Universidade Estadual de Londrina

RENATA KAROLINE FERNANDES

MANIFESTAÇÃO DE PENSAMENTO ALGÉBRICO EM REGISTROS ESCRITOS DE ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL I

Londrina
2014

RENATA KAROLINE FERNANDES

MANIFESTAÇÃO DE PENSAMENTO ALGÉBRICO EM REGISTROS ESCRITOS DE ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL I

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Angela Marta Pereira das Dores Savioli.

Londrina
2014

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

F363m Fernandes, Renata Karoline.

Manifestação de pensamento algébrico em registros escritos de estudantes do ensino fundamental I / Renata Karoline Fernandes. – Londrina, 2014.

134 f. : il.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2014.

Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Linguagem e educação – Teses. 3. Educação matemática – Teses. 4. Estudantes – Testes e medidas educacionais – Teses. 5. Álgebra – Formação de conceitos – Teses. I. Savioli, Angela Marta Pereira das Dores. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

RENATA KAROLINE FERNANDES

MANIFESTAÇÃO DE PENSAMENTO ALGÉBRICO EM REGISTROS ESCRITOS DE ESTUDANTES DO ENSINO FUNDAMENTAL I

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Profª. Drª. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Profª. Drª. Maria do Carmo de Sousa
Universidade Federal de São Carlos – UFSCar

Profª. Drª. Simone Luccas
Universidade Estadual do Norte do Paraná – UNOPAR

Londrina, 02 de dezembro de 2014.

Dedico

Aos meus pais Ivanil e Vilma, ao meu namorado Maicon Douglas e a minha orientadora Angela Marta, por terem acreditado em mim desde o começo.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a Deus, por sua presença sempre constante em minha vida, pelo que sou e pelas pessoas maravilhosas que Ele colocou em minha vida.

À minha família, em especial aos meus pais Ivanil e Vilma, por terem me apoiado, me motivado e acima de tudo me amado. Obrigada por toda a ajuda, toda a compreensão, sem vocês nada teria acontecido.

Ao meu namorado Maicon Douglas, por todo o seu apoio, amor e compreensão ao longo dessa jornada. Obrigada por estar comigo em todos os momentos.

À minha orientadora Angela Marta, pelas conversas agradáveis, pelo carinho com que sempre me orientou, pela confiança e por ser um grande exemplo de pessoa e de profissional. Sou muito grata pela sua ajuda, dedicação, competência e por suas palavras sempre tão sábias e verdadeiras.

Aos participantes do Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático – GEPPMat da Universidade Estadual de Londrina, pela atenção e por sugestões que foram de grande importância para a realização desse trabalho.

À professora Simone Luccas, por ter sido essencial para minha escolha profissional, seu exemplo foi fundamental em minha vida. Quero agradecer também por sua contribuição para esse trabalho, suas contribuições e sugestões foram de grande importância.

Á professora Maria do Carmo de Sousa, por ter aceitado fazer parte da banca examinadora deste trabalho, pela sua dedicação e por suas contribuições.

À professora Magna, por momentos muito agradáveis, por dividir alguns dos meus sonhos e por ter sido minha orientadora na especialização.

À professora Ana Lúcia, por ter sido a primeira professora no curso de graduação em Licenciatura em Matemática a realmente acreditar em mim, me colocando em um projeto que contribuiu muito para minha formação. Lembro-me da OBMEP com imenso carinho e saudade.

À professora Karina Pessôa, que sempre foi muito querida e me ajudou desde o início, me ensinando como fazer o projeto de pesquisa para poder me inscrever no processo de seleção do mestrado.

Á professora Edilaine Regina, por ter lido várias vezes e, me ajudado a melhorar o projeto que utilizei para a inscrição do mestrado, não tenho dúvida que sem sua ajuda, toda essa trajetória não teria acontecido. Quero agradecer também todo o seu carinho, além de excelente profissional, você é uma pessoa que eu admiro muito.

Gostaria de agradecer também aos professores da graduação, Adeval Lino, Ana Lucia, Ana Márcia, Angela Marta, Bruno Rodrigo, Lourdes Maria, Magna Natália, Marcia Cyrino, Marcia D'Amico, Marinez, Naresh Kumar, Paulo Henrique, Regina Célia, Regina Buriasco, Sandra Malta, Túlio Oliveira e Ulysses Sodré. Vocês são muito importantes para mim, tenho orgulho de ter sido aluna de vocês.

Aos professores do programa, os quais contribuíram grandemente para minha formação e crescimento.

Aos queridos companheiros das viagens para Apucarana Diego e Keila, que dividiram comigo conflitos e aflições. Sou muito grata pela amizade de vocês, nossas conversas serão sempre lembradas por mim, com grande carinho.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Agradeço a todos que direta ou indiretamente estiveram envolvidos na realização desse sonho.

Ainda que eu falasse as línguas dos homens e dos anjos, e não tivesse amor, seria como o metal que soa ou como o sino que tine.

E ainda que tivesse o dom de profecia, e conhecesse todos os mistérios e toda a ciência, e ainda que tivesse toda a fé, de maneira tal que transportasse os montes, e não tivesse amor, nada seria.

1 Coríntios 13:1-2

FERNANDES, Renata Karoline. **Manifestação de pensamento algébrico em registros escritos de estudantes do Ensino Fundamental I**. 2014. 134 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo analisar a produção escrita de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental em questões retiradas de documentos nacionais relacionados à Prova Brasil, sendo estes PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação e Modelo Teste Prova Brasil, e analisar quais características de pensamento algébrico são manifestadas por eles na resolução das mesmas. Esta investigação é predominantemente qualitativa, realizada à luz da Análise de Conteúdo. Este trabalho apresenta o modo como autores caracterizam o pensamento algébrico e investiga a presença de características deste pensamento nas produções escritas de estudantes. De modo geral, foi possível perceber que alguns dos estudantes apresentaram características de pensamento algébrico em suas resoluções, mesmo sem terem anteriormente contato com simbologias e conceitos algébricos.

Palavras-chave: Educação matemática. Pensamento algébrico. Prova Brasil.

FERNANDES, Renata Karoline. **Expression of algebraic thinking in written records of students from Elementary School**. 2014. 134 p. Dissertation (Master of Teaching Science and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina. 2014.

ABSTRACT

This study aims to analyze the written production of students of the 5th year of primary education in national documents withdrawn issues related to Support Brazil, which are PDE / Support Brazil - Development Plan for Education and Model Test Test Brazil, and analyze which algebraic thinking characteristics are manifested by them in settling the same. This research is predominantly qualitative, held the light of Content Analysis. This work shows how the authors characterize algebraic thinking and investigating the presence of features of this thought in the writings of students productions. Overall, it was revealed that some of the students had algebraic thinking features into its resolutions, even without previously having contact with symbols and algebraic concepts.

Keywords: Mathematics education. Algebraic thinking. Brazil review.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Se perguntarmos para alguns estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio o que é álgebra, possivelmente obteremos respostas como: “é resolver equações”, “é uma parte da Matemática”, “é resolver problemas com letras”. Infelizmente, se levarmos em conta pesquisas que relatam o modo como a álgebra vem sendo ensinada (GIL, 2008; MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992; SANTOS, 2007; SCARLASSARI, 2007; NEVES, 1995), veremos que essas respostas têm fundamento.

Como alternativa para a melhora nos processos de ensino e aprendizagem da álgebra, Kieran (2004) menciona o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos da Educação Básica, com o apoio da aritmética.

Acreditando na perspectiva de que realmente é possível desenvolver o pensamento algébrico em estudantes que não tiveram contato anterior com conceitos e símbolos algébricos, com essa pesquisa buscou-se responder duas questões norteadoras: *O que caracteriza o pensamento algébrico, segundo autores que pesquisam esse assunto? Os estudantes que nunca tiveram contato formal com conceitos e símbolos algébricos manifestam características de pensamento algébrico?*

Em função de nossas questões norteadoras produziu-se o objetivo geral de *investigar características do pensamento algébrico manifestadas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental I, que ainda não tiveram contato com a álgebra formal, de uma escola municipal da cidade de Apucarana – PR.*

Como objetivos específicos temos:

- Realizar uma busca bibliográfica a respeito das características de pensamento algébrico e verificar o que caracteriza o pensamento algébrico de acordo com autores que pesquisam esse tema;
- Selecionar atividades que permitam analisar o desenvolvimento do pensamento algébrico em estudantes que nunca tiveram contato formal com a álgebra;
- Aplicar as atividades selecionadas aos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental I.
- Analisar as manifestações de características de pensamento algébrico nos registros escritos dos estudantes segundo a Análise de Conteúdo.

A escola em que foram realizadas as aplicações das questões participa do Programa Observatório da Educação – CAPES – Educação Matemática de Professoras que ensinam Matemática, ao qual a pesquisadora também faz parte.

As questões aplicadas aos estudantes foram retiradas de documentos referentes à Prova Brasil, sendo estes, PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação e Modelo Teste Prova Brasil. A escolha das questões se deu apoiada em nosso referencial teórico referente ao pensamento algébrico. Acreditamos que as questões escolhidas podem nos oferecer condições para a realização da análise de características de pensamento algébrico manifestadas nos registros escritos analisados.

As questões que escolhemos para servir de coleta de dados para nossa pesquisa possuem alternativas, mas como nosso interesse é analisar o processo de resolução por meio da produção escrita dos estudantes e não apenas o produto final, optamos por retirar suas alternativas.

A escolha por aplicar questões dos documentos PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação e Modelo Teste Prova Brasil deu-se única e exclusivamente porque suas questões têm relação com a Prova Brasil e uma das intenções do projeto Observatório da Educação é o melhor desenvolvimento dos estudantes nessa avaliação[1].

Esta investigação está dividida em seis quatro capítulos. Nos dois primeiros, apresentamos os referenciais teóricos que darão suporte para a análise da produção escrita, sendo eles:

Sobre a álgebra escolar e o pensamento algébrico – Capítulo dividido em: *Álgebra Escolar*, subcapítulo no qual trataremos, de modo geral, da evolução do ensino da álgebra no Brasil; e *Elementos caracterizadores do pensamento algébrico*, no qual apresentaremos elementos que caracterizam este tipo de pensamento, segundo alguns autores. Serão estes elementos que buscamos nas resoluções escritas dos estudantes.

Sobre a Prova Brasil – no qual explicaremos o que é essa avaliação, seus objetivos e a importância da mesma para as escolas nacionais.

---

[1] Cabe destacar que nossa pesquisa não objetiva o estudo da avaliação Prova Brasil em si, mas sim a manifestação de pensamento algébrico em estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental; sendo assim, seria possível a realização deste trabalho com questões distintas, porém, como a Prova Brasil tem uma relação com o projeto Observatório da Educação optou-se pela utilização de questões de documentos relativos a essa avaliação.

No terceiro capítulo, *Procedimentos Metodológicos,* apresentaremos as escolhas metodológicas para a pesquisa e análise dos dados. Neste capítulo está a descrição do caminho percorrido nessa investigação.

O quarto capítulo, *Análise de Características de Pensamento Algébrico manifestadas pelos estudantes,* apresentará a análise descritiva interpretativa e discussões relativas aos registros escritos dos estudantes.

Após o quarto capítulo traremos *Algumas Considerações*, em que apresentaremos as considerações a respeito dos resultados obtidos, assim como dos caminhos percorridos.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA SOBRE A ÁLGEBRA ESCOLAR E O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Este capítulo inicia-se com um breve estudo a respeito da álgebra escolar, tendo como foco o modo como este ramo da Matemática vem sendo tratado em sala de aula, as relações estabelecidas ao longo dos anos entre os estudantes e a álgebra, assim como seu papel no currículo escolar.

Na sequência nos dedicaremos a caracterizar o pensamento algébrico, segundo a perspectiva de alguns autores (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; KIERAN, 2004, 2007; FIORENTINI; FERNANDES, CRISTOVÃO, 2005; FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; NCTM, 2000; LINS; GIMENEZ, 1997; BLANTON; KAPUT, 2005; KAPUT, 1999). As teorias dos autores estudada relativas ao pensamento algébrico dará suporte às análises realizadas posteriormente.

Cabe destacar que os autores que fundamentam essa pesquisa, em relação ao pensamento algébrico, não se contradizem em vários pontos com relação aos elementos caracterizadores do pensamento algébrico, mas temos consciência de que os autores lidam de formas distintas com o pensar algébrico.

1.1 ÁLGEBRA ESCOLAR

O ensino da álgebra no Brasil tem enfrentado problemas desde a sua inclusão no currículo nacional, no início do século XIX. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN[2]) evidenciam um destes problemas, a dificuldade apresentada pelos estudantes em aprender álgebra, que pode estar associada à ênfase que os professores dão aos conteúdos algébricos:

> [...] a ênfase que os professores dão a esse ensino [da álgebra] não garante o sucesso dos alunos, a julgar tanto pelas pesquisas em Educação Matemática como pelo desempenho dos alunos nas avaliações que têm ocorrido em muitas escolas. Nos resultados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica [SAEB], por exemplo, os itens referentes à álgebra raramente atingem um índice de 40% de acerto em muitas regiões do país (BRASIL, 1998, p.115-116).

---

[2] Os PCN são documentos elaborados pelo Governo Federal com a intenção de nortear o trabalho das equipes envolvidas com a educação escolar. Mais informações podem ser obtidas no *site* http://portal.mec.gov.br/saebqarquivosqpdfqmatematica.pdf

Como podemos verificar no trecho anterior, os PCN (BRASIL, 1998) destacam que questões referentes à álgebra não têm apresentado resultados satisfatórios e, um dos fatores que pode estar influenciando nesses resultados é a ênfase dada no processo de ensino e aprendizagem, que em geral não está auxiliando os estudantes a estabelecerem significado para este ramo da Matemática.

Legalmente a álgebra foi introduzida no ensino brasileiro, somando-se a disciplinas já estabelecidas como a aritmética, a geometria e a trigonometria, por meio da *Carta Régia* de 19 de agosto de 1799, ainda no período imperial.

Durante o século XX aconteceram duas reformas curriculares de maior destaque no Brasil, a de Francisco Campos (1931) e a de Gustavo Capanema (1942). Na primeira reforma citada, o educador Euclides Roxo propôs uma abordagem de modo a relacionar três campos do saber, a álgebra, a aritmética e a geometria, unificando-as e tornando-as uma mesma disciplina, a Matemática. Na reforma de Gustavo Capanema, as inovações ocorridas na reforma anterior foram desfeitas voltando a ser como antes (GIL, 2008).

Na sequência a essas reformas destacaram-se três períodos marcantes com relação às questões curriculares: o primeiro foi caracterizado pelo predomínio do Movimento Matemática Moderna (1965 a 1980); o segundo foi de 1980 a 1994 e visou à realização de um contraponto para o Movimento da Matemática Moderna; e, o último iniciou-se a partir do ano de 1995 e teve um caráter nacionalista, tendo por intenção a elaboração de um currículo que visasse às necessidades brasileiras, se afastando dos exemplares de currículos estrangeiros (GIL, 2008).

Desde a introdução da álgebra nos currículos, seu caráter foi predominantemente mecânico e reprodutivo, sem clareza alguma. Com o Movimento da Matemática Moderna pretendia-se ensinar uma Matemática formal, aproximando ao máximo a Matemática ensinada em sala de aula da desenvolvida por pesquisadores (SILVA, 2006), com o objetivo de formar pessoas que pudessem acompanhar o desenvolvimento tecnológico.

O fato de aproximar a Matemática de “sala de aula” com a Matemática dos “pesquisadores” fortaleceu ainda mais o ensino mecanizado[3] da álgebra, favorecendo uma menor compreensão por parte dos estudantes. Piaget (1984) destaca que

[3] Compreendemos o ensino mecanizado ou mecanicista da álgebra, na perspectiva do *National Council of Teachers of Mathematics (*NCTM, 2000), sendo este um ensino que privilegia a manipulação simbólica e repetição sistemática de exercícios similares ao invés do desenvolvimento do pensamento matemático e da compreensão e reflexão.

mesmo aparecendo a palavra “Moderna”, o conteúdo e o modo de ensiná-lo, por vezes, eram arcaicos do ponto de vista psicológico, tendo sua fundamentação apenas na transmissão de conhecimentos, tendendo a adotar uma forma axiomática para este ensino.

Por tratar a Matemática de maneira neutra, sem dar muito valor aos processos de fazer Matemática e com pouca relação ao cotidiano e à criação humana, o ensino dessa matéria passou a desprezar as possibilidades criativas e críticas dos estudantes, expondo-os a abstrações incoerentes com seus níveis de desenvolvimento cognitivo.

Foi durante o Movimento da Matemática Moderna que aconteceu a tentativa de unificar o ensino da álgebra, da aritmética e da geometria e, de acordo com Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), este momento de unificação buscou solucionar alguns dos problemas relacionados ao ensino da álgebra, uma vez que:

> Esta unificação não se daria [...] por uma integração mecânica desses campos, nem simplesmente pela exclusão de velhos temas ou inclusão de novos, mas, sobretudo, pela introdução de elementos unificadores, tais como a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas e as relações que, acreditava-se, constituiriam a base para a construção lógica do novo edifício matemático. De fato, a Álgebra viria a desempenhar um lugar de destaque não apenas em sua concepção tradicional, mas, sobretudo, em sua concepção moderna. Isto porque, os grandes avanços da Matemática, nos dois últimos séculos, deram-se graças ao processo de algebrização da Matemática Clássica, tornando-a mais rigorosa, precisa e abstrata e, portanto, assim pensava-se, mais aplicável (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p.40).

Mesmo após algumas tentativas, o Movimento da Matemática Moderna não conseguiu solucionar a crise em que se encontrava o ensino da Matemática (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992).

Após o declínio deste movimento professores começaram um processo de recuperação do ensino da geometria e, a álgebra perde o lugar de destaque:

> [...] se, por um lado, na proposta da CENP (Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas) a Geometria passa a dar sustentação à metodologia do ensino da Aritmética e da Álgebra, por outro lado, o próprio ensino de Álgebra não apenas perde aquelas características que a Matemática moderna lhe havia atribuído como também parece retomar – sem, é claro, aquelas regras e aqueles excessos injustificáveis do algebrismo – o papel que ela desempenhava no currículo tradicional, qual seja o de um estudo introdutório – descontextualizado e estático – necessário à resolução de problemas e equações (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p.51).

Alguns autores de livros didáticos continuam utilizando a geometria, como Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) relataram. É comum observar em livros didáticos uma abordagem da álgebra por meio da geometria, com a intenção de facilitar a visualização dos estudantes a respeito da manipulação de expressões algébricas e operações com polinômios, mas por vezes não realizam uma abordagem que auxilia os estudantes a estabelecerem relações e significados para a álgebra.

Como afirma Santos (2007), os livros didáticos brasileiros trazem uma álgebra simplificada, que não proporciona os subsídios necessários para os estudantes e também para os professores, e tanto Santos (2007) quanto Búrigo (2010) e Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) concordam que os livros didáticos são os principais recursos didáticos dos professores, e os mesmos trazem conteúdos algébricos apenas nos três últimos anos do Ensino Fundamental I, dando grande ênfase aos procedimentos algébricos, estimulando assim a memorização mecânica de regras.

Sendo os livros didáticos os principais recursos dos professores (SANTOS, 2007; MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992) e estes apresentando uma álgebra simplificada, sem contexto e com ênfase nos procedimentos algébricos, fica fácil estabelecer uma relação com a ênfase dada no processo de ensino e aprendizagem da álgebra que não vem dando bons resultados, como o próprio PCN (1998) nos traz e também Scarlassari (2007, p.27) relata:

> [...] a álgebra é trabalhada como algo imóvel, sem relação com a vida social do aluno, sem relação com os movimentos vivenciados no cotidiano, como se não fizesse parte da história da matemática, ou seja, com uma abordagem tradicional e distante. Em consequência dessa abordagem, a álgebra tem sido estudada como se fosse apenas a aritmética generalizada, centrada em regras, algo que possui um caráter instrumental, útil apenas para resolver equações e problemas, o que deixa a desejar em relação aos conceitos e nexos que essa disciplina nos permite trabalhar.

No trecho anterior Scarlassari (2007) apresenta um ensino da álgebra que é muito distante para os estudantes, centrada em regras que só têm aplicações dentro da própria álgebra. De acordo com essa mesma visão, Kaput (1999) afirma que a álgebra que vem sendo ensinada se baseia em simplificações de expressões algébricas, na resolução de equações, no aprender manipular regras e símbolos e configura uma álgebra que não tem relação com a realidade dos estudantes, com “aplicações” artificiais e forçadas, como problemas envolvendo a descoberta de idades. Esses problemas, situações e operações não proporcionam aos estudantes oportunidades de refletir a respeito das resoluções e procedimentos, assim como não possibilitam a articulação desse conhecimento com os demais.

Ao invés de possibilitar articulação entre diferentes ramos do conhecimento Matemático e também do cotidiano dos estudantes, estes tipos de tarefas promovem a memorização de procedimentos e utilizam uma simbologia pouco compreendida e, por vezes, sem sentido, e assim,

> [...] eles [os estudantes] memorizam procedimentos que conhecem apenas como operações de símbolos em cadeias, resolvem problemas artificiais que não têm qualquer significado para suas vidas, e são classificados não pela compreensão dos conceitos matemáticos e de raciocínio envolvidos, mas pela capacidade de produzir o símbolo e sequência de respostas sobre o qual eles não têm nenhuma razão para refletir e que eles encontraram (ou, como provavelmente adivinhou), utilizando estratégias que eles não têm necessidade de articular. Pior de tudo, as suas experiências em álgebra muitas vezes afastam-nos da matemática antes de terem experimentado não só a capacidade de construir conhecimentos matemáticos, mas, mais importante, de compreender a sua importância e utilidade para suas próprias vidas (KAPUT, 1999, p.3, tradução nossa[4]).

Como podemos notar, Kaput (1999) deixa claro o possível dano de uma abordagem da álgebra que priorize os procedimentos formais em oposição ao pensar, generalizar, estabelecer padrões e criar sequências. Santos (2007) também faz críticas aos problemas pouco contextualizados e artificiais que vêm cada vez mais ganhando espaço nas aulas de Matemática e garante que a falta de problemas “reais”

---

[4] […] they memorize procedures that they know only as operations on strings of symbols, solve artificial problems that bear no meaning to their lives, and are graded not on understanding of the mathematical concepts and reasoning involved, but on their ability to produce the right symbol string – answers about which they have no reason to reflect and that they found (or as likely guessed) using strategies they have no need to articulate. Worst of all, their experiences in algebra too often drive them away from mathematics before they have experienced not only their own ability to construct mathematical knowledge and to make it their own, but, more importantly, to understand its importance – and usefulness – to their own lives.

não possibilita aos estudantes perceberem a álgebra como necessária para o processo de matematizar[5]. Com relação à ênfase dada nas aulas de Matemática, concordamos com Kaput (1999) e Santos (2007), quando dizem que o professor muitas vezes fica apenas na repetição de procedimentos e na resolução de inúmeros exercícios similares, o que não incentiva o estudante a pensar a respeito do que está resolvendo e da importância do mesmo.

Os formalismos algébricos e a simbologia algébrica, quando não compreendidos e sem significados para os estudantes, auxiliam para que a álgebra seja considerada um dos ramos mais complexos da Matemática e temidos por eles (NEVES, 1995).

Cai e Moyer (2007) mencionam que a resistência e dificuldade dos estudantes no Ensino Fundamental II e Ensino Médio com relação à álgebra seriam reduzidas se fosse solucionado o equívoco dos currículos de separar a aritmética e a álgebra e tratá-las como ramos disjuntos da Matemática e ainda considerar a aritmética como foco principal da Matemática no Ensino Fundamental, enquanto no Ensino Médio o foco passa a ser a álgebra. Existe um consenso crescente que com essa separação fica mais difícil para os estudantes aprenderem conceitos algébricos nas séries posteriores.

Com relação mais especificamente à educação algébrica, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) afirmam que existem três concepções de educação algébrica que, historicamente, vêm exercendo maior influência no ensino: a linguística-pragmática, que foi predominante do século XIX até metade do século XX; a fundamentalista-estrutural, vigente nas décadas de 70 e 80, que trouxe uma nova forma de interpretar a álgebra, baseada nas suas propriedades estruturais; e a fundamentalista-analógica, que busca realizar uma síntese entre as duas concepções anteriores.

Segundo esses mesmos autores, a concepção linguístico-pragmática relaciona a álgebra com tarefas que promovam a resolução de problemas, mas de uma forma mecanicista, por meio da utilização de técnicas e procedimentos (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

---

[5] O termo matematizar foi criado por Hans Freudenthal, que desenvolveu a abordagem da Educação Matemática Realística e nessa perspectiva matematizar é um processo que se inicia na realidade e que continua enquanto essa mesma realidade está se modificando, de forma a ir além dela, num movimento de ampliar-se e aprofundar-se sob uma variedade de influências, incluindo a da própria matemática (CIANI, 2012, p.36). Para matematizar é preciso que o estudante tenha a oportunidade de reconstruir a matemática, de experimentar o processo de desenvolvimento de uma questão ou conceito matemático de maneira semelhante ao seu desenvolvimento original.

A concepção fundamentalista-estrutural desenvolveu-se em torno da ideia de que o uso das propriedades estruturais das operações é suficiente para justificar as transformações efetuadas algebricamente e para capacitar os estudantes para identificar e utilizá-las em novos contextos (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

A terceira concepção, fundamentalista-analógica, considera a álgebra como um instrumento que deve ser utilizado para resolver problemas, tendo em conta o seu papel fundamentalista, não baseado em propriedades estruturais, mas na manipulação de objetos, podendo ser considerada como uma síntese das duas concepções anteriores (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

Um dos pontos problemáticos dessas três concepções é que elas praticamente reduzem o ensino da álgebra aos seus aspectos linguísticos e transformistas, dando mais ênfase à sintaxe da linguagem algébrica do que ao pensamento algébrico e seu processo de significação.

Ainda sobre o ensino de álgebra, Kieran (1992) propõe a distinção de duas possíveis perspectivas para que ela seja abordada, a processual e a estrutural.

Na perspectiva processual a ênfase é dada à realização de operações aritméticas sobre números para produzir uma resolução também numérica, por meio de substituição de variáveis. Já na perspectiva estrutural, a ênfase é dada ao conjunto de operações realizadas, não sobre números, mas sobre expressões algébricas. A autora considera que para a aprendizagem da álgebra é necessário estabelecer conexões entre ela e a aritmética, de modo a desenvolver nos estudantes a capacidade de utilizar tanto a concepção estrutural quanto a processual, reconhecendo as vantagens de utilizar uma ou outra, de acordo com a natureza[6] da tarefa a ser realizada (KIERAN, 1992).

Com a intenção de amenizar alguns dos problemas relativos ao processo de ensino da álgebra elencados, Kaput (1999) sugere que o contato dos estudantes com a álgebra deve começar mais cedo, inicialmente de maneira informal, de modo integrado com outros assuntos, por exemplo, a aritmética e, também, possibilitar aos estudantes momentos de reflexão a respeito dos significados dos símbolos algébricos, de modo que o estudante passe a ser participante ativo do processo de ensino e aprendizagem da mesma.

[6] Entendemos como natureza de uma tarefa a essência ou condição própria dessa tarefa, seu conjunto de propriedades e organização.

Deste modo, acreditamos que um dos caminhos para que a álgebra escolar faça sentido para os estudantes é o desenvolvimento do pensamento, sendo que este se dá de acordo com escolhas pedagógicas, problemas e tarefas coerentes com essa finalidade. Podemos ressaltar que, além do papel do professor, das escolhas das tarefas e na condução, a vontade do estudante tem um papel essencial para esse desenvolvimento, uma vez que "o pensamento algébrico é um hábito da mente que os alunos adquirem" (BLANTON, 2008, p.93).

O *Working Group on Approaches to Algebra – APPA Group*[7] também aborda alternativas para a melhora do processo de ensino da álgebra. Este grupo estabeleceu quatro perspectivas determinantes para a compreensão da álgebra, centradas na resolução de problemas, na modelação[8], função e generalização.

A abordagem da álgebra por meio da resolução de problemas tem por objetivo a resolução de equações e a interpretação de um símbolo como incógnita, uma vez que ao traduzir enunciados de problemas em equações acontece a transposição da aritmética para a álgebra, por meio dos simbolismos e também em termos de raciocínio. A respeito dessa abordagem o *APPA Group* levanta dois tipos de soluções: (i) Soluções algébricas, que utilizam a interpretação e o pensamento com a incógnita; e, (ii) Solução aritmética, que envolve o pensamento com o que é conhecido e partir disso para iniciar os trabalhos com incógnitas.

A respeito da abordagem com base na modelação, que foi recentemente incorporada na resolução de problemas, esta tem por objetivo dar atenção especial às variáveis e aos aspectos não variáveis envolvidos na situação a ser modelada.

Para modelar uma situação, os estudantes precisam descrever e interpretar fenômenos, construir significados, utilizar diversas representações como tabelas, gráficos e fórmulas e, também, caminhar por diferentes representações.

Ao abordar a álgebra por meio do estudo de funções, abrangem-se novas possibilidades para o estudo de relações tendo como possível auxílio a utilização de computadores e *softwares*, contribuindo para a formação do conceito de variável.

Por meio das perspectivas elencadas pelo *APPA Group*, o ensino da álgebra se afasta das repetições e mecanicismos e volta-se para o refletir, compreender e utilizar notações.

---

[7] A APPA é um grupo internacional muito diversificado de pessoas, formado por professores, matemáticos, pesquisadores e desenvolvedores de currículo, com nacionalidades diferentes. O foco deste grupo é o ensino e aprendizagem de Álgebra no Ensino Básico.

[8] O termo modelação é utilizado no sentido de estabelecer um modelo.

No bloco “grandezas e medidas” dos PCN é que se insere a álgebra. Esse documento (BRASIL, 1997) destaca a importância dos estudantes reconhecerem seus diferentes papéis, como de estabelecer padrões, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar, resolver equações, identificar parâmetros, variáveis, relações e ter contato com fórmulas, equações e incógnitas, visto que “o estudo da álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização” (BRASIL, 1998, p.115).

Atualmente, nos currículos brasileiros a álgebra é parte importante do conteúdo de Matemática, que deve estar presente durante todo o percurso escolar e, sendo assim, o pensamento algébrico pode ser desenvolvido desde os anos iniciais, não apenas a partir do momento em que os estudantes têm contato com a simbologia algébrica (KAPUT, 1999).

Os PCN (BRASIL, 1998) relatam a respeito de procedimentos que antecedem a álgebra formal. Este documento menciona a respeito da pré-álgebra, que deve ser desenvolvida antes da utilização formal dos procedimentos algébricos, seja por meio de jogos, generalizações, representações matemáticas com gráficos e modelos, entre outras[9].

Apontam ainda, estes documentos, a relação existente entre a aritmética e a álgebra, deixando transparecer que esses campos podem ser vivenciados de forma concomitante, pois os conteúdos que dizem respeito à aritmética podem ser ensinados de forma a possibilitarem uma ligação entre aritmética e a pré-álgebra.

Cabe destacar que pensar aritmeticamente não é o mesmo que pensar algebricamente, pois estes pensamentos têm características diferentes, entre elas destacamos que o pensamento algébrico é mais generalizado que o aritmético. Porém uma abordagem que aproxime a álgebra da aritmética, por exemplo, por meio da análise de padrões em sequências numéricas, ou com a exploração de propriedades e de relações com números inteiros pode contribuir nos processos de ensino e aprendizagem dos conceitos formais da álgebra.

Acreditando na importância de aprender álgebra por meio do desenvolvimento do pensamento algébrico, na próxima seção apresentaremos características

[9] Nesse trabalho entendemos a pré-álgebra no mesmo sentido dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), ou seja, como o desenvolvimento de alguns elementos da álgebra, a exploração de situações-problemas, o reconhecimento de diferentes funções da álgebra, por exemplo, a generalização de padrões, o estabelecimento de relações, a resolução de problemas e outros. As tarefas que aplicamos são adequadas também para o estudo da pré-álgebra, mas não entraremos nesse mérito, pois nosso objetivo se relaciona com a manifestação do pensamento algébrico.

deste tipo de pensamento, segundo autores estudados (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; KIERAN, 2004, 2007; FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2005; FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; NCTM, 2000; LINS; GIMENEZ, 1997; BLANTON; KAPUT, 2005; KAPUT, 1999).

1.2 ELEMENTOS CARACTERIZADORES DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

A visão da álgebra mais difundida atualmente mostra um ramo da Matemática que trata de regras e manipulação de expressões, polinômios, frações algébricas, expressão com radicais e processos de resolução de equações. Esta visão tem valorizado quase que exclusivamente os procedimentos dos cálculos algébricos e não a álgebra como um todo e isso favorece para que estudantes tratem-na como um dos temas mais difíceis da Matemática (PONTE, 2006).

Ao pensar a álgebra dessa maneira ocorre a desvalorização de aspectos importantes, como as relações e estruturas algébricas, estudo de funções, padrões, comparações e de variações em geral. A partir de agora passaremos a estudar a elementos teóricos de alguns autores que se opõem a essa visão do ensino e aprendizagem da álgebra. De modo geral, os autores que iremos estudar indicam que é possível melhorar o processo de ensino e de aprendizagem por meio do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Nós optamos por estudar alguns dos autores que pesquisam a respeito desse tema, pois reconhecemos a impossibilidade de estudar todos os autores que estudam o pensamento algébrico.

Entre os autores que se opõem ao ensino da álgebra apresentado anteriormente estão Ponte, Branco e Matos (2009), que afirmam que o ensino seria mais dinâmico e abrangente, proporcionando ampliação do senso crítico nos estudantes, se fosse baseado na valorização do desenvolvimento do pensamento algébrico e não apenas nos aspectos formais, e ainda, que a aprendizagem efetiva da álgebra ocorre se o estudante for capaz de pensar algebricamente.

Ao priorizar o desenvolvimento do pensamento algébrico, podemos apreciar uma Álgebra que:

> [...] não é apenas um conjunto de procedimentos envolvendo os símbolos em forma de letra, mas consiste também na atividade de generalização e proporciona uma variedade de ferramentas para representar a generalidade das relações matemáticas, padrões e regras (e.g. MASON, 2005). (KIERAN, 2007a, p.5)

Compartilhando das ideias de Kieran (2007), acreditamos que a álgebra não deve ser ensinada como técnicas aprendidas por meio da repetição de procedimentos, mas que a concepção do ensino da álgebra deve deslocar-se no sentido de que aprender álgebra é pensar algebricamente em situações matemáticas e/ou em outras situações.

Quando nos referimos ao pensar algebricamente não estamos obrigatoriamente nos referindo à utilização de símbolos algébricos, pois acreditamos que o pensamento precede a simbologia, assim como a simbologia tem o papel de auxiliar na representação[10] do pensamento.

A relação temporal entre pensamento e simbologia é perceptível por meio da própria história da Matemática e das Ciências. É possível perceber que o pensamento algébrico se manifestou milênios antes do estabelecimento dos símbolos, pois em uma era primitiva os homens realizavam observações de fenômenos naturais com a intenção de prever quando aconteceriam novamente e assim, se preparar para eles, ou seja, apresentavam indícios de estabelecimento de relações e padrões sequenciais, mesmo sem a utilização de uma simbologia.

Mesmo não existindo uma definição precisa do que é o pensamento algébrico, autores evidenciam características desse pensamento, visto que mais importante do que uma definição precisa para ele é a exposição de suas características (SMITH, 2003).

A seguir apresentaremos, a partir da literatura pesquisada, alguns elementos caracterizadores do pensamento algébrico.

Para Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), o pensamento algébrico pode ser desenvolvido gradativamente, mesmo antes da existência de uma linguagem simbólica. Para esses autores o pensamento algébrico é manifestado:

---

[10] Nessa pesquisa, compreendemos representação no sentido exposto pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2007). Sendo que a representação diz respeito ao processo e também ao resultado, é o que é expresso de uma determinada forma sobre uma relação matemática ou um conceito. Este termo se aplica aos processos e aos resultados obtidos externamente e aos que ocorrem “internamente” nas mentes dos sujeitos que fazem matemática.

> [...] sobretudo quando a criança estabelece relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos [...]; percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema; produz mais de modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, reciprocamente, produz vários significados para uma mesma expressão numérica; interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; transforma uma expressão aritmética em outra mais simples; desenvolve algum tipo de processo de generalização; percebe e tenta expressar regularidades ou invariâncias; desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2005, p.5).

Assim como Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), acreditamos que é possível o desenvolver do pensamento algébrico sem a utilização de uma linguagem algébrica formal e este fato possibilita um contato dos estudantes com a álgebra desde as séries iniciais do Ensino Fundamental. Para que haja esse desenvolvimento é necessário proporcionar aos estudantes tarefas que os estimulem a falar e escrever utilizando linguagem corrente, relações que perceberam e estabeleceram, comparações que realizaram, generalizações, afirmações, conjecturas e justificativas, os auxiliando na construção de significados para representações pessoais das situações, para que assim passem a se expressar matematicamente de modo mais preciso e com maior compreensão.

Os mesmos autores (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2005) ressaltam que o pensamento algébrico é um tipo especial de pensamento que se manifesta em diferentes situações e em campos distintos, não se restringindo apenas à Matemática, podendo ser expresso por meio da linguagem natural, linguagem aritmética, linguagem geométrica ou por meio da criação de uma linguagem específica.

Nesse trabalho compreendemos linguagem natural como um sinônimo para língua natural, ou seja, a falada e escrita pelos estudantes. Quando um estudante é capaz de falar ou escrever utilizando sua língua materna e nessa fala ou escrita é possível perceber alguma das características de pensamento algébrico apresentadas nesse trabalho, inferimos que ele manifesta indícios de pensamento algébrico.

Para Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), o objetivo essencial do Ensino Fundamental é que os estudantes sejam capazes de perceber regularidades e realizar algum tipo de generalização.

De acordo com Kieran (2004), a respeito do pensamento algébrico, é possível desenvolvê-lo desde os primeiros anos de escolaridade, sem a necessidade de uma simbologia formal, denominada pelo autor de símbolo-letra. Este autor associa o pensamento algébrico com determinadas atitudes e maneiras de pensar, sendo essas: análise de relações entre quantidades, estudo de mudanças, realização de generalizações, resolução de problemas, modelação, justificação e realização de provisões.

Os estudantes manifestam indícios de pensamento algébrico ao revelarem e argumentarem a respeito de suas ideias algébricas por meio do uso da linguagem natural, ou da utilização de elementos como diagramas, tabelas, expressões numéricas e gráficos, ou ainda pela transição entre estes elementos e notações (KIERAN, 2007).

Blanton e Kaput (2005) afirmam que o pensamento algébrico é um procedimento pelo qual os estudantes generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, sendo que, por vezes, essa generalização se dá por meio de discursos argumentativos adequados à idade do estudante. O foco principal deste desenvolvimento são os significados resultantes do raciocínio e compreensão individual de cada sujeito.

Para Blanton e Kaput (2005) as principais características deste tipo de pensamento são: o uso da aritmética para expressar e formalizar generalizações; generalização de padrões numéricos e relações funcionais[11] (pensamento funcional); utilização de modelagem de situações para expressar e formalizar generalização; e, generalização de sistemas matemáticos abstratos de cálculos e relações.

Alguns exemplos da manifestação de pensamento funcional são: (i) utilizar símbolos para representar quantidades e operar com expressões simbólicas; (ii) representar dados por meio de gráficos e/ou realizar análise de variação apoiada em gráficos; (iii) estabelecer relações funcionais, por meio da exploração da correspondência entre quantidade e de relações recursivas, desenvolvimento de regra para descrever relações, uso de tabelas e simbolização das regras estabelecidas; (iv) realizar previsões apoiadas em dados conhecidos, formulando conjecturas a respeito do que se ignora; (v) identificar e descrever padrões numéricos e geométricos, com a identificação de regularidades numéricas, padrões em sequências de figuras e de padrões em expressões numéricas (BLANTON; KAPUT, 2005).

[11] Baseados nos mesmos autores, compreendemos como relações funcionais a exploração entre correspondência de quantidades, relações recursivas, ou, ainda, o desenvolvimento de regras para descrever tais relações.

De acordo com estes autores, podemos considerar que houve generalização da aritmética, ou indícios de aritmética generalizada quando ocorre a exploração de propriedades e relações de números naturais e inteiros; percepção de generalidade nas operações, como adicionar e subtrair a mesma quantidade não alterar o resultado; intuição de propriedades como a comutatividade da adição e da multiplicação, ou a propriedade distributiva; exploração de relação de equivalência entre expressões; tratamento do número de maneira algébrica, ou seja, enfatizar sua estrutura e não apenas o seu valor; resolução de expressões com números desconhecidos; entre outros (BLANTON; KAPUT, 2005).

Cabe ressaltar que apenas realizar operações aritméticas não é por si só uma característica de pensamento algébrico e que pensar algebricamente não é o mesmo que pensar aritmeticamente. O pensamento algébrico se expressa de modo mais generalizado, tendo como um dos conceitos fundamentais a igualdade, já o pensamento aritmético se reduz a uma resposta final, um único valor que resolve uma situação de maneira correta, sendo uma de suas características a frase “o resultado é” (FIORENTINI, 2001).

Blanton e Kaput (2005) veem como modo de fomentar o desenvolvimento do pensamento algébrico a promoção de momentos em que os estudantes possam generalizar ideias matemáticas a partir de exemplos particulares, por meio de discursos argumentativos, se expressando com linguagens cada vez mais formais, apropriadas às suas idades.

Na perspectiva de Kaput (1999) o pensamento algébrico é a capacidade dos estudantes de utilizarem diferentes sistemas de representação, raciocinar dedutiva e intuitivamente, relacionar, generalizar e resolver problemas que incluem modelação de situações reais, possivelmente imagináveis pelos estudantes, manifestando-se por meio de conjecturas e argumentos.

Na mesma obra o autor (KAPUT, 1999) identifica cinco aspectos do pensamento algébrico: (i) a generalização e formalização de padrões e restrições; (ii) a manipulação de formalismos guiada sintaticamente; (iii) o estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações; (iv) o estudo de funções, relações e variação de duas variáveis; e (v) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controle de fenômenos. Para Kaput (1999), os dois primeiros aspectos são a base dos demais e a generalização é o centro do pensamento algébrico.

Kaput (2008) se refere a estes aspectos de modo mais sintético, pois integra os dois primeiros, a generalização e os simbolismos, considerando-os como “aspectos nucleares” (*core aspects*) da álgebra e os três últimos como “ramos” (*strands*) da mesma.

Para Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), o pensamento algébrico é um tipo de pensamento diferenciado, que pode ser manifestado em diversas tarefas matemáticas, como em outras áreas do conhecimento e até mesmo em situações do cotidiano. Os principais elementos caracterizadores deste pensamento, para os autores, são:

> [...] percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste a outros que variam, tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação-problema e a presença de processo de generalização (FIORENTINI; MIGUEL; MIORIM, 1993).

Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) consideram que o desenvolvimento do pensamento algébrico passa por várias fases, sendo essas: a fase pré-algébrica, em que o estudante usa um elemento considerado algébrico, por exemplo, as letras, podendo ser um símbolo criado pelo próprio sujeito, mas que ele ainda não o idealiza como um número generalizado; a fase de transição da aritmética para a álgebra, na qual o estudante concebe a essência de um número qualquer, fazendo algumas generalizações, utilizando ou não símbolos; e, a última fase em que o pensamento algébrico está mais desenvolvido e os estudantes são capazes de conceber a existência de variáveis dentro de um intervalo numérico, além de serem capazes também de pensar e se expressar genericamente por escrito e operar com variáveis.

Outros autores que também se dedicaram a elencar elementos caracterizadores do pensamento algébrico foram Ponte, Branco e Matos (2009). Para eles o pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e funções. Inclui também a capacidade de perceber relações e estruturas matemáticas, interpretação de símbolos matemáticos e a descrição por meio destes símbolos de situações, utilizando-os para a resolução de problemas de diversos domínios. Este tipo de pensamento dá atenção principalmente às relações existentes entre os objetos, sendo essas relações, tanto quanto possível, de forma geral e abstrata.

O pensamento algébrico, segundo estes autores (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009), tem três vertentes. A primeira diz respeito à representação, que é a capacidade de usar diferentes sistemas de representação, em que os caracteres têm uma natureza simbólica. A segunda vertente se refere ao raciocinar de forma dedutiva e indutiva, aonde o indivíduo estabelece relações, analisa propriedades de objetos matemáticos, generaliza ao estabelecer relações válidas para certa classe de objetos e realiza deduções. A terceira e última vertente se relaciona com a resolução de problemas que incluem modelação de situações, e se dá ao utilizar representações diversas de objetos algébricos para interpretar e resolver problemas de diversos domínios. Sintetizamos essas vertentes no quadro a seguir:

Quadro 1 – Vertentes do pensamento algébrico segundo Ponte, Branco e Matos (2009)

Vertentes	**Características**
Representar	• Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando convenções usuais; • Traduzir informações representadas simbolicamente para outras formas de representação, por exemplo, objetos, representação verbal, numérica, tabelas, gráficos e outros; • Evidenciar compreensão no sentido do símbolo e atribuindo diferentes significados para o mesmo símbolo em contextos diversificados.
Raciocinar	• Pensar particularmente em propriedades e analisá-las; • Generalizar e agir a respeito dessas generalizações, evidenciando, assim, compreender regras; • Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	• Utilizar expressões algébricas, equações, sistemas de equações e inequações, funções e gráficos para interpretar e resolver problemas, dentro e fora da Matemática.

Fonte: Ponte, Branco e Matos (2009, p.11, adaptado)

Os autores citados anteriormente, como podemos perceber, incluem como elementos caracterizadores do pensamento algébrico a capacidade de lidar com conteúdos algébricos, como equações, inequações, sistemas de equações e funções, mas não associam este pensamento apenas a esses conteúdos, vão além, ao incluírem também como características de pensamento algébrico a representação realizada por diferentes sistemas, o pensar de modo indutivo e dedutivo, o estabelecimento de relações, percepção de propriedades matemáticas, assim como a resolução de problemas em diversos domínios.

Para o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM[12], 2000), o conceito de pensamento algébrico surge associado à ideia de uma álgebra mais acessível, uma “álgebra para todos”. De acordo com esse conselho, a necessidade de que os estudantes desenvolvam a capacidade de pensar algebricamente tem sido amplamente reconhecida nos últimos anos.

O pensamento algébrico surge como um tipo de pensamento que deve ser desenvolvido desde os primeiros anos de escolaridade, uma vez que envolve aspectos que são apropriados para os estudantes, mesmo com pouca idade, como as relações entre quantidades, o uso de símbolos, representações, análises, generalização de uma variedade de padrões com tabelas, gráficos, ou palavras (NCTM, 1999).

Em um de seus trabalhos, este conselho adverte que para ocorrer o desenvolvimento deste tipo de pensamento é necessário que as aulas de Matemática proporcionem: (I) compreensão de regularidades, relações e funções; (II) representação e análise, por meio de símbolos algébricos, de situações e estruturas matemáticas; (III) utilização de modelos matemáticos para a representação e compreensão de relações quantitativas; e, (IV) análise de variação (NCTM, 2000).

Como visto, o NCTM (2000) relata que o pensamento algébrico relaciona-se com o estudo das estruturas algébricas e é manifestado por meio da compreensão de padrões, relações e funções; utilização de simbologias para representar e analisar situações matemáticas e pela modelação com o estabelecimento de modelos matemáticos para representar e compreender relações, além da percepção da variação que ocorre ao analisar mudanças em diversas situações.

A respeito da representação, esta deve envolver mais que um modo de expressar conceitos matemáticos, visto que se os estudantes forem capazes de transitar por representações e notações, terão mais facilidade em resolver problemas algébricos (NCTM, 2000). As representações podem ser compreendidas como elementos essenciais no apoio à compreensão de conceitos e de relações, assim como na comunicação, na identificação e conexão entre conceitos.

---

[12] O NCTM é um Conselho Nacional de Professores de Matemática, que apoia professores com o intuito de garantir o avanço do conhecimento e difundir aspectos da educação matemática, de modo igualitário por meio de desenvolvimento profissional e de pesquisas na área de Educação Matemática. Mais informações no *site* http://www.nctm.org

Para os autores Lins e Gimenez (1997), o pensamento algébrico é um modo de produzir significado[13] para a álgebra e uma boa alternativa para o desenvolvimento deste tipo de pensamento é associá-lo com a aritmética. Estes autores fazem essa sugestão, pois acreditam que os estudantes já têm um conjunto amplo de experiências com a aritmética e a utilização da mesma para auxiliar o desenvolvimento do pensamento algébrico pode ser mais vantajosa aos estudantes.

Lins e Gimenez (1997) destacam em sua obra os estudos de Davydov (1978 *apud* LINS; GIMENEZ, 1997), que apresentam uma forte ligação entre a aritmética e a álgebra, tendo como princípio a atividade de estabelecer relações quantitativas. Segundo Davydov (1978 *apud* LINS; GIMENEZ, 1997), para um estudante solucionar um problema aritmético ele precisa lidar com relações quantitativas envolvidas, por exemplo, se for proposto a estudantes o seguinte problema "*em uma caixa de bombons há 12 bombons, sendo 4 recheados e o resto não recheado. Quantos são os bombons não recheados nessa caixa?"*, mesmo esse podendo ser compreendido como um problema simples de aritmética, para resolvê-lo os estudantes devem estabelecer uma relação entre o todo e as partes.

Segundo Lins e Gimenez (1997), o pensamento algébrico se baseia no:

> 1) produzir significados apenas em relação a números e operações aritméticas (chamamos a isso aritmeticismo);
> 2) considerar números e operações apenas segundo suas propriedades, e não "modelando" números em outros objetos, por exemplo, objetos "físicos" ou geométricos (chamamos a isso de internalismo); e
> 3) operar sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos (chamamos a isso analiticidade) (LINS; GIMENEZ, 1997, p.150).

A primeira característica, o aritmeticismo se fundamenta no estabelecimento de compreensão somente no âmbito dos números e operações aritméticas, enquanto a segunda característica, o internalismo, se remete, além da compreensão e da significação dos números e operações, também às propriedades e, por fim, a terceira característica, a analiticidade refere-se a operar com números desconhecidos como se fossem conhecidos, a ideia de incógnita. Segundo estes autores, pensar algebricamente é agir de acordo com essas três características, no entanto, não é

[13] Para os autores (LINS; GIMENEZ, 1997), significado é um conjunto de coisas que diz respeito a um objeto, efetivamente o que se diz no interior de uma atividade. Ainda, produzir significado é falar a respeito de um objeto, no caso, a própria álgebra.

intenção dos autores reduzir esse pensamento a uma noção abstrata, por meio de pensamentos formais, antes de proporcionar aos estudantes a possibilidade de produzirem significados.

Para que ocorra o desenvolvimento do pensamento algébrico, Lins e Gimenez (1997) relatam a necessidade de atividades em que os estudantes possam investigar regularidades, sistematizar propriedades observadas, resolver e discutir problemas algébricos, modelar situações e estabelecer padrões.

Após apresentadas as características do pensamento algébrico, de acordo com os autores estudados (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; KIERAN, 2004, 2007; FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2005; FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; NCTM, 2000; LINS; GIMENEZ, 1997; BLANTON; KAPUT, 2005; KAPUT, 1999), na sequência exibiremos um quadro síntese a respeito do que os autores citados anteriormente afirmam serem características de pensamento algébrico.

Quadro 2 – Síntese das características do pensamento algébrico, segundo autores estudados

Autor	Características do pensamento algébrico
Kieran (1992, 2004, 2007)	Consiste no modo de pensar e na atividade de generalizar, analisar e representar relações matemáticas e relações entre quantidades e grandezas, resolver problemas, modelar, justificar, realizar previsões, estabelecer padrões e regras. Ocorrem manifestações de indícios de pensamento algébrico ao revelar e argumentar a respeito de ideias algébricas, mesmo que em linguagem natural, ou com elementos como diagramas, tabelas, expressões numéricas e gráficos, ou, ainda, pela transição entre estes elementos e notações.
Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005)	Pode ser desenvolvido gradativamente antes da linguagem simbólica, e se manifesta quando um sujeito estabelece relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos, utiliza expressões de estruturas aritméticas diferentes para uma mesma situação-problema; produz vários significados para uma expressão numérica; interpreta igualdade como equivalência entre grandezas ou entre expressões numéricas; desenvolve algum tipo de processo de generalização; percebe e tenta expressar regularidades ou invariâncias; desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente.
Blanton e Kaput (2005)	É um tipo de pensamento em que os estudantes generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares e tem como principais características o uso da aritmética como campo para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada), generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais, em que ocorre a exploração entre correspondência de quantidades, relações recursivas e desenvolvimento de regras para descrever relações (pensamento funcional), a modelação de situações e a generalização a respeito de sistemas matemáticos abstratos de cálculos e relações.
Kaput (1999)	É a capacidade de utilizar diferentes sistemas de representação, raciocinar dedutiva e indutivamente, relacionar, generalizar, modelar, realizar conjectu-

	ras e argumentar a respeito dessas conjecturas. Este pensamento tem como principais aspectos a generalização e formalização de padrões e restrições, manipulação de formalismos, estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações, estudo de funções, relações e variação de variáveis, utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controle de fenômenos.
Fiorentini, Miorim e Miguel (1993)	É um tipo de pensamento que pode ser manifestado por meio da percepção de regularidades, aspectos invariantes e variantes, tentativas de expressar e explicar a estrutura de uma situação-problema e processo de generalização.
Ponte, Branco e Matos (2009)	Este pensamento inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e funções, assim como a percepção de relações e estruturas matemáticas, análise de propriedades matemáticas e interpretação de símbolos matemáticos. Além disso, o pensamento algébrico se relaciona à representação de forma simbólica, raciocínio dedutivo e indutivo e utilização de representações diversas de objetos algébricos para resolver problemas de diferentes domínios.
NCTM (1999, 2000)	Associa-se à ideia de álgebra para todos e tem como características o estudo de estruturas algébricas, como padrões, relações e funções, compreensão de regularidades, relações e funções; representação e análise de situações matemáticas e estruturas; utilização de modelos matemáticos para representar relações entre quantidades e análise de variações.
Lins e Gimenez (1997)	Relaciona-se com a aritmética e é um dos modos de produzir significado para a álgebra. Tem como principais características o aritmeticismo (produção de significados apenas em relação a números e operações aritméticas), internalismo (considerar números e operações apenas segundo suas propriedades) e a analiticidade (ao operar com números desconhecidos como se fossem conhecidos). Além disso, manifesta-se por meio da investigação de regularidades, sistematização de propriedades observadas, resolução e discussão de problemas algébricos, modelação de situações e estabelecimento de padrões.

Fonte: do autor

Podemos perceber no quadro anterior que elementos teóricos dos autores estudados não se contradizem com relação as características do pensamento algébrico. Devido a esse fato, assumiremos os autores citados no quadro anterior para a realização das análises dos registros escritos dos estudantes.

Verificamos que Kieran (2004, 2007), Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), Blanton e Kaput (2005), Kaput (1999), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), apontaram a importância do processo de generalizar e da necessidade de estabelecer uma linguagem simbólica que tenha significado para os estudantes.

Os autores Blanton e Kaput (2005), Lins e Gimenez (1997) e Kieran (2004, 2007), entendem que esse tipo de pensamento pode ser desenvolvido com auxílio ou influência da aritmética, por meio de determinadas estruturas algébricas que permitam a construção de significados.

Com relação à percepção de aspectos variantes e invariantes, ou estabelecimento de padrões, ou relações, ou comparações, todos os autores apontam como elementos caracterizadores do pensamento algébrico.

Os elementos caracterizadores do pensamento algébrico elencados pelos autores estudados têm em comum a ideia de que o pensamento algébrico pode ser desenvolvido desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, antes mesmo do contato dos estudantes com a linguagem formal algébrica.

Nós concordamos que o pensamento algébrico antecede a aprendizagem da linguagem simbólica, tendo em vista que a introdução à simbologia algébrica sem a construção de sentido para os estudantes pode ser uma barreira para a aprendizagem da álgebra.

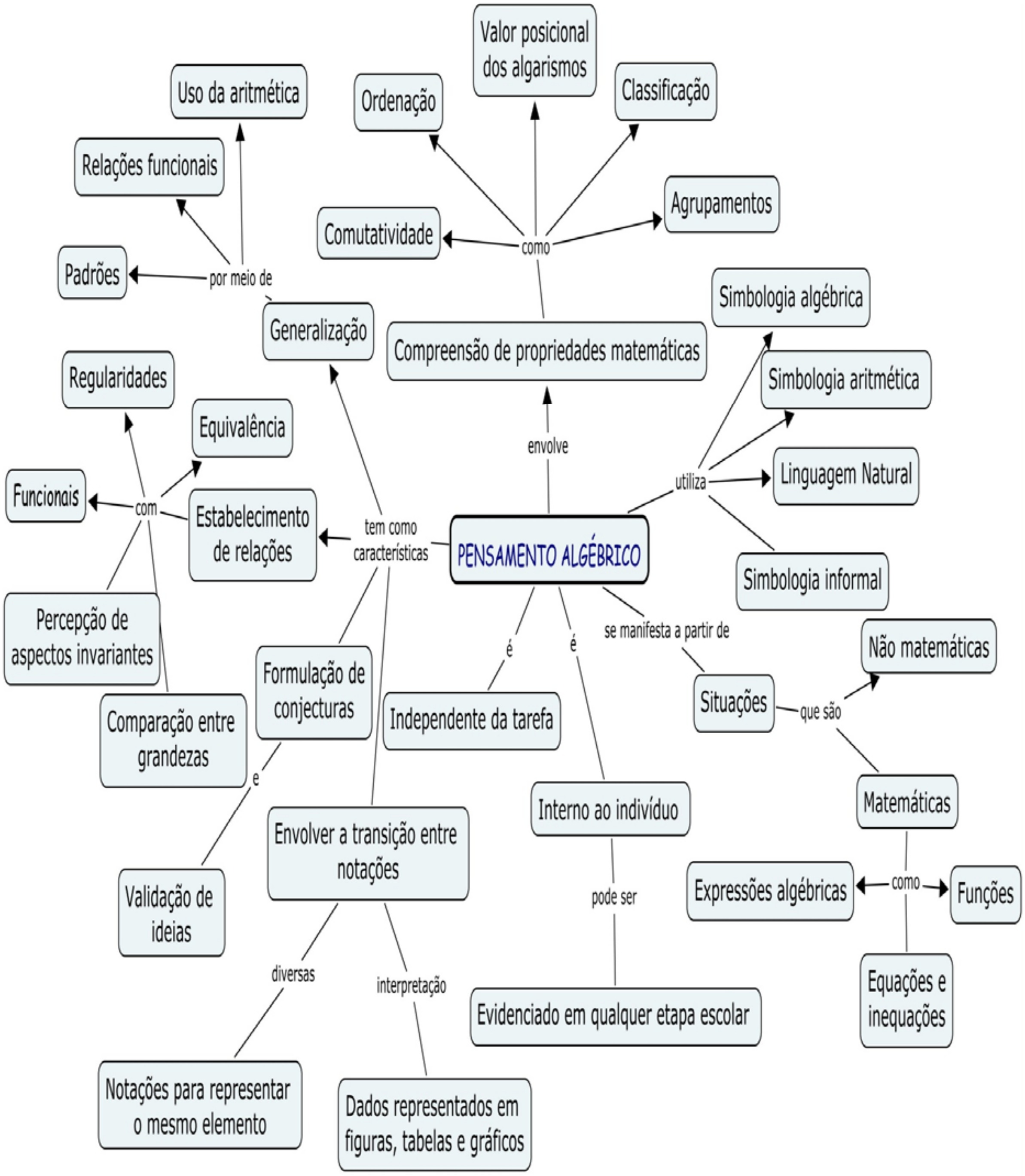
Tendo em mente a impossibilidade de uma delimitação precisa e definição formal do que é o pensamento algébrico, a seguir apresentaremos por meio de um mapa conceitual[14], construído com base na literatura estudada, as características que consideraremos como elementos característicos desse tipo de pensamento, ou seja, elementos que quando manifestados nos registros escritos dos estudantes serão considerados por nós como características de pensamento algébrico.

Cabe ressaltar que foi possível atrelarmos elementos caracterizadores do pensamento algébrico dos diferentes autores estudados, pois existem informações teóricas que não se contradizem e no nosso ponto de vista se completam.

---

[14] A teoria que sustenta os mapas conceituais é a teoria cognitiva de aprendizagem de David Ausubel, mesmo este nunca tendo mencionado os mapas conceituais, visto que essa técnica foi desenvolvida em meados da década de 70, pelo professor e pesquisador norte-americano Joseph D. Novak, da Universidade de Cornell, e seus colaboradores. Os mapas conceituais são diagramas hierárquicos com diversas dimensões que indicam relações entre conceitos de uma disciplina ou parte dela. A opção pela construção de um mapa conceitual deu-se devido à sua flexibilidade, dinamicidade e utilidade para a organização e análise de um conteúdo ou de dados. Um aspecto muito interessante desses mapas é a possibilidade de ampliação em diversos e distintos momentos na medida em que aumenta o conhecimento a respeito do assunto.

Figura 1 – Mapa conceitual de características do pensamento algébrico baseado na literatura estudada



Fonte: do autor

O mapa conceitual apresentado foi construído a partir da literatura estudada, assumindo elementos dos autores citados anteriormente. Esse mapa conceitual e-lenca os elementos que consideramos caracterizadores do pensamento algébrico, assim como suas particularidades. As análises relativas à manifestação de pensamento algébrico nos registros escritos dos estudantes serão baseadas nas características elencadas nesse mapa.

Podemos perceber por meio deste mapa conceitual que o pensamento algébrico tem como característica o estabelecimento de relações que podem envolver equivalências, regularidades, percepções de aspectos invariantes e comparação entre grandezas. A formulação de conjecturas e validação das mesmas e a transição entre notações para representar uma mesma ideia matemática, assim como a interpretação de dados representados em figuras, tabelas e gráficos também são elementos caracterizadores deste pensamento, que tem como um dos principais elementos a generalização, seja de padrões, ou de relações.

O pensamento algébrico pode ser manifestado por meio do uso da aritmética, ao evidenciar compreensão de propriedades matemáticas, como a comutatividade, ordenação, classificação, valor posicional dos algarismos e agrupamentos, com a utilização da simbologia própria da álgebra e também pode ser manifestado com o auxílio da simbologia aritmética, linguagem natural ou informal.

Este pensamento se manifesta em situações matemáticas, que envolvem expressões algébricas, funções, equações, inequações e pode se manifestar em situações não matemáticas, sendo interno ao indivíduo e podendo ser evidenciado em qualquer etapa escolar. É independente da tarefa, mas consideramos que existem tarefas que podem promover o desenvolvimento deste pensamento.

Como síntese deste capítulo, cabe ressaltar que a álgebra deve ser tratada de modo muito mais amplo do que apenas como manipulações simbólicas e transformações de expressões, tendo a generalização, estabelecimento de relações, padrões, comparações, modelação, entre outras características citadas anteriormente, um lugar mais privilegiado.

Com a realização dessa pesquisa bibliográfica a respeito das características de pensamento algébrico atingimos alguns dos nossos objetivos específicos, ou seja, conseguimos verificar o que caracteriza o pensamento algébrico de acordo com os autores por nós estudados. Essas características serão fundamentais para a realização das análises dos dados coletados e também para atingir os demais objetivos da pesquisa.

Para as análises dos registros escritos dos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental em questões retiradas de documentos nacionais relacionados à Prova Brasil, sendo estes PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação e

Modelo Teste Prova Brasil, consideraremos os elementos elencados no mapa conceitual apresentado como caracterizadores do pensamento algébrico.

No próximo capítulo serão apresentados alguns aspectos relativos à Prova Brasil, assim como a descrição das atividades que foram aplicadas aos estudantes.

2 SOBRE A PROVA BRASIL

Com o objetivo de oferecer subsídios para a formulação, reformulação e monitoramento de políticas públicas e contribuir para a melhoria da qualidade do ensino brasileiro, o Ministério da Educação (MEC) decidiu instituir uma avaliação nacional para o Ensino Básico.

O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) foi o primeiro a abranger todo o território nacional e teve sua primeira aplicação em 1990, sendo reformulado em 1995. Atualmente este sistema é composto por duas avaliações complementares, a Avaliação Nacional da Educação Básica (ANEB) e a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (Anresc), conhecida como Prova Brasil (BRASIL, 2008).

A ANEB é uma avaliação realizada desde 1995, de maneira amostral, que permite reconhecer a média dos resultados de desempenho dos brasileiros. Já a Prova Brasil, que é desenvolvida pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), é uma avaliação diagnóstica de caráter censitário, que é aplicada a cada biênio aos estudantes do quinto e nono anos (antigas quarta e oitava séries) do Ensino Fundamental e terceiro ano do Ensino Médio, que estudam em escolas Municipais, Estaduais e Federais, desde 2005, tendo o objetivo de avaliar a qualidade do ensino público nacional e assim contribuir para a melhora da qualidade do ensino, redução da desigualdade e democratização da gestão do ensino público.

Os resultados dessa avaliação dão subsídio para a adoção de medidas públicas para a superação das deficiências encontradas nas escolas avaliadas.

A Prova Brasil é constituída de questões de língua portuguesa com foco na leitura e questões de matemática com foco na resolução de problemas, tendo o intuito de possibilitar o desenvolvimento das capacidades de observar, estabelecer relações, comunicar-se em diferentes linguagens, argumentar e validar processos, além de estimular processos intuitivos de dedução e estimativa (BRASIL, 2008).

Para as escolas que realizam a Prova Brasil, calcula-se uma média expressa em uma escala de 0 a 500 pontos divididos em dez níveis de proficiência. Para que estes níveis sejam constituídos procurando agrupar os estudantes de acordo com as competências construídas, pelos conhecimentos matemáticos e mobilizados de maneira autônoma por eles (BRASIL, 2008).

Os níveis de proficiência passam a ser significativos a partir de interpretações pedagógicas. Essa interpretação pode ocorrer ao comparar a média obtida pela escola com a média esperada e com a média nacional e pode oferecer às escolas informações mais específicas a respeito de quais são as habilidades já construídas pelos estudantes e, assim, orientar a ação pedagógica dos professores, com o objetivo de possibilitar a estes estudantes o aprofundamento e a ampliação de diferentes habilidades em Matemática (BRASIL, 2008).

O que caracteriza os níveis de proficiência são conjuntos de habilidades. Deste modo, um grupo de estudantes pertence a um mesmo nível de proficiência se mostrar desenvolvimento nas habilidades desse nível.

Para que uma avaliação nacional como a Prova Brasil seja efetiva é preciso que ela esteja apoiada em uma Matriz de Referência. A Matriz de Referência da Prova Brasil é o referencial curricular do que será avaliado em cada disciplina e série, informando as competências e habilidades esperadas de cada estudante. Essa matriz corrobora com a legitimidade do processo de avaliação.

A Prova Brasil é composta por quatro blocos de conteúdos embasados nos PCN: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; e, Tratamento da Informação. Esses quatro temas permitem a elaboração de questões que tenham relevância social e científica, proporcionando inclusão de crenças e diversidades, por meio de seus contextos (BRASIL, 2008).

Cada uma das questões na avaliação Prova Brasil são características dos descritores. Os descritores da Prova Brasil são formados com base nos PCN do ensino de Matemática e são uma associação entre conteúdos curriculares e cálculos mentais desenvolvidos pelos estudantes, que traduzem certas competências e habilidades, sendo ao total 28 distribuídos não igualmente entre os quatro blocos de conteúdo. Ainda a respeito dos descritores sabemos que *"indicam habilidades gerais que se esperam dos alunos; constituem a referência para seleção dos itens (questões) que devem compor uma prova de avaliação"* (BRASIL, 2008, p.18).

No quadro a seguir evidenciaremos os descritores da Prova Brasil relativos às questões de Matemática.

Quadro 3 – Descritores de Matemática da Prova Brasil

Tema I. Espaço e Forma	
Descritores	4ª/5º EF
Identificar a localização/movimentação de objeto em mapas, croquis e outras representações gráficas.	D1
Identificar propriedades comuns e diferenças entre poliedros e corpos redondos, relacionando figuras tridimensionais com suas planificações.	D2
Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais pelo número de lados e pelos tipos de ângulos.	D3
Identificar quadriláteros observando as relações entre seus lados (paralelos, congruentes, perpendiculares).	D4
Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas.	D5
Tema II. Grandezas e Medidas	
Descritores	4ª/5º EF
Estimar a medida de grandezas utilizando unidades de medidas convencionais ou não.	D6
Resolver problemas significativos utilizando unidades de medida padronizadas como km/m/cm/mm, kg/g/mg, l/ml.	D7
Estabelecer relações entre unidades de medida de tempo.	D8
Estabelecer relações entre o horário de início e término e/ou o intervalo da duração de um evento ou acontecimento.	D9
Num problema, estabelecer trocas entre cédulas e moedas do sistema monetário brasileiro, em função de seus valores.	D10
Resolver problema envolvendo o cálculo do perímetro de figuras planas, desenhadas em malhas quadriculadas.	D11
Resolver problema envolvendo o cálculo ou estimativa de áreas de figuras planas, desenhadas em malhas quadriculadas.	D12
Tema III. Números e Operações/Álgebra e Funções	
Descritores	4ª/5º EF
Reconhecer e utilizar características do sistema de numeração decimal, tais como agrupamentos e trocas na base 10 e princípio do valor posicional.	D13
Identificar a localização de números naturais na reta numérica.	D14
Reconhecer a decomposição de números naturais nas suas diversas ordens.	D15
Reconhecer a composição e a decomposição de números naturais em sua forma polinomial.	D16
Calcular o resultado de uma adição ou subtração de números naturais.	D17
Calcular o resultado de uma multiplicação ou divisão de números naturais.	D18

Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da adição ou subtração: juntar, alteração de um estado inicial (positiva ou negativa), comparação e mais de uma transformação (positiva ou negativa).	D19
Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, ideia de proporcionalidade, configuração retangular e combinatória.	D20
Identificar diferentes representações de um mesmo número racional.	D21
Identificar a localização de números racionais representados na forma decimal na reta numérica.	D22
Resolver problema utilizando a escrita decimal de cédulas e moedas do Sistema Monetário Brasileiro.	D23
Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.	D24
Resolver problema com números racionais expressos na forma decimal, envolvendo diferentes significados de adição ou subtração.	D25
Resolver problema envolvendo noções de porcentagem (25%, 50%, 100%).	D26
Tema IV. Tratamento da Informação	
Descritores	4ª/5º EF
Ler informações e dados apresentados em tabelas.	D27
Ler informações e dados apresentados em gráficos (particularmente em gráficos de colunas).	D28

Fonte: Brasil (2008)

Como podemos observar neste quadro, os descritores têm características distintas, uma vez que existem descritores que possibilitam a elaboração de questões por meio de situações-problemas, como é o caso do descritor *D10 – num problema, estabelecer trocas entre cédulas e moedas do sistema monetário brasileiro, em função de seus valores*. Já outros são mais específicos em relação aos procedimentos e algoritmos, como o descritor *D17 – calcular o resultado de uma adição ou subtração de números naturais*, focando em conhecimentos de nível técnico, que são avaliados por meio de questões do tipo calcule, ou efetue, consideradas rotineiras[15] nos livros didáticos.

O terceiro tema da Prova Brasil a respeito da Matemática exposto no quadro 2 é *Números e Operações/Álgebra e Funções*. Por meio deste tema é possível perceber que algumas das habilidades examinadas na Prova Brasil relacionam-se a

[15] Consideramos como questões rotineiras as que são frequentemente apresentadas em livros didáticos.

determinadas características e elementos caracterizadores do pensamento algébrico, por exemplo: utilizar diferentes representações para uma mesma ideia matemática; generalizar características do sistema de numeração decimal; estabelecer padrões (localizar números naturais na reta numérica).

O mesmo documento que traz os descritores (BRASIL, 2008) sugere que durante o Ensino Fundamental I devem ser estimuladas e desenvolvidas capacidades como: “Observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos, além de estimular formas de raciocínio como intuição, dedução e estimativa” (BRASIL, 2008, p.196), ou seja, evidencia a importância do desenvolvimento de capacidades que fazem parte do pensamento algébrico.

Podemos relacionar o documento relativo a prova Brasil com alguns dos autores estudados nessa pesquisa, visto que, o estabelecimento de relações é um elemento característico do pensamento algébrico de acordo com Kieran (1992), Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), Blanton e Kaput (2005), Kaput (1999), Ponte, Branco e Matos (2009).

A comunição e a utilização de diferentes notações para expressar ideias são uma das características do pensamento algébrico elencada por Kaput (1999) e a argumentação e validação de processos foi evidenciada como uma característica de pensamento algébrico por Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005).

As questões que compõem a Prova Brasil são de múltipla escolha com alternativas do A até o D, sendo uma correta e as demais incorretas.

As alternativas incorretas recebem o nome de distratores e, por ser uma avaliação objetiva não fornece indicações de todas as habilidades e competências desenvolvidas nas aulas de matemática, não evidencia o processo de resolução das questões e, portanto, quais as habilidades que são realmente utilizadas até a obtenção de uma resposta correta e as habilidades que os estudantes que erraram a questão evidenciaram já ter adquirido, pois não é possível destacar ou identificar o procedimento de cálculo utilizado (BRASIL, 2008).

Os distratores oferecem “informações para a análise dos níveis de proficiência, na medida em que procuram focalizar erros comuns nessa etapa de escolarização” (BRASIL, 2008, p.23), dando indícios a respeito da maneira como o estudante raciocinou para chegar a tal resposta. Os distratores são elaborados tendo como base possíveis caminhos errôneos utilizados pelos estudantes.

As questões da Prova Brasil são elaboradas utilizando a metodologia de avaliação Teoria de Resposta ao Item (TRI), que também é usada em outras avaliações nacionais como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e, de acordo com esse método, as questões são as unidades básicas de análise.

A TRI qualifica as questões ou itens de acordo com três parâmetros: (I) Poder de distinguir quais estudantes têm a proficiência requisitada em uma questão específica e quais não têm; (II) Grau de dificuldade; e, (III) Possibilidade de acerto quando o estudante escolhe uma resposta aleatoriamente (INEP, 2011).

Outras características dessa metodologia são:

> [...] o número de questões por nível de dificuldade em cada prova e as demais características dessas questões afetam o resultado. Dessa forma, acertar 40 itens em uma área não significa, necessariamente, ter uma proficiência maior do que em outra, cujo número de acertos tenha sido 35. Além disso, por serem áreas do conhecimento distintas, não é possível fazer uma relação direta entre as escalas de proficiência. [...] um candidato com um certo nível de proficiência tende a acertar os itens de nível de dificuldade menor que o de sua proficiência e errar aqueles com nível de dificuldade maior. [...] Outra característica da TRI é não ter um limite inferior ou superior padrão entre as áreas de conhecimento. Isso significa que as proficiências dos participantes não variam entre zero e mil. Os valores máximos e mínimos de cada prova dependerão das características dos itens selecionados (INEP, 2011).

Os resultados da Prova Brasil, juntamente com o fluxo de aprovação escolar, são alguns dos elementos utilizados para o cálculo do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB[16]), que é um instrumento de acompanhamento das metas de qualidade da educação no âmbito do Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE), do MEC (Brasil, 2005).

Por meio do IDEB ocorre a verificação do cumprimento das metas fixadas para todas as escolas brasileiras.

A meta estipulada para o Brasil é atingir a média apresentada pelos países da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico – (OCDE), até o ano de 2022, ou seja, que a média do IDEB nacional passe de 3,8 para 6,0, pois essa é a média educacional dos países desenvolvidos.

---

[16] Ao falar do IDEB envolvemos uma questão política muito séria, sendo possível realizar diversos questionamentos e discussões a respeito, porém, tendo em mente nosso objetivo, essas discussões não se fazem necessárias. Cabe destacar que, por experiências vividas, muitas vezes as escolas voltam sua atenção em atingir um número melhor no IDEB em detrimento a outras coisas importantes, por exemplo, o próprio desenvolvimento do pensamento algébrico.

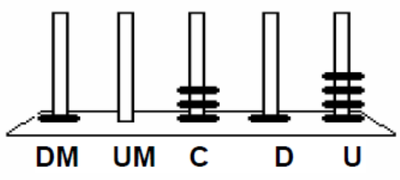
O IDEB combina aprendizagem e fluxo de aprovação com o intuito de equilibrar essas duas dimensões e, para que este índice aumente, é preciso que os estudantes tenham um bom desenvolvimento na Prova Brasil, não repitam o ano escolar e não deixem de frequentar a escola. O IDEB de cada escola é diretamente proporcional ao repasse de verba feita para ela, uma vez que, quanto maior o IDEB, maior será o investimento nessa escola e este poderá ser utilizado na infraestrutura e na qualificação dos professores.

Depois de feitos esclarecimentos a respeito da Prova Brasil e de sua importância, na sequência evidenciaremos as questões que foram selecionadas dos documentos PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação e Modelo Teste Prova Brasil – e aplicadas aos estudantes. Fundamentamo-nos no referencial teórico para selecionar questões que possivelmente nos dariam condições para analisar manifestações de características de pensamento algébrico.

Cabe ressaltar que as questões foram adaptadas, pois elas eram objetivas e suas alternativas foram retiradas, assim como foi incluído um item no qual os estudantes devem explicar como pensaram para resolver cada uma das questões.

Quadro 4 – Questão 1 (Q1)

No ábaco abaixo, Cristina representou um número:



a. Qual foi o número representado por Cristina?

b. Explique como você pensou.

Fonte: Modelo Teste Prova Brasil

Essa questão trata do reconhecimento e utilização do sistema de numeração decimal, tais como agrupamentos e trocas utilizando a base do nosso sistema, ou seja, a base dez, bem como, o princípio do valor posicional.

Ao reconhecer o princípio do valor posicional dos números na base 10, os estudantes demonstram compreensão de uma propriedade matemática importante, a propriedade da ordenação dos números, assim como o conhecimento de características do sistema de numeração decimal.

Os PCN (1997) relatam a necessidade dos estudantes serem capazes de comparar e ordenar as notações numéricas por meio da compreensão das características do sistema decimal, das trocas na base 10 e do valor posicional dos algarismos.

Ao resolverem tarefas que estimulem os estudantes a utilizar características do sistema de numeração decimal, muitas vezes eles são incentivados a transitarem entre formas de representações distintas para a mesma ideia matemática, ou seja, a desenvolverem uma característica de pensamento algébrico segundo Kaput (1999).

Quadro 5 – Questão 2 (Q2)

O litoral brasileiro tem cerca de 7.500 quilômetros de extensão. Este número possui quantas centenas? Explique como você pensou para chegar à resposta.

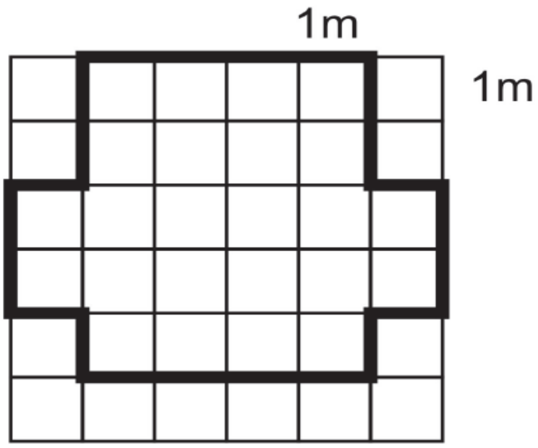
Fonte: PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação (BRASIL, 2008)

Essa questão oferece condições para verificação da compreensão dos estudantes a respeito do reconhecimento e da utilização das características do sistema de numeração decimal posicional. Dentre as possibilidades, os estudantes podem mostrar compreensão a respeito de propriedades matemáticas, como a ordenação numérica e os conceitos unidade, dezena, centena e unidade de milhar.

Diferentemente da questão Q1, em que o estudante necessita realizar uma transição entre notações para evidenciar a compreensão e utilização de características do sistema de numeração decimal, na questão Q2 o estudante precisa compreender a decomposição de um numeral em suas diversas ordens e, assim, verificar a quantidade de centenas que compõem o número solicitado.

Quadro 6 – Questão 3 (Q3)

Uma pessoa faz caminhadas em uma pista desenhada em um piso quadriculado, no qual o lado de cada quadrado mede 1m. A figura abaixo representa essa pista.



Quantos metros essa pessoa percorre ao completar uma volta?

Explique como você pensou para chegar à resposta.

Fonte: PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação (BRASIL, 2008)

A questão apresentada possibilita que os estudantes resolvam questões que envolvam o cálculo do perímetro de figuras planas por meio da utilização de malhas quadriculadas.

Assim, existe a possibilidade de verificar se os estudantes compreendem o conceito de perímetro como o contorno de figuras e ao utilizar a malha quadriculada é possível trabalhar com este tema sem a utilização de uma unidade padrão de medida, uma vez que a malha terá uma unidade específica para a medição.

Acreditamos que essa questão possa promover a manifestação do pensamento algébrico se o estudante apresentar algum tipo de generalização ou estabelecimento de relação entre a quantidade de lados do contorno da figura e a medida destes lados.

Quadro 7 – Questão 4 (Q4)

Na biblioteca pública de Cachoeiro de Itapemirim – ES há 112.620 livros. Decompondo esse número nas suas diversas ordens tem-se:

Explique como você pensou para chegar à sua resposta.

Fonte: PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação (BRASIL, 2008)

Por meio dessa questão busca-se verificar se os estudantes reconhecem a decomposição de números naturais em suas diversas ordens.

Os PCN (1997) evidenciam a importância dos estudantes serem capazes de realizar a decomposição numérica, uma vez que essa atitude pode auxiliar em procedimentos do cálculo mental, realização de cálculos por estimativa e no processo de aprendizagem de propriedades matemáticas, tais como a propriedade distributiva e associativa.

Quando os estudantes realizam a decomposição numérica evidenciam a compreensão de importantes características da numeração decimal, tais como o valor posicional dos algarismos, as ordens numéricas e a possível escrita de um numeral na forma aditiva e multiplicativa.

A prática da decomposição numérica permite aos estudantes perceberem regularidades e estabelecerem padrões relacionados à numeração decimal, por exemplo, ao decompor o número 1846 em e 1000 + 800 + 40 + 6 e se perceber que pode representar essa quantidade como 1846 = 1000 + 800 +40 +6 = 100 x 10 + 80 x 10 + 4 x 10 + 6 e se lidar com esses algarismos não com relação à quantidade que representam, mas sim por meio de sua estrutura, é possível inferir a respeito do estabelecimento de uma relação de equivalência.

Quadro 8 – Questão 5 (Q5)

Na escola de Ana há 3.879 alunos. Na escola de Paulo há 2.416 alunos. Então, a diferença entre elas é de 1.463 alunos. Se, no próximo ano, 210 alunos se matricularem em cada escola, qual será a diferença entre elas?

Explique como você pensou para chegar à sua resposta.

Fonte: PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação (BRASIL, 2008)

Ao resolver essa questão envolvendo diferentes significados para a adição, ou subtração, existe a possibilidade de verificar se os estudantes são capazes de reconhecer em problemas distintos significados para essas operações. Entre esses significados estão *juntar, alteração de um estado inicial (positiva ou negativa), comparação e mais de uma transformação (positiva ou negativa)*.

A construção e a compreensão dos diversos significados para essas operações demandam tempo e devem ser desenvolvidas em conjunto com estudos relacionados aos números, procedimentos de cálculo, percepção de regularidades e compreensão das propriedades do sistema decimal de numeração.

Este problema está relacionado à ideia de comparação e por ser contextualizado exige dos estudantes um tratamento qualitativo, ao confrontar duas ou mais quantidades para encontrar a diferença entre elas.

Os problemas que têm o significado da comparação frequentemente exigem dos estudantes que desenvolvam raciocínios mais elaborados, pois nem sempre fica evidente a operação que leva ao resultado esperado.

Quadro 9 – Questão 6 (Q6)

Luma comprou um metro de fita e gastou 0,8 dele. Qual é a fração que representa esta parte?

Explique como você pensou para chegar à resposta.

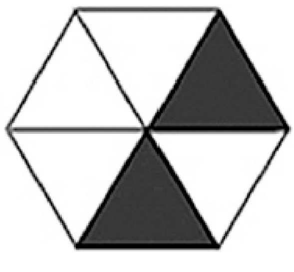
Fonte: PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação (BRASIL, 2008)

A Q6 possibilita a identificação de diferentes representações de um mesmo número racional e, assim, a inferência a respeito do desenvolvimento da capacidade de transitar em diversas notações e representações para números racionais.

Para realizar a transição entre notações para um conceito Matemático, especificamente em contextos similares a essa questão, os estudantes podem evidenciar a compreensão de que frações equivalentes representam um mesmo número, inteiro ou decimal (BRASIL, 2008).

Quadro 10 – Questão 7 (Q7)

A figura abaixo representa uma figura dividida em partes iguais. A parte pintada de preto corresponde a que fração da figura?



Explique como você pensou para chegar à resposta.

Fonte: PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação (BRASIL, 2008)

Essa questão auxilia na identificação da fração como representação que pode estar associada a diversos significados, entre eles, a *parte/todo* em que um inteiro é dividido em partes iguais; *quociente* caso em que a fração indica uma divisão e seu resultado; *probabilidade,* a fração representa a chance de um evento acontecer; *medida* que a notação de fração pode representar uma comparação em que uma parte é tomada como referência para medir outra, entre outros significados.

Na forma com que essa questão é apresentada, podemos considerá-la como rotineira, visto que frequentemente questões similares são apresentadas em livros didáticos.

A questão Q7 visa verificar a compreensão dos estudantes em reconhecer a fração como parte de um todo, sendo essa a relação mais tradicional para a ideia de fração (PCN, 1997).

Quadro 11 – Questão 8 (Q8)

Num exercício de Matemática, Ângela conseguiu 9 pontos e Cláudia conseguiu 6,4 pontos. Quantos pontos Ângela teve a mais que Cláudia? Explique como você pensou para chegar à resposta.

Fonte: PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação (BRASIL, 2008)

Nessa questão os estudantes devem realizar a resolução de um problema com números racionais expressos na forma decimal, bem como utilizar diferentes significados para as operações de adição ou de subtração.

Questões como essa auxiliam na verificação da compreensão dos estudantes para os significados da operação de subtração, no caso, o da comparação entre grandezas e também se os estudantes são capazes de operar com números racionais.

Vale ressaltar que, utilizando essa questão tendo múltipla escolha, caso o estudante erre, nem sempre é possível verificar se o erro deu-se por falta de compreensão deste significado da operação de subtração ou pela falta de compreensão e/ou compreensão parcial do algoritmo da subtração com números racionais.

Quadro12 – Questão 9 (Q9)

Um professor de Educação Física possui 240 alunos. Ele verifica que 50% deles sabem jogar voleibol. Quantos alunos desse grupo sabem esse jogo? Explique como você pensou para chegar à sua resposta.

Fonte: PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação (BRASIL, 2008)

Na resolução dessa questão podemos verificar a noção de porcentagens. As porcentagens necessitam de um intenso trabalho realizado em sala de aula, pois não basta que os estudantes sejam capazes de resolver porcentagens por meio da utilização de "lápis e papel", mas é aconselhável que os estudantes reconheçam facilmente 25%, 50% e 100% de um determinado valor, pois esses valores podem com relativa facilidade ser calculados mentalmente, uma vez que 25% é metade da metade do valor, 50% é a metade e 100% é o total do valor.

Ao estimularem a realização dessas operações também se estimula o cálculo mental, assim como a realização de estimativas (BRASIL, 2008).

Quadro13 – Questão 10 (Q10)

Beto quer comprar uma camiseta que custa R$ 16,99. Ele já tem R$14,20. Para Beto poder comprar a camiseta ainda faltam? Explique como você pensou para chegar à resposta.

Fonte: PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação (BRASIL, 2008)

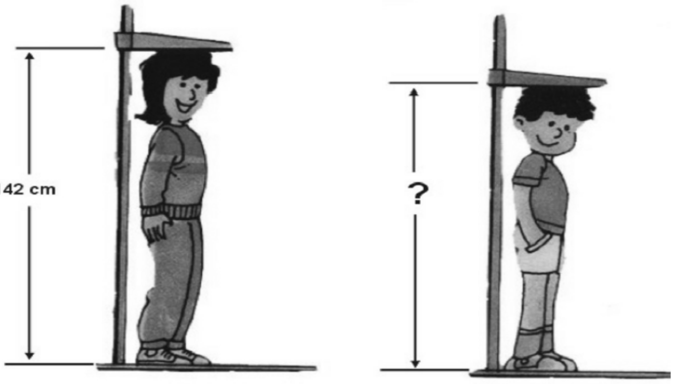
Com essa questão, o estudante pode evidenciar como resolve problemas utilizando a escrita decimal de cédulas e moedas do sistema monetário brasileiro e possibilita ao estudante momento de reflexão a respeito de situações do cotidiano, que envolvem comparações entre quantidades, assim como o valor das cédulas do sistema monetário brasileiro.

Problemas que envolvem a escrita decimal de cédulas e moedas podem possibilitar ao estudante a percepção do significado dos símbolos em relação à representação de quantidade, pois, por exemplo, apenas uma nota de R$100,00 é equivalente a dez notas de R$10,00, ou a 100 notas de R$1,00.

Realizando operações que necessitem de trocas entre cédulas e moedas, os estudantes podem compreender de modo mais consistente propriedades do sistema de numeração decimal, assim como realizar associações com outras bases, por e-xemplo, a base 100.

Quadro14 – Questão 11 (Q11)

Observe a figura:



a) Gabriela é mais alta que Júnior. Ela tem 142 centímetros. Quantos centímetros aproximadamente Júnior deve ter?

b) Explique como você pensou para chegar à resposta.

Fonte: PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação (BRASIL, 2008)

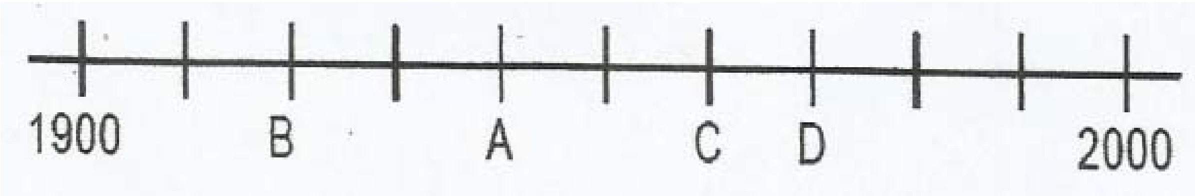
Por meio dessa questão, possibilita-se ao estudante a resolução de situação por meio da realização de uma estimativa utilizando unidades de medidas convencionais.

Ao realizarem estimativas, os estudantes desenvolvem a capacidade de comparar, utilizar aproximações e tomar decisões úteis em procedimentos de cálculos, pois ao realizar estimativas supõe-se que o estudante traçou uma estratégia e deste modo desenvolveu seu raciocínio. Ao terem oportunidade de realizar estimativas, os estudantes vivenciam momentos em que criam hipóteses, por meio da intuição, dedução ou analogia e validam suas estratégias.

De acordo com os PCN (1997, p.77), ao terem as primeiras experiências com quantidades e medidas, os estudantes devem utilizar as estimativas em suas diversas estratégias, com a intenção de levá-los a perceber o significado de um valor aproximado e sua pertinência perante uma determinada situação, por exemplo, ao identificar unidades de medidas adequadas à grandeza de seu interesse.

Quadro 15 – Questão 12 (Q12)

Uma professora da 4ª série pediu que uma aluna marcasse numa linha do tempo o ano de 1940



a. Que ponto a aluna deve marcar para acertar a tarefa pedida?

b. Explique como você pensou.

Fonte: Modelo Teste Prova Brasil.

Na resolução dessa questão é possível verificar se os estudantes são capazes de identificar e localizar números naturais na reta numérica, se os estudantes do 5º ano desenvolveram a habilidade de compreender a representação geométrica dos números naturais, visto que este é um conjunto bem ordenado, organizado de forma sequencial, sendo esta crescente (BRASIL, 2008).

Esta questão também possibilita analisar se os estudantes perceberam ou não padrões e relações existentes na situação apresentada.

No apêndice B deste trabalho apresentamos a descrição da resolução de todos os estudantes. Essa descrição foi um momento importante da pesquisa e nos auxiliou a “enxergar” detalhes fundamentais.

Optamos por deixar essa descrição no apêndice, caso o leitor tenha interesse em conhecer o processo de resolução dos estudantes, não fazendo parte do texto porque não se relaciona diretamente com o nosso objetivo, ou seja, com a manifestação de características de pensamento algébrico.

3 TRAJETÓRIA METODOLÓGICA

Neste capítulo relataremos o caminho percorrido nesta investigação, assim como explicaremos algumas das opções realizadas por nós, com a intenção de atingir o objetivo *de investigar características do pensamento algébrico manifestadas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental I, que ainda não tiveram contato com a álgebra formal, de uma escola municipal da cidade de Apucarana – PR.*

Serão apresentados os procedimentos metodológicos que guiaram nossas escolhas e deram indicativos de direção, ou seja, a Análise de Conteúdo (BARDIN, 1977). Na sequência faremos uma apresentação do contexto em que obtivemos as informações, a escola participante, o projeto Observatório da Educação – Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática.

Este capítulo será dividido em duas seções:

3. 1 – Trajetória Metodológica de Pesquisa. Nessa seção apresentaremos a metodologia utilizada para realizar a fundamentação teórica desse trabalho;

3. 2 – Trajetória Metodológica de análise de dados. Nessa seção apresentaremos a metodologia utilizada para realizar a coleta dos dados, bem como o modo que realizamos as análises.

3.1 TRAJETÓRIA METODOLÓGICA DE PESQUISA

Tendo em mente que esta investigação tem como objetivo analisar a produção escrita de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental em busca de manifestações de características de pensamento algébrico, optou-se pela realização de uma investigação predominantemente qualitativa.

De acordo com Bogdan e Biklen (1982), uma pesquisa qualitativa tem como fonte direta dos dados o ambiente natural, onde o pesquisador é o principal instrumento para a pesquisa. Esse tipo de pesquisa é essencialmente descritivo e requer grande atenção para todas as informações relativas a ela, sejam relacionadas a pessoas, locais, contextos, entre outros.

Além dessas características, na pesquisa qualitativa o principal é o processo de pesquisar e a análise dos dados acontece de forma indutiva.

Em nossa investigação mantivemos contato direto com o ambiente natural, no caso a Escola Municipal José Brazil Camargo, para realizar o processo de obtenção dos dados.

O contato também foi direto com os participantes da pesquisa, os estudantes dessa instituição de ensino, uma vez que tiveram reuniões semanais na escola e a própria pesquisadora aplicou as questões. As informações, essencialmente descritivas, que serão analisadas, foram obtidas por meio das resoluções das questões.

Como dito anteriormente, as perguntas que regem essa investigação são: *o que caracteriza o pensamento algébrico segundo autores que pesquisam esse assunto? Os estudantes que nunca tiveram contato formal com conceitos e símbolos algébricos manifestam características de pensamento algébrico?*

Com a intenção de responder às nossas questões, foram aplicadas aos estudantes questões divulgadas pelo INEP nos documentos PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação e Modelo Teste Prova Brasil.

Antes de tentar responder à nossa pergunta, fomos à procura de atender a um dos nossos objetivos específicos, sendo esse realizar uma busca bibliográfica a respeito das características de pensamento algébrico[17], que se constituiu em uma análise documental.

De acordo com Caulley (*apud* LÜDKE; ANDRE, 1986 p.38), “A análise documental busca identificar informações fatuais nos documentos a partir de questões e hipóteses de interesse”, ou seja, a análise documental é um conjunto de operações que busca representar o conteúdo de um ou mais documentos de uma forma diferente dos originais, tendo como intenção facilitar o estudo e a consulta aos conceitos apresentados nos documentos originais, ou ainda uma possível união entre diferentes visões.

[17] Nossa busca a respeito de bibliografia sobre características de pensamento algébrico resultou no capítulo da fundamentação teórica desse trabalho.

> Enquanto tratamento da informação contida nos documentos acumulados, a análise documental tem por objetivo dar forma conveniente e representar de outro modo essa informação, por intermédio de procedimentos de transformação. O propósito a atingir e o armazenamento sob uma forma variável e a facilitação do acesso ao observador, de tal forma que este obtenha o máximo de informação (aspecto quantitativo), com o máximo de pertinência (aspecto qualitativo). A análise documental é, portanto, uma fase preliminar da constituição de um serviço de documentação ou de um banco de dados (BARDIN, 2004, p.51).

A análise documental permite a utilização de métodos distintos para a coleta de informações, o que possibilita a existência de diferentes perspectivas a respeito do mesmo fenômeno que está sendo estudado e se isso acontece o pesquisador pode realizar posteriormente comparações entre as informações e verificações.

Além das vantagens apresentadas no parágrafo anterior, a análise documental ainda possibilita a ampliação do entendimento de fenômenos contextualizados, a compreensão do desenvolvimento social e pode favorecer a observação do processo de desenvolvimento de um fenômeno ou situação.

De acordo com Ludke e Andre (1986), mesmo a análise documental sendo pouco explorada na área de educação, ela é uma técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos. Para esses autores, documentos são "[...] leis e regulamentos, normas, pareceres, cartas, memorandos, diários pessoais, autobiografias, jornais, revistas, discursos, roteiros de programas de rádio e televisão, até livros, estatísticas e arquivos escolares *(*LUDKE; ANDRE, 1986, p.38*).* No caso de nosso trabalho, nossos documentos são documentos oficiais relacionados a educação, capítulos de livros, artigos científicos, dissertações e teses e o que determinou essa escolha foi o problema de pesquisa, bem como nossos objetivos.

Ao utilizar a metodologia de análise documental é necessário definir o tipo de documento que será utilizado e essa escolha não deve acontecer de forma arbitrária, deve ser coerente com os objetivos que se quer alcançar (LUDKE; ANDRE, 1986). Neste trabalho definimos como documentos os documentos oficiais nacionais relacionados a educação, capítulos de livros, artigos científicos, dissertações e teses, pois por meio destes poderíamos compreender de forma satisfatória o que é o pensamento algébrico, suas características e importância para o processo de ensino e de aprendizagem da álgebra.

Depois de feita a seleção dos documentos, aconteceu a análise propriamente dita (LUDKE; ANDRE, 1986). Analisamos as informações apresentadas nos documentos selecionados, verificamos convergências e divergências, bem como a seleção de aspectos relevantes para o interesse da pesquisa. Para a realização da análise dos documentos, houve a leitura integral dos mesmos, a seleção do que era interessante para esse trabalho, o fichamento dos textos e, quando necessário, uma desconstrução e reconstrução.

Por fim, produzimos um texto sintetizando as informações e que pudesse ser utilizado para a realização das análises dos registros escritos dos estudantes. O próprio registro das informações, a organização das ideias e a exposição das mesmas são etapas importantes para a análise documental.

Ao longo da análise dos documentos, houve um processo de redução dos dados, pois partiu-se de um conjunto relativamente grande de informações e chegou-se a um conjunto possível de manipular e de estabelecer relações e obter conclusões.

Ao seguirmos os passos apresentados anteriormente, realizamos uma pesquisa teórica a respeito dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico, atendendo assim um dos nossos objetivos específicos. Por meio dessa pesquisa foi possível estabelecer e definir um mapa conceitual a respeito do que entendemos por características de pensamento algébrico neste trabalho. Este mapa nos ofereceu condições para realizar a análise dos registros escritos dos estudantes, em busca de características de pensamento algébrico e, assim, atingir outros dos nossos objetivos específicos.

Além disso, realizamos uma pesquisa com análise de documentos a respeito da Prova Brasil, mesmo sabendo que o estudo específico dessa avaliação não faz parte dos nossos objetivos. Fizemos essa opção devido às questões aplicadas terem sido retiradas de documentos relacionados a essa avaliação.

Neste estudo, a pesquisa documental foi utilizada para constituir nossa fundamentação teórica, ou seja, os estudos a respeito do pensamento algébrico e suas características. Essa fundamentação teórica posteriormente servirá para a realização das análises com relação às características de pensamento algébrico manifestadas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. Na sequência, apresentaremos a trajetória metodológica para a análise dos dados.

3.2 TRAJETÓRIA METODOLÓGICA DE ANÁLISE DE DADOS

A análise dos dados coletados é uma etapa muito importante para a pesquisa, sendo fundamental para uma boa investigação (FIORENTINI; LORENZATO, 2006). Tendo a intenção de atingir o objetivo desse trabalho, adotamos procedimentos à luz da Análise de Conteúdo para a realização da análise dos dados.

Fundamentados em nossos estudos, a Análise de Conteúdo nos pareceu adequada, entre outros motivos, por ter como objetivo a manipulação de mensagens, conteúdos e expressões vindas dos dados e por meio dessa manipulação evidenciar indicadores que permitam inferir além do que está na própria mensagem (BARDIN, 2004).

Essa metodologia de pesquisa é utilizada para descrever e interpretar o conteúdo de documentos e textos, que conduz a descrições sistemáticas, qualitativas ou quantitativas, auxiliando na reinterpretação das mensagens de modo a alcançar uma compreensão dos seus significados num nível superior ao de uma leitura comum por ser mais aprofundada nos fenômenos que se propõe a investigar (MORAES, 1999).

Para Bardin (1977, p.31), a Análise de Conteúdo além de um instrumento é um “leque de apetrechos; ou, com maior rigor, um único instrumento, mas marcado por uma grande disparidade de formas e adaptável a um campo de aplicação muito vasto: as comunicações”.

A respeito das informações que serão analisadas ou, dos dados da Análise de Conteúdo, Moraes (1999, p.4) relata:

> A matéria-prima [...] pode constituir-se de qualquer material oriundo de comunicação verbal ou não verbal, como cartas, cartazes, jornais, revistas, informes, livros, relatos autobiográficos, discos, gravações, entrevistas, diários pessoais, filmes, fotografias, vídeos etc. Contudo, os dados advindos dessas diversificadas fontes chegam ao investigador em estado bruto, necessitando, então, ser processados para, dessa maneira, facilitar o trabalho de compreensão, interpretação e inferência a que aspira a análise de conteúdo.

Ao utilizar essa metodologia, segundo Bardin (2004) não é possível que o investigador realize uma leitura dos dados totalmente neutra, uma vez que a interpretação destes é pessoal e toda leitura se constitui em uma interpretação.

Para a realização de uma boa leitura do texto final em que serão apresentadas as inferências e análises, é importante levar em consideração o contexto no qual foram obtidos e analisados os dados e as formas de codificação e transmissão da mensagem, mesmo sabendo que durante a reconstrução do contexto não é possível incluir todas as condições que coexistem, precedem ou sucedem a mensagem, no tempo e no espaço.

A Análise de Conteúdo é dividida em três etapas (BARDIN, 2004): (I) a pré--análise; (II) a exploração do material; (III) o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação[18].

A primeira etapa, a pré-análise, tem três incumbências: a escolha dos documentos que serão submetidos à análise e, ao fazer isso, delimita-se o *corpus* da pesquisa; a formulação das hipóteses e dos objetivos; e, a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final (BARDIN, 2004).

A seleção do *corpus* é precedida de uma leitura de todo o material. Essa leitura é chamada de leitura flutuante e no momento dessa leitura acontece o primeiro contato com todo o material e surgem as impressões iniciais e orientações para o caminho a ser seguido.

A segunda etapa é a fase de exploração do material, que se constitui de operações de codificação, recortes (escolha das unidades de registro), enumeração (escolha de regras de contagem) e da categorização. Bardin (2004) afirma que tratar o material é codificar, e codificar corresponde a uma transformação, que ocorre de acordo com regras precisas. Essa transformação acontece por recorte, agregação em unidades de registro[19] e enumeração, permitindo uma representação do conteúdo, de modo que este seja de fácil compreensão para o investigador.

A categorização é uma ação classificatória de elementos constituintes de um mesmo conjunto, que ocorre por: “Diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o gênero, com os critérios previamente definidos” (BARDIN, 1977, p.117), que tem por objetivo fornecer uma representação simplificada dos dados brutos. O critério estabelecido para a definição de uma categoria pode ser semântico, sintático, léxico ou expressivo.

Na terceira etapa, tratamento dos resultados obtidos e interpretação, os resultados recebem um tratamento analítico e cabe ao pesquisador expressar as principais ideias de sua investigação emergidas das análises durante o período da in-

[18] Relataremos a respeito de como se deu essas etapas em nossa pesquisa na seção seguinte.
[19] As unidades de registro correspondem aos segmentos do conteúdo da mensagem, que permitem descrições exatas das características pertinentes ao conteúdo expresso no texto.

vestigação. É neste momento que o investigador escreve um texto organizando suas ideias e expondo as descobertas, de uma maneira lógica e coerente.

Considerando que nosso trabalho é essencialmente qualitativo, para análise dos dados, optamos por utilizar a análise temática de um texto (BARDIN, 2004).

A análise temática de um texto é uma das distintas modalidades de Análise de Conteúdo e essa é apropriada para pesquisas como a nossa, ou seja, pesquisas qualitativas, que não apresentam uma parte quantitativa expressiva.

De acordo com Minayo (2007), a análise temática consiste em definir núcleos de sentido sendo que estes núcleos devem ter significado relativo ao objetivo da pesquisa. Ainda de acordo com a mesma autora (MINAYO, 2007), a análise temática ocorre em três fases: *pré-análise* que é a etapa de organização do que vai ser analisado, é a etapa da leitura flutuante; *exploração do material*, momento de codificação do material, recorte dos dados e classificações e organização dos dados em categorias; e, por último, *tratamento dos resultados*, em que os dados são evidenciados e as análises são expostas[20].

Seguindo os passos da análise temática, inicialmente realizou-se uma leitura flutuante dos dados coletados, com a intenção de melhor conhecê-los. Cada um dos registros escritos dos estudantes referentes às questões constituiu nossas unidades de registros.

Após a leitura, as unidades de registros foram separadas em unidades de contexto, de acordo com o objetivo deste trabalho, ou seja, *investigar características do pensamento algébrico manifestadas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental I, que ainda não tiveram contato com a álgebra formal, de uma escola municipal da cidade de Apucarana – PR.*

Nossas unidades de contexto são unidades prévias, pois foram definidas por meio de um processo de "vai e vem" muito comum na análise de conteúdo, tendo como base o mapa conceitual[21] que apresenta as características de pensamento algébrico que queremos detectar na análise dos dados coletados. Devido às unidades de contexto prévias serem segmentadas, foi possível organizá-las em Unidades de Registro Prévia.

[20] Essas etapas são similares às da própria Análise de Conteúdo, visto que a análise temática é uma das modalidades da Análise de Conteúdo.

[21] O mapa conceitual foi elaborado tendo como base a fundamentação teórica desse trabalho, ou seja, a pesquisa documental.

Vejamos no quadro abaixo as unidades de contexto prévias e unidades de registro prévias dessa pesquisa.

Quadro 16 – Unidades de Contexto Prévias e Unidades de Registro Prévias.

Unidade de Contexto Prévia	Unidade de Registro Prévia
Estabelecimento de relações	Relação funcional
	Relação de equivalência
	Relação envolvendo regularidades
	Relação envolvendo a percepção de aspectos invariantes
	Relação envolvendo comparação entre grandezas
Formulação de Conjecturas	Validação de ideias
Transição entre notações	Interpretação de dados representados em figuras, tabelas ou gráficos
	Utilização de diferentes notações para representar o mesmo elemento
Generalização	Generalização de padrões
	Generalização de relações funcionais
	Generalização por meio da utilização da aritmética

Fonte: do autor (2014)

Após a definição de nossas unidades de contexto prévia e unidade de registro prévia, iniciou-se um processo de fragmentação das unidades de registro dessa pesquisa, ou seja, dos registros escritos dos estudantes, com a intenção de verificar e alocá-los nas unidades de contexto apresentadas anteriormente.

Este processo envolveu profunda interpretação das unidades de registro. Essa interpretação deu-se tendo como base a análise documental que resultou em nossa fundamentação teórica.

Ao longo das análises, buscamos verificar a existência de características de pensamento algébrico elencadas no mapa conceitual, ou, ainda, a presença das unidades de contexto, em cada um dos registros escritos dos estudantes. Posteriormente as análises ocorreram combinações entre elas com a intenção de nos auxiliar no processo de busca de parte da nossa questão norteadora.

Apresentaremos, a seguir, o caminho percorrido nessa pesquisa, seu contexto e nossas escolhas.

3.3 CONTEXTO DA PESQUISA E NOSSAS DECISÕES

Os dados que compõem essa investigação foram coletados na Escola Municipal José Brazil Camargo, localizada na cidade de Apucarana – PR. Os participantes são estudantes do a única turma do 5º ano dessa instituição, sendo uma turma composta por 38 estudante. Tiverem aplicações nas quais nem todos os estudantes estavam presentes, ou então, tiveram que se ausentar por alguns instantes.

Os estudantes que participaram dessa investigação tinham no período das aplicações idades entre 9 e 12 anos e a maioria deles estava fazendo pela primeira vez o 5 ano, apenas dois dos estudantes estavam realizando esse ano pela segunda vez.

A Escola Municipal José Brazil Camargo participa do Projeto Observatório da Educação – CAPES – Educação Matemática de professores que ensinam Matemática[22], projeto no qual a autora deste trabalho também faz parte.

O projeto Observatório é desenvolvido na Universidade Estadual de Londrina – UEL e aplicado em escolas da Educação Básica das cidades de Londrina, Apucarana e Paranavaí e tem por objetivo promover a produção acadêmica relativa à Formação de Professores que ensinam Matemática e colaborar para a elevação da média do IDEB nas instituições participantes, estabelecer/fortalecer uma interação entre pesquisadores da área de Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PECEM, fomentar, disseminar e desenvolver metodologias de prática de ensino significativas, para enfrentamento dos problemas na área de Matemática, sendo estes objetivos facilmente verificáveis no Edital nº 38/2010/CAPES/INEP:

[22] Como dito anteriormente, a pesquisadora faz parte do projeto observatório da Educação e por isso optou por realizar a pesquisa na Escola Municipal José Brazil Camargo.

> Fortalecer o diálogo entre pesquisadores da área de Educação Matemática do PECEM, estudantes de mestrado e de doutorado do PECEM, estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UEL e professores que ensinam Matemática de Escolas da Rede Pública de Ensino do Paraná, por meio da formação de grupos de trabalho que desenvolvam atividades acadêmicas voltadas para o diálogo qualificado entre esses dois níveis de escolaridade.
> Investigar aspectos relativos à formação continuada desencadeados pelo diálogo entre os participantes para adoção de uma agenda de trabalho colaborativo e constituição de uma Comunidade de Prática de Professores que ensinam Matemática formada por pesquisadores, futuros professores de Matemática e professores de Matemática que atuam na Educação Básica.
> Investigar contextos em que os participantes desenvolvam sua capacidade para analisar, explicar seu raciocínio, e comunicar suas ideias matemáticas enquanto propõem, formulam, resolvem e interpretam problemas em uma variedade de situações.
> Propiciar um campo de investigação e formação profissional para os estudantes do PECEM e do curso de Licenciatura em Matemática, baseado na articulação entre teoria, prática docente e investigação, de modo a gerar uma reflexão sobre conteúdos matemáticos e, do modo como estes conteúdos se transformam em ensino.
> Fomentar, disseminar e desenvolver metodologias de prática de ensino significativas, para enfrentamento dos problemas na área de Matemática (CYRINO, 2010, p.3).

Com a intenção de atingir o objetivo do projeto, semanalmente acontecem encontros com duração de aproximadamente 3 horas entre as professoras da escola, mestrandos e uma professora doutora da UEL. Nesses encontros as professoras da escola resolvem questões que possivelmente estimulam o desenvolvimento do pensamento algébrico e desencadeiam o processo de negociação de significados por meio de resoluções de problemas. Frequentemente as questões eram retiradas de avaliações como a Prova Brasil, PISA e SAEB.

A escola José Brazil Camargo oferece educação integral, assim os estudantes permanecem na escola no período da manhã e tarde, iniciando suas atividades escolares às 7h30min e finalizando-as por volta das 16h30mim. Durante este período os estudantes têm dois intervalos de 20 minutos, um no período da manhã e outro no período da tarde e o horário de almoço das 12h às 13h.

Para utilizar durante a pesquisa a produção escrita dos estudantes, os pais dos mesmos assinaram um termo de autorização, coletado pela escola e evidenciado no apêndice A.

Antes de haver um objetivo definido para essa pesquisa, existia uma vontade de pesquisar manifestações de pensamento algébrico em estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental I. Ao fazer parte do Projeto Observatório da Educação – CAPES – Educação Matemática de professores que ensinam Matemática verificamos que um dos objetivos deste projeto era o aumento do IDEB nas escolas e, uma forma de conseguir este aumento é por meio do melhor desenvolvimento dos estudantes na Prova Brasil.

Nos primeiros encontros com as professoras que ministram aulas na Escola Municipal José Brazil Camargo, elas manifestaram o interesse de saber como os seus estudantes lidam com questões da Prova Brasil e isso nos incentivou a unir nossa vontade de estudar manifestações de pensamento algébrico com o interesse das professoras, por isso decidimos verificar manifestações de características de pensamento algébrico em questões retiradas de documentos relativos a essa avaliação.

Para poder realizar essa união, optamos por aplicar aos estudantes e analisar suas produções escritas relativas a questões retiradas dos documentos PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação e Modelo Teste Prova Brasil.

O documento PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação, tem como objetivo ampliar o conhecimento de professores, gestores e toda a comunidade escolar a respeito do SAEB e Prova Brasil, assim como a importância dessa avaliação. Já o Modelo Teste Prova Brasil é um documento em que as questões mantêm as mesmas características das questões da Prova Brasil.

A escolha pelas questões deu-se apoiada pela fundamentação teórica, pois essas questões possivelmente nos ofereceriam condições para analisar a manifestação de características de pensamento algébrico. A quantidade escolhida de questões para a aplicação (12 questões) deve-se à nossa avaliação de que com essa quantidade seria possível analisar a produção escrita dos estudantes no tempo previsto para a realização desta pesquisa e, também, teríamos material suficiente para atingir nosso objetivo. As questões analisadas nessa pesquisa serão identificadas como Q1 a primeira questão aplicada, Q2 a segunda questão aplicada, Q3 a terceira questão aplicada, até Q12 que é última questão aplicada aos estudantes.

Coerentemente com o objetivo dessa pesquisa, tendo em mente que o mais importante para este trabalho é o processo de resolução e não o resultado final, optamos por retirar as alternativas de todas as questões e solicitar que os estudantes explicassem quais estratégias e procedimentos adotaram para resolvê--las.

Depois de realizada a escolha das questões que seriam utilizadas na pesquisa, passamos a analisar qual seria o ano mais adequado para aplicá-las e optamos pelo 5º ano do Ensino Fundamental I.

A escolha por realizar a pesquisa com os estudantes desse ano deu-se porque é nessa etapa escolar que acontece a aplicação da Prova Brasil, além disso, acreditamos que eles têm habilidades de leitura necessárias para ler as questões e possivelmente conhecem mais procedimentos matemáticos que os dos anos anteriores. Consideramos as habilidades de leitura importantes para que os estudantes pudessem resolver as questões sem nenhuma interferência da pesquisadora durante a resolução.

Após a escolha das questões, a adaptação e a escolha da turma que participaria da pesquisa, iniciou-se a aplicação das mesmas, ou seja, a obtenção das informações que seriam analisadas. Na sequência, realizaremos um relato de como ocorreram as aplicações.

Vale lembrar que a pesquisadora apenas se encontrou com os estudantes do 5º ano, participantes dessa pesquisa, no momento da aplicação, pois em grande parte dos encontros realizou atividades com as professoras que participam do projeto, juntamente com uma professora doutora da UEL e com dois mestrandos da mesma instituição, sendo assim, a pesquisadora não tem uma relação direta com os estudantes que fizeram parte da pesquisa.

Os estudantes foram orientados a resolverem as questões por seus próprios meios, sem interferência da pesquisadora, da professora e de seus colegas de sala.

Com a intenção de estabelecer um ambiente de confiança entre os participantes da pesquisa e a pesquisadora, foram dadas aos estudantes todas as explicações, quais os tipos de questões que eles iriam resolver, por qual motivo estavam resolvendo-as, como essas questões seriam corrigidas e interpretadas, bem como a importância que seria dada ao processo de resolução e não apenas a resposta final por eles apresentada.

Depois de prestadas as devidas explicações e estando os estudantes de acordo, iniciou-se a aplicação, realizada no dia 23/04/2013, em que estavam presentes 35 dos 38 estudantes que compõem a turma do 5º ano. Para manter o anonimato dos estudantes envolvidos nos processos dessa pesquisa, atribuímos a eles um código, que foi utilizado desde a primeira aplicação até a última, seguindo a ordem de entrega das atividades no primeiro dia de aplicação, codificamos o primeiro estudante a entregar as questões respondidas como E1, o segundo estudante a entregar as questões por E2, o terceiro por E3 e assim por diante, até E38.

A aplicação das doze questões que foram descritas anteriormente[23], ocorreram nas seguintes datas: 23/04/2013, 07/05/2013, 12/11/2013, 19/11/2013[24].

Após as aplicações das questões e com os registros escritos em mãos, iniciou-se, de acordo com Bardin (2004), a etapa da pré-análise. Nessa etapa realizou-se uma leitura flutuante, sendo retiradas as primeiras informações. Durante essa leitura ficou claro para a pesquisadora que todos os registros escritos dos estudantes iriam compor o *corpus* para a pesquisa. Em concordância com a análise temática de um texto, os registros escritos dos estudantes compõem nossas unidades de registro.

Depois de conhecer todo o material, por meio da leitura flutuante, dotados de nossas primeiras impressões, conjecturas e ideias, iniciamos a fase denominada por Bardin (2004) como exploração do material, uma fase de análise.

Na exploração do material buscamos verificar e descrever quais foram as estratégias e procedimentos utilizados pelos estudantes para resolver cada uma das questões, para poder "enxergar" melhor algumas características das resoluções[25].

Essa descrição nos ajudou a ter uma visão global das resoluções e nos auxiliou na busca de características de pensamento algébrico nos registros para, assim, identificar nas produções escritas a manifestação de características de pensamento algébrico, a fim de responder nossas questões de pesquisa: *O que caracteriza o pensamento algébrico segundo autores que pesquisam esse assunto? Os estudantes que nunca tiveram contato formal com conceitos e símbolos algébricos manifestam características de pensamento algébrico?*

Feitas as descrições das resoluções voltamos a nossa atenção para o objetivo da pesquisa, ou seja, começamos a buscar manifestações de características de pensamento algébrico nas unidades de registro.

Essa busca se deu orientada por nossas unidades de contexto, que são unidades definidas *a priori*, tendo como base a fundamentação teórica dessa pesquisa.

---

[23] Uma apresentação das questões se encontra a partir da página 47.
[24] Uma exposição detalhada da aplicação das questões encontra-se no Apêndice B.
[25] Uma descrição das estratégias e métodos utilizados pelos estudantes para resolver as questões encontra-se no Apêndice C.

Após realizar a inferência de quais unidades de registro pertenciam às unidades de contexto, ocorreu um aprofundamento em nossa pesquisa, pois iniciamos o processo de verificação a respeito das unidades de registro prévias.

Essa verificação deu-se da seguinte maneira: sabendo quais registros escritos dos estudantes pertenciam às unidades de contexto, focamos nos detalhes dos registros para indicar a adequação com relação às unidades de registro prévias. Esse foi um processo trabalhoso, pois por vezes realizamos muitas idas e vindas para poder inferir se o registro dos estudantes pertencia a uma ou a outra unidade de registro Prévia.

Essas idas e vindas são características das pesquisas qualitativas que utilizam a Análise de Conteúdo (BARDIN, 2004), elas fazem parte do processo de pesquisar e, no caso dessa pesquisa, no processo de formação da pesquisadora.

Após concluir o processo de organização das unidades de registro nas unidades de contexto e nas unidades de registro prévias, detectamos que as categorias deste trabalho são as unidades de registro prévias que tiveram ao menos um registro escrito dos estudantes com o elemento caracterizador do pensamento algébrico relativo as unidades.

Feita a observação a respeito das categorias, começamos a terceira fase da Análise de Conteúdo (BARDIN, 2004), ou seja, o tratamento dos resultados, a inferência e interpretação dos mesmos. Nessa fase buscamos escrever um texto explicando nossas análises e o que obtivemos com as mesmas, o que pudemos observar nos dados, bem como algumas de nossas interpretações a respeito dos resultados.

No próximo capítulo apresentaremos a análise das características de pensamento algébrico manifestadas pelos estudantes que ocorreram durante a fase de exploração do material, bem como o texto desenvolvido por meio do tratamento dos resultados, inferências e interpretações.

4 ANÁLISE DE CARACTERÍSTICAS DE PENSAMENTO ALGÉBRICO MANIFESTADAS PELOS ESTUDANTES

Neste capítulo apresentaremos nossas análises, interpretações e inferências a respeito da produção escrita dos participantes dessa pesquisa com relação às características de pensamento algébrico manifestadas por eles ao resolverem questões retiradas de documentos nacionais relacionados à Prova Brasil, sendo estes, PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação e Modelo Teste Prova Brasil.

Em concordância com as fases da análise de conteúdo (BARDIN, 2004), nesse momento evidenciaremos os resultados da exploração *corpus*. Como dito anteriormente, o *corpus* dessa pesquisa são todos os registros escritos dos estudantes e ele foi desconstruído e reorganizado em função das unidades de contexto, ou, ainda, as características de pensamento algébrico foram detectadas tendo em mente essas unidades.

Cabe destacar que não inferimos manifestação de pensamento algébrico diferente das unidades de contexto definidas anteriormente à exploração das unidades de registros que compõem nosso *corpus*.

Relembramos que nessa pesquisa as unidades de registros são os registros escritos de cada um dos estudantes em cada uma das questões.

Com a intenção de evitar possíveis confusões, a partir de agora nos referimos às unidades de registro apenas como registros escritos.

Para realizar as análises, organizamos e agrupamos os registros escritos dos estudantes de acordo com nossas inferências a respeito de manifestações de características de pensamento algébrico. Estes agrupamentos se deram a partir da exploração do material, em concordância com nossas unidades de análises.

Na seção 5.1 deste capítulo, apresentaremos a organização dos registros escritos de acordo com as unidades de contexto desse trabalho, bem como algumas de nossas inferências e interpretações.

Na seção 5.2 evidenciaremos as categorias que surgiram a partir das unidades de registro, a fim de sintetizar nossos dados, bem como nossas inferências e conclusões.

4.1 NOSSAS ANÁLISES

As produções escritas dos estudantes que manifestaram características de pensamento algébrico, de acordo com o nosso referencial teórico e com nossas unidades de análise, foram organizadas e, posteriormente, descrevemos cada grupo, compondo assim nossas unidades de registro prévias, por nós detectadas.

Como nossas unidades foram formadas tendo em vista a manifestação do pensamento algébrico, optamos por evidenciar as análises e interpretações em concomitância com a descrição destas.

Consideramos que os estudantes apresentaram características de pensamento algébrico em seus registros escritos se apresentaram, envolveram, utilizaram ou manifestaram as ações expostas no capítulo I seção 1.2, no mapa conceitual, que se encontra na página 38 deste trabalho.

Cabe ressaltar ainda que consideramos como elementos caracterizadores do pensamento algébrico o estabelecimento de relações de equivalências, com regularidades e percepções de aspectos invariantes; comparação entre grandezas; formulação de conjecturas e validação das mesmas; transição entre notações para representar uma mesma ideia matemática; a interpretação de dados representados em figura, tabelas e gráficos; indícios de generalização, seja de padrões, ou de relações, como podemos perceber tanto pelo mapa conceitual quanto pelas unidades de contexto prévias e unidades de registro prévias, apresentadas no quadro 16.

O pensamento algébrico pode ser manifestado por meio do uso da aritmética, ao evidenciar compreensão de propriedades matemáticas, como a comutatividade, ordenação, classificação, valor posicional dos algarismos e agrupamentos, com a utilização da simbologia própria da álgebra, mas também pode ser manifestado com o auxílio da simbologia aritmética, linguagem natural ou informal.

Os estudantes que participaram dessa pesquisa não tiveram contato com a linguagem algébrica formal nas aulas, sendo assim, utilizaram a linguagem natural para explicar as estratégias e procedimentos utilizados nas resoluções, ou, então, uma simbologia própria, e isso, por diversas vezes, não os impediu de manifestarem características de pensamento algébrico. Este fato corrobora com Kieran (2004), que afirma que o pensamento algébrico, por vezes, pode ser manifestado sem a utilização de uma linguagem simbólica.

Por meio das análises interpretativas realizadas observou-se que mesmo em algumas resoluções que não apresentaram a resposta correta houve manifestação de pensamento algébrico, visto que este pensamento é envolto do processo de aprendizagem, das relações estabelecidas e do modo como o sujeito pensa a respeito de algo.

A partir de agora apresentaremos as manifestações de características de pensamento algébrico encontradas nos registros escritos dos estudantes, de acordo com nossas unidades de contexto. Relembrando que o código utilizado para representar as questões é Q1, Q2, Q3,..., Q12 de acordo com a ordem de aplicação das questões e o código utilizado para indicar os estudantes é E1, E2, E3,..., E38 que foi definido seguindo a ordem de entrega das questões resolvidas no primeiro dia de aplicação.

Unidade de contexto prévia: estabelecimento de relações

Baseados em nossa fundamentação teórica podemos dizer que o estabelecimento de relações é um indício de pensamento algébrico e quando os estudantes estabelecem uma relação entre números, isso pode ser uma preparação para a transição da aritmética para a álgebra.

Inferir que houve manifestação de pensamento algébrico por meio do estabelecimento de relação, se no registro escrito dos mesmos pudermos perceber que eles apresentaram algum tipo de relação entre grandezas, exploram correspondência entre quantidades de relações recursivas, desenvolvendo regra para descrever relações, identificam ou descrevem padrões numéricos e geométricos baseados na identificação de regularidades numéricas.

A unidade de contexto prévia estabelecimento de relações pode ser dividida nas unidades de registro prévias, sendo elas: relação funcional; relação de equivalência (ou igualdade); relação envolvendo regularidades; relação envolvendo aspectos invariantes; relação envolvendo comparação entre grandezas.

Apresentaremos a seguir exemplos de unidades de registro que, de acordo com nosso referencial teórico, nossas análises e inferências, são representativas dessa unidade de contexto prévia e das unidades de registro prévias.

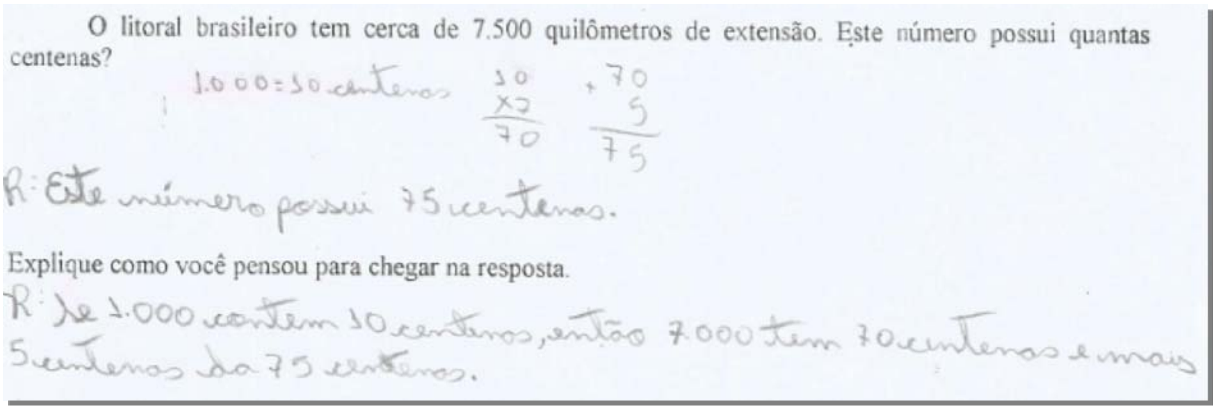
Relação Funcional

A relação funcional pode ocorrer quando, entre outros, o estudante é capaz de explorar correspondências, seja entre grandezas, quantidades, ou então por meio de relações recursivas, desenvolvendo uma regra para descrever o que foi capaz de relacionar e expressando essa regra de acordo com seus próprios meios.

Além disso, a relação funcional está relacionada com a ideia de estabelecimento de uma função, ou seja, lidar com situações que poderiam ser expressas por meio de uma lei de formação.

Ao longo da análise, observamos que os estudantes E1, E3, E19, E20 e E26 manifestaram indícios de pensamento algébrico em seus registros escritos relativos a Q2, que são relativos ao estabelecimento de uma relação funcional. Vejamos alguns exemplos.

Figura 2 – Registro escrito do estudante E1 – Q2


O litoral brasileiro tem cerca de 7.500 quilômetros de extensão. Este número possui quantas centenas?

1.000 = 10 centenas

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 7 \\ \hline 70 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 70 \\ + \ 5 \\ \hline 75 \end{array}$$

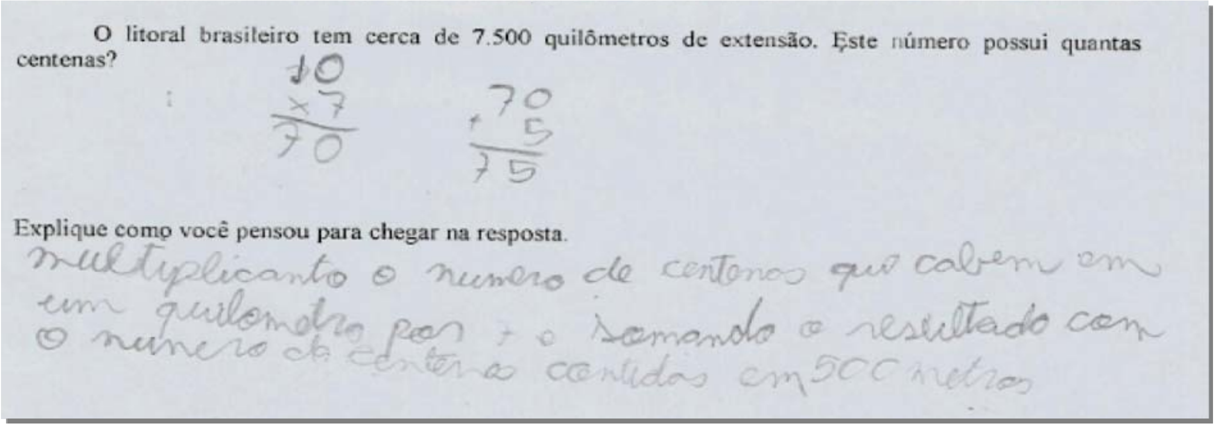
R: Este número possui 75 centenas.

Explique como você pensou para chegar na resposta.

R: Se 1.000 contem 10 centenas, então 7.000 tem 70 centenas e mais 5 centenas da 75 centenas.

Fonte: dados coletados.

Figura 3 – Registro escrito do estudante E26 – Q2


O litoral brasileiro tem cerca de 7.500 quilômetros de extensão. Este número possui quantas centenas?

10
×7
70

70
+5
75

Explique como você pensou para chegar na resposta.

multiplicanto o numero de centenos que cabem em um quilometro por 7 e somando o resultado com o numero de centenas contidas em 500 metros

Fonte: dados coletados.

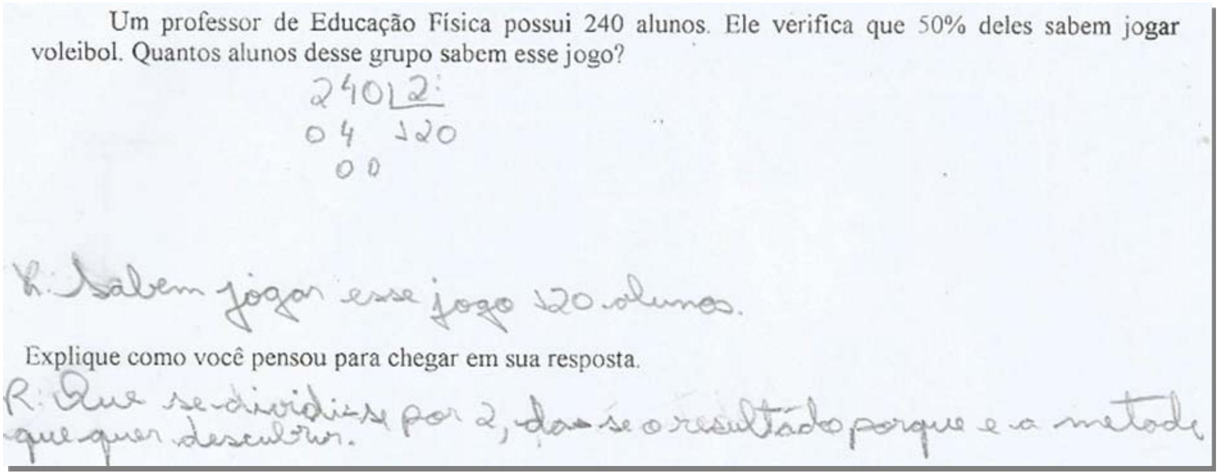
Os estudantes E1 e E26, por meio de suas resoluções evidenciaram compreender que 1.000 corresponde a 10 centenas e a partir desta compreensão estabeleceram uma relação funcional entre o milhar e o menor milhar inteiro do numeral apresentado no enunciado, no caso, 7.000. Podemos inferir que essa relação funcional associou a quantidade de milhares com a quantidade de centenas que o compõe.

É possível perceber, por meio de suas justificativas, que estes estudantes compreenderam que poderiam reescrever o número 7.500 como 7.000+500, e ao realizar essa decomposição evidenciaram compreensão de propriedades aritméticas, que apoiado em nosso referencial teórico, indica indícios de pensamento algébrico.

Os registros escritos dos estudantes E3, E19 e E20 não foram apresentados devido sua similaridade com os de E1 e E26.

Além desses estudantes, outros estabeleceram relações funcionais. Ao analisar os registros escritos dos estudantes, observamos que E1, E3, E4, E11, E19, E26, E30 evidenciaram indícios de pensamento algébrico ao estabelecerem uma relação funcional em Q9. Devido à semelhança entre a resolução dos estudantes citados anteriormente, iremos expor apenas alguns desses registros escritos.

Figura 4 – Registro escrito do estudante E1 – Q9



Um professor de Educação Física possui 240 alunos. Ele verifica que 50% deles sabem jogar voleibol. Quantos alunos desse grupo sabem esse jogo?

240 | 2
04 120
00

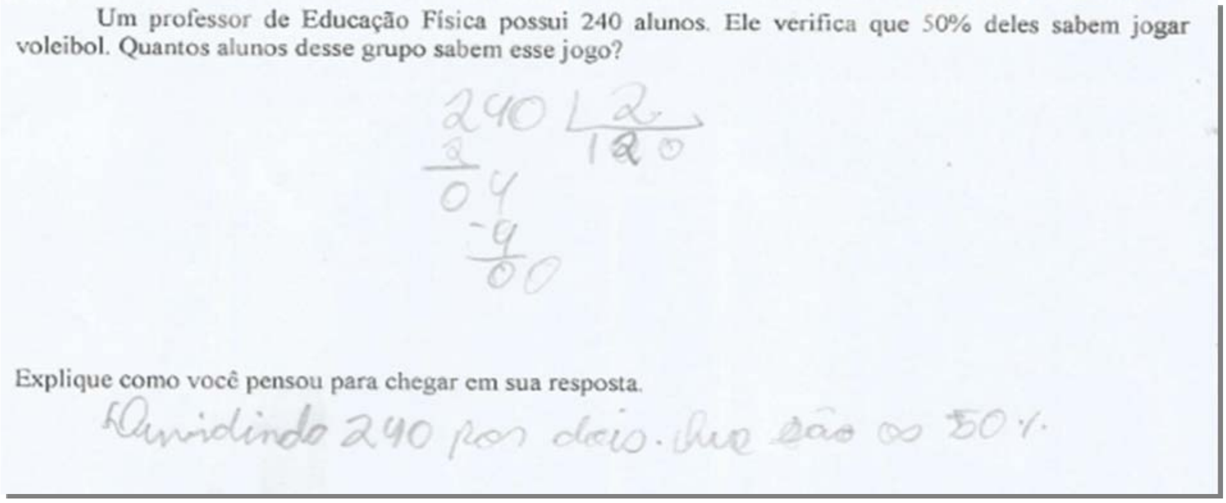
R: Sabem jogar esse jogo 120 alunos.

Explique como você pensou para chegar em sua resposta.

R: Que se dividir por 2, dá-se o resultado porque é a metade que quer descobrir.

Fonte: dados coletados.

Figura 5 – Registro escrito do estudante E26 – Q9



Um professor de Educação Física possui 240 alunos. Ele verifica que 50% deles sabem jogar voleibol. Quantos alunos desse grupo sabem esse jogo?

240 | 2
-2 120
04
-4
00

Explique como você pensou para chegar em sua resposta.

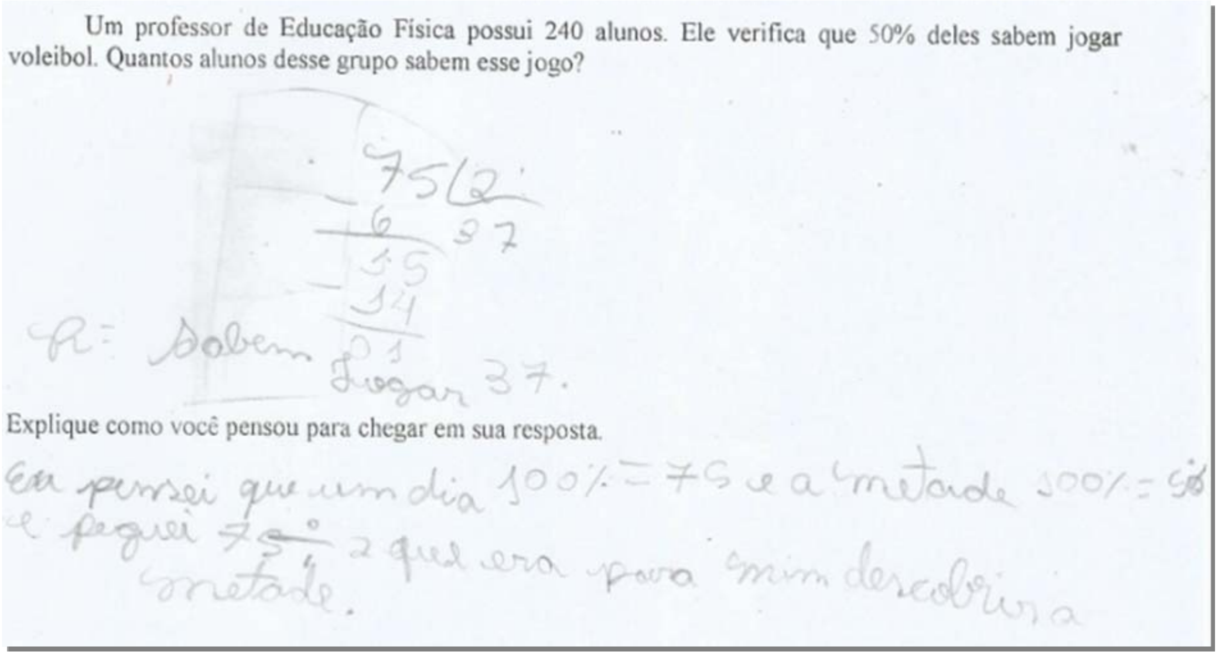
R: Dividindo 240 por dois. Que são os 50%.

Fonte: dados coletados.

Como podemos perceber os estudantes E1 e E26 optaram por dividir a quantidade de estudantes por dois para assim obter a quantidade de estudantes que representam 50% da turma. Ao fazer isso, esses estudantes estabeleceram uma relação funcional, visto que eles relacionaram o total dos alunos a 100% e como era solicitado 50% do total, que é a metade de 100%, então dividiram a quantidade de estudantes por dois.

A mesma estratégia utilizada pelos estudantes E1, E3, E11, E19, E26, E30 e executada de modo correto, foi adotada pelo estudante E4.

Figura 6 – Registro escrito do estudante E4 – Q9


Um professor de Educação Física possui 240 alunos. Ele verifica que 50% deles sabem jogar voleibol. Quantos alunos desse grupo sabem esse jogo?

75 | 2
-6 37
15
-14
01

R: Sabem jogar 37.

Explique como você pensou para chegar em sua resposta.

Eu pensei que um dia 100% = 75 e a metade 100% = 50 e peguei 75 ÷ 2 que era para mim descobrir a metade.

Fonte: dados coletados.

O estudante E4 utilizou um valor que não é apresentado no enunciado do problema, possivelmente por distração, mas por meio de sua justificativa é possível perceber que ele estabeleceu a mesma relação funcional de E1 e E26 entre o total e a metade, explorando, assim, correspondências entre quantidades, desenvolveu uma regra e descreveu tal relação.

Mesmo o estudante E4 não tendo apresentado a resposta esperada é possível afirmar que ele apresentou as mesmas características de pensamento algébrico que os estudantes citados anteriormente.

Relação de equivalência (ou igualdade)

Nessa pesquisa compreendemos a relação de equivalência ou relação de igualdade como sendo a exploração entre a igualdade dos termos de uma expressão, ou ainda, a exploração do papel algébrico do sinal de “=”, ou da ideia representada por esse símbolo.

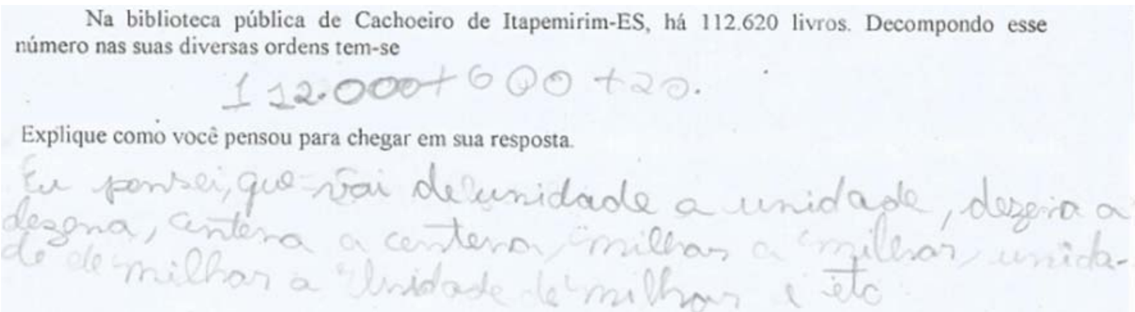
Nos registros escritos dos estudantes E1, E3, E4, E6, E8, E15, E16, E20, E26, E30, E31 e E34 relacionados a Q4, inferimos a manifestação de características de pensamento algébrico por meio do estabelecimento de relação de equivalência. Os estudantes que realizaram uma decomposição, seja essa rotineira, nas diversas ordens numéricas, ou não rotineira, envolveram e demonstraram compreensão de propriedades aritméticas como a ordenação e o agrupamento e também estabeleceram uma relação de igualdade entre o número e a soma das parcelas da decomposição que realizaram.

Ao realizar uma decomposição os estudantes E1, E3, E4, E6, E8, E15, E16, E20, E26, E30, E31 e E34, evidenciam a produção de significado com relação a números e operações aritméticas, considerando assim estes números e operações, segundo as propriedades do sistema decimal de numeração, e estabelecem uma relação de igualdade entre expressões numéricas. De fato, esses estudantes manifestaram em seus registros escritos relações de igualdade ao associar o numeral 112.620 à sua decomposição.

Cabe destacar que seria interessante verificar como esses estudantes lidam com números em bases diferentes da base 10, pois assim, teríamos maiores indícios a respeito da compreensão das propriedades das bases numéricas.

Vejamos as figuras 7 e 8 e analisemos as manifestações de pensamento algébrico.

Figura 7 – Registro escrito do estudante E4 – Q4


Na biblioteca pública de Cachoeiro de Itapemirim-ES, há 112.620 livros. Decompondo esse número nas suas diversas ordens tem-se

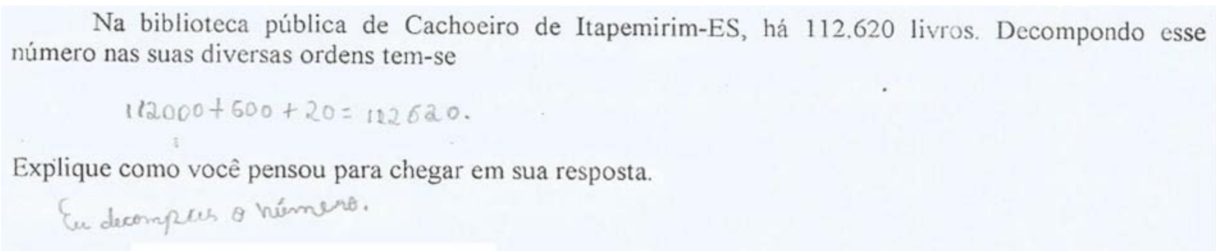
112.000+600+20.

Explique como você pensou para chegar em sua resposta.

Eu pensei, que vai de unidade a unidade, dezena a dezena, centena a centena, milhar a milhar, unidade de milhar a unidade de milhar e etc

Fonte: dados coletados.

Figura 8 – Registro escrito do estudante E16 – Q4


Na biblioteca pública de Cachoeiro de Itapemirim-ES, há 112.620 livros. Decompondo esse número nas suas diversas ordens tem-se

112000+600+20= 112620.

Explique como você pensou para chegar em sua resposta.

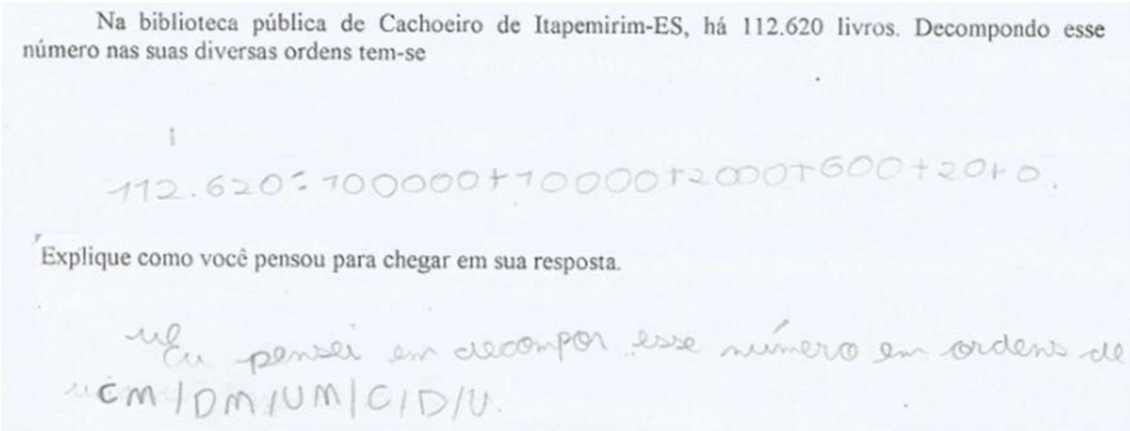
Eu decompus o número.

Fonte: dados coletados.

Ao realizar uma decomposição não rotineira os estudantes E4 e E16 evidenciaram compreensão de propriedades matemáticas, e estabeleceram relação de igualdade, ao perceberem que o número 112.620 pode ser escrito como a soma das parcelas 112000+600+20, ou seja, 112.620 é igual a 112000+600+20.

Os estudantes E1, E6, E8, E15, E20, E26, E30, E31 e E34 realizaram a decomposição do número 112.620 em suas diversas ordens, de modo similar e, por isso, apresentaremos apenas os registros dos estudantes E3 e E8.

Figura 9 – Registro escrito do estudante E3 – Q4


Na biblioteca pública de Cachoeiro de Itapemirim-ES, há 112.620 livros. Decompondo esse número nas suas diversas ordens tem-se

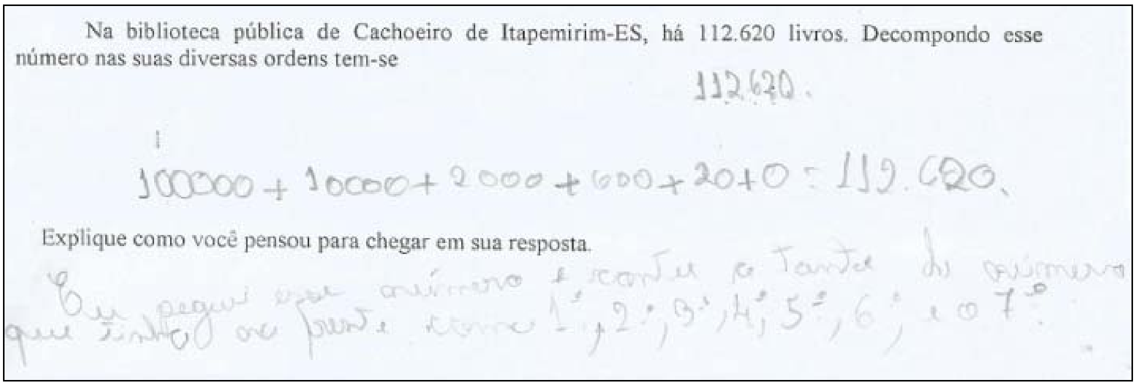
112.620 = 100000 + 10000 + 2000 + 600 + 20 + 0.

Explique como você pensou para chegar em sua resposta.

Eu pensei em decompor esse número em ordens de CM|DM|UM|C|D|U.

Fonte: dados coletados.

Figura 10 – Registro escrito do estudante E8 – Q4


Na biblioteca pública de Cachoeiro de Itapemirim-ES, há 112.620 livros. Decompondo esse número nas suas diversas ordens tem-se

112.620.

100000 + 10000 + 2000 + 600 + 20 + 0 = 112.620.

Explique como você pensou para chegar em sua resposta.

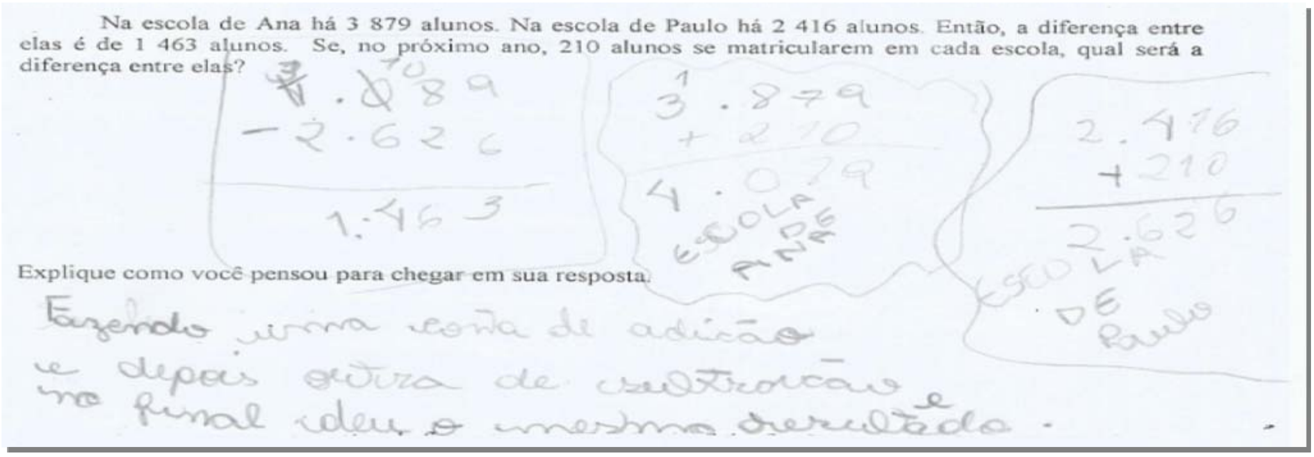
Eu peguei esse número e contei a tanta de número que tinha e pus entre 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, e o 7°.

Fonte: dados coletados.

Nestes registros observamos que os estudantes estabeleceram uma relação de igualdade e mostraram compreensão a respeito de propriedades aritméticas, pois evidenciaram que a soma das diversas parcelas da decomposição de um número deve resultar nesse mesmo número, sendo assim, foram capazes de interpretar uma igualdade como equivalência. De acordo com nossas análises e baseados em nossa fundamentação teórica inferimos que os E1, E6, E8, E15, E20, E26, E30, E31 e E34 envolveram em suas resoluções a compreensão de propriedades matemáticas importantes, como comutatividade para a adição, agrupamento e ordenação.

Outros registros escritos que apresentam indícios de estabelecimento de relação de equivalência foram nos dos estudantes E1 e E5 relativos a Q5. Como os dois registros são semelhantes, optamos por apresentar apenas o registro do estudante E5.

Figura 11 – Registro escrito do estudante E5 – Q5


Na escola de Ana há 3 879 alunos. Na escola de Paulo há 2 416 alunos. Então, a diferença entre elas é de 1 463 alunos. Se, no próximo ano, 210 alunos se matricularem em cada escola, qual será a diferença entre elas?

4.089
−2.626
1.463

3.879
+ 210
4.089
ESCOLA DE ANA

2.416
+ 210
2.626
ESCOLA DE PAULO

Explique como você pensou para chegar em sua resposta.

Fazendo uma conta de adição e depois outra de subtração e no final deu o mesmo resultado.

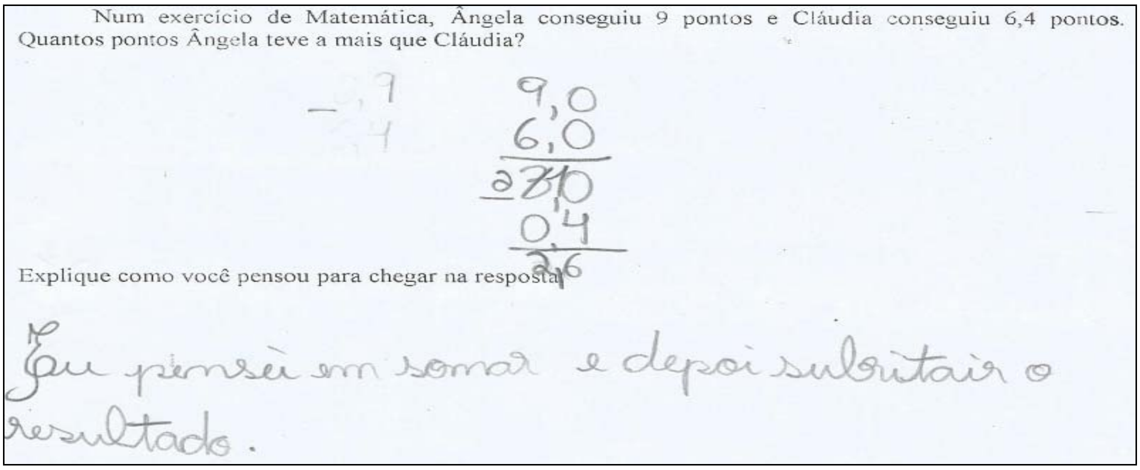
Fonte: dados coletados.

Inferimos tendo como base as operações realizadas e a justificativa do estudante E5 que ele, bem como E1, manifestou indícios de estabelecimento de uma relação de equivalência ou igualdade. A relação estabelecida mostra um indício da compreensão da propriedade aditiva, que é utilizada nas resoluções de equações cujo conjunto universo pertence ao conjunto dos números reais, pois, dado x = y, essa igualdade se mantém se somarmos ou subtrairmos o mesmo valor nos dois membros da equação, ou seja, x + a = y + a.

Acreditamos que inicialmente estes estudantes (E1 e E5) não conheciam a relação de equivalência que estabeleceram, pois utilizaram algoritmos para resolver a questão. Contudo, após resolverem a mesma, puderam perceber que a diferença entre a quantidade de estudantes não se alterou. Assim, em suas justificativas evidenciam terem analisado a resposta obtida, o processo e estratégia por eles adotados, bem como, que adicionar ou subtrair a mesma quantidade nas parcelas da adição ou subtração, não altera o resultado final, manifestando indícios de pensamento algébrico.

No registro escrito do estudante E20 com relação à questão Q8 foi possível observar indícios de manifestação de pensamento algébrico por meio do estabelecimento de relação de igualdade. Vejamos a figura 12.

Figura 12 – Registro escrito do estudante E20 – Q8



Num exercício de Matemática, Ângela conseguiu 9 pontos e Cláudia conseguiu 6,4 pontos. Quantos pontos Ângela teve a mais que Cláudia?

9,0
6,0
2 ~~3~~ 1 0
0,4
2,6

Explique como você pensou para chegar na resposta

Eu pensei em somar e depoi subitrair o resultado.

Fonte: dados coletados.

O estudante E20 antes de aplicar a estratégia que escolheu para resolver a questão, ou seja, subtrair do maior valor o menor, realizou uma decomposição do número 6,4 em 6+0,4 e resolveu inicialmente a operação 9-6 e do resultado da mesma subtraiu 0,4, deste modo estabeleceu e explorou uma relação de igualdade entre expressões numéricas, 9-6,4 = 9 – (6+0,4).

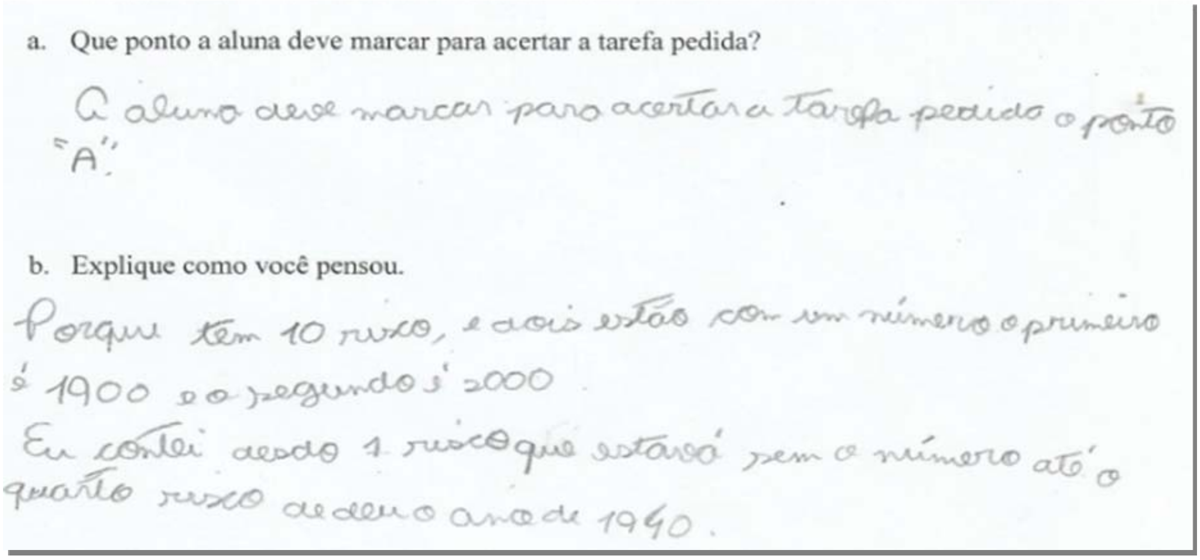
Ao realizar essa exploração, o estudante E20 também intuiu algumas propriedades matemáticas. Inferimos que o estudante percebeu que 9 – (6+0,4) = (9 – 6) - 0,4. Não fica claro em sua justificativa o motivo que o levou a optar por realizar essa decomposição.

Relação envolvendo regularidades

A relação envolvendo regularidade emergiu dos registros escritos dos manifestarem a compreensão de uma regra em uma ordem, a percepção de algo que se repete com determinada frequência, ou pela utilização de alguma linguagem para descrever ou traduzir regularidades, partindo de uma situação motivadora, por exemplo, a necessidade de estabelecer um valor não apresentado em uma sequência que segue certa ordem.

Analisando as unidades de registro inferimos que os estudantes E1, E3, E4, E5, E8, E14, E16, E19, E26, E27, E30, E31, E34 e E38 manifestaram características de pensamento algébrico ao perceberem um padrão e estabelecerem uma relação envolvendo regularidades. Devido à similaridade das resoluções, apresentaremos apenas as produções do E3, E16 e E30.

Figura 13 – Registro escrito do estudante E3 – Q12


a. Que ponto a aluna deve marcar para acertar a tarefa pedida?

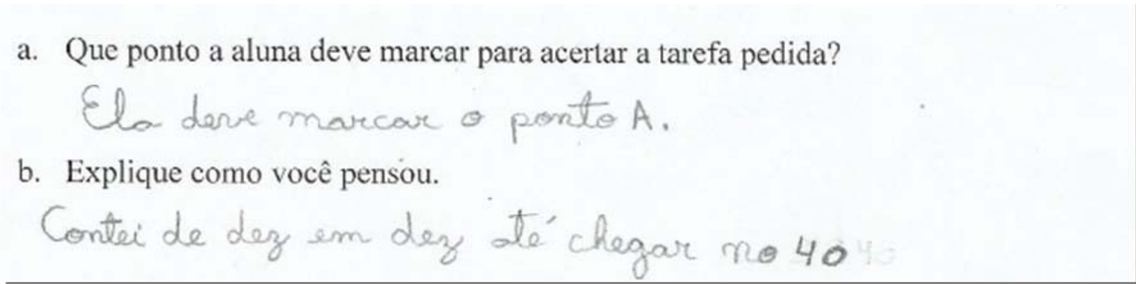
A aluno deve marcar para acertar a tarefa pedido o ponto "A".

b. Explique como você pensou.

Porque tem 10 risco, e dois estão com um número o primeiro é 1900 o segundo é 2000.
Eu contei desde 1 risco que estavá sem o número até o quarto risco dedeu o ano de 1940.

Fonte: dados coletados.

Figura 14 – Registro escrito do estudante E16 – Q12


a. Que ponto a aluna deve marcar para acertar a tarefa pedida?

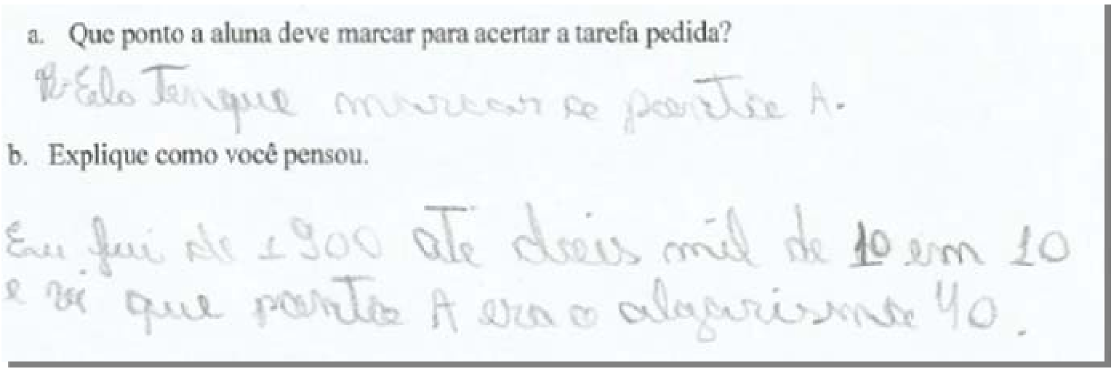
Ela deve marcar o ponto A.

b. Explique como você pensou.

Contei de dez em dez até chegar no 40

Fonte: dados coletados.

Figura 15 – Registro escrito do estudante E30 – Q12



a. Que ponto a aluna deve marcar para acertar a tarefa pedida?

R: Ela Tem que marcar o ponto A.

b. Explique como você pensou.

Eu fui de 1900 até dois mil de 10 em 10 e vi que ponto A era o algarismo 40.

Fonte: dados coletados.

Nos registros escritos apresentados podemos intuir que os estudantes verificaram um padrão e estabeleceram uma relação que envolve regularidades, pois por meio da quantidade de riscos entre os números 1900 e 2000, perceberam que o intervalo entre um risco e outro representava 10 unidades. Ao verificarem o padrão e estabelecerem uma relação apresentam elementos que são caracterizadores do pensamento algébrico.

Cabe ressaltar que os estudantes utilizaram a linguagem natural para argumentar e explicar a relação estabelecida, o que não os impediu de apresentarem em seus registros características de pensamento algébrico.

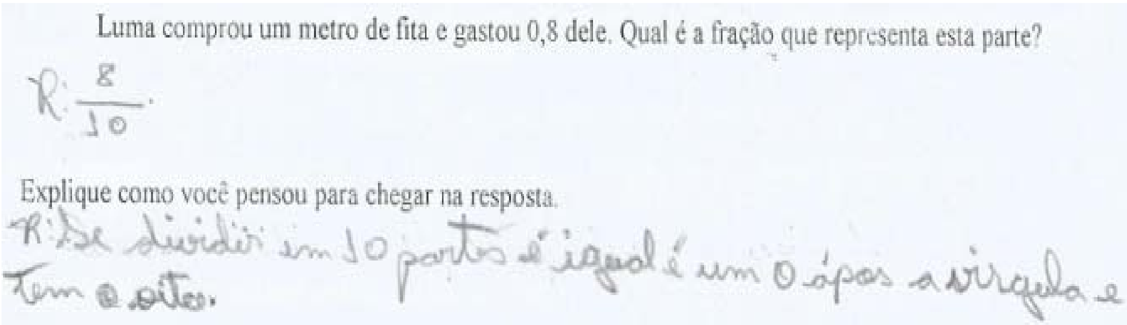
Com relação à utilização da linguagem natural para argumentar a respeito de suas resoluções destacamos a evidência de que é possível desenvolver o pensamento algébrico sem a utilização de uma linguagem algébrica formal e que no nível de escolaridade em que os participantes dessa pesquisa estão eles devem ser incentivados a falarem e escreverem em linguagem natural a relação que percebem e/ou estabelecem, comparações que realizam, generalizações, afirmações, conjecturas e justificativas.

Relação envolvendo comparação entre grandezas

O estabelecimento de relações envolvendo comparação entre grandezas é compreendida nesse trabalho como uma relação que ocorre quando o sujeito examina simultaneamente objetos, situações, entes matemáticos ou outros, com a intenção de analisar semelhanças, diferenças ou particularidades dos mesmos.

Durante a análise das unidades de registro, observamos que os estudantes E1, E8, E15, E18, E31 e E34 estabeleceram uma relação envolvendo comparação entre grandezas. Vejamos um registro escrito que compõe essa unidade de registro prévia de contexto e, ainda, essa unidade é representativa para as produções escritas dos estudantes citados anteriormente, devido à semelhança entre elas.

Figura 16 – Registro escrito do estudante E1 – Q6



Luma comprou um metro de fita e gastou 0,8 dele. Qual é a fração que representa esta parte?

R: $\frac{8}{10}$.

Explique como você pensou para chegar na resposta.

R: Se dividir em 10 partes é igual é um 0 após a vírgula e tem o oito.

Fonte: dados coletados.

No registro escrito do estudante E1, assim como nos registros dos estudantes E8, E15, E18, E31 e E34, inferimos que os mesmos, além de realizarem ao escreverem um número decimal de forma fracionária, ou seja, ao utilizarem diferentes notações para a mesma ideia matemática, estabeleceram relação que envolve comparação entre grandezas.

Uma das ideias relacionadas à própria fração é a ideia de comparação ou razão entre duas grandezas. As grandezas envolvidas na Q6, as quais os estudantes compararam, são a quantidade comprada da fita (o todo) e a quantidade gasta por Luma (a parte).

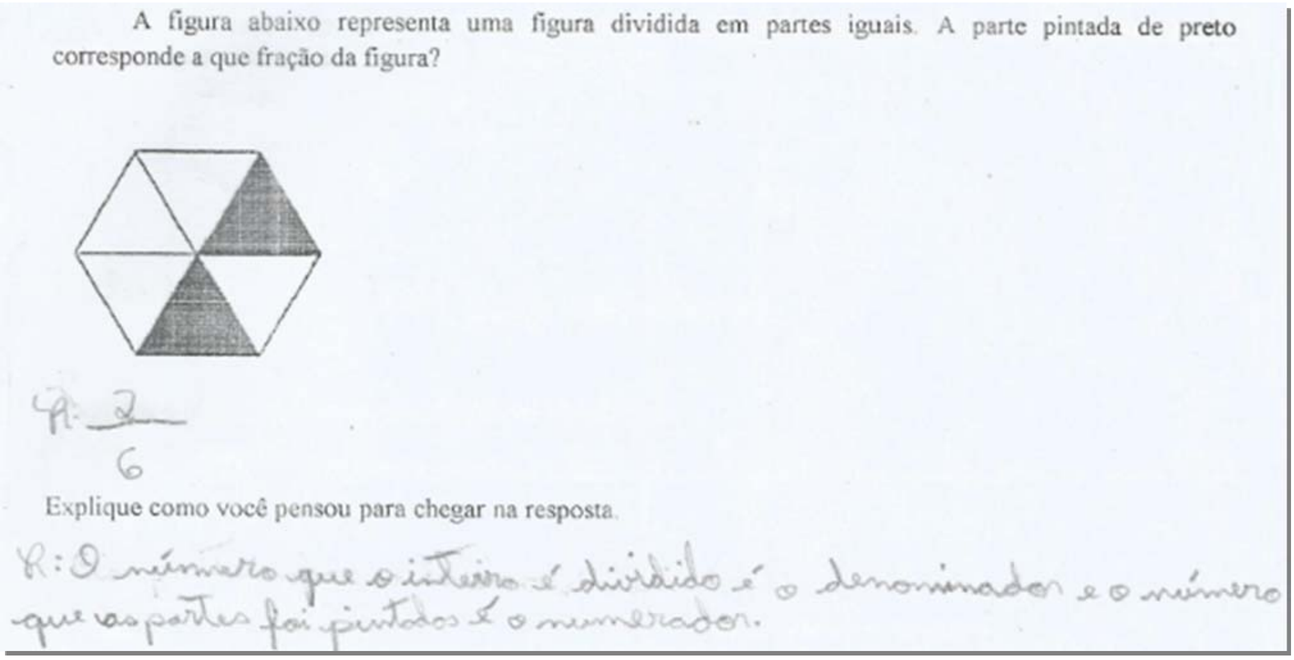
Podemos perceber por meio da justificativa apresentada por E1 que o mesmo estabeleceu uma relação válida entre a notação de um número decimal e sua representação fracionária, pois afirma que “se dividir em 10 partes” um número, “é igual a um 0 após a vírgula”.

Inferimos a respeito da comparação entre as grandezas que E1, E8, E15, E18, E31 e E34 realizaram, pois mesmo não dizendo de forma explícita esses estudantes fazem menção ao todo dividido em dez partes e por suas respostas mostram compreender a relação entre o todo e as partes.

Nos registros escritos dos estudantes E1, E2, E3, E4, E5, E6, E8, E10, E12, E13, E14, E15, E16, E18, E19, E20, E21, E23, E24, E25, E26, E28, E29, E30, E31, E32, E34 e E36 com relação à Q7, foi possível observar que eles apresentaram como resposta a fração dois sextos e, deste modo, realizaram uma mudança de representação, assim como estabeleceram uma relação entre a parte e o todo, sendo essa uma das interpretações para o conceito de fração.

Ao estabelecer uma relação entre a parte e o todo, estes estudantes realizaram a comparação entre grandezas. Visto que as resoluções desses estudantes são semelhantes, optamos apenas por evidenciar o registro escrito do estudante E1.

Figura 17 – Registro escrito do estudante E1 – Q7


A figura abaixo representa uma figura dividida em partes iguais. A parte pintada de preto corresponde a que fração da figura?

R: $\frac{2}{6}$

Explique como você pensou para chegar na resposta.

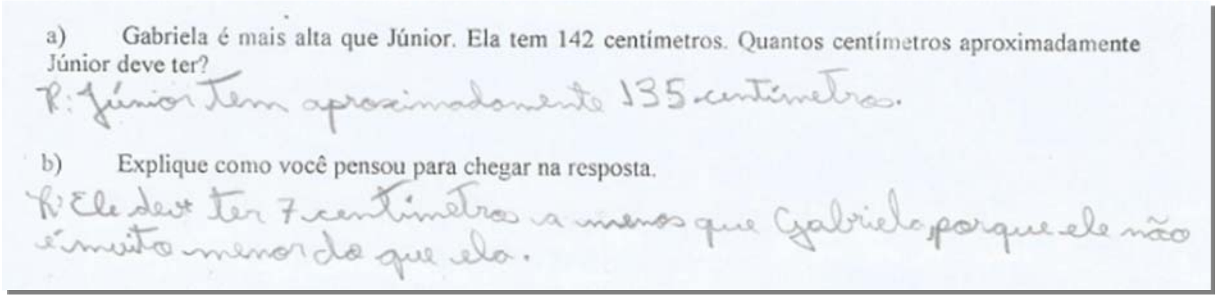
R: O número que o inteiro é dividido é o denominador e o número que as partes foi pintados é o numerador.

Fonte: dados coletados.

Por meio do registro escrito apresentado na figura anterior, podemos inferir que houve uma interpretação dos dados apresentados por meio da figura e na sequência uma transição entre os dados apresentados na figura e a notação formal de fração e, para que isso fosse possível, o estudante estabeleceu uma relação do todo composto por partes.

Inferimos que os estudantes E1, E2, E3, E4, E5, E7, E15, E16, E18, E20, E22, E23, E25 E26, E28, E30, E31 E34 e E35 apresentaram indícios de pensamento algébrico em seus registros referentes à Q11, ao estabelecerem uma relação por meio da comparação entre grandezas. Vejamos alguns registros escritos.

Figura 18 – Registro escrito do estudante E1 – Q11



a) Gabriela é mais alta que Júnior. Ela tem 142 centímetros. Quantos centímetros aproximadamente Júnior deve ter?

R: Júnior Tem aproximadamente 135 centímetros.

b) Explique como você pensou para chegar na resposta.

R: Ele deve ter 7 centímetros a menos que Gabriela porque ele não é muito menor do que ela.

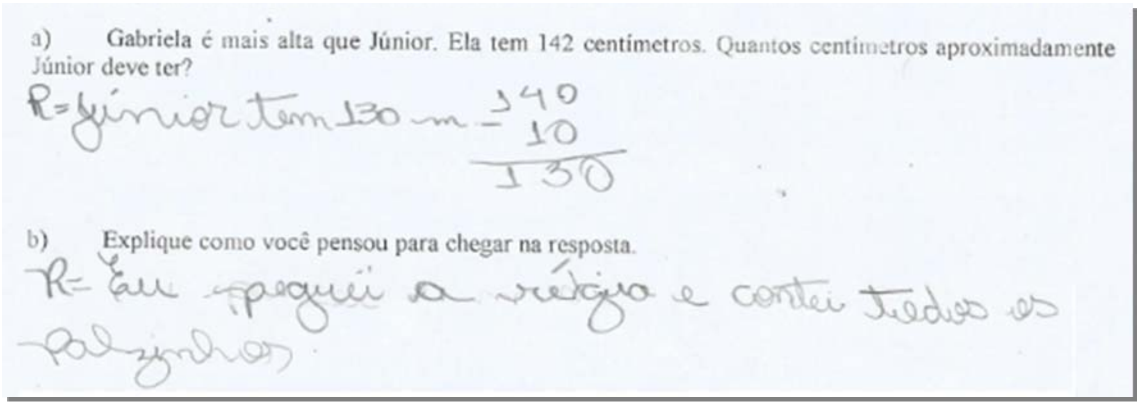
Fonte: dados coletados

Por meio da justificativa apresentada pelo estudante E1 podemos verificar que ele utilizou a altura de Gabriela como unidade padrão e por meio dessa unidade de medida estabeleceu uma relação entre as alturas e comparou grandezas da mesma magnitude para estimar quanto mede Júnior.

Acreditamos que os estudantes E1, E4, E20, E25 e E31 tenham realizado uma comparação entre grandezas para estimar a altura de Júnior, ou seja, manifestaram alguma característica de pensamento algébrico.

Já os estudantes E2, E3, E5, E7, E15, E16, E18, E22, E23, E26, E28, E30, E34 e E35 relataram que utilizaram uma régua para medir quantos centímetros aproximadamente Júnior deve medir. Vejamos a figura 19.

Figura 19 – Registro escrito do estudante E2 – Q11



a) Gabriela é mais alta que Júnior. Ela tem 142 centímetros. Quantos centímetros aproximadamente Júnior deve ter?

R= Júnior tem 130 m

$$\begin{array}{r} 140 \\ -\ 10 \\ \hline 130 \end{array}$$

b) Explique como você pensou para chegar na resposta.

R= Eu peguei a régua e contei todos os palzinhos

Fonte: dados coletados

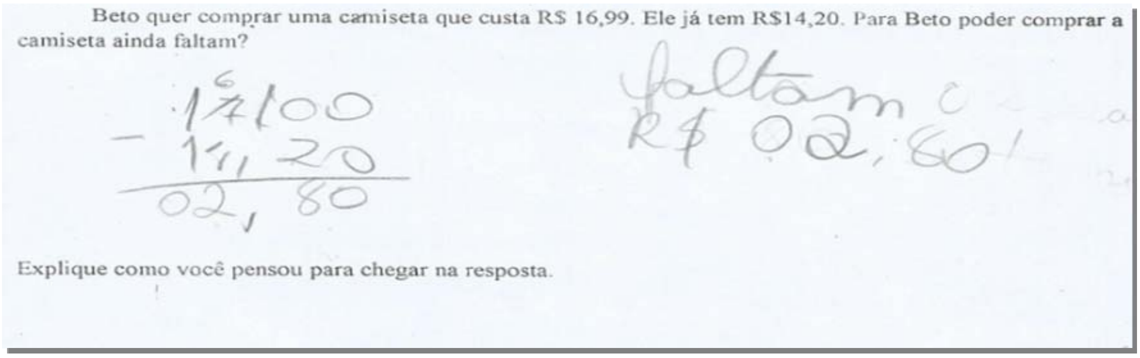
Podemos inferir que estes estudantes realizaram comparação entre grandezas, pois utilizaram uma comparação entre a régua e a altura de Júnior.

Unidade de contexto prévia: formulação de conjecturas

A unidade de contexto prévia formulação de conjecturas se dá por meio da manifestação de uma ideia ou opinião tendo como base suposições, hipóteses ou experiências vividas. A formulação de conjecturas deve ser validada, apoiando-se em fatos, argumentos e operações matemáticas.

Durante a exploração das unidades de registro inferiu-se que os estudantes E14, E20 e E30 manifestaram conjecturas e as validaram em suas resoluções da Q10. Vejamos essas unidades de registro.

Figura 20 – Registro escrito do estudante E14 – Q10



Beto quer comprar uma camiseta que custa R$ 16,99. Ele já tem R$14,20. Para Beto poder comprar a camiseta ainda faltam?

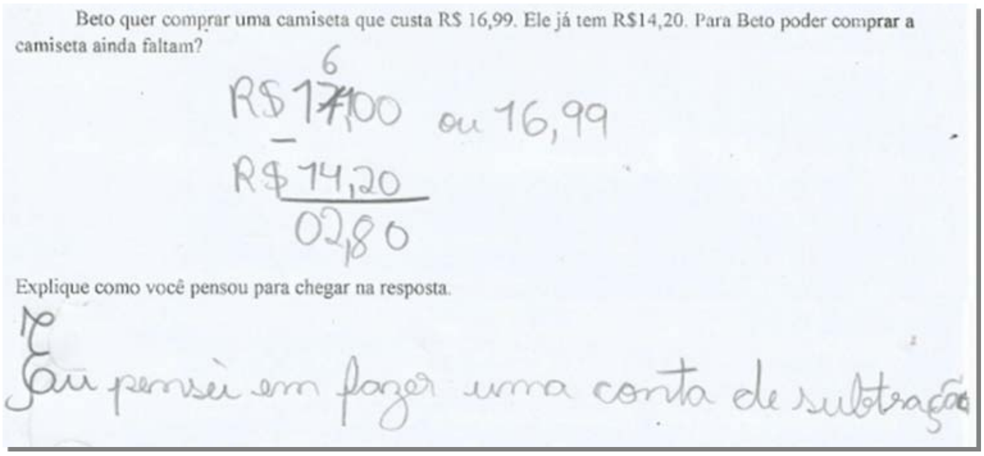
$$\begin{array}{r} 17{,}00 \\ -\ 14{,}20 \\ \hline 02{,}80 \end{array}$$

faltam R$ 02,80

Explique como você pensou para chegar na resposta.

Fonte: dados coletados

Figura 21 – Registro escrito do estudante E20 – Q10



Beto quer comprar uma camiseta que custa R$ 16,99. Ele já tem R$14,20. Para Beto poder comprar a camiseta ainda faltam?

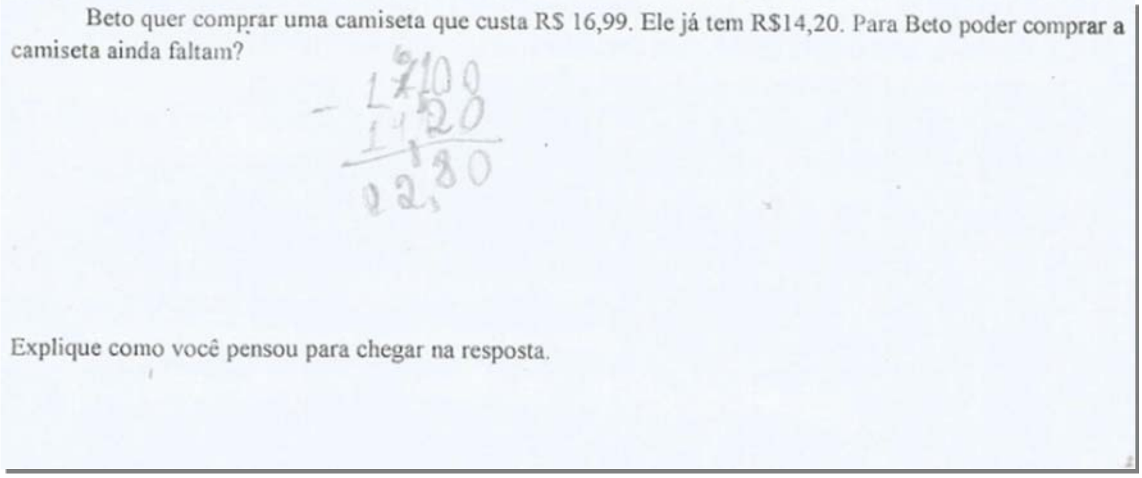
R$ 17,00 ou 16,99
− R$ 14,20
02,80

Explique como você pensou para chegar na resposta.

Eu pensei em fazer uma conta de subtração

Fonte: dados coletados

Figura 22 – Registro escrito do estudante E30 – Q10



Fonte: dados coletados

Esses registros nos chamaram a atenção no momento da exploração dos materiais, pois E14, E20 e E30 optaram por resolvê-la utilizando o preço da camiseta como R$17,00 ao invés de R$16,99, mas não justificaram o motivo pelo qual fizeram isso.

Com a intenção de realizar uma melhor compreensão e assim averiguar se os estudantes apresentaram características de pensamento algébrico, decidimos perguntar aos estudantes E14, E20 e E30 quais foram suas motivações para resolver desse modo tal questão[26], e obtivemos as seguintes explicações: “*Eu usei R$17,00 porque 1 centavo não é quase nada*” (E14); “*Porque não tem moedinha de 1 centavo. No mercado quando tem troco de um centavo ou até um pouco mais eles dão bala”* (E20); *“É que R$17,00 é muito pertinho de R$16,99 e é bem mais fácil fazer a continha com R$17,00”* (E30).

Essas explicações mostram que E14, E20 e E30 utilizaram suas experiências pessoais no momento de resolver tal questão. Realmente a utilização de R$16,99 como R$17,00 é válida para o contexto da questão.

Baseados em nosso referencial teórico, na resolução dos estudantes e em suas explicações orais, inferimos que os estudantes manifestaram indícios de pensamento algébrico.

Ao resolverem a questão, considerando que a camiseta custava R$17,00, ao invés de R$16,99, os estudantes conjecturaram que a quantidade de dinheiro que

[26] Este momento em que houve o questionamento aos estudantes aconteceu após as aplicações das questões, visto que durante a aplicação não tiveram interferências da pesquisadora nas resoluções dos estudantes. Foi questionado o motivo pelo qual os estudantes realizaram um arredondamento do valor da camiseta de modo individual.

faltava para que Beto pudesse comprar a camiseta seria o mesmo em qualquer um dos valores e inferimos que os mesmos realizaram uma validação dessa conjectura por meio de experiências pessoais.

O fato de terem apresentado indícios de pensamento algébrico associado a situações fora do contexto da Matemática de sala de aula, mostra que realmente este pode ser entendido como um tipo especial de pensamento que se manifesta em campos distintos e pode ser expresso na linguagem natural, aritmética ou geométrica, dependendo da conveniência e habilidade de quem o manifesta.

Unidade de contexto prévia: transição entre notações

A transição entre notações ocorre quando utiliza-se diferentes representações para expressar a mesma ideia matemática, ou ainda, ao interpretar dados expressos em um tipo de notação e apresentar as interpretações feitas por meio da utilização de outra forma de notação.

Essa unidade de contexto prévia pode ser dividida em unidades de registro prévias, sendo elas: interpretação de dados representados em figuras, tabelas ou gráficos; utilização de diferentes notações para representar o mesmo elemento.

Apresentaremos agora exemplos de registros escritos que, de acordo com nosso referencial teórico e nossas inferências, são representativas dessa unidade de contexto prévia e unidades de registro prévias.

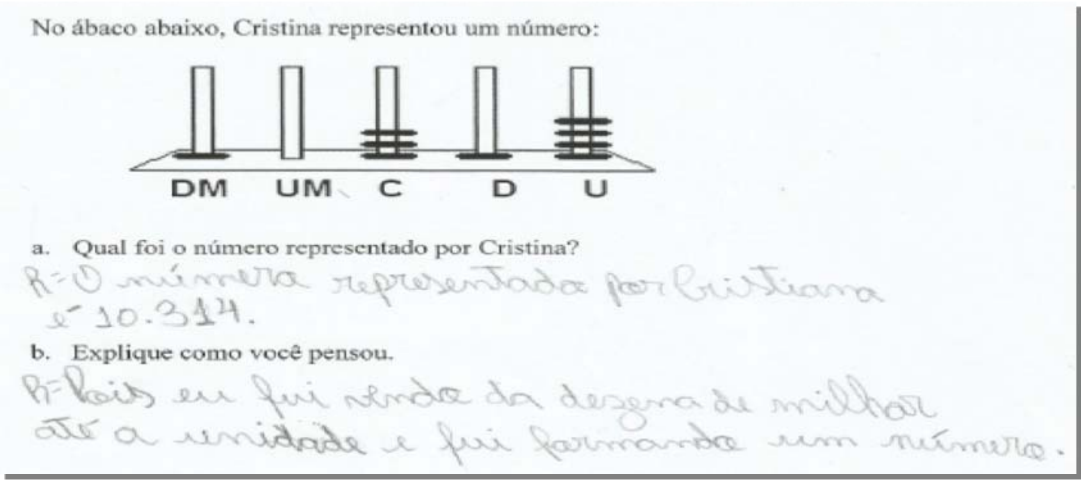
Interpretação de dados representados em figuras, tabelas ou gráficos

Consideramos que a interpretação de dados representados em figuras, tabelas ou gráficos é uma forma de transição entre notações, pois é necessário analisar os dados contidos nessas representações e utilizar outra forma de notação para expor as interpretações realizadas.

Por meio da realização de análises, inferimos que na Q1 os estudantes E1, E2, E3, E5, E6, E8, E10, E11, E13, E16, E18, E19, E21, E26, E28, E30, E31, E32, E33, E34 e E35 realizaram a interpretação de dados representados em uma figura, para assim fazerem uma mudança de notação.

Os estudantes E1, E3, E6, E8, E26, E30 e E34 apresentaram resolução semelhante para a Q1 e por esse motivo apresentaremos apenas o registro escrito do estudante E6.

Figura 23 – Registro escrito do estudante E6 – Q1



Fonte: dados coletados

Nessa resolução podemos apontar que o estudante E6 interpretou a figura apresentada na questão, pois em sua justificativa afirma que ele foi “vendo da dezena de milhar até a unidade” e ao realizar essa análise e seguindo a estratégia por ele criada, formou-se o número, ou seja, realizou-se a transição entre notações.

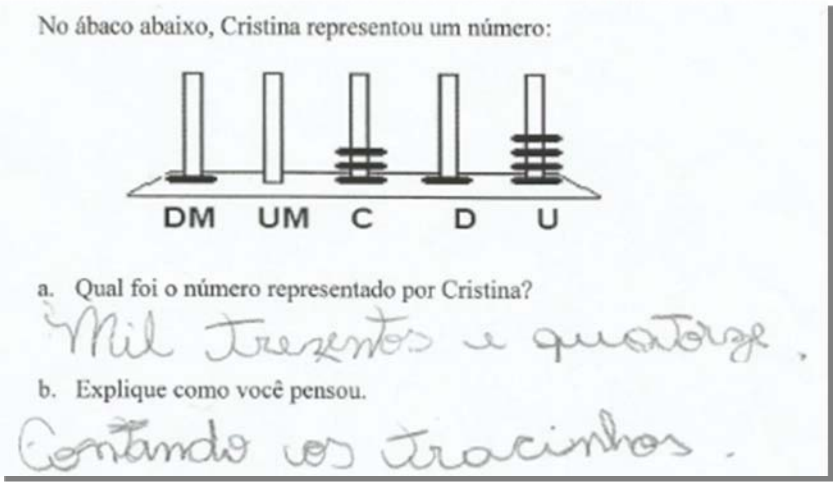
A transição entre notações nesse caso aconteceu do número representado por meio da figura para o número representado por meio dos símbolos do nosso sistema de numeração decimal.

Alguns estudantes não apresentaram a resposta correta para essa questão, mesmo assim realizaram algum tipo de transição entre notações evidenciando certa interpretação do dado representado por meio da figura que representa ábaco, como é o caso dos estudantes E2, E5, E10, E11, E13, E16, E18, E19, E21, E28, E31, E32, E33 e E35.

O fato de não apresentar a resposta correta para a questão, mas mesmo assim manifestar indícios de pensamento algébrico evidencia que realmente esse tipo de pensamento está relacionado ao processo de aprendizagem e não apenas ao produto final.

Vejamos algumas das unidades de registro que não apresentaram a resposta correta para Q1, mas evidenciaram alguma interpretação de dado presente na figura, bem como a transição entre notações.

Figura 24 – Registro escrito do estudante E5 – Q1

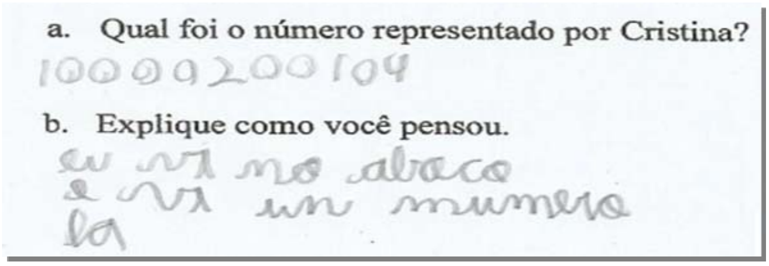


Fonte: dados coletados

O estudante E5 compreendeu que no ábaco estava representado um numeral composto de dezena de milhar, unidade de milhar, centena, dezena e unidade, porém ao realizar a escrita deste numeral não se atentou ao valor posicional dos algarismos no sistema de numeração indo-arábico, ignorando a ordem que apresentava valor nulo.

Por meio de sua justificativa, inferimos que esse estudante realizou uma análise para compreender o que o problema solicitava. Além de ter analisado qual deveria ser o primeiro algarismo a ser representado, o estudante realizou a transição entre notações representando o número de forma decrescente de ordem, mesmo ignorando a haste de unidade de milhar.

Figura 25 – Registro escrito do estudante E11 – Q1

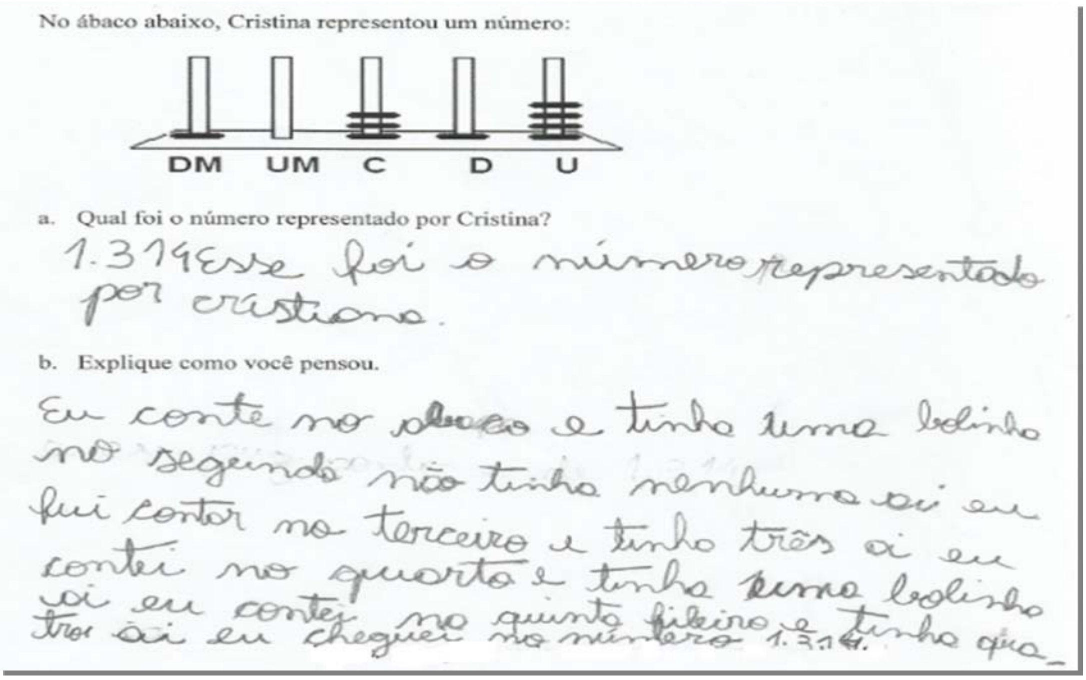


Fonte: dados coletados

A respeito do registro escrito do estudante E11, inferimos que ele escreveu o número representado, como se fosse a junção dos valores relativos a cada uma das peças do ábaco. Possivelmente por distração se confundiu ao colocar o valor absoluto representado pela ordem das centenas, mas mostrou certa interpretação da notação em que o problema foi apresentado (figura que representa o ábaco) e efetuou uma transição entre notações.

Consideramos que E11 traduziu informações que estavam representadas simbolicamente pelo ábaco e utilizou outra representação para comunicar a mesma ideia.

Figura 26 – Registro escrito do estudante E21 – Q1


No ábaco abaixo, Cristina representou um número:

a. Qual foi o número representado por Cristina?

1.314 Esse foi o número representado por cristiana.

b. Explique como você pensou.

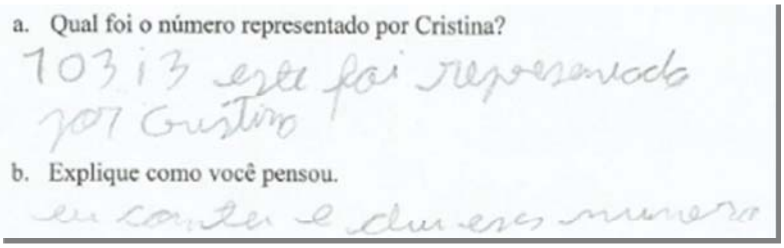
Eu conte no abaco e tinha uma bolinha no segundo não tinha nenhuma ai eu fui contar no terceiro e tinha três ai eu contei no quarto e tinha uma bolinha ai eu contei no quinto fikeiro e tinha trois ai eu cheguei no número 1.314. tinha que_

Fonte: dados coletados

O estudante E21 realizou certa interpretação da figura e compreendeu que no ábaco estava representado um numeral composto em diversas ordens, porém ao realizar a escrita deste numeral não se atentou ao valor posicional dos algarismos no sistema de numeração indo-arábico, ignorando a ordem que apresentava valor nulo.

Inferimos por meio de sua justificativa, bem como por meio de sua resposta, que houve interpretação de dados apresentados em figuras e efetuou transição entre notações.

Figura 27 – Registro escrito do estudante E28 – Q1



Fonte: dados coletados

O estudante E28 não apresentou para a questão a resposta esperada, pois trocou o algarismo relativo à ordem da unidade, porém inferimos que este erro pode ter ocorrido por distração. Assim, este estudante realizou uma interpretação dos dados evidenciados no ábaco e uma transição entre notações. Apoiados por nosso referencial teórico, acreditamos que indícios de pensamento algébrico podem ser manifestados independentemente do produto final, pois é interno ao estudante e independente da tarefa, deste modo, pode ser manifestado ao longo do processo de resolução e interpretação de algo.

Dentre os registros escritos que realizaram a interpretação dos dados apresentados na figura da Q1 e realizaram mudança de notação, os estudantes E2, E5, E10, E11, E13, E15, E16, E18, E19, E21, E28, E31, E32 e E35, não apresentaram a resposta esperada para a questão.

Esses estudantes interpretaram o numeral por meio da figura que representa o ábaco e transitaram para a notação com algarismos indo-arábicos, ou escreveram o número por extenso, mas não apresentaram a resposta correta, seja por compreensão parcial de algumas das propriedades do sistema de numeração decimal posicional, por possível distração, ou então por interpretação parcial dos dados representados.

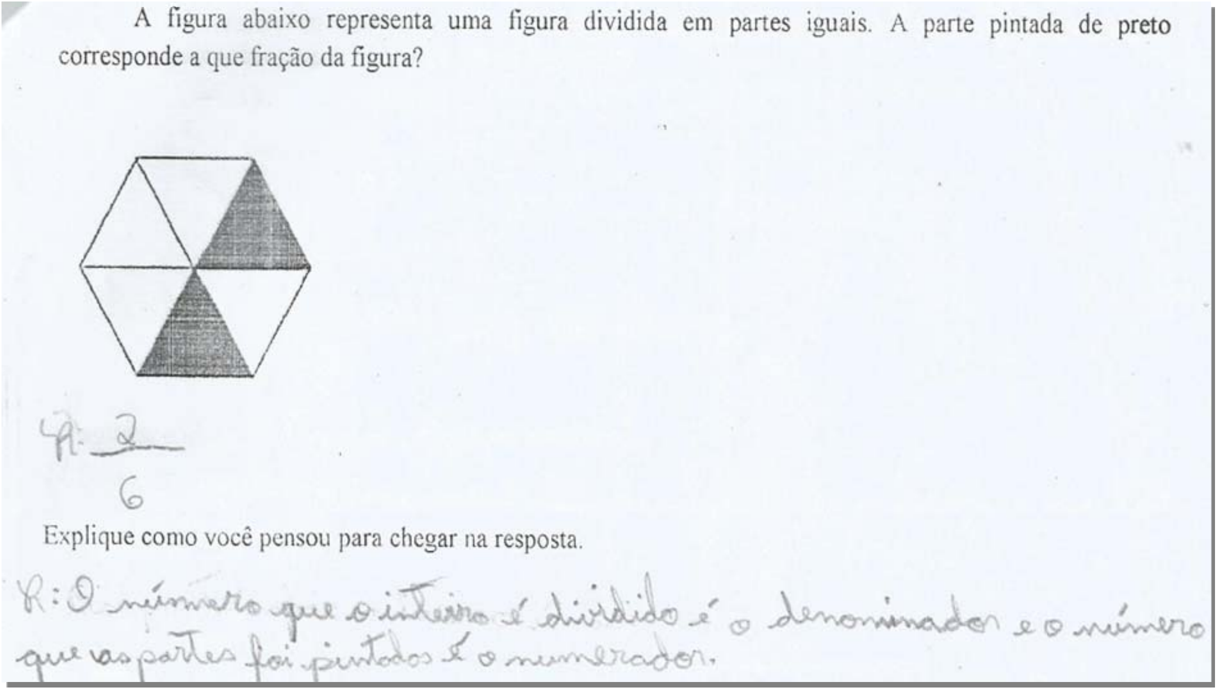
Com relação às unidades de registro dos demais estudantes na Q1, inferimos que os mesmos não manifestaram indícios de pensamento algébrico[27].

Inferimos que os estudantes E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E28, E29, E30, E31, E32, E33, E34, E35, E36, E37 e E38 realizaram interpretação de

27 Inferimos que E4, E7, E9, E12, E14, E17, E20, E27, E22, E23, E24, E25, E29 e E36 não manifestaram características de pensamento algébrico, pois não evidenciaram interpretação dos dados apresentados na figura, bem como não transitaram entre diferentes notações para o mesmo elemento matemático. A descrição da resolução desses estudantes pode ser verificada no Apêndice C desse trabalho.

dados representados em figuras para apresentar a resposta da questão Q7. Vejamos as figuras 28 e 29.

Figura 28 – Registro escrito do estudante E1 – Q7



A figura abaixo representa uma figura dividida em partes iguais. A parte pintada de preto corresponde a que fração da figura?

R: $\frac{2}{6}$

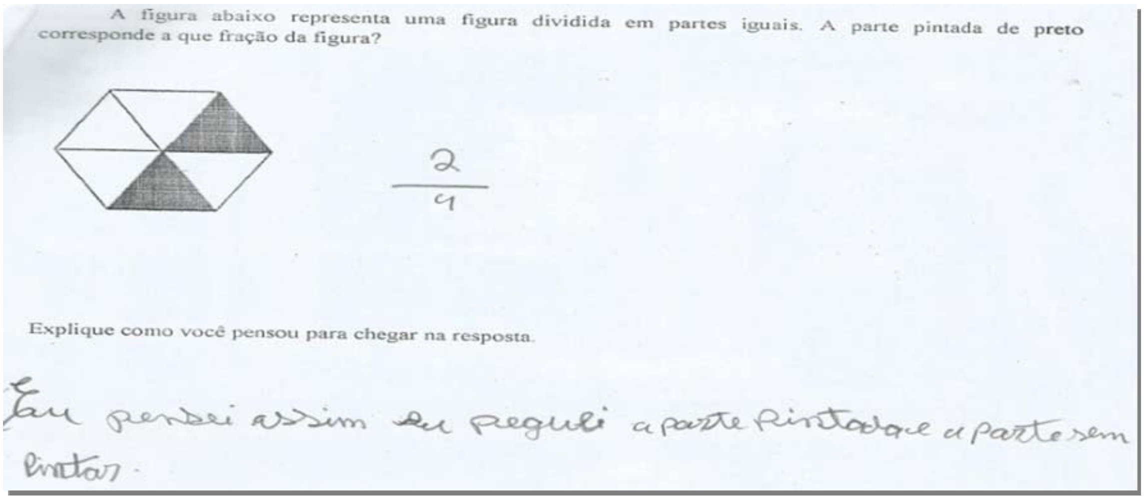
Explique como você pensou para chegar na resposta.

R: O número que o inteiro é dividido é o denominador e o número que as partes foi pintados é o numerador.

Fonte: dados coletados

O estudante E1, bem como os estudantes citados anteriormente realizaram uma interpretação do dado apresentado na figura e então utilizaram diferentes notações para representar o número em sua forma fracionária.

Figura 29 – Registro escrito do estudante E7 – Q7



A figura abaixo representa uma figura dividida em partes iguais. A parte pintada de preto corresponde a que fração da figura?

$\frac{2}{4}$

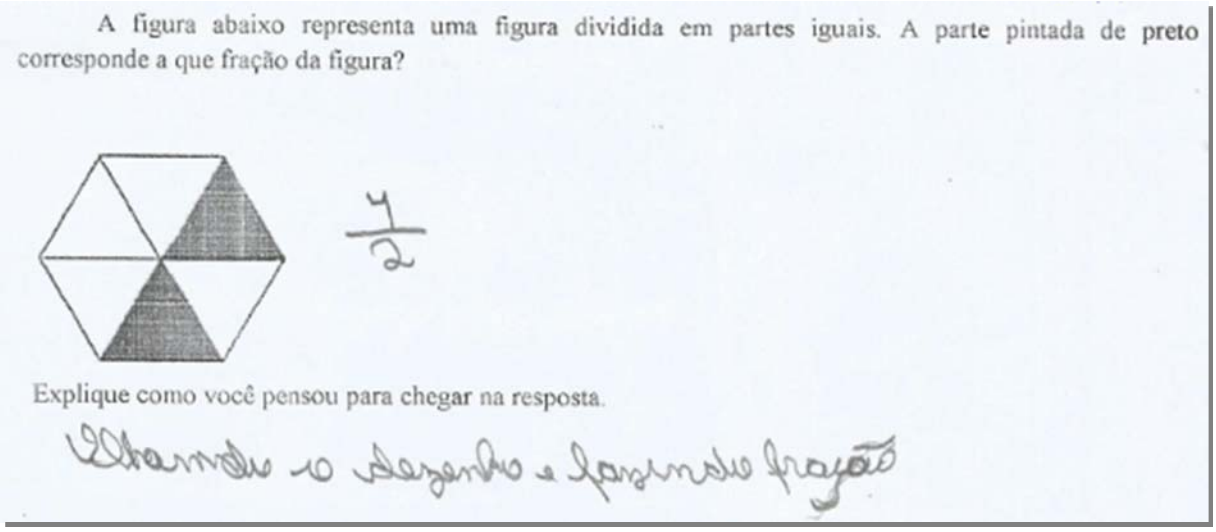
Explique como você pensou para chegar na resposta.

Eu pensei assim eu peguei a parte pintada e a parte sem pintar.

Fonte: dados coletados

O estudante E7 realizou uma transição entre diferentes notações, evidenciando uma interpretação do dado apresentado por meio da figura, visto que compreendeu que o desenho poderia ser representado por meio da notação de fração, porém não estabeleceu uma relação entre a parte e o todo, mas sim, relacionou as partes pintadas e as partes não pintadas, como podemos perceber por meio de sua justificativa.

Figura 30 – Registro escrito do estudante E11 – Q7



Fonte: dados coletados

No registro escrito do estudante E11 podemos inferir que ele foi capaz de realizar transição entre diferentes notações, mas por uma falta de compreensão, ou compreensão parcial do conceito de frações, ou, ainda, por não estabelecer uma relação entre as partes e o todo, não soube definir qual algarismo representaria o numerador e qual representaria o denominador na notação formal de fração.

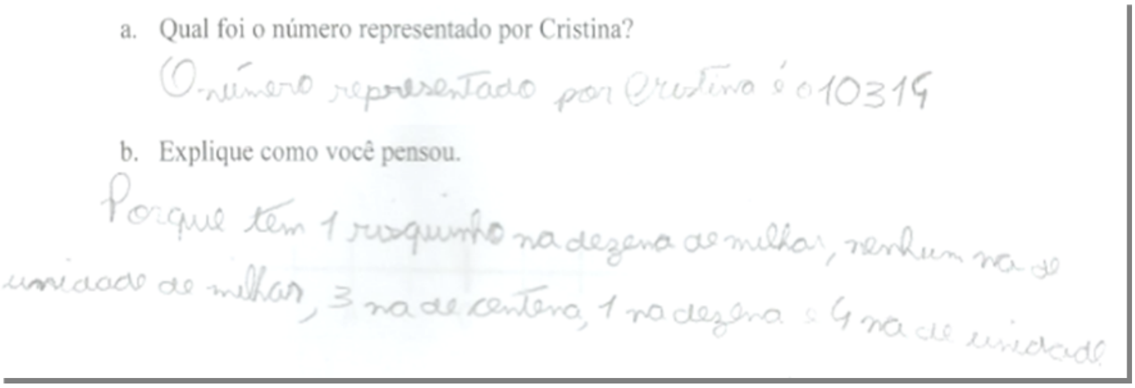
Utilização de diferentes notações para representar o mesmo elemento

Na Q1 os estudantes E1, E3, E6, E8, E26, E30 e E34 realizaram uma transição entre notações, pois foram capazes de representar o número apresentado na figura presente na questão por meio de algarismos indo-arábicos.

Todos os registros escritos dos estudantes que compõem essa unidade de registro prévia também pertencem à unidade de registro prévia anterior (interpretação de dados representados em figuras, tabelas ou gráficos), pois inferimos que todos os estudantes que realizaram a utilização de diferentes notações para representar o mesmo elemento, no caso o número 10314, tiveram que realizar interpretação de dados para que isso fosse possível.

Vejamos algumas figuras dos registros escritos dos estudantes que compõem essa unidade de registro prévia.

Figura 31 – Registro escrito do estudante E3 – Q1


a. Qual foi o número representado por Cristina?

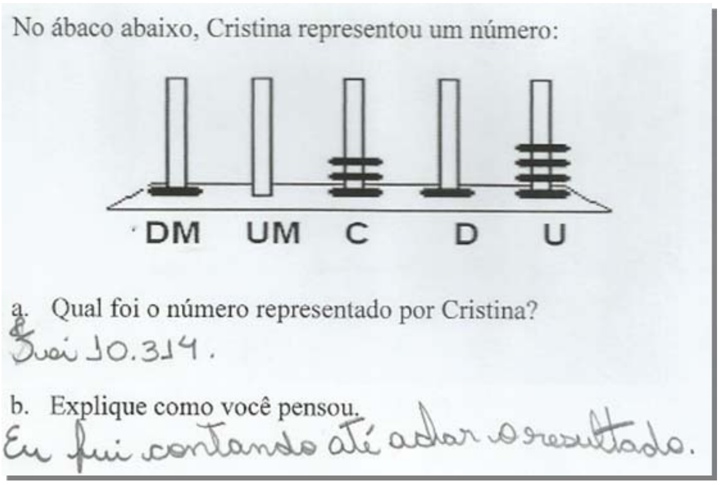
O número representado por Cristina é o 10314

b. Explique como você pensou.

Porque tem 1 risquinho na dezena de milhar, nenhum na de unidade de milhar, 3 na de centena, 1 na dezena e 4 na de unidade

Fonte: dados coletados

Figura 32 – Registro escrito do estudante E34 – Q1


No ábaco abaixo, Cristina representou um número:

a. Qual foi o número representado por Cristina?

Foi 10.314.

b. Explique como você pensou.

Eu fui contando até achar o resultado.

Fonte: dados coletados

Podemos perceber pelas figuras 31 e 32 que esses estudantes realizaram a transição entre notações. Eles verificaram a quantidade de "risquinhos" em cada uma das hastes do ábaco e realizaram a composição do numeral presente no ábaco.

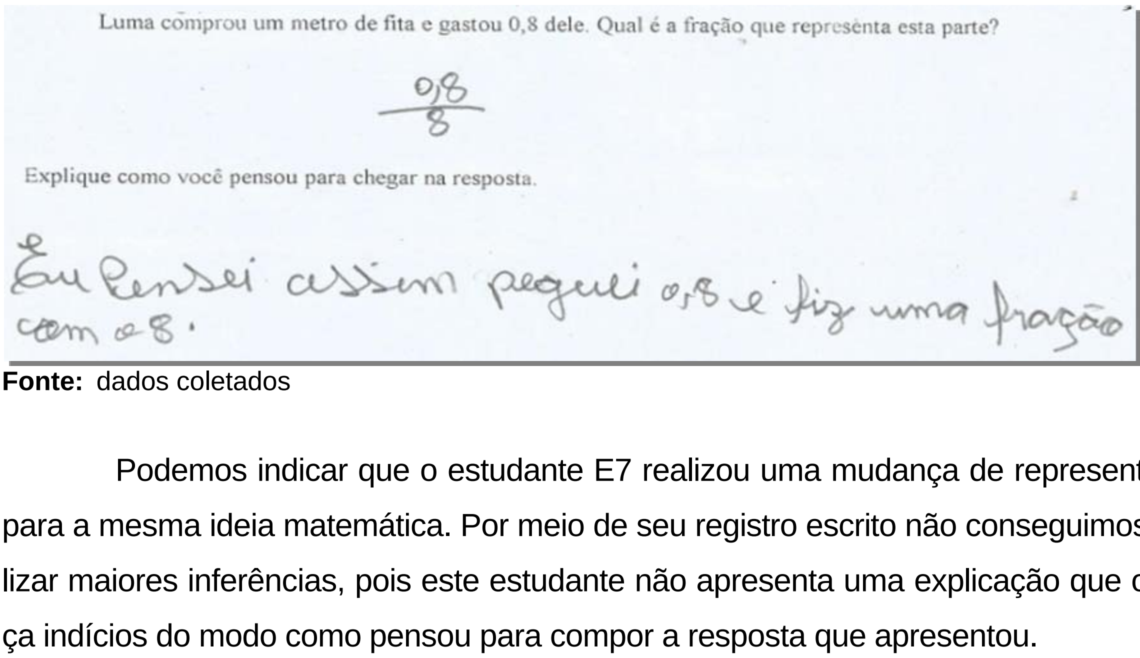
Já nos registros escritos relativos a Q6, os estudantes E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E28, E30, E31, E33, E34, E35 e E36 realizaram uma transição de notação utilizando diferentes notações para representar o mesmo elemento. Esses estudantes transitaram entre a notação decimal para a representação fracionária deste mesmo número.

Ao apresentarem como resposta um número em sua representação fracionária inferimos que houve mudança de representação e, esses estudantes mostraram alguma compreensão a respeito da possibilidade de utilizar diferentes notações para a mesma ideia matemática.

Ao escrever um número decimal em sua forma fracionária, os estudantes traduziram informações representadas simbolicamente para outras formas de representação, evidenciando compreensão ou, compreensão parcial[28] dos significados dos símbolos numéricos em diferentes contextos.

Dos estudantes citados anteriormente, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E9, E14, E16, E17, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E28, E30, E33, E35 e E36 não apresentaram a resposta esperada para a questão, mas sim outra fração que não representa o número decimal 0,8. Este fato corrobora com a ideia de que elementos caracterizadores do pensamento algébrico podem ser manifestados durante o processo de aprendizagem e não se relacionam apenas ao produto final.

Figura 33 – Registro escrito do estudante E7 – Q6


Luma comprou um metro de fita e gastou 0,8 dele. Qual é a fração que representa esta parte?

$\frac{0,8}{8}$

Explique como você pensou para chegar na resposta.

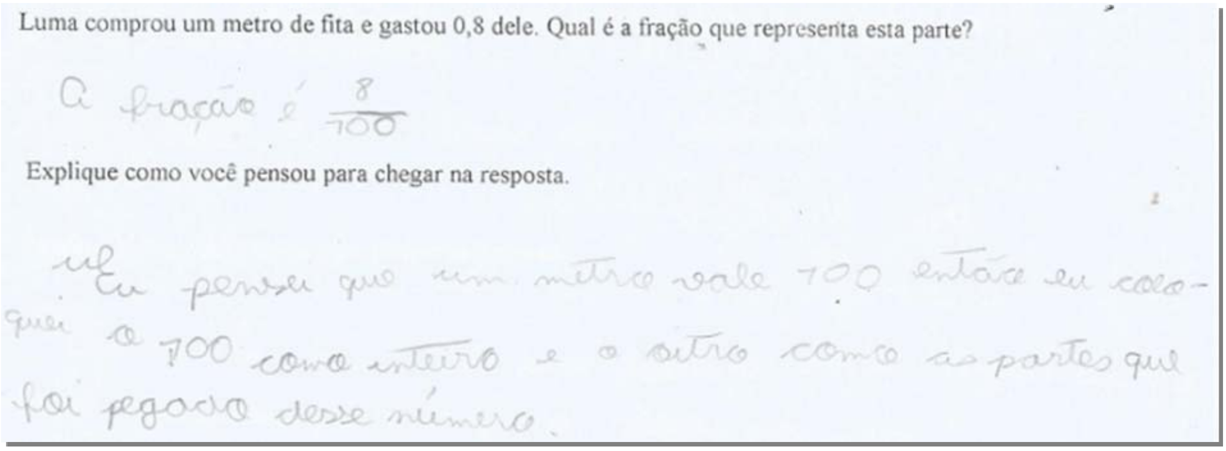
Eu pensei assim peguei 0,8 e fiz uma fração com o 8.

Fonte: dados coletados

Podemos indicar que o estudante E7 realizou uma mudança de representação para a mesma ideia matemática. Por meio de seu registro escrito não conseguimos realizar maiores inferências, pois este estudante não apresenta uma explicação que ofereça indícios do modo como pensou para compor a resposta que apresentou.

[28] Entendemos que um estudante evidencia compreensão parcial de um conceito, quando apresenta indícios de compreensão de parte do mesmo.

Figura 34 – Registro escrito do estudante E3 – Q6


Luma comprou um metro de fita e gastou 0,8 dele. Qual é a fração que representa esta parte?

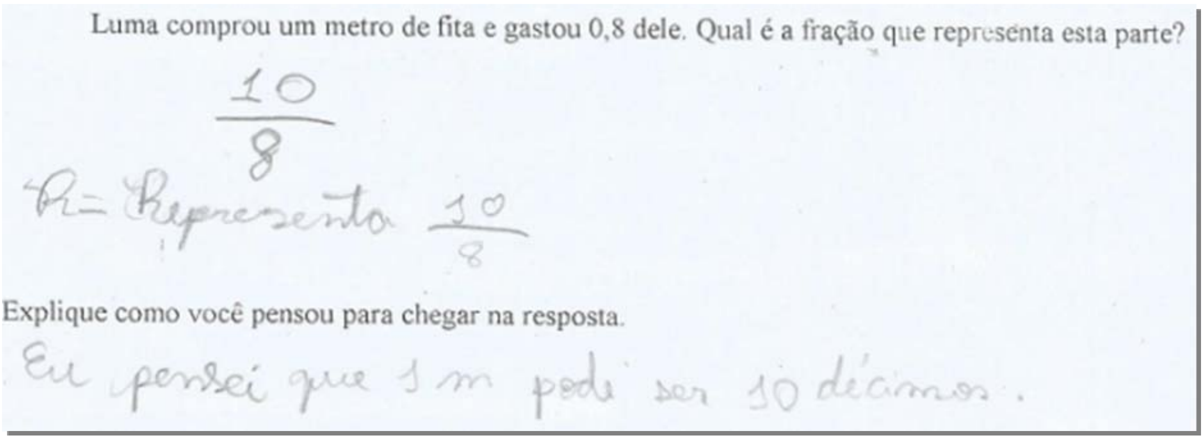
a fração é $\frac{8}{100}$

Explique como você pensou para chegar na resposta.

Eu pensei que um metro vale 100 então eu coloquei o 100 como inteiro e o outro como as partes que foi pegado desse número.

Fonte: dados coletados

Figura 35 – Registro escrito do estudante E4 – Q6


Luma comprou um metro de fita e gastou 0,8 dele. Qual é a fração que representa esta parte?

$\frac{10}{8}$

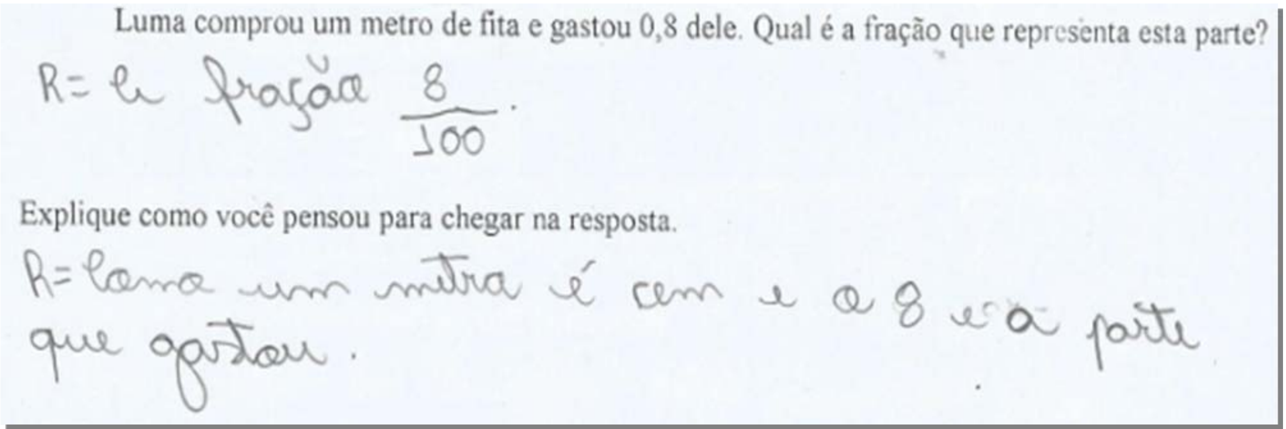
R= Representa $\frac{10}{8}$

Explique como você pensou para chegar na resposta.

Eu pensei que 1 m pode ser 10 décimos.

Fonte: dados coletados

Figura 36 – Registro escrito do estudante E6 – Q6


Luma comprou um metro de fita e gastou 0,8 dele. Qual é a fração que representa esta parte?

R= a fração $\frac{8}{100}$.

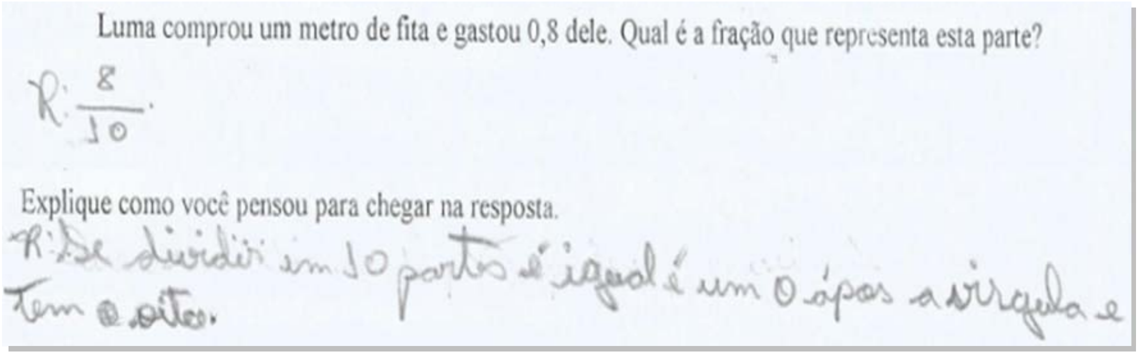
Explique como você pensou para chegar na resposta.

R= Como um metro é cem e o 8 é a parte que gastou.

Fonte: dados coletados

Os registros dos estudantes E3, E4 e E6 evidenciam uma transição entre notações, mesmo esses estudantes não apresentando a resposta correta para a questão. Inferimos que os mesmos conseguem compreender que um número racional pode ser representado por meio de uma fração, mas eles ainda não têm compreensão total de como proceder para estabelecer essa representação.

Figura 37 – Registro escrito do estudante E1 – Q6


Luma comprou um metro de fita e gastou 0,8 dele. Qual é a fração que representa esta parte?

R: $\frac{8}{10}$.

Explique como você pensou para chegar na resposta.

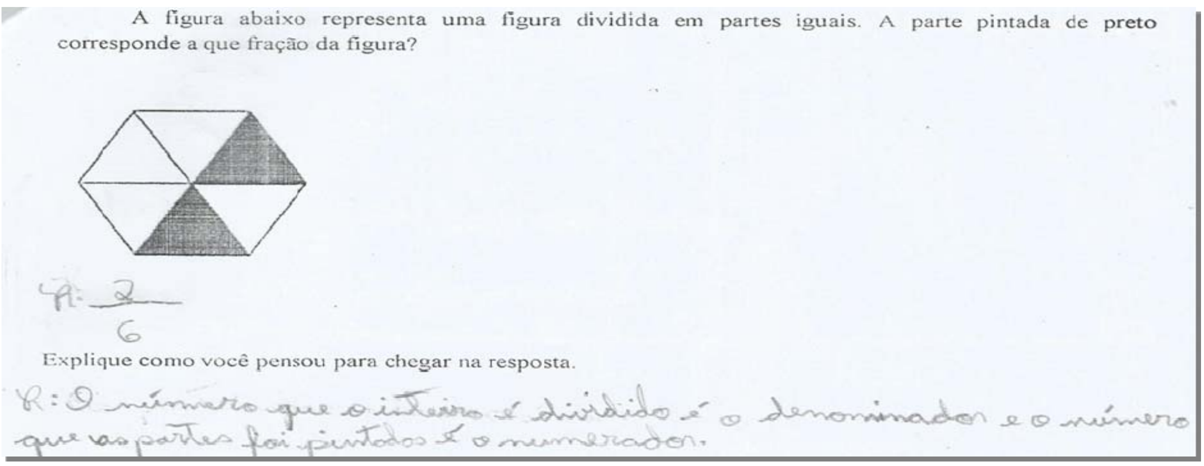
R: Se dividir em 10 partes é igual é um 0 após a virgula e tem o oito.

Fonte: dados coletados

No registro escrito do estudante E1, assim como nos registros dos estudantes E8, E15, E18, E31 e E34, podemos verificar que os mesmos realizaram mudança de notação entre a representação decimal de um número específico e sua representação fracionária, ou seja, manifestaram indícios de pensamento algébrico.

Além das unidades de registro apresentadas anteriormente, percebemos por meio dos registros dos estudantes E1, E2, E3, E4, E5, E6, E8, E10, E12, E13, E14, E15, E16, E18, E19, E20, E21, E23, E24, E25, E26, E28, E29, E30, E31, E32, E34 e E36 relativos à questão Q7, que eles apresentam indícios de transição entre notações, por meio da utilização de diferentes notações para representar o mesmo elemento. Vejamos a figura abaixo.

Figura 38 – Registro escrito do estudante E1 – Q7


A figura abaixo representa uma figura dividida em partes iguais. A parte pintada de preto corresponde a que fração da figura?

R: $\frac{2}{6}$

Explique como você pensou para chegar na resposta.

R: O número que o inteiro é dividido é o denominador e o número que as partes foi pintados é o numerador.

Fonte: dados coletados

Como podemos perceber por meio desse registro escrito o estudante E1 foi capaz de transitar entre diferentes notações para representar o mesmo elemento, pois conseguiu verificar o dado apresentada por meio da figura e realizar uma representação diferente para esse mesmo elemento, ou seja, a notação fracionária.

Unidade de contexto prévia: generalização

Essa unidade de contexto prévia é relativa a possibilidade de tornar geral uma característica que inicialmente era de uma situação particular. Inferimos a ocorrência de algum tipo de generalização se nos registros escritos dos estudantes for possível observar exploração de propriedades e relações de números naturais e inteiros, percepção de generalidade nas operações, intuição de propriedades aritméticas de modo generalizado, tratamento de um número de maneira algébrica, enfatizando a estrutura do mesmo e não apenas seu valor, resolução de expressões ou situações com números desconhecidos, ou então utilizar quando o estudante lida com a solução ou resposta de uma questão específica de modo geral.

A unidade de contexto prévia relativa à generalização pode ser dividida em unidades de registro prévias, sendo elas: generalização de padrões; generalização de relações funcionais; generalização por meio da utilização da aritmética.

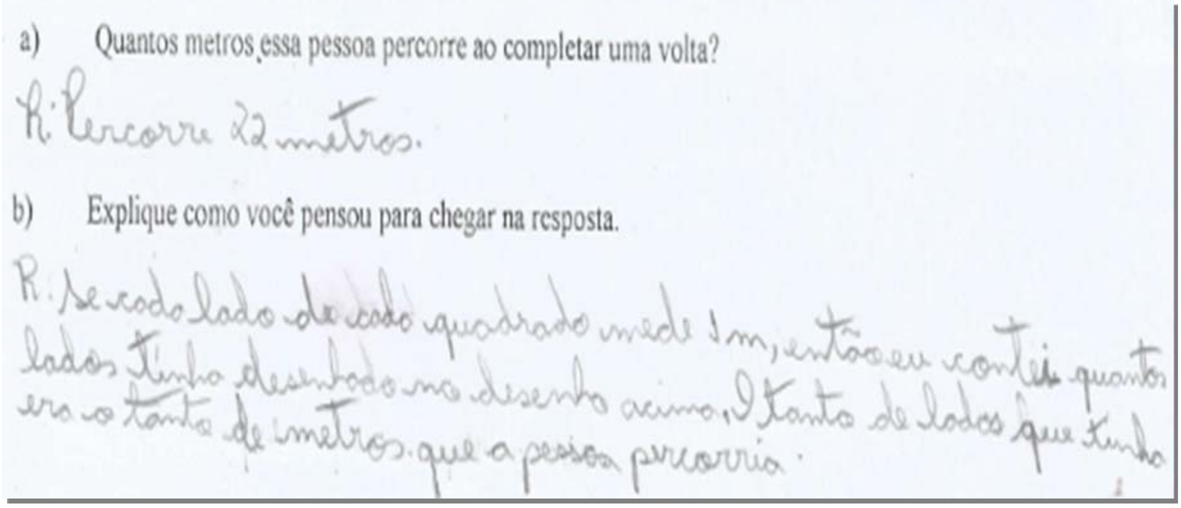
Vejamos exemplos de registros escritos que, de acordo com nosso referencial teórico, nossas inferências e análises, são representativas dessa unidade de contexto prévia e unidades de registro prévias.

Generalização de relações funcionais

A generalização de relações funcionais se dá ao tornar geral uma relação funcional que inicialmente era de uma situação específica. Para que isso ocorra é necessário verificar uma relação funcional em determinada situação e perceber que essa mesma relação é válida para situações mais gerais.

Um dos registros escritos que compõem essa unidade de registro prévia é a do estudante E1 com relação à Q3. Esse estudante manifestou indícios de pensamento algébrico por meio de seu registro escrito, como podemos ver na sequência:

Figura 39 – Registro escrito do estudante E1 – Q3


a) Quantos metros essa pessoa percorre ao completar uma volta?

R: Percorre 22 metros.

b) Explique como você pensou para chegar na resposta.

R: Se cada lado de cada quadrado mede 1m, então eu contei quantos lados tinha desenhado no desenho acima, o tanto de lados que tinha era o tanto de metros que a pessoa percorria.

Fonte: dados coletados

Na justificativa apresentada pelo estudante E1 percebemos que para chegar à resposta 22 metros ele apresentou um processo de generalização.

Baseado em sua justificativa inferimos que inicialmente E1 estabeleceu uma relação funcional, que poderia ser representada utilizando a notação de função como uma função identidade, ou seja, q(m) = m, em que q(m) representa o perímetro da figura e m representa a quantidade de lados da figura. Ao estabelecer essa relação o estudante manifestou indícios de generalização, visto que poderia, sabendo a quantidade de lados da figura, estabelecer o perímetro da mesma, por meio da relação definida.

Percebe-se que E1 não utilizou nenhum algoritmo para estabelecer que se cada lado dos quadrados mede um metro, a quantidade de lados que compõem a figura seria a mesma quantidade de metros que a pessoa percorreu.

O estudante E1 ainda se atentou ao fato de que, apenas contar a quantidade de quadrados que formavam a figura não seria o suficiente, pois existem quadrados em que mais de um lado faz parte do contorno da figura.

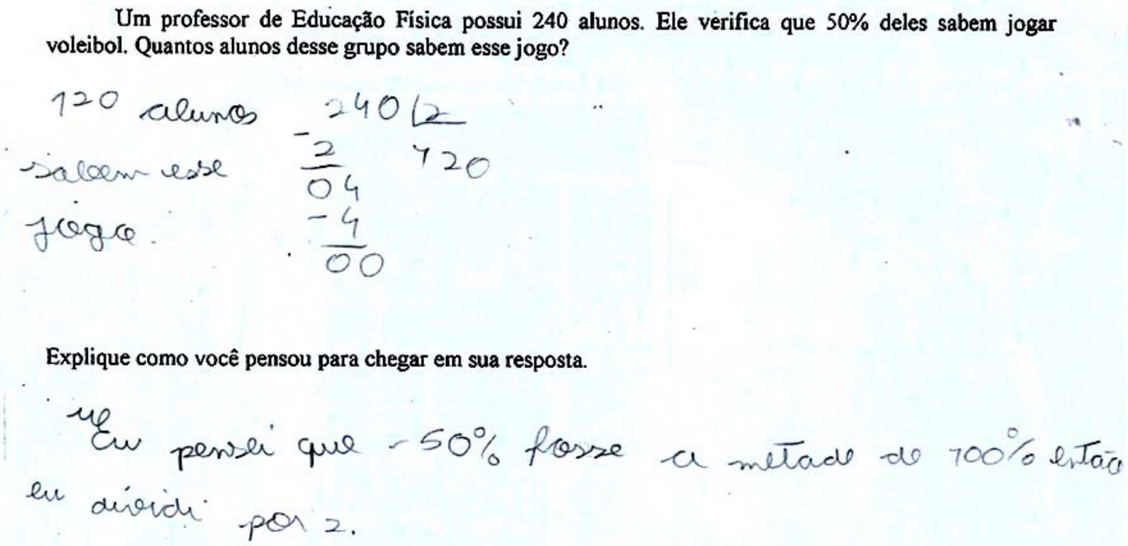
Podemos associar esse registro escrito a algumas das ideias de Kaput (2008), visto que uma das vertentes que caracterizam a Álgebra diz respeito ao estudo de estruturas e sistemas abstratos a partir de cálculos e relações, incluindo os que decorrem da aritmética, pois compreende a álgebra como aritmética generalizada, o que evidencia mais uma vez o potencial algébrico presente na aritmética.

Neste sentido, o registro escrito do estudante E1 se aproximou mais de elementos algébricos à medida que apresentou indícios de alguma generalização a partir da relação estabelecida entre a quantidade de lados dos quadrados que formam o contorno da figura e sua dimensão.

Inferimos indícios de generalização de relações funcionais nas unidades de registro dos estudantes E1, E3, E4, E11, E19, E26 e E30 com relação à Q9.

Devido à semelhança entre as resoluções, apresentaremos apenas o registro escrito do estudante E3, tendo em mente que as análises realizadas por meio desse registro escrito são generalizáveis aos estudantes citados anteriormente.

Figura 40 – Registro escrito do estudante E3 – Q9


Um professor de Educação Física possui 240 alunos. Ele verifica que 50% deles sabem jogar voleibol. Quantos alunos desse grupo sabem esse jogo?

120 alunos sabem esse jogo.

240 | 2
-2 120
04
-4
00

Explique como você pensou para chegar em sua resposta.

Eu pensei que 50% fosse a metade de 100% então eu dividi por 2.

Fonte: dados coletados

Pudemos perceber por meio do registro escrito apresentado na figura 40 que o estudante estabeleceu uma relação funcional entre o todo e sua metade, pois como vemos em sua justificativa, ele associa o todo a 100% a sua metade que é 50%, como sendo a metade do valor que o 100% representa.

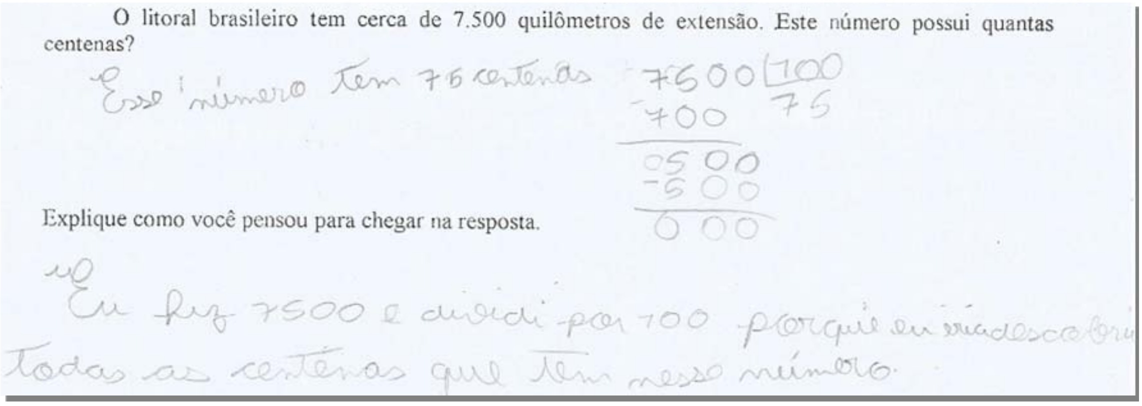
Ele não define essa relação apenas para a situação específica da questão que ele está a resolver, ele a representa de forma geral, ou seja, generaliza a relação do todo com 50% dele, ou ainda com sua metade.

Assim como E3, os estudantes E1, E4, E11, E19, E26 e E30 também apresentaram indícios de generalização de relações funcionais em seus registros escritos relativos à Q9.

Generalização por meio da utilização da aritmética

Os estudantes E3, E19 e E20 manifestaram indícios de pensamento algébrico ao apresentarem alguma generalização por meio da utilização da aritmética na resolução da Q2. Vejamos as figuras 41 e 42.

Figura 41 – Registro escrito do estudante E3 – Q2


O litoral brasileiro tem cerca de 7.500 quilômetros de extensão. Este número possui quantas centenas?

Esse número tem 75 centenas

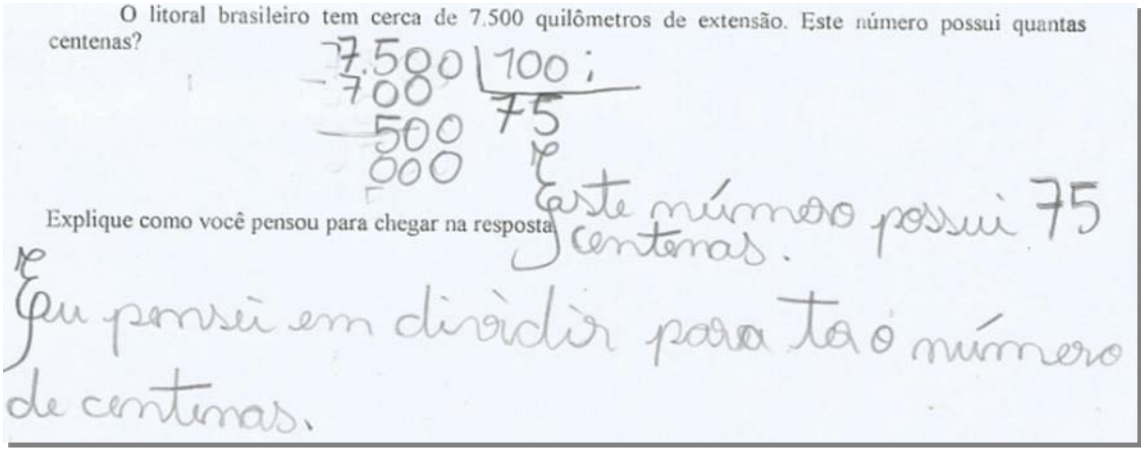
7500 | 100
-700 75
0500
-500
000

Explique como você pensou para chegar na resposta.

Eu fiz 7500 e dividi por 100 porque eu ia descobri todas as centenas que tem nesse número.

Fonte: dados coletados

Figura 42 – Registro escrito do estudante E20– Q2


O litoral brasileiro tem cerca de 7.500 quilômetros de extensão. Este número possui quantas centenas?

7.500 | 100 :
-700 75
-500
000

Este número possui 75 centenas.

Explique como você pensou para chegar na resposta.

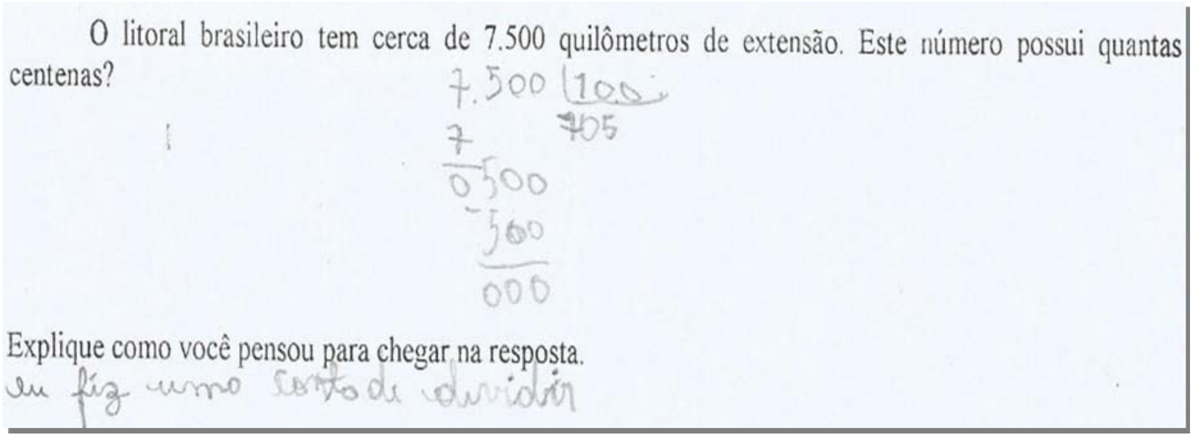
Eu pensei em dividir para ter o número de centenas.

Fonte: dados coletados

A resolução dos estudantes E3 e E20 destacaram-se das demais resoluções dessa questão, pois estes utilizaram a estratégia de dividir o número 7.500 por 100 com a intenção de verificar quantas centenas compõem este número. Inferimos que os mesmos evidenciaram alguma generalização por meio do uso da aritmética, pois intuíram que ao dividir um número por 100 descobririam a quantidade de centenas que o compõem.

O estudante E19 optou pela mesma estratégia que os estudantes E3 e E20, manifestando um indício de generalização por meio da utilização da aritmética. Contudo, não apresentou a resposta correta para a questão porque errou a divisão.

Figura 43 – Registro escrito do estudante E19 – Q2


O litoral brasileiro tem cerca de 7.500 quilômetros de extensão. Este número possui quantas centenas?

7.500 | 100
705

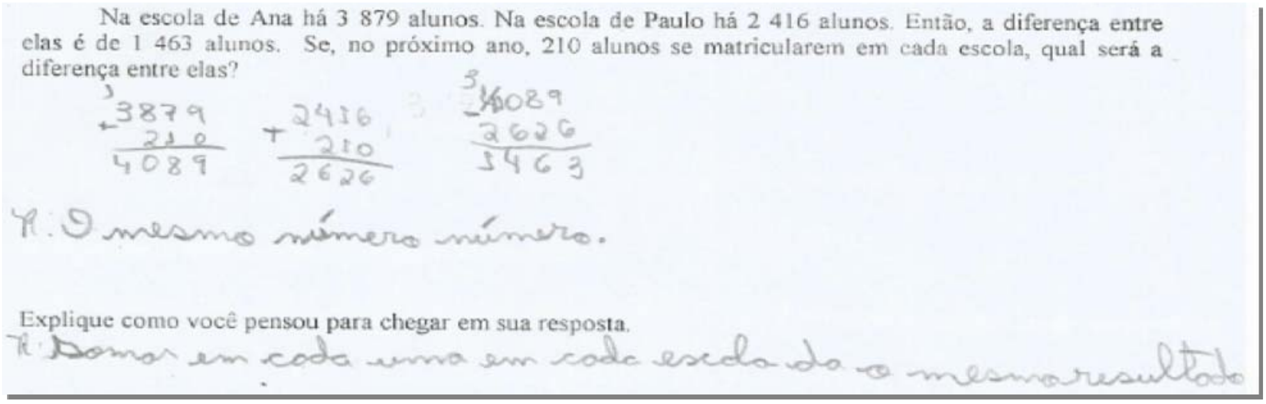
Explique como você pensou para chegar na resposta.
eu fiz uma conta de dividir

Fonte **d**ados coletados

Inferimos que o mesmo evidenciou alguma generalização por meio do uso da aritmética, pois concluiu que ao dividir qualquer número por 100 descobriria a quantidade de centenas que o compõem. Porém, ao aplicar essa relação, possivelmente por distração, ou compreensão parcial do algoritmo da divisão, não foi capaz de resolver o algoritmo de forma correta.

Além dos indícios de generalização por meio da utilização da aritmética apresentados anteriormente, inferimos que houve indícios de generalização nas unidades de registro dos estudantes E1 e E5 referentes à Q5. Devido à semelhança entre as resoluções desses estudantes, evidenciaremos apenas o registro escrito do E1.

Figura 44 – Registro escrito do estudante E1 – Q5


Na escola de Ana há 3 879 alunos. Na escola de Paulo há 2 416 alunos. Então, a diferença entre elas é de 1 463 alunos. Se, no próximo ano, 210 alunos se matricularem em cada escola, qual será a diferença entre elas?

3879 + 210 = 4089

2416 + 210 = 2626

4089 − 2626 = 1463

R: O mesmo número número.

Explique como você pensou para chegar em sua resposta.

R: Somar em cada uma em cada escola da o mesmo resultado

Fonte: dados coletados

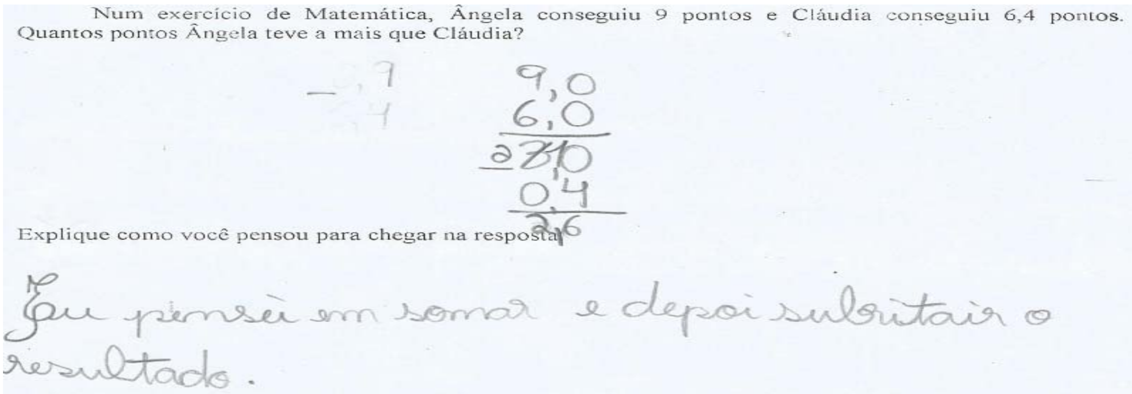
Por meio desse registro escrito é possível perceber que houve generalização por meio da utilização da aritmética, ou, ainda, de acordo com nosso referencial, indícios de aritmética generalizada.

Os estudantes E1 e E5 realizaram as operações que julgaram adequadas para resolver a questão, mas, ao terminarem, apresentaram indícios de generalização, como podemos observar na justificativa de E1. Inferimos que o mesmo quis dizer na justificativa que se somar no total de cada escola a mesma quantidade, a diferença (ou o resultado) não se altera.

Inferimos indícios de generalização, pois esses estudantes não fazem referência aos valores dos problemas em suas justificativas, eles as apresentam de forma geral, indicando que a soma de qualquer quantidade igual de estudantes nas escolas, a diferença entre a quantidade total de estudantes nas duas escolas não se altera.

O registro escrito do estudante E20 relativo à Q8, também evidencia indícios de generalização por meio da aritmética. Vejamos a figura 45.

Figura 45 – Registro escrito do estudante E20 – Q8



Fonte: dados coletados

O estudante E20 subtraiu da nota de Ângela o valor 6, que é o número inteiro relativo à nota de Cláudia, obtendo o resultado 3, e deste subtraiu a parte decimal 0,4, obtendo como resultado 2,6. Ao realizar essa operação, o estudante, mesmo sem nunca ter tido contato na escola com a propriedade aritmética como a associatividade, comutatividade, distributividade e outras, intuiu que 9-6,4 = 9 – (6+0,4), ou ainda (9 - 6) - 0,4.

Ao intuir e realizar a subtração dessa forma, E20 manifestou características de generalização por meio da utilização da aritmética.

O estudante E20 realizou uma decomposição do número 6,4 em 6+0,4, realizou a subtração e resolveu inicialmente a operação 9-6 e do resultado da mesma subtraiu 0,4. Deste modo inferimos a respeito da generalização da aritmética, pois o estudante explorou uma relação de igualdade entre expressões numéricas,

Ao realizar essa exploração, o estudante (E20) também intuiu a propriedade associativa e distributiva, visto que inferimos que o estudante percebeu que 9 – (6+0,4) = 9 – 6-0,4.

Cabe ressaltar que o estudante não deixa claro em sua justificativa o que o levou a realizar essa decomposição.

Agora que já expusemos nossas análises, e, em concordância com a metodologia utilizada por nós para a realização das coletas e análise dos dados, vamos apresentar nossas categorias, inferências e considerações.

4.2 AS CATEGORIAS – MANIFESTAÇÕES DE PENSAMENTO ALGÉBRICO

Aprender álgebra significa ser capaz de pensar algebricamente em diferentes situações, envolvendo relações e outras características desse pensamento (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Ao pensar em estruturas aritméticas, por vezes os estudantes estabelecem relações entre conjuntos, de forma mais geral, pois em si a aritmética tem um caráter algébrico com relação às estruturas e relações.

De acordo com Kaput (2008), uma das vertentes que caracterizam a Álgebra diz respeito ao estudo de estruturas e sistemas abstratos a partir de cálculos e relações, incluindo os que decorrem da aritmética, pois este autor compreende a álgebra como aritmética generalizada, o que evidencia mais uma vez seu potencial algébrico.

Para Kieran (2004), uma importante característica de pensamento algébrico é analisar e representar relações matemáticas e relações entre grandezas, ocorrendo manifestação de indícios de pensamento algébrico quando o sujeito revela e argumenta, mesmo que em linguagem natural, essas relações.

Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) também apresentam como característica de pensamento algébrico o estabelecimento de relações, mesmo que essas relações envolvam números, ou seja, relações com estruturas aritméticas. Tendo em mente a etapa escolar dos participantes dessa pesquisa, poderemos ver adiante que a maioria das relações estabelecidas por eles envolve propriedades e situações aritméticas.

Blanton e Kaput (2005) afirmam que o pensamento algébrico é um tipo de pensamento que tem como uma de suas principais características o uso da aritmética como campo para expressar generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais, em que ocorre a exploração entre correspondência de quantidades, relações recursivas e desenvolvimento de regras para descrever relações.

Os autores Lins e Gimenez (1997) afirmam que o pensamento algébrico se manifesta por meio da investigação de regularidades e estabelecimento de padrões.

Depois de realizar inferências e análises das unidades de registro em busca de manifestação de indícios de pensamento algébrico, apoiados nos teóricos que compõem nosso referencial e em nossas unidades de contexto e, ainda, num processo de idas e vindas, foi possível realizar algumas aferições que possibilitaram organizar as unidades de registro em nossas unidades de contexto e por sua vez a percepção das categorias dessa investigação.

Tendo como base os estudos de Kaput (1999) para esse trabalho, a formulação de conjecturas e a validação das mesmas é um indício de pensamento algébrico. Esse autor diz que o pensamento algébrico é, entre outras coisas, a capacidade de raciocinar dedutiva e indutivamente e realizar conjecturas e argumentar a respeito delas.

Consideramos que o estudante formulou uma conjectura quando baseado nos dados de um problema ou situação define hipóteses para o mesmo e que acontece a validação das conjecturas quando verifica a veracidade das hipóteses por meio de procedimentos matemáticos, por testes, ou então pela própria experiência.

Essa unidade de contexto prévia está associada a uma unidade de registro prévia, a validação de conjecturas. Apoiados em nosso referencial teórico acreditamos que a formação de conjecturas em associação com a validação das mesmas é uma característica de pensamento algébrico. Vejamos alguns dos registros escritos que compõem essa unidade de contexto.

Investigações a respeito do pensamento algébrico vêm valorizando diferentes representações para expor ideias matemáticas, que vão muito além das representações algébricas simbólicas, como, por exemplo, a utilização e interpretação de três sistemas simbólicos fundamentais, as tabelas, os gráficos e a linguagem natural (CANAVARRO, 2007).

Além disso, Ponte, Branco e Matos (2009) consideram que ocorre manifestação de pensamento algébrico quando estudantes traduzem informações que estavam representadas por meio de um determinado tipo de representação e utilizam outra representação para comunicar a mesma ideia.

Consideramos nesse trabalho que a mudança de representação ou transição entre notações é um dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico, sendo essa uma das vertentes da teoria de Ponte, Branco e Matos (2009), em que transição entre notações pertence à vertente representar.

Kieran (2004) afirma que ocorre manifestação de pensamento algébrico quando o estudante expressa ideias algébricas, mesmo que em linguagem natural, ou ainda expressa a mesma ideia matemática por meio de diferentes elementos e notações, entre eles, diagramas, tabelas, expressões numéricas e gráficos.

De forma similar Kaput (2005) relata a relação entre o pensamento algébrico e a utilização de diferentes sistemas de representação. Para esse autor, utilizar notações ou representações diferentes para a mesma ideia matemática é manifestar indícios de pensamento algébrico.

Muitos dos autores estudados para compor nosso referencial teórico relatam a importância de generalizar para o pensamento algébrico. Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) afirmam que o pensamento algébrico é manifestado quando, entre outros, o estudante desenvolve algum tipo de processo de generalização, mesmo que isso aconteça sem a utilização da linguagem algébrica formal, podendo acontecer essa generalização em situações e campos distintos, não se restringindo apenas à Matemática. Para esses autores, os estudantes serem capazes de perceber regularidades e realizar algum tipo de generalização deve ser o objetivo essencial para o ensino da álgebra no Ensino Fundamental.

Para Blanton e Kaput (2005), uma das principais características do pensamento algébrico é a utilização da aritmética para expressar e formalizar generalizações, a generalização de padrões numéricos e relações funcionais, juntamente com a utilização de modelagem de situações para expressar e formalizar generalização e, generalização de sistemas matemáticos abstratos de cálculo e relações.

Para Kaput (1999), um dos cinco aspectos que ele apresenta a respeito do pensamento algébrico é a generalização e formalização de padrões e restrições, sendo esse aspecto uma das bases para que ocorra a manifestação de pensamento algébrico. Este autor ainda afirma que a generalização é o centro do pensamento algébrico.

Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) consideram que o desenvolvimento do pensamento algébrico passa por várias fases: a fase pré-algébrica, em que o estudante usa um elemento considerado algébrico, por exemplo, as letras, podendo ser um símbolo criado pelo próprio sujeito, mas que ele ainda não o idealiza como um número generalizado; a fase de transição da aritmética para a álgebra, na qual o estudante concebe a essência de um número qualquer, fazendo algumas generalizações, utilizando ou não símbolos; e, a última fase em que o pensamento algébrico está mais desenvolvido e os estudantes são capazes de conceber a existência de variáveis dentro de um intervalo numérico, além de serem capazes também de pensar e se expressar genericamente por escrito e operar com variáveis.

Podemos perceber a importância que os autores citados anteriormente (FIORENTINI; MIGUEL e MIORIM, 1993) atribuem para o processo de generalização para o pensamento algébrico, visto que as próprias fases de desenvolvimento do pensamento algébrico estão associadas à manifestação de algum tipo de generalização ou não.

Já Ponte, Branco e Matos (2009) atribuem a generalização na vertente raciocinar. Compõem essa vertente o pensar particularmente em propriedades e analisá-las; generalizar e agir a respeito dessas generalizações, evidenciando, assim, compreender regras; e, deduzir.

As categorias, de acordo com Bardin (2004), devem unificar elementos comuns das unidades de registro. Durante as idas e vindas comuns do processo de pesquisa, com a intenção de buscar sob um título genérico evidenciar elementos comuns dos dados, verificamos que nossas unidade de registro prévias já unificavam elementos comuns dos registros, ou seja, são as nossas categorias.

Observamos que as unidades de registro prévias deveriam ser as categorias dessa pesquisa e não as unidades de contexto prévias, pois algumas delas não havia nenhum registro escrito dos estudantes. Por exemplo, na unidade de contexto prévia *generalização* temos a unidade de registro prévia *generalização de padrões* que não teve nenhum estudante que, de acordo com nossas análises, manifestou essa característica, sendo assim, a generalização de padrões não poderia ser uma das categorias.

Destacamos que tiveram unidades de registro prévias que não se efetivaram, sendo elas o estabelecimento de relações envolvendo a percepção de aspectos invariantes e a generalização de padrões, pois inferimos que não houveram registros escritos de estudantes que apresentassem essas características de pensamento algébrico.

A seguir apresentaremos as categorias que foram organizadas a partir das resoluções dos estudantes. Como dito anteriormente, essas categorias foram organizadas, de acordo com a manifestação do que consideramos nessa pesquisa, características de pensamento algébrico.

I. **Estabelecimento de relação funcional;**
II. **Estabelecimento de relação de igualdade ou equivalência;**
III. **Estabelecimento de relação envolvendo regularidades;**

IV. **Estabelecimento de relação envolvendo comparação entre grandezas;**

V. **Formulação de conjectura e validação da conjectura;**

VI. **Interpretação de dados representados em figuras, tabelas ou gráficos;**

VII. **Utilização de diferentes notações para representar a mesma ideia matemática;**

VIII. **Generalização de relações funcionais;**

IX. **Generalização por meio da utilização da aritmética.**

Com a intenção de resumir nossas categorias, na sequência apresentaremos o quadro 18, o qual apresenta as categorias e os registros que as compõem.

Quadro 17 – Categorias da pesquisa

Categorias	Registro escrito dos estudantes em cada uma das categorias
Estabelecimento de relação funcional	E1, E3, E4, E11, E19, E20, E26, E30
Estabelecimento de relação de igualdade ou equivalência	E1, E3, E4, E5, E6, E8, E15, E16, E20, E26, E30, E31, E34
Estabelecimento de relação envolvendo regularidades	E1, E3, E4, E5, E8, E14, E16, E19, E26, E27, E30, E31, E34, E38
Estabelecimento de relação envolvendo comparação entre grandezas	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E10, E12, E13, E14, E15, E16, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E28, E29, E30, E31, E32, E34, E35, E36
Formulação de conjectura e validação da conjectura	E14, E20, E30
Interpretação de dados representados em figuras, tabelas ou gráficos	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E10, E11, E12, E13, E14, E16, E17, E18, E19, E20, E21, E22, E24, E25, E26, E28, E29, E30, E31, E32, E33, E34, E35, E36, E37, E38
Utilização de diferentes notações para representar a mesma ideia matemática	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E28, E30, E31, E33, E34, E35, E36
Generalização de relações funcionais	E1, E3, E4, E11, E19, E26, E30
Generalização por meio da utilização da aritmética	E1, E3, E5, E19, E20

Fonte: Dados coletados (2014)

Como é possível perceber, por meio do quadro anterior, o registro escrito de um estudante pode pertencer a categorias diferentes, ou seja, não utilizamos a exclusão mútua.

Por meio da análise do quadro das categorias dessa pesquisa, foi possível perceber que todos os estudantes evidenciaram a manifestação de pelo menos uma das características de pensamento algébrico,

A composição de nossas categorias corrobora com a ideia de Kieran (2004), ou seja, que nos anos iniciais o pensamento algébrico envolve a forma como os estudantes se relacionam com tarefas, ou seja, como pensam a respeito delas e, ainda, que este tipo de pensamento, mesmo sem a utilização de símbolos algébricos, pode ser manifestado por meio de análises de relações entre quantidades, percepção de mudanças, observação de estruturas matemáticas, generalização, modelagem, conjecturas e verificação das mesmas.

Com relação às categorias também é possível analisar que a que contém mais registros escritos é a *interpretação de dados representados em figuras, tabelas ou gráficos*. Isso possivelmente se deve pela nossa escolha com relação às questões, ou também por atividades que buscam a interpretação de figuras, tabelas e gráficos, consideradas como rotineiras para a professora da turma que participou dessa pesquisa.

Esse fato corrobora com a ideia de que é possível que professores auxiliem no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes, mas que esse desenvolvimento demanda tempo, por se tratar de um processo (KIERAN, 2004).

O pensamento algébrico pode ser manifestado por meio do uso da aritmética, ao evidenciar compreensão de propriedades matemáticas, como a comutatividade, ordenação, classificação, valor posicional dos algarismos e agrupamentos, com a utilização da simbologia própria da álgebra e também pode ser manifestado com o auxílio da simbologia aritmética, linguagem natural ou informal.

Este pensamento se manifesta em situações matemáticas, que envolvem expressões algébricas, funções, equações, inequações e pode se manifestar em situações não matemáticas, sendo interno ao indivíduo e podendo ser evidenciado em qualquer etapa escolar. É independente da tarefa, mas consideramos que existem tarefas que podem promover o desenvolvimento deste pensamento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho constituiu-se de um estudo relativo à produção escrita de estudantes do Ensino Fundamental I em questões de documentos da Prova Brasil em busca de manifestações de pensamento algébrico.

Para que o estudo dos registros escritos dos estudantes fosse possível, iniciamos uma busca bibliográfica com a intenção de verificar o que é o pensamento algébrico e quais são as características desse tipo de pensamento. Essa busca seguiu os procedimentos metodológicos da análise documental. Cabe aqui destacar que os autores estudados nesse trabalho, não são os únicos a estudarem o pensamento algébrico, sendo assim, poderiam ter sido outros.

Feita essa busca bibliográfica, foi possível definirmos o que consideramos nesse trabalho como características de pensamento algébrico. Nesse momento da pesquisa, ou seja, com a elaboração do capítulo da fundamentação teórica, foi possível responder a primeira parte da nossa pesquisa norteadora (o que caracteriza o pensamento algébrico, segundo autores que pesquisam esse assunto?).

Tendo em mente o objetivo dessa pesquisa iniciou-se um processo de estudo da produção escrita dos participantes. Para poder lidar, inferir e analisar essa produção, seguimos procedimentos à luz da Análise de Conteúdo.

A produção escrita dessa pesquisa são os registros escritos de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental relativos a algumas questões retiradas de documentos nacionais relacionados à Prova Brasil, sendo estes PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação e Modelo Teste Prova Brasil.

Nosso objetivo com a realização dos processos de pesquisar a respeito de características de pensamento algébrico, bem como da manifestação dessas características por estudantes que não tiveram contato formal com a álgebra foi de *investigar características do pensamento algébrico manifestadas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental I, que ainda não tiveram contato com a álgebra formal, de uma escola municipal da cidade de Apucarana – PR.*

Para atingir nosso objetivo traçamos trajetórias interpretativas, de construções e reconstruções, idas e vindas, que resultaram, unidades de contexto prévias e unidades de registro prévias. Essas unidades foram elaboradas tendo em mente nossas interpretações e inferências, baseadas na literatura estudada por nós, literatura essa que constituiu nosso referencial teórico.

Por meio da organização dos dados, inferências, unidades de registro dos estudantes e análises, foi possível estabelecer as categorias. Nossas categorias se deram tendo como apoio nossas unidades de registro prévias, que agrupavam elementos característicos de pensamento algébrico, determinados nesta pesquisa com base na teoria estudada (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; KIERAN, 2004, 2007; FIORENTINI, 2001; FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2005; FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; NCTM, 2000; LINS; GIMENEZ, 1997; BLANTON; KAPUT, 2005; KAPUT, 1999).

As categorias dessa pesquisa foram organizadas tendo como elemento comum e unificador as características de pensamento algébrico que foram manifestadas pelos estudantes, nas resoluções das questões analisadas, ou seja, nossas unidades de registro prévias, as quais apresentavam registros escritos dos estudantes.

Apoiados em nossas categorias, fundamentação teórica e em todo o processo de pesquisar, com o auxílio de nossas categorias pudemos responder às questões norteadoras dessa pesquisa, ou seja, o *que caracteriza o pensamento algébrico segundo autores que pesquisam esse assunto? Os estudantes que nunca tiveram contato formal com conceitos e símbolos algébricos manifestam características de pensamento algébrico?*

A primeira parte dessa pergunta pode ser respondida com por meio do mapa conceitual construído nessa pesquisa, que teve como base nosso referencial teórico, ou seja, pesquisadores da área de Educação Matemática e do pensamento algébrico.

Assim, a resposta para a primeira questão norteadora dessa pesquisa é que o que caracteriza o pensamento algébrico, segundo autores que pesquisam esse assunto, é o estabelecimento de relações que podem envolver equivalências, regularidades, percepções de aspectos invariantes e comparação entre grandezas. A formulação de conjecturas e validação das mesmas e a transição entre notações para representar uma mesma ideia matemática, assim como a interpretação de dados representados em figuras, tabelas e gráficos, também são elementos caracterizadores deste pensamento, que tem como um dos principais elementos a generalização, seja de padrões, ou de relações.

Já a resposta para nossa segunda questão de investigação (que características de pensamento algébrico são manifestadas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental na resolução de questões retiradas de documentos da Prova Brasil?) se encontra nas categorias, ou seja, os participantes de nossa pesquisa manifestaram: Estabelecimento de relação de igualdade ou equivalência; Estabelecimento de relação envolvendo regularidades; Estabelecimento de relação envolvendo comparação entre grandezas; Formulação de conjectura e validação da conjectura; Interpretação de dados representados em figuras, tabelas ou gráficos; Utilização de diferentes notações para representar a mesma ideia matemática; Generalização de relações funcionais; Generalização por meio da utilização da aritmética.

Podemos por meio das análises e das categorias levantar questionamentos a respeito da possibilidade desenvolver o pensamento algébrico em estudantes em todas as etapas escolares sem a necessidade da introdução da simbologia formal da álgebra.

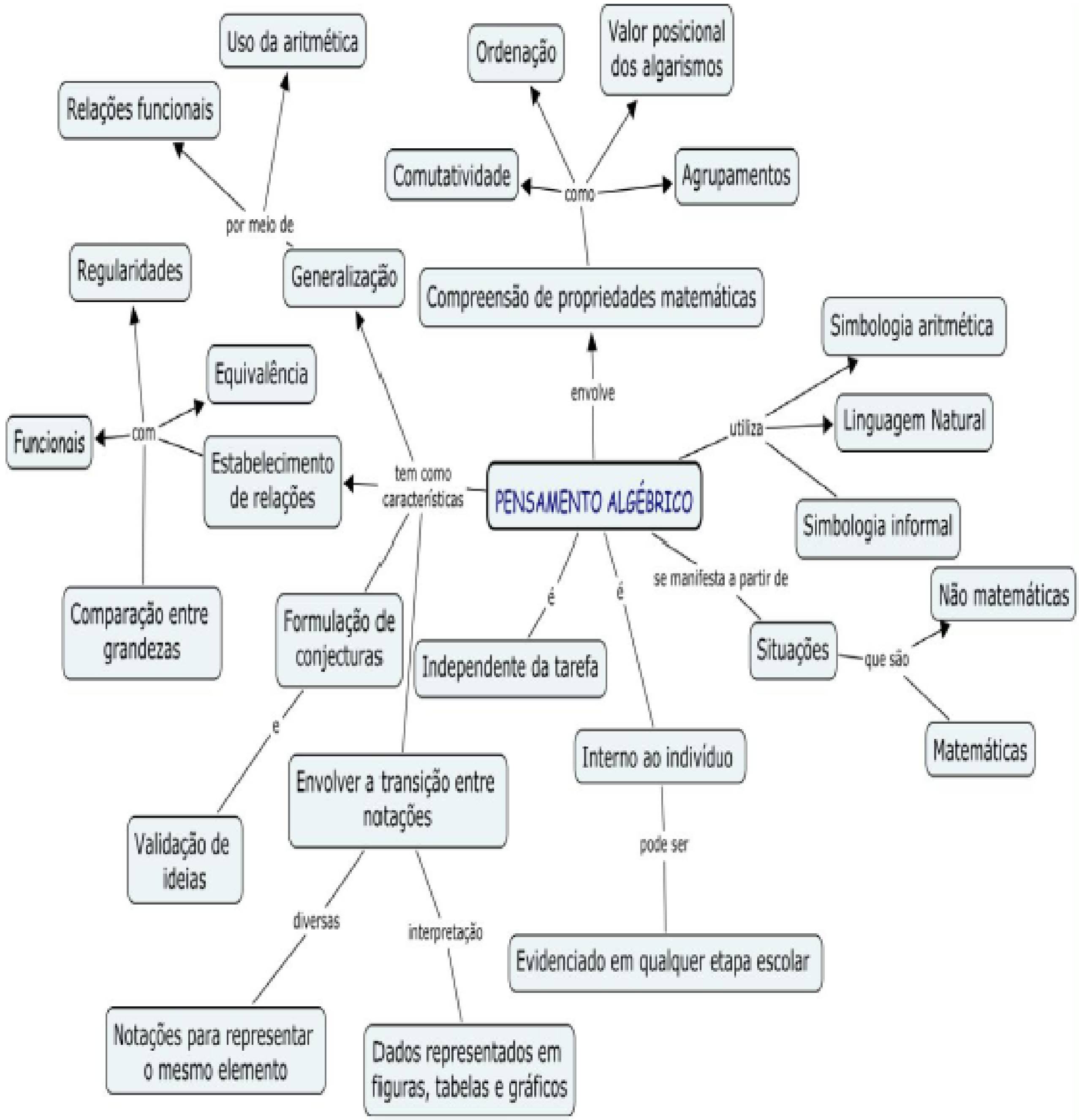
Ao longo da pesquisa confirmando a hipótese inicial de que é possível perceber uma relação do pensamento algébrico com o processo de aprendizagem e com a forma como os sujeitos pensam a respeito de certas situações matemáticas que envolvem a álgebra.

Nossas categorias corroboram com a ideia de que é possível e preciso desenvolver com os estudantes o pensamento algébrico, proporcionar a eles situações que estimulem o estabelecimento de relações, percepção de padrões e generalizações. Acreditamos que se o ensino da álgebra fosse voltado ao desenvolvimento deste tipo de pensamento, os estudantes construiriam maior significado para este ramo da Matemática, assim como teriam menor dificuldade em lidar com os formalismos algébricos dos anos finais do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio.

Percebemos que mesmo não utilizando a simbologia algébrica, estudantes perceberam e estabeleceram padrões existentes nas operações aritméticas e tentaram explicá-las, por meio da linguagem natural.

De modo geral os estudantes foram capazes de realizar transição entre notações, evidenciando a possibilidade de utilizar mais de uma representação para a mesma ideia matemática; demonstraram algum tipo de processo de generalização, apoiados em relações, padrões e em propriedades aritméticas; estabeleceram algum tipo de relação e/ou comparação entre grandezas; percepção de padrões; realização de conjecturas e validação dessa conjectura; e, manifestação de indícios de aritmética generalizada. Vejamos a figura abaixo.

Figura 46 – Mapa conceitual das características de pensamento algébrico manifestadas pelos participantes da pesquisa



Fonte: do autor (2014)

O mapa conceitual apresentado anteriormente foi construído tendo como base as categorias dessa pesquisa e também no mapa conceitual apresentado no capítulo 1.

Ao realizar a comparação entre o mapa conceitual de características do pensamento algébrico baseado na literatura estudada[29] e o mapa conceitual das características de pensamento algébrico manifestadas pelos participantes da pesquisa é possível perceber que o segundo mapa é reduzido, pois algumas das características de pensamento algébrico que elencamos por meio da pesquisa bibliográfica não foram manifestadas pelos estudantes.

Podemos perceber com auxílio da figura 46 que os estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental I que nunca tiveram contato formal com a álgebra e mesmo sem a utilização de uma linguagem formal da álgebra, manifestaram a utilização de diferentes notações para a mesma ideia matemática; demonstraram algum tipo de processo de generalização; estabeleceram relações, comparações e padrões; realizaram conjecturas e validaram-nas; e, deram indícios em suas resoluções de aritmética generalizada.

Mesmo os estudantes em geral, de acordo com a professora regente da turma, tendo estudado desde os primeiros anos da Educação Básica, na escola, a forma como os mesmos pensam, se expressam e manifestam os indícios de pensamento algébrico é totalmente diferente, o que evidencia que o pensamento algébrico é independente da tarefa e é interno ao estudante.

Um fato que nos chamou a atenção é que, de modo geral, mesmo as questões sendo consideradas por nós rotineiras, pois são frequentemente apresentadas em livros didáticos, o índice de erro nas questões foi consideravelmente alto, chegando a atingir em algumas questões aproximadamente 90%.

Com essa pesquisa, percebemos que realmente é possível desenvolver o pensamento algébrico em estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental I que nunca tiveram contato formal com a álgebra, mas é preciso realizar escolhas pedagógicas que objetivem isso. Sabemos, porém, que essa não é uma tarefa das mais simples, visto as particularidades de cada sujeito.

Nós não devemos deixar para desenvolver o pensamento algébrico apenas a partir da introdução da simbologia, ou seja, nos anos iniciais do Ensino Fundamental II, é possível iniciar esse desenvolvimento desde os anos iniciais da Educação Básica.

---

[29] Esse mapa conceitual se encontra na página 38 desse trabalho.

Essa pesquisa tem importância por colabora para que o Projeto Observatório da Educação atinja alguns dos seus objetivos, pois promoveu certa verificação de como estudantes da escola participante do projeto resolvem questões de documentos relacionados à Prova Brasil, visto que essa avaliação se mostrou uma grande preocupação das professoras regentes dessa escola.

Além disso, essa pesquisa teve grande contribuição para a formação da pesquisadora, mas temos em mente, que pela própria característica da pesquisa qualitativa, não existe apenas uma interpretação possível para os dados que foram por nós analisados. Deste modo, essa pesquisa apresenta apenas uma das possíveis interpretações.

Podemos destacar também que, como característica da própria pesquisa qualitativa, foi impossível realizar uma leitura totalmente impessoal dos dados e a interpretação pela pesquisadora, obviamente, influenciou fortemente as conclusões. Sendo assim, reconhecemos a possibilidade de inúmeras interpretações dos dados distintas das apresentadas na pesquisa.

Agora, com nossas questões norteadoras respondidas, apresentaremos algumas de nossas considerações.

Nesse sentido, podemos deixar um indicativo de pesquisas futuras a serem realizadas, como: a forma que ocorre a transição entre a linguagem natural e a linguagem algébrica; como professores podem auxiliar no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes; como o pensamento algébrico manifestando antes do contanto formal dos estudantes evolui quando estes passam a lidar com a álgebra, entre diversas outras.

Essa pesquisa nos deixou muito claro a necessidade de mudança, de ensinar uma álgebra que é dinâmica e que é preciso acreditar na capacidade dos nossos estudantes.

REFERÊNCIAS

ARCAVI, A. **Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. For the learning of Mathematics**, 1994. p.24-35.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70 Ltda., 1977.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 3.ed. Lisboa: Edições 70 Ltda., 2004.

BLANTON, M.; KAPUT, J. (2000). Generalizing and progressively formalizing in a third grade mathematics classroom: Conversations about even and odd numbers. In: FERNÁNDEZ, M. (Ed.) **Proceedings of the XXII Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Columbus, OH, ERIC Clearinghouse, p.115.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**. v.36, n.5, p.412-446, 2005.

BLANTON, M. **Algebra and the Elementary Classroom: Transforming Thinking, Transforming Practice.** Portsmouth, NA: Heinemann, 2008

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Qualitative Research for Education: an introduction for to theory and methods***.* Boston: Allyn and Bacon, 1982.

BRASIL. Ministério da Educação. **PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: Prova Brasil: ensino fundamental: matriz de referência, tópicos e descritores**. Brasília: MEC, SEB; INEP, 2008. 200p.:il.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais (1ª a 4ª série)**: Matemática. Brasília: MEC-SEF, 112p.1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros curriculares nacionais: primeiro e segundo ciclos do ensino fundamental (Tema Transversal Saúde)**. Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF, 1998.

CANAVARRO, A**. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos**. Quadrante, 2009, p.81-118.

CAI, J; MOYER, J. **Developing algebraic thinking in earlier grades: some insights from international comparative studies' in National Council of Teachers of Mathematics** ,2008. Algebra and algebraic thinking in school mathematics (70th yearbook) Reston Virginia: NCTM, 169-193

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A.; SCHWARTZ, J. Early algebra is not the same as algebra early. In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Ed.). **Algebra in the Early Grades Mahwah**. New Jersey: Erlbaum, 2007.

CYRINO, M. C. C. T. **Projeto: Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática. Londrina**: Universidade Estadual de Londrina – UEL, 2010.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. **Revista Zetetike**. Campinas: FE – Unicamp, ano 3, n.4, p.1-38, 1995.

FIORENTINI, D. **Rumos da Educação Matemática**. In: Anais do Seminário de Avaliação das Feiras Catarinense de Matemática. Brusque, SC, 201.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. Relatório de Projeto da Fapesp [processo 03/11233-4]. FE – UNICAMP: Campinas, 2005.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. (Org.) **Por trás da porta, que Matemática acontece?** Campinas: Editora Gráfica FE/UNICAMP – CEMPEM, 2001.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. **Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar**. **Pro-Posições**, v.4, n.1, p.78-91, 1993.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F.; CRISTOVÃO, E. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. In: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULO E NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR, 2005, Lisboa. Anais... Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2005.

FRIENDLAND, A.; TABACH, M. **Promotion multiple representations in algebra. Reston**, Virginia. NCTM, A. A. Cuoco, 2001. pp.173-185.

GIL, K. H.; PORTANOVA, R. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra.** In: Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte: SBEM, 2007

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS. Disponível em: <**http://www.inep.gov.br**> Acesso em: 27 out. 2014.

KAPUT, J. J. Teaching and learning a new algebra. In: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. (Ed.). **Mathematics classrooms that promote understanding.** Mahwah, NJ: Erlbaum, p.133-155, 1999.

______. Teaching and learning a new algebra. **With Understanding**. University of Massachusetts – Dartmouth, 2004.

KAPUT, J. **What is algebra? What is algebraic reasoning?** In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Ed.) Algebra in the Early Grades. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008. p. 5-17.

KAPUT, J. J.; BANTON, M. Algebrafying the elementary Mathematics experience Part. In: **Transforming task structures**. In: CHICK, H.; STACEY, K.; VECENT, J. (Ed.), Proceedings of the 12th ICMI study conference: The future of the teaching and learning of algebra (v.2, p.344-352). Melbourne, Australia: The University of Melbourne, 2001.

KIERAN, C. **Learning and teaching of school algebra**. In D. A Grows (Ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, p.390-419, 1992.

KIERAN, C. **The changing face of school algebra**. In: C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (Eds.), **8th International Congress on Mathematical Education**: Selected lectures, p. 271-290. Seville, Spain: S.A.E.M. Thales, 1996.

KIERAN, C. **Algebraic thinking in the early grades: What is it? The Mathematics Educator**, v.8, p.139-151, 2004.

KIERAN, C. **Learning and teaching algebra at the middle school through college levels**. In F. K. Lester (Ed.), **Second handbook of research on mathematics teaching and learning** (pp. 707–762). Charlotte, NC: Information Age. 2007

______. Learning and teaching of school algebra. In: GROWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, p.390-419, 1992.

______. The changing face of school algebra. In: ALSINA, C.; ALVAREZ, J., HODGSON, B.; LABORDE, C.; PÉREZ, A. (Eds.), ***8th International Congress on Mathematical Education**: Selected lectures,* p.271-290. Seville, Spain: S.A.E.M. Thales, 1996.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LINS, R. C.; KAPUT, J. The early development of algebraic thinking. In: STACEY, Kaye; CHICK, Helen (Org.). **The future of the teaching and learning of algebra**. Dordrecht: Kluwer, 2004. p.47-70.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.** São Paulo: EPU, 1986.

MIGUEL, A; FIORENTINI, D; MIORIM, M. Â. **Álgebra ou Geometria: Para onde Pende o Pêndulo?** Pró-Posições, v. 3, n. 1(7), p. 39 – 54, mar. 1992.

MINAYO, M.C.S. **O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde**. São Paulo: Hucitec, 2007

MORAES, R. **Análise de conteúdo**. *Revista Educação*, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

MURRAY, M. K. **Early Algebra and Mathematics Specialists**. University of Virginia Mathematics Outreach Office. School of Continuing and Professional Studies. Charlottesville, VA 22904. **The Journal of Mathematics and Science** – Collaborative Explorations, 2010. v.12, p.73-81.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS**. Every child Statement.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1999.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. 1.ed., 2000. Tradução Portuguesa dos Principles and Standards for School Mathematics. 2.ed. Lisboa: APM, 2008.

NEVES, P. S. O. **Um estudo sobre o significado, o ensino e a aprendizagem da álgebra**. Dissertação (Mestrado). São Paulo: USP, 1995.

______. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. Lisboa: APM. 2007.

PIAGET, Jean. Coleção Os Pensadores. **A Epistemologia Genética; Sabedoria e Ilusões da Filosofia; Problemas de Psicologia Genética**. 3.ed. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

PONTE, J. **Números e álgebra no currículo escolar**. In: Números e álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores. Porto: SEM/SPCE, 2006. p.5-27.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: ME – DGIDC, 2009.

SANTOS, L. G. **Introdução do pensamento algébrico: um olhar sobre professores e livros didáticos de matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação). Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo, 2007.

SCARLASSARI, N. T. **Um estudo de dificuldades ao aprender Álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do Ensino Fundamental**. Campinas: Dissertação de Mestrado – UNESP, 2007.

SILVA, M. H. **Estudos das visões sobre álgebra presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática do ensino fundamental em relação a números e operações**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC/SP, São Paulo (SP). 2006. 146p.

SMITH, E. **Representational thinking as a framework for introducing functions in**. In: KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Ed.). Algebra in the Early Grades. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008. p.19-56.

APÊNDICES

APÊNDICE A:
Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Nome:..

Identidade:..

CPF:...

Telefone:...

E-mail:...

Sob a responsabilidade da mestranda Renata Karoline Fernandes, com orientação da Profª. Drª. Angela Marta Pereira das Dores Savioli, declaro que autorizo a utilização parcial ou integralmente dos registros escritos dos estudantes que cursam o 5º ano do Ensino Fundamental no ano de 2013 da Escola Municipal José Brasil Camargo. Escola participante do Programa Observatório da Educação – Projeto Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática. Os dados coletados serão utilizados para a realização da dissertação da responsável, tendo em vista a análise da produção escrita dos estudantes com relação à manifestação de pensamento algébrico. Essa pesquisa poderá ser divulgada em diferentes meios de acordo com a necessidade. Cabe ressaltar que os participantes da pesquisa têm a garantia de sigilo com relação às suas identidades.

Declaro, ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Londrina, _____/_____/_______.

NOME:____

ASS.:____

APÊNDICE B:
Descrição das aplicações das questões

Relato da aplicação do dia 23/04/2013 (Q1, Q2 e Q3)

A aplicação das questões para essa turma ocorreu por volta das 14h, horário em que termina o intervalo do período da tarde da turma do 5º ano.

No dia 23/04/2013 tive o primeiro contato com os estudantes e, com a intenção de estabelecer um ambiente de confiança, num primeiro momento me apresentei, expliquei o motivo pelo qual alguns estudantes da UEL e professora da mesma instituição vinham uma vez por semana para a escola, expliquei de forma geral as atividades que realizávamos com algumas das professoras da escola deles e conversei com os estudantes a respeito das atividades que iriam realizar e a importância que elas teriam para este trabalho.

Foi esclarecido aos estudantes que as questões não faziam parte de uma avaliação e que poderiam resolvê-las tranquilamente, de acordo com seus próprios meios e conhecimentos e, ainda, que nenhum tipo de pergunta feita por eles seria respondida nem pela pesquisadora e nem pela professora regente da turma, que estava presente na sala durante essa aplicação, pois queríamos verificar como esses estudantes lidavam com questões do tipo da Prova Brasil e se respondêssemos suas perguntas, poderíamos interferir no resultado da pesquisa.

Em uma conversa anterior com a professora regente da turma, foi questionado se os estudantes eram acostumados a justificar suas respostas e/ou procedimentos adotados em questões de Matemática. A resposta obtida foi que isso não era algo comum para eles.

Por não ser comum aos estudantes justificarem suas resoluções, nessa primeira aplicação das questões foi explicado que as questões tinham um item – *b) Explique como você pensou para chegar à resposta* –, e que nesse item deveriam descrever o modo como fizeram ou pensaram para resolver cada uma das questões.

Após as explicações, foram entregues de uma única vez as questões Q1, Q2 e Q3.

Após serem entregues as três questões, os estudantes começaram a resolvê-las. Aproximadamente 10 minutos após o início das resoluções, alguns estudantes me chamaram em suas carteiras e fizeram perguntas ou indagações do tipo *“professora, nessa aqui tem que fazer conta?”, “me ajuda, eu não sei fazer essa”,* *“qual conta que eu faço para resolver esse exercício de mais ou de menos?”, “professora, se você não me ajudar eu não vou conseguir resolver, só me diz qual a conta que eu tenho que fazer”, “professora, tá certo o resultado?”.*

Aos estudantes que fizeram as perguntas eu lembrava o que já havia combinado com eles, ou seja, que eu não poderia ajudá-los e que deveriam resolver as questões por meios próprios.

Durante a aplicação dessas atividades a professora regente da turma esteve presente em alguns momentos e se ausentou em outros e alguns estudantes foram solicitados pela diretora para saírem da sala de aula para resolverem assuntos na secretaria da escola.

O primeiro estudante levou aproximadamente 15 minutos para entregar as questões resolvidas e o último levou 42 minutos. Vale ressaltar que essa turma é numerosa e heterogênea.

Quando o último estudante entregou seus registros escritos e a pesquisadora estava se despedindo, estudantes começaram a questionar se ela não ia resolver as questões no quadro, dizendo que “*a professora (nome da professora regente) sempre resolve no quadro as coisas que a gente faz”* e *“se você não resolver não vou saber se acertei ou errei”.* Para estes estudantes foi explicado que neste momento não seriam resolvidas as questões.

Com a intenção de preservar o anonimato dos participantes dessa pesquisa, optou-se por codificar cada registro escrito dos estudantes atribuindo-lhes a letra E de estudante acompanhada por um numeral, para diferenciá-los e, assim, os registros escritos de cada estudante passou a ser identificado como E1, E2,..., E38. A sequência numérica foi estabelecida pela ordem em que os estudantes entregaram as questões neste primeiro dia de aplicação, mas se mantiveram para todos os registros.

Relato da aplicação do dia 07/05/2013 (Q4, Q5 e Q6)

A aplicação das questões do dia 07/05/2013 também iniciou após o intervalo do período da tarde e durou em média uma hora.

Ao entrar em sala de aula, com a permissão da professora regente, novamente foi explicado aos estudantes que eles iriam resolver três questões similares com questões da Prova Brasil e que deveriam seguir as mesmas orientações da última aplicação, ou seja, não conversarem com os colegas durante a resolução das questões e que nem a professora nem a pesquisadora poderiam responder perguntas, ou auxiliá-los no processo de resolução das questões.

Neste dia os estudantes estavam mais agitados do que na aplicação anterior, pois teriam um ensaio para a apresentação do dia das mães, assim que terminassem. Com a intenção de acalmá-los, a professora regente da sala os avisou que o ensaio começaria apenas às 15h30min e, sendo assim, teriam tempo suficiente para resolver as questões. Aos poucos os estudantes se acalmaram e teve início a aplicação das questões Q4, Q5 e Q6, sendo as três entregues ao mesmo tempo.

Na aplicação anterior percebemos que essa turma é heterogênea e que a variação de tempo que os estudantes demorariam para resolver as questões poderia ser grande e, por isso, optamos em levar desenhos para colorir, assim, quando um estudante terminava, ganhava um desenho para pintar.

Utilizar a estratégia dos desenhos para pintar fez com que os estudantes não conversassem e consequentemente não atrapalhassem os que ainda estavam resolvendo as questões.

Com relação às questões, os estudantes aparentemente mostraram tranquilidade para resolvê-las. Nenhum estudante nessa aplicação solicitou que as questões fossem resolvidas no quadro pela pesquisadora.

Relato da aplicação do dia 12/11/2013 (Q7, Q8 e Q9)

O longo período entre a última aplicação das questões e essa deu-se porque aconteceram atividades realizadas pela pesquisadora com as professoras da escola José Brazil Camargo, férias escolares e também atividades que a professora regente da turma estava desenvolvendo em suas aulas.

Na terceira aplicação os estudantes resolveram as questões Q7, Q8 e Q9. Essa aplicação teve início após o término do intervalo do 5º ano do período da tarde, aproximadamente 14h.

Nessa aplicação os estudantes estavam tranquilos e aparentemente lembravam-se dos avisos dados para a aplicação das questões anteriores, pois nenhum estudante chamou nem a pesquisadora, nem a professora regente da turma para fazer perguntas.

O primeiro estudante a entregar as três questões demorou aproximadamente 25 minutos para resolvê-las, já o último demorou em média 1h10min.

Essa aplicação durou aproximadamente 1h10min e a professora regente da turma esteve presente todo o tempo.

Relato da aplicação do dia 19/11/2013 (Q10, Q11 e Q12)

O último dia de aplicação das questões teve início às 14h e aproximadamente 30 minutos de duração.

Mesmo anteriormente já havendo três aplicações, antes de entregar as atividades, foi lembrado aos estudantes que eles não poderiam trocar informações com seus colegas durante a resolução das questões e que a pesquisadora não iria auxiliá-los nas resoluções ou interpretação das mesmas, assim como, também não validaria a resposta apresentada por eles.

As questões resolvidas pelos estudantes nessa data foram Q10, Q11 e Q12.

Nessa aplicação, muitos estudantes realizaram indagações do tipo: *“eu esqueci minha régua, não vou poder fazer a primeira”,* ou ainda, *“professora a régua é no zero ou no um que coloca”.*

Essas indagações estão relacionadas à questão 11, na qual os estudantes deveriam estimar a altura de Junior e, para isso, não precisavam necessariamente da utilização da régua.

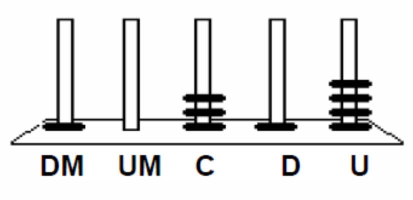
APÊNDICE C:
Descrição da produção escrita dos estudantes

Este apêndice é dedicado à descrição da produção escrita dos estudantes com relação aos métodos e estratégias utilizadas referente às questões que compõem este trabalho.

Na sequência serão apresentadas as descrições das resoluções dos participantes da pesquisa em todas as questões.

Quadro 1 – Q1

No ábaco abaixo, Cristina representou um número:



a. Qual foi o número representado por Cristina?

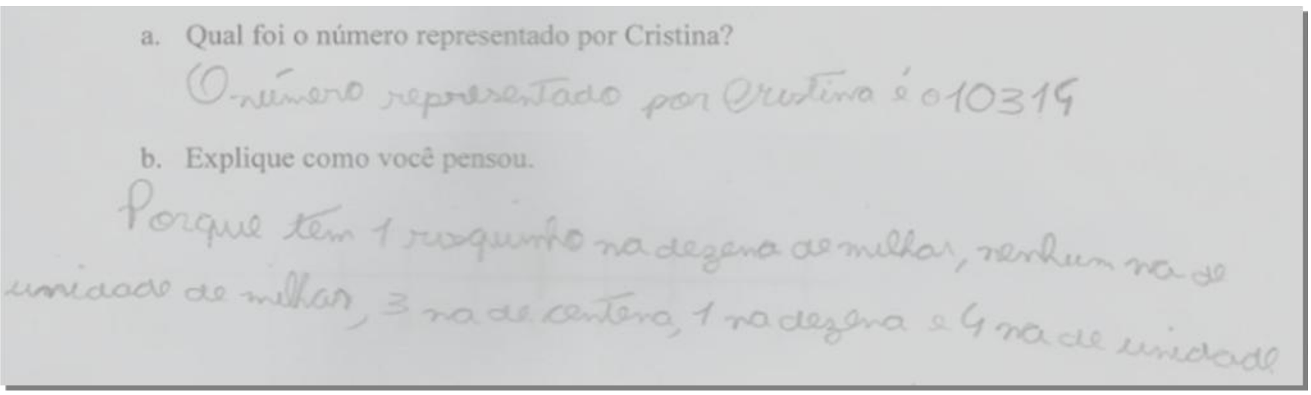
b. Explique como você pensou.

Fonte: Modelo Teste Prova Brasil.

Após a leitura inicial da resolução dos estudantes referentes a essa questão, percebemos elementos semelhantes nas mesmas, com relação à estratégia e o método que estes estudantes optaram para resolvê-la.

Os estudantes E1, E3, E6, E8, E19, E26, E30, E33, E34 resolveram e justificaram esta questão de modo semelhante. Para exemplificar, apresentaremos os registros escritos de E3 e E34.

Figura 1 – Registro escrito do estudante E3 – Q1


a. Qual foi o número representado por Cristina?

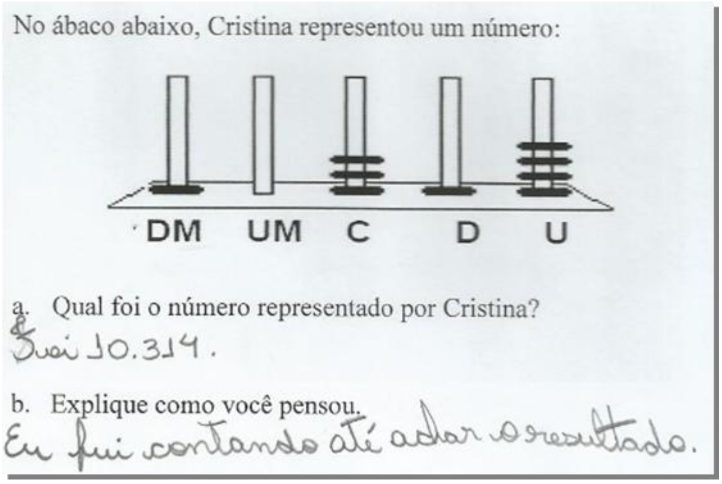
O número representado por Cristina é o 10314

b. Explique como você pensou.

Porque tem 1 risquinho na dezena de milhar, nenhum na de unidade de milhar, 3 na de centena, 1 na dezena e 4 na de unidade

Fonte: dados coletados.

Figura 2 – Registro escrito do estudante E34 – Q1



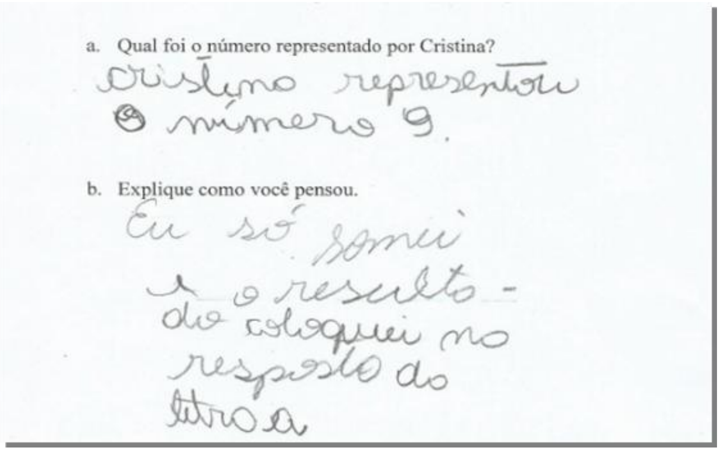
Fonte: dados coletados.

Estes estudantes verificaram a quantidade de “risquinhos” em cada uma das hastes do ábaco, respeitaram a propriedade de valor posicional do sistema de numeração e realizaram a composição do numeral.

O estudante E3 deixa claro na justificativa sua compreensão a respeito das ordens numéricas. Já o estudante E34 não relata nada a respeito, mas podemos inferir que ele também realizou a contagem das peças pelas ordens numéricas.

Ao resolverem a tarefa, alguns dos estudantes utilizaram a estratégia de somar as peças do ábaco como unidades simples e assim apresentaram 9 como resposta final, que é o caso dos estudantes E7, E12, E14, E27, E36. Podemos verificar este fato por meio do registro do estudante E14.

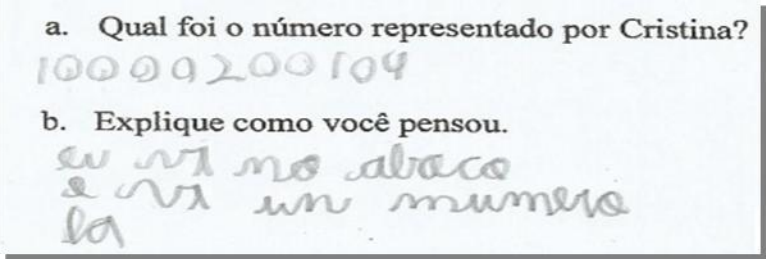
Figura 3 – Registro escrito do estudante E14 – Q1



Fonte: dados coletados.

Um dos estudantes apresentou como resposta o valor presente em cada uma das hastes do ábaco, como veremos na sequência.

Figura 4 – Registro escrito do estudante E11 – Q1

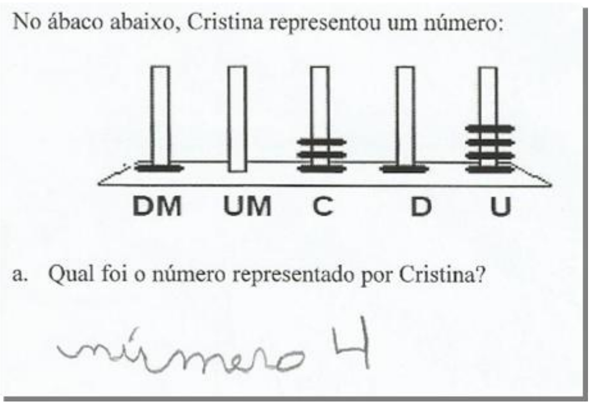


Fonte: dados coletados.

O estudante E11 escreveu o número como se fosse a junção dos valores relativos a cada uma das peças do ábaco e colocou o valor absoluto representado pela ordem das centenas errado.

Outros registros escritos, dos estudantes E4, E9, E17, E20, E22, E23, E24, E25, E29, E35, apresentaram como resposta para essa questão, um valor representado em apenas uma das ordens numéricas do ábaco, por exemplo, o registro do estudante E13 que justificou sua resolução da seguinte forma “quatro, porque na unidade tem quatro”.

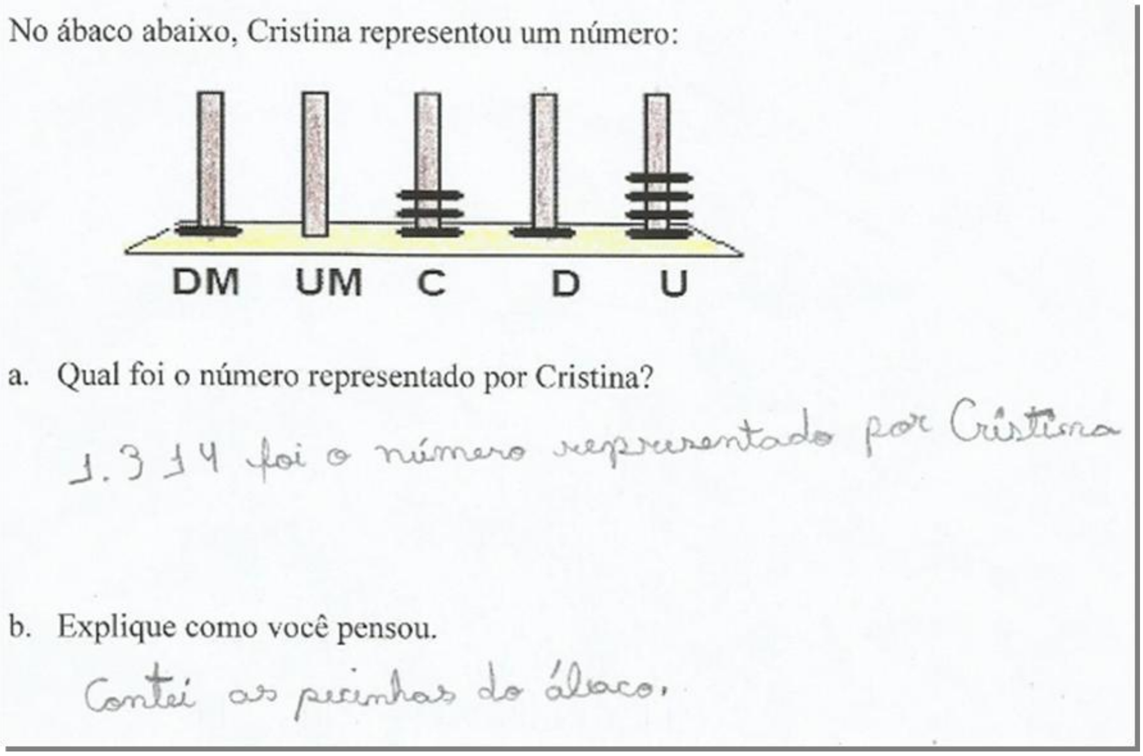
Figura 5 – Registro escrito do estudante E17 – Q1



Fonte: dados coletados.

Os estudantes E2, E5, E10, E13, E15, E16, E18, E19, E21, E28, E31, E32, E35, não se atentaram para as características do sistema de numeração decimal e, por este motivo, ao responderem não apresentaram todos os algarismos que compõem o número na ordem esperada. Vejamos os registros dos estudantes E16 e E31.

Figura 6 – Registro escrito do estudante E16 – Q1


No ábaco abaixo, Cristina representou um número:

DM UM C D U

a. Qual foi o número representado por Cristina?

1.3 1 4 foi o número representado por Cristina

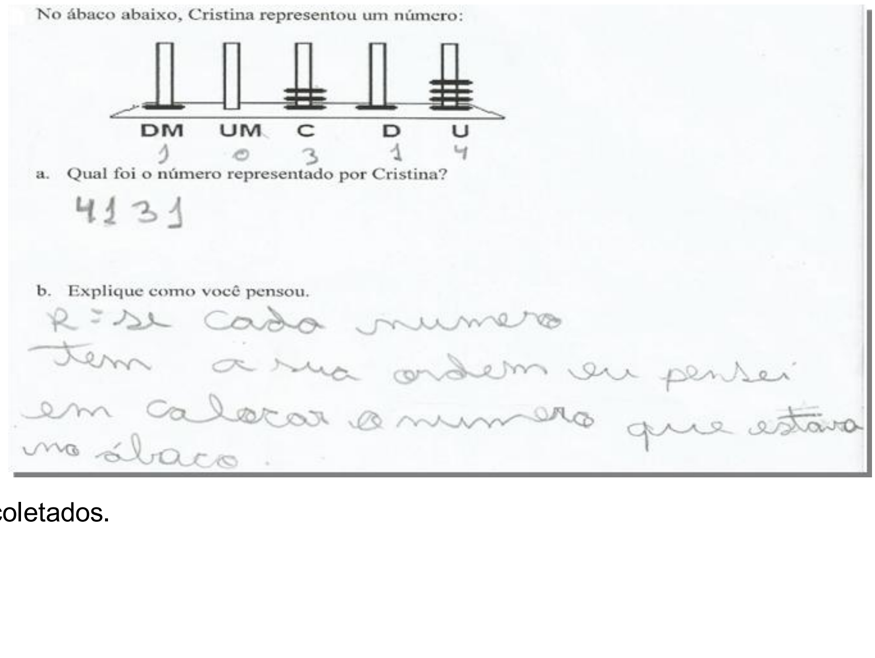
b. Explique como você pensou.

Contei as pecinhas do ábaco.

Fonte: dados coletados.

Por meio do registro escrito apresentado na figura 7, verificamos que este estudante não se atentou ao valor posicional do algarismo zero, ignorando-o no momento de realizar a mudança de notação para o número representado no ábaco.

Figura 7 – Registro escrito do estudante E31 – Q1


No ábaco abaixo, Cristina representou um número:

DM UM C D U

1 0 3 1 4

a. Qual foi o número representado por Cristina?

4131

b. Explique como você pensou.

R = se cada numero tem a sua ordem eu pensei em colocar o numero que estava no ábaco.

Fonte: dados coletados.

O estudante E31 evidencia o número formado no ábaco, mas no momento de responder a parte "*a*" da questão não faz uso das propriedades do sistema decimal de numeração, como o valor posicional dos algarismos e o valor do algarismo zero na composição numérica.

Quadro 2 – Q2

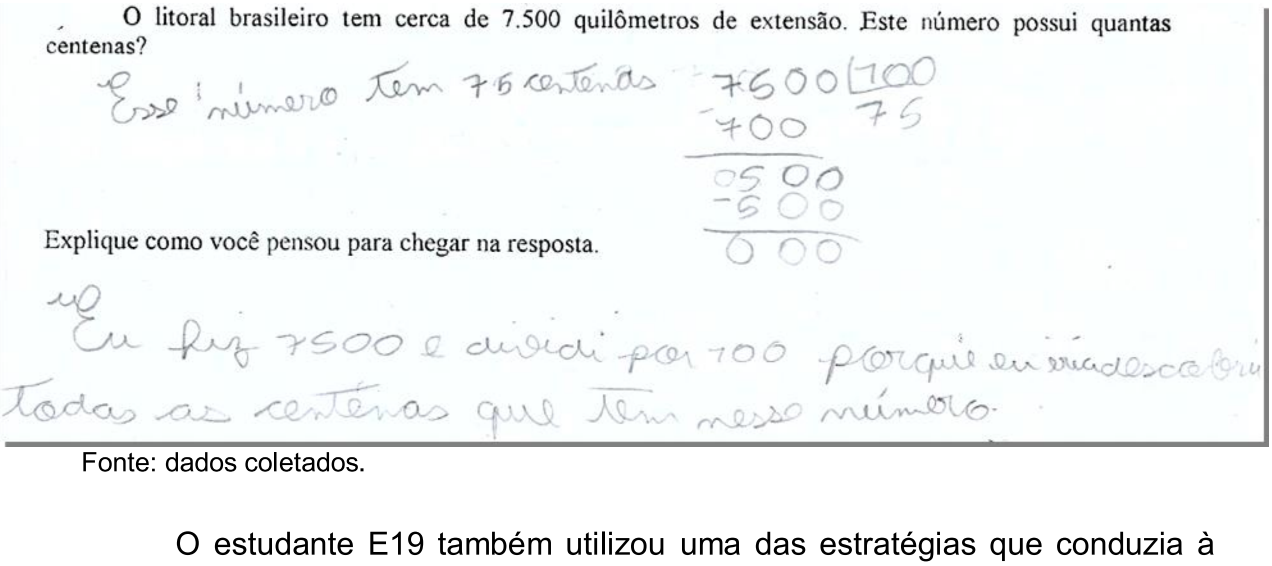
O litoral brasileiro tem cerca de 7.500 quilômetros de extensão. Este número possui quantas centenas? Explique como você pensou para chegar na resposta.

Fonte: PDE/Prova Brasil – Plano de Desenvolvimento da Educação (BRASIL, 2008)

Após a leitura inicial da resolução dos estudantes referentes a essa questão, percebemos elementos semelhantes nas mesmas, com relação à estratégia e o método que estes estudantes optaram para resolvê-la.

Os estudantes E3 e E20 optaram pela estratégia de dividir o número 7500 por 100, com a intenção de descobrir quantas centenas compõem este número e aplicaram o procedimento de modo correto. Um exemplo é o registro do estudante E3, que decidiu dividir o número 7500 por 100 e em sua justificativa explica por que optou por essa estratégia:

Figura 8 – Registro escrito do estudante E3 – Q2


O litoral brasileiro tem cerca de 7.500 quilômetros de extensão. Este número possui quantas centenas?

Esse número tem 75 centenas

7500 | 100
-700   75
0500
-500
000

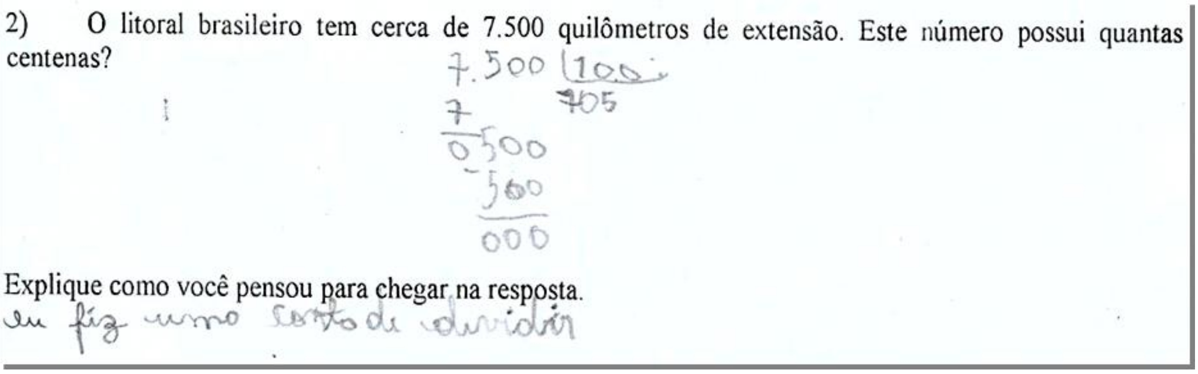
Explique como você pensou para chegar na resposta.

Eu fiz 7500 e dividi por 100 porque eu ia descobrir todas as centenas que tem nesso número.

Fonte: dados coletados.

O estudante E19 também utilizou uma das estratégias que conduzia à resposta esperada para essa questão que é dividir o número 7500 por 100, mas não realizou o procedimento de modo correto.

Figura 9 – Registro escrito do estudante E19 – Q2


2) O litoral brasileiro tem cerca de 7.500 quilômetros de extensão. Este número possui quantas centenas?

7.500 |100
7 705
0500
500
000

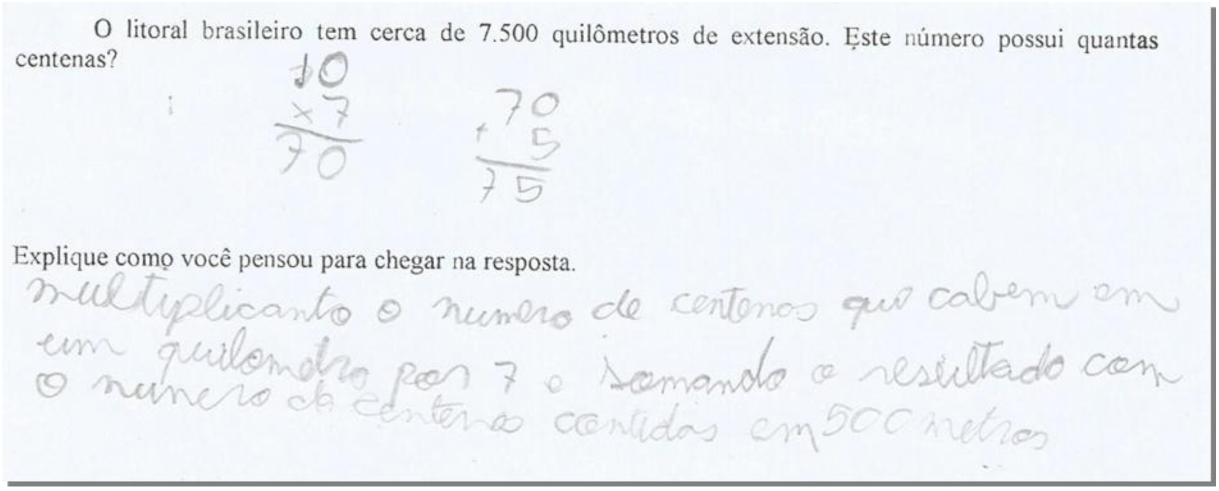
Explique como você pensou para chegar na resposta.

eu fiz uma conta de dividir

Fonte: dados coletados.

Os estudantes E1 e E26 realizaram a decomposição do número 7500, de modo que a soma das parcelas retornaria ao valor inicial. Vejamos o registro escrito de E26.

Figura 10 – Registro escrito do estudante E26 – Q2


O litoral brasileiro tem cerca de 7.500 quilômetros de extensão. Este número possui quantas centenas?

10 × 7 = 70   70 + 5 = 75

Explique como você pensou para chegar na resposta.

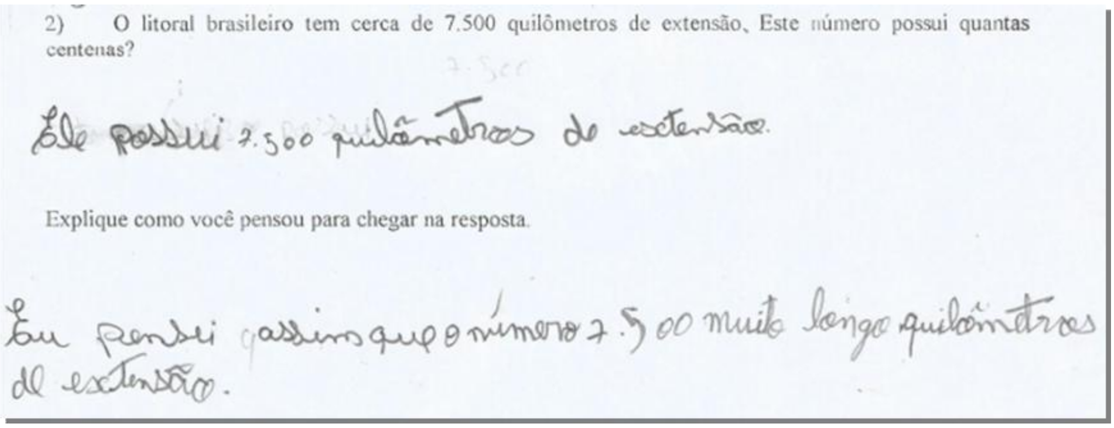
multiplicanto o numero de centenos que cabem em um quilometro por 7 e somando o resultado com o numero de centenos contidas em 500 metros

Fonte: dados coletados.

Por meio da justificativa dada pelo estudante E26, é possível perceber que realizou uma decomposição do número 7500 em 7000 + 500, e na sequência calculou quantas centenas compõem esses dois números e posteriormente somou os dois resultados obtidos. Cabe resaltar que no caso específico deste estudante, ele realizou as operações que julgou necessárias, justificou sua estratégia, mas não apresentou a resposta final para a questão.

Os estudantes E7 e E16 copiaram uma parte do enunciado da questão, como veremos:

Figura 11 – Registro escrito do estudante E16 – Q2


2) O litoral brasileiro tem cerca de 7.500 quilômetros de extensão. Este número possui quantas centenas?

Ele possui 7.500 quilômetros de extensão.

Explique como você pensou para chegar na resposta.

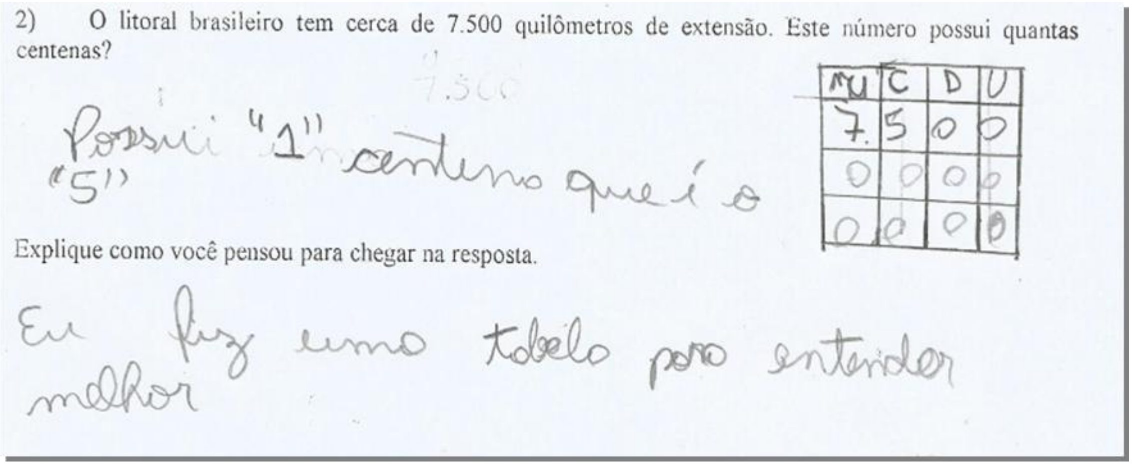
Eu pensei assim que o número 7.500 muito longo quilômetros de extensão.

Fonte: dados coletados.

Este estudante respondeu a questão com uma parte do enunciado da mesma e por meio de sua justificativa não fica claro o motivo que o levou a apresentar a resposta dada, uma vez que não foi questionado se o litoral brasileiro era longo, ou não.

Os estudantes E4, E6, E8, E14, E18, E21 fixaram um local nos algarismos para a centena, mas não conseguiram distinguir a quantidade de centenas que compõem o numeral. Vejamos na sequência um registro escrito representativo.

Figura 12 – Registro escrito do estudante E21 – Q2


2) O litoral brasileiro tem cerca de 7.500 quilômetros de extensão. Este número possui quantas centenas?

Possui "1" centena que é o "5"

M	C	D	U
7	5	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Explique como você pensou para chegar na resposta.

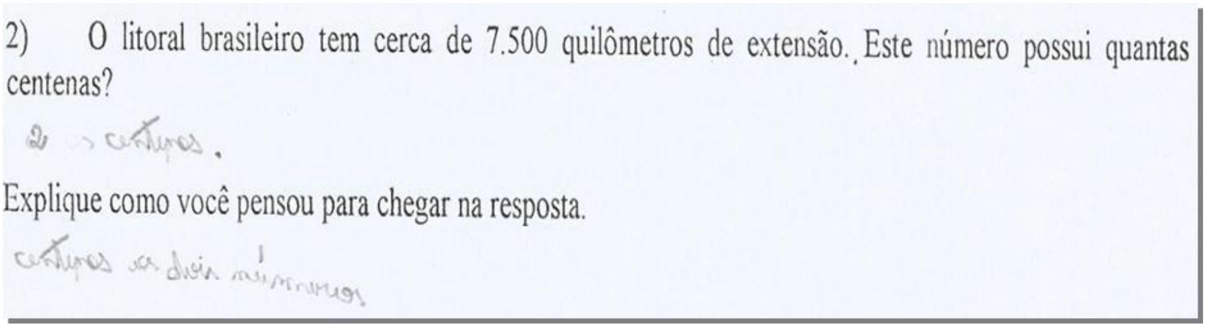
Eu fiz umo tabelo poro entender melhor

Fonte: dados coletados.

O estudante E21 fez uma tabela com as primeiras ordens numéricas e alocou cada algarismo em sua respectiva ordem, mas apresentou como resposta 1 centena, uma vez que existe apenas uma ordem denominada unidade, uma ordem denominada dezena, e uma ordem denominada centena e assim por diante.

Os estudantes E28, E35, E36 apresentaram como reposta para essa questão o número dois, como podemos verificar por meio do registro escrito do E35.

Figura 13 – Registro escrito do estudante E35 – Q2


2) O litoral brasileiro tem cerca de 7.500 quilômetros de extensão. Este número possui quantas centenas?

2 centenas.

Explique como você pensou para chegar na resposta.

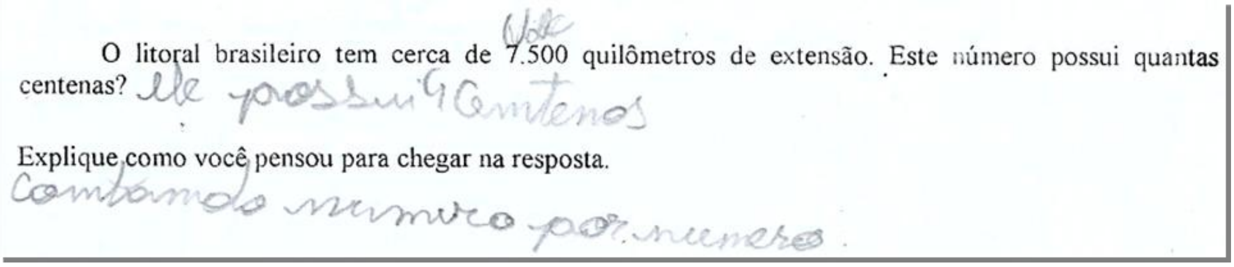
centenas são dois números

Fonte: dados coletados.

Em nenhum dos registros escritos desses estudantes foi apresentada uma explicação clara do motivo pelo qual a resposta para a questão era duas centenas.

Os estudantes E9, E11, E17, E24, E33 apresentam como resposta para a questão quatro centenas. Utilizaremos o registro do E24 para exemplificar.

Figura 14– Registro escrito do estudante E24 – Q2


O litoral brasileiro tem cerca de 7.500 quilômetros de extensão. Este número possui quantas centenas? Ele possui 4 centenos

Explique como você pensou para chegar na resposta.

Contando numero por numero.

Fonte: dados coletados.

Os estudantes E2, E5, E15, E22, E23, E25, E27, E29, E30, E31, E34 fixaram o local das centenas e identificaram qual algarismo estava situado nesse local, como veremos no registro escrito a seguir: