodos de pesquisa científica. Neste sentido, Miguel (2005) considera que

É esse processo contínuo de abordagem e descrição do problema, proposta de uma solução e teste de solução (verificação) de enorme valor pedagógico porque incorpora etapas do procedimento científico; através dele é que se viabilizam (...) os limites e as possibilidades de formular conceitos pela análise dos seus próprios erros. (MIGUEL, 2005, p. 389).

Em atividades de Modelagem Matemática, geralmente, um conceito necessário à solução de um problema é desconhecido, o que leva o aluno à busca deste conhecimento. Pode até parecer estranho solicitar ao aluno que solucione um problema antes de conhecer os conceitos necessários para sua solução, entretanto, “a história da construção do conhecimento matemático mostra-nos que esse mesmo conhecimento foi construído a partir de problemas a serem resolvidos” (BRASIL, 2006, p. 84), isto é, o aluno está diante de um problema e necessita construir um conhecimento para solucioná-lo. Deste modo, o aluno busca a construção do seu conhecimento, construindo hipóteses, testando-as, validando-as e modificando-as, quando necessário.

No que se refere à validação, Almeida e Ferruzzi (2009) argumentam que

Na aula de matemática mediada por atividades de Modelagem Matemática, a análise do modelo encontrado constitui um processo analítico e avaliativo que sintetiza as diferentes ações desenvolvidas durante a atividade ao validar procedimentos matemáticos e a adequação do modelo à situação, [...].

Compete ao professor desempenhar o papel de especialista que assegura a validade dos resultados encontrados. A confiabilidade e a credibilidade nestes resultados podem ser incrementadas, por exemplo, com a publicação dos resultados obtidos. Esta ‘aceitação’ (ou ‘não aceitação’) do professor não impede e não isenta os alunos de possíveis refinamentos nos resultados encontrados. Trata-se de tornar legítimo no ambiente da sala de aula a solução apresentada para o problema. (ALMEIDA; FERRUZZI, 2009, p. 124).

Não obstante aos entendimentos sobre o que é Modelagem Matemática e à identificação de ações dos estudantes envolvidos com este tipo de atividade, constituímos aqui uma caracterização para Modelagem Matemática que, ao mesmo tempo em que considera o conjunto de ações ou buscas dos alunos, também remete à características ou elementos do problema que a atividade de Modelagem na sala de aula busca abarcar.

1.2 MODELAGEM MATEMÁTICA EM SALA DE AULA: UM *CONTEXTO-SIMULADO* PARA A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

A problematização de relações entre a ‘realidade’ e a matemática (matemática escolar) tem sido objeto de inúmeras pesquisas e o interesse de diversos pesquisadores (KNIJNIK; DUARTE, 2010; BURIASCO; FERREIRA; CIANI, 2009, MACHADO, 2005), entre outros.

No âmbito da Modelagem Matemática as discussões com esta temática também têm ocupado considerável número de professores e/ou pesquisadores (VELEDA; ALMEIDA, 2009; ARAÚJO, 2007; NEGRELLI 2008) entre outros.

Neste trabalho, todavia, não adentramos essa discussão e nem mesmo apresentamos levantamento de verbetes sobre o que é ‘realidade’, ‘matemática’ e ‘modelagem matemática’. Levando em consideração nosso entendimento sobre Modelagem apresentado na seção anterior, neste momento, para além da caracterização de ações realizadas pelos sujeitos (alunos ou professores) durante atividades de Modelagem Matemática, discutimos a caracterização dos problemas que conduzem a estas ações.

Neste sentido, não nos libertamos da perspectiva da Educação Matemática que é apregoada em inúmeros trabalhos mas firmada aqui pela assertiva de Buriasco, Ferreira e Ciani (2009, p. 82)

Na perspectiva de Educação Matemática aqui adotada, a proposta é a de trabalhar com tarefas que possam propiciar mais fortemente aos estudantes produzir conhecimento a partir de situações já conhecidas, familiares, imagináveis, com as quais possam produzir significado e, então, “aprender matemática”.

Em consonância com esta perspectiva, Van Den Heuvel-Panhuizen (2003) sugere que as atividades nas quais os alunos se envolvem podem não ser autenticamente ‘reais’, mas ainda assim precisam ser imagináveis, realizáveis na mente dos alunos.

Pautados nesta perspectiva e na possibilidade da matematização⁹ da realidade enunciada por diversos pesquisadores (VAN DEN HEUVEL-

⁹ ‘Matematização’ diz respeito à visualização, transição de linguagens, ao uso de símbolos para realizar descrições matemáticas.

PANHUIZEN, 2003; BASSANEZZI, 2002; LESH, 2006, 2010, entre outros), nos debruçamos sobre ‘quais’ elementos esta matematização da realidade pode considerar.

Esta discussão nos remete a idéia de ‘contexto’. Ainda que o termo ‘contexto’ seja utilizado sem uma caracterização específica em artigos e trabalhos científicos e mesmo na linguagem e comunicação coloquial fora dos ambientes acadêmicos ou científicos, apresentamos aqui conceitualização específica enunciada por alguns estudiosos do assunto.

A caracterização de contexto que fundamenta nosso encaminhamento é aquela apresentada por Martinez Silva (2003, p. 190): “conjunto de situaciones o problemas que dan significado¹⁰ a los conceptos matemáticos”.

Embora a questão da atribuição de significado à Matemática escolar¹¹ não esteja em relevo neste trabalho, o entendimento que estamos interessados em abarcar está em sintonia com a enunciação de Buriasco, Ferreira e Ciani (2009) de que o contexto tem a finalidade de ‘expor uma tarefa’ (p. 85) e elementos desta exposição “contribuem para a sua significação” (IBID, p. 85).

Esta caracterização de Martinez Silva (2003) para ‘contexto’ está alinhada com argumentações de Van den Heuvel Panhuizen (2005) de que o contexto, além de tornar as situações reconhecíveis e imagináveis, também deve

 aumentar a acessibilidade por meio do seu elemento motivacional, isto pode incluir, por exemplo, a apresentação de figuras, o tratamento de um tema polêmico ou que está na moda, fatos do interesse da comunidade local;
 permitir maior liberdade na forma de abordar o problema, de modo a possibilitar aos estudantes desenvolver diversos tipos de estratégias e, com isso, mais oportunidades de mostrar o que sabem. (BURIASCO; FERREIRA; CIANI, 2009, p. 86).

Martinez Silva (2003), ponderando sobre o potencial do ‘contexto’ para ‘matematizar’ a realidade e associar a esta matematização a aprendizagem dos alunos, caracteriza três tipos de ‘contexto’ que oferecem significado aos conceitos matemáticos.

i) **contexto real**: situação que ocorre na vida cotidiana, fora do ambiente escolar. Neste *contexto* o conhecimento matemático é construído e

¹⁰ No nosso trabalho o termo ‘significado’ é entendido, como valor, importância.

¹¹ Parte desta discussão pode ser percebida em Knijnik e Duarte (2010).

utilizado para solucionar uma situação-problema originada neste ambiente, com todas as suas limitações, características e variáveis.

ii) contexto simulado: é uma representação do *contexto real*, tendo sua origem no contexto real e reproduzindo parte de suas características. O *contexto simulado* faz referência às situações da vida cotidiana que são retomadas e transformadas em atividades de ensino e aprendizagem.

iii) contexto evocado: são situações propostas pelo professor em sala de aula, as quais permitem imaginar circunstâncias nas quais as situações estariam ocorrendo. Exemplos: problemas com enunciados, com tabelas de dados que representam uma situação fictícia de compra e venda, resultados fictícios de uma competição, etc.

Tanto o *contexto-evocado* quanto o *contexto-simulado*¹² são produtos didáticos e são utilizados em sala de aula com o objetivo de estabelecer relações entre os conteúdos da matemática escolar e situações que acontecem, de modo geral, fora do ambiente escolar.

Quando Martínez Silva (2003) refere-se ao *contexto-real* está se referindo a um ambiente da vida cotidiana em que o conhecimento matemático se faz necessário para a solução de um problema originado neste ambiente. Por exemplo, a construção de um ‘silo’ para armazenamento de grãos. Nesta construção é necessário que o projetista/construtor tenha conhecimentos sobre área de superfície, volume do recipiente, etc. Deste modo, é uma situação da vida cotidiana em que o envolvido no processo (profissional em questão) necessita da matemática para solucionar o seu problema imediato, respeitando as características da situação e todas as suas variáveis.

O *contexto-evocado* é caracterizado como uma situação fictícia construída em sala de aula pelo professor (ou sugerida por um livro texto) com o intuito de desenvolver um conteúdo matemático. Em situações deste tipo, não cabe ao estudante investigar outros aspectos da situação que não estejam descritos e bem definidos no enunciado do problema, caracterizando-se assim como uma

¹² Nosso interesse é caracterizar a Modelagem Matemática na sala de aula como “contexto simulado” e neste sentido, os termos “contexto”, “simulado”, “real” e “evocado” não devem ser interpretados separadamente, procurando entendimentos sobre o que seria “real” ou “simulado”. Deste modo, utilizamos os termos *contexto-simulado*, *contexto-real* e *contexto-evocado*, para não correr o risco de uma interpretação inadequada.

situação estruturada, sem abertura para construção de hipóteses e outras considerações além das constantes no enunciado. Este *contexto-evocado* caracteriza-se como um produto didático utilizado com o objetivo de sinalizar relações entre a matemática escolar e situações cotidianas.

Já o *contexto-simulado* faz referência à situações da vida cotidiana que são 'transformadas' em atividades de ensino e aprendizagem com vistas (para o professor) a abarcar conceitos matemáticos de modo geral, já enunciados em estruturas curriculares. Trata-se, portanto, de uma situação que de fato acontece, os dados obtidos são reais e relativos a um fenômeno que acontece em algum setor da sociedade. Para o tratamento desta situação, muitas vezes, a mesma é simplificada, transformando-se em uma situação passível de resolução para os envolvidos.

Diante desta caracterização de Martinez Silva (2003) e das ações associadas ao desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática enunciadas por Almeida e Ferruzzi (2009) e apresentadas na seção anterior, ainda que possam ser percebidas na literatura diferentes conceitualizações para a Modelagem Matemática conforme apresentado em Silva (2007), entendemos nesta pesquisa a Modelagem Matemática na Educação Matemática como um *contexto-simulado*, percebendo-a como uma representação do *contexto-real*, reproduzindo parte de suas características. Deste modo a Modelagem Matemática na Educação Matemática constitui um *contexto-simulado* que mediado por um processo investigativo propõe a resolução de um problema com referência na realidade.

Investigar este *contexto-simulado*, tendo em mente a caracterização de contexto que usamos (conjunto de situações ou problemas que oferecem significado aos conceitos matemáticos), significa compreender que vários fatores presentes neste *contexto* influenciam a aprendizagem: o interesse (intenção) do professor; o interesse (motivação) do aluno; o ambiente escolar; a dinâmica de encaminhamento das atividades; as características ou elementos dos problemas tratados, as relações entre os envolvidos (encontro, interação), etc. Partindo do pressuposto de Alro e Skovsmose (2006) de que a qualidade das interações (dos encontros) entre alunos e entre estes e o professor influencia na qualidade da aprendizagem, elegemos como foco de análise os encontros (interações) entre os envolvidos na atividade de Modelagem Matemática como um *contexto-simulado*.

Estes encontros (interações entre alunos e entre professor/alunos) em atividades de Modelagem Matemática têm sido pontuados como positivos para a

aprendizagem por diversos pesquisadores. Fox (2006) por exemplo, considera que, uma vez que as atividades de Modelagem são projetadas para ser desenvolvidas em pequenos grupos, onde os alunos desenvolvem e compartilham conceitos, explicações, justificativas e representações matemáticas, estas atividades oportunizam a colaboração social e o desenvolvimento de habilidades de comunicação, e neste sentido o autor pondera que a Modelagem Matemática pode ser caracterizada como uma experiência social. O autor considera ainda que em atividades de Modelagem Matemática as pessoas discutem, debatem, aperfeiçoam suas idéias, ouvem e colaboraram com seus pares e, quando apresentam o modelo final para os colegas, comunicam suas idéias matemáticas e deste modo ocorrem oportunidades para o questionamento crítico e a justificação. Para o autor, enquanto os indivíduos trabalham interativamente em atividades de modelagem, comunicam seu pensamento e geram idéias significativas e processos matemáticos (FOX, 2006).

No mesmo sentido Araújo e Salvador (2001), com base na análise de um trabalho desenvolvido por uma aluna, consideram que a natureza de encontros entre professor e aluno foi um traço determinante para o sucesso da atividade, considerando ainda que esta interação tem relações com a aprendizagem dos estudantes.

Já Zbiek e Conner (2006) afirmam que os estudantes aprendem quando trabalham em interação em um contexto de Modelagem Matemática. Para as autoras, a reflexão que o indivíduo faz quando está se comunicando com os outros conduz o indivíduo a modificar ou justificar seu procedimento e seu entendimento do conceito matemático por ele utilizado.

Observamos que estas idéias convergem para a perspectiva de Vygotsky para quem o conhecimento é construído “na” e “pela” interação. Os estilos de argumentação, as ferramentas empregadas e a forma como o conhecimento pode ser construído por meio destas interações, trazem contribuições para a formação do aluno.

Barbosa (2008, 2007, 2006, 2006a) também tem se preocupado em investigar as práticas dos alunos em Modelagem Matemática, investigando as discussões que ocorrem nos ‘espaços de interação’. Este pesquisador classifica

estas discussões em discussões matemáticas, técnicas, reflexivas e paralelas¹³, e argumenta que, de acordo com a perspectiva do professor e o propósito da modelagem, um tipo de discussão pode ser privilegiado, entretanto, a presença de um tipo não inviabiliza a presença das outras.

Considerando a importância das interações que podem emergir durante atividades de Modelagem Matemática, tratamos, no próximo capítulo, de possíveis relações entre interações e a aprendizagem dos alunos.

¹³ Ver Barbosa (2008).

CAPÍTULO 2

INTERAÇÕES NA SALA DE AULA E SUAS RELAÇÕES COM A APRENDIZAGEM

2.1 AS INTERAÇÕES NA SALA DE AULA: O QUE REVELAM ALGUMAS PESQUISAS

Quando se investiga a sala de aula, muitas questões podem ser objeto de análise com vistas à compreensão de aspectos que constituem a aprendizagem dos alunos. Neste sentido, um dos aspectos apontados por diversos pesquisadores (WEBB, FARIVAR e MASTERGEORGE, 2002; LAU et al., 2009, BISHOP, 1988; CARVALHO; CÉSAR, 2002, entre outros) tem sido a interação entre os envolvidos em atividades de sala de aula.

A interação neste contexto é entendida como um discurso interativo (em termos de Mortimer e Scott, 2002), que envolve no mínimo duas pessoas e em que existe uma troca de turnos nas falas. O 'discurso' por sua vez, diz respeito a qualquer instância da comunicação, tanto com os outros como consigo mesmo, tanto verbal quanto com o uso de outro sistema simbólico. Já a 'comunicação' consiste no uso de meios com a intenção de fazer o outro sentir ou agir de determinado modo (Sfard, 2000, 2001). Considerando que o pensamento pode ser entendido como uma forma de comunicação, Sfard (2000, 2001) salienta que o 'outro' pode ser o próprio indivíduo.

Webb, Farivar e Mastergeorge (2002) consideram que atividades desenvolvidas pelos alunos em pequenos grupos representam uma oportunidade para o aluno reconhecer e solucionar contradições entre as suas próprias perspectivas e as dos outros e incorporar processos e estratégias de resolução de problemas.

No mesmo sentido, Lau et al (2009) afirmam que, na colaboração entre pares, existe um potencial de aprendizado onde o aluno necessita da contribuição do 'outro' para fazer progresso em seu aprendizado. Os autores argumentam que a interação proporciona condição adequada para a livre troca de idéias e feedback entre colegas, estimulando a auto estima, o comportamento social e o desenvolvimento escolar. Para estes autores os alunos estarão envolvidos construtivamente ao resolver problemas, propondo, formulando, conjecturando e

justificando idéias matemáticas e ao avaliar as idéias dos seus pares. Vallim (2008, p.67) por sua vez, argumenta que as interações fazem com que “o conhecimento coletivo torne-se particular e o particular torne-se coletivo”.

No artigo “Aspectos sociais e culturales de la educación matemática” Bishop (1988) trata do ensino e da aprendizagem da Matemática, seus problemas e desafios. Neste artigo o autor se propõe a falar de duas áreas de investigação que podem auxiliar na compreensão sobre o ensino e a aprendizagem da matemática: i) a área que se refere aos aspectos sociais e ii) a área que se refere aos aspectos culturais. O autor assinala que estas duas áreas reconhecem que o fundamental na educação são as pessoas e neste sentido, ambas tratam das pessoas envolvidas, direta ou indiretamente, na educação.

Em relação à área que se refere aos aspectos sociais, Bishop (1988) enfatiza que diversos pesquisadores têm demonstrado como a aprendizagem de um indivíduo é determinada pela aprendizagem dos demais e, com base em suas pesquisas, afirma que os estudantes se ajudam mutuamente no seu desenvolvimento cognitivo.

Considerando este aspecto, Bishop (IBID) propõe a realização de trabalhos com grupos pequenos de alunos, para que possam ajudar-se mutuamente com o auxílio do professor. Com base em suas investigações, o autor sugere que

necesitamos usar más métodos de enseñanza de grupos reducidos. Debemos dejar que los alumnos, bajo el control del profesor, se formen unos a otros, dialoguem más, trabajen en proyectos de grupo, y adquieran más responsabilidad en el desarrollo de su propio conocimiento (BISHOP, 1988, p. 122).

Webb e Palincsar (1996) tratando da teoria sócio-histórica de Vygotsky argumentam que em interação os alunos co-constróem o conhecimento que não eram capazes de construir antes da interação com seus pares. Em seus estudos, as autoras citam várias pesquisas empíricas que têm apresentado resultados satisfatórios quanto à contribuição da co-construção durante as interações para a aprendizagem¹⁴.

¹⁴ As pesquisas citadas pelas autoras são: Saxe, G. B. (1992). Studying children's learning in context: Problems and prospects. *Journal of the Learning Sciences*, 2(2), pp. 215--234.
Forman, E. A., e Cazden, C. B. (1985). Exploring Vygotskian perspectives in education: The cognitive value of peer interaction. In J. V. Wertsch (Ed.), *Culture, communication, and cognition: Vygotskian perspectives* (pp. 323–347). New York: Cambridge University Press.

Cobo e Fortuny (2000) apresentam os resultados de uma pesquisa em que investigaram as relações entre as interações e o desenvolvimento cognitivo. Com base em dados empíricos os autores concluem que os diversos tipos de interações analisadas influenciaram significativamente o desenvolvimento cognitivo do indivíduo.

Carvalho e César (2002) no artigo “Interacções sociais, desenvolvimento cognitivo e matemática” apresentam resultados de uma pesquisa com alguns alunos trabalhando individualmente e outros trabalhando em duplas. As autoras concluem que as interações entre os alunos facilitam a promoção do desenvolvimento cognitivo do estudante, pois os alunos que trabalharam em duplas progrediram significativamente mais em seu desenvolvimento cognitivo, em relação aos outros que trabalharam individualmente. Uma explicação para tal fato é dada pelas autoras com vistas à noção de conflito sócio-cognitivo. Segundo estas autoras, com esta noção

[...] é possível compreender a dinâmica entre o social e o individual, presente quando o sujeito se confronta com outro, em relação a uma tarefa que têm de resolver em conjunto, com os vários saberes e competências que cada um possui e acontecendo tudo isto num contexto social que não é neutro, no qual são também estabelecidas relações de poder e liderança (CARVALHO; CÉSAR, 2002, p. 413).

A interação oportuniza o confronto de idéias e este confronto resulta em um desequilíbrio inter-individual (em relação às respostas dos sujeitos) e intra-individual (onde o sujeito é levado a questionar seu próprio ponto de vista). Para estas autoras, é na procura por ultrapassar o desequilíbrio inter-individual que o sujeito resolve seu conflito intra-individual, e neste sentido as interações podem auxiliar o desenvolvimento cognitivo. Além disso, os autores, em desacordo com Vygotsky, afirmam que para que exista progresso cognitivo não é necessário que a interação social ocorra com um par mais competente:

Yackel, E., Cobb, P., e Wood, T. (1991). Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 390–408.

Forman, E. A. (1989). The role of peer interaction in the social construction of mathematical knowledge. *International Journal of Educational Research*, 13, 55-70.

Damon, W., Killen, M. (1982). Peer interaction and the processo f change in children’s moral reasoning. *Merrill-Palmer Quarterly*. 28, 347 – 367.

Glachan, M. and Light P., (1982), Peer Interaction and Learning: can two wrongs make a right? In: Butterworth, G. and Light, P. (Eds), *Social Cognition*, Harvester: Brighton.

Mesmo nas díades simétricas existe progresso cognitivo e há pares mais competentes que também progridem. Assim, o que parece ser essencial para que haja progresso cognitivo é a qualidade da interacção estabelecida, a capacidade que os sujeitos têm de trabalhar na sua zona de desenvolvimento proximal, de encontrar e discutir significados, estratégias de resolução, saberes matemáticos e o modo como são, ou não, capazes de gerir, do ponto de vista social, a interacção estabelecida (CARVALHO e CÉSAR, 2002, p. 414).

Bradford (2007) também apresenta resultados de uma investigação sobre o uso de atividades discursivas em sala de aula e conclui que estudantes que participam de atividades discursivas têm ganhos na realização de atividades matemáticas em relação a outros que não participaram destas atividades. Para a pesquisadora, nas atividades discursivas os alunos tornam-se mais dispostos a conjecturar e testar estratégias sem medo de errar e deste modo participam mais ativamente do processo de construção do conhecimento matemático.

Webb e Mastegorge (2003a), em sintonia com argumentações de Vygotsky, afirmam que ao participarem de atividades interativas, os estudantes podem aprender muito uns com os outros, pois compartilham conhecimentos, constroem suas idéias com auxílio das idéias dos outros, reconhecem e resolvem suas próprias contradições e incorporam os processos de resolução de problemas e estratégias que surgem durante o desenvolvimento das atividades. Com base em diversos autores, Webb e Mastegorge (2003a) salientam que estas atitudes conduzem à aprendizagem.

Gómez, Dolores e Martínez (2005) enfatizam que a aprendizagem em sala de aula ocorre mediante as interações entre professor e aluno, experimentando, compartilhando, confrontando, argumentando, convencendo, debatendo e negociando. Para os autores, é no conflito gerado pelas interações que os estudantes observam as semelhanças e diferenças de opiniões na resolução de um problema.

A importância da interação entre os indivíduos, especialmente no âmbito escolar, ainda que investigada ou apontada por inúmeras pesquisas, tem, sem dúvida, no psicólogo russo Lev Semynovich Vygotsky e sua teoria socio-histórico-cultural o seu aporte maior.

2.2 INTERAÇÕES SOCIAIS NA PERSPECTIVA DA TEORIA SOCIO-HISTÓRICO-CULTURAL

Lev Vygotsky nasceu na Rússia, em novembro de 1896 e morreu em junho de 1934, vítima de tuberculose, num período histórico de conflitos políticos: a Revolução Russa de 1917 que deixou a Rússia em um estado lastimável. De acordo com Zanella (2001) após a consolidação desta revolução, surge uma nova sociedade, a qual exigiu a constituição de um novo homem, e um dos problemas mais sérios a serem enfrentados era a Educação. Vygotsky toma para si a “tarefa de elaborar uma nova psicologia, fundamentada epistemologicamente nos princípios do materialismo histórico e dialético” (ZANELLA, 2001, p.73). Foi neste cenário que Vygotsky idealizou e desenvolveu sua teoria.

Vygotsky, em seus estudos, sempre demonstrou preocupação com o desenvolvimento do ser humano e procurou explicar este desenvolvimento em relação aos aspectos sociais. Neste sentido, o termo “interação social” possui estreita relação com sua teoria, uma vez que para Vygotsky o conhecimento é construído na e pela interação (VYGOTSKY, 1993, 1993a, 1993b, 2007). Qualquer interação é uma interação social, visto que envolve outras pessoas (interação face-a-face) ou interação entre pessoas e meio social.

A concepção de Vygotsky (1993) sobre sujeito (um ser interativo) é social, concebendo à educação um papel fundamental, entendendo a aprendizagem como um processo de construção e não como um processo de recepção passiva. Deste modo, no âmbito da educação, se entende que o aluno não é somente o sujeito da aprendizagem, mas aquele que constrói seu conhecimento com o outro. Para Vygotsky a mediação do outro exerce um papel primordial no processo de desenvolvimento do indivíduo: “nós nos tornamos nós mesmos por meio do outro” (VYGOTSKY, 1989, p. 56, tradução nossa)¹⁵.

Neste sentido, Vygotsky (1989) destaca que a aprendizagem desencadeia alguns processos internos que são capazes de operar somente quando o indivíduo interage com seu ambiente e em interação com seus pares, e defende assim, que a reflexão individual deriva da interação com os outros e com o meio.

Para Vygotsky (2007) o processo de aprendizagem compreende dois momentos. O primeiro ocorre nas atividades coletivas, isto é, nas relações entre

¹⁵ Texto original: “we become ourselves through others”.

professor e aluno e entre aluno e aluno em sala de aula. Neste momento as atitudes do professor e seu modo de sistematizar e planejar os conteúdos científicos em sala de aula possuem grande importância no processo de aprendizagem. Já o segundo momento ocorre internamente, é uma atividade individual com propriedades internas de pensamento.

Para este teórico não é suficiente entender os processos de desenvolvimento das funções psicológicas baseando-se apenas nas funções já desenvolvidas. Neste sentido defende a importância de compreender os conceitos potenciais para o desenvolvimento dessas funções. Assim, e com vistas a compreender o papel do outro na aprendizagem, Vygotsky (2007) concebeu o desenvolvimento humano em dois níveis: o Nível de Desenvolvimento Real (NDR) e o Nível de Desenvolvimento Potencial (NDP). A “distância” entre estes dois níveis é denominada por Vygotsky como sendo a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). O conceito da ZDP traz consigo a idéia das transformações que podem originar-se por meio da ação intencional do professor, com vistas a promover progressos que não aconteceriam de modo espontâneo (SCHROEDER; FERRARI; MAESTRELLI, 2010).

O Nível de Desenvolvimento Real (NDR) é caracterizado por aquilo que o indivíduo já conquistou e apropriou-se e é capaz de realizar sozinho.

Já o Nível de Desenvolvimento Potencial (NDP) é caracterizado pela capacidade de realizar tarefas com a ajuda dos outros recebendo pistas, orientações e informações (VYGOTSKY, 1993). De acordo com Aguiar (2006)

essa possibilidade de alterar o desempenho de uma pessoa pela interferência de outra é fundamental na teoria de Vygotsky, pois representa um momento de desenvolvimento pela capacidade de se beneficiar por meio da colaboração de outrem, o que ocorre num certo nível de desenvolvimento, mas não antes (AGUIAR, 2006, p. 66).

Este nível de desenvolvimento a que o autor se refere diz respeito ao NDP.

A caracterização apresentada por Vygotsky para a ZDP é

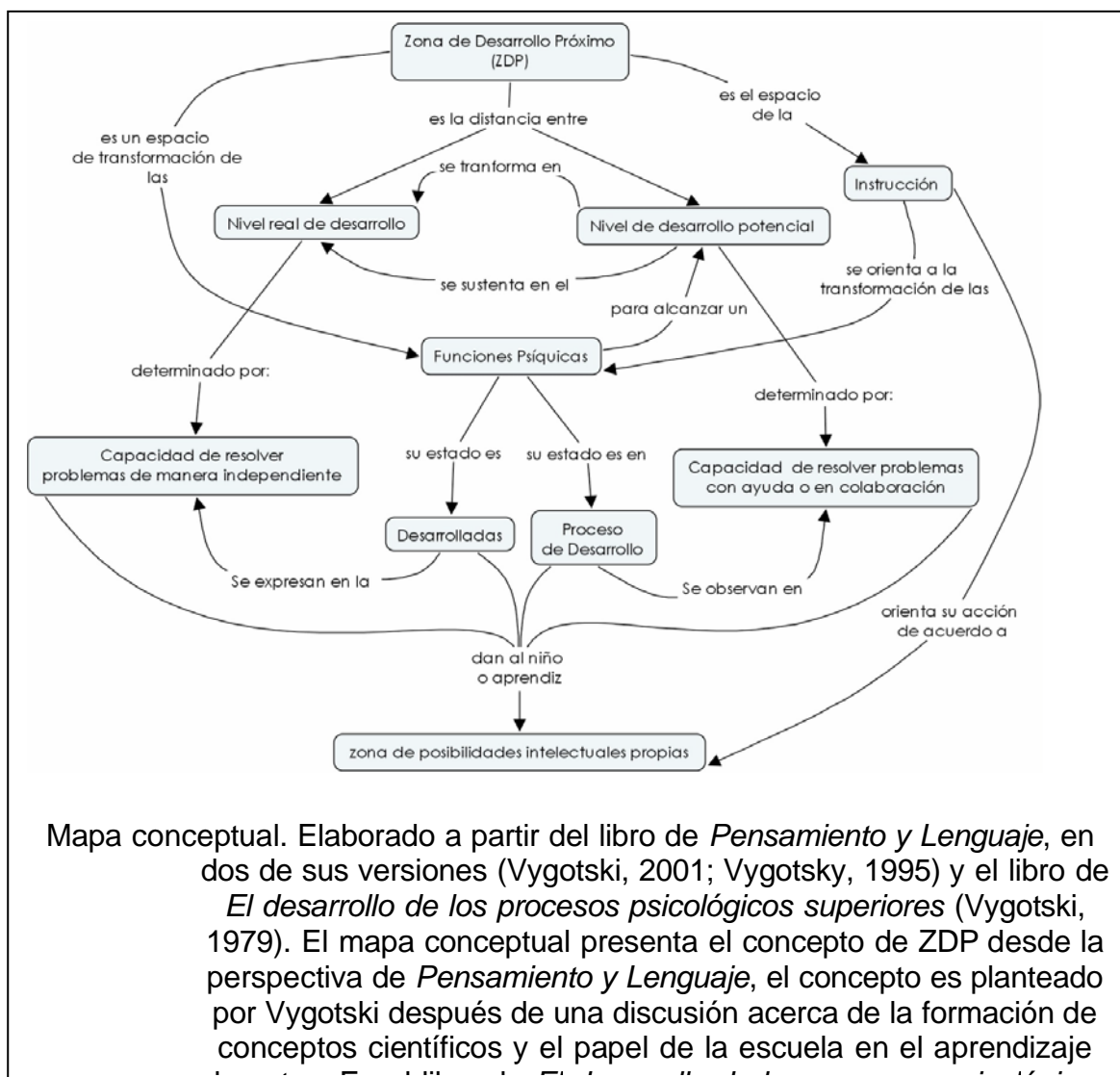
a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (VYGOTSKY, 2007, p.97).

Na tentativa de elucidar o que, de fato, significa a Zona de Desenvolvimento Proximal, Aguilar Tamayo (2006) apresenta um mapa conceitual incorporando conceitos de Vygotsky que transcrevemos na Figura 1. Neste mapa observa-se que a ZDP é o espaço de transformação das funções psíquicas que podem ser efetivadas por meio das atividades de ensino mediadas pela interação.

Estas funções psíquicas podem estar desenvolvidas ou em processo de desenvolvimento. Quando estão desenvolvidas expressam a capacidade de solucionar problemas de modo independente, indicando o NDR e, por outro lado, quando não estão plenamente desenvolvidas podem estar em um processo de desenvolvimento, o que é observado pela capacidade de solucionar problemas com a ajuda do “outro”, indicando o NDP.

Este conceito de Vygotsky (1993) leva ao entendimento de que na interação com o *outro*, o indivíduo consegue realizar mais do que poderia sozinho “... lo que el niño es capaz de hacer hoy en colaboración será capaz de hacerlo por sí mismo mañana” (VYGOTSKY, 1993, p. 241). Deste modo, por meio da interação o indivíduo constrói conhecimento e seu Nível de Desenvolvimento Potencial avança, transformando-se em um Nível de Desenvolvimento Real.

Figura 1 – Mapa conceitual representando o conceito de ZDP



Fonte: Aguilar Tamayo (2006, p. 217).

A importância atribuída por Vygotsky às interações em sala de aula (professor/aluno e aluno/aluno) e a ZPD para a aprendizagem, advém ainda de sua compreensão acerca da formação dos conceitos. Para Vygotsky (1993, 1993a) os conceitos cotidianos são ligados a objetos concretos, carregados de experiência pessoal, e percorrem um caminho que vai do concreto para o abstrato, sendo desenvolvidos a partir das experiências cotidianas do indivíduo. Por outro lado, os conceitos científicos são construídos por meio de instrução e percorrem um caminho que vai do abstrato ao concreto. Para Vygotsky, “a educação formal é constituída por um conjunto de cenários especialmente organizados para a modificação do pensamento” (SCHROEDER, 2008), e nestes cenários, o papel da interação entre

professor e estudantes e entre os alunos é colocado em evidência. A interação entre professor e alunos ou entre alunos, atua sobre a ZDP, fazendo com que processos em desenvolvimento venham a se completar.

A teoria vygotskiana apregoa ainda que a escola deve adiantar-se ao desenvolvimento do indivíduo, ou seja, conduzir as funções psicológicas que estão em via de desenvolvimento, pois de acordo com esta teoria, a aprendizagem impulsiona o desenvolvimento, que por sua vez, permite novas aprendizagens, que novamente impulsionam o desenvolvimento e assim sucessivamente. Assim, é fundamental que o professor esteja atento ao NDP do aluno, para poder atuar sobre estas funções, oferecendo algo que vai além do que o indivíduo consegue realizar sozinho, desafiando-o. Daí a importância do professor (ou de um colega em interação) como mediador, auxiliando o indivíduo a alcançar um novo patamar de desenvolvimento. Entretanto, para que isto ocorra, é necessário que a educação formal propicie interações entre professor/aluno e entre alunos, permitindo que o 'outro' atue na ZDP do indivíduo, pois é exatamente nesta ZDP que a comunicação em sala de aula pode atuar de maneira decisiva para o aprendizado do estudante.

Tendo consciência de que o professor possui um papel fundamental no encaminhamento das atividades em sala de aula, tendo influência decisiva no tipo de comunicação que ali pode ocorrer, incluindo tipos de interações que geram padrões com potenciais para a aprendizagem, trataremos no próximo item do papel do professor como determinante para a interação em sala de aula, dos tipos de abordagens comunicativas e dos padrões de interações que ali podem ocorrer.

2.3 O PAPEL DO PROFESSOR NO PROCESSO INTERACIONAL

Algumas opções metodológicas do professor na sala de aula privilegiam o discurso do aluno, enquanto outras, são desenvolvidas de forma que só a voz do professor tem vez. Sobre este aspecto, Mortimer e Scott (2002) consideram que o professor pode interagir com os estudantes de diferentes maneiras, com a finalidade de desenvolver os conceitos científicos.

O que nos impressiona são as diferentes formas pelas quais os professores interagem com seus estudantes ao falar sobre os conteúdos científicos: em algumas salas, as palavras estão por toda a parte. Os professores fazem perguntas que levam os estudantes a pensar e os estudantes são capazes de articular suas idéias em palavras, apresentando pontos de vista diferentes. Em algumas ocasiões o professor lidera as discussões com toda a classe. Em outras, os estudantes trabalham em pequenos grupos e o professor desloca-se continuamente entre os grupos, ajudando os estudantes a progredirem nas tarefas. Em outras salas de aula, o professor faz uma série de questões e as respostas dos estudantes, na maioria das vezes, limitam-se a palavras aqui e acolá, preenchendo as lacunas no discurso do professor. Muitas vezes o professor é extremamente hábil nesse estilo de exposição, mas há muito pouco espaço para os estudantes fazerem e falarem algo, e muitos nunca abrem a boca (MORTIMER ; SCOTT, 2002, p.284).

Os autores identificam quatro classes de ‘abordagens comunicativas’¹⁶, definidas de acordo com a caracterização do discurso produzido entre professor e alunos e entre os alunos. Estas quatro classes i) interativo/dialógico; ii) não-interativo/dialógico; iii) interativo/de autoridade e iv) não-interativo/de autoridade, estão relacionadas com o papel do professor enquanto condutor e organizador do discurso em sala de aula¹⁷. Estas classes foram definidas em termos de duas dimensões: discurso ‘dialógico/de autoridade’ e discurso ‘interativo/não interativo’.

A dimensão ‘discurso dialógico e discurso de autoridade’ considerada na abordagem comunicativa, diz respeito à adequação da comunicação entre professor e alunos (ou entre alunos) a dois extremos de um continuum: dialógico/de autoridade. Quando o professor considera as concepções do estudante, levando em consideração seus pontos de vista, a comunicação constitui uma abordagem dialógica. Deste modo mais de uma ‘voz’ é considerada e existe uma inter-animação de idéias. Já no segundo extremo deste continuum tem-se uma abordagem comunicativa de autoridade na qual “o professor considera o que o estudante tem a dizer apenas do ponto de vista do discurso científico escolar (...)” (MORTIMER; SCOTT, 2002, p. 287). Deste modo, apenas uma “voz” é ouvida e não existe inter-animação de idéias. Segundo os autores o que torna o discurso dialógico

¹⁶ Para os autores, a ‘abordagem comunicativa’ fornece “a perspectiva sobre *como* o professor trabalha as intenções e o conteúdo do ensino por meio das diferentes intervenções pedagógicas que resultam em diferentes padrões de interação” (IBID, p. 287).

¹⁷ Apesar dos autores não especificarem o que consideram ‘discurso’ entendemos que tem a mesma conotação do discurso caracterizado por Anna Sfard: qualquer instância da comunicação, tanto com os outros como consigo mesmo, tanto verbal quanto com o uso de outro sistema simbólico. Deste modo, o discurso será aqui entendido como sendo uma instância da comunicação.

“é o fato de que ele expressa mais de um ponto de vista - mais de uma ‘voz’ é ouvida e considerada - e não que ele seja produzido por um grupo de pessoas ou por um indivíduo solitário” (IBID, 2002, p. 287).

A dimensão da abordagem comunicativa que considera o continuum ‘discurso interativo e não-interativo’, diz respeito exatamente a esse fato ou seja, ser produzida por um grupo de pessoas ou por um só indivíduo. O discurso interativo é caracterizado por ocorrer com a participação de mais de uma pessoa, ou seja, o que chamamos de ‘interação entre pares’, ‘interação face-a-face’ ou simplesmente ‘interações’, e o discurso não-interativo ocorre com a participação de uma única pessoa (um discurso individual). Assim, quando existe alternância nos turnos das falas, o discurso é considerado interativo, caso contrário, quando não há esta alternância, o discurso é considerado não interativo. Assim, tem-se:

- i) Interativo/dialógico: professor e estudantes exploram idéias, formulam perguntas e oferecem, consideram e trabalham diferentes pontos de vista.
- ii) Não-interativo/dialógico: professor considera, na sua fala, vários pontos de vista, destacando similaridades e diferenças.
- iii) Interativo/de autoridade: professor geralmente conduz os estudantes por meio de uma seqüência de perguntas e respostas, com o objetivo de chegar a um ponto de vista específico. No discurso de autoridade o professor segue sua própria linha de pensamento e cabe ao aluno completar lacunas de sua fala;
- iv) Não-interativo/ de autoridade: professor apresenta um ponto de vista específico.

Os autores salientam que, embora estas classes sejam apresentadas em termos de professor/aluno, sendo relacionadas ao papel do professor na condução do discurso em sala de aula, elas podem ser aplicadas para caracterizar interações que ocorrem apenas entre alunos.

Mortimer e Scott (2002) consideram ainda aconselhável a existência em sala de aula da variação de abordagens comunicativas, trabalhando-se tanto na dimensão dialógica/de autoridade como a interativa/não interativa. Entretanto, para estes autores

Se o objetivo do ensino é fazer com que os estudantes desenvolvam um entendimento do tópico em estudo, esses estudantes devem engajar-se em atividades dialógicas, seja de forma interativa ou não-interativa: participando de, ou escutando a, uma interação dialógica entre o professor e a classe; discutindo idéias com seus colegas em pequenos grupos; pensando sobre as idéias. Seja de que forma isso se concretize, cada estudante precisa ter a oportunidade de trabalhar as novas idéias, 'especificando um conjunto de suas próprias palavras' em resposta a essas idéias, para que possa apropriar-se dessas idéias, torná-las suas próprias idéias. (MORTIMER; SCOTT, 2002, p.302).

Fanizzi (2008) corrobora com esta perspectiva de Mortimer e Scott (2002) quando considera a classe interativa/dialógica a mais indicada para alcançar êxito na aprendizagem do aluno.

Com base nos argumentos aqui apresentados, compreendemos que a comunicação com maior potencial para gerar aprendizagem é a comunicação que se caracteriza pela abordagem interativa, ou seja, que envolve mais de uma pessoa. Nestes termos, nosso interesse nesta tese está voltado para as classes interativa/dialógica e interativa/de autoridade.

Outro aspecto determinante da comunicação entre professor e aluno e entre alunos são os 'padrões de interação', característicos dos discursos interativos. Mortimer e Scott (2002) e Mortimer et al. (2007) apresentam alguns padrões de interação que podem ocorrer na medida em que "professor e alunos alternam turnos de fala na sala de aula" (MORTIMER; SCOTT, 2002, p. 288). Observamos que estes padrões dizem respeito a uma abordagem comunicativa em que o discurso é interativo pois pressupõe uma 'alternância de turnos de falas'. Neste sentido pertence ao que consideramos como 'interação entre pares', 'interações face-a-face', ou simplesmente 'interações'.

Segundo Mortimer e Scott (2002) e Mortimer et al. (2007), o padrão de interação mais comum em sala de aula é a tríade I-R-A em que o professor faz uma iniciação, o aluno responde e em seguida o professor faz uma avaliação.

Entretanto, outros padrões podem ser observados em sala de aula, por exemplo, padrões não triádicos do tipo: I-R-F-R-F...ou I-R-P-R-P... em que F significa um *feedback* do professor para que o aluno elabore mais sua fala e P corresponde a uma fala do professor com o objetivo de sustentar o discurso do aluno e fazer com que este prossiga sua fala. Normalmente o *prosseguimento* (P) caracteriza-se por ser uma repetição de uma palavra ou parte da resposta do aluno.

Tanto o *feedback* quanto o *prosseguimento* são enunciados que requerem do 'outro' uma elaboração adicional, originando cadeias de interações. Estes dois padrões são considerados cadeias abertas, onde não existe uma avaliação do professor ao final da cadeia. Caso ocorra avaliação do professor ao final da cadeia (I-R-F-R-F...A ou I-R-P-R-P...A) as cadeias são consideradas fechadas (MORTIMER ; SCOTT, 2002) e MORTIMER et al., 2007). Segundo os autores podem ainda ocorrer padrões de interação que envolvem iniciações de sequência por parte dos alunos.

Vimos que Alro e Skovsmose (2006) consideram o padrão triádico I-R-A (iniciação, resposta, avaliação) como um padrão de comunicação (padrão de interação nos termos de Mortimer e Scott, 2002) que enfatiza a autoridade em sala de aula. Para estes autores, devido à repetição destas ações (I-R-A; I-R-A;... I-R-A), onde uma resposta correta origina novas questões formuladas pelo professor, a experiência do aluno torna-se fragmentada, impossibilitando a formação de uma imagem do propósito geral da atividade, e neste caso, o aluno não assume qualquer responsabilidade pelo seu aprendizado. Para Alro e Skovsmose (2006), o padrão triádico I-R-A, ou o 'jogo de perguntas', é o padrão comum em aulas ditas tradicionais.

Neste sentido, consideramos que Alro e Skovsmose (2006) incentivam a existência de outros padrões no ambiente de sala de aula, com vistas à proporcionar a aprendizagem.

Mortimer et al. (2007) defendem ainda que o tipo de questão (iniciação) formulada pelo professor (ou pelo aluno) possui influência na natureza das respostas e no potencial para gerar cadeias de interações por meio de *prosseguimento* (P) ou *feedback* (F) do professor. Para estes autores, uma questão que demanda uma escolha tende a obter respostas curtas constituídas por uma única palavra, sendo avaliada pelo professor, gerando padrões do tipo I-R-A. O mesmo acontece com questões de produto, tipo: '*qual* é o resultado da multiplicação?'

Em contrapartida, iniciações que necessitam de explicações ou descrições (questões do tipo processo ou meta processo) tendem a gerar cadeias de interações. Tomando como base o trabalho desenvolvido por Mehan (1979)¹⁸ os

¹⁸ MEHAN, H. Learning lessons: a social organization in the classroom. Cambridge: Havard University Press, 1979.

autores definem quatro tipos de iniciações aplicáveis tanto às iniciações do professor quanto dos alunos:

- i) Iniciação de escolha: esta iniciação requer do interlocutor respondente uma concordância ou discordância com a afirmação feita por quem pergunta, ou uma escolha entre duas possibilidades, por exemplo, “esta função é par ou ímpar?” ou “esta função é crescente?”;
- ii) Iniciação de produto: demanda do respondente uma resposta como um valor, um nome, etc. Esta iniciação normalmente assume a forma de questões do tipo “o *que*” ou “*qual*”, por exemplo, ‘*qual* operação deve ser utilizada neste caso?’. No caso da Educação Matemática questões deste tipo podem demandar respostas do tipo: divisão, integração, derivação, etc.;
- iii) Iniciação de processo: requer opinião ou interpretação. Geralmente tomam a forma de questões do tipo: ‘*por que*’, ‘*como*’, etc., resultando em descrições ou explicações. Em matemática, uma iniciação deste tipo pode ser: ‘por que você considera esta função uma função crescente?’;
- iv) Iniciação de meta-processo: requer do estudantes que sejam reflexivos quanto ao processo de estabelecer conexões entre as perguntas e as respostas. Neste caso, o aluno deve formular as bases do seu pensamento (MORTIMER et al, 2007).

Em correspondência a estes quatro tipos de iniciação, Mortimer et al (2007) consideram quatro tipos de resposta: resposta de escolha, de produto, de processo e de meta-processo.

De acordo com Mortimer et. al. (2007) cadeias abertas caracterizam uma abordagem comunicativa interativa e dialógica, sendo importantes para a estabilização do conhecimento do aluno. Fanizzi (2008) por sua vez, considera que este tipo de cadeia é a mais indicada para alcançar êxito na aprendizagem.

Ferreira e Lorencini Jr (2005, p.02) também atribuem importância à atitude do professor no desenvolvimento do indivíduo e na mediação entre aluno e conhecimento, quando entendem que a aprendizagem do aluno depende, entre outros fatores, de como é orientado nas interações em sala de aula, “[...] afim de que possam existir situações onde se formule perguntas e respostas que sustentem o

seu interesse e motivação no decorrer do processo cognitivo”. Deste modo, entendemos ser imprescindível o papel do professor formulando questões adequadas que gerem respostas além de respostas do tipo escolha ou produto, gerando argumentações e explicações por parte dos alunos envolvidos.

Nosso interesse nos tipos de iniciação, respostas e categorias apresentadas neste item, reside no fato de que, o tipo de iniciação influencia a natureza das respostas. Deste modo, dependendo da iniciação do professor pode-se gerar respostas que podem contribuir para o desenvolvimento de padrões não-triádicos, que são, como vimos, nas argumentações de Mortimer et.al. (2007) e Fanizzi (2008) geradores de aprendizagem.

Como podemos observar neste capítulo, diversos pesquisadores enfatizam a importância da interação que ocorre em atividades desenvolvidas em duplas ou em pequenos grupos para a aprendizagem. Noreen Webb e Anna Sfard estão entre os pesquisadores, porém, estas pesquisadoras também compartilham de outra idéia: a de que o desenvolvimento de atividades em grupos não garante, por si só, que a interação conduza à aprendizagem. Para estas pesquisadoras, algumas condições devem ser satisfeitas para que a interação desencadeie processos geradores de aprendizagem.

De fato, considerando que a comunicação entre alunos e professor (ou entre alunos) pode ser interativa ou não-interativa, e, sendo interativa pode assumir diversos padrões de interação em sala de aula (MORTIMER; SCOTT, 2002; MORTIMER et al., 2007), sendo que um deles é o padrão triádico I-R-A, o qual não é visto como determinante para a aprendizagem (ALRO; SKOVSMOSE, 2006) entendemos, assim como Anna Sfard e Noreen Webb, que algumas condições devem ser satisfeitas para que a aprendizagem seja oportunizada.

No mesmo sentido, Alro e Skovsmose (2006) consideram que a qualidade das interações influencia a qualidade da aprendizagem. Estes autores argumentam que para a interação contribuir com a aprendizagem, a mesma deve propiciar uma investigação por parte dos envolvidos, a possibilidade de correr os riscos e a promoção da igualdade entre os participantes. Estas qualidades são consideradas pelos autores essenciais para que se efetive um diálogo¹⁹.

¹⁹ A caracterização de 'diálogo' apresentada por Alro e Skovsmose (2006) será retomada no Capítulo 3.

Planas e Gorgorió (2007) também consideram que nem todas as interações promovem a aprendizagem. Para estes autores e para Burgos et al. (2006) a interação é produtiva quando existe um diálogo, considerando diálogo como algo diferente de uma conversa qualquer. Neste sentido o termo sugere a participação das partes no ato comunicativo, considerando que as partes tomam a iniciativa, enquanto que em uma conversa qualquer podem existir interlocutores que apenas escutam. Para os autores, durante o processo de diálogo, sempre existe a negociação.

No capítulo a seguir tratamos destas condições bem como da caracterização de diálogo apresentada por Alro e Skovsmose (2006).

CAPÍTULO 3

QUALIDADE DA COMUNICAÇÃO E A APRENDIZAGEM

Como vimos no Capítulo 2, diversas pesquisas têm sido realizadas e, de modo geral, confirmam as argumentações de Vygotsky quanto a importância das interações como constituintes da aprendizagem do indivíduo. Noreen Webb e Anna Sfard não negam esta importância, porém, com base em suas pesquisas, consideram que, para que conduzam à aprendizagem, estas interações devem satisfazer algumas condições.

As pesquisas de Anna Sfard e Noreen Webb estão relacionadas com os desafios de se realizar atividades bem sucedidas em grupos. As condições propostas por Webb estão em um nível mais prático e mais fácil de serem observadas do que as condições propostas por Anna Sfard.

Anna Sfard caracteriza o que chama de "aprendizagem pela participação" (Learning by participation) articulando suas idéias em um nível mais teórico. Além disso, Sfard também apresenta algumas condições práticas necessárias para que as atividades em grupo sejam bem sucedidas e conduzam à aprendizagem.

Preocupados com a qualidade da aprendizagem, Alro e Skovsmose (2006) pontuam certos aspectos da comunicação que podem apoiar a aprendizagem. Estes aspectos são elencados em termos de um 'diálogo'.

Neste Capítulo tratamos, primeiramente, da interação como um 'diálogo', preconizado por Alro e Skovsmose (2006), em seguida das condições caracterizadas por Noreen Webb e por fim das condições definidas por Anna Sfard.

3.1 INTERAÇÃO COMO UM 'DIÁLOGO'

Com vistas a um ensino de Matemática que promova, além da aprendizagem dos conceitos matemáticos, habilidades para sua aplicação e reflexão acerca da confiabilidade destas aplicações, Alro e Skovsmose (2006) discutem em 'Diálogo e aprendizagem em Educação Matemática' qualidades da comunicação que podem influenciar certas qualidades da aprendizagem. Neste estudo os autores orientam suas investigações sob a hipótese inicial de que a *qualidade da*

comunicação em sala de aula influencia a qualidade da aprendizagem da Matemática. Os autores consideram ainda que esta qualidade da comunicação pode ser expressa em termos de relações interpessoais, uma vez que

Aprender é uma experiência pessoal, mas ela ocorre em contextos sociais repletos de relações interpessoais. E por conseguinte a aprendizagem depende da qualidade do contato nas relações interpessoais que se manifesta durante a comunicação entre os participantes (ALRO; SKOVSMOSE, 2006, p. 12).

Diante disto, os autores argumentam que algumas qualidades da comunicação podem ser explicadas em termos de diálogo, assumindo ainda que ‘diálogo’ é uma conversação com certas qualidades. Para Alro e Skovsmose (2006), nem tudo o que chamamos de ‘diálogo’ em nosso dia-a-dia pode ser entendido como tal.

Com base nas argumentações de Paulo Freire, os autores advertem que em um ‘diálogo’ não podem existir relações de dominação, sendo que os participantes desta conversação específica (o diálogo) precisam acreditar uns nos outros e possuírem um engajamento, uma cooperação entre as partes. Um ‘diálogo’ é uma forma humilde e respeitosa de cooperação e é motivado por expectativas de mudança, deste modo, o engajamento é fundamental e a cooperação é “[...] um parâmetro central da comunicação dialógica” (ALRO; SKOVSMOSE, 2006, p. 14).

Diante do exposto, os autores procuram “pontuar certos aspectos da comunicação que podem apoiar certos aspectos da aprendizagem (...)” (ALRO; SKOVSMOSE, 2006, p. 16).

O termo ‘diálogo’ é entendido pelos autores como uma conversação que visa a aprendizagem, onde os participantes ‘se encontram’, influenciando e sofrendo mudanças.

Neste sentido, Alro e Skovsmose (2006, p. 123) preconizam o *diálogo* como uma ferramenta para o sucesso da aprendizagem e apresentam três aspectos do mesmo relacionado com a aprendizagem: 1) *realizar uma investigação*; 2) *correr riscos* e 3) *promover a igualdade*.

O primeiro aspecto, *realizar uma investigação*, significa que o ‘diálogo’ como caracterizado pelos autores é uma conversação de *investigação* com o objetivo de obter conhecimentos e novas experiências. Realizar uma investigação

significa explorar perspectivas, ter curiosidade, estar disposto a considerar o pensamento e as perspectivas do 'outro'.

Neste sentido, em sala de aula, o professor pode, durante a investigação, transitar na ZDP (VYGOTSKY, 1993, 2007) dos alunos, instigá-los, questioná-los, com vistas a 'enxergar' as funções em via de desenvolvimento e operar sobre elas. Na interação entre alunos, os mesmos também devem estar dispostos a procurar alternativas, 'caminhos', construir hipóteses, ouvir o 'outro', etc.

Deste modo, 'realizando uma investigação', o sujeito abandona sua posição cômoda e pode entrar em um processo cujo resultado final dependerá de sua disposição e curiosidade. Segundo os autores

Alguns atos investigativos são identificados: explicar, elaborar, sugerir, apoiar, avaliar conseqüências. Eles são identificados como atos investigativos pois constituem tentativas de *ir além*, e ajudam outros a ir além do seu pensamento estabelecido. Neste sentido, investigar atua no campo que está entre o-que-se-sabe e o-que-ainda-não-se-sabe- ou numa Zona de Desenvolvimento proximal (...) (ALRO;SKOVSMOSE, 2006, p. 124).

Pensando na interação professor/aluno, os autores argumentam que para participar de um 'diálogo' em sala de aula, o professor não pode ter respostas prontas, deve "ter curiosidade a respeito do que os alunos fariam e estar disposto a reconsiderar seus entendimentos e pressupostos" (ALRO; SKOVSMOSE, 2006, p. 126). Isto não significa que o professor não deva preparar-se para as aulas e estar seguro quando das discussões. Entendemos que estes requisitos fazem do diálogo um discurso interativo/dialógico como caracterizado por Mortimer e Scott (2002).

Esta característica do 'diálogo' (realizar uma investigação) leva o mesmo a ter um caráter de imprevisibilidade, conduzindo ao segundo aspecto apontado pelos autores: *correr riscos*.

'Correr riscos' é uma forma de expressar a natureza imprevisível do encaminhamento e desdobramentos de um diálogo.

Um diálogo é algo imprevisível. Não há respostas prontas de antemão, para os problemas. Eles surgem através de um processo compartilhado de curiosa investigação e reflexão coletiva, com o propósito de obter conhecimento (ALRO;SKOVSMOSE, 2006, p. 128).

No 'diálogo' entre professor e alunos, este deve assumir um papel de orientador, de modo a assegurar que, em razão da imprevisibilidade, os alunos não se desviem do foco principal, evitando assim, a desistência por parte dos alunos. "Dialogar é arriscado, na medida em que pode mexer com sentimentos ruins, bem como causar alegria" (IBID, p. 128). Neste sentido, o professor deve estar atendo à 'falta de rumo' que o aluno pode sentir.

Numa sala de aula, os alunos podem parecer envolvidos numa atividade, sugerindo produtividade, mas, na verdade, podem estar perdidos. Neste caso, uma investigação pode incomodar. Para que o diálogo aconteça em um ambiente educacional, é importante que o desconforto não seja exagerado, pois os alunos podem ficar frustrados, chegando ao ponto de desistir. O importante é não remover o risco, mas estabelecer um ambiente de aprendizagem confortável e respeitoso e uma atmosfera de confiança mútua, nos quais se torna possível experimentar incertezas passageiras (IBID, p. 129).

No que diz respeito às aulas de Matemática, a substituição de aulas pautadas no 'paradigma do exercício' por situações de diálogo, acarreta também a substituição do controle, levando a riscos de situações imprevistas, porém, com potenciais de aprendizagem.

Diversas opções metodológicas que desafiam o ensino centrado no paradigma do exercício têm sido cada vez mais inseridas e desenvolvidas em sala de aula de Matemática. Alro e Skovsmose (2006) defendem esta inserção e consideram que perspectivas que adotam uma abordagem investigativa são propícias para abrirem espaços para novas comunicações, conduzindo a novas qualidades da comunicação à medida que os alunos tornam-se condutores do processo, participando ativamente. "Novas qualidades de aprendizagem tornam-se possíveis quando novas possibilidades de comunicação tornam-se presentes" (IBID, p. 75).

Os cenários de investigação trazem um desafio para o professor, pois este não pode prever as reações e questões expostas pelos alunos. Entretanto, a solução não é retornar à zona de conforto, mas sim, ter habilidade para atuar no novo ambiente. Para Skovsmose (2000), realizar um movimento do paradigma do exercício para os cenários de investigação pode contribuir para afastar a autoridade presente nas salas de aula e levar os alunos a agirem em seus processos de aprendizagem.

Como afirmam Alro e Skovsmose (2006) os ganhos associados a este movimento estão relacionados exatamente com a possibilidade do surgimento de diferentes padrões de comunicação (padrões de interação em termos de Mortimer e Scott, 2002) e assim, novas qualidades de aprendizagem.

‘Correr riscos’ é um aspecto do ‘diálogo’ e é considerado pro Alro e Skovsmose (2006) essencial para o surgimento de situações propícias para o aprofundamento da pesquisa em andamento, deste modo, o professor deve cuidar para que os alunos não se percam, porém, não deve eliminar o risco por completo.

Neste sentido, abandona-se a *zona de conforto* e insere-se em uma *zona de risco* (BORBA; PENTEADO, 2001). Para Alro e Skovsmose, “riscos são uma parte intrínseca do diálogo, com suas conseqüências positivas e negativas” (2006, p. 130).

O terceiro aspecto do diálogo apontado pelos autores, *promover a igualdade*, refere-se a um relacionamento interpessoal, essencial para o diálogo como aqui caracterizado. Para os autores (ALRO; SKOVSMOSE, 2006), promover a igualdade não significa negar as diferenças e diversidades, e sim, saber lidar com elas.

Participar de um diálogo é algo que não deve ser imposto a ninguém. Em sala de aula, isso significa que o professor pode convidar os alunos para um diálogo investigativo, mas eles têm de aceitar o convite para que o diálogo aconteça (ALRO; SKOVSMOSE, 2006, p. 131-132).

Um diálogo não pode sofrer influências do ‘papel do professor’ como uma autoridade. A igualdade deve ser vista em termos das relações e comunicação interpessoais. Por exemplo, os alunos não devem ser forçados a fazer alguma coisa por medo do professor. Neste caso, o princípio da igualdade se perde.

Em sala de aula, a forma de contato e comunicação é primordial para que, em uma relação naturalmente desigual (professor/aluno), a igualdade seja promovida (ALRO; SKOVSMOSE, 2006). Os autores consideram três precondições para a promoção da igualdade: *coerência, empatia e consideração*.

Em um diálogo, coerência pode ser vista explicitamente através da metacomunicação e do posicionamento. Empatia significa que o facilitador tenta entender a visão de mundo do interlocutor como se fosse a sua própria. O facilitador deve estar em sintonia com as expressões do interlocutor, a fim de ajudá-lo a esclarecer sua perspectiva (IBID, p. 132).

E sobre a *consideração* os autores argumentam que “a fim de que alguém seja capaz de prestar auxílio a outra pessoa, precisa aceitá-la e respeitá-la como pessoa.

Desta forma, coerência, empatia e consideração podem proporcionar as condições para a promoção da igualdade, mesmo numa relação assimétrica, onde a forma do contato e da comunicação podem facilitar o processo de aprendizagem (IBID, p. 133).

A caracterização apresentada pelos autores para o termo ‘diálogo’ como uma conversação que compreende *realizar uma investigação, correr riscos e promover a igualdade*, mostra, de acordo com os autores, algumas qualidades identificadas idealmente, porém, imprescindível para que a interação seja considerada como tal.

A segunda caracterização de ‘diálogo’ apresentada por Alro e Skovsmose (2006, p. 135) é “[...] um processo envolvendo atos de estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar”. Esta segunda caracterização foi desenvolvida com base na análise de processos de comunicação e foi construída em termos de ‘atos dialógicos’. Para os autores, *atos dialógicos* são atos da fala com características especiais, e envolvem no mínimo, duas pessoas em uma relação de igualdade.

Alguns ‘atos da fala’ demonstram comando ou superioridade de uma parte sobre a outra. “Na Educação Matemática, exercícios que são considerados prontos e acabados e que têm uma e somente uma resposta correta são atos da fala não dialógicos” (IBID, p. 134). Atos dialógicos têm sua origem na espontaneidade dos envolvidos no diálogo, e não na imposição (o que pode ocorrer com outros atos da fala). Os atos dialógicos são vistos pelos autores como eventos especiais no processo de ‘inter-ação’ do diálogo.

Alro e Skovsmose (2006) consideram que os oito atos apresentados na segunda caracterização de diálogo: 1) estabelecer contato; 2) perceber; 3) reconhecer; 4) posicionar-se; 5) pensar alto; 6) reformular; 7) desafiar e 8) avaliar,

são todos atos dialógicos e conseqüentemente envolvem *realizar uma investigação, correr riscos e promover a igualdade*²⁰.

Na sequência apresentamos uma síntese das principais características destes atos dialógicos enunciadas por Alro e Skovsmose (IDIB).

1) *Estabelecer contato*.

Criar uma sintonia com o colega em interação, por meio do estabelecimento de contato, é uma exigência para que se efetive o diálogo. Os autores entendem contato como “estar presente e prestar atenção ao outro e as suas contribuições” (ALRO; SKOVSMOSE, 2006, p. 106), em uma relação de confiança, responsabilidade e respeito. Estes aspectos são considerados aspectos emocionais e para os autores, constituem “parte essencial do processo que propicia certas qualidades à aprendizagem” (IBID, p. 106).

Estabelecer contato torna os participantes abertos à investigação. Este estabelecimento pode ser observado por meio de apoio, questões investigativas acompanhadas de retorno, confirmações recíprocas, preocupação com o entendimento do ‘outro’, etc. O uso do pronome pessoal na primeira pessoa do plural indica que os participantes do discurso estão trabalhando conjuntamente, falando a mesma língua.

2) *Perceber*

Na perspectiva de ‘diálogo’ adotada por Alro e Skovsmose (2006), *perceber* significa descobrir algo que não se tenha conhecimento ou examinar como o ‘outro’ entende certo problema. Também significa “aproximar-se de um assunto ou insistir nele antes de rejeitá-lo” (IBID, p. 107) e isto inclui questionar suas próprias concepções e examiná-las conjuntamente com o outro, aceitando-a ou rejeitando-a.

Com vistas a *perceber* de forma apropriada a perspectiva do outro e sua própria perspectiva, o ato de *perceber* vem acompanhado de questões que buscam explicações, investigação, possibilidades, questões hipotéticas e questões abertas nas quais não se conhece as respostas antecipadamente.

Para os autores é necessário que exista curiosidade e abertura para que questões hipotéticas possam ser consideradas construtivas dentro do processo de investigação, uma vez que, dependendo do tipo de questão formulada, a mesma pode demonstrar desinteresse do indivíduo.

²⁰ Os autores deixam claro que não pretendem dar a entender que estes sejam os únicos atos possíveis, sendo possível incluir outros atos desta natureza nesta lista.

Na resolução de um problema conjuntamente (assim como individualmente), podem surgir idéias interessantes e relevantes que são deixadas de lado ou simplesmente ignoradas, pelo simples fato de não terem sido *percebidas*. Em um processo individual, o aluno deverá estabelecer um diálogo consigo mesmo para ter chances de *perceber* estas idéias. Em processos interativos as chances aumentam. Deste modo, na interação professor/aluno, o professor pode cooperar com o aluno no sentido de elaborar questões que o conduza a perceber suas próprias perspectivas, uma vez que, o aluno pode não ter consciência de seu próprio entendimento ou, *perceber* outras perspectivas. O mesmo pode acontecer na interação aluno/aluno. Um aluno pode elaborar questões que ‘guiem’ o outro em sua percepção.

Entretanto, no caso da interação professor/aluno, o professor deve atentar para continuar a promover a igualdade ou seja, conduzir o diálogo de modo a assumir a responsabilidade com o grupo, utilizando termos que demonstram esta igualdade (por exemplo o pronome pessoal *nós*). Deste modo sua ‘autoridade’ pode passar despercebida e auxiliar o aluno a perceber.

3) *Reconhecer*

Observar com atenção “perspectivas e idéias que foram percebidas abre o caminho para que se *reconheça* uma perspectiva e a faça conhecida de todos os envolvidos na investigação” (ALRO; SKOVSMOSE, 2006).

Neste sentido, na Educação Matemática, analisar com cuidado as idéias percebidas, pode conduzir o estudante a reconhecer a situação, assim como reconhecer procedimentos de condução da tarefa.

O professor como participante do diálogo pode auxiliar o aluno com questões do tipo ‘por quê’, conduzindo-o a delinear suas idéias matemáticas.

A busca do professor na tentativa de reconhecer o princípio ou procedimento que o aluno pretende utilizar conduz o estudante a justificar seu raciocínio ou procedimento, guiando-o em seu reconhecimento.

Alro e Skovsmose (2006) apresentam exemplos de diálogos em que o professor questiona os alunos com discursos do tipo: ‘ como vocês colocaram isto [a cruz] aqui no meio?’²¹. Com esta questão o professor procurava uma resposta em termos matemáticos (quais cálculos deveriam ser feitos para que fosse possível

²¹ Na atividade em questão os alunos deveriam construir um modelo da bandeira da Dinamarca observando suas proporções. Esta bandeira é vermelha com uma ‘cruz’ branca centralizada verticalmente.

encontrar o local correto de se colocar a cruz) na tentativa de conduzir o aluno a *reconhecer* os procedimentos matemáticos adequados. Deste modo, questões do tipo ‘por quê’, ‘como’, fazem parte do repertório de perguntas que guiam a condução de um *reconhecimento*.

4) *Posicionar-se*

Posicionar-se significa dizer o que se pensa, fazer declarações ou apresentar argumentos, e ao mesmo tempo, aceitar críticas às suas sugestões e seus pressupostos, com o intuito de investigar conjuntamente um assunto ou perspectiva (ALRO; SKOVSMOSE, 2006).

Não significa tentar convencer o outro de sua posição (até por que um diálogo é permeado de respeito), e sim, estar aberto às outras perspectivas e aberto à reavaliação de seu ponto de vista.

[...] *posicionar-se* não significa sustentar uma posição porque ela é pessoal e tem que ser defendida a qualquer custo. *Posicionar-se* significa argumentar em favor de uma idéia *como* se ela pudesse ser, por um instante, “minha” idéia ou “nossa” idéia. Como parte de um processo investigativo, é importante *posicionar-se* em favor de idéias alternativas. (IBID, p. 113).

Para o bom andamento de um diálogo e para a construção de uma perspectiva comum (que conduz à atividade) é essencial compartilhar o que se sabe, e neste sentido, idéias devem ser ouvidas, e argumentos devem ser analisados. Este compartilhamento de idéias é efetivado por meio do posicionamento explícito.

5) *Pensar alto*

Pensar alto é uma forma de tornar o pensamento público e neste sentido, auxilia o ‘outro’ a entender como um indivíduo está pensando, sendo possível observar se as perspectivas coincidem ou estão no mesmo caminho. *Pensar alto* também faz com que o ‘outro’ acompanhe seu raciocínio.

[...] significa expressar pensamentos, idéias e sentimentos durante o processo de investigação. Expressar o que se passa dentro de si expõe as perspectivas à investigação coletiva. Algumas *questões hipotéticas* costumam surgir no *pensar-alto* e estimulam a investigação (ALRO; SKOVSMOSE, 2006, p. 113).

Desta forma, pensar alto surge, geralmente, na manifestação de pensamentos e sentimentos e na forma de questões hipotéticas.

6) *Reformular*

O sentido do ato *reformular* atribuído pelos autores é o mesmo sentido do termo parafrasear, ou seja, repetir algo que foi dito com outras palavras. Neste sentido, repetição de termos, idéias, sugestões de outros participantes, podem ser utilizados para confirmar o que se ouviu, como um convite para uma reflexão maior, ou confirmação de que possuem o mesmo entendimento, ou ainda delimitar divergências. Para os autores

Reformular nesse sentido é um elemento importante no processo de escuta consciente, no qual os participantes seguem de perto os demais, a fim de conhecer as perspectivas uns dos outros (IBID, p. 115).

Uma reformulação, no sentido atribuído pelos autores, pode ser iniciada por meio de questões que visam averiguar o entendimento do outro. Os autores complementam que “reformular torna-se um desdobramento de ‘estabelecer contato’, porém ‘manter contato’ está ligado à etapa central do processo de investigação” (IBID, p. 115).

Muitas vezes, a reformulação é feita pelo próprio emissor com o intuito de se fazer entender pelo ‘outro’. Quando um aluno reformula o que o outro falou e toma para si aquela perspectiva indica que a responsabilidade pelo processo está sendo dividida. Neste sentido, reformular pode ocorrer parafraseando, completando-se falas e mantendo contato.

7) *Desafiar*

Desafiar significa tentar modificar a direção do encaminhamento do processo ou questionar conhecimentos ou perspectivas já estabelecidas.

Desafios geralmente vêm acompanhados de questões hipotéticas ‘o que acontece se’, conduzindo os participantes à re-análise de propostas já estabelecidas e ao exame de novas possibilidades. Além do re-exame de perspectivas, desafios podem ocorrer por meio de um novo posicionamento. Um desafio tem grandes chances de iniciar uma nova investigação, mesmo que seja para refutar a idéia proposta.

Como salientam Alro e Skovsmose (2006), um desafio cumpre seu papel mesmo que seja refutado com um bom argumento. Neste caso, entraria em cena o posicionamento.

Ainda não se pode deixar de salientar que o desafio proposto pelo professor (ou por um colega em interação) esteja adequado ao NDP do indivíduo, a fim de que seja recebido e aceito pelo outro com possibilidades de entendimento e desenvolvimento.

8) Avaliar

Uma *avaliação* pode assumir muitas formas. Correção de erros, crítica negativa, crítica construtiva, conselho, apoio incondicional, elogio ou novo exame – é uma lista incompleta. Uma avaliação pode ser feita por terceiros ou pelo próprio indivíduo (ALRO; SKOVSMOSE, 2006, p. 116).

Para os autores, avaliar pressupõe *feedback*, apoio e críticas construtivas.

Os oito atos dialógicos representam aspectos de um mesmo processo de investigação, ou seja, quando se busca analisar um diálogo, de modo geral, não é possível observá-los separadamente, mesmo porque um pode estar inserido no outro.

3.2 CONDIÇÕES APRESENTADAS POR NOREEN WEBB PARA QUE AS INTERAÇÕES FAVOREÇAM A APRENDIZAGEM

As condições apontadas por Noreen Webb foram construídas por meio de estudos teóricos e principalmente por meio de resultados empíricos, e foram apresentadas em diversos artigos escritos por Webb e algumas colaboradoras, como por exemplo Webb (1989, 1991 e 1992); Webb et al (1995); Webb e Palincsar (1996); Webb, Farivar e Mastergeorge (2002); Webb e Mastegeorge (2003 e 2003a).

Noreen Webb investiga atividades desenvolvidas em grupos e refere-se às interações ocorridas entre os indivíduos, como um *processo de dar e receber auxílio* (ou ajuda). Neste processo, a investigadora classifica os indivíduos em os que “*dão auxílio*” (ou oferecem auxílio) e os que “*recebem auxílio*”. Para Webb, Farivar e Mastergeorge (2002), todos os membros de um grupo em interação

são indivíduos com potenciais para *oferecer auxílio*, entretanto, para oferecer *auxílio elaborados*, é necessário vontade e capacidade de fazê-lo.

Webb refere-se ao auxílio elaborado como sendo algo diferente da “resposta final”, como por exemplo, uma explicação detalhada de como solucionar uma dúvida. Para Webb e Palincsar (1996) algumas possibilidades deste tipo de auxílio são:

- dar exemplos específicos para ilustrar conceitos gerais;
- traduzir o vocabulário não usual e não familiar para termos familiares;
- descrever a relação entre diferentes conceitos;
- providenciar descrições detalhadas de como realizar a tarefa;
- proporcionar justificativas detalhadas do raciocínio utilizado;
- usar observações, dados, conhecimento e experiências para apoiar suas opiniões;
- comparar as experiências com informações e previsões apreendidas em sala de aula.

Do ponto de vista teórico, tanto quem *oferece auxílio* quanto quem *recebe auxílio* elaborado se beneficia com esta cooperação. O auxílio elaborado favorece quem está explicando (oferecendo auxílio) no sentido de esclarecer e organizar o “material” em sua mente para torná-lo compreensível aos outros, e neste processo, o indivíduo desenvolve novas perspectivas e preenche lacunas na sua compreensão. Esta reestruturação cognitiva pode auxiliar o *doador* a compreender melhor seu material e desenvolver novas perspectivas. Ao explicar os seus processos de resolução de problemas, os alunos pensam sobre as características mais salientes do problema, que são essenciais para o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, e desenvolvem uma consciência metacognitiva²² do que fazem e não entendem (WEBB; MASTERGEORGE, 2003).

Por outro lado, quem está recebendo auxílio também preenche lacunas, desfaz equívocos e fortalece as conexões entre as novas informações e conhecimentos anteriores (WEBB; FARIVAR; MASTERGEORGE, 2002; WEBB; PALINCSAR, 1996; WEBB; MASTERGEORGE, 2003). Podemos observar nestas

²² Etimologicamente, o termo metacognição significa ‘para além da cognição’, ou seja, a capacidade de conhecer o próprio ato de conhecer. Para Flavell “Metacognição se refere ao conhecimento sobre o próprio processo cognitivo” (1976, p. 232, tradução nossa). Texto original: “Metacognition refers to one’s knowledge concerning one’s own cognitive processes”.

afirmações a importância atribuída pelas autoras à interação para o desenvolvimento cognitivo do indivíduo.

Pesquisas de Noreen Webb e suas colaboradoras (WEBB, 1989, 1991 e 1992; WEBB et. al., 1995; WEBB; PALINCSAR, 1996; WEBB; FARIVAR; MASTERGEORGE, 2002; WEBB; MASTERGEORGE, 2003 e 2003a) apresentam resultados empíricos sobre o processo de dar e receber auxílio em pequenos grupos, ou duplas, como mecanismo para a aprendizagem.

De acordo com estas pesquisas, os resultados empíricos sobre a relação entre dar auxílio e aprendizagem em pequenos grupos, confirmam as previsões teóricas, uma vez que, a grande maioria dos estudos tem relatado correlações positivas e significativas entre as explicações oportunizadas pelo auxílio e a realização da tarefa proposta (WEBB, 1989, 1991). Ou seja, quando um aluno fornece uma explicação com o intuito de auxiliar alguém, esta ação também beneficia sua própria compreensão, além de, provavelmente, beneficiar quem a recebe (WEBB; MASTERGEORGE, 2003a; WEBB; PALINCSAR, 1996).

Porém Webb e Palincsar (1996) salientam que quando os estudantes indicaram a necessidade de auxílio elaborado, solicitando esclarecimentos ou cometendo erros, e receberam auxílio não-elaborado, a mesma foi prejudicial para a realização da tarefa. Quanto mais os estudantes solicitaram auxílio e receberam auxílios não-elaborados, pior foi a realização da tarefa. Além de não solucionar as dúvidas dos alunos, os auxílios não-elaborados tiveram efeitos motivacionais negativos, conduzindo os alunos a não solicitarem mais ajuda e não tentar aprender.

Este processo de *dar e receber auxílios* propícios para a aprendizagem não é um processo simples, envolve uma série de condições que precisam ser satisfeitas. Para Webb (1992) a interação tem grande probabilidade de conduzir à aprendizagem se o indivíduo que necessita de auxílio: (a) receber auxílio elaborado; (b) compreender este auxílio e (c) aplicar este auxílio para solucionar o problema. A pesquisadora enfatiza a necessidade de aplicar a ajuda recebida, argumentando que, os estudantes podem dizer que entenderam as explicações e podem até acreditar nisso, porém podem não ter compreendido o suficiente para solucionar o problema por si só (WEBB, 1992; WEBB; PALINCSAR, 1996).

Webb, Farivar e Mastergeorge (2002) salientam que utilizar o auxílio recebido pode beneficiar o aluno de diversas maneiras:

- levar o aluno a gerar auto-explicação que irá ajudá-lo a incorporar princípios e construir regras para solucionar o problema;
- ajudar os estudantes a monitorar seu próprio entendimento ou ajudá-los a tomar consciência do mal-entendido ou falta de compreensão, caso contrário, eles podem assumir falsamente que sabem como resolver os problemas;
- ajudar o grupo a tomar consciência do mal entendido do aluno.

Ao menos em dois estudos empíricos (WEBB, 1992 e WEBB et. al. 1995), foi confirmada a importância da aplicação da ajuda recebida para a aprendizagem. Nestes estudos relata-se que os estudantes que tentaram resolver o problema por si só após receberem explicações, foram mais propensos a aprender do que os alunos que apenas ouviram as explicações sem tentar utilizá-las para resolver os problemas ou concluir os trabalhos.

Webb, Farivar e Mastergeorge (2002) consideram que o auxílio que alguém pode receber diante uma solicitação, pode ser classificado em níveis: o nível mais alto equivale a explicar detalhadamente como resolver parte ou a totalidade do problema, o nível intermediário corresponde a oferecer “resposta direta” de parte ou totalidade do problema, por exemplo, falar um número para ser copiado, e o nível mais baixo corresponde a oferecer uma resposta sem conteúdo, por exemplo, “faça como a professora falou” ou “eu não sei”. Neste nível mais baixo, a pessoa recebeu resposta, porém, sem conteúdo de ajuda. As autoras ponderam ainda que existe um ‘continuum’ entre estes níveis de modo que não há uma linha divisória definitiva entre um nível e outro. Segundo as autoras, o nível da ajuda recebida está relacionado com a aprendizagem, de modo que alunos que recebem mais auxílios de alto nível têm maior probabilidade de resolver corretamente o problema, posteriormente, por si só.

O tipo de reação (resposta) que um indivíduo pode dar diante da ajuda recebida também é caracterizada por Webb, Farivar e Mastergeorge (2002) como um ‘continuum’ onde o nível mais alto corresponde a explicar ou refazer o problema corretamente, o nível intermediário corresponde a terminar os cálculos iniciados pelo outro ou copiar números que são ditados e o nível mais baixo significa resposta sem conteúdo ou não informativa, por exemplo, “ok”.

Para Webb, Farivar e Mastergeorge (2002), o nível de ajuda recebida e o nível de reação (resposta) a esta ajuda estão significativamente

relacionados com a aprendizagem. Segundo as autoras, “receber auxílio de alto nível aumenta as chances de um aluno ser capaz de utilizar este auxílio recebido, e com esta ajuda recebida aumenta as chances de aprender a resolver os problemas” (WEBB; FARIVAR; MASTERGEORGE, 2002, p. 15, tradução nossa²³).

Além destas condições apresentadas, Webb, Farivar e Mastergeorge (2002) enfatizam algumas responsabilidades que os envolvidos em atividades interativas devem ter para que esta conduza à aprendizagem. De acordo com as autoras (IBID, 2002), as chances de receber auxílio elaborado aumentam se o estudante transmitir claramente sua dificuldade. Neste sentido, segundo as autoras, o aluno que precisa de auxílio deve: i) ser consciente de que precisa de ajuda; ii) estar disposto a procurar ajuda; iii) identificar alguém que o possa ajudar; iv) utilizar estratégias eficazes para obter ajuda (por exemplo, fazer perguntas diretas e precisas); e v) estar disposto a reavaliar suas estratégias para obter ajuda.²⁴

Por outro lado, para oferecer auxílio elaborado o indivíduo deve ter *vontade e capacidade*. Quanto à *capacidade*, Webb, Farivar e Mastergeorge (2002) argumentam que quem oferece auxílio deve ser capaz de articular as explicações de modo que sejam compreensíveis para o outro. Dar auxílio elaborado exige que se tenha conhecimento sobre o assunto abordado, que reconheça a diferença entre explicar e dar respostas prontas, e ter capacidade de expressar suas explicações. Além disso, quem ajuda deve oferecer ao ‘outro’ a oportunidade de resolver os problemas por si só, uma vez que, aplicar a ajuda recebida é um processo essencial para a aprendizagem, de acordo com as autoras.

Estas condições dependem (umas mais, outras menos) de ambos, doadores e receptores, uma vez que, para que alguém receba ajuda elaborada o outro deve estar disposto a oferecer esta ajuda e ser capaz de fazê-lo. O receptor pode compreender ou não a ajuda e, neste sentido, a contribuição do doador é estar atento a esta compreensão, e caso não tenha ocorrido, o doador deve esforçar-se no sentido de pensar em estratégias diferentes de auxílio. Quanto a aplicar o auxílio recebido, o receptor pode por si só empenhar-se em aplicá-la, porém o doador pode

²³ Texto original: “receiving high-level help increases the chances of a student being able to use the help received, and using the help received increases the chances of learning how to solve the problems”.

²⁴ Texto original: The target student must (a) be aware that he or she needs help, (b) be willing to seek help, (c) identify someone who can provide help, (d) use effective strategies to elicit help (e.g., ask explicit, precise, and direct questions), and (e) be willing to reassess his or her strategies for obtaining help.(IBID, 2002, p. 15).

oportunizar a possibilidade de que o outro aplique seu aprendizado, solicitando, por exemplo, que ele explique como está realizando a tarefa após a ajuda recebida.

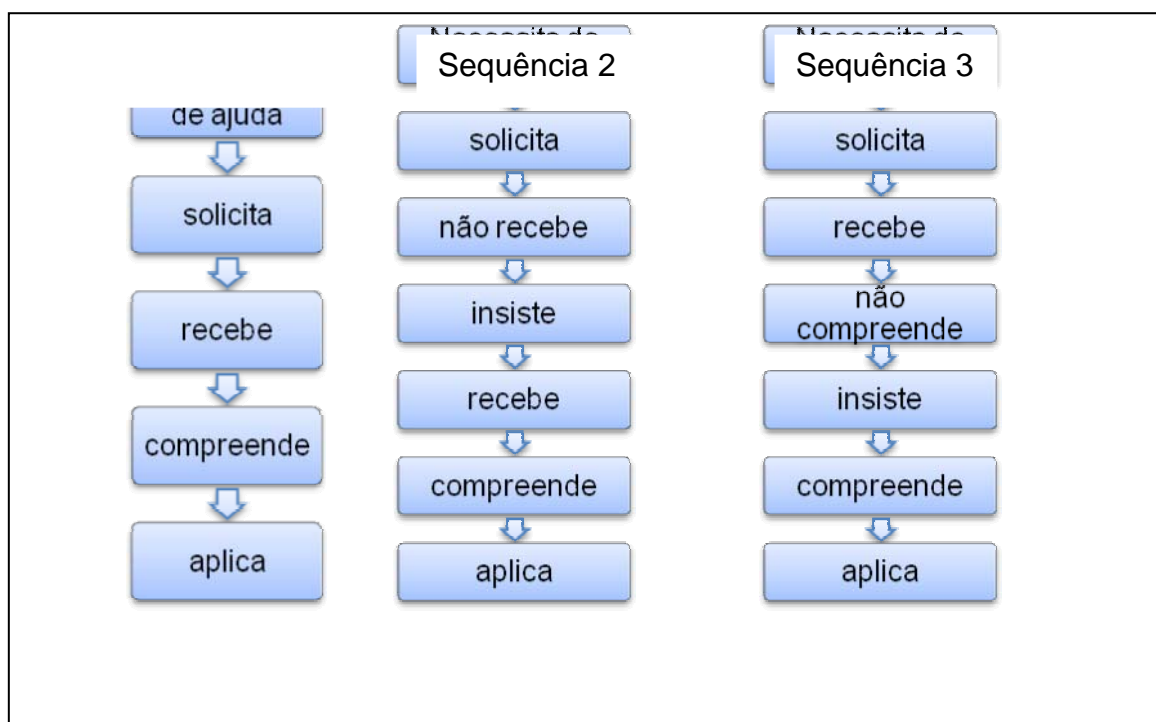
Sintetizando as contribuições de Noreen Webb construímos e apresentamos na Figura 2 seqüências de condições que, se satisfeitas, favorecem a aprendizagem

(1) O aluno necessita de ajuda, solicita, recebe, compreende e aplica a ajuda para solucionar o problema;

(2) O aluno necessita, solicita, não recebe ajuda, porém insiste na ajuda até recebê-la. Se receber a ajuda posteriormente, compreendê-la e aplicá-la, então a interação pode ser considerada eficaz.

(3) O aluno necessita, solicita, recebe ajuda, não a compreende, porém insiste até compreendê-la e, em seguida, aplica a ajuda.

Figura 2 – Seqüências de condições que conduzem à aprendizagem na perspectiva de Noreen Webb



Diante do exposto compreendemos que o aluno que necessita de ajuda deve estar consciente desta necessidade e solicitá-la. A resposta obtida depende do tipo de questão que o proponente elabora e também da disposição e condições do 'outro' para oferecê-la. De acordo com as autoras, a ajuda elaborada é o tipo de ajuda que mais favorece a aprendizagem.

3.3 SOBRE A ABORDAGEM COMUNICACIONAL

Sfard e Kieran (2001) e Sfard (2000, 2001, 2001a, 2006 e 2007) tratam das relações entre cognição e comunicação a partir de pressupostos teóricos e resultados empíricos. Neste desenvolvimento teórico Anna Sfard entende comunicação como sendo uso e produção de meios com a intenção de fazer um interlocutor agir ou sentir de determinado modo. Sfard (2000; 2001) utiliza uma explicação de Levinson (1983, apud SFARD 2000 e 2001) para um melhor entendimento: “A Comunicação consiste no ‘emissor’ fazendo com que o ‘receptor’ reconheça que o ‘emissor’ está tentando causar aquele pensamento ou ação” (tradução nossa)²⁵. Em seus estudos, Anna Sfard entende o pensamento como uma variante da atividade de comunicação; um tipo de comunicação; comunicar-se consigo mesmo e deste modo, o receptor referido na caracterização de comunicação pode ser o próprio emissor.

A abordagem comunicacional tratada por Sfard tem suas raízes na teoria Vygotskyana, uma vez que nesta é dada prioridade ao discurso público em vez do discurso interior (privado), ou seja, os processos interpessoais são vistos como base para os processos intrapessoais (VYGOTSKY, 1993a, 1993 b).

Nesta abordagem, a aprendizagem é caracterizada como um processo de mudança no discurso (SFARD 2001, 2001a, 2006), ou seja, falamos uma coisa, pensamos de determinada maneira, e quando aprendemos, modificamos nosso discurso, pensamos e agimos de maneira diferente. Neste sentido, quando aprendemos, ampliamos ou modificamos nosso discurso, tornando possível a resolução de problemas que não podiam ser resolvidos antes desta mudança de discurso, ou seja, antes da aprendizagem.

Neste contexto, Sfard (2006) argumenta que a possibilidade mais poderosa para a aprendizagem surge quando o indivíduo se depara com a diferença entre sua forma discursiva e a de outros, gerando um conflito caracterizado pela autora como um conflito comunicacional. Esta noção de conflito comunicacional tem sua base no pressuposto de que a aprendizagem é uma mudança de discurso, resultante das interações (SFARD, 2006). Assumindo que o que somos capazes de

²⁵ “Communication consists of the ‘sender’ getting the ‘receiver’ to recognize that the ‘sender’ is trying to cause that thought or action” (Levinson, 1983, p. 16). Levinson, S.: 1983, *Pragmatics*, Cambridge University Press, Cambridge.

dizer ou realizar está relacionado com o que somos capazes de perceber, Sfard (2006, p. 44) argumenta que nossos discursos continuam a ser coerentes com nossa experiência, até que uma mudança discursiva abra nossos olhos para novas possibilidades. Esta mudança caracteriza a aprendizagem.

Embora indispensável para a aprendizagem, o conflito comunicacional pode ser perigoso, podendo impedir qualquer nova comunicação (SFARD, 2006). O processo de superação do conflito pode vir da consciência da necessidade de mudança ou da percepção das perspectivas de seus ganhos. Porém, pesquisas empíricas, como apresentadas em Sfard (2006), têm demonstrado que estes fatores não são suficientes. Este fato leva a pesquisadora a apresentar um aspecto que considera como central para que os conflitos não sejam um obstáculo. Este aspecto é um acordo comunicacional que se caracteriza como um conjunto de entendimentos entre os participantes do processo de comunicação.

Este acordo comunicacional foi dividido por Sfard (2006) em três tipos: acordo sobre o discurso principal, acordo sobre os papéis dos interlocutores e acordo sobre o curso necessário para a mudança discursiva. Estes acordos referem-se á:

- Acordo sobre o discurso principal: em um conflito comunicacional existem diferenças entre os discursos iniciais. Para superar este conflito, deve ser realizada uma concordância sobre qual discurso deve ser tomado como modelo, ou qual deve prevalecer;

- Acordo sobre os papéis dos interlocutores: após a escolha do discurso principal, um interlocutor deve assumir o papel de instrutor enquanto os outros, cujos discursos necessitam de reformulações, devem comportar-se como aprendizes. O instrutor deve assumir a responsabilidade pela mudança do discurso dos outros, enquanto os aprendizes devem mostrar confiança no líder e estarem dispostos à mudança;

- Acordo sobre o curso necessário para a mudança discursiva: os indivíduos devem se engajar no discurso principal, mesmo antes de ter claro suas vantagens. Neste momento, o discurso utilizado pelo aprendiz é um discurso 'para os outros', utilizado para fins de comunicação com aquele para quem o discurso faz sentido. O objetivo deve ser transformar o discurso 'para os outros' em um 'discurso-para-si'. "Para transformar o discurso-para-outros em um discurso-para-si, o aluno

deve explorar ativamente as razões de outras pessoas para se engajar neste discurso” (SFARD, 2000, p. 48, tradução nossa).²⁶

Sfard (2000, 2001, 2001a), com base nos pressupostos vygotskyanos, assume que o pensamento é uma comunicação consigo mesmo, e argumenta que investigar a comunicação com os outros pode ser o melhor caminho para compreender os mecanismos do pensamento humano. Deste modo, sugere que a compreensão do discurso público pode nos conduzir a compreender o diálogo que um indivíduo faz consigo mesmo, ou seja, como o indivíduo pensa.

A hipótese principal de Sfard (2000, 2001a) é que, o que acontece em uma conversa interpessoal é indicativo do que pode estar acontecendo na mente de cada indivíduo. Isto não significa que, se uma pessoa trabalhasse sozinha, o mesmo cenário teria se repetido, mas que os mecanismos discursivos são os mesmos.

Pensar, assim como qualquer conversa entre duas pessoas, envolve troca, perguntas e respostas. Neste sentido, Sfard (2000, 2001) considera que uma análise detalhada do discurso público pode revelar muito sobre aprendizagem, sobre o pensamento.

A definição proposta por Sfard para a comunicação (tentativa de fazer com que o outro pense ou sinta de acordo com a sua intenção) permite ao indivíduo verificar o sucesso da comunicação por meio da comparação de suas expectativas. Assim, uma pessoa pode verificar o sucesso da comunicação indagando-se se está ou não satisfeita com a resposta oferecida pelo outro.

Neste sentido Sfard e Kieran (2001, p. 49) salientam que devemos ter em mente que o conceito de efetividade comunicacional é um conceito interpretativo, ou seja, “um observador – um participante passivo – compara as intenções evocadas *nele* pelos diferentes interlocutores a quem ele está assistindo e ouvindo (SFARD; KIERAN 2001, p.49, tradução nossa)²⁷.

Nos termos de Sfard e Kieran (2001) percebemos que a comunicação é efetivada quando atinge seu propósito comunicativo, ou seja, um indivíduo se faz entender pelo outro.

²⁶ Texto original: To turn the discourse-for-others into a discourse-for-oneself, the student must actively explore other people's reasons for engaging in this discourse

²⁷ Texto original: an observer—a passive participant—compares the intentions evoked *in him* by the different interlocutors he is watching and listening to.

Transferindo para um observador a responsabilidade de verificar o sucesso da comunicação, Sfar (2000) considera que

as declarações de um orador evocam interpretações e, portanto, certas intenções em qualquer ouvinte. O ouvinte tem expectativas quanto a possíveis respostas dos interlocutores e avalia as suas afirmações, como se fosse o orador. Assim, a avaliação do observador, como qualquer outro, tem o status de uma interpretação pessoal (SFARD, 2000, p. 302, tradução nossa)²⁸

Para Sfar e Kieran (2001) a efetividade da comunicação é uma pré-condição para o sucesso de uma interação para o aprendiz. Deste modo, com o intuito de investigar a comunicação, Anna Sfar desenvolve duas ferramentas de análise: análise focal e análise preocupacional.

3.3.1 Análise Focal

Sfar (2000) considera que uma condição necessária para o sucesso da comunicação é manter o foco no discurso. Para ela,

a efetividade pode ser apresentada como dependente do grau de clareza do foco discursivo: A comunicação não será considerada efetiva a menos que, em determinado momento, todos os participantes pareçam saber o que eles estão falando e se sentir confiantes de que todas as partes envolvidas se referem às mesmas coisas quando usando as mesmas palavras (SFARD, 2000, p. 303, tradução nossa, grifo do original)²⁹

Sfar (2000) divide o foco discursivo em três componentes que devem ser vistos em conjunto: foco pronunciado, foco observado e foco pretendido. O foco pronunciado refere-se às palavras ditas, às declarações dos interlocutores. É essencialmente público. O foco observado por sua vez, refere-se ao que foi observado no discurso do indivíduo, o que ele está olhando, apontando, quando se refere a alguma coisa. Já o foco pretendido é entendido como todo

²⁸ Texto original: The speaker's utterances evoke interpretations and, thus, certain intentional states in any listener. The listener will have expectations as to the interlocutors' possible responses and will evaluate their utterances as if he or she were the speaker.

²⁹ Text original: effectiveness may be presented as dependent on the degree of clarity of the discursive focus: The communication will not be regarded as effective unless, at any given moment, all the participants seem to know what they are talking about and feel confident that all the parties involved refer to the same things when using the same words.

conjunto de experiências evocadas pelos outros componentes focais, bem como todas as declarações que uma pessoa seria capaz de fazer sobre a entidade em questão, mesmo que não tenham aparecido na troca (SFARD, 2000, p. 304, tradução nossa)³⁰

Para Sfard, o foco pretendido é menos observável que os outros dois, mas sua presença é sentida por indícios que incluem a tendência de quem fala em utilizar diferentes focos pronunciados alternadamente expondo sua intenção. Segundo esta pesquisadora, o foco pretendido “é o único que permite aos interlocutores a sensação de que preservam o foco no discurso, mesmo quando o que ouvem (foco pronunciado) ou vêem (foco observado) muda de expressão para expressão” (Sfard, 2000, p. 305, tradução nossa)³¹.

Para Sfard e Kieran (2001),

O foco pretendido, entretanto, sendo predominantemente privado, não é sujeito a comparação. A solução desse dilema pode ser encontrada, mais uma vez, na idéia da interpretação. Interpretar é uma atividade natural, desempenhada por todos os humanos de uma maneira instintiva ao ouvir palavras ditas. As declarações e movimentos de apontar do falante trazem à mente do ouvinte *seus próprios focos* pretendidos em relação a essas declarações e gestos particulares. Isso significa que a avaliação de uma pessoa da coerência comunicativa, realizada ao participar de uma conversa ou ao ouvi-la, *não implica na comparação dos focos pretendidos de diferentes interlocutores*. (SFARD; KIERAN, 2001, p. 53, tradução nossa, ênfase do original)³².

Ao dividir o foco discursivo em três focos, Sfard (2001) salienta que nem sempre se fala o que quer dizer e as palavras podem ser interpretadas de formas diferentes dependendo da forma como foram ditas. No entanto, Sfard (2000) salienta que, apesar dos focos pronunciados e observados serem passíveis de comparação pois são públicos, estes dois focos não são critérios adequados para auxiliar a efetividade da comunicação, uma vez que “as pessoas podem usar

³⁰ Texto original: whole cluster of experiences evoked by these other focal components as well as all the statements he or she would be able make on the entity in question, even if they have not appeared in the present exchange.

³¹ The intended focus is the one that allows the interlocutors to feel that they preserve a given discursive focus even when what they hear (pronounced focus) or see (attended focus) changes from utterance to utterance.

³² Texto original: Intended focus, however, being predominantly private, is an unlikely subject for comparison. The resolution of this dilemma may be found, once again, in the idea of interpretation. Interpreting is a natural activity, performed by all humans in an instinctive manner upon hearing spoken words. The speakers' utterances and pointing movements bring to the listener's mind *her own* intended foci fitting these particular utterances and gestures. This means that one's assessment of communicative coherence, carried out while participating in a conversation or just listening to one, *does not entail comparing the intended foci of different interlocutors*.

diferentes focos pronunciados, e até mesmo diferentes focos observados, e ainda considerar que estão falando da mesma coisa” (Sfard, 2000, p. 305, tradução nossa)³³.

Diante disto, Sfard reafirma a necessidade do foco pretendido na observação do foco discursivo, pois segundo ela, a comunicação depende principalmente deste. Porém, como o foco pretendido é privado, sua comparação reside, mais uma vez na idéia de interpretação. Como as palavras trazem à mente do ouvinte seus próprios focos pretendidos, “o ouvinte pode apreciar as semelhanças e diferenças entre os seus focos pretendidos evocados por interlocutores diferentes (um dos quais pode ser o próprio ouvinte) (SFARD, 2000, p. 306, tradução nossa)³⁴.

O ponto principal desta análise é que a avaliação não implica comparar os focos pretendidos de diferentes interlocutores. Seja o avaliador um observador ou um participante da interação, a comparação deve ser feita sobre seus próprios focos pretendidos, evocados pelos focos pronunciados e observados dos interlocutores.

Em síntese, a análise focal como forma de compreender a aprendizagem, parte do pressuposto de que a comunicação é a principal força motriz para o desenvolvimento cognitivo e como consequência, entender o pensamento exige a compreensão de como as pessoas se comunicam entre si (SFARD, 2000).

Sfard, em suas pesquisas, considera que a efetividade da comunicação é apresentada como dependente da qualidade do seu foco discursivo, o qual é descrito como uma junção de três focos interligados: o foco pronunciado, que é público; o foco pretendido que é essencialmente privado e o foco observado que é mediado pelos dois anteriores.

Sfard preocupou-se em estudar a abordagem comunicacional fundamentando-se nas idéias de Vygotsky e transformou-a em um quadro de investigação. O fundamento básico desse quadro é a caracterização do pensamento como um processo de comunicação. Segundo esta caracterização, quando pensamos, estamos nos comunicando, fazendo perguntas, respondendo e

³³ Texto original: people may be using different pronounced foci, and even different attended foci, and still feel that they speak of the same thing.

³⁴ Texto original: The listener may now appreciate the similarities and differences among the intended foci evoked in her by the different speakers (one of whom may be the listener herself).

argumentando conosco mesmos. Além disso, a autora argumenta que os mecanismos básicos do pensamento tendem a ser semelhantes se a comunicação é consigo mesmo ou com outros.

O ponto central da análise focal é investigar se existe alguma desconexão entre o que é dito, o que é visto ou realizado e o que se pretende, em termos da caracterização de Sfard, entre o foco pronunciado, o foco observado e o foco pretendido. Para Sfard, se existe uma forte correspondência entre estes três focos a comunicação é vista como geradora de aprendizagem.

3.3.2 Análise Preocupacional

A análise preocupacional foi desenvolvida com o propósito de diagnosticar o modo com que os alunos se engajam em atividades interativas, buscando entender o motivo do sucesso ou falha na comunicação. Para Sfard e Kieran (2001) existem dois tipos de declarações que podem gerar intenções na comunicação: i) Declarações ao nível do objeto e ii) Declarações à Meta-nível.

As declarações ao nível do objeto produzem explicitamente intenções cognitivas do objetivo da atividade. Por exemplo, em uma atividade matemática escolar um aluno pode ter uma intenção imediata de solucionar seu problema, que por sua vez traz consigo uma intenção em longo prazo de aprender novos conceitos matemáticos.

As declarações à meta-nível estão ligadas a vários aspectos da própria interação, são amplas e diversificadas e incluem, de um lado, as preocupações do interlocutor sobre o modo como a interação está sendo gerenciada e, de outro, questões do relacionamento entre os interlocutores.

Para Kieran (2001) qualquer expressão que reflita a intenção de avançar em relação ao conteúdo (matemático), é considerada uma declaração ao nível do objeto. Contudo, se o indivíduo apenas concorda com o que foi mencionado anteriormente, ou repete algum valor já pronunciado, então a declaração é classificada como meta – nível.

As declarações ao nível do objeto geralmente são explícitas e tem a ver com o problema a ser resolvido, enquanto as declarações à meta-nível frequentemente são invisíveis, pela natureza oculta das mensagens e tem a ver com o relacionamento, com a preocupação em se fazer entender, preocupação com a

interação em si. Um exemplo de meta-nível seria um sinal de confirmação de que estaria ouvindo o que outro interlocutor está dizendo, tipo “ahã”.

De acordo com Sfar e Kieran (2001) para que a comunicação aconteça de fato, no sentido de propiciar a aprendizagem, os recursos intelectuais dos interlocutores devem ser poupados para a tarefa maior, ou seja, para tarefas ao nível do objeto. A análise preocupacional procura diagnosticar esta condição, ou seja, se as declarações ao nível do objeto estão mais presentes na comunicação.

Para subsidiar esta análise as pesquisadoras desenvolveram um fluxograma de interatividade. Este fluxograma está pautado na premissa de que “como as declarações das pessoas, tanto públicas quanto privadas, são produzidas por causa da comunicação, elas nunca são eventos independentes”(IBID, p. 58, tradução nossa)³⁵, ou seja, cada declaração depende ou acontece por causa de outra declaração.

Neste sentido, as autoras afirmam que “a comunicação é um processo em que qualquer ação particular sempre é endereçada a alguém ou reagindo às declarações de alguém, ou ambos” (IBID, p. 58, tradução nossa)³⁶.

As pesquisadoras distinguem então, dois tipos de intenções de um interlocutor em uma atividade de interação:

- O desejo de reagir a uma contribuição de um parceiro;
- O desejo de evocar uma reação (resposta) em um interlocutor.

Estes dois tipos de intenções são denominados pelas pesquisadoras de intenções reativas e pró-ativas respectivamente. Segundo as autoras, em uma análise da comunicação entre pares é possível identificar se as declarações estão sendo reativas ou pró-ativas, indicando as intenções de quem fala, ou seja, é possível verificar se o interlocutor tem a intenção de reagir a uma contribuição ou evocar uma reação.

Em resumo, a análise preocupacional procura mapear a interação, tentando diagnosticar os motivos do sucesso ou não da comunicação. Neste mapeamento é possível observar quem está falando, o que está falando, para quem, e se a fala é dirigida a uma declaração anterior, ou, inicia uma nova direção. Ainda se pode observar se as declarações são ao nível do objeto ou meta-nível. Vale

³⁵ Texto original: Because people's utterances, whether audible and public or silent and private, are produced for the sake of communication, they are never stand-alone, isolated events.

³⁶ Texto original: Communication is a process in which any particular action always means *addressing* somebody or *reacting* to somebody's former utterances, or both.

lembrar que a análise preocupacional foi desenvolvida com o propósito de diagnosticar o modo como os alunos se engajam nas atividades de interação, deste modo, examina o envolvimento dos participantes, podendo encontrar algumas razões para o sucesso ou não da comunicação.

Como apresentado neste capítulo, o fato dos alunos estarem trabalhando em pequenos grupos ou em duplas não é garantia de que a interação conduza à aprendizagem, porém, como salientam Noreen Webb, Anna Sfard, Helle Alro e Ole Skovsmose, a presença de algumas condições especiais pode propiciar a aprendizagem.

Diante destas argumentações, investigamos nesta pesquisa a presença ou não destas condições nas interações desenvolvidas durante atividades de Modelagem Matemática.

CAPÍTULO 4

ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos inicialmente o problema, as questões que orientam esta pesquisa bem como os procedimentos metodológicos. Na sequência apresentamos como se deu a coleta de dados, os sujeitos da pesquisa, aspectos gerais do curso em que os sujeitos estavam matriculados, a condução das atividades e a condução das análises.

4.1 PROBLEMA E OBJETIVO DA PESQUISA

Como apresentado na introdução deste trabalho, nosso problema de pesquisa consiste em: **Investigar as interações que emergem durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática na sala de aula.** Com este intuito investigamos:

- i) a ocorrência de interações dialógicas durante atividades de Modelagem Matemática em sala de aula;
- ii) a ocorrência de interações que podem ser caracterizadas como um 'diálogo';
- iii) em que medida as interações contemplam as condições elencadas por Noreen Webb para que a interação favoreça a aprendizagem;
- iv) em que medida as interações contemplam as condições propostas por Anna Sfard para que a comunicação seja efetivada;
- v) o papel desempenhado pelo professor na constituição dos tipos e padrões de interações;
- vi) a influência das características de situações-problema tratadas pela Modelagem Matemática para a ocorrência das interações e para o tipo de interação.

4.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Com vistas a investigar estes aspectos estabelecemos como foco de análise atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas por um grupo de alunos matriculados na disciplina *Matemática 2*, no segundo ano do curso de Engenharia Ambiental da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) - *campus* Londrina.

Esta investigação é metodologicamente classificada como qualitativa. Segundo Alves – Mazzotti (1998, p. 131) “a principal característica das pesquisas qualitativas é o fato de que estas seguem a tradição ‘compreensiva’ ou interpretativa”. Deste modo, ao utilizar uma abordagem qualitativa o pesquisador almeja compreender de que forma os indivíduos pensam ou agem em uma situação específica.

Para Bogdan e Biklen (1994) em uma investigação qualitativa, o pesquisador constitui-se o principal instrumento de pesquisa e sua presença no ambiente em que ocorre a investigação propicia uma melhor compreensão da ação dos indivíduos.

Uma característica da abordagem qualitativa apresentada por Bogdan e Biklen (1994) é que os dados possuem a forma de palavras e imagens, incluindo transcrições de imagens, entrevistas, falas e notas de campo.

De acordo com os autores, em uma pesquisa qualitativa os investigadores “tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto possível, a forma como foram registrados” (IBID, p.48), considerando ainda que a palavra escrita assume particular importância nesta abordagem. Nesta pesquisa os dados referentes às atividades de Modelagem Matemática foram transcritos, respeitando-se o máximo possível a sua autenticidade. Mesmo os dados constantes nas versões digitais foram transcritos respeitando-se o texto produzido pelo aluno.

Outra característica da abordagem qualitativa, segundo Bogdan e Biklen (1994), é que os investigadores interessam-se mais pelo processo do que pelos resultados ou produtos. Nesta pesquisa, em particular, as questões de investigação orientam-se principalmente para a compreensão das ações e comportamentos dos alunos no percurso para a solução do problema.

A PESQUISA

4.3.1 A Coleta dos Dados

Para realização desta pesquisa os dados foram obtidos por meio de quatro instrumentos de coleta: filmadora, gravadores, material produzido pelos alunos, notas de campo elaboradas pela professora/pesquisadora.

No desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática a turma (composta por 14 alunos)³⁷ foi dividida em quatro grupos, sendo dois grupos com quatro alunos e os outros dois grupos com três alunos cada. Quando os quatro grupos estavam trabalhando simultaneamente (o que ocorreu no desenvolvimento da primeira e segunda atividade)³⁸, a filmadora ficou posicionada de modo a captar as imagens e sons de um grupo específico por atividade. Nos demais grupos utilizou-se um gravador por grupo, o que nos permitiu obter suas falas.

Deste modo, os dados dos três grupos que não estavam sendo filmados foram obtidos por meio do áudio e por meio das anotações no diário de campo, produzidas pela professora/pesquisadora por meio da observação das ações, atitudes e expressões dos alunos durante o desenvolvimento das atividades.

Neste sentido a professora/pesquisadora buscou estar presente na maioria das vezes em que os alunos estavam desenvolvendo as atividades e nos momentos em que não estava interagindo com os alunos redigiu anotações consideradas pertinentes, ou seja, observações que poderiam ajudar a compreender um discurso ou uma ação do aluno. Deste modo, a pesquisadora pode ser considerada um importante instrumento de coleta de dados, visto que esteve presente no local de estudo, redigindo o diário e observando as ações dos alunos no desenvolvimento das atividades. Esta observação permite compreender o que ocorre durante o desenvolvimento das atividades, em que o “pesquisador se torna parte da situação observada, interagindo [...] com os sujeitos, buscando partilhar o seu cotidiano” (ALVES-MAZZOTTI, 1998, p. 165-166).

A observação permite compreender o significado que os alunos atribuem às atividades e às suas próprias ações. Devido à importância da descrição das atividades e dos demais acontecimentos da sala de aula e da multiplicidade de

³⁷ Trataremos especificamente sobre esta turma na seção 4.3.2.

³⁸ Estas atividades serão descritas em 4.3.3.

fatores que influenciam as atitudes dos alunos durante a realização das atividades de Modelagem, consideramos que a observação direta do investigador caracteriza-se como um instrumento fundamental nesta pesquisa.

Durante o desenvolvimento das atividades, um gravador foi deixado com cada grupo e um com a professora, possibilitando acesso às interações entre os alunos e entre estes e a professora. Os gravadores também continuaram com os alunos para que gravassem seus encontros que aconteceram fora da sala de aula. Deste modo, tivemos acesso aos registros de áudio da professora com os alunos e de cada grupo separadamente, além da gravação em vídeo de um grupo em cada atividade. As atividades realizadas fora do horário normal das aulas, em que os grupos compareciam em horários diferenciados, também foram filmadas.

O material produzido pelos alunos — anotações durante o desenvolvimento das atividades e relatório final das atividades desenvolvidas — também faz parte do material de análise. De acordo com Alves-Mazzotti (1998, p.169) um documento é “qualquer registro que possa ser utilizado como fonte de informação”. Estes documentos foram utilizados como mais uma fonte de análise e com eles foi possível contrastar as falas observadas pela pesquisadora e anotadas no diário de campo, como também as falas registradas em vídeo e áudio com o que foi registrado pelos alunos. Por meio da análise destes documentos foi possível a compreensão do que o aluno estava falando, pois muitas vezes, algumas expressões do tipo “isso aqui” eram utilizadas, e suas anotações, riscos e rabiscos nos auxiliaram a compreender a que estavam se referindo.

Tendo consciência que neste tipo de investigação o pesquisador deve estar atento a todos os elementos que norteiam o desenvolvimento das atividades, procuramos, durante a investigação, conhecer o ponto de vista dos alunos, sobre o desenvolvimento das atividades e sua participação, bem como o significado que atribuíam às atividades de Modelagem Matemática em sua vida acadêmica, profissional e social. Os resultados destas observações foram transcritos no diário de campo. Desta forma, na análise dos dados utilizamos os registros feitos no vídeo, áudio, notas de campo e documentos elaborados pelos alunos.

4.3.2 Os Sujeitos da Pesquisa

De acordo com Alves-Mazzotti (2002, p. 162) na pesquisa qualitativa a escolha dos participantes é proposital, ou seja, “o pesquisador os escolhe em função das questões de interesse do estudo e também das condições de acesso e permanência no campo e disponibilidade dos sujeitos”. Deste modo, escolhemos os alunos matriculados na disciplina Matemática 2 (turma completa), ministrada pela pesquisadora no semestre em que iniciou-se a coleta de dados. Esta escolha proporcionou fácil acesso aos participantes em encontros regulares.

4.3.3 Os Alunos

Este grupo de alunos cursava o terceiro período de Engenharia Ambiental da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), *campus* Londrina, e era constituído de 14 alunos, sendo 6 do sexo masculino e 8 do sexo feminino, com idade variando de 18 a 20 anos, todos cursando pela primeira vez a disciplina de Matemática 2 e sem experiência com atividades de Modelagem Matemática. Como se pode observar na Tabela 1 o índice de presença nas aulas foi satisfatório.

Tabela 1 – Número de faltas dos alunos em um total de 76h/aulas e porcentagem de presença

Quantidade de alunos	Número de faltas	Porcentagem de presença
1	6	72%
10	2	97%
3	0	100%

Vale ressaltar que cada dia de aula equivale a 2 faltas, sendo assim o aluno que teve 6 faltas esteve ausente em 3 dias de aula e os 10 alunos que tiveram 2 faltas estiveram ausentes em apenas um dia de aula. Neste referido dia os alunos estavam realizando uma visita técnica em uma empresa da cidade e os três alunos que estavam presentes em nossa aula não estavam matriculados na turma regular e portanto, não foram à visita técnica.

4.3.4 A Professora da Turma

Licenciada em Matemática, a professora desta turma (também pesquisadora) atua no ensino superior e médio desde 1990. Em sua trajetória acadêmica investigou a Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos Superiores de Tecnologia em sua dissertação de mestrado. Desde então vem desenvolvendo com seus alunos atividades de modelagem matemática e paralelamente investigando diversos aspectos referentes ao desenvolvimento destas atividades e a aprendizagem dos alunos.

O interesse em investigar as interações foi sendo consolidado por meio de leituras e discussões no Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT), tendo em vista as reflexões de diversos pesquisadores e teóricos como apresentado na introdução e capítulos anteriores.

4.3.5 O Curso de Engenharia Ambiental da UTFPR

A Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) é a primeira assim denominada no Brasil e tem uma história um pouco diferente das outras universidades. A Instituição foi transformada a partir do Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná (Cefet-PR). Como a origem deste centro é a Escola de Aprendizes Artífices, a UTFPR herdou uma longa e expressiva trajetória na educação profissional.

Atualmente, a UTFPR oferece cursos superiores de Tecnologia, bacharelados (entre eles Engenharias) e licenciaturas. A consolidação do ensino incentiva o crescimento da pós-graduação, com a oferta de dezenas de cursos de especialização, alguns mestrados e dois doutorados.

A Universidade Tecnológica atende ainda à necessidade de pessoas que desejam qualificação profissional de nível médio, por meio da oferta de cursos técnicos. Na área de relações empresariais e comunitárias, atua fortemente com o segmento empresarial e comunitário, por meio do desenvolvimento de pesquisa aplicada, de atividades sociais e extraclasse, entre outros.

Com ampla abrangência no Paraná, a UTFPR conta hoje com onze *campi* no Estado e pretende ampliar essa atuação. Cada Campus mantém cursos

planejados de acordo com a necessidade da região, sendo que boa parte deles oferta cursos técnicos, de Engenharia e de Tecnologia, a maioria destes reconhecidos pelo Ministério da Educação com conceito A.

Em Londrina, cidade localizada na Região norte do Estado do Paraná, considerada um importante pólo de desenvolvimento regional e nacional nos setores comercial, de serviços e agroindustrial, sendo também conhecida pela qualidade na educação pública, encontra-se um dos *campi* da UTFPR.

O *Campus* Londrina foi implantado em fevereiro de 2007, e oferta hoje, entre outros, o curso de Engenharia Ambiental.

O curso de Engenharia Ambiental da UTFPR tem como objetivo contribuir para prevenção, remediação ou minimização de toda alteração das propriedades físicas, químicas e biológicas do meio ambiente, causada por atividades humanas que, direta ou indiretamente afetam a saúde, o bem estar da população e a qualidade do meio ambiente.

O engenheiro ambiental atua na preservação da qualidade da água, do ar e do solo a partir do diagnóstico, manejo, controle e recuperação de ambientes urbanos e rurais. As funções do profissional da área incluem investigação, avaliação, adaptação e implantação de sistemas de produção ambientalmente viáveis, a recuperação de áreas degradadas e a diminuição e o monitoramento dos processos e atividades causadores de impactos ambientais. É ele, também, que prepara empresas e organizações para receber licenças ambientais de funcionamento.

O currículo deste curso prevê a realização do Trabalho de Conclusão de Curso, que deve abranger conhecimentos específicos de Engenharia Ambiental, no qual o estudante exercitará a capacidade de resolver problemas, de trabalhar em equipe e de comunicar-se, além de desenvolver atitudes como iniciativa e determinação.

Entre as atividades que podem ser desenvolvidas pelo engenheiro ambiental estão: Analisar riscos ambientais; Avaliar, planejar e desenvolver tecnologias alternativas para a utilização de mananciais, reservas minerais e florestais de modo a promover o desenvolvimento de forma equilibrada; Tomar decisões baseadas em análises de viabilidade operacional/econômica/social objetivando o menor impacto possível sobre o meio ambiente; Avaliar e integrar as atividades da engenharia no contexto social e ambiental; Atuar na área de ensino

superior; Participar de pesquisa, elaboração, implantação e gerenciamento de projetos ambientais.

Esta configuração para o futuro Engenheiro Ambiental requer do aluno a realização de atividades que lhes permita solucionar problemas, trabalhar em equipe, comunicar-se adequadamente, perceber e compreender o papel da matemática na solução de problemas tanto ambientais quanto sociais, desenvolver um pensamento crítico em relação à confiabilidade dos resultados matemáticos, com vistas ao bem estar do indivíduo e a conservação da natureza, etc. Neste sentido, a participação deste estudante em atividades de Modelagem Matemática no decorrer do curso, entendendo a situação-problema, construindo hipóteses, realizando simplificações, elaborando modelos e validando-os, bem como a participação em atividades interativas, poderá contribuir para seu sucesso tanto acadêmico quanto profissional.

4.3.6 A Condução das Atividades

As atividades de Modelagem Matemática fonte de dados para esta pesquisa foram desenvolvidas no âmbito da disciplina Matemática 2 no segundo ano do Curso de Engenharia Ambiental. Logo nos primeiros encontros explicamos aos alunos nossa intenção de desenvolver estas atividades. Neste momento também informamos que as mesmas seriam utilizadas como fonte de dados para nossa pesquisa de doutoramento. Solicitamos sua autorização para que as atividades fossem filmadas e gravadas, solicitação esta que foi prontamente atendida pelo grupo de alunos. Um modelo da autorização é apresentado no Anexo 1.

Para o desenvolvimento das atividades e, considerando que o trabalho em grupo é “de fundamental importância devido às possibilidades dos alunos exteriorizarem idéias, confrontarem opiniões e discutirem as estratégias e os resultados” (VERTUAN, 2007, p. 52), os 14 alunos foram divididos em quatro grupos, ficando assim constituídos: **Grupo 1:** alunos A1, A2, A3 e A4; **Grupo 2:** alunos A5, A6 e A7; **Grupo 3:** alunos A8, A9 e A10 e **Grupo 4:** alunos A11, A12, A13 e A14. A divisão dos grupos foi realizada pelos próprios alunos, de acordo com suas preferências, não tendo interferência da professora/pesquisadora.

Além dos encontros em horário de aula, foram realizados semanalmente outros encontros fora deste horário. Conforme já comentamos, foi

entregue um gravador para cada grupo, para que, mesmo os encontros que eram realizados entre eles, sem a presença da pesquisadora, fossem registrados em áudio.

A primeira etapa das atividades foi realizada em sala de aula no período de Abril a Julho de 2009 e a segunda etapa iniciou-se em Setembro de 2009 e foi desenvolvida até Junho de 2010, sendo esta segunda etapa desenvolvida fora do horário normal das aulas. Nesta segunda etapa os alunos já não faziam parte da referida disciplina (Matemática 2), tendo sido convidados a desenvolverem outras atividades de modelagem em horário disponível.

A disciplina Matemática 2 tem como ementa o estudo das Equações Diferenciais Ordinárias e, por este motivo, as atividades contemplam este conceito matemático. Entretanto, outros conceitos matemáticos foram utilizados, alguns destes, apesar de já terem sido estudados pelos alunos, não estavam consolidados em sua estrutura cognitiva, e deste modo, também são evidenciados em nosso estudo.

A disciplina em questão deu-se utilizando aulas expositivas, com resolução de exercícios e problemas aplicados e desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática. A resolução de exercícios e problemas aplicados acontecia, geralmente, concomitantemente com as atividades de Modelagem. A introdução de conceitos requeridos para a solução dos problemas oriundos das atividades de modelagem foi realizada na medida em que se faziam necessários, como por exemplo, para a solução do problema da “contaminação dupla de uma mistura com acetato de Etila – atividade 8”, mostrou-se apropriada a introdução do conteúdo referente à Transformada de Laplace. Esta introdução foi realizada no momento de sua necessidade e somente após a mesma os alunos foram capazes de solucionar o problema em questão.

As atividades foram desenvolvidas respeitando-se os diferentes momentos enunciados para a Modelagem Matemática em Almeida e Dias (2004)³⁹.

³⁹ Primeiro Momento: abordar com todos os alunos, situações em que está em estudo a dedução, utilização, análise e exploração de um modelo matemático a partir de uma situação-problema já estabelecida. Segundo Momento: o professor sugere uma situação-problema já estabelecida, juntamente com um conjunto de informações, e os alunos realizam a formulação das hipóteses e a dedução do modelo durante uma investigação e, finalmente, validam o modelo encontrado para o problema em estudo. Terceiro Momento: os alunos, divididos em grupos, são incentivados a conduzirem um processo de modelagem a partir de um problema escolhido por eles, assessorados pelo professor. Uma vez estabelecido o problema, os alunos procedem a coleta de informações e dados necessários para encontrar uma possível solução. O processo de validação do modelo leva o aluno a analisar, tomar decisões, discutir, descobrir, explorar, experimentar o novo.

Este encaminhamento não nos parece ser uma condição necessária para o sucesso das atividades de Modelagem, porém o mesmo é sugerido, pois temos constatado (FERRUZZI, 2003) que, à medida que o aluno vai realizando as atividades nos diferentes momentos, a sua compreensão acerca do processo de modelagem, da resolução dos problemas em estudo e da reflexão sobre as soluções encontradas vai se consolidando. Os Quadros 1, 2 e 3 apresentam o título de cada atividade, o momento em que cada uma foi desenvolvida e os grupos de alunos responsáveis.

Quadro 1 – Atividade de Modelagem Matemática desenvolvida no Primeiro Momento

PRIMEIRO MOMENTO		
GRUPOS	ALUNOS	ATIVIDADE 1
G1,G2,G3,G4	todos	Variação da concentração de cálcio em sedimentos de fundo do Rio Limoeiro localizado em Londrina- PR.
Neste momento uma situação-problema já estruturada, com os dados suficientes para o estudo, foi apresentada pela professora aos alunos. A definição do problema, as simplificações, a construção de hipóteses e o desenvolvimento do modelo foram feitos em conjunto, alunos e professora.		

Quadro 2 – Atividade de Modelagem Matemática desenvolvida no Segundo Momento

SEGUNDO MOMENTO		
GRUPOS	ALUNOS	ATIVIDADE 2
G1,G2,G3,G4	todos	Estudo do resfriamento de um corpo de alumínio.
A situação-problema já estabelecida, juntamente com um conjunto de informações, foi sugerida pela professora e os alunos realizaram a formulação das hipóteses e a dedução e validação do modelo, subsidiados pela professora.		

Quadro 3 – Atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas no Terceiro Momento

TERCEIRO MOMENTO		
GRUPOS	ALUNOS	ATIVIDADES
G1	A1, A2, A3, A4	3- Estudo da área de soja cultivada no Brasil
G 2	A5, A6, A7	4- Capacidade térmica do aquecedor solar construído na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), <i>campus</i> Londrina – Pr.
G 3	A8, A9, A10	5- Projeção de área plantada de cana-de-açúcar no território brasileiro.
G 4	A11, A12, A13, A14	6- Tratamento, com uma base do tipo Hidróxido de Sódio, da água contaminada com acetato de Etila.
G 3 e G4	A8, A10, A11, A12, A13.	7- Simulação e estudo da Contaminação de Hidróxido de Sódio em um recipiente com fluxo contínuo.
G2 e G4	A5, A6, A7, A11, A12, A13, A14	8 – Contaminação dupla de uma mistura com <i>acetato de Etila</i> .
Neste terceiro momento a escolha das situações a serem pesquisadas, bem como a coleta de dados, as simplificações, a construção de hipóteses, a formulação do modelo matemático e a validação ficou a cargo dos alunos.		

Os temas investigados na primeira e segunda atividades, referentes ao primeiro e segundo momentos da Modelagem Matemática respectivamente, foram escolhidos pela pesquisadora/professora visto que os alunos ainda não estavam familiarizados com a Modelagem Matemática.

A escolha dos temas referentes ao terceiro momento ficou a cargo dos grupos. Os temas 3 (Estudo da área de soja cultivada no Brasil) e 5 (Projeção de área plantada de cana-de-açúcar no território brasileiro) originaram-se a partir da leitura de um texto em sala de aula intitulado “Realidade e perspectivas do Brasil na produção de alimentos e agroenergia, com ênfase na soja”. Após a leitura do texto os alunos motivaram-se a pesquisar mais sobre a realidade da agroindústria. O tema 4 (Capacidade térmica do aquecedor solar construído na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), *campus* Londrina – Pr) originou-se do interesse do grupo em pesquisar fontes alternativas de energia.

Os temas 6 (Tratamento, com uma base do tipo Hidróxido de Sódio, da água contaminada com acetato de Etila) e 7 (Simulação e estudo da Contaminação de Hidróxido de Sódio em um recipiente com fluxo contínuo) surgiram do interesse de um dos participantes do grupo em estudar a contaminação das águas. O interesse pelo tema 8 (Contaminação dupla de uma mistura com *acetato de Etila*) ocorreu após concluída a investigação e apresentação do tema 7, onde os

grupos interessaram-se por pesquisar uma contaminação oriunda de concentrações diferentes.

4.3.7 A Condução das Análises

O discurso entre professor e alunos, ou entre alunos, pode ser caracterizado em termos de discurso interativo ou não- interativo. O discurso interativo é caracterizado por Mortimer e Scott (2002) como sendo aquele produzido por mais de um indivíduo. Apesar de ocorrerem, em sala de aula, discursos não-interativos, o foco desta pesquisa está nos discursos interativos, discursos estes que denominamos '**interações**'. Deste modo, nossa análise tem como foco estas interações.

As análises dos dados são realizadas frente aos nossos objetivos apresentados em 4.1 levando em consideração o referencial teórico apresentado nos capítulos 1, 2 e 3.

Os dados que subsidiam a análise constam das anotações realizadas pela professora durante o desenvolvimento das atividades, das entrevistas realizadas com os alunos, das anotações realizadas pelos alunos durante a atividade e principalmente das gravações das interações.

Com vistas ao problema de pesquisa 'Investigar as interações que emergem durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática' e cientes da complexidade de analisar estas interações realizamos nesta pesquisa dois tipos de análises: Análise Específica e Análise Geral. A análise específica é realizada por atividades, sendo analisadas três (3) atividades, a saber as atividades: *1- Variação da concentração de cálcio em sedimentos de fundo do Rio Limoeiro localizado em Londrina- PR; 3- Estudo do resfriamento de um corpo de alumínio e 8 – Contaminação dupla de uma mistura com acetato de Etila*. A análise geral, por sua vez, apresenta reflexões sobre o problema da pesquisa levando em consideração o conjunto das atividades desenvolvidas pelos alunos.

Para efetuar as análises, transcrevemos as gravações (de áudio e vídeo) de interações que apresentavam subsídios para nossa pesquisa e comparamos com as notas de campo com o intuito de acrescentar algo que não foi observado nas gravações. As imagens e sons obtidos foram ainda comparados com o material escrito pelos alunos, de modo que conseguimos observar suas maneiras

de agir, de se comportar diante de uma explicação do colega, diante de suas próprias explicações, e suas maneiras de chegar a alguma conclusão ou idéia. Foi possível observar, por exemplo, durante uma explicação de um aluno para o outro, o que estava enfatizado circulado ou sublinhado, ou ainda o uso de flechas ligando o que deveria ser visto em conjunto. Também foi possível observar que quando o aluno 'pensava em voz alta' realizava vários rabiscos em suas anotações, ou desenhos, com a intenção de entender seu próprio raciocínio.

No capítulo 5 apresentamos três atividades desenvolvidas e suas respectivas análises bem como a análise geral das atividades.

CAPÍTULO 5

AS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS E SUAS ANÁLISES

Neste capítulo primeiramente apresentamos a análise específica de três atividades desenvolvidas pelos alunos: 1- *Variação da concentração de cálcio em sedimentos de fundo do Rio Limoeiro localizado em Londrina- PR*; 3- *Estudo do resfriamento de um corpo de alumínio* e 8 – *Contaminação dupla de uma mistura com acetato de Etila*. A escolha destas três atividades deu-se pela impossibilidade de apresentar todas as atividades e pelo desejo de apresentar uma atividade desenvolvida por todos os grupos (atividade 1) e duas atividades desenvolvidas no terceiro momento da Modelagem Matemática (atividade 3 e 8). Esta análise específica é realizada paralelamente à descrição da atividade. Na sequência, em 5.2 apresentamos a análise geral levando em consideração o conjunto das atividades desenvolvidas pelos alunos e em 5.3 apresentamos considerações dos alunos quanto ao desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática.

5.1 DESCRIÇÃO E ANÁLISE ESPECÍFICA DAS ATIVIDADES 1, 3 E 8

Apresentamos interações que ocorreram durante o desenvolvimento de cada atividade, com vistas a observar:

i) Se as interações constituem ‘interações dialógicas’ ou seja, professor e estudantes exploram idéias, formularam perguntas e oferecem, consideram e trabalham diferentes pontos de vista, ou, ‘interações de autoridade’ onde o professor conduz os estudantes (ou um aluno conduz o outro) por meio de uma seqüência de perguntas e respostas, com o objetivo de chegar a um ponto de vista específico. Na interação ‘de autoridade’ o professor (ou o aluno em questão) segue sua própria linha de pensamento e cabe ao aluno (ou ao ‘outro’) completar lacunas de sua fala.

Para Mortimer e Scott (2002) tanto interações dialógicas e ‘de autoridade’ quanto discursos não-interativos podem estar presentes em atividades de ensino, e são igualmente importantes em qualquer processo de ensino e aprendizagem, pois cada uma delas contribui de modo diferente com a

aprendizagem. Geralmente, quando o professor pretende introduzir novos conceitos ele precisa orientar os alunos, com questões que os conduzam à compreensão do mesmo. Esta orientação normalmente é percebida em 'interações de autoridade' e neste sentido, as interações de autoridade também são importantes no processo. Porém, tendo em mente as argumentações de Fanizzi (2008) de que o discurso dialógico é o mais propício para a aprendizagem, e as argumentações de Mortimer e Scott (2002) que consideram que os alunos devem engajar-se em atividades dialógicas a fim de desenvolverem um entendimento do tópico em estudo, procuramos, nesta pesquisa diagnosticar a ocorrência de 'interações dialógicas'.

As interações dialógicas geralmente ocorrem quando o professor tem a intenção de explorar as idéias dos estudantes e deste modo interagem para discutir idéias relevantes para o desenvolvimento de conceitos científicos, produzindo assim, geralmente, padrões de interação não-triádicos. As interações 'de autoridade' por sua vez, produzem padrões triádicos (I-R-A).

Deste modo, para subsidiar esta análise procuramos diagnosticar os padrões de interações produzidos entre professor e alunos, procurando evidenciar ou não, a presença de cadeias de interações, as quais, segundo Alro e Skovsmose (2006) indicam uma interação dialógica com vistas à aprendizagem. Neste sentido, a presença de cadeias de interações nos oferece subsídios para considerar a interação como sendo uma 'interação dialógica'.

ii) Se as interações podem ser consideradas um diálogo como caracterizado por Alro e Skovsmose (2006): "[...] um processo envolvendo atos de estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar" (p. 135).

Procuramos identificar nas interações estabelecidas, sequências que nos indiquem a presença de atos dialógicos como os sugeridos pelos autores. Este item subsidia a investigação de que a Modelagem Matemática como um *contexto-simulado* propicia certas qualidades de aprendizagem da Matemática, como sugerido por Alro e Skovsmose (2006).

iii) Se as condições apontadas por Noreen Webb (o aluno que necessita de ajuda solicita ou dá indícios de que necessita desta ajuda, recebe, e aplica esta ajuda para solucionar seu problema) são satisfeitas nestas interações. Investigamos ainda se a ajuda recebida constitui uma 'ajuda elaborada', a qual, de acordo com Noreen Webb favorece a aprendizagem.

iv) Com o pressuposto de Anna Sfard de que a efetividade da comunicação é uma pré-condição para o sucesso de uma interação para a aprendizagem, procuramos identificar a efetividade ou não da comunicação, investigando se as condições propostas por Anna Sfard são satisfeitas, a saber, o acordo sobre o discurso principal; o acordo sobre os papéis dos interlocutores e o acordo sobre o curso necessário para a mudança discursiva. Além de investigar estes acordos procuramos investigar se os *focos pretendidos, observados e pronunciados* são coincidentes, o que, na visão desta pesquisadora indica que a comunicação foi efetivada e conduziu à aprendizagem.

v) Nas interações em que a professora participa, procuramos identificar questões propostas pela professora que podem gerar cadeias de interações, interações triádicas, ou 'jogo de perguntas'. Além disso, procuramos identificar a influência do professor na determinação do tipo de interação (dialógicas ou de autoridade);

Na análise geral procuramos identificar se as características das situações-problema propostas por estas atividades favorecem a ocorrência das interações e a definição dos tipos de interações ali estabelecidas (dialógica/ de autoridade), indicando assim que o *contexto-simulado* influencia a constituição das mesmas.

5.1.1 Atividade 1: Variação da Concentração de Cálcio em Sedimentos do Rio Limoeiro

Esta atividade foi desenvolvida durante duas horas/aulas, sendo solicitada aos alunos a entrega de relatório onde deveriam explicitar os procedimentos utilizados. Entretanto, alguns grupos "passaram a limpo" o trabalho, não descrevendo tudo o que foi realizado, deixando de lado os procedimentos que apresentavam suas tentativas e erros. Deste modo, alguns detalhes só puderam ser observados na gravação em áudio e vídeo realizada durante o desenvolvimento das atividades. Nesta atividade o Grupo 1 foi filmado enquanto os demais grupos tiveram suas falas gravadas em áudio.

A descrição e análise aqui apresentadas foram divididas em duas partes: Na parte A apresentamos o problema, as variáveis, a hipótese, a tendência dos dados e o modelo matemático obtido. Nesta parte não realizamos inferências

em relação às ações dos alunos e da professora, apresentando somente o problema e seus resultados. Na parte B descrevemos o envolvimento dos alunos e da professora, apresentando algumas interações e analisando-as à luz do referencial teórico.

5.1.2 Parte A: a Situação-Problema e sua Solução

Tema: Variação da concentração de cálcio em sedimentos de fundo do Rio Limoeiro localizado na cidade de Londrina- PR, cuja água é usada para abastecimento de algumas regiões. Os dados referentes a este problema foram obtidos de Borssoi (2004).

Com esta atividade foi possível introduzir na disciplina de Matemática 2 o conceito e o método de resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de variáveis separáveis. Para introduzir o problema na aula a professora entregou aos alunos o texto que consta em Borssoi (2004) apresentado na Figura 3.

Problema: Estudar a variação da concentração de cálcio em sedimentos de fundo do Rio Limoeiro –Londrina- PR, cuja água é utilizada para abastecimento de algumas regiões da cidade.

Variáveis:

Profundidade do rio: p (em cm).

Concentração de Cálcio em função da profundidade: $N(p)$ (notação adotada pelos grupos 1, 2 e 4) e $C(p)$ (notação adotada pelo grupo 3).

Figura 3 – Dados sobre a concentração de cálcio em rios



Dados sobre a concentração de cálcio em rios

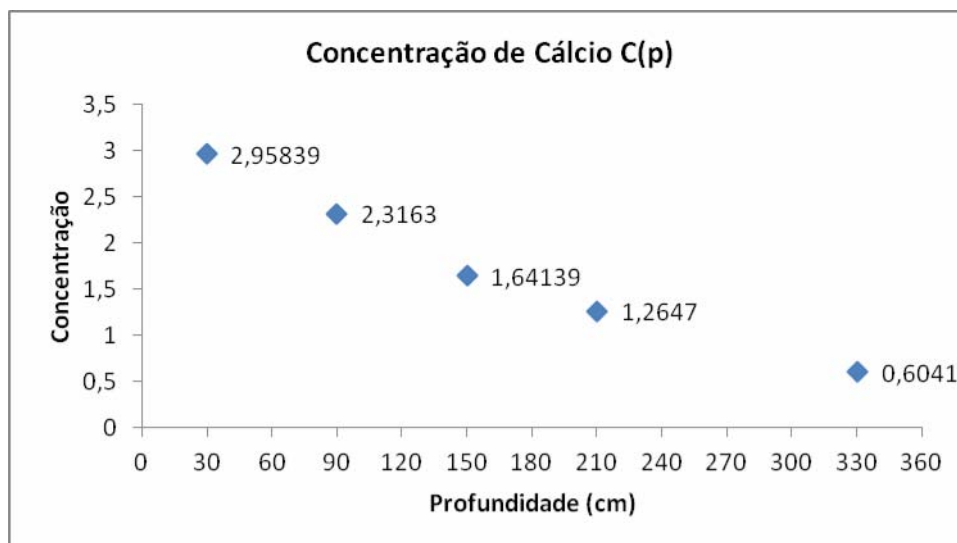
Dados:

Profundidade do rio (cm)	Concentração de cálcio (g/cm^3)
30	2,958397
90	2,3163
150	1,64139
210	1,2647
330	0,6041

Tendência dos dados: Consiste na representação dos dados em um plano cartesiano. Neste caso foi utilizada a planilha de cálculo Excel para esta representação.

Tendência dos dados: Concentração de cálcio em relação à profundidade do rio

Figura 4 – Tendência dos dados: concentração de cálcio em relação à profundidade do rio



Hipótese

H_1 = a taxa de variação da concentração do cálcio em relação à profundidade do rio é proporcional à quantidade de cálcio em cada profundidade.

Modelo matemático associado à hipótese

$$\frac{dN}{dp} = kN$$

Modelo matemático encontrado pelos alunos após a determinação dos parâmetros:

Grupo 1: $N(p) = 3,62 \cdot e^{-0,00532p}$;

Grupo 2: $N(p) = 3,632787 \cdot e^{-0,00532p}$;

Grupo 3: $C(p) = 3,62 \cdot e^{-0,00532p}$;

Grupo 4: $N(p) = 3,63488 \cdot e^{-0,005311p}$.

O desenvolvimento desta atividade proporcionou uma série de discussões relativas à importância da presença de cálcio em águas utilizadas para consumo humano bem como em relação ao prejuízo causado ao meio ambiente e ao ser humano pelo excesso de cálcio. Estas discussões se tornaram particularmente evidentes durante as apresentações dos trabalhos de cada grupo.

O tema tratado nesta atividade mostrou-se pertinente e despertou interesse dos alunos, proporcionando grande participação nas discussões, visto que o mesmo diz respeito a um tema voltado à futura profissão destes estudantes. Percebe-se que esta atividade está alinhada com a configuração de *contexto-simulado* que conferimos à Modelagem Matemática. De fato, a mesma propõe a resolução de um problema que tem referência na realidade, é uma situação do cotidiano, sendo seus dados obtidos em contextos ‘reais’ e transferidos para a sala de aula.

5.2 PARTE B: O ENVOLVIMENTO DOS ALUNOS NO DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE 1 – ANÁLISE ESPECÍFICA DAS INTERAÇÕES

Apresentamos aqui alguns recortes do material produzido pelos grupos durante o desenvolvimento desta atividade, bem como as interações entre os membros de cada grupo e entre estes e a professora.

Utilizamos o termo ‘*Episódio*’ para descrever estas interações sendo que as falas da professora e dos alunos estão em itálico, diferenciando das considerações que realizamos sobre as ações dos alunos, que são redigidas entre parênteses e sem itálico. As falas foram transcritas literalmente e deste modo apresentam expressões do tipo: *prá*, *né*, *ahã*, *péra aí*, etc, além de erros de concordância.

O desenvolvimento desta atividade iniciou-se com uma interação entre professora e alunos, com a intenção de diagnosticar o conhecimento dos alunos sobre o tema e ao mesmo tempo motivá-los para a investigação. O *Episódio 1* apresenta a interação estabelecida neste momento.

Episódio 1

Prof: Então turma, como combinamos, hoje vocês vão me ajudar a resolver um problema...

A1: então é hoje que começo a ficar famoso!! (*risos dele e de toda a turma*).

Prof: é sim...(*risos*).

Prof: Eu trouxe ‘prá’ vocês alguns dados sobre a concentração de cálcio em diferentes profundidades do rio Limoeiro... Vocês sabem qual é o rio Limoeiro?

A4: é um rio daqui de Londrina.

Prof: e o que mais você sabe deste rio?
 A4: ah... mais nada ..é que ouvi falar na tv...
 A1: 'prof' acho que a água dele vai para a Sanepar
 Prof: prá Sanepar?
 A1: é...prá abastecer a cidade
 Prof: certo... a água do Rio Limoeiro é uma das fontes de abastecimento de Londrina. Uma das né? Tem outras. Alguém sabe de mais alguma?
 A4: acho que do Tibagi.. do Cafezal...
 Prof: certo.. obrigada. Então pessoal, eu trouxe uns dados referentes à concentração de cálcio no rio Limoeiro. Por que se interessar por estes dados? Qual a importância de estudar esta situação?
 A6: porque a gente vai beber essa água...
 A9: e a quantidade de cálcio pode ser perigosa.
 Prof: Perigosa? Por que A9?
 A9: porque o excesso faz mal a saúde.. pode causar pedras no rim.
 A7: e também é ruim para a natureza por causa da dureza da água.
 Prof: dureza da água?? O que é isso?
 A7: ah... não pode beber 'água dura', nem lavar roupa...
 Prof: por que? não pode usar nem prá lavar roupa?
 A7: não é que não pode, é que como precisa de mais sabão para formar espuma, prejudica o meio ambiente.
 A13: Mas o cálcio também é bom para a saúde
 Prof: explique melhor A13.
 A13: ah 'prof'... o cálcio é bom prá formar os ossos e dentes...
 A12: para o crescimento...
 Prof: alguém discorda? Alguém quer falar mais alguma coisa?
 Os alunos indicam que concordam com o que foi dito até agora e não fazem menção a acrescentar mais nada.
 Prof: então o cálcio é bom, mas não pode ser em excesso certo? É isso?
 Alunos: é.
 Prof: ok pessoal...
 A1: (interrompendo a fala da professora) to gostando desta aula de matemática...(risos).
 Os demais alunos riem do comentário do colega e concordam com ele, dizendo que "não parece aula de matemática".
 Prof: Bem pessoal, vamos ver o que podemos fazer com estes dados que eu trouxe... Vou entregar para vocês e vejam o que podemos estudar com eles.

Consideramos que esta interação constitui uma interação dialógica (nos termos de Mortimer e Scott, 2002), refletindo a intenção da professora de familiarizar os alunos com o assunto e ao mesmo tempo ter noção do conhecimento dos alunos a respeito do tema. Para melhor apresentar nossa análise, dividimos este *Episódio* em dois sub-episódios, o primeiro deles compreende os turnos⁴⁰ de 4 à 13. Caracterizamos este sub-episódio como dialógico visto que a professora incentiva o compartilhamento de conhecimentos e opiniões dos alunos a respeito de um dos

⁴⁰ Turnos: falas do *Episódio*.

componentes do tema (o rio Limoeiro). Observamos que este sub-episódio apresenta a seguinte cadeia de interação⁴¹:

Turno	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Tipo de interação	I _T	R	P _T	R	R	P _T	R	S _T P _T	e R	A _T

Classificamos o turno 6 como sendo um *Prosseguimento* de processo [*o que mais você sabe deste rio?*] pois caracteriza-se como uma questão aberta com espaço para o aluno dizer o que sabe e o que considera importante ou interessante. Apesar da resposta de A4 no turno 7 não acrescentar muito a respeito do tema, o aluno A1 sentiu-se incentivado a dar sua opinião no turno seguinte (8). Deste modo, o prosseguimento de processo emitido pela professora no turno 6 gera a cadeia de interação até fechar-se com a avaliação da professora no turno 13 (*certo...obrigada.*). Observa-se que antes da avaliação da professora emitida no turno 13 a mesma realiza uma síntese da discussão no turno 11, levando em consideração as contribuições dos alunos. Ainda em 13, após a avaliação, a professora inicia outra investigação gerando o segundo sub-episódio que corresponde aos turnos 13 a 28.

No turno 13 a professora faz uma iniciação de processo [*Por que se interessar por estes dados? Qual a importância de estudar esta situação?*] que demanda opiniões dos alunos, gerando participações na sequência. Estas opiniões, por sua vez, geram, a partir do turno 16 questões de prosseguimento elaboradas pela professora [16- *Perigosa? Por que?;* 19- *O que é isso? ;* 21- *Por que?;* 24- *Explique melhor*] que geram outra cadeia de interação com várias participações dos alunos, terminando com uma síntese realizada pela professora no turno 28 [*então o cálculo é bom, mas não pode ser em excesso certo? É isso?*]. O que se observa é que as questões de prosseguimento elaboradas pela professora são questões de processo que demandam respostas explicativas dos alunos. Com isso, os alunos são incentivados a argumentar e expor seus pontos de vista e conhecimento. Estas respostas geram oportunidades de mais questões de prosseguimento. A cadeia de interação gerada neste sub-episódio é a que segue:

⁴¹ Na apresentação dos padrões de interação utilizaremos I para Iniciação, R para resposta, A para avaliação, P para prosseguimento e S para Síntese e um índice (T) acompanhando estas siglas quando a fala for da professora. Nas falas dos alunos não utilizamos índice. Deste modo, as falas não acompanhadas de índice significam falas dos alunos.

Turno	13	14	15	16	17	18	19	20
Tipo de interação	I _T	R	R	P _T	R	R	P _T	R
Turno	21	22	23	24	25	26	27	28
Tipo de interação	P _T	R	R	P _T	R	R	P _T	S _T

É importante salientar que no turno 23 a aluna A13 apresenta um ponto de vista diferente do que vinha sendo discutido até momento (*Mas o cálcio também é bom para a saúde*) e no turno 24 a professora incentiva a aluna a continuar seu raciocínio, encorajando desta forma, outra aluna a participar. Nas sínteses realizadas pela professora nos turnos 11 e 28 a professora utiliza as idéias dos alunos, ou seja mais de uma voz é ouvida e considerada.

Diante desta cadeia de interação, da participação dos alunos, das sínteses apresentadas pela professora levando em consideração as contribuições dos alunos, e dos prosseguimentos da professora procurando incentivar, compreender e utilizar a opinião dos alunos, este sub-episódio também é caracterizado como dialógico.

Deste modo, como os dois sub-episódios formam cadeias de interações e observamos a participação dos alunos, esta interação apresentada no *Episódio 1* corresponde a uma *interação dialógica*.

Quanto aos atos dialógicos constituintes do diálogo, como caracterizado nesta pesquisa, constatamos nesta interação a presença dos atos: *estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, reformular e avaliar*.

Professora e alunos buscam criar uma sintonia, estando presente, prestando atenção um ao outro e às suas contribuições. A intenção de estabelecer contato é evidenciada pelo uso de expressões do tipo: 'é isso?', 'certo?', 'concordam?', etc. O uso destas expressões evidencia ainda uma forma de convite à participação (ALRO; SKOVSMOSE, 2006).

No início da interação a professora se apresenta como parte da equipe quando sugere que os alunos a ajudarão a solucionar o problema. Deste modo, coloca-se como participante do grupo, sugerindo que a responsabilidade é de todos e não apenas dos alunos, estabelecendo um contato com o grupo. Consideramos ainda que os turnos 14 e 15 [**A6**: *porque a gente vai beber essa água...A9*: *e a quantidade de cálcio pode ser perigosa*], 17 e 18 [**A9**: *porque o*

excesso faz mal a saúde.. pode causar pedras no rim. A7: e também é ruim para a natureza por causa da dureza da água], 25 e 26 [A13: ah 'prof'... o cálcio é bom prá formar os ossos e dentes...A12: para o crescimento...] apresentam um aluno completando as idéias do outro, indicando que os estudantes estão em conjunto na conversação, *estabelecendo e mantendo contato*.

Também se observa nesta interação os atos dialógicos *perceber* e *reconhecer*. Quando, a partir do turno 16, a professora passa a questionar os alunos sobre os perigos e benefícios do cálcio, a mesma adota uma postura investigativa, de interesse e curiosidade, buscando *perceber* ou identificar as concepções dos alunos. Perceber, de acordo com Alro e Skovsmose (2006) significa, além de outros aspectos, descobrir algo que não se conhece e, quando a professora questiona sobre a 'dureza da água' a mesma está procurando compreender o que significa o termo em questão. O ato de *perceber* vem acompanhado de questões que buscam explicações e investigações e geralmente são questões abertas, onde o interlocutor questiona sobre algo de que não sabe a resposta ou não conhece. Nos turnos 6 [*o que mais você sabe deste rio?*], 16 [*Perigosa? Por que A9?*], 19 [*o que é isso?*] e 24 [*explique melhor...*] a professora questiona no sentido de *perceber* e *reconhecer* as idéias e conhecimentos dos alunos. Estas questões e as contribuições oriundas destas, auxiliaram os alunos a elaborar suas concepções, e a professora e os outros participantes a *perceber* e *reconhecer* o objeto de pesquisa.

As contribuições dos alunos ainda podem ser consideradas como um tipo de *posicionamento*, visto que nelas os alunos expõem o que consideram sobre a importância do Rio Limoeiro e sobre a importância do cálcio. Neste *Episódio* não consideramos que os alunos estejam defendendo suas idéias, porém tornam público o que pensam a respeito destes elementos. A fala de A13 no turno 23 [*Mas o cálcio também é bom para a saúde*] evidencia bem este ato. A aluna posiciona-se diferentemente do que vinha sendo argumentado até o momento. A articulação das duas perspectivas faz com que a professora realize uma síntese final no turno 28 [*então o cálcio é bom, mas não pode ser em excesso certo?*] utilizando as duas perspectivas. Estes posicionamentos conduzem os alunos a atribuírem importância à investigação da situação: analisar a concentração de cálcio em diferentes profundidades de um rio importante para a cidade. Deste modo, interpretamos estes atos como *posicionar-se*.

O ato de *reformulação* pode ser observado no turno 11 [*certo... a água do Rio Limoeiro é uma das fontes de abastecimento de Londrina. Uma das né? Tem outras. Alguém sabe de mais alguma?*] quando a professora indica um entendimento e convida aos demais a uma reflexão. O último ato que inferimos estar presente nesta interação é o ato de *avaliar*, que segundo Alro e Skovsmose consiste em um conselho, um apoio, elogio, crítica ou *feedback*. As falas da professora nos turnos 11 [*certo... a água do Rio Limoeiro é uma das fontes de abastecimento de Londrina*], 13 [*certo.. obrigada*] e no turno 30 [*ok pessoal...*] são classificadas como uma avaliação da professora, aceitando as contribuições construídas em interação.

A presença destes atos dialógicos, indica que esta interação contempla os aspectos considerados importantes para a promoção do diálogo conforme argumentações de Alro e Skovsmose (2006): propõe aos alunos uma investigação, corre-se riscos e promove a igualdade (quando a professora apresenta-se como uma integrante do grupo e não como uma figura autoritária de sala de aula).

Diante do exposto consideramos que esta interação constitui um *diálogo* (como o apresentado nesta pesquisa em termos de Alro e Skovsmose, 2006) e deste modo, favorece a aprendizagem do indivíduo.

Poderíamos ainda interpretar as falas de A1 nos turnos (2) [então é hoje que começo a ficar famoso!!] e (31) [to gostando desta aula de matemática..] como uma forma de *pensar alto*, sendo que, suas colocações não tem contribuição para o entendimento da situação, apenas apresentam seu sentimento em relação à atividade proposta. Percebe-se na reação da turma que outros alunos pensam da mesma maneira. Como estas colocações de A1 não contribuem para o desenvolvimento da atividade em si, não salientamos as mesmas como constituintes do diálogo em questão, mesmo porque, retirando-se suas falas (2 e 31) a interação não sofre alterações.

Quanto às condições apresentadas por Noreen Webb e Anna Sfard consideramos que este *Episódio* não oferece subsídios para analisá-las, não sendo possível observar uma solicitação de ajuda, um acordo comunicacional ou a análise focal.

A Figura 5 mostra um resumo da análise específica deste *Episódio*.

Figura 5 – Resumo da análise da interação apresentada no Episódio1

<i>Episódio 1</i>	Análise
Interação Dialógica/ de autoridade	<i>Dialógica</i>
Padrões de interação ⁴²	I_T R- P_T R- R- P_T R- S_T e P_T - R- A_T . I_T -R -R - P_T -R -R - P_T -R - P_T -R - R- P_T - R-R - P_T - S_T .
Diálogo	<i>Sim.</i>
Atos dialógicos	<i>Estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, reformulação e avaliar.</i>
Condições elencadas por Noreen Webb	<i>Não analisada</i>
Condições elencadas por Anna Sfard	<i>Não analisada</i>

Resumo da análise da interação apresentada no *Episódio 1*.

A leitura do texto da Figura 3 e a análise dos dados quantitativos desta figura conduziram a ‘matematização’ nesta atividade, conforme revela o *Episódio 2*.

Episódio 2

Prof: Então, temos os dados que nos foram fornecidos, o que vamos fazer para determinar o modelo que represente o comportamento destes dados?

A11: temos que encontrar a função que melhor se ajusta ‘prof’.

Prof: E como vamos fazer isso?

A11: do jeito que fizemos com o problema da roda gigante (*a aluna esta se referindo a uma situação-problema que foi desenvolvida como uma iniciação ao processo de MM*). Vamos por os pontos no gráfico e ver a tendência...que função que ‘parece’.

Prof: Alguém tem outra idéia?

A14: acho que é isso mesmo, vamos por primeiro no gráfico e ver o que ‘dá’.

Prof: ok, vejam a tendência dos dados e tentem construir uma hipótese sobre os dados.

Consideramos que esta interação está mais próxima do extremo ‘dialógico’ do continuum dialógico/de autoridade visto que a professora procura

⁴² Na apresentação dos padrões de interação utilizaremos I para Iniciação, R para resposta, A para avaliação, P para prosseguimento e S para Síntese e um índice (T) acompanhando estas siglas quando a fala for da professora. Nas falas dos alunos não utilizamos índice. Deste modo, as falas não acompanhadas de índice significam falas dos alunos.

explorar as idéias dos alunos solicitando a sugestão de uma metodologia adequada. Deste modo, a professora dá ‘voz’ aos alunos, considerando suas idéias pertinentes à situação. O padrão de interação gerado é uma cadeia como se segue:

Turno	1	2	3	4	5	6	7
Tipo de interação	I _T	R	P _T	R	P _T	R	A _T

O prosseguimento elaborado pela professora no turno 3 é do tipo ‘prosseguimento de processo’ exigindo explicações da aluna. Provavelmente quando A11 emite sua resposta no turno 2 a mesma já pensava no procedimento esclarecido no turno 4, entretanto isto não ficou claro para a professora e provavelmente, nem para os colegas. Deste modo, o prosseguimento da professora exigiu uma reformulação de suas idéias, gerando a cadeia de interação não triádica.

Não percebemos a aprendizagem matemática neste momento, pois, ao que nos parece, as alunas apenas responderam algo de que já tinham conhecimento. Neste sentido consideramos que não temos subsídios para analisar as condições propostas por Noreen Webb e Anna Sfard para esta interação.

Quanto a ser considerada um diálogo, esta interação procura estabelecer a igualdade quando a professora solicita aos alunos sugestões e idéias, além do convite à investigação e à possibilidade de correr riscos, fatores estes inerentes ao diálogo. Além disso, os atos dialógicos *estabelecer contato*, *perceber* e *avaliar* estão presentes nesta interação, e sendo assim, caracterizamos esta interação como um *diálogo*. Na Figura 6 apresentamos um quadro com o resumo desta análise quanto à interação descrita no *Episódio 2*.

Figura 6 –Resumo da análise da interação apresentada no Episódio2

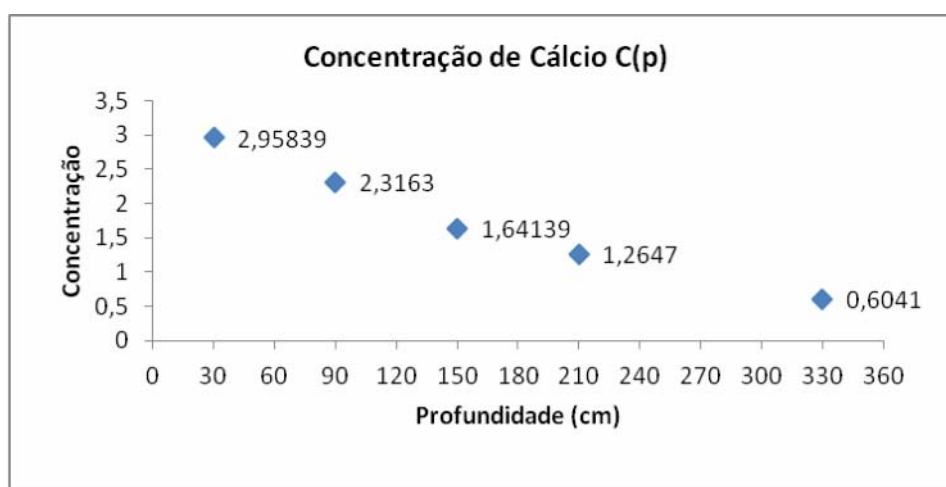
<i>Episódio 2</i>	Análise
Interação Dialógica/ de autoridade	<i>Dialógica</i>
Padrões de interação	<i>I_T R- P_T -R -P_T -R -A_T</i>
Diálogo	<i>Sim.</i>
Atos dialógicos	<i>Estabelecer contato, perceber e avaliar.</i>
Condições elencadas por Noreen Webb	<i>Não analisadas</i>
Condições elencadas por Anna Sfard	<i>Não analisadas</i>

Resumo da análise da interação apresentada no *Episódio 2*.

A partir da interação apresentada no *Episódio 2* os alunos fazem um esboço do gráfico em suas anotações e, para auxiliá-los em sua visualização, a professora apresentou a tendência dos dados dispostos na planilha de cálculo Excel, como apresentada na Figura 7⁴³.

Tendência dos dados: Concentração de cálcio em relação à profundidade do rio

Figura 7 – Tendência dos dados: concentração de cálcio em relação à profundidade do rio



O *Episódio 3* (descrito na sequência) apresenta a interação ocorrida entre os alunos do Grupo 3, logo após a representação gráfica da tendência dos dados.

Episódio3

A9: olha aqui... no começo parece linear... (mostrando os três primeiros pontos do gráfico apresentado na Figura 7).

A10: mas aqui tá longe... não dá 'prá' ser uma reta... (mostrando o último ponto representado na tendência dos dados).

A9: ah... dá 'prá vê' se é linear. É só ver a variação. Se for igual é linear né?

A10: a taxa de variação? Como assim?

A9: é... a variação da concentração em relação à profundidade.... se for constante é linear...

A10: então vamos calcular...

⁴³ Esta figura foi construída pela professora utilizando computador em sala de aula e data-show para sua apresentação.

Neste momento o grupo realiza a análise dos dados para orientá-los na definição da hipótese, encontrando a taxa média da concentração de cálcio em relação à profundidade, apresentada na Tabela 2.

Taxa média da concentração de cálcio em relação à profundidade

Tabela 2 – Taxa média da concentração de cálcio em relação à profundidade

Profundidade (p) (cm)	Concentração de Cálcio $C(p)$ (g/cm^3)	$\frac{\Delta C}{\Delta p}$
30	2,95839	-0,011
90	2,3163	-0,011
150	1,64139	-0,006
210	1,2647	-0,006
330	0,6041	0,002

De posse destes valores os alunos continuam a discussão:

A9: ó... parece linear porque a variação é “quase” constante. As duas primeiras são iguais, depois as outras duas também são. Será que não é linear? [indicando a terceira coluna da tabela 5].

A10: Mas dá um salto de -0,011 para -0,006. ...é grande... não pode ser.

A8: é.. parece muito...E se fosse linear aí ia chegar um momento, em uma profundidade, que seria negativa...não pode. Tá mais parecendo exponencial, não é? Aquela que vai diminuindo, diminuindo, mas não chega no zero.

A9: ó... a gente tem no livro: A taxa de variação é proporcional à quantidade... (escreve $\frac{\Delta C}{\Delta p} \cong kC$).

Caracterizamos este *Episódio* como uma interação dialógica, visto que os alunos levam em consideração as contribuições uns dos outros, complementando-as ou desafiando-as. A discussão foi no sentido de entender a situação para elaborar uma hipótese adequada para a mesma e assim, o padrão de interação, apresentado na sequência, sugere uma cadeia do tipo não-triádrica.

Turno	1	2	3	4	5
Tipo de interação	I	R, P	P	P	R

Turno	7	8	9	10
Tipo de interação	I _T	R	P _T	R

No turno 1 o aluno A9 inicia a interação, que vem acompanhada na sequência por uma contribuição de A10, que pode ser considerada como uma resposta ou um prosseguimento (P), desafiando a idéia de A9. No turno 3 o aluno A9 continua a conversação, complementando a idéia de A10 com sua opinião (*dá pra ver se é linear*) e em seguida faz uma nova intervenção no sentido de prosseguimento (*é só ver a variação. Se for igual é linear né?*).

Nos turnos de 7 a 10 também observamos uma sequência não-triádica, composta de uma iniciação, resposta, prosseguimento e resposta. O que se observa com clareza nesta interação é a colaboração entre eles, a consideração que cada um faz em relação às contribuições do outro. Assim, mais de uma voz é ouvida e considerada no entendimento do problema e conseqüentemente na construção da hipótese.

Consideramos a iniciação efetuada por A9 no turno 1 [*olha aqui... no começo parece linear...*] como uma iniciação de meta-processo, que conduz os participantes a uma reflexão da situação, gerando assim a cadeia que observamos.

Em relação aos atos dialógicos, consideramos que os alunos *estabelecem contato* chamando a atenção um do outro para o que estavam observando, com expressões do tipo '*olha aqui*', '*né?*', '*não é?*', '*ó*'. O tipo de conversação indica que estão '*falando a mesma língua*', que estão preocupados com o entendimento da situação e a elaboração da hipótese. O ato de *perceber* também se faz presente quando, no turno 3, o aluno A9 fala de taxa de variação, conduzindo A10 a pensar nesta hipótese e também no turno 7, quando A9 chama a atenção para a possibilidade de ser linear. O ato de *posicionar-se* está presente o tempo todo nesta interação, cada aluno expondo sua perspectiva e compreensão da situação, e ainda, aceitando a do outro quando considera plausível. A10 e A8 argumentam nos turnos 8 e 9 que não consideram possível representar esta tendência dos dados como uma função linear e, mesmo sem declarar que concordou com as considerações dos colegas, no turno 10, o aluno A9 aceita a hipótese de que os dados não podem ser representados (para a situação em estudo) por uma função do primeiro grau e assim parte para a procura de uma '*lei*' que rege a situação.

Além disso, os alunos *reconhecem*, nos turnos 3, 4 e 5, que podem utilizar a taxa de variação para verificar se a função pode ser representada por uma função linear. Os discursos destes alunos nos turnos 1, 2 e 9 ainda podem ser

considerados como *pensar alto*, como se estivessem falando consigo mesmo. Este ato faz com que o outro reavalie sua perspectiva ou argumente contrário ao que o colega está pensando. Ainda observamos no turno 5 uma *reformulação* de A9 da sua fala emitida no turno 3. A declaração de A10 no turno 8 [*Mas dá um salto de -0,011 para -0,006. ...é grande... não pode ser*] nos sugere um *desafio*, onde A10 propõe uma mudança de perspectiva sugerindo que a situação não pode ser representada por uma função linear.

Deste modo, consideramos que os atos dialógicos *estabelecem contato, perceber, posicionar-se, reconhecer, pensar alto e reformular* estão presentes nesta interação, e ainda que a mesma promove uma investigação, a igualdade e a possibilidade de correr riscos, e neste sentido a caracterizamos como um *diálogo*.

A9 inicia o diálogo convidando seus colegas e a si mesmo a observarem o que ocorre com a tendência dos dados, conjecturando que a situação pode ser aproximada por uma função linear [*olha aqui... no começo parece linear...*]. As contribuições de A10 (nos turnos 2: *mas aqui tá longe... não dá 'prá' ser uma reta...* e 8: *Mas dá um salto de -0,011 para -0,006. ...é grande... não pode ser*) e de A8 (no turno 9: *é.. parece muito...E se fosse linear aí ia chegar um momento, em uma profundidade, que seria negativa...não pode. Tá mais parecendo exponencial, não é?*) conduzem o grupo a compreender que a situação fica melhor representada considerando que a taxa de variação não é constante.

Observa-se ainda que toda questão (declaração pró-ativa) recebe uma resposta ou contribuição do colega (declaração reativa), indicando que os participantes estão focados no discurso como sugerido por Anna Sfard.

Também percebemos que os alunos se revezavam em declarações pró-ativas e reativas, indicando a preocupação em responder às declarações dos colegas como também questionar, ora instigando o grupo a pensar, ora apresentando uma dúvida específica, e ao mesmo tempo mantendo a comunicação ativa.

Quanto à análise focal, constatamos que os focos pretendido, declarado e observado parecem ser coincidentes, conduzindo os interlocutores ao entendimento. No turno 1 (*olha aqui... no começo parece linear...*), A9 aponta para os três primeiros pontos do gráfico e, mesmo sem declarar o que está querendo dizer, o foco observado está de acordo com seu foco pretendido. O aluno A10

parece ter compreendido o que A9 pretendia com sua fala pois responde ao colega argumentando que outros pontos também devem ser levados em consideração (*mas aqui tá longe... não dá 'prá' ser uma reta..*).

Ainda podemos observar que, nesta interação, as idéias dos alunos são respondidas e/ou completadas pelos outros, os participantes do grupo interagem no sentido de responder às questões dos colegas e o grupo chega a um consenso de que a variação da concentração em relação à profundidade não deve ser considerada constante.

Deste modo, segundo a teorização de Anna Sfard apresentada em 3.3, inferimos que a interação apresentada neste *Episódio 3* favorece a aprendizagem, ou seja, a comunicação foi efetivada, pois, os alunos mantêm o foco no discurso, interagem com declarações tanto pró-ativas quanto reativas, indicando a preocupação em construir uma hipótese, sendo que seus focos pretendido, declarado e observado parecem ser coincidentes.

A única solicitação de ajuda que percebemos foi no turno 4, emitida por A10. Neste turno o aluno solicita ajuda e é prontamente atendido por A9 no turno 5. A ajuda oferecida por A9 parece ter sido suficiente para o entendimento de A10, visto que, na sequência (turno 8) a argumentação de A10 indica entendimento da situação. Na Figura 8 apresentamos um quadro-resumo da análise do *Episódio 3*.

Figura 8 – Quadro resumo da análise do Episódio 3

<i>Episódio 3</i>	Análise
Interação Dialógica/ de autoridade	<i>Dialógica</i>
Padrões de interação	<i>I-R-P-P-R</i> (todas de alunos) <i>I_T-R-P_T-R</i>
Diálogo	<i>Sim.</i>
Atos dialógicos	<i>estabelecer contato, perceber, posicionar-se, reconhecer, pensar alto e reformular</i>
Condições elencadas por Noreen Webb	<i>satisfeitas</i>
Condições elencadas por Anna Sfard	<i>satisfeitas</i>

Quadro resumo da análise do *Episódio 3*.

O problema que é revelado neste *Episódio 3* é que os alunos não constroem, por meio da observação dos dados, a hipótese de que a taxa de

variação da concentração é proporcional à concentração em cada profundidade. O grupo chega apenas à conclusão de que a variação não poderia ser considerada constante e pensando em um modelo exponencial busca no livro um modelo que resultaria na hipótese construída. Deste modo, a partir da idéia do livro o grupo considera a hipótese $\frac{\Delta C}{\Delta p} \cong kC$, ou seja, a variação da concentração de cálcio em relação à profundidade é proporcional à quantidade de cálcio, sem, no entanto, terem construído esta hipótese. Como neste momento a professora estava acompanhando este grupo, iniciou uma conversa no sentido de conduzi-los a um entendimento do que estavam utilizando.

Prof: Por que vocês estão utilizando este modelo?

A9: a gente acha que não pode ser linear, então procuramos no livro a taxa de variação da função que vai diminuindo mas não chega no zero. É a exponencial né?

Prof: mas vocês calcularam esta variação para ver se fica bom?

A9: não...

Prof: então como podem usar esta hipótese? Baseado em que?

A9: a gente viu que poderia ser linear... com estes dados... mas não pode porque ia ficar negativa em uma profundidade... não pode. Tem que chegar perto do zero, mas não pode dar zero. Então a gente viu no livro.

Prof: ok, mas tem que ver se esta hipótese (apontando para $\Delta C / \Delta p \cong kC$) serve para estes dados.

A9: como??

Prof: O que significa isso? (apontando para $\frac{\Delta C}{\Delta p} \cong kC$).

Alunos: Como 'prof' ? [não foi possível identificar o aluno]

Prof: o que significa este k neste modelo?

A9: é uma constante.

Prof: ok... se a gente isolar esta constante, fica assim né? [escrevendo no quadro $(\Delta C / \Delta p) / C \cong k$].

Alunos: ahã, certo...

Prof: e o que significa isso?

A8: que a variação... essa que a gente já achou...se a gente dividir pela concentração dá uma constante....

Prof: isso.. então é isso que a gente tem que ver... se a divisão de cada variação pela concentração naquela profundidade dá uma constante.

A8: igual em todas?

Prof: é... praticamente igual né?

A9: se for tudo igual aí... aí a gente pode usar esta hipótese?

Prof: é...

Consideramos que o *Episódio 4* está mais próximo do extremo 'de autoridade' do continuum dialógico- de autoridade, apesar de, no início (turnos 1 à 7)

o padrão de interação ser uma cadeia com iniciações, respostas e prosseguimento. A professora tenta neste início fazer com que os alunos compreendam a necessidade de analisarem os dados para só então construírem a hipótese. Como não vê sucesso em sua tentativa, a professora adota uma postura autoritária, como observamos nos turnos seguintes.

Nesta interação, a professora não se preocupa em investigar o ponto de vista dos alunos, sendo nítida a sua intenção de fazer com que os alunos percebam a necessidade de analisar a hipótese antes de aceitá-la e reconhecerem o conceito matemático subjacente à hipótese adotada. Neste sentido a professora conduz os alunos para que mudem o procedimento, procurando construir a hipótese ao invés de recorrer à um modelo pronto do livro, sem entender o motivo de estar utilizando este modelo. A professora procura fazer com que entendam o motivo pelo qual a hipótese pode ser esta que estão sugerindo. Assim, sugere que mudem a direção, primeiro analisando os dados e depois concluindo que os dados sugerem esta hipótese. O padrão de interação constitui um jogo de perguntas. Nota-se que o modo de condução da professora é responsável pelo tipo de interação estabelecida (dialógica/de autoridade) e pela geração de padrões de interação. De acordo com seu objetivo a professora estabelece, por meio de questões abertas ou não, um tipo de interação.

No início da conversação a professora procura, nos turnos 1 e 3 reconhecer a estratégia utilizada pelos alunos, e no turno 5 tenta *perceber* suas perspectivas. Apesar da presença destes atos dialógicos (reconhecer e perceber) consideramos que dois aspectos importantes do diálogo, que consistem em 'promover a igualdade' e 'correr riscos' não estão presentes nesta interação. A professora assume nitidamente sua posição de 'autoridade' em sala de aula, questionando os alunos e avaliando suas respostas com outras questões, sem considerar o ponto de vista dos alunos.

Um fato importante para a atividade de Modelagem Matemática como um *contexto-simulado* é a constatação dos alunos de que, mesmo os dados sugerindo uma aproximação para um modelo linear, o mesmo não poderia ser aceito, visto que trabalham com variáveis que não aceitam valores negativos. Lógico que o Domínio da função poderia ser limitado, porém, a professora não discutiu este assunto com os alunos, provavelmente passando-lhe despercebida esta possibilidade.

A argumentação dos alunos para o descarte do modelo linear, vai ao encontro do propósito da Modelagem Matemática enunciado por Bassanezzi (2002, p.56): “obter uma relação funcional que comporte em seus parâmetros qualidades ou significados inerentes ao fenômeno analisado e para isto se faz necessário um estudo detalhado do próprio fenômeno”. O entendimento da situação-problema conduz os alunos à refutação da primeira hipótese, visto que o fenômeno estudado não comporta valores negativos para a concentração. Esta refutação é uma característica da Modelagem Matemática como um *contexto-simulado*: o problema em estudo trata de uma situação real na qual o fenômeno como um todo deve ser analisado antes de aceitar uma hipótese matemática válida.

Faz parte das ações do aluno em atividades de modelagem em sala de aula entender a situação e formular hipóteses não apenas com referência aos dados e sim levando em consideração as restrições que o fenômeno apresenta. A oportunidade de estabelecer hipóteses com base no conhecimento da situação é possível graças às características da atividade: uma situação ‘reconhecível’ pelos alunos e do interesse de um engenheiro ambiental. Este *contexto-simulado* oportuniza autonomia ao aluno de modo a proporcionar oportunidade de apresentarem suas perspectivas e hipóteses, além do conhecimento matemático e da situação.

Quanto às condições sugeridas por Anna Sfard consideramos que a professora e os alunos efetivaram uma comunicação propícia à aprendizagem pois parecem estar se entendendo, sendo que os focos pronunciado e observado da professora condizem com seu foco pretendido e parece ser entendido pelos alunos. Deste modo, inferimos que a comunicação com vistas à aprendizagem foi efetivada.

No turno 8 o aluno A9 questiona a professora no sentido de entender como construir a hipótese. Esta solicitação de ajuda é aceita pela professora que nos turnos seguintes oferece explicações de como proceder. A ajuda oferecida pela professora parece ter sido compreendida por A9 pois na sequência o aluno, juntamente com o restante do grupo, procede de maneira adequada. Deste modo, consideramos que as condições elencadas por Noreen Webb foram satisfeitas. Na Figura 9 apresentamos um quadro-resumo da análise deste episódio.

Figura 9 – Quadro-resumo do Episódio 4

<i>Episódio 4</i>	Análise
Interação Dialógica/ de autoridade	<i>De autoridade</i>
Padrões de interação	<i>I-R-A</i>
Diálogo	<i>não</i>
Atos dialógicos	<i>Reconhecer e perceber</i>
Condições elencadas por Noreen Webb	<i>satisfeitas</i>
Condições elencadas por Anna Sfard	<i>satisfeitas</i>

Quadro-resumo do *Episódio 4*

Acompanhando os demais grupos, a professora pode observar que a definição da hipótese representava dúvida para todos, e diante disto, realizou a intervenção, apresentada no *Episódio 5*.

Prof: pessoal, o que vocês observaram na tendência dos dados?

A7: poderia ser uma reta 'prof' mas não pode.. (o aluno explicou novamente os motivos para esta conclusão).

Prof: tá. Vocês estão certos. A tendência dos dados sugere uma função do primeiro grau. O cálculo da taxa de variação média confirma esta hipótese, ou seja, a taxa de variação média é praticamente constante. Mas pelo que a gente conhece do fenômeno, por tratar-se de uma situação real, a gente sabe que não pode utilizar esta hipótese. *(Ao mesmo tempo em que a professora falava escrevia no quadro uma tabela com os valores da concentração, da profundidade e da taxa de variação média).*

Prof: Então, o que a gente pode fazer agora é analisar se a taxa de variação da concentração em relação à profundidade é proporcional

à concentração. Se for, então podemos utilizar o modelo $\frac{\Delta C}{\Delta p} = kC$.

Como os alunos reagiram demonstrando não entendimento, a professora continuou explicando e escrevendo no quadro.

Prof: assim ó: vocês já calcularam $\frac{\Delta C}{\Delta p}$ certo? Agora isolem k, como fica?

A9: dividindo...

Prof: você não vale...(rindo). Eu já expliquei prá eles. Olha pessoal, é isso que A9 falou, dividam todas as variações por cada concentração correspondente e se for constante significa que é proporcional a C.

Aí a gente pode usar a hipótese $\frac{\Delta C}{\Delta p} = kC$, ok? Onde k é a constante de proporcionalidade.

A9: vai dar certo...(rindo).

Prof: ok.. ele já contou... Mas se não desse constante, a gente teria que analisar outras hipóteses, ok?

Como no *Episódio* anterior, esta interação está mais próxima da interação de autoridade, uma vez que a professora tinha a intenção de introduzir um procedimento para determinar a hipótese. Outras vozes não são ouvidas nesta interação e o padrão de interação condiz com a interação de autoridade, ou seja, o padrão triádico: I-R-A (ou Síntese). No turno 3 a professora até utilizou em sua síntese a fala dos alunos, o ponto de vista dos alunos, mas não avançou quanto a isso. Foi apenas uma maneira de confirmar o que todos já estavam considerando, ou seja, uma reformulação do que o aluno falou. Em uma sequência de nove turnos, apenas três deles são dos alunos, sendo que uma delas foi uma brincadeira (turno 8). Deste modo, caracterizamos esta interação como 'de autoridade' no continuum dialógico/de autoridade.

Consideramos ainda que esta interação não constitui um *diálogo*, como o caracterizado por Alro e Skovsmose (2006), visto que, a questão elaborada pela professora no turno 1, apesar de sugerir que a mesma estaria interessada na perspectiva dos alunos, tinha o claro objetivo de iniciar suas argumentações. No restante da interação a professora orienta os alunos no sentido de introduzir os conceitos matemáticos necessários para a solução do problema. Vale salientar que, mesmo não sendo caracterizada como um diálogo, a fala da professora no turno 3 revela considerações importantes para o desenvolvimento de atitudes de reflexão quanto à situação-problema e a elaboração de hipóteses, pois ela fala implicitamente sobre a importância de não se orientar apenas pelo que apresenta a tendência dos dados, observando que é essencial que pensem no conjunto, que analisem o fenômeno como um todo, antes de adotar uma perspectiva. Entretanto, esta é a única fala que sugere uma característica de diálogo. Faz parte das ações dos alunos em atividades de Modelagem Matemática questionar, problematizar, sugerir, bem como analisar os dados, a situação e todas as suas restrições, considerando-as quando julgarem necessário e pertinente. Nesta fala a professora enfatiza a necessidade destas ações em atividades de Modelagem Matemática.

Mais uma vez, as condições apontadas por Noreen Webb e Anna Sfard não podem ser analisadas, visto que os alunos não solicitam ajuda em nenhum momento (talvez porque a professora não ofereceu oportunidade para isto). A Figura 10 apresenta um quadro-resumo da análise realizada para este episódio.

Figura 10 – Quadro-resumo da análise do Episódio 5

<i>Episódio 5</i>	Análise
Interação Dialógica/ de autoridade	<i>De autoridade</i>
Padrões de interação	<i>I-R-A</i>
Diálogo	<i>não</i>
Atos dialógicos	
Condições elencadas por Noreen Webb	<i>Não analisada</i>
Condições elencadas por Anna Sfard	<i>Não analisada</i>

Quadro-resumo da análise do *Episódio 5*

Com a intervenção da professora os grupos consideraram a hipótese

$$\frac{\Delta C}{\Delta p} \cong kC$$

. O fato de terem concluído que a hipótese seria válida para os dados em questão indica que os alunos compreenderam o conceito matemático subjacente a este processo. Para escrever esta hipótese em linguagem matemática, utilizando a idéia de variável contínua, inerente à idéia de Equações Diferenciais, foi necessária a orientação da professora para que o grupo apresentasse a Equação Diferencial:

$$\frac{dC}{dp} = kC$$

. Esta orientação ocorreu de forma não-interativa, ou seja, a professora dirigiu-se à frente da turma e apresentou a necessidade de escrever a hipótese utilizando variáveis contínuas.

O modelo $\frac{dC}{dp} = kC$ representa uma Equação Diferencial Ordinária com variáveis separáveis. Como os alunos ainda não tinham estudado a resolução de equações deste tipo, a professora aproveitou este momento para introduzir o assunto e com a orientação realizada de forma não-interativa, o grupo resolveu a equação. A Figura 11 apresenta um recorte das anotações de um aluno do Grupo 1

no momento de encontrar a solução para a Equação Diferencial $\frac{dN}{dp} = -kN$. Observamos que este grupo já considerou o decrescimento dos dados na representação matemática inicial e, portanto, inseriram o sinal negativo no segundo termo da equação.

Figura 11 – Resolução da equação diferencial pelo Grupo 1

Profundidade (cm)	Concentração de cálcio
30	2,958397
90	2,3163
150	1,64139
210	1,2647
330	0,6041

$$\frac{dN}{dp} = -kN \quad N = Ce^{-kp}$$

$$\frac{dN}{N} = -k dp$$

$$\ln N = -kp$$

Resolução da Equação Diferencial pelo Grupo 1

A partir da solução encontrada $N(p) = C \cdot e^{kp}$, C e $k \in \mathbb{R}$ (para os Grupos 1, 2 e 4) e $C(p) = N \cdot e^{kp}$, N e $k \in \mathbb{R}$ (para o Grupo 3) os alunos mobilizaram-se para encontrar os parâmetros N e k . Para a determinação destes parâmetros todos os grupos substituíram, primeiramente, dois pontos do conjunto de dados e, após a validação, consideraram que a diferença entre os dados observados e dados estimados era grande. O Grupo 1 realizou duas tentativas substituindo valores, as quais foram denominadas por eles de ‘teste 1’ e ‘teste 2’. Os recortes do material produzido pelos alunos, apresentados nas Figuras 12 e 16, mostram estes ‘testes’. Para este grupo, C e k representam os parâmetros do modelo a serem encontrados, p é a profundidade do rio e $N(p)$ representa a concentração de cálcio em função da profundidade.

Figura 12 – Primeira tentativa de determinação dos parâmetros pelo Grupo 1

TESTE ①

$$N = Ce^{-kp}$$

(I) $2,958397 = e^{-k \cdot 30} \cdot C \rightarrow \ln 2,958397 = \ln e^{-k \cdot 30} \cdot C \rightarrow \ln 2,958397 = \ln e^{-k \cdot 30} + \ln C$

(II) $2,3163 = e^{-k \cdot 90} \cdot C$

(I) $1,084 = -k \cdot 30 + \ln C \quad \times (-1)$

(II) $0,839 = -k \cdot 90 + \ln C$

$$-0,245 = -60k$$

$$k = \frac{0,245}{60} \quad k = 0,00408$$

(I) $1,084 = -0,00408 \cdot 30 + \ln C$

$\ln C = 1,2064 \quad C = 3,3414$

logo

$$N = 3,3414 e^{-0,00408p}$$

O *Episódio 6* apresentado a seguir exhibe a discussão do Grupo 1 para determinar os parâmetros C e k .

A1: Agora temos que achar C e k . (Após encontrarem o modelo

$$N(p) = C.e^{-kp}.$$

A3: Como?

A2: é só substituir pontos.

A3: Como assim?

A2: pega um ponto e substitui a concentração e a profundidade

A3: Mas aí sobra o C e k ainda.

A2: tem que substituir dois pontos e fazer um sistema, porque tem duas incógnitas.

A3: ah... aí dá certo né?

A1: então tá... qual ponto?

A2: qualquer um.. pega o primeiro e segundo. (Referindo –se aos pontos A(30; 2,958397) e B (90; 2,3163).

A1: ok. Aí... (vai falando e escrevendo a equação com os valores substituídos, montando o sistema).

A4: (até este momento não tinha falado coisa alguma em relação ao procedimento para determinar os parâmetros). E como a gente vai isolar o k ? Ele tá no expoente.

A2: hum.. vai ter que ser por \ln né A1?

A1: é... coloca \ln dos dois lados prá voltar o que era antes.

$$A4: \text{aí fica } \ln 2,958397 = \ln.(e^{-k.30}.C) ?$$

A1: é. Agora usa a propriedade de \ln e faz essa multiplicação ‘virar’ soma. [Mostrando $\ln.(e^{-k.30}.C)$]

$$A4: \text{Assim? (Mostra } \ln.e^{-k.30} + \ln C).$$

A1: é. Tem que fazer a mesma coisa na outra equação tá?

A4: tá. Entendi.

Alguns segundos de silêncio enquanto montam o sistema.

A3: Posso multiplicar por (-1) e cortar o $\ln C$?

A2: Pode. Aí acha o k , certo?

A3: certo.

Silêncio por alguns instantes.

A3: Meu k deu 0,00408 e o seu?

A1: também.

A4: certo. Agora volta aqui e acha o C ? (mostrando a equação I apresentada na Figura 12).

A1: o C não...o $\ln C$. Depois tem que achar o C ... quanto deu o $\ln C$ A2?

A2: ‘Péra aí’

A3: o meu deu 1,2064.

A1: ok.

A4: certo.

A1: então $C = 3,3414$ certo?

A4: como???

A1: ó... achamos o $\ln C = 1,2064$ aí, aplicando a definição a gente acha $C = 3,3414$ certo? (mostrando para A4 os cálculos realizados por ele).

A4: hã... deixa eu fazer, péra aí. (encontra o valor de C por meio da definição de logaritmos).

A4: ok, deu certo. Então fica $N = 3,3414.e^{-0,00408p}$ certo?

A2: certo.

A1: conseguiu A3?

A3: ahã. O meu também deu isso. Tá certo!. Pronto acabou!!

Observamos que no turno 1, o aluno A1 inicia a conversação convidando todos a pensarem em uma estratégia de resolução para determinar os parâmetros do modelo matemático. No turno 2 o aluno A3 solicita ajuda e inicia com A2 uma comunicação até o turno 8, que resulta em uma afirmação de entendimento por parte de A3. A ajuda oferecida por A2 pode ser considerada eficaz para A3, sendo confirmada pela observação das gravações e das nossas observações presenciais onde constatamos o desenvolvimento do restante do trabalho por A3, até que no turno 20 este aluno (A3) faz outro questionamento e também recebe ajuda.

Quanto a A4, observamos que em (12) este aluno solicita ajuda [*E como a gente vai isolar o k? Ele tá no expoente*] e a obtém de A2 e A1. A declaração de A4 em (15) [*aí fica $\ln 2,958397 = \ln.(e^{-k.30}.C)$?*], indica que ele compreendeu a ajuda, o que leva seus companheiros a continuarem a oferecer ajuda, até que, no turno (19), A4 indica que a compreendeu: [*tá. Entendi*], levando-o a desenvolver o restante do seu trabalho. No turno 32 o aluno A4 apresenta outra dúvida: [*como?*], recebendo-a no turno 33 para em seguida aplicá-la e apresentar um resultado correto. Deste modo, consideramos, que as condições propostas por Noreen Webb para que uma interação favoreça a aprendizagem foram satisfeitas nesta interação.

Em relação às condições para a efetividade da comunicação com vistas à aprendizagem apresentadas por Anna Sfard, consideramos que a comunicação apresentada neste *Episódio* foi efetivada. Existe um fluxo contínuo de declarações pró-ativas e reativas entre A3 e A2 (de 2 à 8) conduzindo A3 ao entendimento, o mesmo acontecendo com A4 quando é ajudado por A1 e A2 (nos intervalos dos turnos 12 à 19 e 32 à 34. Nota-se ainda a preocupação de A1 com o aprendizado dos colegas no turno 37. Os focos pretendidos, observados e pronunciados parecem estar em sintonia, uma vez que 'estão falando a mesma língua', o que os conduz à efetividade da comunicação. Além disso, implicitamente

foi realizado um acordo sobre o discurso principal e sobre os papéis dos interlocutores: A3 e A4 aceitam as explicações dos colegas, considerando-os como ‘instrutores’.

Caracterizamos ainda esta interação como um diálogo visto que, os alunos realizam uma investigação quando sugerem a substituição de pontos para determinar os parâmetros e correm os riscos relacionados com esta investigação. Além disto, os atos dialógicos *estabelecer contato*, *perceber* e *reconhecer* estão presentes nesta interação. No desenrolar da interação os alunos estabelecem contato e, entre os turnos 2 e 11, os alunos A1 e A3 percebem a perspectiva de A2 e reconhecem o procedimento matemático necessário e sugerido por este aluno. O mesmo acontece com A4 a partir do turno 12, quando reconhece o procedimento adotado (utilização da definição e propriedades do ln) pelos colegas.

No mesmo sentido, consideramos esta interação como sendo dialógica uma vez que observa-se que os alunos procuram entender o ponto de vista dos colegas e o levam em consideração em seu desenvolvimento. Observamos uma cadeia de interação entre os turnos 2 e 8 e outra cadeia entre os turnos 15 e 19, como se segue⁴⁴:

Turno	2	3	4	5	6	7	8
Tipo de interação	I	R	P	R	P	R	A

Turno	15	16	17	18	19
Tipo de interação	I	R	P	R	A

Na Figura 13 apresentamos um quadro resumo da análise deste episódio.

Figura 13 – Quadro-resumo da análise do Episódio 6

<i>Episódio 6</i>	Análise
Interação Dialógica/ de autoridade	<i>Dialógica</i>
Padrões de interação	<i>I-R-P-R-P-R-A</i> <i>I-R-P-R-A</i>
Diálogo	<i>sim</i>
Atos dialógicos	<i>estabelecer contato, perceber e reconhecer</i>

⁴⁴ Não consideramos necessário o índice indicando de quem é a fala visto que todas estas são falas dos alunos, sem a participação da professora.

Condições elencadas por Noreen Webb	Satisfeitas
Condições elencadas por Anna Sfard	Satisfeitas

Uma vez encontrado o modelo, os alunos realizam a validação, apresentada na Tabela 3, utilizando a planilha de cálculo Excel e consideram a porcentagem de erro grande para seus propósitos, observando que, para os primeiros valores o modelo poderia ser considerado satisfatório, porém, na medida em que a profundidade vai aumentando a diferença entre os dados observados e dados estimados pelo modelo foi ficando cada vez maior.

Tabela 3 – Validação do modelo encontrado pelo grupo 1 por meio do ‘teste 1’

Profundidade (ρ) (cm)	Concentração de Cálcio $C(\rho)$ (g/cm^3)	Modelo encontrado	Erro (%)
30	2,95839	2,956451941	-0,066
90	2,3163	2,314491203	-0,078
150	1,64139	1,811925117	9,412
210	1,2647	1,418485681	10,842
330	0,6041	0,869349438	30,511

No *Episódio 7* apresentamos a discussão dos alunos após esta validação, a qual os conduziu a mudar a estratégia de determinação dos parâmetros.

A2: ih... deu erro...

A1: como assim?? (com uma fisionomia de assustado).

A2: a porcentagem de erro tá grande. Tá crescendo muito, olha. (*mostrando a validação apresentada na Tabela 6*).

A3: Quanto mais profundo maior o erro. Tem alguma coisa errada aí cara...Será que erramos nos cálculos?

A2: não pode ser... fizemos separados. Os resultados ‘bateram’.

A1: ué... será que é porque pegamos os primeiros pontos? Professora... (*chamam a professora*).

A1: olha... fizemos tudo certinho, a gente foi conferindo, mas o erro tá aumentando.

Prof: como vocês encontraram os parâmetros?

A1: Substituindo dois pontos.

Prof: dois pontos? Porque?

A1: porque é assim que faz... tem duas incógnitas.

Prof: mas como vocês escolheram os pontos para substituir?

A4: ah... pegamos qualquer um.

Prof: vocês tem certeza que é assim que determina k e C?

A4: ah... acho que sim...

A2: A1, e se a gente pegasse outros pontos?

A1: é... pode ser... é que pegamos os dois primeiros.. Pode deixar 'prof', vamos fazer outro.

Como a intenção da professora era que os alunos chegassem à conclusão de que a substituição de dois pontos conduziria a um modelo com erro percentual considerado grande, a mesma permitiu que realizassem seus testes para que chegassem a esta conclusão sozinhos.

O início da interação apresentada no *Episódio 7* (turnos 1 a 6) é caracterizado como uma interação *dialógica* no continuum dialógico/de autoridade pois os alunos 'ouvem' as considerações um do outro, complementando-as e considerando-as e ainda preocupam-se em fazer com que o *outro* preste atenção e compreenda o que se está fazendo. Observa-se ainda que no turno 4 o aluno A3 faz um convite aos demais para uma reflexão sobre as possíveis causas do que considera um 'insucesso'. Este convite é aceito por A2 e A1 na sequência.

Apesar da segunda parte do *Episódio* (turnos 7 à 17) sinalizar uma interação de autoridade, assemelhando-se a um jogo de perguntas, entendemos que a mesma também pode ser considerada dialógica uma vez que a professora ouve as perspectivas dos alunos, procurando *perceber* e *reconhecer* o que estavam realizando, atribuindo importância às suas contribuições. Mesmo a professora sabendo qual seria o procedimento considerado adequado, ela não desconsiderou ou não desaprovou o que os alunos estavam fazendo, de modo a não responder de imediato qual seria o procedimento considerado adequado para a situação, deixando-os chegar à conclusão sozinhos. No turno 16 o aluno A2 convida o aluno A1 à uma reflexão e propõe o *desafio* de mudar o procedimento, que é prontamente aceito por A1. Este convite à reflexão (elaborado por A2) surge após os questionamentos da professora e principalmente pela questão emitida no turno 12 [*mas como vocês escolheram os pontos para substituir?*] fazendo com que A2 entendesse que a escolha dos pontos necessita de mais atenção. As questões elaboradas pela professora conduzem os alunos a conjecturar que os pontos escolhidos poderia ser a fonte do erro. Mais uma vez nota-se a importância da atitude da professora no encaminhamento da interação. Consideramos que o padrão de interação estabelecido neste *Episódio* é o que segue.

Turno	2	3	4	5	6	7
Tipo de interação	I	R	P	P	P	S

Turno	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Tipo de interação	I _T	R	P _T	R	P _T	R	P	R	I	R

Este *Episódio* proporciona aos alunos uma reflexão sobre a confiabilidade dos procedimentos matemáticos, tendo em vista o entendimento do fenômeno. Esta confiabilidade foi colocada em xeque graças à necessidade de validação do modelo. Em nossas observações anotadas no diário de campo e nas gravações, temos constatado que os alunos consideram que a validação do modelo lhes permitiu entender erros em seus procedimentos. A Figura 14 mostra um recorte do questionário final de um aluno sobre a validação.

Figura 14 – Recorte do questionário final

<p>26) Uma das etapas da modelagem matemática é a validação. Nas atividades que você desenvolveu, alguma vez a validação mostrou um erro muito grande? <i>Sim</i></p> <p>Se sim, qual foi sua estratégia a partir de então?</p> <p><i>A partir daí, procedo-me verificações a partir vel causa e explicação do erro, para assim poder compreendê-lo e corrigir para encontrar uma solução aceitável.</i></p>
--

A interação em questão proporcionou um convite à investigação e a possibilidade de correr riscos inerentes a esta investigação, deste modo, caracterizamos esta interação como um *diálogo* e os atos dialógicos evidenciados são: *perceber, estabelecer contato, reconhecer, desafiar e avaliar*.

Observamos ainda no turno 6, que os alunos solicitam ajuda da professora e a ajuda oferecida por esta não constitui uma ajuda autoritária, uma resposta direta de como deveriam proceder. Em vez disso, a professora elabora questões do tipo processo que conduzem os alunos a questionarem o procedimento adotado. Neste sentido entendemos que a ajuda oferecida pela professora constitui-se uma ajuda elaborada, convidando-os a uma reflexão, conduzindo-os à mudança de perspectiva. Deste modo, as condições propostas por Noreen Webb foram satisfeitas neste episódio.

Quanto à análise focal, observamos que os focos pronunciados, observados e pretendidos dos alunos (e depois da professora) estão em sintonia. Todos estão falando do mesmo objeto, no caso, o erro percentual do modelo e os pontos escolhidos por eles para a determinação dos parâmetros. Deste modo, consideramos que nesta interação a comunicação foi efetivada, contribuindo para a aprendizagem de que a metodologia não seria adequada para a situação. Na Figura 15 apresentamos um quadro-resumo da análise do *Episódio 7*.

Figura 15 – Quadro-resumo da análise do Episódio 7

<i>Episódio 7</i>	Análise
Interação Dialógica/ de autoridade	dialógica
Padrões de interação	I-R-P-P-S I _T -R-P _T -R-P _T -R-P-R-I-R
Diálogo	sim
Atos dialógicos	<i>estabelecer contato, perceber, reconhecer, desafiar e avaliar</i>
Condições elencadas por Noreen Webb	satisfeitas
Condições elencadas por Anna Sfard	satisfeitas

Após esta conversação com a professora, o grupo substituiu outros pontos, a saber, os pontos C(150; 1,64139) e D(210; 0,12647), com o intuito de verificar se o modelo seria mais adequado. A Figura 16 apresenta um recorte do material dos alunos com a segunda tentativa para determinar os parâmetros, designada por este Grupo de 'teste 2'.

Observa-se que, tanto na primeira tentativa (teste 1) quanto na segunda (teste 2), o procedimento adotado foi o mesmo: substituiu-se dois pontos para determinar os parâmetros k e C . Após encontrarem o segundo modelo (Figura 16), o grupo novamente realizou a validação, utilizando a planilha de cálculo Excel (Tabela 4), e considerou que o mesmo continuava apresentando uma porcentagem de erro não satisfatória.

Figura 16 – Segunda tentativa de determinação dos parâmetros pelo Grupo 1

TESTE 2

$$\text{(I)} \quad 1,64139 = C e^{-k150} \quad \ln 1,64139 = \ln e^{-k150} \cdot C = \ln 1,64139 = \ln C^{-k150} + \ln C$$

$$\text{(II)} \quad 1,2647 = C e^{-k210} \quad \text{(I)} \quad 0,4955 = -k150 + \ln C \quad (-)$$

$$\text{(II)} \quad 0,2348 = -k210 + \ln C$$

$$-0,2607 = -60k$$

$$k = 0,00435$$

$$\text{(I)} \quad 0,4955 = -0,00435 \times 150 + \ln C$$

$$1,14 = \ln C \quad C = 3,14$$

logo $N = 3,1495 \cdot e^{-0,00435}$

Tabela 4 – Validação do modelo encontrado por meio do ‘teste 2’

Profundidade (p) (cm)	Concentração de Cálcio C(p) (g/cm ³)	Modelo encontrado	Erro (%)
30	2,95839	2,764179125	-7,026
90	2,3163	2,129194438	-8,788
150	1,64139	1,64007785	-0,080
210	1,2647	1,263320674	-0,109
330	0,6041	0,749569461	19,407

Neste momento os alunos recorreram novamente à professora com a conclusão de que “*alguma coisa estava errada...*” pois não adiantava mudar os pontos, o erro continua grande e o modelo parecia válido somente para os pontos que utilizaram para determinar os parâmetros. O *Episódio 8* apresenta esta discussão com os alunos do Grupo 1.

A1: ‘prof’ tem alguma coisa errada...

Prof: o que foi?

A1: olha, nós substituímos dois pontos para encontrar k e C, e deu errado, o erro tava grande (*mostra a primeira validação apresentada na tabela 6*). Depois substituímos outros pontos e o erro ainda tá grande (*mostra a segunda validação apresentada na tabela 7*). O o modelo ‘fica bom’ para os valores que a gente substitui para achar os parâmetros, mas não fica para os outros. O primeiro ficou bom para os dois primeiros pontos e o segundo para o terceiro e quarto, que foram os que a gente substituiu... assim não dá...

A2: ‘prá’ ficar bom para todos acho que tinha que substituir todos.. (*risos*).

A1: mas não dá... não dá prá substituir todos. Tem o sistema...

Prof: você acha que deveria substituir todos?

A2: aí ficava bom para todos né? (*risos*).

Prof: Olha A2, não dá prá substituir todos, mas podemos fazer um ajuste que leva em consideração todos os pontos.

A2: sério???

Prof: sério... Podemos fazer um ajuste que faz com que a diferença entre os dados reais e os dados do modelo seja mínima. Vocês lembram do Método dos Mínimos quadrados?

A1: já vi.. eu acho...

Prof: Então... este método leva em consideração todos os pontos. Posso explicar no quadro? (a professora optou por explicar para a sala toda pois tinha observado que todos os grupos estavam substituindo pontos e 'reclamando' que só 'dava certo' para os pontos substituídos).

Neste *Episódio*, ao mesmo tempo em que procura ouvir a 'voz' dos alunos, a professora oferece ajuda elaborada à solicitação de ajuda requerida pelos alunos. A reação do aluno A12 no turno 9 constitui-se um contentamento ao 'descobrir' que é possível levar em consideração todos os pontos⁴⁵. Para este aluno e para o restante do grupo, a utilização de todos os pontos seria a solução do problema. Nesse sentido consideramos que as condições propostas por Noreen Webb foram satisfeitas.

Consideramos que os alunos e a professora parecem estar em sintonia. No turno 3, o aluno A1 recorre às suas anotações o tempo todo, fazendo com que a professora acompanhe seu raciocínio. O aluno A1 fala sobre os 'erros' das validações (foco pronunciado) e aponta para as mesmas (foco observado). Podemos inferir que estes focos estão em sintonia com o foco pretendido de A1 que era exatamente falar sobre estes 'erros' e estas validações. O aluno A2 e a professora acompanham A1, o que sugere um entendimento do foco pretendido de A1. Além disso, implicitamente estabeleceu-se um acordo sobre o discurso principal, os papéis dos interlocutores e o curso necessário para a aprendizagem: todos concordam implicitamente sobre a necessidade de se utilizar 'todos os pontos' e aceitam a sugestão da professora (como instrutora) de utilizar o Método dos Mínimos Quadrados (M.M.Q). Deste modo, consideramos que as condições propostas por Anna Sfard foram satisfeitas nesta interação.

Caracterizamos esta interação como dialógica visto que a professora não impõe sua perspectiva ou seu ponto de vista antes de perceber as perspectivas dos alunos e considera esta perspectiva nas suas falas apresentadas nos turnos 8 e 10. O padrão de interação que consideramos é o que segue.

⁴⁵ O ar de contentamento do aluno pode ser visto nas gravações de vídeo.

Turno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tipo de interação	I _A	P _T	R	R	R	P _T	R	P _T	R	P _T	R	S _T

Esta interação sugere um diálogo visto que, além dos alunos empenharem-se em realizar uma investigação da situação e correr os riscos procedentes desta, os atos dialógicos *perceber*, *estabelecer contato*, *posicionar-se* e *reformular* estão presentes.

A professora assume um papel de participante da equipe quando tenta *perceber* as perspectivas dos alunos e suas justificativas na argumentação quanto à necessidade de utilizar todos os pontos. Os alunos *posicionam-se* apresentando seus pontos de vista e suas compreensões quanto à situação (nos turnos 3, 4, 5 e 7). Nos turnos 10 e 12 a professora reformula o que disse no turno 8, com o intuito de se fazer compreender pelos alunos, complementando e explicando o que falou no turno 8. A Figura 17 apresenta um quadro-resumo desta análise.

Figura 17 – Quadro-resumo da análise do Episódio 8

<i>Episódio 8</i>	Análise
Interação Dialógica/ de autoridade	<i>dialógica</i>
Padrões de interação	<i>I-P-R-R-R-P-R-P-R-P-R-S</i>
Diálogo	<i>sim</i>
Atos dialógicos	<i>estabelecer contato, perceber, posicionar-se e reformular</i>
Condições elencadas por Noreen Webb	<i>satisfeitas</i>
Condições elencadas por Anna Sfard	<i>satisfeitas</i>

As orientações da professora em relação ao uso do método dos mínimos quadrados geram interações conforme descreve o *Episódio 9*.

46

Prof: Pessoal,, prestem atenção aqui... Vocês não 'gostaram' do modelo encontrado utilizando a substituição de dois pontos né?

Alunos: (várias falas ao mesmo tempo, dizendo que o erro aumentava, que só ficava bom para os pontos substituídos, etc.)

Prof: pois é... não é que esteja errado, mas é que neste caso, o modelo está sendo determinado levando em consideração só estes

⁴⁶ Este *Episódio 9* é composto de 38 turnos, porém para melhor visualização do encaminhamento, e para melhor entendimento da análise o mesmo será dividido em três sub-episódios.

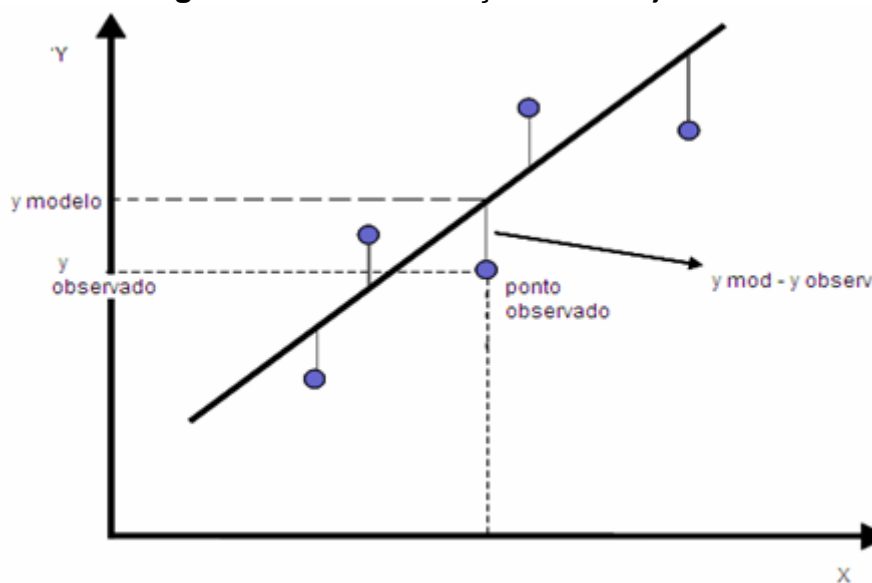
pontos, e como os outros não estão no conjunto de pontos deste modelo, o erro fica grande. O que a gente tem que fazer é encontrar um modelo que se aproxime do fenômeno em estudo o máximo possível. Olha, vejam aqui....(a professora usa de representação gráfica para ilustrar sua fala).

Prof: Olha, se a gente traçar esta reta, estes pontos ficam sobre a reta, quer dizer, os pontos observados e os pontos do modelo coincidem (apontando para os pontos pertencentes à reta). Então não existe diferença entre eles, quer dizer o desvio é zero. Agora, e em relação a este? (apontando para um ponto não pertencente à reta).

Alunos: aí tem erro...

Prof: certo... então.. temos que encontrar um modelo que melhor se ajuste a estes pontos, quer dizer, que minimize estas diferenças, que a gente chama de desvios. De repente esta função não passa por nenhum ponto específico, mas ainda assim pode representar o melhor ajuste, o melhor modelo. Entenderam? (novamente a professora faz suas observações com o apoio de uma representação gráfica (Figura 18)).

Figura 18 – Simulação de um ajuste linear



No *Episódio 9*, os turnos 1 à 6 parecem caracterizar uma interação não-dialógica [visto que o que se percebe é um jogo de perguntas, como um padrão triádico I-R-S e I-R-A]. Entendemos que a professora não considera o ponto de vista dos alunos em suas falas, sendo nítida sua intenção de ‘explicar’ um procedimento, embasado em conceitos matemáticos que, apesar de já terem sido vistos pelos alunos, não foram utilizados por eles para a solução do problema, o que nos conduz a inferir que não foram aprendidos anteriormente. Mais uma vez percebe-se o tipo de interação sendo delineado pela atitude e intenção da professora.

Quanto às características de um diálogo como apresentado por Alro e Skovsmose (2006), entendemos que esta interação não pode ser caracterizada como tal, pois não observamos a intenção da professora em ‘promover a igualdade’ nem tampouco provocar uma investigação ou correr riscos. Nesta interação a professora assume o papel de ‘autoridade’ do discurso científico (condizente com sua intenção no momento, de apresentar um conceito matemático). Também não percebemos a presença de atos dialógicos.

O encaminhamento dado pela professora não permite o surgimento de solicitações de ajuda, e neste sentido, não foi possível analisar esta interação em relação às condições propostas por Noreen Webb. Já em relação às condições propostas por Anna Sfard consideramos que as mesmas estão satisfeitas, visto que os alunos parecem acompanhar o raciocínio da professora, respondendo corretamente suas questões, e deste modo, consideramos que o foco pretendido da professora esta condizente com seu foco pronunciado e com o foco observado (turno 4) sendo compreendido pelos alunos. Além disso, implicitamente, efetivou-se um acordo sobre o discurso principal (encontrar um método que minimize a soma dos desvios), sobre os papéis dos interlocutores (professora assume o papel de ‘instrutora’ e alunos o papel de ‘aprendizes’) e sobre o curso necessário para a aprendizagem.

Após a apresentação da Figura 18 a professora continua a interação com os alunos (apresentada na sequência) com o intuito de conduzi-los à compreensão do Método dos Mínimos Quadrados bem como a adequação do seu uso nesta atividade.

Episódio 9 – continuação

Prof: Um método adequado para encontrar este modelo ajustado é o Método dos Mínimos quadrados. Este método consiste em determinar os parâmetros do modelo de modo que a soma dos quadrados dos desvios seja a menor possível. Ou seja, devemos minimizar a soma dos quadrados da diferença entre o y observado e o y do modelo. Entenderam? *(ao mesmo tempo em que a professora*

falava, escrevia no quadro
$$S = \sum_{i=1}^n (y_{obs} - y_{mod})^2$$
).

Alunos: A reação dos alunos é diversa. Uns dizem que sim, outros dizem que não e outros nem respondem.

Prof: bom... o que primeiro precisamos entender é que o melhor modelo é aquele em que a soma destas diferenças seja mínima, ok?

Alunos: uns dizem 'ok', outro diz 'até aí tudo bem', outros apenas fazem um sinal de consentimento com a cabeça.

Prof: Então nós temos que achar este modelo ... achar os parâmetros do modelo de modo que faça com que a soma do quadrado destes desvios seja mínima.

A14: Por que quadrado??? Aí a soma vai ficar grande...

Prof: Excelente pergunta A14... até que enfim alguém perguntou.. (com risos). Faz tempo que estou falando "a soma dos quadrados dos desvios" e ninguém fala nada. Então vamos lá, por que soma dos quadrados e não soma dos desvios apenas??

A13: vai saber... deve ser prá complicar mesmo né? (rindo).

Prof: Não A13... muito pelo contrário... é para descomplicar. ...Olhem aqui. (A professora apresenta novamente a Figura 22), se a gente fizer y do modelo menos o y observado aqui, a diferença vai ser positiva certo? E aqui? (mostrando diferentes pontos do gráfico da Figura 22. Os alunos foram acompanhando e respondendo quando era positivo e quando era negativo).

Prof: então.. se a gente somar estes valores, eles podem se cancelar, o resultado pode até ser negativo.

A14: é só pegar em módulo então.

Prof: poderia ser A14, mas minimizar a soma dos módulos é mais difícil do que minimizar a soma dos quadrados e se a gente colocar esta diferença ao quadrado ela fica sempre positiva né?

A14: mas fica maior... fica ao quadrado...

Prof: nem sempre. Esta diferença pode ser menor do que um, mas ainda assim, neste método o que se pretende minimizar é a soma dos quadrados destas diferenças. Outros métodos minimizam outros valores. Entendeu?

A14: acho que sim...

Prof: Vamos lá.. continuando. A6, explique o que temos que fazer...

A6: ah 'prof'... assim... a gente tem que achar o modelo que melhor se ajusta, que os erros... a soma do quadrado dos erros ficar bem pequena... Mas 'prof' .. você falou que ia usar todos os pontos... como a gente vai achar estas diferenças se a gente não tem o modelo??

Prof: ok, vamos falar disso. Primeiro vocês tem que entender como usar este método. Todos entenderam?

Alunos: reações de confirmação de entendimento.

Prof: ok. Então, como A6 falou, nós não temos o modelo, é ele que queremos achar. Então temos que achar os parâmetros do modelo. Vamos supor que o modelo seja um modelo do primeiro grau, deste tipo (escrevendo $f(x) = a + bx$). Temos que achar os parâmetros 'a' e 'b'. Vamos substituir naquela soma agora. (Neste momento a

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_{obs} - a - bx_i)^2$$

professora escreve) Agora a gente tem que achar o 'a' e o 'b' de modo que esta soma seja mínima.

A7: o que faz com o x e o y?

Prof: Nós temos os valores do x e do y... o x é a profundidade tanto do modelo quanto do observado e o y é a concentração. Agora, como minimizar esta soma???

A7: derivadas?

Prof: por que derivadas?

A7: ah...porque a gente usava derivadas para achar pontos máximos e mínimos.

A14: derivava e igualava a zero.

Prof: como assim? Porque iguala a zero A14?

A14: porque assim...nos pontos máximos e mínimos a derivada é zero. Aí quando a gente queria encontrar os pontos de máximo e de mínimo a gente derivava e igualava a zero.. prá achar os pontos.

Prof: muito bom meninos...é isso mesmo... Temos que igualar a derivada desta soma a zero e aí encontrar os parâmetros 'a' e 'b'. Mas não se esqueçam que temos duas variáveis... 'a' e 'b'...

A14: ah não!!!... derivadas parciais!!!

Prof: (*rindo da reação da aluna*).. isso mesmo A14... derivadas parciais...

Alunos: reclamações generalizadas.

O sub-episódio que compreende os turnos 7 à 28 revela uma discussão próxima do extremo *de autoridade* no contínuo dialógico/de autoridade, sendo condizente com a intenção da professora de apresentar o M.M.Q e as razões para sua utilização. Até o turno 12 a interação constitui-se um jogo de perguntas pois as únicas questões da professora são questionamentos de entendimento por parte dos alunos (*entenderam? Ok?*) e as respostas dos alunos também limitaram-se a 'sim', 'não' ou outra forma de confirmação. Apenas no turno 12 a aluna A14 faz uma intervenção no '*quase monólogo*' da professora. A partir desta intervenção a professora tenta (no turno 13) iniciar uma cadeia de interação, sendo sua iniciação do tipo processo (*por que soma dos quadrados e não soma dos desvios apenas??*), porém não obtém resposta satisfatória dos alunos e em seguida rejeita a resposta recebida (*Não A13...*), iniciando ainda em 15 outro jogo de perguntas (*se a gente fizer y do modelo menos o y observado aqui, a diferença vai ser positiva certo? E aqui?*).

No turno 17 a aluna A14 realiza outra participação que sugere 'pensar alto' (*é só pegar o módulo então*), a qual é analisada pela professora, que argumenta que seria melhor trabalhar com a soma dos quadrados dos desvios em vez de trabalhar com a soma dos módulos dos desvios. Nota-se que a professora segue sua própria linha de raciocínio, característica de uma interação de autoridade.

A explicação dada pela professora no turno 18 parece não ser satisfatória para a aluna e deste modo, a aluna A14 argumenta no turno 19 e mais uma vez a professora tenta apresentar argumentos que a façam mudar de perspectiva. Fica claro que a intenção da professora não era levar em consideração

as perspectivas dos alunos e sim, orientá-los para a compreensão de sua perspectiva. Deste modo, caracterizamos este sub-episódio como 'de autoridade'.

Entendemos ainda que este sub-episódio não pode ser considerado um diálogo visto que além da professora não promover a igualdade e não conduzir os alunos a uma investigação, não observamos presença de diversos atos dialógicos. Consideramos apenas que os atos de *estabelecer contato* e *avaliar* estão presentes neste sub-episódio.

Quanto às condições propostas por Anna Sfard e Noreen Webb, consideramos que as mesmas são satisfeitas neste sub-episódio (turnos 7 à 28). No turno 12 a aluna A14 solicita ajuda (*por que quadrado?*) sendo esta ajuda fornecida pela professora nos turnos seguintes (a professora tenta solucionar as dúvidas de A14 até obter uma confirmação de entendimento no turno 21). Além disso, nos turnos 15 e 16 podemos observar que os focos pretendidos, pronunciados e observados da professora estão condizentes, o que leva os alunos a acompanhar seu raciocínio. Os papéis dos interlocutores estão bem definidos assim como o discurso principal (compreensão do MMQ) e o curso necessário para a aprendizagem. Percebe-se ainda a participação ativa dos alunos alternando declarações pró-ativas e reativas.

O sub-episódio que compreende os turnos de 28 à 35 também revela uma interação não-dialógica, visto que a professora 'parece' estar interessada na perspectiva dos alunos, porém, suas questões buscam chegar a um ponto de vista específico, e deste modo, elabora estas questões de modo a conduzir os alunos a responderem aquilo que ela tem em mente.

Neste sub-episódio (28 -35) não observamos uma solicitação de ajuda por parte de nenhum dos envolvidos e as questões da professora são no sentido de conduzir os alunos a colocarem seus pontos de vista, e deste modo, não analisamos a presença ou não das condições propostas por Noreen Webb. Quanto as condições propostas por Anna Sfard, consideramos que as mesmas foram satisfeitas visto que os envolvidos mantêm o foco no discurso apresentando declarações reativas em resposta às declarações pró-ativas da professora.

Já em termos da presença dos atos dialógicos que constituem um diálogo, consideramos que o ato de *perceber*, *reconhecer* e *avaliar* estão presentes neste sub-episódio (28-35), porém, não o consideramos um diálogo em termos da

caracterização de Alro e Skovsmose (2006) pois não entendemos que esta interação promova a igualdade e convide os alunos a uma investigação.

Tomando em conjunto os três sub-episódios consideramos que no geral esta interação não pode ser considerada um diálogo, não se constitui uma interação dialógica e não podemos analisar as condições propostas por Noreen Webb. Inferimos que as condições de Anna Sfard foram satisfeitas nesta interação, o que significa que a comunicação foi efetivada. Apresentamos na Figura 19 um quadro-resumo desta análise.

Figura 19 – Quadro-resumo da análise do Episódio 9

<i>Episódio 9</i>	Análise
Interação Dialógica/ de autoridade	<i>De autoridade</i>
Padrões de interação	<i>I-R-S; I-R-A; jogo de perguntas I_T-R-P_T-R-R-P_T-R-A_T e S_T (dos turnos 28 à 35)</i>
Diálogo	<i>não</i>
Atos dialógicos	<i>estabelecer contato e avaliar (turnos 7 à 28) perceber, reconhecer e avaliar (turnos 28 à 35)</i>
Condições elencadas por Noreen Webb	<i>Não analisadas</i>
Condições elencadas por Anna Sfard	<i>Satisfeitas</i>

Após a interação descrita no *Episódio 9*, a professora, a partir da

expressão
$$\min S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n (y_{obs} - \mathbf{a} - \mathbf{b}x_i)^2$$
, encontra, juntamente com os alunos, as expressões por meio das quais são determinados os parâmetros 'a' e 'b' da reta $y(x) = a + bx$ ajustada aos pontos. As figuras 20 e 21 mostram os registros de grupos de alunos para a determinação destes parâmetros.

Figura 20 a – Determinação dos parâmetros e desenvolvimento do modelo pelo Grupo 3

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = na + b \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases}$$

Profundidade (cm)	[Ca]	ln C (y)	p. ln C	p ² (cm ²)
30	2,958397	1,084	32,52	900
90	2,3163	0,8399	75,591	8100
150	1,64139	0,4955	74,325	22500
210	1,2647	0,234824	49,308	44100
270	0,6041	-0,5040	-166,32	108900
810	8,7847	2,1502	65,424	184500

Como apresentado em sala, uma solução para o problema apresentado é linearizar a expressão $C = e^{Kp \cdot N}$. Onde "C" é a concentração de cálcio e "p" é a profundidade.

$C = e^{Kp \cdot N}$

$\ln C = Kp + \ln N$ → por essa equação, podemos fazer uma analogia com a equação $y = a + bx$, $y = \ln C$; $x = p$; $a = N$; $b = K$.

Para continuarmos a solução do problema, recorremos ao método dos mínimos quadrados.

$$\sum_{i=1}^n y_i = na + b \sum_{i=1}^n x_i \quad \textcircled{A}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \textcircled{B}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{A} \rightarrow 2,1502 = 5a + b \cdot 810 \quad (-162) \rightarrow \begin{cases} -342,332 = -810a - b \cdot 121,220 \\ 65,424 = 810a - b \cdot 184500 \end{cases} \\ \textcircled{B} \rightarrow 65,424 = 810a + b \cdot 184500 \\ \hline -282,971 = 53280b \\ \hline |b = -0,000532| \end{array}$$

Figura 20b – Determinação dos parâmetros e desenvolvimento do Modelo pelo Grupo 3- continuação

Aplicando b na equação (A):

$$5a = 2,1508 - 810b$$

$$a = \frac{2,1508 + 810 \cdot 0,00531}{5} \rightarrow a = 1,29$$

Agora que já obtivemos os valores de a e b, podemos substituí-los na equação $y = a + bx$:

$$y = 1,29 - 0,00531x$$

ou seja:

$$\ln C = -0,00531 \cdot p + 1,29$$

$$C = e^{-0,00531p + 1,29}$$

$$C = e^{-0,00531p} \cdot 3,63$$

Para provar a equação, aplicamos alguns valores:

para uma profundidade de 150 cm, a equação gera um resultado de:

$$C = e^{-0,00531 \cdot 150} \cdot 3,63 \rightarrow C = 1,636$$

para um resultado original de 1,641, um percentual de 0,3% de erro.

Figura 21 – Determinação dos parâmetros e desenvolvimento do modelo pelo Grupo 1

- linearização do gráfico -

$$\sum_{i=1}^n y_i = na + b \sum_{i=1}^n x_i \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$N = C e^{-kp}$$

$$\ln N = \ln C + (-kp)$$

$$y = na + b \cdot x$$

$$2,15 = 5a + 810b \quad 69,45 = 810a + b \cdot 184,500$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} 2,15 = 5a + 3 \cdot 810 \cdot (-0,0053) \\ 69,45 = 810a + b \cdot 184,500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -348,3 = -810a - b \cdot 122,250 \\ 69,45 = 810a + b \cdot 184,500 \end{cases}$$

$$-282,85 = b \cdot 53,250$$

$$b = -0,0053$$

substitua b no $\textcircled{1}$

$$2,15 = 5a + (-0,0053 \cdot 810)$$

$$a = 1,288$$

voltando ao ajuste linear:

$$a = \ln C \quad b = -k$$

$$k = 0,0053 \quad C = e^{1,288} = 3,62$$

$$N = 3,62 e^{-0,0053p} \quad \text{que se ajusta melhor a todos os pontos.}$$

Uma vez determinado o modelo os alunos realizaram a validação e apresentaram o resultado à turma e suas considerações sobre o modelo e o desenvolvimento da atividade.

Na figura 22 apresentamos um quadro-resumo da análise das interações que ocorreram durante o desenvolvimento da Atividade 1 onde percebemos que esta atividade contempla a variação de abordagens comunicativas conforme enunciam Mortimer e Scott (2002). Segundo os autores, é aconselhável a existência desta variação, trabalhando-se tanto na dimensão dialógica/de autoridade como na interativa/não interativa, pois é importante tanto a discussão entre os

alunos e entre estes e o professor (interativa e dialógica) quanto o fechamento do professor ou a introdução de novos termos e conceitos (de autoridade ou algumas vezes não-interativa).

Figura 22 – Quadro-resumo da análise de todos os episódios

<i>Episódios</i>	<i>Dialógica / de autoridade</i>	<i>Diálogo</i>	<i>Condições elencadas por Noreen Webb</i>	<i>Condições elencadas por Anna Sfard</i>
1	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Não analisadas</i>	<i>Não analisadas</i>
2	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Não analisadas</i>	<i>Não analisadas</i>
3	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
4	<i>De autoridade</i>	<i>Não</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
5	<i>De autoridade</i>	<i>Não</i>	<i>Não analisadas</i>	<i>Não analisadas</i>
6	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
7	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
8	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
9	<i>De autoridade</i>	<i>Não</i>	<i>Não analisadas</i>	<i>Satisfeitas</i>

Das nove interações aqui apresentadas e analisadas, consideramos que seis delas constituem uma interação dialógica enquanto três representam interações ‘de autoridade’. As interações de autoridade são aquelas em que a professora tinha a clara intenção de apresentar um conceito, termos ou idéias (Episódios 4, 5 e 9). Neste sentido corroboramos com a perspectiva de Mortimer e Scott (2002, p. 302) de que “faz parte do trabalho do professor introduzir novos termos e novas idéias” e nesta introdução a abordagem de autoridade muitas vezes é fundamental.

Quanto à caracterização das interações como um diálogo, observamos que das nove interações, apenas 3 (Episódios 4, 5 e 9), não foram consideradas como tal. Em duas destas interações (4 e 9) entendemos que a comunicação foi efetivada em termos de Anna Sfard contribuindo, deste modo, com a aprendizagem da matemática.

Para analisarmos se uma interação satisfaz as condições elaboradas por Noreen Webb para a aprendizagem, um dos envolvidos nesta interação deve solicitar uma ajuda. Consideramos que apenas nos Episódios 3, 4, 6, 7 e 8 foi solicitada ajuda e sendo assim, estas condições foram analisadas apenas nestes episódios. Uma característica identificada nestes episódios é que a discussão guiou-se no sentido de determinar os parâmetros do modelo, tendo como 'pano de fundo' conceitos matemáticos, e deste modo, foi possível identificar a importância destas interações para a aprendizagem.

As condições propostas por Anna Sfard dizem respeito à efetividade da comunicação, ou seja, se a mesma acontece, contribuindo com a aprendizagem. Esta efetividade foi analisada em termos do envolvimento dos indivíduos nas interações, procurando diagnosticar se os focos pretendidos foram compreendidos e se o acordo comunicacional (acordo sobre o discurso principal, sobre os papéis dos interlocutores e sobre o curso necessário para a aprendizagem) foi estabelecido. Com base nestas condições constatamos que a comunicação foi efetivada em seis episódios (episódios 3, 4, 6, 7, 8, e 9) e deste modo, consideramos que estas interações favoreceram a aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Salientamos a importância de todas as interações, visto que, enquanto algumas propiciaram a aprendizagem dos conceitos matemáticos, outras auxiliaram o desenvolvimento do aluno em relação à atitudes desejáveis para qualquer profissional e para o engenheiro em particular (criticidade, reflexão, entre outras) e outras ainda propiciaram a oportunidade dos alunos se sentirem parte de uma equipe, tendo sua voz ou sua perspectiva, ouvida, analisada e, muitas vezes aceita pelo grupo ou pela professora.

Nota-se que as atitudes/ações da professora, tendo em vista seus objetivos, delineiam os padrões de interações (com turnos de prosseguimento ou com jogo de perguntas) gerando cadeias de interações ou padrões triádicos. Além disso, o interesse demonstrado pela professora na maioria das vezes em que interage com os alunos incentiva a participação, fazendo com que o aluno se perceba membro importante da equipe e 'co-responsável' pela sua aprendizagem e pelo entendimento dos colegas.

Conforme comentamos no início da descrição desta atividade, o tema de estudo despertou o interesse destes alunos muito provavelmente por abarcar uma situação com referência no cotidiano do ser humano, e particularmente,

de interesse profissional de um engenheiro ambiental. Neste sentido, a ‘escolha’ do tema de estudo contribui para o delineamento das interações, visto que, a participação do aluno nestas interações, seus argumentos, suas questões, suas preocupações e interesse, são influenciados pelo conhecimento da situação em estudo ou pela possibilidade de ‘imaginar/reconhecer’ esta situação, bem como pelo encaminhamento dado à atividade pela professora. Neste sentido, as características do problema e das interações alinham-se à configuração de *contexto-simulado* que conferimos à Modelagem Matemática.

5.2.1 Atividade 3: Estudo da Área de Soja Cultivada no Brasil

Como na seção anterior, dividimos a descrição e análise desta atividade em duas partes. Na parte A apresentamos o problema, as variáveis, a hipótese, a tendência dos dados e o modelo matemático obtido. Na parte B descrevemos o envolvimento dos alunos e da professora, apresentando algumas interações e analisando-as à luz do referencial teórico.

Esta atividade corresponde ao que identificamos como terceiro momento da Modelagem Matemática. Para as atividades deste momento a escolha do tema, a coleta de dados, a elaboração de hipóteses e a construção do modelo são ações de responsabilidade dos alunos, com a orientação do professor quando solicitada. A atividade aqui descrita foi desenvolvida pelo Grupo 1 constituído dos alunos A1, A2, A3, e A4, sendo parte desenvolvida durante as aulas de Matemática 2 e parte desenvolvida fora do horário destas aulas, com ou sem a presença da professora. Na maioria dos encontros em que a professora estava presente os alunos foram filmados, nos demais encontros suas falas foram gravadas em áudio.

5.2.2 Parte A: A Situação-Problema e sua Solução

Tema: Plantio de soja: tendência de área de cultivo.

Problema de estudo

Análise do crescimento da área de cultivo de soja no Brasil.

Variáveis: t : tempo (em anos); $y(t)$: área de cultivo de soja em relação ao tempo, (em hectares (ha)).

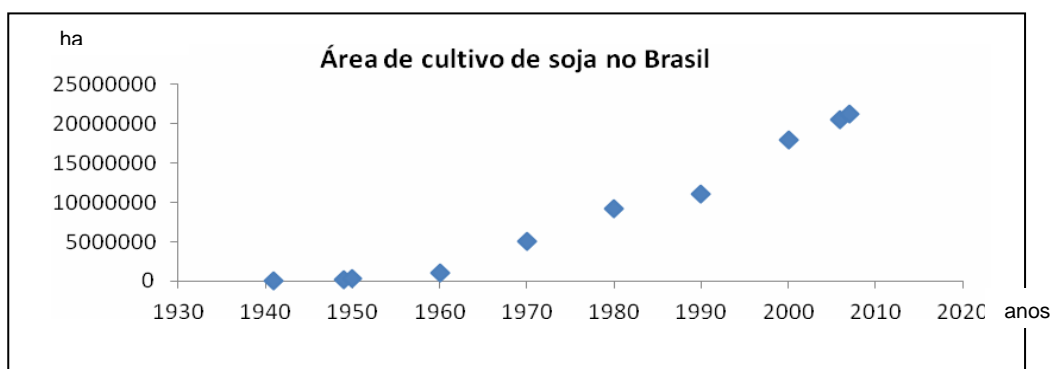
Dados: A Tabela 5 apresenta os dados obtidos pelos alunos no site da EMBRAPA (Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária) referentes à área relativa ao cultivo de soja no Brasil entre os anos de 1941 e 2007. A Figura 23 apresenta a curva de tendência destes dados.

Tabela 5 – Dados referentes à área de cultivo de soja no Brasil

Anos	Área (ha)
1941	36000
1949	143000
1950	300000
1960	1000000
1970	5000000
1980	9200000
1990	11000000
2000	18000000
2006	20500000
2007	21200000

Fonte: EMBRAPA

Figura 23 – Área de cultivo de soja no Brasil em relação ao tempo



Outros dados, também obtidos pelos alunos, considerados relevantes pelo Grupo são: Área total do Paraná: aproximadamente 19.300.000 ha; Área total do sul do Brasil (Paraná, Santa Catarina e Rio grande do Sul): aproximadamente 57.677.000 ha; Área total cultivável no Brasil: 384.000.000 ha.

Hipóteses para o problema

Com base no conhecimento relativo à situação, o grupo definiu as seguintes hipóteses:

H_1 : a área de cultivo de soja no Brasil é limitada;

H_2 : o crescimento da área cultivável pode ser descrito por um modelo assintótico;

Simulações

Nesta atividade o grupo optou por realizar algumas simulações considerando diferentes valores para a área máxima cultivável.

Na primeira simulação (S1) o grupo considera que a área máxima destinada ao cultivo de soja no Brasil é equivalente à área do sul do país (Paraná, Santa Catarina e Rio Grande do Sul), 57 677 000 ha; na segunda simulação (S2) consideram que o limite máximo para cultivo é uma área aproximada à área do Paraná, 25 000 000 ha; na terceira simulação (S3) consideram que o limite máximo para área de cultivo de soja no Brasil é 25 000 000 ha e o intervalo de tempo considerado é de 1980 à 2007.

Modelo Matemático associado às hipóteses

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{k}\right) \cdot y$$

Soluções encontradas com a determinação dos parâmetros do modelo

$$\text{Para S1: } y(t) = \frac{20,76372 \cdot 10^{12}}{36000 + (57641000)e^{-0,095t+185,1}}$$

$$\text{Para S2: } y(t) = \frac{25000000 \cdot 36000}{36000 + (24964000)e^{-0,116t+224,4}}$$

$$\text{Para S3: } y(t) = \frac{25000000 \cdot 9200000}{9200000 + (15800000)e^{-0,0871t+172,65}}$$

O interesse deste grupo em estudar esta situação advém da importância atribuída a fatores que podem degradar o meio ambiente, como agrotóxicos e a preocupação com o desmatamento ocasionado pelo aumento de área destinada ao cultivo. Apesar do problema de estudo não tratar destas preocupações, pois em um primeiro momento o grupo considerou ser importante

estudar apenas o crescimento da área de cultivo destinada à soja, em conversas informais observamos esta preocupação.

Percebe-se no desenvolvimento desta atividade o processo investigativo da Modelagem Matemática visto que os alunos, após a definição da situação-problema a ser investigada, buscam informações sobre a situação, simplificam o problema e mais uma vez, analisam a situação como um todo, elaborando hipóteses condizentes com a mesma, apesar da tendência dos dados não indicar esta hipótese de imediato. Além disto, a decisão de investigar simulações veio acompanhada do estudo da situação e de conhecimentos extra-matemáticos.

Assim como a atividade 1, nesta atividade percebemos a Modelagem como um *contexto-simulado* uma vez que constitui uma investigação de uma situação familiar, imaginável pelos alunos, com referência à realidade, com dados reais, do interesse desta comunidade de alunos e as características do desenvolvimento da atividade e das interações advém da configuração e elementos da situação-problema.

5.2.3 Parte B: O Envolvimento dos Alunos no Desenvolvimento da Atividade 3 - Análise das Interações

Neste item apresentamos alguns recortes do material produzido pelos alunos durante o desenvolvimento desta atividade, bem como algumas interações ocorridas nestes momentos.

Como na apresentação da Atividade 1, nesta apresentação utilizamos o termo '*Episódio*' para descrever estas interações sendo que as falas da professora e dos alunos estão em itálico, diferenciando das considerações que realizamos sobre as ações dos alunos, que são redigidas entre parênteses e sem itálico. As falas foram transcritas literalmente e deste modo apresentam expressões do tipo: *prá, né, ahã, péra aí*, etc, além de erros de concordância verbal.

A "origem" da atividade foi a leitura de um texto sobre a situação atual e as perspectivas da produção de alimentos e agroenergia no Brasil, com ênfase na soja. Após a leitura o grupo discutiu com a professora o interesse em pesquisar o crescimento da área de cultivo no Brasil, visando a produção de biocombustível. O *Episódio* 10 relata esta interação

A2: prof...este texto fala do crescimento na área de cultivo destinado à produção de biocombustível.

Prof: tá crescendo? Isso é bom né?.

A3: depende... desse jeito daqui a pouco não vamos ter mais comida... tá tudo indo pro combustível...

Prof: como assim? Me falem o que vocês sabem sobre o biocombustível.

A1: ah... é o combustível feito de milho, soja, cana-de-açúcar, mamona, mandioca....

A3: por isso que falei que vai faltar comida...

A2: também tem biocombustível feito de lixo orgânico...

A1: é feito prá usar nos carros, pode ser misturado com a gasolina.

Prof: entendi... e vocês sabem qual a vantagem de usar o biocombustível?

A4: ah.. é a redução de gases poluentes e também é bom porque é renovável enquanto a gasolina não é.

A2: prof, tem ônibus em Curitiba que usa biocombustível e eu li que já foi provado que reduziu bastante a poluição.

Prof. E porque vocês estão preocupados com o crescimento da área de cultivo destinada ao biocombustível?

A1: porque está diminuindo a porcentagem destinada aos alimentos e aumentando a porcentagem para o biocombustível.

A3: e se continuar assim, vai faltar comida...

Prof: ah.. mas tem muita terra para plantar né? Acho que não vai faltar...

A2: mas essa terra tem que ser dividida...pra pasto, pra agricultura... porque senão tem uma coisa e falta outra...

A1: e tem mais professora... olha só... se aumenta o cultivo de biocombustível, vai ter que aumentar a área para cultivo de alimentos também, prá não faltar, aí vai ter mais desmatamento e também mais agrotóxicos no solo...

Prof: tem razão. As coisas devem ser balanceadas. Mas o que vocês estão pensando em pesquisar em relação à isso?

A1: primeiro a gente pensou em estudar o crescimento da área cultivada no Brasil que fosse destinada apenas para biocombustível, mas agora a gente tá pensando em ver a área de cultivo de soja apenas.

Prof: a área de cultivo de soja destinada à produção de biocombustível?

A1: não...primeiro queremos ver toda a área de cultivo e depois a gente pensou em estudar a porcentagem desta área destinada ao biocombustível.

A2: mas aí vai ser outro trabalho tá prof?

Prof: ok. Vamos estudar isso então. O que temos de dados?

A1: temos alguns dados aqui no artigo mas vamos procurar mais...

A3: tem no site do EMBRAPA.

Prof: ok. Vejam os dados que temos e depois conversamos, ok?

A interação apresentada no *Episódio 10* constitui um diálogo como caracterizado por Alro e Skovsmose (2005). Primeiramente entendemos que nesta interação a professora promove a igualdade quando se coloca como membro do grupo (utilização do pronome na terceira pessoa do plural) e também incentiva os

alunos a realizarem uma investigação e a possibilidade de correr os riscos inerentes a esta. Quanto aos atos dialógicos, observa-se a presença dos atos de *estabelecer contato e perceber* (os alunos falam sobre o que pretendem pesquisar e a professora se mostra interessada, inclusive questionando sobre o entendimento dos alunos em relação ao tema de estudo), *posicionar-se e pensar alto* (A3 coloca diversas vezes sua concepção sobre uma possível falta de alimentos devido à crescente porcentagem destinada ao biocombustível, enquanto os outros alunos também posicionam-se quanto ao que conhecem sobre o tema). Além da presença destes aspectos essenciais de um diálogo, esta interação apresenta discussões sobre aspectos importantes relacionados à economia e meio ambiente.

É possível observar a influência das ações da professora na configuração desta interação, visto que o interesse demonstrado por ela e suas falas de prosseguimento conduzem os alunos ao engajamento, participando da discussão com idéias, argumentos, pontos de vista e conhecimento cotidianos. Deste modo, os alunos sentem que sua participação é importante para o desenvolvimento da atividade, para o entendimento dos colegas e para a aprendizagem de todos.

Uma vez que a professora procura ouvir as idéias dos alunos e aceita seus argumentos, não direcionando suas perguntas de modo a chegar a um ponto de vista pré-determinado por ela, consideramos que esta interação está mais próxima do extremo dialógico no continuum dialógico/de autoridade. Além disto, como apresentado na sequência, o padrão de interação que se estabelece constitui um padrão não-triádico gerado a partir de prosseguimentos da professora, padrão este que caracteriza uma interação dialógica. O primeiro sub-episódio que apresenta um padrão de interação é compreendido pelos turnos 2 à 9, terminando com uma avaliação da professora (*entendi...*). Observamos que o prosseguimento da professora no turno 4 (*como assim? Me falem o que vocês sabe sobre o biocombustível*) é o responsável pela geração da cadeia.

Turno	2	3	4	5	6	7	8	9
Tipo de interação	I _T	R	P _T	R	R	R	R	A _T

O segundo sub-episódio que apresenta um padrão de interação compreende os turnos 9 à 18. Neste, observamos o prosseguimento da professora

no turno 12 (e *porque vocês estão preocupados com a utilização o crescimento da área de cultivo destinada ao biocombustível?*) incentivando os alunos a continuarem com suas argumentações, assim como nos turnos 15 (*ah.. mas tem muita terra para plantar né? Acho que não vai faltar...*) conduzindo os alunos a se posicionarem.

O restante do *Episódio* também apresenta uma cadeia de interação com iniciação da professora na segunda parte do turno 18 (*Mas o que vocês estão pensando em pesquisar em relação à isso?*) seguida de respostas dos alunos e prosseguimentos da professora.

Turno	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Tipo de interação	I _T	R	R	P _T	R	R	P _T	R	R	A _T /I	R	P _T	R	R	A/I	R	R	A _T

Observamos que nesta interação a professora e os estudantes exploram idéias, oferecem e consideram diferentes pontos de vista e a professora tem a clara intenção de explorar as idéias dos alunos quanto ao tema e problema em questão, caracterizando assim uma interação dialógica. Na Figura 24 apresentamos um quadro-resumo da análise deste episódio.

Figura 24 – Quadro-resumo da análise do Episódio 10

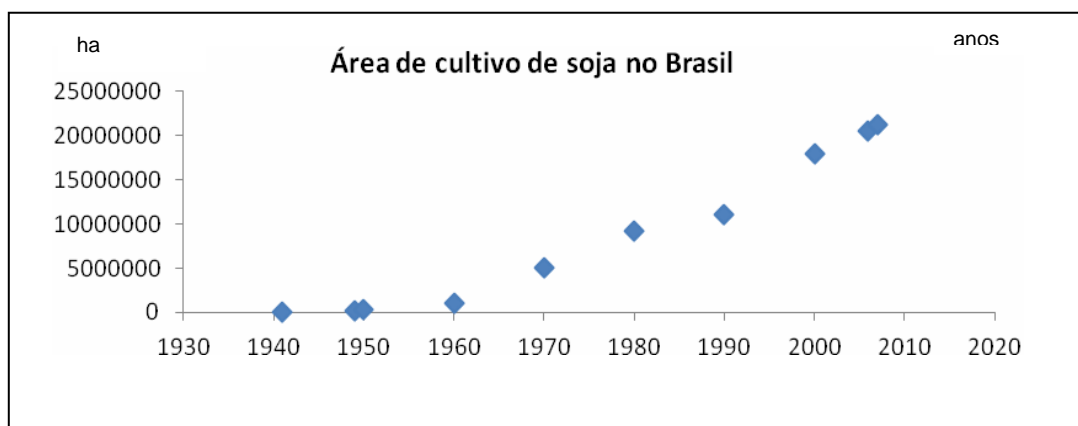
Episódio 10	Análise
Interação Dialógica/ de autoridade	<i>Dialógica</i>
Padrões de interação	<i>I_T R -P_T -R -R -R -R A_T (turnos 2 a 9)</i> <i>I_T R-R -P_T -R -R- P_T -R-R-A_T/I - R-P_T-R-R-A_T/I- R-R-A_T</i>
Diálogo	<i>sim</i>
Atos dialógicos	<i>estabelecer contato, perceber, pensar alto, posicionar-se</i>
Condições elencadas por Noreen Webb	<i>Não analisadas</i>
Condições elencadas por Anna Sfard	<i>Não analisadas</i>

A partir da orientação da professora de buscar dados quantitativos sobre o problema (turno 26 do *Episódio 10*) no encontro seguinte o grupo apresentou à professora os dados referentes à área de cultivo de soja no Brasil (Tabela 6) e a tendência dos dados (Figura 25).

Tabela 6 – Dados referentes á área de cultivo de soja no Brasil

<i>anos</i>	<i>Área (ha)</i>
1941	36000
1949	143000
1950	300000
1960	1000000
1970	5000000
1980	9200000
1990	11000000
2000	18000000
2006	20500000
2007	21200000

Fonte: EMBRAPA.

Figura 25 – Área de cultivo de soja no Brasil em relação ao tempo

Apesar da tendência apresentada na Figura 25 sugerir um modelo exponencial, o grupo, com base no conhecimento da situação, argumenta que a mesma não pode ser modelada por uma função exponencial, visto que possui um limite máximo para o cultivo de soja. Com este argumento, o grupo define as hipóteses H_1 : a área de cultivo de soja no Brasil é limitada e H_2 : o crescimento da área cultivável pode ser descrito por um modelo assintótico. Esta definição foi elaborada em interação como vemos nos episódios 11 e 12.

A1: olha, parece uma função exponencial né? (apontando para a tendência dos dados da Figura 25)

A3: parece...

A2: mas não pode ser.

A3: Por que?

A2: porque não pode crescer infinitamente.

A3: como?

A2: ah... é área cultivada... o Brasil tem um limite de área que pode ser cultivada, então não pode crescer sem fim como faz a exponencial.

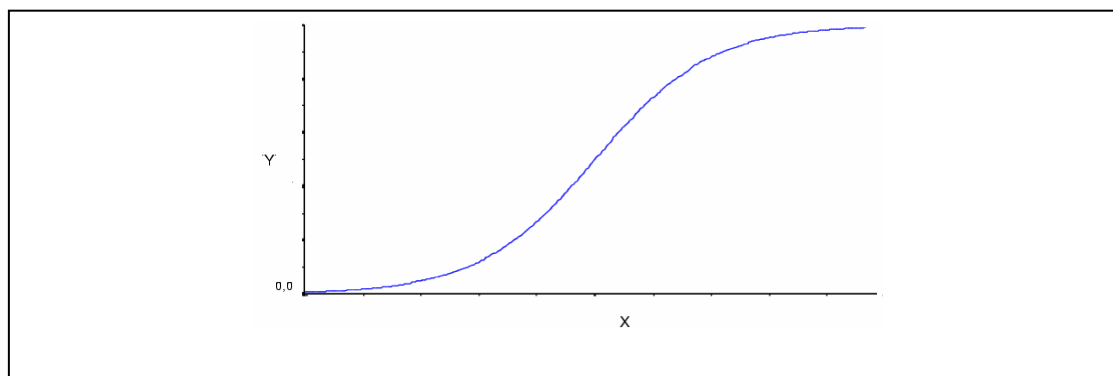
A3: hum.

A1: é.. quando chegar em um ponto vai parar. Mas não vai parar assim... parar de crescer...

A2: tem uma função... ela é assim ó... (A2 faz um esboço de uma função logística). Péra aí.... vou ver.

Neste momento A2 busca em um livro o modelo que estava se referindo e apresenta aos colegas um gráfico como apresentado da Figura 26.

Figura 26 – Esboço de um gráfico de uma curva logística



A interação apresentada no *Episódio 11* mostra A1 iniciando a conversa com um convite aos colegas no sentido de analisar a tendência dos dados. No turno 3 o aluno A2 afirma não concordar com a hipótese de A1: (*mas não pode ser...*) e explica seu raciocínio no turno 5: (*porque não pode crescer infinitamente*) e no turno 7: (*ah... é área cultivada... o Brasil tem um limite de área que pode ser cultivada, então não pode crescer sem fim como faz a exponencial*).

A argumentação de A2 parece ter convencido os colegas: no turno 8, o aluno A3 concorda (*hum*) e em 9 o aluno A1 muda sua opinião (*é.. quando chegar em um ponto vai parar. Mas não vai parar assim... parar de crescer...*). Considerando a caracterização de Anna Sfard para a aprendizagem (mudança de discurso), observamos que A1 modifica seu discurso com o auxílio de A2.

Quanto ao aluno A2, observamos que não apresenta declarações pró-ativas, solicitando uma resposta dos colegas ou pedindo ajuda, entretanto, com o auxílio de A1 no turno 9 (*é.. quando chegar em um ponto vai parar. Mas não vai*

parar assim... parar de crescer...) consegue lembrar de um modelo que descreve o comportamento dos dados, conduzindo-o a buscar no livro o referido modelo.

Podemos observar ainda que o foco pretendido de A1 (no turno 1) é coincidente com seu foco pronunciado e observado uma vez que os colegas compreendem o que ele estava falando e complementam seu raciocínio. No *Episódio* 11 os alunos conservam o foco no discurso chegando a um consenso sobre a tendência dos dados, definindo a hipótese. As argumentações apresentadas pelos alunos no *Episódio* posterior (*Episódio* 12) nos conduzem a inferir que a interação apresentada no *Episódio* 11 proporcionou a comunicação (como caracterizada por Anna Sfard).

Em relação às condições elencadas por Noreen Webb consideramos que as mesmas foram satisfeitas visto que o aluno A3 solicita ajuda no turno 4 (*Por que?*) e no turno 6 (*como?*) e recebe ajuda de A2 nos turnos 5 e 7 e ajuda de A1 no turno 9. A ajuda oferecida por A2 no turno 7 foi uma ajuda elaborada, conduzindo o aluno A3 a compreender a situação.

Esta interação constitui uma interação dialógica visto que os alunos elaboram questões, emitem suas opiniões, discutem idéias e consideram diferentes pontos de vista. Nos turnos 4 e 6 o aluno A3 emite falas caracterizadas como prosseguimentos uma vez que suas questões (*por quê? como?*) foram emitidas no sentido de solicitar que A2 elaborasse melhor seu argumento. Estas falas de prosseguimento geram uma cadeia de interação como apresentada na sequência.

Turno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tipo de interação	I	R	R	P	R	P	R	A	P	P

Realizar uma investigação significa explorar perspectivas, ter curiosidade, estar disposto a considerar o pensamento e as perspectivas do 'outro'. Neste sentido consideramos que a interação apresentada no *Episódio* 11 contempla este aspecto do diálogo como também a possibilidade de correr os riscos desencadeados por esta investigação. Além destes aspectos, os alunos *estabelecem contato*, quando convidam os colegas a acompanhar seus argumentos e raciocínios; procuram *perceber* as perspectivas dos colegas e *posicionam-se*, apresentando seus pontos de vista. Esta interação contribui para que o aluno compreenda a necessidade de levar em consideração as características da situação

em estudo, reavaliando e re-analisando os dados em razão destas características (o que se considera relevante para a formulação da hipótese não são apenas os dados numéricos, e sim, as características da situação em estudo). A Figura 27 apresenta um quadro resumo da análise do *Episódio 11*.

Figura 27 – Quadro-Resumo da Análise do Episódio 11

<i>Episódio 11</i>	Análise
Interação Dialógica/ de autoridade	<i>Dialógica</i>
Padrões de interação	<i>I- R- R -P- R- P -R – A- P - P</i>
Diálogo	<i>Sim.</i>
Atos dialógicos	<i>Estabelecer contato, perceber e posicionar-se</i>
Condições elencadas por Noreen Webb	<i>satisfeitas</i>
Condições elencadas por Anna Sfard	satisfeitas

Considerando as ações dos alunos envolvidos em uma atividade de modelagem, a matematização realizada conduz a um problema matemático que, neste caso, diz respeito também à busca da solução a partir da escolha de um modelo. Esta discussão dos alunos é sinalizada pelas interações do *Episódio 12*.

A1: Professora... olha.. colocamos os dados em um gráfico.. parece uma função exponencial... mas não é..(mostrando o gráfico da Figura 25).

A2: parece que ela tá crescendo indefinidamente.. mas não pode ser...tem que ter limite... tem limite de área...

Prof: ... tem um limite?

A1: tem.. a área cultivável.... então.. lembro de uma função assim ó... (faz um esboço de uma função logística ao mesmo tempo em que A2 mostra um gráfico como o apresentado na Figura 27).

Prof: ótimo.. já que chegaram a esta conclusão determinem o modelo....

A1: é... mas não sabemos (*risos*)

A2: eu até encontrei uma função deste tipo, mas não sei o que significa cada variável...cada constante...

Prof: Que função é essa? Vocês sabem?

A2: tá aqui ó: modelo logístico (mostrando a definição no livro). É

este modelo [mostrando a Equação Diferencial $\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{k}\right) \cdot y$].

Prof: ok. Este modelo representa bem uma sequência que possui um limite máximo e um ponto de inflexão. É uma Equação Diferencial né?

A2: é

Prof: então... agora é só resolvermos esta Equação Diferencial.

A1: mas prof.... já vimos... não dá prá resolver por separável nem por linear...

Prof: certeza?

A1: ah...

A4: olha A1, e se a gente passar tudo isso aqui dividindo dy?

[mostrando $(1 - \frac{y}{k})$].

A1: mas sobra o y...

A2: pode passar y também... fica assim ó [escrevendo

$$\frac{dy}{(1 - \frac{y}{k}) \cdot y} = rdt$$

A1: ah.. aí dá prá resolver por separável né?

A2 e A4: é... dá...

Neste *Episódio* consideramos que os focos pretendido, observado e pronunciado são coincidentes: no turno 1, o aluno A1 indica um gráfico que contém os dados, sendo suas argumentações completadas por A2 no turno 2; o mesmo acontece no turno 4 e na sequência dos turnos 16 à 20. Além disso, foi estabelecido implicitamente um acordo sobre o discurso principal: definir a hipótese e resolver o modelo subjacente a esta. Na sequência dos turnos 16 à 20 observa-se que A1 'enxerga' seus colegas A4 e A2 como instrutores e exerce o papel de aprendiz. Deste modo, consideramos que nesta interação a comunicação foi estabelecida, o que, de acordo com Anna Sfard, favorece a aprendizagem.

Apesar de não estar explícita uma solicitação de ajuda por parte de A1, suas falas no turno 13, 15 e 17 [*mas prof.... já vimos... não dá prá resolver por separável nem por linear...; ah... ; mas sobra o y...*] indicam uma dúvida, o que leva os colegas a sugerirem soluções nos turnos 16 e 18, conduzindo A1 a modificar seu discurso no turno 19. Deste modo, consideramos que as condições elencadas por Noreen Webb também foram satisfeitas nesta interação.

Este *Episódio* não foi caracterizado como uma interação dialógica visto que a intenção dos alunos não foi discutir idéias ou pontos de vista diferentes, e sim, 'informar' a professora da hipótese estabelecida por eles (turnos 1 à 4) e resolver a Equação Diferencial resultante desta hipótese (turnos 12 à 20). A professora por sua vez, orienta os alunos no sentido de encontrarem um método para solucionar o problema em questão, sendo os conceitos matemáticos o foco desta interação.

Um diálogo caracteriza-se por realizar uma investigação, correr riscos e promover a igualdade, além da presença de atos dialógicos que conduzem

à aprendizagem. Em nossa análise consideramos que esta interação não constitui um diálogo pois o grupo não realiza uma investigação propriamente dita, ao contrário, já apresentam a hipótese definida anteriormente. Os únicos atos dialógicos presentes são o reconhecimento, por parte da professora, do procedimento adotado pelos alunos e o ato de posicionar-se, por parte dos alunos. A Figura 28 apresenta um quadro resumo da análise do *Episódio 12*.

Figura 28 – Quadro-resumo da análise do *Episódio 12*

<i>Episódio 12</i>	Análise
Interação Dialógica/ de autoridade	<i>De autoridade</i>
Padrões de interação	
Diálogo	<i>Não</i>
Atos dialógicos	
Condições elencadas por Noreen Webb	<i>satisfeitas</i>
Condições elencadas por Anna Sfard	satisfeitas

Após a interação apresentada no *Episódio 12*, o grupo empenhou-se em resolver a Equação Diferencial $\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{k}\right) \cdot y$, utilizando seus conhecimentos anteriores, elaborando estratégias de resolução e construindo novos conhecimentos que se fizeram necessários. Como mostra a Figura 29 [parte do relatório entregue pelos alunos], o grupo encontrou dificuldades para resolver a Equação Diferencial, necessitando de explicações da professora no sentido de ‘recordarem’ o procedimento necessário.

Porém, mesmo após a explicação da professora, um dos alunos (A4) demonstrou dificuldades para resolver a Equação Diferencial. O *Episódio 13* mostra o momento desta discussão entre os alunos A4 e A1.

Figura 29 – Recorte do relatório final: resolução da Equação Diferencial

Resolvemos esta equação separando as variáveis e integramos cada uma

separadamente
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = na + b \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases}$$

De um lado da igualdade chegamos a uma integral de tal dificuldade que se torna inviável resolvê-la normalmente. Após o auxílio da professora entendemos que a integração do primeiro membro da igualdade pode ser resolvida por frações parciais. Assim, primeiramente escrevemos a fração da integral do primeiro membro em frações parciais como apresentado abaixo.

$$\int \frac{dy}{\left(1 - \frac{y}{k}\right) \cdot y} = \int r dt$$

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{y}{k}\right) \cdot y} = \frac{A}{\left(1 - \frac{y}{k}\right)} + \frac{B}{y}$$

(...) Agora, resolvendo a igualdade temos $B=1$ e $A=1/k$.

Agora substituímos na função inicial os termos A e B :

$$\int \frac{\frac{1}{k}}{\left(1 - \frac{y}{k}\right)} dy + \int \frac{1}{y} dy = rt + C$$

1. **A4:** nossa... como resolve isso?
2. **A1:** então... a 'prof' explicou. Tem que fazer por frações parciais.
3. **A4:** mas posso tirar isso da integral? [referindo-se à expressão $\left(1 - \frac{y}{k}\right) \cdot y$]
4. **A1:** não.. é uma função de y também, ó... tem y . Não dá pra sair. Não é constante.
5. **A4:** e como faz por frações parciais? Não sei.
6. **A1:** olha, como aqui é uma multiplicação, significa que é o mínimo múltiplo comum entre duas funções, certo? [mostrando $\left(1 - \frac{y}{k}\right) \cdot y$]
7. **A4:** como?
8. **A1:** qual é o mínimo de x e y aqui? (escrevendo $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$)

9. **A4:** ah.. tá certo. É x vezes y. Então isso aqui é o mínimo entre $1 - \frac{y}{k}$ e y né? (mostrando $(1 - \frac{y}{k}) \cdot y$)

10. **A1:** é.

11. **A4:** tá, e daí?

12. **A1:** então... quer dizer que isso pode ser escrito na forma de soma de duas frações com esses denominadores. (mostrando

$\frac{dy}{(1 - \frac{y}{k}) \cdot y}$ quando pronunciava 'isso' e apontando para $(1 - \frac{y}{k}) \cdot y$ quando falou 'esses denominadores'). Assim ó: (escreve

$$\frac{1}{(1 - \frac{y}{k}) \cdot y} = \frac{A}{(1 - \frac{y}{k})} + \frac{B}{y}$$

13. **A4:** tá. E quem é A e B?

14. **A1:** é isso que tem que achar. Tem que achar prá por aí e

escrever isso aqui no lugar disso aqui. [apontando para $\frac{A}{1 - \frac{y}{k}}$ e $\frac{B}{y}$

quando pronunciou 'isso aqui' e apontando para $\frac{1}{(1 - \frac{y}{k}) \cdot y}$ quando pronunciou 'disso aqui'.

15. **A4:** nossa...

16. **A1:** olha, escreve aí (o aluno dita $\frac{1}{(1 - \frac{y}{k}) \cdot y} = \frac{A}{(1 - \frac{y}{k})} + \frac{B}{y}$).

17. **A4:** tá

18. **A1:** agora tira o mínimo deste lado. [apontando para o segundo membro da equação]

19. **A4:** péra aí.

Alguns tempo depois:

20. **A4:** ficou assim? [mostrando $\frac{1}{(1 - \frac{y}{k}) \cdot y} = \frac{Ay + B(1 - \frac{y}{k})}{(1 - \frac{y}{k}) \cdot y}$]

21. **A1:** certo, agora esquece o denominador e iguala os termos iguais. O coeficiente de y deste lado com o coeficiente de y do outro e os termos independentes.

22. **A4:** tá.

Na sequência da gravação observa-se que A4 consegue encontrar o valor de A e B assim como os demais membros do grupo.

Este episódio apresenta uma interação entre A4 e A1 em que A4 solicita ajuda. Observa-se que os alunos mantêm um discurso fluente, A4 solicitando ajuda e A1 oferecendo esta ajuda, que pode ser caracterizada como uma ajuda elaborada e de alto nível, com detalhes nas explicações. O aluno A4 por sua vez aplica a ajuda recebida de A1, o que sugere uma aprendizagem em termos de Noreen Webb. Apesar dos alunos utilizarem com frequência o termo 'isso', seus

focos pretendido, observado e pronunciado parecem estar em sintonia visto que continuam a conversação e chegam ao resultado esperado.

Em diversos turnos (2, 8, 9, 12, 14, 18 e 20) os alunos utilizam o recurso visual para auxiliar o 'outro' no entendimento do que estavam fazendo ou dizendo (foco observado) e nota-se que este foco está em sintonia com os focos pronunciados e pretendidos, o que faz com que a comunicação seja estabelecida em termos de Anna Sfard. Os acordos necessários para a efetividade comunicacional, enunciados por Sfard (2006) também foram realizados nesta interação: A4 aceitando o discurso de A1 como discurso principal e aceitando o papel de aprendiz, enquanto A1 por sua vez, aceita o papel de instrutor. Em termos de Anna Sfard, a aprendizagem é caracterizada pela mudança de discurso, e neste *Episódio* percebemos que A4 inicia a interação com um discurso diferente do que termina. Esta mudança de discurso é observada também na sequência da gravação onde A4 consegue resolver seu problema juntamente com os colegas.

Nitidamente esta interação favoreceu A4 no sentido de solucionar seu problema, e quanto a A1, consideramos que também foi beneficiado com esta interação, pois ao explicar para o colega seu raciocínio, pensa sobre o seu conhecimento e reestrutura seu pensamento, de modo a ser entendido. Deste modo, inferimos que nesta interação as condições elencadas por Anna Sfard e Noreen Webb foram satisfeitas o que nos leva a conjecturar que a mesma favoreceu a aprendizagem dos alunos.

Não caracterizamos esta interação como um diálogo nem como uma interação dialógica visto que a mesma não gera uma investigação, não contempla atos dialógicos e não visa discutir idéias ou diferentes pontos de vista. O Objetivo claro desta interação é fazer com que A4 compreenda como utilizar frações parciais para resolver a Equação Diferencial em questão. A Figura 30 apresenta um quadro-resumo da análise do *Episódio* 13.

Figura 30 – Quadro-Resumo da Análise do Episódio 13

<i>Episódio 13</i>	Análise
Interação Dialógica/ de autoridade	<i>De autoridade</i>
Padrões de interação	
Diálogo	<i>não</i>
Atos dialógicos	
Condições elencados por Noreen Webb	<i>satisfeitas</i>
Condições elencados por Anna Sfard	<i>satisfeitas</i>

Após resolverem a Equação Diferencial e encontrarem

$y = \frac{ky_0}{y_0 + (k - y_0)e^{-rt}}$, sendo y_0 = área inicial e k = limite máximo para a área de cultivo, o grupo continua a atividade substituindo os valores de y_0 e k .

Neste momento discutem sobre o limite máximo para a área de cultivo de soja e decidem trabalhar com uma simulação S1: *o limite máximo para área de cultivo de soja no Brasil é de 57 677 000 ha*. Esta definição deu-se pelo fato de considerarem que a área destinada para o cultivo de soja não poderia ser a área total de cultivo do Brasil em virtude da necessidade de outras culturas, e deste modo, estabelecem o limite máximo como sendo uma área próxima à área do sul do Brasil, utilizando $y_0 = 36000$ e $k = 57\,677\,000$ ha.

A Figura 31 apresenta um recorte do relatório entregue por este grupo explicando o estabelecimento desta simulação. Definição do modelo subjacente à S1.

Figura 31 – Definição do Modelo Subjacente à s1

Agora que encontramos o modelo, basta substituir os valores iniciais, ou seja, $y_0 = 36.000$ hectares e k a área máxima que o ambiente permite.

Entendemos que a área máxima de produção para a Soja não pode ser a área total cultivável no Brasil pois existem outras culturas que devem utilizar parte desta área. Deste modo, resolvemos limitar nossa área de cultivo.

Se $y_0 = 36.000$ hectares e k e a área máxima que o ambiente permite, vamos supor que a área do sul do Brasil inteira fosse cultivada por soja, logo $k = 57.677.000$ hectares. Assim,

temos
$$y = \frac{57\,677\,000 \times 36\,000}{36\,000 + (57\,677\,000 - 36\,000)e^{-rt}}$$
.

Porém como não temos “ r ”, iremos colocá-lo em termos de uma função de 1º grau definida

Observamos no recorte do relatório apresentado na Figura 31 que os alunos se referem à determinação de uma função do primeiro grau que estabeleça $-rt$ em função de t . Salientamos que para considerarem esta solução foi necessária a intervenção da professora. Os alunos recorrem à professora argumentando que o modelo apresenta y em função de r e t e que não conhecem o valor de r . Diante disto, a professora apresenta, de forma não interativa, uma estratégia para solucionar este problema. Após a explicação da professora os alunos estabelecem “ $-rt$ ” em função apenas de t , como mostra o recorte do relatório final apresentado na Figura 32.

Figura 32 – Procedimentos dos Alunos para Determinar “ $-rt$ ”

$$y = \frac{ky_0}{y_0 + (k - y_0)e^{-rt}}$$

$$y_0 + (k - y_0)e^{-rt} = \frac{ky_0}{y}$$

$$y(k - y_0)e^{-rt} = y_0k - yy_0$$

$$e^{-rt} = \frac{y_0(k - y)}{y(k - y_0)}$$

$$-rt = \ln \left[\frac{y_0(k - y)}{y(k - y_0)} \right]$$

A partir daí montamos uma tabela com valores de tempo e valores encontrados por “ $-rt$ ” (substituindo o y no seu respectivo tempo na função de “ $-rt$ ”).

tempo	área	($-rt$)
1941	36000	0
1949	143000	-1,38118373
1950	300000	-2,12485412
1960	1000000	-3,34110195
1970	5000000	-5,02372928
1980	9200000	-5,71658416
1990	11000000	-5,93311379
2000	18000000	-6,58806976
2006	20500000	-6,7832041
2007	21200000	-6,83578871

Para escrever “ $-rt$ ” como uma função do primeiro grau, podemos utilizar o método dos mínimos quadrados, porém por ferramenta computacional, encontramos a função que representa “ $-rt$ ” em função de t . (...) Assim obtemos $-rt = -0,095t + 185,1$

Na sequência o grupo substitui a função $-rt = -0,095t + 185,1$ em

$$y = \frac{57\,677\,000 \cdot 36\,000}{36\,000 + (57\,677\,000 - 36\,000)e^{-rt}} \text{ e obtém o } y(t) = \frac{20,76372 \cdot 10^{12}}{36\,000 + (57\,641\,000)e^{-0,095t + 185,1}}$$

A validação deste modelo está representada na Tabela 7.

Validação do modelo supondo $y_0 = 36\,000$ hectares e $k = 57\,677\,000$.

A Figura 33 apresenta um recorte do relatório onde os alunos não aceitam o modelo e estabelecem uma nova simulação.

Figura 33 – Recorte do Relatório Final sobre a Validação do Modelo e Definição de s2

ano	Área	(-rt)	Projeção (y)	erro
1941	36000	0	100916,363	180,32%
1949	143000	-1,38118373	216908,471	51,68%
1950	300000	-2,12485412	238649,758	-20,45%
1960	1000000	-3,34110195	618539,59	-38,15%
1970	5000000	-5,02372928	1586447,1	-68,27%
1980	9200000	-5,71658416	3963745,69	-56,92%
1990	11000000	-5,93311379	9312018,68	-15,35%
2000	18000000	-6,58806976	19285666,5	7,14%
2006	20500000	-6,7832041	27209865,8	32,73%
2007	21200000	-6,83578871	28590945,5	34,86%

Observamos que os valores encontrados pela modelagem possuem uma diferença muito grande em relação aos dados reais nos anos de 1960 a 1980, além dos dois primeiros pontos. (...). Observando mais uma vez os resultados da projeção, verifica-se que os valores a partir de 1990 possuem uma diferença aceitável, pressuposto que dificilmente encontraríamos uma função que descrevesse exatamente os resultados obtidos na realidade, já que na situação real, existem muitas variáveis que influenciariam no crescimento da área de cultivo da soja. Porém a diferença encontrada ainda se encontra muito alta. Acreditamos que este erro percentual seja proveniente do limite estipulado por nós: 57677000ha ser muito alto uma vez que o último valor observado é 21200000ha. Desta forma reduziremos nosso limite de área a ser atingido, de forma a tentar encontrar menores diferenças na projeção.

(...) reduziremos a área máxima a ser atingida para 25.000.000 hectares, uma área próxima à área do Paraná ... 19.340.000, supondo que a área total de cultivo de soja seja similar à área do Paraná.(...) Veja que, como o limite a ser atingido foi reduzido, nossa função (-rt) também muda. (...). Deste modo, nosso gráfico também se altera, alterando os pontos modelados, diminuindo assim a diferença entre os dados do modelo e os dados reais. (...) Perceba que no início dos pontos ainda existe uma diferença grande, porém com a mudança de máximo, diminuimos a diferença nos últimos pontos.

A Tabela 8 apresenta a validação do modelo utilizando S2: $y_0 = 36000$ ha e $k = 25000000$ ha.

Validação do modelo supondo $y_0 = 36000$ hectares e $k = 25000000$.

Tabela 8 – Validação do modelo supondo $y_0 = 36000$ ha e $k = 25000000$

tempo	área	(-rt)	projeção	erro
1941	36000	0	76546,12	112,63%
1949	143000	-1,38362108	192716,74	34,77%
1950	300000	-2,13089508	216215,102	-27,93%
1960	1000000	-3,3636173	676891,515	-32,31%
1970	5000000	-5,15537677	2038375,55	-59,23%
1980	9200000	-6,00086467	5517158,78	-40,03%
1990	11000000	-6,30050907	11865102,3	7,86%
2000	18000000	-7,48613274	18559276,5	3,11%
2006	20500000	-8,05801862	21312449,2	3,96%
2007	21200000	-8,26067124	21662408,2	2,18%

Após esta validação o grupo, considerando que a diferença entre os valores obtidos por meio do modelo e os dados reais continuava grande, procurou a professora e a interação apresentada no *Episódio 14*, descreve este momento.

A1: Prof, veja nossa validação (mostrando a validação apresentada na tabela 10). Nós tínhamos encontrado o modelo utilizando $k = 57677000$, mas aí achamos que o erro estava grande (referindo-se ao erro percentual). Aí diminuimos o limite máximo para 25 000 000ha... mas olha...até 1980 o erro ainda tá grande.

A2: lembra professora, nós estamos modelando os dados por uma equação logística, apesar dos dados sugerirem uma exponencial.

Prof: lembro sim. Onde está o maior problema? Onde vocês consideram que o erro está muito grande?

A2: Ignorando o primeiro valor, o problema maior está antes de 1980, com erro acentuado nos anos de 1970 e 1980. Mas olha, a gente já sabe porque isso acontece.

Prof: sabem? Por que?

A1: é que a partir de 1980 as coisas melhoraram para a produção de soja...

Prof: como assim?

A1: o processo de cultivo e produção passou por modificações e a utilização de tecnologias ajudou a melhorar o cultivo.

Prof: mas como melhorou se o crescimento da área de cultivo de 1980 para 1990 foi menor do que de 1960 para 1970 e de 1970 para 1980?? (mostrando os dados da Tabela 10).

A1: não é que aumentou a área professora, É que as técnicas de cultivo e colheita melhoraram e isso influenciou o aumento da produção, quer dizer, com a mesma área pode produzir mais entendeu?

Prof: ah.. entendi... então este modelo pode ser considerado satisfatório considerando estes fatores?

A1: até pode, mas estamos pensando em fazer outro modelo...

Prof: sério??? E o pretendem agora?

A1: pensamos em modelar só os últimos pontos.. a partir de 1980...

Prof: ok, podem fazer.. acho que vai ser interessante...

Neste momento o grupo decide investigar uma terceira simulação S3: *o limite máximo para área de cultivo de soja no Brasil é de 25 000 000 ha e o intervalo de tempo considerado é de 1980 à 2007*. O modelo encontrado nesta

simulação é
$$y = \frac{9200000 * 25000000}{9200000 + (15800000)e^{0,0871t+172,65}}$$

A Tabela 9 apresenta a validação deste modelo, considerada satisfatória pelo grupo.

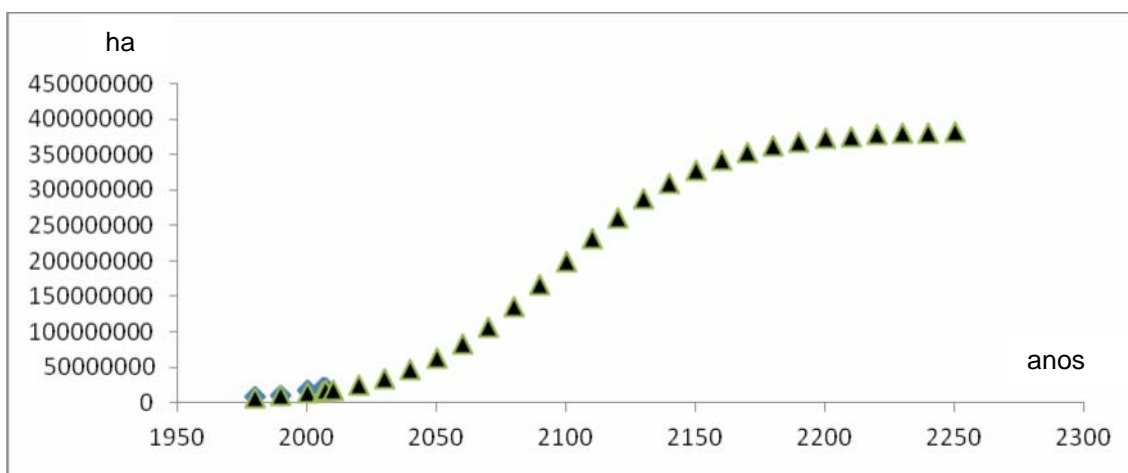
Tabela 9 – Validação do terceiro modelo

tempo	área	(-rt)	projeção	erro
1980	9200000	0	8114479,309	-13,38%
1990	11000000	-0,2996	13362337,72	17,68%
2000	18000000	-1,4853	18321557,37	1,76%
2006	20500000	-2,0572	20556714,49	0,28%
2007	21200000	-2,2598	20866061,99	-1,60%

Tendo observado que, limitando a pesquisa aos últimos anos poderiam obter um modelo satisfatório, o grupo decidiu realizar mais uma aproximação, satisfazendo a curiosidade inicial de que a área total cultivável do Brasil pudesse ser toda utilizada para cultivo de soja. Propuseram então um último modelo considerando o período de 1980 à 2007 e a área total de cultivo no Brasil, ou seja, 384 000 000ha. Deste modo, obtiveram o quarto modelo:

$$y = \frac{9200000 * 384000000}{9200000 + (374800000)e^{0,0341t+67,62}}$$

A Figura 34 apresenta a representação gráfica do modelo, realizada com da planilha de cálculo Excel, e a validação deste modelo é apresentada na Tabela 10.

Figura 34 – Representação Gráfica do Quarto Modelo**Tabela 10 –Validação do quarto modelo**

ano	área	(-rt)	projeção	erro
1980	9200000	0	6858114	-0,255
1990	11000000	-0,184	9566106	-0,13
2000	18000000	-0,695	13305651	-0,261
2006	20500000	-0,832	16189747	-0,21
2007	21200000	-0,867	16725275	-0,211

Diante desta validação o grupo considerou o modelo satisfatório. A Figura 35 apresenta um recorte do relatório final deste grupo com suas considerações sobre esta atividade de Modelagem Matemática.

Figura 35 – Consideração Finais do Grupo 1 para a Atividade 3

Em nosso estudo sobre área de cultivo de soja, podemos concluir, com base no último modelo, que se o crescimento da área cultivada permanecer constante, em 2250 toda a área cultivável do Brasil seria coberta por cultivo de soja, porém, é evidente que esta situação é inviável. (...) O trabalho serviu de grande importância na aplicabilidade de conceitos e técnicas matemáticas, além de nos levar a discutir sobre questões ambientais e sobre as conseqüências do crescimento de cultivo de soja visando a produção de biocombustível.

A interação apresentada no *Episódio 14* constitui uma interação dialógica uma vez que nela mais de uma voz é ouvida. A professora procura ouvir as perspectivas dos alunos, incentivando suas participações com enunciados de

prosseguimento nos turnos 5 (*sabem? Por que?*), 7 (*como assim?*) e 9 (*mas como melhorou se o crescimento da área de cultivo de 1980 para 1990 foi menor do que de 1960 para 1970 e de 1970 para 1980??*) levando-os a elaborar melhor suas idéias, gerando assim uma cadeia de interação não- triádica.

Mais uma vez nota-se que o encaminhamento dado pela professora, elaborando questões de prosseguimento do tipo processo atua decisivamente na constituição do tipo de interação estabelecida. Percebe-se ainda que o objetivo desta interação não consiste em desenvolver algum conceito matemático mas sim, analisar a confiabilidade do modelo e argumentar as simplificações realizadas com base em informações adquiridas da situação em estudo. O padrão de interação estabelecido nesta interação é:

Turno	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Tipo de interação	I _T	R	P _T	R	P _T	R	P _T	R	P _T	R	P _T	R	A _T

Nesta interação os alunos *estabelecem contato* com a professora, *posicionam-se* quanto às idéias e procedimentos que pretendem adotar e *reformulam* suas idéias. A professora por sua vez, *estabelece a igualdade* quando se mostra interessada e curiosa em relação ao que estão argumentando, ao mesmo tempo em que *avalia* as sugestões e idéias dos alunos. Além disso, esta interação favorece o desenvolvimento de uma atitude crítica visto que os alunos procuram entender o motivo dos erros percentuais do modelo antes de aceitá-lo e se interessam pelos aspectos que movem estas diferenças. Deste modo, consideramos esta interação um diálogo. Na Figura 36 apresentamos um quadro-resumo da análise realizada no *Episódio 14*.

Figura 36 – Quadro-Resumo da Análise do Episódio

<i>Episódio 14</i>	Análise
Interação Dialógica/ de autoridade	<i>Dialógica</i>
Padrões de interação	<i>I_T – R- P_T –R-- P_T –R-- P_T R-A_T</i>
Diálogo	<i>sim</i>
Atos dialógicos	<i>Estabelecer contato, posicionar-se, reformular, avaliar</i>
Condições elencadas por Noreen Webb	<i>Não analisadas</i>
Condições elencadas por Anna Sfard	<i>Não analisadas</i>

Na figura 37 apresentamos um quadro-resumo das interações analisadas na Atividade 3. Esta atividade, assim como a Atividade 1, contempla a variação de abordagens comunicativas, sendo que a maioria das interações constituem um diálogo como o caracterizado por Alro e Skovsmose (2006) e são interações dialógicas. De fato, nestas interações (10, 11 e 14) os alunos (e a professora) elaboram questões, emitem opiniões, discutem idéias e consideram diferentes pontos de vista e a professora procura ouvir as perspectivas dos alunos, incentivando suas participações com enunciados de prosseguimento de processo, em sua maioria.

Figura 37 – Quadro-Resumo da Análise de Todos os Episódios

<i>Episódios</i>	<i>Dialógica / de autoridade</i>	<i>Diálogo</i>	<i>Condições elencadas por Noreen Webb</i>	<i>Condições elencadas por Anna Sfard</i>
10	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Não analisadas</i>	<i>Não analisadas</i>
11	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
12	<i>De autoridade</i>	<i>Não</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
13	<i>De autoridade</i>	<i>Não</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
14	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Não analisadas</i>	<i>Não analisadas</i>

O objetivo da interação 10 consiste em discutir a importância do biocombustível para a sociedade e para o meio ambiente, das conseqüências do aumento de percentagem do plantio de soja destinado ao biocombustível e da preocupação dos alunos em relação à alimentação. Nesta interação a professora procura ouvir as opiniões e idéias dos alunos. Já na interação 11 o objetivo da

mesma consiste em elaborar uma hipótese para a situação em estudo. Esta interação contribui para o desenvolvimento da criticidade, levando o aluno a compreender a necessidade de considerar as características da situação em estudo e não apenas seus dados numéricos. O objetivo da interação 14 não consistiu em desenvolver algum conceito matemático mas sim, apresentar à professora uma análise geral da situação em estudo, argumentando em favor das simplificações realizadas.

Quanto as interações consideradas de autoridade (Episódios 12 e 13) a professora tinha a clara intenção de apresentar um novo conceito, novos termos ou novas idéias.

As condições elencadas por Anna Sfard e Noreen Webb foram analisadas nos *Episódio* 11, 12 e 13. Nestes Episódios, assim como ocorreu com a Atividade 1, a discussão guiou-se no sentido de compreender e utilizar conceitos matemáticos. Consideramos ainda que estas três interações satisfazem as condições propostas pelas pesquisadoras, podendo assim, contribuir para a aprendizagem da matemática escolar. Deste modo, o papel da professora parece decisivo para a configuração das interações, conforme salientam Mortimer e Scott (2002) e Mortimer et. al. (2007).

Como enunciamos no Capítulo 1, a Modelagem Matemática como um *contexto-simulado* leva em consideração as características ou elementos da situação-problema que influenciam o desenvolvimento da atividade e, em certa medida, conduzem as interações entre alunos e entre estes e professores. O desenvolvimento desta atividade vem confirmar esta assertiva e a situação-problema estudada caracteriza-se como uma situação de interesse desta comunidade, realizável na mente do aluno, constituindo uma situação familiar e oportunizando a participação ativa do aluno por meio das interações estabelecidas. Neste desenvolvimento, em particular, os alunos tiveram a oportunidade de experimentar diferentes simulações, fruto do conhecimento real e cotidiano da situação. Consideramos que as características da situação-problema colaboram significativamente com o estabelecimento das ações executadas pelos envolvidos na atividade.

5.2.4 Atividade 8: Contaminação Dupla de uma Mistura com Acetato de Etila

Assim como as duas atividades anteriores, a descrição e análise desta atividade foi dividida em duas partes: Na parte A apresentamos o problema, as variáveis, a hipótese, a tendência dos dados e o modelo matemático obtido. Na parte B descrevemos o envolvimento dos alunos e da professora, apresentando algumas interações e analisando-as à luz do referencial teórico.

Esta atividade foi desenvolvida por dois grupos de alunos, o grupo 2 e o grupo 4, e originou-se do estudo *sobre a Contaminação com Hidróxido de Sódio em um recipiente com fluxo contínuo* realizado por alunos do grupo 3 e 4. Neste estudo realizado anteriormente, as alunas mostraram-se interessadas em estudar a contaminação química de lagos quando a fonte de contaminação é a entrada de água contaminada e as vazões de entrada e de saída podem ser consideradas iguais.

Após esta atividade (que tratou o problema da contaminação com *Hidróxido de Sódio*) alguns alunos (dos grupos G2 e G4) demonstraram interesse em investigar outra situação: uma contaminação com duas fontes de entrada em intervalos de tempo diferentes, isto é, a segunda fonte de entrada inicia quando cessa a primeira fonte de entrada. Na impossibilidade de coletar dados em uma situação do cotidiano, os alunos, juntamente com a professora optaram por realizar uma simulação em um laboratório de química (sob a supervisão de uma professora de Química). Nesta simulação o grupo prepara duas misturas diferentes que serão inseridas em um recipiente (R) contendo 4,5L de água pura: a primeira mistura é preparada com água e acetato de etila, ficando com concentração $c_1=26,7\text{ml/L}$ de acetato de etila e a segunda mistura é preparada com concentração $c_2= 40\text{ml/L}$ de acetato de etila. Na simulação realizada no laboratório a vazão de entrada e saída das misturas são iguais e constantes, sendo esta 1,74 L/min. Durante 5 minutos é adicionada a primeira mistura com concentração $c_1=26,7\text{ml/L}$ e após este intervalo de tempo, cessa esta entrada e inicia a entrada da segunda mistura com concentração $c_2= 40\text{ml/L}$. A coleta de dados é feita a cada 0,5 minutos. O grupo considera que as únicas fontes de entrada no recipiente (R) são estas misturas contaminadas e que a mistura é homogênea. O objetivo do grupo consiste em determinar a quantidade de acetato de Etila no recipiente (R) em qualquer instante.

Esta atividade não tem sua origem em uma situação do real, porém, faz referência a situações que podem ocorrer no cotidiano do Engenheiro Ambiental e são realizáveis na mente do aluno. Neste sentido entendemos o interesse deste grupo em pesquisar esta situação.

5.2.4.1 Parte A: A Situação-Problema e sua Solução

Tema Contaminação dupla de uma mistura com acetato de Etila

Problema: Estudar a variação da quantidade de acetato de Etila em um recipiente (R) em que são adicionadas, em intervalos de tempo diferentes, duas misturas com concentrações diferentes de acetato de Etila (c_1 e c_2). Durante o tempo em que são adicionadas as misturas existe um fluxo contínuo de saída da mistura homogênea.

Variáveis:

$C(t)$ = concentração de acetato de etila (medida em ml/L) no instante t ;

t : tempo em minutos;

$x(t)$ = quantidade de acetato de etila no instante t (medida em ml).

Dados:

Vazão de entrada e saída: 1,74 L/min;

Concentração 1: $c_1=26,7\text{ml/L}$ (concentração da mistura 1 que é adicionada nos 5 primeiros minutos);

Concentração 2: $c_2= 40\text{ml/L}$ (concentração da mistura 2 é adicionada após os 5 primeiros minutos);;

Concentração 3: $c_3= \frac{x(t)}{V}$ (concentração da mistura que está saindo em qualquer instante)

Volume do recipiente (R): $V=4,5$ L.

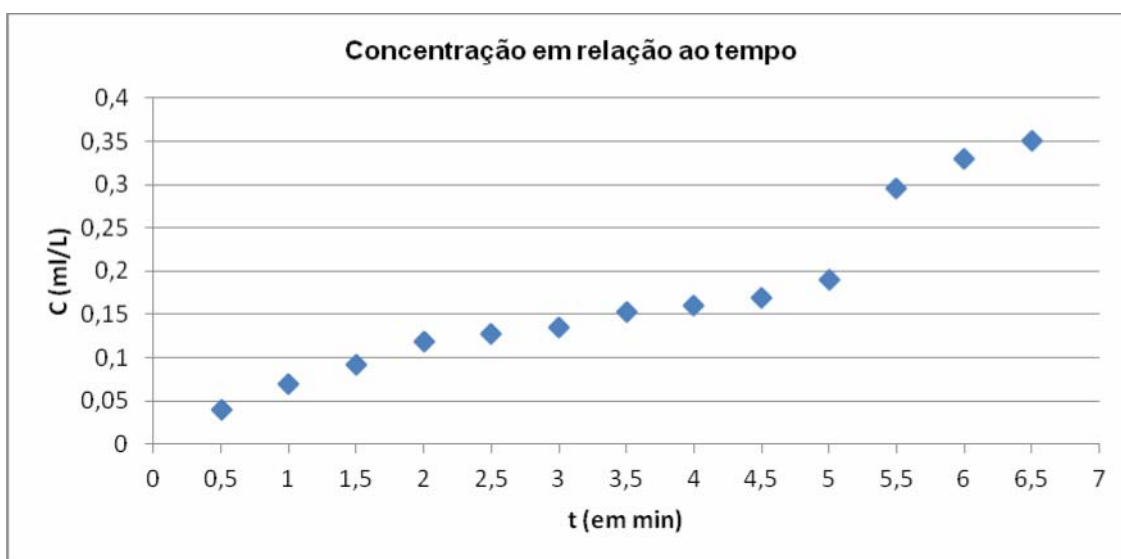
A tabela 11 apresenta os dados coletados no laboratório relativos à concentração de acetato de Etila em relação ao tempo. A tendência destes dados está representada graficamente na Figura 38.

Tabela 11 –Dados referentes à concentração de acetato de etila em relação ao tempo

tempo(min)	C (ml/L)
0	0
0,5	0,040365273
1	0,069401803
1,5	0,092050178
2	0,118418249
2,5	0,12781103
3	0,134825836
3,5	0,153506796
4	0,160700574
4,5	0,169520496
5	0,190084525
5,5	0,295947727
6	0,329324913
6,5	0,350061496

Tendência dos dados

Figura 38 – Tendência dos Dados: Concentração em Relação ao Tempo



Hipótese

H_1 : a taxa de variação da quantidade de acetato de etila em relação ao tempo é igual à diferença entre a quantidade que entra e a quantidade que sai;

Modelo matemático associado à hipótese

$$\frac{dx}{dt} = M_1 - M$$

Sendo $M_1 = c_1 \cdot \text{vazão } 1$ e $M = c_3 \cdot \text{vazão } 3$.

Modelo matemático encontrado após a determinação dos parâmetros:

$$x(t) = \begin{cases} 119,13 - 119,13e^{-0,39t} & \text{se } 0 < t < 5 \\ 178,46 - 119,13e^{-0,39t} - 59,33e^{-0,39(t-5)} & \text{se } t \geq 5 \end{cases}$$

5.2.4.2 Parte B - O envolvimento dos alunos no desenvolvimento da Atividade 8: análise específica das interações

A partir do interesse dos alunos em investigar esta situação, os dois grupos de alunos iniciaram, com a colaboração da professora, suas investigações. O *Episódio 15* relata a interação com a finalidade de definir hipóteses para o problema⁴⁷.

A5: professora, pensamos assim... vai entrando uma concentração depois de um tempo para de entrar esta mistura e entra outra com outra concentração...

Prof: ok

A7: Com as três vazões iguais

Prof: certo... e como podemos representar esta situação?

A7: é aquele negócio de concentração vezes vazão...

A6: gente, tudo que tá entrando tá saindo? [enquanto A5 e A7 iniciavam uma conversa com a professora, A6 estava escrevendo algumas coisas em suas anotações e, ignorando totalmente a conversa anterior, parece dar um novo rumo à conversa, trazendo os colegas à investigação da situação].

A7: como?

A6: a mesma quantidade que entra sai né?

A7: tá...tá saindo...

A5: tá entrando misturando e saindo

A7: acho que o modelo vai ser com taxa de variação (falando para si mesmo como se estivesse pensando alto)

A5: a gente vai ver como se comporta a concentração em qualquer instante (falando sozinha, como se estivesse pensando alto)

⁴⁷ Neste encontro o grupo não tinha decidido como coletar os dados, estavam iniciando suas conjecturas em relação à situação de interesse.

A7: assim ó... a concentração é zero, aí entra uma mistura e vai saindo, quando a outra entra já tá misturado...

A5: como vamos escrever isso?

A7: ah... não é difícil.. só temos que pensar um pouco

A5: risos

A7: é verdade... é só pensar um pouco...

A6: o que nós queremos saber mesmo?

A5: como se comporta a concentração...

A7: é o que entra mesmo o que sai...

A6: mas gente...(colocando a mão no rosto e olhando para cima como se estivesse pensando) a concentração ó...vamos pensar em um balde... se a gente tem um balde com água, aí a gente vai jogando uma mistura.. vamos supor que seja sal... aí vai ter mais água e mais sal...

A5: mas não vai entrar água...

A6: vai sim... é uma mistura... é água com sal

A7: não entendi o que você falou... [parando suas anotações e prestando atenção à colega]

A6: assim ó... você tem uma mistura de água e sal, você catou mais um tanto de água e um tanto de sal e jogou lá dentro, o que vai acontecer? Vai ficar com mais água e mais sal (ênfatizando a palavra 'mais') Vai ficar mais concentrado... mas depende da concentração que tem lá dentro....

A7: (acompanhando de perto as considerações de A6 e completando sua idéia) às vezes a concentração pode até diminuir...

A6: pode até diminuir...

A7: pode diminuir ou aumentar...

A6: depende do tanto de líquido que entra

A7: depende da concentração...

A5: mas a mesma concentração que entra tá saindo??

A6: então... não... porque tá misturando

A7: (escrevendo em suas anotações) concentração é massa sobre volume (falando sozinho, como se estivesse pensando alto)

A6: é... sobre volume [completando a idéia de A7].

A5: a não ser que... mesmo assim...(a aluna não completa o que pensou e já rejeita sua idéia, como se estivesse falando consigo mesma, pensando alto).

A7: se a vazão é igual...

A6: então consideramos constante... mas péra aí... vamos ver.. é de acordo com o tempo né?

A5: é... tipo no tempo 1... no tempo 1...(repete várias vezes no tempo 1, no tempo 1... rápido, como se estivesse buscando alguma idéia, pensando alto)...é igual o que entra...

A6: (interrompendo A5) no tempo 1 vai ser o que tem lá.. então seria água mais M1.

A5: mas vai só sair água não vai? No tempo 1? (quando os alunos falam 'tempo 1' estão se referindo ao primeiro intervalo)

A6: vai sair M1 também... M1 tá sendo adicionado (fazendo movimentos com as mãos no sentido de estar jogando algo de um recipiente para outro)

A5: M1 tá sendo adicionado... a água tá lá... vamos dizer que seria M1 que tá entrando e vamos dizer que tá saindo água no tempo 1...

A6: (interrompendo A5) mas por quê tá saindo só água? (ênfatizando o termo 'só')

A5: Porque tá embaixo...(risos)

A6: não esquece da homogeneidade.. tá misturando
A5: mas aqui é a concentração.. é a mesma coisa...
A6: a concentração não é a mesma..
A5: é sim... é água e sal... a outra não é água e sal?
A6: mas com quantidades diferentes.. a concentração é diferente.
Aqui pode ter 100ml de água e 2 gramas de sal... aqui pode ter 50ml de água e 30g de sal...as duas são misturadas.
A5: é.. então não é então...mistura tudo...
A6: a gente tem que relacionar M1.. tipo a gente tem M1 em função do tempo... M2 em função do tempo... e vai ter que juntar... não tem aquele negócio de tudo que entra e que sai?
A7: aquilo é de pressão.. não tem nada a ver... é de pressão e altura...
A6: é verdade...
Prof: como estão?
A7: nós imaginamos assim.... fazer uma expressão prá cada...
A6: prá cada instante...
Prof: para cada instante??
A5: para cada intervalo
Prof: ótimo
A7: porque no instante que entra alguma coisa... então .. tipo assim, tem aquela coisa fixa... mais uma coisa que tá sendo adicionada... mas as duas estão saindo entendeu? Tipo a vazão é igual... (falando pausadamente, olhando e escrevendo em suas anotações como se estivesse construindo as idéias ao mesmo tempo em que fala)
A6: então... no tempo zero só tem água... depois entra M1
A7: a gente tem.. por exemplo... uma concentração... mais uma concentração...(escrevendo)

Como a professora percebe que os dois grupos estão com dificuldades para construir o modelo, interrompe os alunos e se dispõe a orientá-los a partir de uma 'explicação' de A6. Após a explicação da aluna a professora continua a interação com os dois grupos. Esta interação será apresentada no *Episódio 16*.

O *Episódio 15* revela uma conversação um tanto confusa, os alunos não avançam em suas idéias. A única relação que conseguem visualizar é que o processo é caracterizado por uma mistura que entra e outra que sai. Mesmo assim esta interação está mais próxima do extremo dialógico no contínuo dialógico/de autoridade, visto que o que caracteriza uma interação de autoridade é o encaminhamento das questões no sentido de chegar a um ponto de vista específico, geralmente pré-estabelecido por aquele que conduz a conversação. O padrão de interação estabelecido é o tipo não triádico com cadeias abertas envolvendo iniciações, respostas e prosseguimentos. È possível observar que os alunos estão em sintonia, prestando atenção ao que o outro fala, nas idéias e argumentos dos outros, completando-as, refutando-as ou desafiando-as. Apesar de não conseguirem

expressar matematicamente a situação, os alunos investigam a mesma e fazem suposições, analisando o processo.

Uma das ações dos envolvidos em uma atividade de Modelagem Matemática é a ‘matematização’ da situação, em que se faz necessário representar a situação em estudo (que se encontra na linguagem natural) em uma linguagem matemática. Observa-se neste *Episódio* que os alunos demonstram dificuldades em ‘matematizar’ a situação e necessitam da orientação da professora para efetivá-la.

Um diálogo é estabelecido visto que esta interação implica em uma investigação e promove a igualdade. Os atos dialógicos *estabelecer contato, pensar alto, perceber, reformular e posicionar-se* estão presentes nesta interação.

Os focos pronunciado, observado e pretendido parecem ser coincidentes uma vez que os alunos apontam para suas anotações quando falam e fazem gestos simulando o processo, e são entendidos uns pelos outros. Percebemos um conflito comunicacional entre os turnos 40 a 50. A percepção de A5 difere da realidade da situação e, após a conversação com A6 a aluna A5 muda sua perspectiva, estabelecendo-se assim um acordo implícito sobre o discurso principal e o papel dos interlocutores. Deste modo, entendemos que a comunicação foi estabelecida, favorecendo a aprendizagem.

Esta mesma sequência de turnos (40 à 50), nos parece uma solicitação (implícita) de ajuda. Em 40 a aluna A5 elabora uma questão que não condiz com a situação e na verdade evidencia sua concepção. A aluna A6 tenta, sem sucesso, dizer que a mistura M1 também está saindo, mas não foi feliz em sua colocação, tanto que no turno 42 a aluna A5 continua com sua perspectiva equivocada. Na sequência A6 desafia a perspectiva de A5 quando questiona porque esta aluna continua afirmando que *apenas* água está saindo. A aluna A5 não consegue explicar seu ponto de vista, indicando falhas em seu entendimento e, somente após as argumentações de A6, com explicações exemplificadas, é que A5 modifica sua perspectiva e entende que o que sai é uma mistura homogênea. Como a ajuda foi aceita e compreendida por A5 conjecturamos que as condições elencadas por Noreen Webb foram satisfeitas e deste modo, esta interação propiciou a aprendizagem.

Na figura 39 apresentamos um quadro-resumo da análise deste episódio.

Figura 39 – Quadro-Resumo da Análise do Episódio 15

<i>Episódio 15</i>	Análise
Interação Dialógica/ de autoridade	<i>Dialógica</i>
Padrões de interação	<i>I-R-P-...</i>
Diálogo	<i>Sim</i>
Atos dialógicos	<i>estabelecer contato, pensar alto, perceber, reformular e posicionar-se</i>
Condições elencadas por Noreen Webb	<i>satisfeitas</i>
Condições elencadas por Anna Sfard	<i>satisfeitas</i>

Após a interação apresentada no *Episódio 15*, tendo a professora observado a dificuldade dos alunos para construir o modelo matemático, solicita atenção dos dois grupos e estabelece a seguinte conversação:

Prof: como podemos saber a concentração em qualquer instante?
A7: Bom... a concentração é a quantidade dividida pelo volume... então se a gente achar a quantidade que tem em cada tempo a gente acha a concentração né?
A5 e A6: é...
A7: nós visualizamos assim professora: o que entra menos o que sai...
Prof: ok.. mas isto é fixo? A concentração que entra é fixa em qualquer momento?
A7: não
Prof: é o que então?
A7: varia com o tempo... é instantânea... é a quantidade que entra naquela hora... depende da hora...
Prof: e como a gente acha uma quantidade instantânea?
A7: derivadas... eu sabia....
Prof: derivadas... como fica então?
A6: a variação da quantidade em relação ao tempo... (*escrevendo* $\frac{dx}{dt}$ *em suas anotações*)
A7: (*completando a fala de A5*) é igual o que tá entrando menos o que tá saindo... (*escrevendo* $\frac{dx}{dt} = M_1 - M$).
Prof: ok... o que é esse x? [*escrevendo no quadro a equação* $\frac{dx}{dt} = M_1 - M$ *e apontando para o 'x'*]
A6: é a quantidade.. pode ser??
Prof: pode.. e o que é M_1 ?
A6: é a mistura que tá entrando... é a concentração do que tá entrando vezes a vazão.
A12: vamos considerar homogêneo né professora? Que tá sendo tudo misturado.
Prof: sim.

A14: a concentração que entra a gente sabe.. mas a quantidade que sai a gente não sabe... tá misturado...

A7: pode ser maior ou menor... depende do que tá entrando...

A11: tá saindo c_1

A12: tá saindo uma mistura...

A14: é outra concentração...

Prof: e como a gente pode expressar essa concentração que tá saindo?

A6: então... é uma incógnita... é isso que a gente tem que achar... em qualquer instante.. não é?

Prof: como?? Não entendi...

A6: ah... a concentração é a quantidade dividida pelo volume... então se a gente achar a concentração a gente acha a quantidade

porque o volume a gente tem..(escrevendo $c_3 = \frac{x}{V}$)

Prof: então vamos voltar para o M... O que é ele mesmo?

A7: a concentração que tá saindo vezes a vazão

(a professora escreve no quadro $M = c_3 \cdot \text{vazão}$)

Prof: ok... a vazão nós temos né? O que é mesmo a concentração A6?

A6: é a quantidade dividida pelo volume

Prof: ok, o volume a gente tem né? Então como fica?

A12: a quantidade vai ser x mesmo?

Prof: pode ser... Então... como fica M se nós temos o volume e a vazão é a quantidade dividida pelo volume?

A7: fica M igual a quantidade dividida pelo volume vezes a vazão...

Prof: ok... quantidade dividida pelo volume vezes a vazão

(escrevendo no quadro $M = \frac{x}{\text{vol}} \cdot \text{vazão}_3$). E agora? Como fica a equação toda?

A14: como?

Prof: vamos substituir M1 e M nesta equação diferencial... como

fica? (mostrando a equação diferencial $\frac{dx}{dt} = M_1 - M$)

A5: $\frac{dx}{dt} = c_1 \cdot \text{vazão}_1 - \frac{x}{\text{vol}} \cdot \text{vazão}_3$

A6: as vazões são iguais né? Aí fica $\frac{dx}{dt} = c_1 \cdot \text{vazão} - \frac{x}{\text{vol}} \cdot \text{vazão}$.

A7: resolvendo esta equação a gente acha a quantidade em função do tempo né? Aí dá certo...

Prof: agora analisem comigo... resolvendo esta equação aqui a gente acha a quantidade que tem em qualquer tempo? (apontando

para a equação diferencial $\frac{dx}{dt} = c_1 \cdot \text{vazão} - \frac{x}{\text{vol}} \cdot \text{vazão}$)

A6: não (muito baixo, a professora não ouve e continua esperando alguma resposta dos alunos)

Prof: então?

A6: não... não é isso que tá acontecendo...

A professora continua sem ouvir a resposta da aluna e questiona a turma novamente, a aluna A6 balança a cabeça em sinal de negação.

A12: antes de chegar o... a outra mistura é isso que tá acontecendo...

Prof: então escreva isso.. tá faltando escrever o que nesta equação?

A14: mas professora, como que eu faço para limitar o tempo? Porque isso aí é só de t_0 a t_1 ...

Prof: certo.. só vale para o primeiro intervalo

A14: tá.. aí...

Prof: então como a gente escreve isso matematicamente?

A14: eu que perguntei primeiro (em tom de brincadeira, fazendo com que todos rissem)

A11: escreve assim.... $\frac{dx}{dt} = c_1 \cdot \text{vazão} - \frac{x}{\text{vol}} \cdot \text{vazão}$ se $t_0 \leq t \leq t_1$

Prof: certo..Agora me digam uma coisa, esta equação descreve o fenômeno todo?

A6: o fenômeno todo??

Prof: é

A6: não

A14: mas olha prof, a gente até consegue imaginar, mas... tipo.. no tempo a concentração vai aumentando.. depois aumenta mais...

Prof: por quê?

A14: ah?

Prof: por quê a concentração vai aumentando?

A14: porque depende da mistura que entra...

Prof: e esta mistura que entra, depende do que?

A14: do que?? Ai meu Deus do céu...

Prof: olha... o que interfere, o que faz com que entre a mistura 1 ou a mistura 2?

A12: o tempoooo!!

Prof: isso mesmo... o tempo.. o intervalo de tempo...Então.. o que está acontecendo com o fenômeno?

A12: no primeiro intervalo de tempo é essa aí (*mostrando a equação*

diferencial $\frac{dx}{dt} = c_1 \cdot \text{vazão} - \frac{x}{\text{vol}} \cdot \text{vazão}$) e depois é a concentração dois vezes a vazão menos o que tem naquele momento vezes a vazão...

Deste modo professora e alunos estabelecem a equação diferencial

definida por duas sentenças:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} c_1 \cdot v - \frac{x(t)}{\text{Volume}} \cdot v & \text{se } t_0 < t < t_1 \\ c_2 \cdot v - \frac{x(t)}{\text{Volume}} \cdot v & \text{se } t \geq t_1 \end{cases}, \text{ sendo } c_1 = \text{Concentração 1}, c_2 = \text{Concentração e } v = \text{vazão}.$$

Após o estabelecimento desta equação a professora sugere que a resolvam e os alunos argumentam que não sabem como resolver. Aproveitando o momento oportuno, a professora decide introduzir o conceito de Transformada de Laplace, visto que esta equação pode ser resolvida com sua utilização.

Episódio 16- continuação

Prof: Bem, primeiramente vamos ter que escrever esta equação de forma diferente... vamos ter que escrever esta equação definida por duas sentenças de uma forma compacta... Vocês sabem como fazer isso?

Alunos: ah? Não...

Prof: Vocês já ouviram falar em função degrau unitário?

A12: não que eu me lembre...

A11: não.

Prof: ok...A função degrau unitário nos auxilia a reescrever esta equação definida por duas sentenças em uma equação compacta, com uma sentença apenas.

A interação apresentada neste *Episódio* não foi caracterizada nem como dialógica nem como um diálogo visto que a mesma não propicia uma investigação nem os riscos inerentes a esta nem tampouco promove a igualdade.

A professora, elabora as questões de modo a chegar em um ponto de vista específico, seguindo sua própria linha de pensamento, selecionando contribuições que favorecem seu ponto de vista. Suas falas indicam que sabia muito bem onde chegar e deste modo, não desvia a atenção deste foco.

O padrão de interação que se estabelece é típico de uma interação de autoridade: a professora questiona, os alunos respondem, a professora avalia e em seguida elabora outra questão dando continuidade em seu pensamento.

Esta conversa começou com uma solicitação implícita de ajuda quando os alunos não conseguem determinar um modelo matemático coerente com a situação. Deste modo, todo este *Episódio* pode ser percebido como uma ajuda elaborada, oferecida pela professora, visto que ela não apresenta de imediato o modelo matemático e sim, orienta os alunos na construção deste modelo.

Observa-se um fluxo contínuo de declarações pró-ativas e reativas indicando a participação efetiva dos envolvidos. O acordo comunicacional é efetivado implicitamente, sendo a professora vista como instrutora e os alunos assumindo o papel de aprendizes. A mudança no discurso dos alunos pode ser percebida no turno 69 quando o aluno A12 consegue escrever a equação diferencial que representa bem a situação.

Mais uma vez nota-se que dependendo do seu objetivo, a professora estabelece um tipo de conversa com os alunos, e as características desta conversa oportunizam um ou outro padrão de interação, constituindo assim uma

interação de autoridade ou dialógica. No *Episódio* em questão o objetivo da professora é conduzir os alunos à matematização da situação e para tanto utiliza sua ‘autoridade’ e orienta os alunos nesta empreitada, não dando oportunidades para que outras ‘vozes’ fossem ouvidas além do conteúdo científico. Esta interação cumpre bem seu papel: conduz os alunos à representação matemática (matematização) da situação. Na figura 40 apresentamos um quadro-resumo da análise deste episódio.

Figura 40 – Quadro-Resumo da Análise do Episódio 17

<i>Episódio 16</i>	Análise
Interação Dialógica/ de autoridade	<i>De autoridade</i>
Padrões de interação	
Diálogo	<i>não</i>
Atos dialógicos	
Condições elencadas por Noreen Webb	<i>satisfeitas</i>
Condições elencadas por Anna Sfard	<i>satisfeitas</i>

A partir deste momento a professora explica, de modo não interativo, a definição e a aplicação da *Função Degrau Unitário*. Para facilitar a compreensão dos alunos, a professora resolveu um exemplo numérico, de modo que a equação ficou assim definida: $\frac{dx}{dt} = 2,4 - 1,2\mu(t - 10) - \frac{3x(t)}{500}$. Após o estabelecimento desta equação a professora indagou os alunos sobre a sua resolução. Os alunos sugeriram que poderia ser uma equação linear, porém, o termo $\mu(t - 10)$ fez com que desistissem da idéia. Afirmaram então não terem conhecimento suficiente para solucioná-la e a professora aproveitou a oportunidade para introduzir o estudo sobre Transformada de Laplace. Além da definição, a professora apresentou algumas propriedades da transformada de Laplace como a linearidade, a transformada inversa e alguns teoremas. Em seguida solicita que encontrem a transformada de algumas funções como também apliquem a inversa da transformada para determinar a função original. Os alunos reclamam um pouco quando observam que para encontrar a transformada de algumas funções era necessário utilizar integração por partes, além da integração imprópria que muitos não lembravam como fazer. O

encontro termina e combinam de retornar ao problema que estavam modelando no próximo encontro.

Porém, antes de saírem, os alunos sugerem à professora a realização de um experimento em laboratório de modo a coletar dados para a validação do modelo. Assim, antes do próximo encontro em sala de aula os alunos (juntamente com a professora e uma professora de Química) realizaram um experimento com o estabelecimento da mistura 1 (água e acetato de etila) com concentração 1 (C_1) igual à 26,7ml/L, da mistura 2 (água e acetato de etila) com concentração 2 (C_2) igual à 40ml/L, vazão (v) igual à 1,74L/min e volume do recipiente igual a 4,5L (Veja Figura 41), encontrando-se os dados apresentados na Tabela 12. Os dados apresentados na Tabela 12 foram utilizados apenas para a validação do modelo. Vale salientar que após o término desta atividade a professora comentou com os alunos que, de posse destes dados poderiam ter realizado uma atividade diferente, modelando a situação para o primeiro intervalo de tempo e depois, modelando para o segundo intervalo. Observando os dados, os alunos compreenderam que poderiam utilizar o Método de Ford-Walford para encontrar o valor de estabilidade para cada intervalo e assim modelar a situação. A professora considerou que esta metodologia seria interessante e sugeriu que em outra oportunidade poderiam realizá-la.

Figura 41 – Dados Estabelecidos em Laboratório

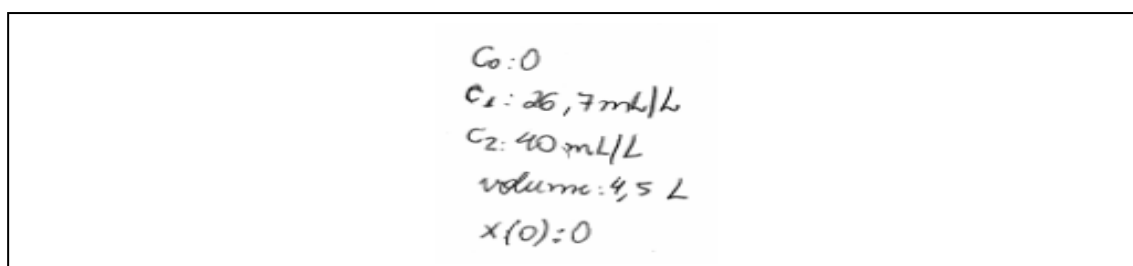


Tabela 12 –Dados referentes à concentração de acetato de Etila em relação ao tempo coletados em laboratório

tempo(min)	C (ml/L)
0	0
0,5	0,040365273
1	0,069401803
1,5	0,092050178
2	0,118418249
2,5	0,12781103
3	0,134825836
3,5	0,153506796
4	0,160700574
4,5	0,169520496
5	0,190084525
5,5	0,295947727
6	0,329324913
6,5	0,350061496

No encontro seguinte a professora inicia as atividades recapitulando o que foi elaborado no encontro anterior, a situação-problema e o caminho percorrido para determinar o modelo matemático. Em seguida, solicita aos alunos que trabalhem com a situação, resolvendo a Equação Diferencial com os valores estabelecidos no laboratório.

As figuras 42 e 43 apresentam recortes das notas dos alunos no momento de escrever a hipótese e estabelecer a Equação Diferencial definida por duas sentenças (agora com os dados coletados). Nota-se nestes recortes que o aluno A7 chama a vazão de Q.

Figura 42 – Recorte das notas do Aluno A7 no estabelecimento da hipótese

$x(t) = \text{quantidade}$
 $\frac{dx}{dt} = \text{Entree} - \text{Sai}$
 $C_s \cdot V_a - C_{\text{in}} \cdot V_a = V_a \cdot \frac{dx}{dt}$ (vazão e cte)
 $C_{\text{in}} = \text{concent.}$
 $V_a = \text{volume}$

Figura 43 – Recorte das notas da aluna A6 no estabelecimento da hipótese

$$\frac{dx}{dt} = \text{Ent} - \text{Sai} \quad G = \frac{X}{V}$$

$$C_1 \theta - G \theta$$

$$C_1 \theta - G \theta \Rightarrow \left(C_1 - \frac{X}{V} \right) \theta$$

$$C_2 \theta - \frac{X}{V} \theta \Rightarrow \left(C_2 - \frac{X}{V} \right) \theta$$

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} \left(C_1 - \frac{X}{V} \right) \theta, & \text{se } 0 \leq t \leq S \\ \left(C_2 - \frac{X}{V} \right) \theta & \text{se } t \geq S \end{cases}$$

Após o estabelecimento da Equação Diferencial definida por duas sentenças os alunos iniciam os procedimentos para escrevê-la de forma compacta, utilizando a Função Degrau Unitário. A Figura 44 apresenta um recorte das notas do aluno A7 onde podemos observar a utilização da Função Degrau Unitário para reescrever a equação e a Figura 45 apresenta um recorte das notas da aluna A6 onde escreve a definição da função Degrau Unitário e sua utilização para reescrever uma função definida por duas sentenças em uma função na forma compacta.

Figura 44 – Notas do aluno A7: Reescrita da Equação Diferencial definida por duas sentenças em uma equação compacta, utilizando a Função Degrau Unitário

$$\mu(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < 5 \\ 1, & \text{se } t \geq 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C_1 \theta - \frac{C_1 X}{V} \theta &= (C_1 - \frac{X}{V}) \theta \\ C_2 \theta - \frac{C_2 X}{V} \theta &= (C_2 - \frac{X}{V}) \theta \end{aligned}$$

Se $\frac{dx}{dt} = \begin{cases} (C_1 - \frac{X}{V}) \theta, & \text{se } 0 \leq t < 5 \\ (C_2 - \frac{X}{V}) \theta, & \text{se } t \geq 5 \end{cases}$

Podemos:

$$\frac{dx}{dt} = (C_1 - \frac{X}{V}) \cdot \theta \cdot \left[(C_1 - \frac{X}{V}) \theta \cdot U(t-a) + (C_2 - \frac{X}{V}) \theta \cdot U(t-a) \right]$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(46,46 - \frac{0,39X}{45} \right) - (46,46 - 0,39X) \mu(t-5) + (69,6 - 0,39X) \mu(t-5)$$

$$\frac{dx}{dt} = (46,46 - 0,39X) + \mu(t-5) (69,6 - 46,46)$$

$$\frac{dx}{dt} = 46,46 - 0,39X + 23,14 \mu(t-5)$$

Figura 45 – Notas da aluna A6: Definição da função degrau unitário e sua utilização para reescrever uma função definida por duas sentenças em uma forma compacta

$$\mu(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < a \\ 1, & \text{se } t \geq a \end{cases}$$

Se $f(t) = \begin{cases} g(t), & \text{se } 0 \leq t < a \\ h(t), & \text{se } t \geq a \end{cases}$

Podemos escrever: \Downarrow

$$f(t) = g(t) - g(t) \cdot U(t-a) + h(t) \cdot U(t-a)$$

• o tempo é de zero de 5

O *Episódio 17* apresenta a interação entre os alunos no momento de reescrever esta Equação.

- A7: $\frac{dx}{dt}$ é igual a... (matematicamente a fala do aluno significa $\frac{dx}{dt}$)
- A6: $c_1 - \frac{x}{V}$ (apontando para suas anotações)
- A5: vezes Q (referindo-se à vazão)
- A6: menos...
- A7: não coloca zero no lugar de g(t)?
- A6: não A7...(chamando o aluno pelo apelido) ainda estamos reescrevendo...olha... se f(t) é igual a nãñãñã ...nãñãñã...então podemos escrever tudo isso aqui (lendo e apontando para suas anotações, mostrando as notas apresentadas na figura 45).
- A7: ah.. é verdade... depois no lugar do $\mu(t-a)$ que a gente vai colocar o zero e o um ...
- A6: porque quando t for de zero a 5 zera ali e vai sobrar só g(t) (referindo-se aos termos $g(t)\mu(t-a)$ e $h(t)\mu(t-a)$ da equação $f(t) = g(t) - g(t)\mu(t-a) + h(t)\mu(t-a)$)
- A7: é.. tá certo...é só substituir... se for maior que cinco dá um e menor que cinco é zero...
- A6: tá... agora.. menos g(t)... (a aluna retoma a resolução)
- A7: menos $c_1 - \frac{x}{V}$... Q...daí vezes.... (falando pausadamente e escrevendo ao mesmo tempo)

Os alunos continuam trabalhando até escreverem a Equação

Diferencial na forma $\frac{dx}{dt} = \left(c_1 - \frac{x}{V}\right) \cdot Q - \left[\left(c_1 - \frac{x}{V}\right) \cdot Q\right] \mu(t-a) + \left[\left(c_2 - \frac{x}{V}\right) \cdot Q\right] \mu(t-a)$. Em seguida A5 sugere que substituam os valores visando uma melhor visualização e provável facilidade para resolver a E.D. A sugestão é prontamente aceita pelos colegas que iniciam os cálculos, determinando a E.D na forma $\frac{dx}{dt} = 46,46 - 0,39x + 23,14\mu(t-5)$ como observa-se na Figura 44. Para construírem esta equação os alunos realizam algumas simplificações que foram decididas na continuação da interação apresentada no *Episódio 17*⁴⁸.

Episódio 17 continuação

44. A5: não dá para cancelar nada aí não? (olhando para a equação)
- $$\frac{dx}{dt} = (46,46 - 0,39x) - (46,46 - 0,39x)\mu(t-5) + (69,6 - 0,39x)\mu(t-5)$$

⁴⁸ Os turnos 12 à 43 foram omitidos desta apresentação, visto que o padrão gerado assemelha-se ao padrão apresentado nos turnos 1 à 11.

45. A7: vamos ver...
46. A5: ó...esse vezes esse e esse vezes esse a gente elimina... a gente corta (referindo-se aos termos $-(0,39x)\mu(t-5)$ no segundo termo e $(-0,39x)\mu(t-5)$ no terceiro termo da equação $\frac{dx}{dt} = (46,46 - 0,39x) - (46,46 - 0,39x)\mu(t-5) + (69,6 - 0,39x)\mu(t-5)$)
47. A6: ah?
48. A5: aqui ó... multiplica esse por esse e esse por esse, e depois corta (*mostrando novamente a equação*)
49. A6: aqui tá menos A5...(referindo-se ao sinal negativo do 0,39x do segundo termo)
50. A5: então.. mas tem esse menos aqui... dá mais (mostrando o sinal negativo antes do parêntese do segundo termo)
51. A6: hum....
52. A6: A7.. corta... (A7 estava escrevendo e ainda não tinha eliminado os termos como sugerido pelas alunas)
53. A7: mas aí some o $\mu(t-5)$
54. A5: não.. ele não vai sumir por completo... ó.. multiplica esse com esse e esse com esse (indicando a propriedade distributiva que deveria ser aplicada nos segundo e terceiro termos de $\frac{dx}{dt} = (46,46 - 0,39x) - (46,46 - 0,39x)\mu(t-5) + (69,6 - 0,39x)\mu(t-5)$).
55. A7: é verdade... mas aqui ó.. menos com menos dá *mais* (*indicando o segundo termo da equação*)
51. A5: e o outro é menos...
57. A7: é verdade...
58. A6: ficou boa essa equação agora hem??? (*referindo-se à equação $\frac{dx}{dt} = 46,46 - 0,39x + 23,14\mu(t-5)$*).
59. A7: é... agora a gente tem que resolver
60. A6: é agora que fica difícil... tem que aplicar a transformada de Laplace né?
61. A7: a gente tem que transformar o 46... o menos 0,39 x ...
62. A6: $\frac{dx}{dt}$ também né?
63. A7: então... tem quatro aqui (referindo-se aos quatro termos da equação)
64. A5: depois a gente substitui e isola a transformada de x né?
65. A6: é.. e aplica a inversa para achar o x
66. A7: o f(t)... a gente vai ter quatro f(t)... um vai ser o $\frac{dx}{dt}$, depois o 46 .. o -0,39x .. depois o outro (quando o aluno refere-se ao f(t) está se referindo ao f(t) da definição da Transformada de Laplace: $LI[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt$)
66. A5: é
67. A7: vamos começar pelo mais fácil então....
68. A5: 46,46
69. A7: vai ficar um sobre... 46 sobre ... s (*Veja Figura 46 e 47*)
70. A5: um sobre s.. 46 sobre s (*A5 fala junto com A7*)
71. A7: não interfere esse "e" multiplicando o 46?
72. A5: não A7... esse aqui é constante (*indicando o 46,46*)
73. A7: ah.. tá certo.. 46 é f(t), como é constante vai ficar 46 sobre s

74. A6: nem tinha esse s.. tá aparecendo agora... ó Dio...
 75. A5: tava tão bom sem esse s.... (risos)
 76. A6: mas péra aí... o que é esse 46... de onde vocês concluíram isso?
 77. A7: aqui ó A6...
 A aluna A5 fala ao mesmo tempo em que fala A7 e os dois indicam alguma coisa nas notas da aluna A6, porém, por falarem juntos não foi possível observar o que falaram.
 78. A6: ah tá...
 79. A7: 46 é f(t)... como é constante fica 46 que multiplica a integral...
 80. A6: já entendi...
 81. A7: qual é o outro? (referindo-se a qual seria a próxima função a ser transformada)
 82. A5: -0,39 x
 Os alunos transformam a função resultando em $L(-0,39) = -0,39L[x(t)]$, como se pode observar na Figura 46.
 83. A6: e agora? Tem uma coisa estranha aqui.. uma constante que multiplica aquele μ ... (referindo-se ao termo $23,14 \mu(t-5)$).
 A7 e A5 falam ao mesmo tempo não sendo possível observar o que dizem.

Em seguida transformam a função resultando em

$L[23,14 \mu(t-5)] = \frac{23,14 \cdot e^{-5s}}{s}$. Na Figura 46 podemos observar que A7 esqueceu a constante, porém, na sequência este aluno já colocou a constante multiplicando a transformada. A Figura 47 apresenta as anotações da aluna A6.

Figura 46 – Anotações do Aluno a7

The image shows handwritten mathematical work by student A7. It is divided into two sections by a horizontal line.

Top Section:

- Equation 1: $L[46,46] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 46,46 dt = \frac{46,46}{s}$
- Equation 2: $L[-0,39x] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 0,39x dt = -0,39 \int_0^{\infty} e^{-st} x dt = -0,39 L[x(t)] = -0,39 L[x(t)]$
- Equation 3: $L[23,14 \mu(t-5)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 23,14 \mu(t-5) dt = \frac{e^{-5s}}{s}$

Bottom Section:

- Differential equation: $\frac{dx}{dt} = 46,46 - 0,39x + 23,14 \mu(t-5)$
- Annotations:
 - Under $46,46$: "como é um n. da 46,46"
 - Under $-0,39x$: " $-0,39 \cdot$ Transformada de $x(t)$ "
 - Under $23,14 \mu(t-5)$: " $(\frac{e^{-5s}}{s}) \cdot 23,14$ "
- Text: "Aplicando a transformada:"
- Final equation: $L\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{46,46}{s} - 0,39 \cdot L[x(t)] + 23,14 \cdot \frac{e^{-5s}}{s}$

Os alunos continuam a resolução:

Episódio 17 continuação

84. A6: agora transformada de $\frac{dx}{dt}$ é igual à 46...
85. A7: não... tem que fazer a transformada desse aqui também .. $\frac{dx}{dt}$... (indicando nas anotações).
86. A6: péra aí.. pensa aqui comigo... isso aqui não é uma derivada? (indicando $\frac{dx}{dt}$).
87. A5: é... transformada de uma derivada
88. A6: ééé!!!
89. A5: então é s vezes a transformada de x menos o x(0). (as alunas comemoram a 'descoberta' e escrevem $sL[x(t)] - s(0)$) no lugar de $L\left[\frac{dx}{dt}\right]$.
90. A7: o f(0) é o nosso x(0)
91. A6: é.. a quantidade inicial....no tempo zero... é zero
92. A5: é zero (falando junto com A5)
93. A6: agora é tudo isso igual aquilo .. daí... se a gente isolar $L[x(t)]$? (apontando para $sL[x(t)] - s(0)$) quando falou 'isso' e apontando para $\frac{46,46}{s} - 0,39L[x(t)] + 23,14 \cdot \frac{e^{-5s}}{s}$ quando falou o termo 'aquilo')
94. A5: isso... dá prá isolar

Na sequência, os alunos isolam $L[x(t)]$, chegando à transformada

$$L[x(t)] = \frac{46,46}{s(s + 0,39)} + \frac{23,14e^{-5s}}{s(s + 0,39)}$$

como mostram as figuras 48 e 49.

Figura 48 – Anotações da aluna A6

$$sL[x(t)] - x(0) = \frac{46,46}{s} - 0,39 \cdot L[x(t)] + \frac{23,14 \cdot e^{-5s}}{s}$$

$$\left(-f(0) = \frac{46,46}{s} + \frac{23,14 \cdot e^{-5s}}{s} \right) \Rightarrow \text{errado}$$

$$sL[x(t)] + 0,39L[x(t)] = \frac{46,46}{s} + \frac{23,14 \cdot e^{-5s}}{s} + x(0) \rightarrow 0 \text{ é } x(0) \text{ e a concentração}$$

$$\overset{\text{equiv.}}{L[x(t)] \cdot (s + 0,39)} = \frac{46,46}{s} + \frac{23,14 \cdot e^{-5s}}{s}$$

$$L[x(t)] \cdot (s + 0,39) = \frac{1}{s} (46,46 + 23,14 \cdot e^{-5s})$$

$$L[x(t)] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s + 0,39)} \cdot (46,46 + 23,14 \cdot e^{-5s}) \quad \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s + 0,39}$$

$$L[x(t)] = \frac{1}{s^2 + 0,39s} \cdot (46,46 + 23,14 \cdot e^{-5s})$$

$$L[x(t)] = \frac{46,46}{s(s+0,39)} + \frac{23,14 \cdot e^{-5s}}{s(s+0,39)} \Rightarrow \frac{46,46}{s(s+0,39)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+0,39)}$$

Figura 49 – Anotações do aluno A7

$$L\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{46,46}{s} - 0,39L[x(t)] + \frac{23,14 \cdot e^{-5s}}{s}$$

$$L\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0,39L[x(t)] + \frac{46,46}{s} + \frac{23,14 \cdot e^{-5s}}{s}$$

$$L\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0,39L[x(t)] + \frac{46,46}{s} + \frac{23,14 \cdot e^{-5s}}{s}$$

$$sL[x(t)] - x(0) = -0,39x(t) + \frac{46,46}{s} + \frac{23,14 \cdot e^{-5s}}{s}$$

$$sL[x(t)] + 0,39L[x(t)] = \frac{46,46}{s} + \frac{23,14 \cdot e^{-5s}}{s}$$

$$L[x(t)](s + 0,39) = \frac{46,46}{s} + \frac{23,14 \cdot e^{-5s}}{s}$$

$$L[x(t)](s + 0,39) = \frac{1}{s} (46,46 + 23,14 \cdot e^{-5s})$$

$$L[x(t)] = \frac{1}{s} \frac{(46,46 + 23,14 \cdot e^{-5s})}{(s + 0,39)}$$

$$L[x(t)] = \left(\frac{1}{s^2 + 0,39s} \right) (46,46 + 23,14 \cdot e^{-5s})$$

$$L[x(t)] = \frac{46,46}{s^2 + 0,39s} + \frac{23,14 \cdot e^{-5s}}{s^2 + 0,39s}$$

$$L[x(t)] = \frac{46,46}{s(s+0,39)} + \frac{23,14 \cdot e^{-5s}}{s(s+0,39)}$$

Durante este desenvolvimento A7 apresenta algumas dúvidas operacionais que foram sendo explicadas pelas colegas como apresentada na sequência.

Episódio 17 continuação

95. A7: espera gente... vocês estão muito rápido

96. A6: to esperando A7.. não vou escrever mais nada

97. A7: de onde saiu esse 0,39? (apontando para $(s+0,39)$ da

expressão $L[x(t)].(s+0,39) = \frac{46,46}{s} + 23,14 \cdot \frac{e^{-5s}}{s}$ escrita na resolução de A6, apresentada na figura 48)

98. A6: aqui A7... passei prá cá isso...e colocamos em evidência (apontando para $-0,39L[x(t)]$ do segundo membro da equação. A figura 50 mostra o destaque feito pela aluna A6 no momento de explicar para A7).

99. A6: ah tá... é verdade... (Na figura 51 podemos observar o realce feito por A7 indicando a soma dos dois termos, colocando $(s+0,39)$ em evidência como explicado por A6).

Figura 50 – Anotações da aluna A6

$$sL\left[\frac{x}{s}\right] - \frac{x}{s}(0) = \frac{46,46}{s} - 0,39L[x(t)] + 23,14 \cdot \frac{e^{-5s}}{s}$$

Figura 51 – Anotações de A7

$$sL[x(t)] - \cancel{*} = -0,39x(t) + \frac{46,46}{s} + 23,14 \frac{e^{-5s}}{s}$$

$$sL[x(t)] + 0,39(L[x(t)]) = \frac{46,46}{s} + 23,14 \frac{e^{-5s}}{s}$$

$$L[x(t)](s+0,39) = \frac{46,46}{s} + 23,14 \frac{e^{-5s}}{s}$$

Após o trabalho algébrico e o estabelecimento da E.D.

$L[x(t)] = \frac{46,46}{s(s+0,39)} + \frac{23,14e^{-5s}}{s(s+0,39)}$ os alunos utilizam a transformada inversa e

encontram a função $x(t) = \begin{cases} 119,13 - 119,13e^{-0,39t} & \text{se } 0 < t < 5 \\ 178,46 - 119,13e^{-0,39t} - 59,33e^{-0,39(t-5)} & \text{se } t \geq 5 \end{cases}$ como

mostram as Figuras 52 e 53. Em seguida, validam este modelo com os dados coletados em laboratório, como mostra a Tabela 13 e consideram o modelo válido, com erro máximo de 26%.

Figura 52 – Notas da resolução da aluna A6

$$\frac{46,46}{s(s+0,39)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+0,39} \Rightarrow \frac{119,13}{s} + \frac{119,13}{s+0,39} \Rightarrow \frac{-119,13}{s-(-0,39)}$$

4

$$46,46 = Bs + As + A \cdot 0,39 \Rightarrow 46,46 = s(A+B) + A \cdot 0,39$$

$A+B=0 \Rightarrow B=-119,13$

$$A = \frac{46,46}{0,39} \Rightarrow A = 119,13$$

$$\frac{23,14 \cdot e^{-5s}}{s(s+0,39)}$$

$$\frac{23,14}{s(s+0,39)} = \left(\frac{C}{s} + \frac{D}{s+0,39} \right) \cdot e^{-5s} \Rightarrow \text{Substituindo}$$

$$23,14 = Ds + Cs + C \cdot 0,39$$

$$23,14 = s(D+C) + C \cdot 0,39$$

$$\begin{cases} D+C=0 \Rightarrow D=-59,33 \\ C = \frac{23,14}{0,39} = 59,33 \end{cases}$$

$$\frac{59,33 \cdot e^{-5s}}{s} - \frac{59,33}{s+0,39} \cdot e^{-5s}$$

Reescrevendo:

$$x(t) = 119,13 - e^{-0,39t} + \mathcal{U}(t-5) \cdot 59,33 - 59,33 \cdot \frac{1}{s+0,39} \cdot e^{-5s}$$

$$59,33 \cdot \mathcal{L}(e^{-0,39 \cdot t}) \cdot e^{-5s}$$

multiplica 119,13

$$x(t) = 119,13 \cdot \underbrace{\left(e^{-0,39 \cdot t} \right)}_{\text{costa}} + \underbrace{\mathcal{U}(t-5) \cdot 59,33}_{\text{costa}} - \underbrace{59,33 \cdot \left(e^{-0,39 \cdot (t-5)} \right)}_{\text{costa}} \cdot \underbrace{\mathcal{U}(t-5)}_{\text{costa}}$$

$$x(t) = 119,13 - e^{-0,39t} + 59,33 \cdot \mathcal{U}(t-5) \cdot \left[1 - e^{-0,39(t-5)} \right]$$

$$\text{Je } x(t) \begin{cases} g(t) = 119,13 - e^{-0,39t} \cdot 119,13, \text{ se } 0 \leq t < 5 \\ h(t) = 119,13 - e^{-0,39t} + 59,33 - 59,33 e^{-0,39(t-5)}, \text{ se } t \geq 5 \\ \hookrightarrow h(t) = 178,46 - 119,13 e^{-0,39t} - 59,33 e^{-0,39(t-5)}, \text{ se } t \geq 5 \end{cases}$$

Figura 53 – Notas da resolução do aluno A7

$$46,46 = \frac{A}{s} + \frac{b}{s+0,39} \Rightarrow 46,46 = As + A(0,39) + b$$

$$s(0,39) \quad s \quad s+0,39 \quad 46,46 = \cancel{0} s(A+b) + A(0,39)$$

$$A+b=0$$

$$A(0,39) = 46,46$$

$$A = 119,13$$

$$b = -119,13$$

$$\frac{46,46}{s(0,39)} = \frac{119,13}{s} + \frac{-119,13}{s+0,39}$$

$$\frac{23,14 e^{-5s}}{s(s+0,39)} = \frac{C}{s} + \frac{D}{s+0,39} \Rightarrow 23,14 e^{-5s} = Cs + E(0,39) + Ds$$

$$23,14 e^{-5s} = s(C+D) + C(0,39)$$

$$C+D=0$$

$$C = 59,33 e^{-5s}$$

$$D = -59,33 e^{-5s}$$

$$L[x(t)] = \frac{119,13}{s} - \frac{119,13}{s+0,39} + \frac{59,33 e^{-5s}}{s} - \frac{59,33 e^{-5s}}{s+0,39}$$

$$x(t) = 119,13 e^{-0,39t} + \mu(t-5) \cdot 59,33 \left(-59,33 \cdot \frac{1}{s+0,39} e^{-5s} \right)$$

$$x(t) = 119,13 e^{-0,39t} + \mu(t-5) \cdot 59,33 + 59,33 e^{-0,39(t-5)} \mu(t-5)$$

$$x(t) = 119,13 e^{-0,39t} + 59,33 \mu(t-5) \left[1 + e^{-0,39(t-5)} \right]$$

$$x(t) = 119,13 (1 - e^{-0,39t}) + 59,33 \mu(t-5) \left[1 - e^{-0,39(t-5)} \right]$$

$$x(t) \begin{cases} \text{Se } 0 \leq t \leq 5 \text{ então } 119,13 (1 - e^{-0,39t}) \\ \text{Se } t \geq 5 \text{ } 119,13 e^{-0,39t} + 119,13 - 59,33 e^{-0,39(t-5)} \end{cases}$$

Tabela 13 –Validação do Modelo Validação do Modelo

tempo(min)	Conc.experimental (ml/L)	Q modelo (ml)	Conc. modelo (ml/L)	erro (%)
0	0	0	0	0
0,5	0,040365273	21,10570719	0,046901572	13,94%
1	0,069401803	38,47221454	0,08549381	18,82%
1,5	0,092050178	52,76197868	0,117248842	21,49%
2	0,118418249	64,52009187	0,143377982	17,41%
2,5	0,12781103	74,19507492	0,164877944	22,48%
3	0,134825836	82,15598629	0,182568858	26,15%
3,5	0,153506796	88,70650007	0,197125556	22,13%
4	0,160700574	94,09648984	0,209103311	23,15%
4,5	0,169520496	98,53156023	0,218959023	22,58%
5	0,190084525	102,1993855	0,227109746	16,30%
5,5	0,295947727	115,7101233	0,257133607	-15,09%
6	0,329324913	126,8272267	0,281838282	-16,85%
6,5	0,350061496	135,9747646	0,302166144	-15,85%

A interação apresentada no *Episódio 17* é caracterizada como sendo uma interação de autoridade, visto que as questões são elaboradas no sentido de chegar a um ponto de vista específico: resolver, por meio de procedimentos matemáticos a Equação Diferencial. Além disso, não caracterizamos esta interação como um diálogo visto que não promove uma investigação nem os riscos inerentes a esta: o caminho é praticamente seguro.

Por outro lado, observamos várias solicitações de ajudas nesta interação (a maioria partindo de A7), as quais foram sendo oferecidas pelos colegas. O Aluno A7 é o que se pode chamar de ‘bom aluno’ e talvez por este motivo uma única explicação das colegas já era suficiente para seu entendimento. Observamos que A7 sempre responde a ajuda recebida com a expressão ‘é verdade’, indicando que compreendeu a ajuda recebida (provavelmente esta expressão ‘é verdade’ possui, implicitamente, a função de não admitir às colegas que não sabia como proceder mas sim, que não se recordava. Esta é uma característica deste aluno observada no decorrer das aulas).

Quanto às condições elencadas por Anna Sfard, consideramos que nesta interação a comunicação foi efetivada visto que o uso contínuo de termos do tipo ‘isso aqui’ , ‘isso’, etc, foram entendidos por seus colegas (fato percebido pela sequência de meias-falas completadas) e deste modo, os focos pronunciado, observado e pretendido parecem estar em sintonia. Os alunos revezam os papéis de ‘aprendizes’ e ‘instrutores’ e completam o raciocínio um do outro indicando estarem prestando atenção e ao mesmo tempo engajados na resolução do problema.

Na Figura 54 apresentamos um quadro-resumo da análise desta interação.

Figura 54 – Quadro-resumo da análise do Episódio 17

<i>Episódio 17</i>	Análise
Interação Dialógica/ de autoridade	<i>De autoridade</i>
Padrões de interação	
Diálogo	<i>não</i>
Atos dialógicos	
Condições elencadas por Noreen Webb	<i>satisfeitas</i>
Condições elencadas por Anna Sfard	<i>satisfeitas</i>

Esta atividade foi desenvolvida pelos alunos depois do término das aulas regulares, quando os alunos foram convidados pela professora a desenvolver mais algumas atividades de Modelagem Matemática em horários disponíveis. Deste modo, uma das ações da Modelagem, que consiste na apresentação da atividade para a turma não foi realizada. Porém, os alunos apresentaram o modelo encontrado à professora e fizeram algumas considerações sobre o mesmo. Nestas considerações os alunos se dizem satisfeitos por encontrar o modelo que representa a situação e apresentam algumas simulações de resultados, como por exemplo, concluem que, se considerassem apenas a entrada da primeira mistura, a concentração máxima que a mistura poderia alcançar seria 26,7ml/L, visto que esta é a concentração da mistura 1, e deste modo, sabendo que o balde tem 4,5 L de volume, a quantidade máxima de ácido acético seria aproximadamente 120,15ml. Efetuando seus cálculos concluem que seria impossível chegar a este valor, fato este confirmado por seus conhecimentos sobre misturas. Deste modo, estimam uma quantidade máxima de 119ml e concluem que, se entrasse apenas a mistura 1, em aproximadamente 17,5 minutos a mistura estaria totalmente contaminada. Salientam ainda que, com a entrada da mistura dois, a velocidade de contaminação aumenta consideravelmente e que, em apenas 18 minutos aproximadamente, a mistura estará totalmente contaminada com uma quantidade igual à 178ml.

Os alunos consideram ainda que esta atividade proporcionou o entendimento de como proceder para, por exemplo, estudar o nível de contaminação

de um lago ou lagoa, em relação ao tempo, ou seja, com um modelo deste tipo poderiam monitorar a contaminação da água, tendo condições de estipular um máximo admissível e observar em que momento este máximo seria atingido, para então tomar as devidas providências, antes que o mesmo acontecesse. O *Episódio 18* apresenta uma conversa que a professora teve com os alunos ao término desta atividade e nela, podemos observar a satisfação dos alunos e algumas considerações que fazem a respeito da atividade.

Prof: bom, esta foi nossa última atividade.. por enquanto né??/
[brincando com os alunos e os alunos rindo e concordando]. Gostaria de saber, o que vocês acharam de desenvolver estas atividades?

A6:.. nossa.. adorei...

A5: [junto com A6] adorei

A7: deixa as mulheres falarem primeiro...elas estão ansiosas.. [Em tom de brincadeira]

A5:.. hã??? a sim!!!... se fosse outro homem [rindo]

A6:.. se você começa falar você fala duas horas seguidas

Todos riem

Prof: fala você A5

A5: então.. ela proporcionou uma coisa prática.. eu vi assim... com a modelagem... tanto com o tema da concentração quanto da estufa... do aquecedor quer dizer....[referindo-se à Atividade 4 desenvolvida por este grupo]

Prof: o que você quer dizer com coisa prática?

A5: aplicar.... aplicação...prá que que serve...eu to aprendendo prá que que serve...

Prof: por que?

A5: ah.. tem significado.. eu posso aplicar nisso... ou naquilo,.. Eu vi como isso aí sabe? Vi onde posso aplicar a matemática.

Prof: humhum

A5: eu gostei de ver onde aplicar o que aprendo em sala de aula, além de estudar outras coisas não ligadas diretamente à matemática... ter que pesquisar...

Prof: e o que você achou de ruim?

A5: ruim?

Prof: sim

A5: nada... é trabalhoso.. não que seja ruim...

Prof: o tempo... a demora??

A5: o duro que a gente não tinha.. é... não tinha tempo livre

Prof: se tivesse feito só em sala de aula... quer dizer... se tivesse ocupado só o período em que a gente estava na disciplina...

A5: hum [acompanhando a professora]

Prof: porque este trabalho vocês fizeram depois que a disciplina tinha terminado... se fosse apenas no período da disciplina, teria sido melhor?

A7: como é que é?? Se tivesse feito esse aqui em sala de aula?

Prof: é.. teria sido melhor?

A7: não ia dar tempo né? Não ia dar tempo...

A6: ia ficar incompleto.. tinha muita coisa prá aprender para fazer...

Prof: era muito ruim vir fora de horário? Prá fazer o trabalho?

A7: para mim, particularmente não... eu gostava de fazer a modelagem

A5: se a gente tivesse mais tempo... mas a gente sempre acabava dando um jeito, porque queria fazer o trabalho, porque queria ver o resultado.

A6: Tipo assim: quando a gente fez matemática dois foi suficiente (os *trabalhos desenvolvidos*) e agora foi legal porque a gente conseguiu aprofundar mais.

A5: humhum [*concordando com A6*]...e se a gente precisar vai lembrar

A7: transformada de laplace não é difícil... ela só é várias continhas que tem que ir encaixando...tem que fazer as integrais impróprias e depois junta tudo... depois faz a inversa...acho que poderíamos ter modelagem como uma matéria optativa... modelagens... modelagens ambientais

A5: naquele outro trabalho a gente usou o curve...

A6: até Java a gente usou.... [*rindo*]

A5: usamos tudo que podia ...[*rindo*]

A7: igual A5 falou: quando a gente precisar vai saber pelo menos por onde começar... Esse negócio de contaminação, é um problema que sempre vai aparecer, tratar de um efluente, às vezes em uma indústria... que você vai tá mexendo com resíduo. Aí a gente pode modelar de acordo com o tempo, ou de acordo com a dosagem...Por exemplo, se tá contaminando um determinado local... a gente estipula o máximo... quer dizer, já é estipulado né? O quanto poderia estar contaminada esta água.... aí a gente tem o modelo e com ele a gente pode investigar quando vai chegar nesse máximo e fazer alguma coisa antes disso acontecer. Neste caso a gente mexeu com ácido acético e água, mas A6 mesmo tá mexendo com modelagens atmosféricas, tá trabalhando com componentes atmosféricos e ar ...

A5: a gente simulou em laboratório...com os baldes, mas ficou bonito.. deu certinho... o importante é saber como fazer... como encontrar o modelo... a gente teve que aprender coisas que não sabia. E outras coisas que a gente sabia mas não sabia para que servia.

A6: interessante o que a gente pode fazer com os dados né prof?

Prof: como assim?

A6: ah.. se a gente quisesse a gente poderia modelar por uma função exponencial, mas a gente fez como uma função linear porque o prof falou que a calibração era linear. (*referindo-se a uma curva de calibração que realizaram e a um professor de outra disciplina*)

A7: não é que a gente tá mentindo com os dados, estamos olhando diferente, olhando para o que queremos.. é assim que fazem as pesquisas políticas. Um partido vai lá e fala uma coisa, o outro fala outra. Não é que estão mentindo nos dados, estão olhando diferente, calculando diferente.

Prof: é muito importante vocês entenderem isso. A gente tá em uma área exata.. no caso de vocês, engenharia, mas tem que ter essa visão crítica, olhar as coisas com cuidado, e saber aplicar a matemática

A7: a gente pode fazer outra... onde entra água limpa também... aí vai demorar mais para ficar totalmente contaminado.... se é que vai ficar totalmente contaminado né? Acho que não vai....

Prof: mas essa aí é outra atividade...vamos deixar para depois ok?

Apesar de esta interação ocorrer após o término da atividade optamos por apresentá-la pois a mesma traz comentários dos alunos que nos ajudarão na análise geral das atividades, além de demonstrar o que os alunos pensam a respeito do desenvolvimento das atividades e comentários a respeito da Atividade 8 em si.

Consideramos que este *Episódio* constitui uma interação dialógica pois a professora elabora questões de processo que demandam elaboração de respostas e, em nenhum momento a professora conduz a interação com vistas a um ponto de vista específico. A professora procura em toda a interação ouvir as vozes dos alunos, buscando entender seus pontos de vista.

A professora inicia a conversação e no decorrer desta, mostra-se interessada em entender as perspectivas dos alunos, dando prosseguimento, deixando que eles se expressem. Pode-se perceber três cadeias de interações [turnos 1 à 14, 15 à 27 e turno 28 à 45] com questões de iniciação, respostas e prosseguimento.

Nesta interação a professora promove a igualdade não colocando seu ponto de vista como algo absoluto, deixando que os alunos manifestem seus pontos de vista em relação à atividade, estabelece contato, procura perceber as perspectivas dos alunos, faz avaliação do que falam, os alunos reformulam suas falas e posicionam-se o tempo todo e, deste modo, consideramos que esta interação pode ser caracterizada como um diálogo. Na Figura 55 apresentamos um quadro-resumo da análise deste episódio.

Figura 55 – Quadro-resumo da análise do *Episódio 18*

<i>Episódio 18</i>	Análise
Interação Dialógica/ de autoridade	<i>dialógica</i>
Padrões de interação	<i>não triádicos</i>
Diálogo	<i>sim</i>
Atos dialógicos	<i>Estabelecer contato, perceber, avaliar, posicionar-se e reformular.</i>
Condições elencadas por Noreen Webb	<i>Não analisadas</i>
Condições elencadas por Anna Sfard	<i>Não analisadas</i>

Na figura 56 apresentamos um quadro-resumo das quatro interações analisadas na Atividade 3. Nela observamos que duas delas foram consideradas como sendo interação dialógica e constituinte de um diálogo. Por outro lado, consideramos que os dois episódios de autoridade também contribuem para a aprendizagem da matemática, uma vez que satisfazem tanto as condições elencadas por Noreen Webb quanto as condições elencadas por Anna Sfard.

Figura 56 – Quadro-resumo da análise dos episódios da Atividade 3

Episódios	<i>Dialógica / de autoridade</i>	<i>Diálogo</i>	<i>Condições elencadas por Noreen Webb</i>	<i>Condições elencadas por Anna Sfard</i>
15	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
16	<i>De autoridade</i>	<i>Não</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
17	<i>De autoridade</i>	<i>Não</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
18	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Não analisadas</i>	<i>Não analisadas</i>

5.2 ANÁLISE GERAL DAS ATIVIDADES

Frente ao nosso interesse de “Investigar as interações que emergem durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática na sala de aula” apresentamos algumas reflexões levando em consideração o conjunto de atividades desenvolvidas pelos alunos.

Nossas reflexões são orientadas pelo nosso interesse em investigar:

- i) a ocorrência de interações dialógicas durante atividades de Modelagem Matemática em sala de aula;
- ii) a ocorrência de interações que podem ser caracterizadas como um ‘diálogo’;
- iii) em que medida as interações contemplam as condições elencadas por Noreen Webb para que a interação favoreça aprendizagem;
- iv) em que medida as interações contemplam as condições propostas por Anna Sfard para que a comunicação seja efetivada;
- v) o papel desempenhado pelo professor na constituição dos tipos e padrões de interações;

vi) a influência das características de situações-problema tratadas pela Modelagem Matemática para a ocorrência das interações e para o tipo de interação.

Apresentamos nossas argumentações em relação a estes tópicos agrupando os dois primeiros em uma mesma análise e o terceiro e quarto tópicos em outra análise. O quinto e sexto tópico são apresentados cada um separadamente.

5.2.1 Interações Dialógicas durante Atividades de Modelagem Matemática em sala de Aula e Interações que Podem ser Caracterizadas como 'Diálogo'

Na análise apresentada em 5.1 observamos que tanto a dimensão dialógica quanto a dimensão de autoridade foram contempladas no desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática, como mostra a Figura 57. A ocorrência e caracterização destas interações nos levam a inferir que as atividades desenvolvidas por meio da Modelagem Matemática proporcionam a diversidade de abordagens comunicativas conforme recomendam Mortimer e Scott (2002). Segundo os autores, é aconselhável a existência desta diversidade, trabalhando-se tanto na dimensão dialógica/de autoridade como na interativa/não interativa. Observa-se ainda (Figura 57) que a grande maioria destas interações constitui um diálogo e foram caracterizadas como dialógicas.

Entendemos que este fato está diretamente ligado à Modelagem como um *contexto-simulado* visto que, nestas interações dialógicas e constituintes de diálogo o objetivo central gira em torno da construção das hipóteses, argumentações sobre as simplificações realizadas e entendimento da situação-problema em si. Estas ações geralmente não ocorrem em aulas ditas tradicionais, ou em resolução de exercícios de livros textos, mas emergem de investigações em que o problema não se apresenta já estruturado para o aluno, mas que, ao contrário, faz parte de um 'contexto'. Este 'contexto' investigativo suscitou estas interações, oportunizando aos alunos a participação nas discussões que podem ser caracterizadas como dialógicas.

Figura 57 – Quadro-resumo da análise das interações apresentadas na descrição das três atividades

Episódios	<i>Dialógica / de autoridade</i>	<i>Diálogo</i>	<i>Condições elencadas por Noreen Webb</i>	<i>Condições elencadas por Anna Sfard</i>
1	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Não analisadas</i>	<i>Não analisadas</i>
2	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Não analisadas</i>	<i>Não analisadas</i>
3	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
4	<i>De autoridade</i>	<i>Não</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
5	<i>De autoridade</i>	<i>Não</i>	<i>Não analisadas</i>	<i>Não analisadas</i>
6	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
7	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
8	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
9	<i>De autoridade</i>	<i>Não</i>	<i>Não analisadas</i>	<i>Satisfeitas</i>
10	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Não analisadas</i>	<i>Não analisadas</i>
11	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
12	<i>De autoridade</i>	<i>Não</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
13	<i>De autoridade</i>	<i>Não</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
14	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Não analisadas</i>	<i>Não analisadas</i>
15	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
16	<i>De autoridade</i>	<i>Não</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
17	<i>De autoridade</i>	<i>Não</i>	<i>Satisfeitas</i>	<i>Satisfeitas</i>
18	<i>Dialógica</i>	<i>Sim</i>	<i>Não analisadas</i>	<i>Não analisadas</i>

Levando em consideração as argumentações de Fanizzi (2008) de que as interações dialógicas são mais indicadas para alcançar êxito na aprendizagem e as considerações de Mortimer e Scott (2002), de que os estudantes devem engajar-se em atividades dialógicas a fim de desenvolverem um entendimento do tópico em estudo, a constatação de que a maioria das interações oportunizadas pelo desenvolvimento destas atividades são dialógicas, nos conduz a inferir que estas atividades contribuem para a desenvolvimento de interações que possuem características que favorecem a aprendizagem dos alunos.

Apesar de não ser apresentado neste texto o desenvolvimento de todas as atividades e as interações a que conduziram, observamos que nas demais atividades ocorrem interações semelhantes às apresentadas, sendo algumas dialógicas e caracterizadas como um diálogo, enquanto outras são caracterizadas

como interações de autoridade. As interações dialógicas possuem o claro objetivo de familiarizar os alunos com o tema em questão, reconhecer o conhecimento do aluno quanto ao tema, perceber suas perspectivas, formular o problema e elaborar hipóteses.

As interações de autoridade, geralmente, foram aquelas em que a professora tinha o objetivo de introduzir algum conceito matemático ou um procedimento ainda desconhecido pelo aluno. Também diagnosticamos algumas interações de autoridade envolvendo apenas alunos, onde um deles orienta o outro (ou outros) para a compreensão de algum conceito matemático, não sendo consideradas outras 'vozes' nesta interação.

Exemplos destes tipos de interação (além das apresentadas neste texto) podem ser os *Episódios 19 e 20* apresentados na sequência. Estes *Episódios* apresentam parte de interações geradas no desenvolvimento da Atividade 7- Estudo da contaminação de Hidróxido de sódio em um recipiente com fluxo contínuo. Nesta atividade, o grupo considerou três possibilidades de desenvolvimento para a situação-problema. Na primeira consideram que a variação da quantidade de NaOH é proporcional à diferença entre o valor máximo a ser atingido e a quantidade em qualquer instante, ou seja $\frac{dA}{dt} = k(A_{max} - A)$; na segunda, ponderam que a variação da quantidade de cálcio é determinada pela diferença entre a quantidade que entra e a quantidade que sai; na terceira, com a orientação da professora, utilizam o método de Ford-Walford para estimar o valor máximo da quantidade de NaOH e estudam o comportamento dos dados em relação a este máximo. O *Episódio 19* apresenta uma parte de uma interação que ocorreu durante o primeiro desenvolvimento desta atividade e constitui uma interação dialógica, onde as alunas procuram entender o fenômeno, discutindo e levando em consideração o ponto de vista das colegas.

(...)

A11: hum... e a concentração? É zero?(referindo-se à concentração do balde 2).

A13: não... tem que ser a concentração que tem lá quando tá saindo...

A12: e quanto é? Não dá prá saber porque tá misturando...tá aumentando a concentração...

A13: não! ela tá diminuindo.. dá diluindo na água pura

A12: não... tá aumentando...

A13: Como tá aumentando se tá diluindo com água pura? Tá diminuindo

A12: não...ó A3... não é assim...ó... quanto tem de concentração no balde dois?
 A13: nada
 A12: e tá entrando 1,15 por minuto
 A13: mas tá saindo também..
 A12: eu sei, mas a quantidade lá dentro tá aumentando.. tá saindo a mistura..
 A13, tá diminuindo...tá misturando..
 A12: a que entra tá diminuindo, fica misturada, mas lá dentro... quanto tinha?
 A13: antes de entrar? Nada...
 A12: e agora tá entrando 1,15 mol por minuto. Aí, mesmo que saia a mistura, vai ficando um pouquinho por minuto, então vai aumentando lá dentro porque não tinha nada...
 A13: ah... agora entendi o que você está falando... tá aumentando porque não tinha nada e agora vai entrar um pouco... mas não fica 0,5 né? Vai diluir e vai ficar menor...
 A12: é...tá entrando 1,15 e vai diluir, e a quantidade vai ficar menor do que entrou, mas em relação ao que tinha lá dentro vai aumentar.
 A13: entendi... agora entendi...
 A11: tá... mas qual é a concentração do balde 2?
 A13: não vai ser 0,5... vai ser menor.. depois vai aumentar...
 A12: depende do tempo né?conforme o tempo passa vai aumentando... não dá pra saber...
 (...) continua.

O *Episódio 20* ocorreu durante o terceiro desenvolvimento, em que as alunas utilizaram o Método de Ford-Walford para determinar o valor de estabilidade. Este *Episódio* apresenta características de uma interação mais próxima do extremo 'de autoridade' do continuum dialógico- de autoridade. A aluna A13 apresenta dúvidas quanto à utilização deste método e a aluna A11 assume o papel de 'instrutora' oferecendo explicações sobre o método. A aluna A11 realiza sua explicação sem procurar ouvir as perspectivas ou entendimentos das colegas, e deste modo, apenas o discurso científico é enfatizado neste *Episódio*.

A11: bom, então a gente vai encontrar esse valor de estabilidade certo? Da outra vez a gente pensou que era 5,99, mas agora a gente vai achar direitinho... (*referindo-se à primeira hipótese tratada por este grupo, quando consideram a quantidade máxima igual a 5,99 mol*) acho que não vai ser mesmo... tá diluindo bastante... ó, até agora só chegou em 3,88.
 A13: por isso que falei.. tá diluindo...
 A11: tá, a 'prof' falou para achar (*o valor de estabilidade*) por esse método...
 A12: porque?
 A11: ah.. a prof explicou... ó.. a tendência dos dados... tá crescendo né? E parece que tem um valor máximo...
 A12: e tem mesmo... não entra água limpa.

A11: assim, a gente tem que achar o limite desta sequência, que é o valor de estabilidade.

A12: a gente faz $\lim A_n = \lim A_{n+1}$.

A13: e quem é esse A_{n+1} ? Isso que não entendi....

A11: por que é assim ó... olha essa sequência... tá indo para um valor de estabilidade certo? Se a gente tirar os primeiros pontos vai continuar indo para o mesmo lugar certo?

A13: ahã

A11: então... a gente tira os primeiros pontos, como a gente tem poucos valores, vamos tirar só o primeiro. Aí a gente começa essa sequência com o segundo. A_n é essa aqui e A_{n+1} é essa aqui. (*mostrando as duas sequências*). As duas sequências vão para o mesmo lugar.

A13: Tá e daí?

A11: Daí a gente tem que resolver esse sistema (mostrando o sistema) prá achar o valor de estabilidade. Tem que achar uma relação entre A_{n+1} e A_n ó (*mostra $A_{n+1} = g(A_n)$*). Ai depois como A_{n+1} é igual a A_n (mostra isto no sistema) a gente iguala e acha o A_n que serve para as duas.

A13: hum.. entendi.. as duas tem o mesmo limite...Então tá. A gente faz um ajuste para estas duas então né? (*mostrando as duas sequências*). Faz aí pelo Excel...

A12: será que tem que fazer isso na mão?

A11: Não... faz no Excel mesmo.. é muita conta...

A12: tá...

(...) continua.

Outro exemplo de interação de autoridade é apresentado no *Episódio 21*, que retrata uma parte de uma interação ocorrida durante o desenvolvimento da Atividade 2 – Estudo do resfriamento de um corpo de alumínio. Nesta interação a aluna A14 solicita explicações de A11 para resolver a Equação Diferencial $\frac{dT}{dt} + kT = kT_M$ utilizando o método de resolução para Equações Diferenciais Lineares.

(...)

A11: Olha, a gente tem $\frac{dT}{dt} + kT = kT_M$ certo?

A14: ahã

A11: Quando a equação tá desta forma (escreve $y' + P(x)y = Q(x)$ copiando do caderno) é chamada Equação Diferencial Linear ó (mostra sua anotação do caderno).

A14: tá.

A11: aí, a 'prof' explicou..., fez aquele monte de coisa e chegou nesta função aqui (escreve $\mu \cdot y = \int \mu \cdot Q(x) dx + C$), onde $\mu = e^{\int P(x) dx}$, certo?

A14: certo.

A11: esse $P(x)$ e esse $Q(x)$ são funções de x (*Mostrando $y' + P(x)y = Q(x)$*). Por exemplo, (*escreve $y' + 2y = 5x$*), quem é $P(x)$?

A14: $2y$?

A11: não... é quem está multiplicando o y ...

A14: 2 ?

A11: é... E quem é $Q(x)$?

A14: mas 2 é uma constante...

A11: mas continua sendo uma função de x , ó (*escreve $2x^0=2$*).

A14: pode ser constante então... o $Q(x)$ é $5x$?

A11: certo. E Q ?

A14: péra aí...

(...) continua.

Considerando que o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática como um *contexto-simulado* favoreceu a ocorrência de interações dialógicas e a abertura para que os alunos questionem mais e respondam seus colegas, consideramos que a mesma favorece a aprendizagem coletiva.

5.2.2 Condições de Noreen Webb para que a Interação Favoreça a Aprendizagem e Condições Propostas por Anna Sfard para que a Comunicação seja Efetivada

Conforme apresentado em 5.1 constatamos que grande parte das interações apresentadas contemplam as condições elencadas por Noreen Webb e Anna Sfard.

As condições propostas por Anna Sfard dizem respeito à efetividade da comunicação no sentido de que esta efetividade contribui para a aprendizagem. Esta efetividade foi analisada em termos do envolvimento dos indivíduos nas interações, procurando diagnosticar se os focos pretendidos foram compreendidos e se o acordo comunicacional (acordo sobre o discurso principal, sobre os papéis dos interlocutores e sobre o curso necessário para a aprendizagem) foi estabelecido. Com base nestas condições constatamos que, dos episódios apresentados, a comunicação foi efetivada em 12 episódios e deste modo, consideramos que estas interações favoreceram a aprendizagem dos conceitos matemáticos.

No decorrer destas interações algumas questões elaboradas pelos alunos visavam observar a compreensão do colega sobre a atividade,

procedimentos ou conceitos matemáticos em questão, denotando a preocupação com o desenvolvimento e entendimento do grupo, além do individual.

Assim como Queiroz, Barbosa e Amaral (2009) assinalam, entendemos que na medida em que questões que visam esclarecer dúvidas são respondidas, as idéias dos alunos são reestruturadas. Para as autoras, “esse processo beneficia a aprendizagem, tanto para quem responde quanto para quem formula questões, e mesmo para aqueles que estão presentes na discussão sem uma participação mais ativa”, auxiliando assim a aprendizagem de todos os envolvidos, como também observa Noreen Webb em suas argumentações.

Salientamos a importância de todas as interações, visto que, enquanto algumas propiciaram a aprendizagem dos conceitos matemáticos, outras auxiliaram no desenvolvimento de um pensamento reflexivo em relação à matemática e outras ainda propiciaram a oportunidade dos alunos se sentirem parte de uma equipe, tendo sua voz ou sua perspectiva, ouvida, analisada e muitas vezes aceita pelo grupo e/ou pela professora.

5.2.3 O Papel do Professor na Constituição dos Tipos e Padrões de Interação

Conforme apresentado no Capítulo 2, alguns pesquisadores consideram que o professor possui um papel decisivo na configuração do tipo de interação que é estabelecido entre ele e os alunos.

No desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática observamos que as atitudes da professora foram fundamentais para a constituição dos padrões de interação e conseqüentemente no tipo de interação (dialógica ou de autoridade). Nota-se que, dependendo do objetivo, a professora atua de uma determinada maneira, ora conduzindo a discussão com vistas a uma perspectiva específica, ora conduzindo de modo a considerar diferentes pontos de vista, dando ‘voz’ às contribuições dos alunos.

De acordo com Mortimer et. al. (2007) o tipo de questão formulada pelo professor influencia a natureza das respostas dos alunos e no potencial para gerar cadeias de interação. Por exemplo, questões de processo demandam explicações, descrições e argumentações, estabelecendo, geralmente, cadeias de interação que geram interações dialógicas. Por outro lado, questões de escolha (qual?) e produto (o que?) demandam respostas específicas e deste modo,

geralmente, geram padrões triádicos do tipo I-R-A, ou jogo de perguntas, constituindo uma interação de autoridade.

No desenvolvimento das atividades observamos que quando o objetivo da professora foi apresentar um conceito ou procedimento técnico ou matemático, ela interagiu de modo a não permitir que ‘ruídos’ atrapalhassem o entendimento dos alunos, formulando questões diretas, seguindo sua própria linha de pensamento, de modo que, quando alguma consideração não foi considerada pertinente a professora procurou corrigir ou descartar de imediato, de modo que sua linha de pensamento não fosse desviada. Este tipo de interação gerou padrões triádicos do tipo I-R-A (iniciação, resposta, avaliação), típico das interações de autoridade.

Por exemplo, no *Episódio 9*, a professora tem a intenção de tratar do Método dos Mínimos Quadrados e, a partir do turno 7 [*Um método adequado para encontrar este modelo ajustado é o Método dos Mínimos quadrados. Este método consiste em determinar os parâmetros do modelo de modo que a soma dos quadrados dos desvios seja a menor possível. Ou seja, devemos minimizar a soma dos quadrados da diferença entre o y observado e o y do modelo. Entenderam?*], elabora sua explicação sem se preocupar em ouvir perspectivas diferentes da sua linha de pensamento.

Quando, no turno 17, é desafiada pela aluna A14 [*é só pegar o módulo então*], a professora descarta esta possibilidade, visto que seu objetivo, naquele momento, é trabalhar com o Método dos Mínimos Quadrados que utiliza a soma dos quadrados da diferença e não o módulo desta diferença [17:**A14**: *é só pegar em módulo então*; 18: **Prof**: *poderia ser A14, mas minimizar a soma dos módulos é mais difícil do que minimizar a soma dos quadrados e se a gente colocar esta diferença ao quadrado ela fica sempre positiva né?*; 19: **A14**: *mas fica maior... fica ao quadrado...;*20: **Prof**: *nem sempre. Esta diferença pode ser menor do que um, mas ainda assim, neste método o que se pretende minimizar é a soma dos quadrados destas diferenças. Outros métodos minimizam outros valores. Entendeu?*; 21: **A14**: *acho que sim...;* 22:**Prof**: *Vamos lá.. continuando. A6, explique o que temos que fazer...].*

Podemos observar que a professora enfatiza “*neste método o que se pretende minimizar é a soma dos quadrados destas diferenças*”, descartando a

possibilidade de utilizar outro método no momento, dando continuidade à sua linha de pensamento como se vê no turno 22.

Quando seu objetivo foi discutir a situação-problema, obter informações sobre os conhecimentos dos alunos quanto ao fenômeno em estudo ou quanto a conceitos matemáticos, a professora elabora questões abertas, oportunizando a troca de idéias, perspectivas e conhecimentos, além de demonstrar interesse nas contribuições dos mesmos. Geralmente, este tipo de questão (aberta, de processo) conduz os alunos à procura de argumentos ou explicações para suas perspectivas ou idéias, empenhando-se em 'explicar' com detalhes um procedimento adotado ou uma concepção a respeito do tema. Estas questões e esta 'procura' exigem do aluno, concentração e reflexão, favorecendo sua aprendizagem e desenvolvimento. Estas questões de processo geram cadeias de interações não-triádicas como vimos na análise apresentada em 5.1. Por exemplo, no *Episódio 1*, observamos a intenção da professora em familiarizar os alunos com o tema, ao mesmo tempo em que procura ter noção do conhecimento dos alunos em relação ao tema. Observa-se questões abertas, de processo [*o que você sabe sobre o rio?*; *Porque se interessar por estes dados?*; entre outras] as quais demandam opiniões e explicações dos alunos, gerando cadeias de interação que constituem uma interação dialógica.

Diante disto, consideramos que o professor desempenha um papel fundamental na constituição dos tipos e padrões de interação em atividades de Modelagem Matemática.

5.2.4 Influência das Características das Situações-Problema Investigadas Durante as Atividades de Modelagem Matemática para a Ocorrência das Interações e para o Tipo de Interação

Conforme caracterização que fizemos no Capítulo 1, *contexto-simulado* faz referência a situações da vida cotidiana que são transformadas em atividades de ensino e aprendizagem com o objetivo (para o professor) de desenvolver o conteúdo matemático e também realizar relações entre estes conteúdos e situações da vida fora da sala de aula. Trata-se de uma situação que de fato acontece, em que os dados obtidos são relativos a um fenômeno que acontece em algum setor da sociedade.

Associando estas características de *contexto-simulado* com as características ou elementos das situações-problema tratadas nas atividades de Modelagem Matemática, consideramos que a Modelagem Matemática na Educação Matemática constitui um *contexto-simulado* que, mediado por um processo investigativo, propõe a resolução de um problema com referência na realidade.

Considerando as características das atividades desenvolvidas, conjecturamos que as mesmas estão alinhadas com esta configuração. De fato, as atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas pelos alunos representam situações do cotidiano do aluno e/ou do Engenheiro Ambiental, sendo, portanto, de interesse desta comunidade. Este interesse aliado ao conhecimento da situação-problema (por tratar de uma situação familiar) propicia a participação ativa do aluno, uma vez que possui conhecimento para participar de discussões relativas ao tema em questão.

A Atividade 1 “Variação da concentração de cálcio em sedimentos de fundo do rio Limoeiro”, representa uma situação do ‘*contexto-real*’ e, quando tratada pelos alunos em sala de aula, reproduz parte das características da situação em seu contexto de origem. A situação foi simplificada e transformada em uma atividade de ensino de modo a tornar possível a sua abordagem. O desenvolvimento deste tema propiciou discussões relativas à importância do cálcio em águas utilizadas para consumo e aos problemas causados ao meio ambiente pelo seu excesso. A grande participação dos alunos nas interações deu-se, muito provavelmente, por abarcar uma situação com referência no cotidiano do ser humano, aliada ao interesse profissional, visto que suas questões, argumentos e preocupações foram influenciados pelo conhecimento da situação em estudo.

O mesmo pode ser percebido em relação às demais situações tratadas nesta pesquisa. Por exemplo, na Atividade 2 ‘*Temperatura de um corpo de alumínio*’, os alunos participam ativamente das interações, argumentando sobre a influência da temperatura na dilatação do alumínio e das consequências da utilização deste metal para o meio ambiente, assim como apresentam reflexões sobre a reciclagem do alumínio. Em suas discussões argumentam que a reutilização do alumínio é menos dispendiosa e consome menos energia do que sua produção, além de sua reciclagem não danificar a estrutura do metal, sendo, portanto, possível sua reciclagem várias vezes. Argumentaram ainda que um quilo de alumínio evita a extração de cinco quilos de bauxita, e deste modo, esta reciclagem gera benefícios

para o meio ambiente, além de ser uma fonte de economia. Quanto aos benefícios ecológicos, consideram ainda que a reciclagem propicia a diminuição do lixo nos aterros e conseqüentemente, a diminuição da agressão ao meio ambiente. Deste modo, o tema em questão oportunizou discussões em termos econômicos e ambientais. Consideramos que este tipo de discussão foi possível graças às características da situação-problema em estudo.

Assim como as Atividades 1 e 2, a Atividade 3: “Estudo da área de soja cultivada no Brasil” e a Atividade 5: “Projeção de área plantada de cana-de-açúcar no território brasileiro” estão alinhadas com a configuração de *contexto-simulado* que conferimos à Modelagem Matemática, uma vez que, nestas atividades o problema em estudo representa uma situação do cotidiano do aluno que foram transferidas para a sala de aula e simplificadas. As duas atividades originaram-se da leitura de um texto em sala de aula intitulado “Realidade e perspectivas do Brasil na produção de alimentos e agroenergia, com ênfase na soja”. Após a leitura deste texto os alunos motivaram-se a pesquisar sobre a realidade da agroindústria e elaboraram os problemas para pesquisa. Vimos na descrição da Atividade 3 que o grupo definiu hipóteses e realizou simplificações para encontrar um modelo considerado satisfatório.

Estas simplificações, definição de hipóteses, elaboração do problema e determinação do modelo, foram realizadas em interação. Por tratar de uma situação com referência na realidade, os alunos sentiram-se seguros para participar ativamente destas interações, argumentando, questionando, apresentando seus pontos de vista e conhecimento relativo ao tema.

Deste modo, inferimos que as características das situações-problemas oportunizam o estabelecimento de interações, uma vez que os alunos sentem confiança em seu conhecimento a respeito do tema e motivação para participar da conversação.

Uma das ações do aluno ao desenvolver uma atividade de Modelagem Matemática é a compreensão da situação. Como observamos na descrição das atividades, ao depararem com a situação-problema a ser estudada, os alunos interpretam as informações, realizam aproximações e, utilizando-se de conhecimentos, por vezes não matemáticos, compreendem a situação, formulando um problema a ser estudado. Todas estas ações foram mediadas pela interação.

No caso da Atividade 3, especificamente, os alunos utilizam seus conhecimentos prévios e com base neles, construíram a hipótese de que o modelo logístico seria o melhor modelo para representar a situação. Observa-se que, apesar dos dados não indicarem um crescimento logístico, os alunos, em interação, construíram a hipótese de que deveria ser um modelo assintótico. Neste caso seus conhecimentos sobre Equações Diferenciais os conduziram à argumentação pelo uso dos modelos. Os episódios 11 e 12 mostram suas discussões e o momento em que os alunos argumentam com a professora sobre a hipótese considerada e a escolha do modelo. Mais uma vez se observa a participação ativa do aluno no desenvolvimento da atividade.

As atividades proporcionaram oportunidade de reflexão sobre as estratégias de resolução utilizadas no desenvolvimento da situação-problema, como mostra o *Episódio 7*, turno 4 [**A3**: *Quanto mais profundo maior o erro. Tem alguma coisa errada aí....*]. Neste *Episódio* nota-se a reflexão dos alunos quanto ao modelo encontrado, conduzindo-os a conjecturar que o modelo apresenta algum erro em relação aos parâmetros. O *Episódio 22* (Anexo 2) também apresenta uma discussão em que os alunos procuram diagnosticar o que estava errado ou faltando no modelo: [*Tá estranho isso*”; *péra aí... tem alguma coisa errada*”, *“cara, mas tá faltando alguma coisa. Era prá ter dado certo*”, *“ era pra ter dado certo o que?”*]. Esta reflexão sobre o modelo e a estratégia de resolução utilizada, conduz o grupo à visualização do erro cometido, como se percebe no *Episódio 22* (Anexo 2), turnos 5 à 7: [*teria que ter mais alguma coisa...mais uma constante...*” , *“teria que ter mais uma constante????”*, *“nossa... faltou o “mais C” aqui ó...*] quando integra. Mais uma vez se observa que as características da situação proposta pelas atividades de Modelagem Matemática geram oportunidades para o aluno questionar, problematizar e sugerir alternativas, favorecendo a ocorrência da interação.

O que se percebe na análise das atividades é que, as características das situações-problema tratadas por estes alunos contribuem decididamente para a constituição das interações em sala de aula. Ao depararem com um tema de interesse e familiar, os alunos, espontaneamente, sentem ‘necessidade’ de expor suas perspectivas e seu conhecimento sobre o assunto, assim como suas dúvidas ou curiosidades. Este fato gera uma dinâmica interativa no desenvolvimento das atividades, oportunizando a interação. Por outro lado, quando uma situação é

totalmente nova, não familiar, geralmente os alunos sentem dificuldades para contribuir, e desta forma, apresentam resistência à participação oral.

As situações-problema tratadas por estes alunos, além de oportunizar a ocorrência de interações, favoreceram o estabelecimento de interações dialógicas, uma vez que, o conhecimento sobre a situação ou interesse em aprender sobre o tema em questão, favoreceu a participação de vários alunos, interessados em expor seu conhecimento ou ponto de vista e o interesse em ouvir perspectivas ou opiniões diferentes da sua.

Observa-se que as interações proporcionadas no desenvolvimento destas atividades foram interações que, ora oportunizaram aos alunos expor suas dúvidas e contribuições em relação aos conceitos matemáticos, ora oportunizaram discussões sobre a situação-problema em si, com questionamento, sugestões e colaborações. Além disso, a interação professor/aluno foi mais intensa do que geralmente se observa em aulas ditas 'tradicionais', visto que a professora se coloca como participante da equipe, procurando entender a situação juntamente com os alunos, e não como 'autoridade' no assunto, até porque, alguns assuntos tratados (relacionados à Engenharia Ambiental) não eram de domínio da professora. Deste modo, os alunos sentem que suas contribuições são importantes para o aprendizado de todos os envolvidos e para o desenvolvimento e resolução da situação-problema em si.

5.3 CONSIDERAÇÕES DOS ALUNOS QUANTO AO DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA E À IMPORTÂNCIA DAS INTERAÇÕES

Após o término de todas as atividades, os alunos responderam a um questionário (escrito) no qual procuramos perceber suas opiniões em relação ao desenvolvimento das atividades. Além deste questionário utilizamos uma entrevista semi-estruturada para obter esclarecimentos de algumas de suas considerações. Em síntese, as questões que nortearam esta entrevista e questionário podem ser agrupadas em seis tópicos:

i) Quanto à percepção dos alunos em relação às interações professor/aluno, aluno/aluno, aluno/professor de outras áreas do conhecimento e ao trabalho em equipe;

- ii) Quanto à relação entre a interação entre os membros do grupo e a compreensão do problema e formulação de hipóteses;
- iii) Quanto às dificuldades encontradas no desenvolvimento da situação-problema;
- iv) Quanto ao grau de satisfação em relação à realização das atividades;
- v) Quanto aos pontos positivos e negativos de desenvolver atividades de Modelagem Matemática em sala de aula;
- vi) Quanto à aprendizagem de conceitos matemáticos e/ou conceitos de outras áreas do conhecimento.

Na sequência apresentamos as respostas dos alunos quanto a estes tópicos:

- i) em relação às interações professor/aluno, aluno/aluno, aluno/professor de outras áreas do conhecimento e ao trabalho em equipe:

-“alunos e professores interagem mais (...);”

-“a interação é importante porque existe necessidade de várias opiniões sobre o tema ...”;

-“mas todos os membros do grupo tem que estar juntos para solucionar alguma etapa da modelagem, senão for possível se unir em todos os encontros, é fundamental que todos saibam o que foi realizado em cada etapa para que todos possam caminhar juntos.”;

- “é importante a interação pois os alunos procuram resolver os problemas através de discussões com outros alunos e com o professor”;

- “através das interações alunos e professor buscam hipóteses e possíveis soluções para desenvolvimento da modelagem”;

-“por exemplo, em nossa modelagem, tanto para sua construção quanto para possíveis métodos de resolução, pedimos auxílio de professores de física, química, programação”;

- “as interações propiciam discussões entre alunos”;

-“através de propostas de modelagem nós alunos fomos incentivados a buscar e interagir com outros professores de áreas diferentes em busca de auxílio, experiências e conselhos”.

Estas colocações dos alunos indicam que consideram que o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática oportuniza participação ativa do aluno, e que as interações estabelecidas favorecem o desenvolvimento da situação-problema, corroborando com as inferências que realizamos no item 5.2.

ii) Quanto à relação entre a interação entre os membros do grupo e a compreensão do problema e a formulação de hipóteses;

iii)

-“houve troca de informações e conhecimento facilitando a realização das etapas da modelagem”;

- “elas (as interações) eram eficientes. (‘num’ sei justificar isso não)”;

- “compartilhamos conhecimentos”;

- “cada um vê pontos diferentes do mesmo problema por isso é importante trocar idéias com os colegas”;

-“somente através do diálogo pode se formular hipóteses e compreender e solucionar o problema”;

-“... o que um integrante não entendeu o outro pode auxiliá-lo”.

Observamos que os alunos atribuem importância às interações em sala de aula, considerando-as ‘eficientes’ tanto para o desenvolvimento individual quanto coletivo.

iv) Quanto às dificuldades encontradas no desenvolvimento da situação-problema;

v)

- “muitas disciplinas da faculdade para dividir o tempo”;

- “ a montagem do aquecedor atrasou, assim não podemos coletar os dados (na primeira tentativa)”;

-“por ser uma modelagem de um evento da natureza recorreremos a livros e em alguns não encontramos o que desejava”;

-“dificuldade em marcar horário com o professor de física para nos auxiliar”;

-“primeiramente um dia com condições climáticas boas para possível coleta de dados, relacionar conteúdos de diferentes matérias e escolha do melhor software para confirmação do modelo descrito e sua verificação”;

-“meu grupo encontrou certa dificuldade para resolver até a professora falar do método de Ford-Walford daí ficou ‘simples’ o desenvolvimento”;

- “os problemas exigiram muita pesquisa e estudo, se tornando, às vezes um pouco cansativo, porém, ainda assim continuamos até resolver o problema”;

-“tinha que digitar muita coisa no Excel aí eu tinha preguiçinha”.

Observa-se que as dificuldades vão desde conhecimentos necessários para solucionar os problemas até problemas operacionais (tempo disponível, horários disponíveis para encontros, condições climáticas para a coleta de dados, etc). Apesar das dificuldades encontradas, observamos que os alunos sentiram-se satisfeitos em relação à realização das atividades como mostram as respostas do próximo item.

vi) Quanto ao grau de satisfação em relação à realização das atividades;

- “A atividade foi produtiva demais, acabei aprendendo mais na prática do que nas aulas teóricas...”;

- “as aulas foram descontraídas e as atividades muito didáticas. A professora conseguiu mostrar a aplicação da matemática para o nosso curso”;

- “(...) a maior satisfação foi nos depararmos com a realidade. Que não é nada fácil, tudo é questão de se dedicar, tomar decisões com calma, procurar saber primeiro ao invés de dar hipóteses erradas, persistir, que aos poucos os resultados vêm. Essa realidade foi a minha maior satisfação como aluno. Futuramente minha satisfação, como disse, é poder realizar um trabalho acurado”;

- “(...)a ‘entrega’ para solucionar o problema foi boa, pois podemos adquirir conhecimento para futuras modelagens ou para o dia de trabalhar como engenheiros, a motivação para sermos qualificados, entre outras, nos motiva sempre olharmos e querermos conquistar além com humildade e paciência”;

- “Percebi que com a realização de atividades que podem ser aplicadas à realidade posso me identificar com futuras atividades no futuro profissional, além de descobrir na modelagem um ramo de trabalho que me traz satisfação e que eu possa exercer interação entre outras matérias”;

- *“um dos fatores que limitaram a motivação é a dificuldade em conseguir dados experimentais, porém achei uma oportunidade para desenvolvimento como aluno, me encontrando com uma motivação boa podendo aplicar conceitos a casos concretos”.*

- *“satisfação em poder aplicar conceitos e realizar atividades que se aproximem da vida profissional”;*

- *“(…) pude ver uma forma de aplicar a matemática na minha área”;*

- *“tive a sensação que aquilo que eu tava aprendendo era útil para minha vida profissional porque até então tudo era muito viajado para mim”;*

- *“(sensação) de que realmente tinha entendido”.*

vii) Quanto aos pontos positivos e negativos de desenvolver atividades de Modelagem Matemática em sala de aula.

Somente quatro alunos apontaram pontos negativos:

- *“é um pouco trabalhoso, tanto ao conteúdo relacionado quanto ao tempo gasto”;*

- *“o tempo”;*

- *“não dar 100% de certeza”;*

- *“falta de materiais; desencontro do grupo; dificuldade em marcar horário com o professor de física”.*

Estes pontos negativos parecem estar relacionados principalmente ao tempo destinado ao desenvolvimento das atividades. Este fato também foi sinalizado pelos alunos no *Episódio 18* onde consideraram que a falta de tempo disponível, em virtude das atividades acadêmicas, foi o fator que mais dificultou o desenvolvimento das atividades.

Pontos considerados positivos pelos alunos:

- *“aplicação de conteúdos, interação entre disciplinas, interação entre alunos, interação entre professores e outros profissionais, experiência no que mais se aproxima a vida profissional como engenheiro, trabalho em equipe, desenvolvimento na busca por hipóteses e soluções”;*

- *“novas técnicas de resolução de problemas”.*

- “*aplicar conceitos teóricos na prática, maior relacionamento direto aluno/professor e despertar interesse nas pesquisas*”;
- “*poder relacionar os assuntos propostos (conteúdos matemáticos) com problemas reais da nossa área*”;
- “*trabalho em equipe; aprender a solucionar problemas; nos depararmos com a realidade*”.

viii) Quanto à aprendizagem de conceitos matemáticos e/ou conceitos de outras áreas do conhecimento.

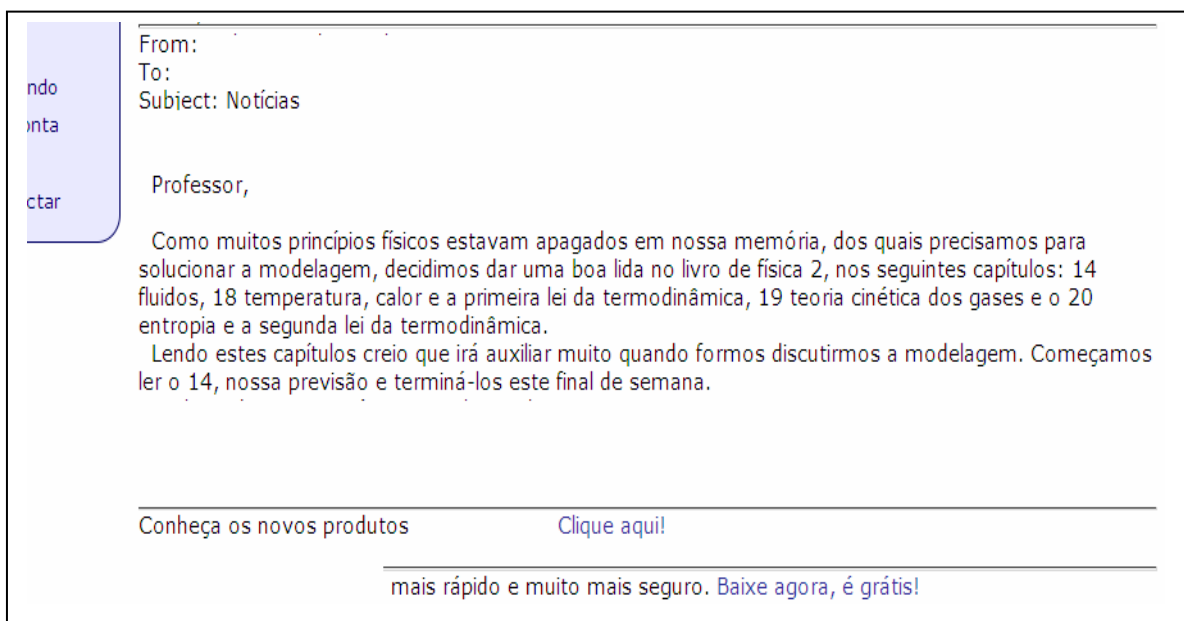
As atividades desenvolvidas pelos alunos apresentaram um ‘ótimo nível de incerteza’ (em termos de Bruner (1973): nem demasiado alto nem reduzido demais), uma vez que os alunos constataram que o conhecimento inicial que dispunham não era suficiente para solucionar o problema, porém, possuíam condições de construir novos conhecimentos, necessários para sua solução.

Neste sentido consideramos que a Modelagem Matemática como um *contexto-simulado*, está em sintonia com a perspectiva da Educação Matemática apregoada por Buriasco, Ferreira e Ciane (2009) de trabalhar atividades em que os alunos possam construir conhecimento a partir de situações que lhes são familiares.

Na Figura 58 apresentamos cópia de um email enviado pelos alunos do grupo 2 a um professor de Física onde observamos a dedicação dos alunos bem como a consciência de que necessitam de mais estudos para a realização da atividade⁴⁹. Este email denota ainda que o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática propiciou interações que foram além das estabelecidas em sala de aula.

⁴⁹ Por questões de ética, suprimimos desta cópia o nome do professor, os nomes dos alunos e seus respectivos endereços de email.

Figura 58 – E-mail do Grupo 2 a um Professor de Física



Nota-se neste email (Figura 58) que o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática proporcionou a busca pela aprendizagem de novos conceitos matemáticos e/ou a revisão de outros já conhecidos. Este fato também é sinalizado em respostas dos alunos ao questionário aplicado pela pesquisadora. Um dos tópicos abordados neste questionário diz respeito à aprendizagem de conceitos matemáticos e à utilização de conceitos de áreas diferentes da matemática. Nota-se em suas respostas (apresentadas na sequência) que consideram a aprendizagem de diversos conceitos e técnicas matemáticas, bem como a necessidade de conceitos referentes a campos diferentes da matemática.

Conceitos matemáticos aprendidos e/ou lembrados e utilizados:

- “método de Ford-walford”;
- “método das diferenças finitas, conceitos de radiação”;
- “...equação logística...”;
- “método das aproximações sucessivas”;
- “relembrei frações parciais”;
- “equação diferencial linear”;
- “método dos mínimos quadrados”;
- “transformada de Laplace”;

- *“As atividades foram dinâmicas, nos ensinou a aplicar métodos que não sabíamos onde iríamos usar, ajudou a buscar alternativas para solução de problemas práticos”.*

Conceitos referentes a campos diferentes da matemática:

- *“Leis da termodinâmica, cálculo numérico (que até então não havíamos estudado)...”;*

- *“análises químicas”;*

- *“conceitos de Física”.*

Sobre a necessidade de buscar a aprendizagem e/ou revisão de conceitos:

- *“a modelagem matemática engloba partes do conhecimento que já foram anteriormente estudados mas necessitam ser lembrados, além de que podemos precisar de outras informações que estão nos livros mas que ainda não havíamos aprendido”;*

- *Modelar não é apenas saber matemática e sim colocar em prática e para isso muita dedicação e estudo são necessários”;*

- *“...exigiu desde procurar dados até o método que utilizamos que não era de nosso conhecimento”;*

- *“(...) só com nosso conhecimento não conseguimos resolvê-la”*

Podemos observar nestas falas que os alunos consideraram o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática importante para seu aprendizado, contribuindo com a visualização da aplicação de conceitos matemáticos em situações diversas, aprendizagem e/ou revisão de conceitos matemáticos e desenvolvimento da capacidade de trabalhar em equipe, bem como atribuem importância às interações estabelecidas durante as atividades, com vistas à aprendizagem.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao término deste trabalho retomamos nossa problemática de pesquisa que consiste em **Investigar as interações que emergem durante o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática na sala de aula**, procurando identificar características que podem nos oferecer subsídios para compreender o papel destas interações na aprendizagem dos alunos.

Com o intuito de obter subsídios para esta investigação desenvolvemos com um grupo de alunos de uma Universidade Tecnológica Federal algumas atividades de Modelagem Matemática no âmbito da disciplina Matemática 2, filmando-as e/ou gravando em áudio para posterior análise.

Com vistas a alcançar nosso objetivo primeiramente tratamos no Capítulo 1 a Modelagem Matemática como um *contexto-simulado* para a aprendizagem da Matemática. O que se pode inferir, com base na análise apresentada no Capítulo 5 e com base nas demais atividades desenvolvidas é que a Modelagem Matemática fica bem caracterizada como um *contexto-simulado* visto que as situações investigadas possuem origem em situações do cotidiano do aluno e são simplificadas, conservando características da situação real. As características destas situações-problema oportunizam a ocorrência e caracterização das interações em sala de aula. Inferimos que os diálogos e as interações dialógicas têm um lugar privilegiado neste *contexto-simulado*. Por se tratar de situações do cotidiano do aluno, ou da sociedade em geral, o aluno teve condições de dialogar a respeito do tema, tecendo seus pontos de vistas, perspectivas e argumentos. O que temos observado em aulas do tipo tradicionais (como caracterizadas nesta pesquisa), onde os alunos resolvem exercícios descontextualizados ou problemas que não pertencem ao seu cotidiano, é que estes diálogos não ocorrem com tanta frequência. Além disto, a construção de hipóteses só é possível tendo em vista as características das situações-problemas, que são situações abertas, onde as variáveis são selecionadas e simplificadas.

No Capítulo 2 tratamos das interações na sala de aula e suas relações com a aprendizagem. Neste capítulo apresentamos argumentações de vários pesquisadores, e em especial de Lev Vygotsky, quanto às contribuições das

interações à aprendizagem do indivíduo. Para este teórico, por meio da interação o indivíduo constrói conhecimentos e seu NDP avança, transformando-se em NDR, ou seja, aquilo que o indivíduo era capaz de realizar com ajuda dos outros pode agora realizar sozinho. Constatamos que as interações proporcionadas pelo desenvolvimento das atividades atuaram significativamente na ZDP dos alunos, por exemplo, no *Episódio 4* observa-se a ajuda da professora no sentido de conduzir os alunos a reconhecerem o significado matemático da situação. O aluno A9 termina a interação concluindo que ‘se for tudo igual aí... aí a gente pode usar esta hipótese’, referindo-se à proporcionalidade do modelo $\frac{\Delta C}{\Delta p} \cong kC$, indicando um entendimento de que se a constante de proporcionalidade for igual para todas as profundidades a hipótese considerada pode ser utilizada. No *Episódio 6*, o aluno A3 apresenta dúvidas em relação ao procedimento para determinar os parâmetros da equação $N(p) = C \cdot e^{-kp}$. A interação com os colegas faz com que o aluno consiga compreender os procedimentos e avançar na resolução. O aluno A4 também é auxiliado pelos colegas e na sequência constatamos que suas dúvidas foram sanadas. Deste modo, entendemos a importância do ‘outro’ atuando na ZDP do colega.

Em outro episódio, o *Episódio 9*, a professora, entendendo o NDP dos alunos, elabora sua explicação de modo a se fazer compreender, conduzindo os alunos ao entendimento dos fundamentos do Método dos Mínimos Quadrados. No prosseguimento da atividade constatamos que alguns alunos compreenderam tal método, o que significa que a professora atuou de forma significativa na ZDP destes alunos. No *Episódio 13* o aluno A4 apresenta dúvidas quanto à integração utilizando o método das frações parciais e, após a ajuda de A1 (considerada por nós uma ajuda elaborada), o aluno consegue compreender e resolver posteriormente a Equação Diferencial.

Estes são exemplos de alguns dos episódios que indicam a atuação do ‘outro’ na ZDP do aluno, contribuindo com a aprendizagem.

Ainda no Capítulo 2 tratamos da importância da variedade de abordagens comunicativas e do papel do professor em proporcionar esta variedade. Observa-se que, como as atividades foram desenvolvidas coletivamente, a professora pode exercer o papel de mediadora, proporcionando avanços que provavelmente não ocorreriam espontaneamente, constituindo uma interferência na

Zona de Desenvolvimento Proximal, avanço este considerado de suma importância para a construção do conhecimento, conforme argumentações de Vygotsky. Consideramos ainda que o modo como a professora conduziu o desenvolvimento das atividades proporcionou esta variedade de abordagens comunicativas e ainda, sua contribuição para que os alunos se sentissem à vontade para expor suas idéias, perspectivas e argumentações conduziram à expressiva quantidade de interações dialógicas.

No Capítulo 3 tratamos da qualidade da comunicação e a aprendizagem, apresentando argumentos e condições elencadas por Helle Arlo, Ole Skovsmose, Anna Sfard e Noreen Webb. Estas condições foram analisadas e apresentadas no Capítulo 5.

A identificação de determinadas ações dos alunos durante as atividades de Modelagem Matemática bem como características das situações-problema investigadas nestas atividades são os aspectos que nos conduziram à caracterização da Modelagem Matemática como *contexto-simulado*. E é neste *contexto-simulado* que, investigando as interações dos alunos, apresentamos reflexões sobre sua aprendizagem.

A análise das atividades desenvolvidas durante esta pesquisa nos leva a inferir que as atividades de Modelagem Matemática oportunizam o estabelecimento de interações que possuem características que favorecem a aprendizagem dos estudantes. As características das interações que inferimos se manifestarem estão alinhadas com as condições elencadas por Noreen Webb para que a interação favoreça a aprendizagem; com as condições propostas por Anna Sfard para que a comunicação seja efetivada com vistas à aprendizagem; bem como, constituem-se interações dialógicas, favorecendo a aprendizagem dos alunos, conforme enunciam Mortimer e Scott (2002) e Alro e Skovsmose (2006).

Levando em consideração o referencial teórico adotado nesta pesquisa, a constatação de que a maioria das interações são dialógicas e constituintes do diálogo nos conduz a inferir que as atividades de Modelagem Matemática como um *contexto-simulado* propicia o engajamento dos alunos nas interações contribuindo com sua aprendizagem.

Do mesmo modo, a constatação de que grande parte das interações contemplam as condições elencadas por Noreen Webb para que a interação favoreça a aprendizagem e as condições propostas por Anna Sfard para que a

comunicação com vistas à aprendizagem seja efetivada inferimos que o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática propicia interações que contribuem significativamente com a aprendizagem dos alunos, conforme argumentam as pesquisadoras supracitadas.

Além das considerações que apresentamos no Capítulo 5, podemos observar no decorrer das atividades, que algumas ações dos alunos durante a resolução da situação-problema não são exclusivas de atividades interativas, porém, a diferença reside no fato de que em interação, estas ações são, muitas vezes, explicitadas para o outro, atuando como auxiliadoras e ao mesmo tempo atuando como reorganizadoras do pensamento, promovendo a estruturação e novas aprendizagens. Este fato se deve à necessidade do indivíduo se fazer entender, e neste ato, o indivíduo realiza uma reflexão do seu pensamento. Enquanto os alunos realizam seus procedimentos em grupo, eles falam a respeito do que fazem, perguntando, e muitas vezes, explicando o que estão fazendo. Suas falas, além de acompanhar a realização da atividade, a orientam, uma vez que, ao deparar-se com sua fala ou sua escrita, o aluno pode observar um procedimento equivocado e corrigi-lo por si só, como se fosse uma interação consigo mesmo.

Com base em nossa análise consideramos que o discurso dialógico e os diálogos oportunizados pelas atividades de Modelagem Matemática contribuem para a existência de um espaço para os alunos apresentarem suas idéias, perspectivas e argumentos, formularem questões e envolverem-se com diferentes pontos de vista.

Neste sentido a Modelagem Matemática como um *contexto-simulado* insere-se no que Mortimer e Scott (2002) caracterizam como 'abordagem investigativa' e promove novas possibilidades de comunicação, que podem ultrapassar os padrões triádicos I-R-A, abrindo, deste modo, espaços para novas qualidades de aprendizagem.

Assim, ainda que a importância da comunicação durante atividades de Modelagem Matemática já tenha sido apontada em pesquisas anteriores, nossa pesquisa apresenta elementos que, para além dessa importância, sinalizam contribuições para a aprendizagem dos alunos.

Como vimos no decorrer desta pesquisa, as características das situações-problema tratadas nas atividades de Modelagem desenvolvidas por este grupo de alunos oportunizaram o estabelecimento de interações e mais do que isto,

o estabelecimento de interações dialógicas e constituintes do diálogo, as quais propiciam abertura para alunos questionarem, apresentarem suas idéias e pontos de vistas, considerarem diferentes perspectivas e envolverem-se efetivamente no desenvolvimento das atividades.

Observa-se ainda que o professor possui um papel primordial neste processo, pois, dependendo do seu objetivo, elabora questões que desencadeiam padrões de interação triádicos ou não -triádicos, colaborando deste modo com o tipo de interação estabelecida.

A contribuição desta pesquisa para a área de Educação Matemática reside na identificação de características das interações que, de acordo com nosso referencial teórico, sustentam que estas interações favorecem ou propiciam a aprendizagem dos alunos.

Observamos na literatura da área que diversas pesquisas têm sido realizadas tratando do desenvolvimento de atividades de Modelagem em sala de aula, apresentando argumentos favoráveis à sua inserção. Por outro lado, outras tantas pesquisas sinalizam o papel das interações para a aprendizagem do indivíduo, apresentando características de interações que favorecem a aprendizagem. Diante disto, em nossa pesquisa nos preocupamos em investigar a ocorrência e a caracterização de interações em aulas mediadas por atividades de Modelagem Matemática. A partir das informações obtidas e analisadas podemos concluir que as atividades de Modelagem Matemática com qualidades de *contexto-simulado* favorecem a aprendizagem dos alunos em relação aos conteúdos matemáticos que emergem dessas atividades.

Considerando que, de modo geral, turmas de disciplinas de Matemática em séries iniciais de cursos de Engenharia são mais numerosas, a particularidade da pesquisa de ser desenvolvida com uma turma de 14 alunos sendo a pesquisadora a própria professora da disciplina pode ser superada em pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS

- AGUIAR R.V. (2006). **Desenvolvimento, implementação e avaliação de ambiente virtual de aprendizagem em um curso profissionalizante de enfermagem.** [doutorado] São Paulo (SP): Escola de Enfermagem de Ribeirão Preto da USP; 2006. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/83/83131/tdc-03052006-183016/>.
- AGUILAR TAMAYO, M. F. (2006). El mapa conceptual y la teoría sociocultural. In: A. J. Cañas y J. D. Novak (Eds.), **Concept Maps: Theory, Methodology, Technology. Proceedings of the Second International Conference on Concept Mapping.** (Vol. 1, pp. 216-223). San José, Costa Rica: Universidad de Costa Rica.
- ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. (2005). Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?. **Ciência e Educação** (UNESP), v. 11, p. 1-16, 2005.
- ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. (2004). Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, RIO CLARO, v. ano 17, n. 22, p. 19-36, 2004.
- ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. C. (2009). Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. **Alexandria**, v. 2, p. 117-134, 2009.
- ALMEIDA, L.M.W. ; SILVA, K.A.P. (2010). Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: algumas relações. No prelo.
- ALRO, H. E SKOVSMOSE, O. (2006). **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática.** Tradução de Orlando Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- ALVES-MAZZOTTI, A. (1998). Parte II – O Método nas Ciências Sociais. In.: A. J. Alves-Mazzotti, F. Gewamdsznadger. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa.** São Paulo: Pioneira, 203 p., 1998.
- ARAÚJO, J. de L. (2007). Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na educação matemática. **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais**, Recife, v. 3, 2007.
- ARAÚJO, J. de L. ; SALVADOR, J. A. (2001) Mathematical Modelling in Calculus Courses. In: João Filipe Matos; Werner Blum; Ken Houston; Susana Paula Carreira. (Org.). **Modelling and Mathematics Education: ICTMA 9: Applications in Science and Technology.** Chichester: Horwood Publishing, 2001, v. , p. 195-204.
- ASSIS, A ; TEIXEIRA, O. P. B. (2006). Análise das características das argumentações discentes durante a utilização de um texto paradidático em aulas de Física. **Revista Ciência e Tecnologia**, v. 25, p. 101-111, 2006.
- BARBOSA, J. C. (2008). As discussões paralelas no ambiente de aprendizagem modelagem matemática. **Acta Scientiae (ULBRA)**, v. 10, p. 47-58, 2008.

- BARBOSA, J. C. (2007). A prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: o esboço de um framework. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. Recife: SBEM, 2007. p.161-174.
- BARBOSA, J.C. (2006). Mathematical Modelling in classroom: a critical and discursive perspective. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, 38(3), 293-301.
- BARBOSA, J. C. (2006a) Students discussions in Mathematical Modelling. In: International Conference on the Teaching of Mathematics at the undergraduate level, 3., 2006a, Istanbul. **Proceedings...** Istanbul: Turkish Mathematical Society, 2006. 1 CD-ROM.
- BASSANEZI, R. C. (2002). **Ensino aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto.
- BISHOP, A. J. (1988). Aspectos sociais e culturales de la educación matemática. In. **Revista Enseñanza de las Ciencias**. Vol 6. n. 2 .
- BISOGNIN, E ; BISOGNIN, V ; ISAIA, S. M. de A. . (2009). A sala de aula e a Modelagem Matemática: contribuições possíveis em diferentes níveis de ensino. *Horizontes (EDUSF)* , v27, p79-90.
- BISOGNIN, E; BISOGNIN, V; ALONSO RAYS, O. (2004): “Modelo matemático da concentração de cocaína no organismo humano: modelagem matemática no ensino de Matemática”. In: Educação matemática em revista – RS, n.º 6, Ano VI. SBEM, RS.
- BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S.K. (1994) **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto. Portugal: Porto.
- BORBA, M.C. (2010) Softwares e Internet na sala de aula de Matemática. In **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática, Cultura e Diversidade**. Salvador. Bahia. 2010.
- BORBA, M. C. ; MALHEIROS, A. P. dos S . (2007). Diferentes formas de interação entre Internet e Modelagem: desenvolvimento de projetos e o CVM. In: Jonei Cerqueira Barbosa; Ademir Donizeti Caldeira; Jussara de Loiola Araújo. (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: Pesquisas e Práticas Educacionais**. 1 ed. Recife: SBEM, 2007, v. 1, p. 195-214.
- BORBA, M. C.; MENEGHETTI, R. C. G.; HERMINI, H. A. (1999) Estabelecendo critérios para avaliação do uso de Modelagem em sala de aula: estudo de um caso em um curso de ciências biológicas. In: BORBA, M. C. **Calculadoras gráficas e educação matemática**. Rio de Janeiro: USU, Ed. Bureau, 1999. p. 95-113 (Série Reflexão em Educação Matemática).
- BORBA, M. C.; MENEGHETTI, R. C. G.; HERMINI, H. A. (1997). Modelagem, calculadora gráfica e interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de ciências biológicas. **Revista de Educação Matemática da SBEM-SP**, [São José do Rio Preto], v. 5, n. 3, p. 63-70, 1997.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. (2001). **Informática e Educação Matemática**. 2. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BORSSOI, A. H. (2004). **A Aprendizagem Significativa em Atividades de Modelagem Matemática Como Estratégia de Ensino**. Dissertação Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática - Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2004.

BRADFORD, S. M. (2007). **The Use of Mathematics Dialogues to Support Student Learning In High School Prealgebra Classes**. Tese de Doutorado. The University of Montana Missoula, MT. Disponível em <http://etd.lib.umt.edu/theses/available/etd-12262007-162253/>. Acessado em julho de 2009.

BRASIL. (2006). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o ensino médio** – Volume 2: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2006.

BURAK, D. (2004). **Modelagem Matemática e a Sala de Aula**. In: I EPMEM - Encontro Paranaense da Modelagem Na Educação Matemática., 2004, Londrina. Anais do I EPMEM, 2004.

BURGOS, S. DOMÍNGUEZ, M. ROJAS, F. J. (2006). La participacion en El aula de matemáticas. In: **Matemáticas e interculturalidad**. Goñi J. M. (coord). Espanha. pp. 49-62. 2006.

BURIASCO, R. L. C. ; FERREIRA, P. E. A ; CIANI, A. B . (2009). Avaliação como Prática de Investigação (alguns apontamentos). **Bolema**. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 33, p. 69-96, 2009.

BRUNER, J.S. (1973). **Uma nova teoria de aprendizagem**. Bloch Editores S.A. 2ª. Ed. Rio de Janeiro. Brasil. 1973.

CARVALHO, C.; CÉSAR, M. (2002). Interações sociais, desenvolvimento cognitivo e matemática. In M. Fernandes, J. A. Gonçalves, M. Bolina, T. Salvado e T. Vitorino (Ed.), **O particular e o global no virar do milênio: Cruzar saberes em educação**. Actas do 5º Congresso da SPCE (pp. 407-416). Porto: Colibri/SPCE. Disponível em http://cie.fc.ul.pt/membrosCIE/mcesar/textos%202002/Interaccoessociais_desenvolvementocognitivo.pdf. Acessado em março de 2008.

CHINNAPPAN, M.; THOMAS, M. O. J. (2003). Teachers' Function Schemas and their Role in **Modelling, Mathematics Education Research Journal**, 15(2). 151-170.

COBO, P.; FORTUNY, J. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. **Educational Studies in Mathematics**, 42(2), 115-140.

DAVIS, C., SETÚBAL, M. A. ; ESPOSITO, Y. L. (1989). Papel e valor das interações sociais em sala de aula. **Cad. de Pesq.** São Paulo (71): 49-54. nov. 1989.

FANIZZI, S. (2008). A interação nas aulas de matemática: um estudo sobre aspectos constitutivos do processo interativo e suas implicações na aprendizagem. 2008. **Dissertação** (Mestrado em Educação) — Faculdade de Educação, USP, São Paulo (SP). Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-05082008-142903/publico/DissertacaoSueliFanizzi.pdf>

FERREIRA, R. S; LORENCINI JR. (2005). A construção do conhecimento biológico nas séries iniciais: O papel das interações discursivas em sala de aula. **V ENPEC**. Nº5, 2005.

FERRUZZI, E. C.; ALMEIDA, L. M. W.; GONÇALVES, M. B. (2006). Ensino tecnológico: possibilidades de aprendizagem por meio da Modelagem Matemática. **Perspectiva** (Erexim), v. 30, p. 63-77.

FERRUZZI, E. C. (2003). A Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos Superiores de Tecnologia. Florianópolis, 2003. **Dissertação**. (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas), Universidade Federal de Santa Catarina.

FOX, J. L. (2006) A justification for Mathematical Modelling Experiences in the Preparatory Classroom. In: **29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**, pp. 221-228. July, 2006, Canberra, Australia. Disponível em <http://www.merga.net.au/documents/RP232006.pdf>.

FRANCHI, R. H. ° L. (1993) Modelagem matemática como estratégia de aprendizagem do Cálculo diferencial e integral nos cursos de engenharia. Dissertação de mestrado. UNESP, Rio Claro. S.P.

FROTA, M. C. R. (2006). **Investigações na sala de aula de Cálculo**. 29ª Reunião da ANPED.

KIERAN, C. (2001). The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. **Educational Studies in Mathematics** 46, 187–228.

KNIJNIK, G ; DUARTE, C. G. (2010). Entrelaçamentos e Dispersões de Enunciados no Discurso da Educação Matemática Escolar: um Estudo sobre a Importância de Trazer a Realidade do Aluno para as Aulas de Matemática. **Bolema**. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 23, p. 863-886, 2010.

LAU, P.; SINGH, P.; HWA, T.-Y. (2009). Constructing mathematics in an interactive classroom context. **Educational Studies in Mathematics**. Maio de 2009. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-009-9196-y>. Acessado em junho de 2009.

LESH, R. DOERR, L. M. (2006) Symbolizing, Communicating, and Mathematizing: Key Components of Models and Modeling. In: **Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design**. Editors: Paul Cobb; Erna Yackel; Kay McClain. ISBN: 978-0-8058-2976-1 (paperback) 978-0-8058-2975-4 (hardback) 978-1-4106-0535-1 (electronic). Routledge, USA.

LESH, R. (2010). Tools, Researchable Issues & Conjectures for Investigating What it Means to Understand Statistics (or Other Topics) Meaningfully. **Journal of Mathematical Modelling and Application**. Vol. 1, No. 2 16-48.

MACHADO, N. J. (2005). Matemática e a realidade: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática. São Paulo: Cortez, 2005.

MARTÍNEZ SILVA, M. (2003). Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado. **Tese de doutorado**. Universidad Autónoma de Barcelona. 2003.

MIGUEL, J. C. (2005). **O ensino de Matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico-metodológicas**. In: Sheila Zambello de Pinho; José Roberto Corrêa Saglietti. (Org.). Núcleos de Ensino - PROGRAD - UNESP. I ed. São Paulo - SP: Editora UNESP, 2005, v. I, p. 375-394.

MORTIMER, E. F.; SCOTT, P. (2002). **Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino**. Investigações em Ensino de Ciências. Porto Alegre - RS, v.7, n.3, 2002. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n3/v7_n3_a7.htm>.

MORTIMER, E.; MASSICAME, T.; BUTY, C., e TIBERGHIE, A. (2007). Uma metodologia para caracterizar os gêneros de discurso como tipos de estratégias enunciativas nas aulas de ciências In NARDI, R. **A pesquisa em ensino de ciência no Brasil: alguns recortes**. São Paulo: Escrituras, 2007.

NEGRELLI, L. G. (2008). Uma reconstrução epistemológica do processo de Modelagem Matemática para a Educação (em) Matemática. 2008. **Tese** (Doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

OLIVEIRA, A. M. P. ; CAMPOS, I. S. ; SILVA, M. S. . (2009). As estratégias do professor para desenvolver modelagem matemática em sala de aula. **Boletim, GEPEM**, v.55, p.175-192.

OLIVEIRA, P. A. J. (2007). A aula de matemática como espaço epistemológico forte. **Encontro de Investigação em Educação Matemática – SPCE**, 2007. Disponível em http://www.esec.pt/eventos/xieiem/pdfs/Paulo_Oliveira.PDF. Acessado em agosto de 2008.

ONRUBIA, J. (1999) Ensinar: criar zona de desenvolvimento proximal e nelas intervir. In: COLL, C. et al. **O construtivismo na sala de aula**. 5. ed. São Paulo: Ática, 1999, p. 123-151.

PLANAS, N.; GORGORIÓ, N. (2007). Interacción, diálogo y negociación en el aula de matemáticas. **Aula de Innovación Educativa**, 132, 22-25 [ISSN: 1131-995X]. Disponível em http://pagines.uab.cat/nuria_planas/content/other-publications.

PESSOA, W. R.; ALVES, J. M. (2008). Interações discursivas em aulas de química sobre conservação de alimentos no 1º ano do ensino médio. **Revista Eletrônica de**

Enseñanza de las Ciencias, Vol. 7 N^o1, p. 243-260, 2008. Disponível em: reec.uvigo.es/index_english.htm.

QUEIROZ, M. P. ; BARBOSA, R. M. N. ; AMARAL, E. M. R. (2009). Uma análise de interações discursivas promovidas pela aplicação de métodos cooperativos em aulas de química. *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências*, v.9, p. 1-20, 2009.

SANT'ANA, M. F. (2007). Modelagem de experimento e ensino de Cálculo. In: Barbosa, Jonei Cerqueira; Caldeira, Ademir Donizeti; Araújo, Jussara Loiola.. (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. 1 ed. Recife, 2007, v. 1, p. 149-160.

SANTOS, L. M. M. ; BISOGNIN, V. (2007). Experiências de ensino por meio da Modelagem Matemática. In: Jonei Cerqueira Barbosa; Ademir Donizeti Caldeira; Jussara de Loiola Araújo. (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. Recife: SBEM, 2007, v. 3, p. 99-114.

SFARD, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you - making sense of mathematics learning from commognitive standpoint. **Journal of Learning Sciences**, 16(4), 567–615.

SFARD, A. (2006). **When the rules of discourse change, but nobody tells you—the case of a class learning about negative numbers**. Disponível em http://eprints.ioe.ac.uk/4310/1/negatives_-_22_May_06.pdf.

SFARD, A. (2001). There Is More to Discourse Than Meets the Ears: Looking at Thinking as Communicating To Learn More about Mathematical Learning. **Educational Studies in Mathematics**, 46(1/3), 13-57.

SFARD, A. (2001a). Learning mathematics as developing a discourse. In R. Speiser, C. Maher, C. Walter (Eds), **Proceedings of 21st Conference of PME-NA** (pp. 23-44). Columbus, Ohio: Clearing House for Science, mathematics, and Environmental Education. Disponível em <https://www.msu.edu/~sfard/>. Acessado em janeiro de 2010.

SFARD, A. (2000). Steering (dis)course between metaphor and rigor: Using focal analysis to investigate the emergence of mathematical objects. **Journal for Research in Mathematics Education**, 31(3), 296-327.

SFARD, A.; KIERAN, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. **Mind, Culture, and Activity**, 8(1), 42-76.

SILVA, D.K. da: (2007). Ações de modelagem para a formação inicial de professores de matemática. In: BARBOSA, J.C.; CALDEIRA, A.D.; ARAÚJO, J. de L.: **Modelagem matemática na Educação matemática brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. Recife, SBEM, Biblioteca do Educador Matemático, Coleção SBEM, volume 3, 2007, Capítulo 13, pp. 215-232.

SKOVSMOSE, O. (2001). Educação matemática crítica: a questão da democracia. Campinas: Papirus.

SKOVSMOVSE, O. (2000). Cenários para Investigação. In: **Bolema**, ano 13, n.14, pp.66-91.

SOUZA, E. G ; Santo .(2007). Um debate sobre o uso da Modelagem Matemática a partir das inferências dos alunos. In: **V Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática**, 2007, Ouro Preto. V conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, 2007. p. 888-906.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, 3(4), 268-275.

STILLMAN, G., GALBRAITH, P., BROWN, J., e EDWARDS, I. (2007). A framework for success in implementing mathematical modelling in the secondary classroom. In J. Watson e K. Beswick (Eds.), **Mathematics: Essential research, essential practice. Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Research Group of Australasia**, (pp. 688 – 707).

SCHROEDER, E. (2008). A teoria histórico-cultural do desenvolvimento como referencial para análise de um processo de ensino: a construção dos conceitos científicos em aulas de ciências no estudo de sexualidade humana. 2008. 388 f. Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC – Florianópolis, 2008. Tese de Doutorado.

SCHROEDER, E. ; FERRARI, N. ; MAESTRELLI, S. R. P. (2010) A construção dos conceitos científicos em aulas de ciências: a teoria histórico-cultural do desenvolvimento como referencial para análise de um processo de ensino sobre sexualidade humana. **Alexandria** (UFSC), v. 3, p. 21-49, 2010. Disponível em http://www.ppgect.ufsc.br/alexandriarevista/numero_1_2010/edson.pdf.

VALLIM, M.B.R. (2008). **Um modelo reflexivo para formação de engenheiros**. 2008, 184f. Tese (Doutorado em Engenharia) - Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Florianópolis-SC, 2008.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. **Educational Studies in Mathematics**, v. 54, n.1,p.09-35, nov. 2003.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. **For the Learning Mathematics**, Alberta-Canadá, v.25, n.2, p.2-9, 2005. Disponível em: <http://www.fi.uu.nl/~marjah/documents/01-Heuvel.pdf>.

VELEDA, G. G. ; ALMEIDA, L. M. W. (2009). O que constitui 'realidade' em uma atividade de Modelagem Matemática. In: **I Simpósio Nacional de Ensino de Ciências e Tecnologia**, 2009, Ponta Grossa. I Simpósio Nacional de Ensino de Ciências e Tecnologia, 2009. p. 1051-1065.

- VERTUAN, R. E. (2007) Um olhar sobre a modelagem matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica. Dissertação de Mestrado- UEL. Londrina, 2007. 141f. : il.
- WISEU, F; PONTE, J. P. da. (2009). Desenvolvimento do conhecimento didático do futuro professor de matemática com apoio das TIC. **Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa**, Vol. 12, Núm. 3, novembro, 2009, pp. 383-413. México.
- VYGOTSKY, L.S. (1989). "Concrete Human Psychology". Soviet Psychology. 1989, XXII, vol. 2, pp. 53-77. Disponível em <http://lchc.ucsd.edu/mca/Paper/Vygotsky1986b.pdf>. Versão traduzida: VIGOTSKI, L.S. Manuscrito de 1929. **Educação e Sociedade**, Campinas:Cedes, ano XXI, n.71, p.21- 44, 2000.
- VYGOTSKY, L.S. (1993). **Obras escogidas II**. Madrid: Visor. (Coletânea publicada originalmente em russo entre os anos de 1924 e 1934)
- VYGOTSKY, L.S. (1993a) **Pensamento e Linguagem**. São Paulo: Martins Fontes.
- VYGOTSKY, L.S. (1993b). **Pensamento e Linguagem**.. Versão digital. Disponível em <http://www.ebooksbrasil.org/adobeebook/vigo.pdf>. **Edição eletrônica: Ed. Ridendo Castigat Mores. 136 pgs.**
- VYGOTSKY, L. (2007). A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. SP, Martins Fontes, 2007. 7ª. Ed.
- WEBB, N.M. (1992). Testing a theoretical modelo f student interaction and learning in small groups. In R. Hertz-Lazarowitz e N. Miller (Eds.), **Interaction in cooperative groups: The theoretical anatomy of group learning** (pp. 102-119). New York: Cambridge University Press.
- WEBB, N. M. (1991). Task-related verbal interaction and mathematics learning in small groups. **Journal for Research in Mathematics Education**, 22, 366-389.
- WEBB, N. M. (1989). Peer interaction and learning in small groups. **International Journal of Educational Research**, 13, 21-40.
- WEBB, N. M.; FARIVAR, S. H. ; MASTERGEORGE, A. M. (2002). Productive helping in cooperative groups. **Theory Into Practice**, 41, 13-20.
- WEBB, N.M.; PALINCSAR, A.S. (1996). Group processes in the classroom. In D. Berliner e R. Calfee (Eds.), **Handbook of educational psychology** (pp. 841-873). New York: Macmiluan.
- WEBB, N e MASTERGEORGE, A. (2003) The Development of Students' Helping Behavior and Learning in Peer-Directed Small Groups. **Cognition and Instruction** 21:4, 361-428.
- WEBB, N, MASTERGEORGE A. (2003a). Promoting Effective Helping Behavior in Peer-Directed Groups. **International Journal of Educational Research** (39), 73-97, 2003.

WEBB, N.M., TROPER, J.D., e FALL, R. (1995). Constructive activity and learning in collaborative small groups. **Journal of Educational Psychology**, 87, 406-423.

ZANELLA, A. V. (2001). Vygotsky: contexto, contribuições à psicologia e o conceito de zona de desenvolvimento proximal. Itajaí: Univali, 2001.

ZBIEK, R., e CONNER, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. **Educational Studies in mathematics**, 63(1), 89-112.

ANEXOS

ANEXO 1**AUTORIZAÇÃO PARA UTILIZAR RESPOSTAS DE QUESTIONÁRIOS ESCRITOS,
ENTREVISTAS GRAVADAS E IMAGENS EM VÍDEO QUANDO O PESQUISADOR
ATUA COMO ALUNO DO PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****TERMO DE CONSENTIMENTO**

EU _____
_____RG _____ SSP _____ autorizo a aluna ELAINE CRISTINA FERRUZZI número da matrícula 200712350037 regularmente matriculada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, a utilizar, parcial ou integralmente, respostas a questionários ou gravações em áudio ou vídeo de minhas falas, para fins de pesquisa, podendo divulgá-las integral ou parcialmente em sua pesquisa de doutorado, publicações, congressos e eventos da área com a condição de que meu nome não será citado em hipótese alguma. Da mesma forma, autorizo o uso de terceiros, que podem ler ou ouvir minhas falas e usar o texto final que está sob a guarda da aluna acima citada. Abdicando direitos meus e de meus descendentes, subscrevo o presente termo.

Londrina, março de 2009.

Orientadora: Lourdes Maria Werle de Almeida

ANEXO 2

Dois dos Episódios Ocorridos durante o Desenvolvimento da Atividade 2.

- 1- **A2:** *t igual a zero..T igual a 80, T_m é igual a 21 né??*
 - 2- **A1:** *não pode substituir esse ponto. A gente tem t e T, a única coisa que falta é k. Não pode substituir o zero no t.*
 - 3- **A3:** *tem que achar o k... não pode ser t igual a zero...Tá estranho isso.*
 - 4- **A1:** *péira aí... tem alguma coisa errada.*
 - 5- **A3:** *é...porque no tempo igual a zero não estava na temperatura ambiente como deu agora...(A3 olha para sua folha de cálculos e faz uma expressão de estranhamento, como se observasse que alguma coisa estava errada).*
 - 6- **A1:** *então vamos usar...não 80 não... vamos colocar t igual a 1.*
 - 7- **A3:** *cara, mas tá faltando alguma coisa. Era prá ter dado certo.*
 - 8- **A1:** *era pra ter dado certo o que?*
 - 9- **A3:** *não... nada não...*
-
- 1- **A3:** *Não tá dando certo...*
 - 2- **A1:** *vamos testar... vamos testar... T igual a 21 mais “e” elevado a 4 vírgula zero 2...*
 3. **A4:** *pronto! Já tá errado!! No tempo zero vai dar 22!*
 4. **A3:** *é... tinha que dar 80.*
 5. **A2:** *teria que ter mais alguma coisa...mais uma constante...*
 6. **A1:** *teria que ter mais uma constante???? (com uma expressão de surpresa).*
 7. **A1:** *nossa... faltou o “mais C” aqui ó... quando integra...*
 8. **A3:** *Cara... tem que fazer tudo de novo?*
 9. **A2:** *não...ó... dá pra ir colocando o C aqui...(insere a constante C no modelo encontrado, ficando $e^{kt+C} = T - 21$).*
 10. **A1:** *passa o 21 prá lá. (escreve $T = 21 + e^{kt+C}$).*
 11. **A3:** *nossa... erramos por causa da constante, eu nem me lembrava dela.*