Universidade Estadual de Londrina

HENRIQUE RIZEK ELIAS

DIFICULDADES DE ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA NA COMPREENSÃO DE CONCEITOS DE GRUPO E/OU ISOMORFISMO DE GRUPOS

Londrina
2012

HENRIQUE RIZEK ELIAS

DIFICULDADES DE ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA NA COMPREENSÃO DE CONCEITOS DE GRUPO E/OU ISOMORFISMO DE GRUPOS

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de mestre no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina.

Orientadora: Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli.

Londrina
2012

Catalogação Elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

E42d Elias, Henrique Rizek.

Dificuldades de estudantes de licenciatura em matemática na compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos / Henrique Rizek Elias. – Londrina, 2012. 152 f. : il.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2012.

Inclui bibliografia.

1. Educação matemática – Teses. 2. Isomorfismos (Matemática) – Formação de conceitos – Teses. 3. Teoria dos grupos – Formação de conceitos – Teses. 4. Matemática – Estudo e ensino – Teses. I. Savioli, Angela Marta Pereira das Dores. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título

CDU 51:37.02

HENRIQUE RIZEK ELIAS

DIFICULDADES DE ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA NA COMPREENSÃO DE CONCEITOS DE GRUPO E/OU ISOMORFISMO DE GRUPOS

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de mestre no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
UEL – Londrina – PR

Profa. Dra. Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho
UEL – Londrina – PR

Profa. Dra. Barbara Lutaif Bianchini
PUC – São Paulo – SP

Londrina, 16 de fevereiro de 2012.

Dedico este trabalho à minha irmã, Ana Luiza.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, por dedicarem suas vidas a mim e aos meus irmãos, pela educação que nos deram e pelo apoio incondicional em todos os momentos de nossas vidas. Cito, por exemplo, em 2003, em minha difícil decisão de desistir de um curso de Economia para estudar Matemática e hoje, nas delicadas escolhas que devo fazer após o mestrado. Com o apoio e amor que recebo deles é mais fácil encarar a vida. Amo vocês, pais.

Ao meu irmão, meu melhor amigo e quem tanto admiro. Obrigado por ser meu companheiro sempre.

À minha namorada, uma das pessoas mais sábias que conheço e que, a cada dia, me mostra maneiras diferentes de enxergar as coisas. Obrigado por me apresentar "outros mundos", inclusive o da Educação Matemática.

À minha orientadora, por possibilitar meu ingresso no mestrado e pelo carinho e compreensão comigo e com todos do nosso grupo de pesquisa. Aprendi muito com ela, não só nas orientações, mas no simples convívio. Tenho muita admiração por ela.

Ao meu grupo de pesquisa, pela colaboração nas diversas etapas deste trabalho. Tenho muito carinho por cada um deles.

A toda minha família, por me trazer segurança e paz em todos os momentos da minha vida. Lembro-me, entre muitos outros, de 2004, quando me mudava para São Carlos para fazer graduação com a enorme mala preta "cheia de amor", segundo a tia Silvinha, com lençóis, travesseiros, toalhas etc. montada pela vó Wanda, ou de 2010, quando me mudava para Londrina para fazer o mestrado, com a casa praticamente montada pela bisa, tia Lú, tia Lúcia, Bé e vó Lena. Agradeço a todos da minha família por todo apoio sempre.

Aos meus amigos. Todos eles. Agradeço aos primeiros e eternos amigos de Barretos. Amigos de verdade, que levarei para o resto da vida; aos amigos de Mogi das Cruzes, que me acolheram muito bem em 2002 quando eu era um novato no Colégio Santa Mônica. Jamais me esquecerei de vocês; aos amigos de São Carlos, que fizeram da época da faculdade uma das melhores da minha vida. Em especial, aos amigos da república *7 eh poko*; aos amigos da turma "atípica" de Londrina, que não se resume aos que ingressaram junto comigo no mestrado. Obrigado por tornarem estes últimos dois anos mais agradáveis e de muito aprendizado.

Aos estudantes que aceitaram participar desta pesquisa. Sem eles não seria possível sua realização. Agradeço muito a cada um.

Às professoras Bárbara e Ana Márcia, por aceitarem participar da banca deste trabalho, trazendo, com isso, grandes contribuições.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, que tanto contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho e para minha formação.

À CAPES, pelo apoio financeiro, fundamental para a realização da pesquisa.

A todos, muito obrigado!

ELIAS, Henrique Rizek. **Dificuldades de estudantes de licenciatura em matemática na compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos**. 2012. 152 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

RESUMO

A presente pesquisa teve como objetivo identificar e interpretar dificuldades apresentadas por estudantes de licenciatura e bacharelado em Matemática da Universidade Estadual de Londrina na compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos. Embasados em teóricos como Dubinsky *et al.* (1994), Dubinsky (2002), Brown *et al.* (1997) e Lajoie (2000), elaboramos um roteiro com algumas perguntas e realizamos entrevistas semiestruturadas com oito estudantes que já haviam estudado os conceitos. Essas entrevistas nos forneceram dados que, a partir das respostas incorretas dadas pelos estudantes, nos permitiram identificar dificuldades na compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos. Uma vez que o entendimento de alguns desses conceitos da Álgebra Abstrata exige um pensamento matemático avançado, fundamentamo-nos para interpretar as dificuldades encontradas, essencialmente, na teoria APOS, de Ed Dubinsky, identificando a concepção (ação, processo, objeto) dos estudantes, e na teoria da reificação, de Anna Sfard. Das análises, pudemos identificar vinte e nove dificuldades manifestadas, as quais evidenciam, entre outras coisas, que estudantes participantes apresentam dificuldades com conceitos prévios, como dificuldade em lidar com conjuntos diversos, que não somente os conjuntos numéricos, ou dificuldades com relação à definição de função, e que alguns ainda permanecem com um pensamento matemático elementar, no sentido de Tall (1995, 2002), mostrando que ainda não se desprenderam de um padrão de imitar soluções do qual estavam acostumados.

Palavras-chave: Educação matemática. Teoria APÓS. Grupo. Isomorfismo de grupos.

ELIAS, Henrique Rizek. **Difficulties of undergraduate students in mathematics in understanding of concepts of group and/or group isomorphism**. 2012. 152 f. Dissertation (Master's in Science Teaching and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina, 2012.

ABSTRACT

This research has had as object to identify and interpret the difficulties presented by licentiate and bachelor students of Mathematics from State University of Londrina in understanding concepts of group and/or group isomorphism. Grounded in theoretical as Dubinsky *et al*. (1994), Dubinsky (2002), Brown *et al*. (1997) and Lajoie (2000), we developed a script with some questions and conducted semi-structured interviews with eight students who had studied the concepts. Those interviews have provided us with data from the incorrect answers given by students, have allowed us to identify difficulties in understanding concepts of group and/or group isomorphism. Since the understanding of these concepts of Abstract Algebra requires an advanced mathematical thinking, we based to interpret the difficulties found essentially on APOS theory, Ed Dubinsky, identifying the conception (action, process, object) of the students, and the Anna Sfard's reification theory. From the analysis, we could identify twenty-nine difficulties experienced, which show, among other things, that participating students present difficulties with previous concepts, such as difficulty in dealing with several sets, which not only numerical sets, or difficulties related to the function definition, and some still remain with an elementary mathematical thinking, in order to Tall (1995, 2002), showing they have not released a standard to imitate solutions which were used.

Keywords: Mathematics education. APOS theory. Group. Group isomorphism.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As inspirações para o presente trabalho surgiram, sobretudo, das leituras que realizamos, em especial, da tese de doutorado de Elisangela de Campos (2009), intitulada *A noção de congruência algébrica no curso de Matemática: uma análise das respostas dos estudantes*. O trabalho de Campos (2009) teve como objetivo identificar e analisar dificuldades apresentadas por estudantes de um curso de Matemática sobre congruência algébrica.

Campos (2009) trouxe sugestões para pesquisas futuras que nos foram valiosas. Baseando-se nos dados que foram levantados em seu trabalho, Campos (2009, p. 125) propõe uma pesquisa que busque identificar as concepções dos estudantes sobre o conceito de isomorfismo. Assim, diante dessa sugestão feita em Campos (2009), decorrente de seu estudo, e combinando o interesse do presente pesquisador com conceitos da Álgebra do Ensino Superior e a área de pesquisa de sua orientadora, optamos por realizar um trabalho que tratasse das dificuldades de estudantes na aprendizagem de conteúdos da disciplina Álgebra do curso de Matemática da Universidade Estadual de Londrina.

Fomos, então, à procura de trabalhos que nos ajudassem a especificar os objetivos e a direcionar esta pesquisa. Fizemos um levantamento bibliográfico em eventos realizados recentemente no Brasil, tais como XIII e XIV EBRAPEM (Encontro Nacional dos Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática) e X ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática). Pesquisamos, também, no banco de teses da CAPES, as teses e dissertações defendidas entre os anos 2000 e 2010 em programas de pós-graduação das instituições: UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas), UNESP (Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”), USP (Universidade de São Paulo), PUC/SP (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo), UEL (Universidade Estadual de Londrina) e UFPR (Universidade Federal do Paraná).

Desse e dos levantamentos mencionados em Campos (2009) e Bussmann (2009), percebemos que são poucos os trabalhos realizados em Educação Matemática no Brasil a respeito da aprendizagem das estruturas algébricas.

Em contrapartida, notamos que há diversos trabalhos internacionais dedicados a essa linha de pesquisa. Dentre esses, selecionamos alguns que nos deram embasamento teórico tanto na perspectiva de dificuldades apresentadas por estudantes quanto para concepções dos mesmos com relação a conceitos da Álgebra. Decidimos, fundamentalmente, por Dubinsky *et al.* (1994), Dubinsky (2002), Brown *et al.* (1997), com a teoria APOS[1] (*Action – Process – Objects – Schemas*), e Lajoie (2000), com dificuldades de estudantes em Teoria de Grupos.

Optamos, então, pela estrutura de grupo por ser a mais simples e a mais importante, considerando seus exemplos e aplicabilidades. Pensamos, também, que o estudo de grupos deva preceder o de anel e de corpo, por se tratar de uma estrutura com apenas uma operação, que está presente nas outras duas estruturas. Essa mesma sequência pode ser verificada em livros didáticos, como *Álgebra Moderna* de Domingos e Iezzi (2003) e *Iniciação às Estruturas Algébricas* de Monteiro (1971), em que a estrutura de grupo aparece antes de anéis e corpos. Contudo, isso não é uma regra, isto é, nem sempre o conceito de grupo é apresentado antes dos conceitos de anel e corpo. Alguns professores e alguns livros didáticos, como o livro *Introdução à álgebra* de Gonçalves (2001), apresentam as estruturas de anéis e corpos antes de grupos.

Por isso, consideramos que investigar as dificuldades que estudantes apresentam ao lidarem com conceitos da Teoria de Grupos, a saber, os conceitos de grupo e de isomorfismo de grupos, seja "importante para refletir sobre o ensino de Álgebra Abstrata e sobre as possíveis falhas no currículo deste curso" (CAMPOS, 2009, p. 6). Além do que, segundo Dubinsky *et al.* (1994, p. 2), estudantes de Matemática consideram a Álgebra Abstrata e, em particular, a Teoria de Grupos, como sendo um dos temas mais problemáticos da graduação, o que pode ocasionar dificuldades tanto em termos de lidar com os conteúdos quanto no desenvolvimento de atitudes em relação à Matemática. Essa afirmação pode ser justificada em Selden e Selden (1987) e, também, em Dubinsky *et al.* (1994), quando apresentam diversos erros e concepções equivocadas de estudantes ao lidarem com conceitos da Teoria de Grupos.

Diante disso, traçamos como objetivo para esta pesquisa identificar e interpretar dificuldades apresentadas por estudantes de Matemática da

[1] A teoria APOS (ação, processo, objeto, esquema) é uma teoria que busca compreender como se dá a construção de conceitos matemáticos por um indivíduo que está começando a entendê-los. Essa teoria será explicitada no capítulo 3.

Universidade Estadual de Londrina na compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos.

Portanto, as questões que queremos responder nesta pesquisa são: que dificuldades são apresentadas por graduandos em Matemática após o estudo de grupo e/ou isomorfismo de grupos? O que essas dificuldades nos mostram a respeito das concepções desses estudantes, segundo a teoria APOS, com relação aos conceitos matemáticos em questão?

Dividimos este trabalho em cinco capítulos organizados da seguinte maneira: no capítulo 1, trataremos de questões pertinentes à álgebra, como seu desenvolvimento, os conceitos de grupo e de isomorfismo de grupos, e a presença da Álgebra em cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática; no capítulo 2, apresentaremos brevemente algumas pesquisas que foram fundamentais no decorrer deste trabalho; no capítulo 3, exporemos caracterizações do pensamento matemático avançado de acordo com os autores David Tall, Dreyfus e Dubinsky, além de apresentarmos a teoria APOS, nosso referencial teórico principal, e a teoria da reificação de Anna Sfard; no capítulo 4, traremos os procedimentos metodológicos utilizados; no capítulo 5, apresentaremos as dificuldades apresentadas pelos estudantes, seguido de suas análises apoiadas, principalmente, na teoria APOS; por último, faremos as considerações finais com relação ao que foi feito e analisado durante o trabalho, além de sugerirmos alguns encaminhamentos para o ensino de Álgebra e para pesquisas futuras.

CAPÍTULO 1
ÁLGEBRA ABSTRATA

Neste capítulo, apresentamos um breve histórico do desenvolvimento da Álgebra, que culminou no surgimento da Álgebra Abstrata e na definição abstrata de grupo e de isomorfismo de grupos. Sendo um breve histórico, consideramos que o fazemos sem muito aprofundamento, cientes de que a história narrada aqui é incompleta e com lacunas. Porém, acreditamos que narrá-la, mesmo que de forma sucinta, nos ajuda a entender como se deu a abstração em álgebra e do conceito de grupo, uma vez que este “envolve um sofisticado grau de abstração e é, talvez, o primeiro a ser formulado com tanta generalidade” (MILIES, 1992, p. 1). Julgamos que a história nos dá uma visão holística do processo, ajudando a entender os caminhos que levaram a Álgebra a chegar ao nível de abstração que se encontra e à construção de conceitos de grupo e de isomorfismo de grupos.

Como o objetivo deste trabalho é investigar dificuldades de estudantes de Matemática quanto aos conceitos de grupo e isomorfismo de grupos e sendo a abstração uma componente essencial desses conceitos, apresentar o desenvolvimento que levou a Álgebra a este nível abstração se faz relevante, já que tais dificuldades residem, possivelmente, neste caráter abstrato.

1.1 Álgebra

A Álgebra, como operações entre quantidades e resoluções de equações, já estava presente em civilizações antigas, como, por exemplo, a babilônica e a egípcia. Os babilônios, além de resolverem equações quadráticas, também discutiam algumas equações de terceiro e quarto graus, enquanto os egípcios, como mostram os papiros, utilizavam algumas equações relativamente simples para trabalhos com mercadorias.

A esta Álgebra, considerada uma generalização da aritmética ou uma aritmética universal, que se desenvolveu tendo como objeto de estudo as equações e as operações clássicas sobre quantidades, chamamos de Álgebra Clássica. Para o desenvolvimento desta Álgebra, segundo Milies (2004, p. 5), dois fatores foram fundamentais:

i) a tendência em aperfeiçoar as notações, facilitando o trabalho com operações e equações, tornando-o o mais geral possível.

ii) a necessidade de introduzir novos conjuntos de números, com o consequente esforço para compreender sua natureza e sua adequada formalização.

Quanto ao fator (i), para o desenvolvimento do simbolismo algébrico, podemos citar alguns estudiosos, tais como Diofanto de Alexandria e seu trabalho *Aritmética* de III d.C., introduzindo uma notação para incógnita, chamada notação sincopada; Simon Stevin (1548 – 1620), que forneceu os primeiros passos para o estudo de polinômios; François Viète (1540-1603), que utilizou letras para representar não somente a incógnita, mas também coeficientes positivos ou quantidades conhecidas, permitindo assim trabalhar com classes de equações; John Hudde (1633-1704), o primeiro a utilizar letras para representar coeficientes positivos ou negativos; René Descartes (1596-1650), que introduziu a notação utilizada ainda hoje, na qual se usa as primeiras letras do alfabeto para representar quantidades conhecidas e as últimas letras para representar as incógnitas; Isaac Newton (1642-1727), introduzindo a notação que utiliza expoentes negativos e fracionários, como QUOTE $a^{-2}, a^{-3}, \ldots$ e $a^{1/2}, a^{1/3}, \ldots$.

Com relação ao fator (*ii*), as noções de número e de operação são antigas. Pode-se dizer até que são anteriores aos primeiros registros históricos. A espécie humana possui, desde épocas mais primitivas, “algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer *mais* ou *menos* quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena” (EVES, 2004, p. 25). Esta noção fez com que os números naturais $1,2,3,\ldots$ se desenvolvessem a partir da necessidade da contagem, de forma gradual, juntamente com a evolução da sociedade.

Além dos números naturais, os racionais não negativos, ou seja, os números da forma a/b em que a e b são números naturais com $b \neq 0$ também tiveram um desenvolvimento natural. Porém, outros números não foram aceitos de imediato pelo homem, que relutou durante algum tempo em aceitar sua legitimidade, como foram os casos dos números negativos, os números irracionais e os números hoje conhecidos como complexos. Segundo Milies (2004, p. 14), a ciência europeia mal aceitara a validade dos números negativos ou dos irracionais e já surgiam os números complexos. Tais números se fizeram necessários a partir do estudo de equações do terceiro grau. Até o momento, uma equação era "a formulação matemática de um problema concreto" (MILIES, 2004, p. 14) e, se esta equação resultasse em uma raiz quadrada de um número negativo, significava que o problema proposto era insolúvel. Com isso, a Álgebra ficava reduzida à *aritmética universal,* em que as "letras representavam apenas números positivos e os sinais + e – apenas operações aritméticas" (MILIES, 2004, p. 27).

Alguns matemáticos se depararam com os números complexos em seus trabalhos e deram contribuições significativas no desenvolvimento dos mesmos. Por exemplo, Bhaskara (1114 – 1185 aproximadamente), que desacreditava na existência da raiz quadrada de um número negativo; Bombelli (1526 – 1573), que começou a considerar a existência de uma expressão da forma $a + \sqrt{-b}$ e introduziu as chamadas regras de produto; De Moivre (1667 – 1754), que formulou o cálculo da raiz *n*-ésima de um número complexo, somente para casos particulares, mas que só foi demonstrada por Euler (1707 – 1783), que estendeu sua validade para todo expoente *n* real.

Podemos dizer que o interesse em compreender a existência de uma expressão que contenha raízes de números negativos era puramente teórico, uma vez que este tipo de problema não era tido como concreto. Concluímos disto que o caminho para a abstração em álgebra estava sendo trilhado.

Durante muito tempo, principalmente a partir do século XIV, o problema principal na álgebra foi resolver equações por meio de radicais (adição, subtração, multiplicação, divisão, radiciação e potenciação). Esta busca resulta no conhecido Teorema Fundamental da Álgebra: "Toda equação polinomial $P(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz, real ou complexa" (SPIEGEL; MOYER, 2004, p. 222).

A primeira demonstração satisfatória deste teorema foi feita por Gauss (1777 – 1855), após tentativas de Newton, Euler, d'Alembert (1717 – 1783) e Lagrange (1736 – 1813). Durante sua vida, Gauss publicou mais três demonstrações deste teorema.

A partir deste momento, desconsiderar a validade das raízes de números negativos significaria desconsiderar "toda a teoria de equações desenvolvida no século XVIII que culminou no Teorema Fundamental da Álgebra, de Gauss, em 1799" (MILIES, 2004, p. 27).

Assim, os objetos de estudo deixam de ser as equações e operações sobre quantidades generalizadas e passam a ser as "operações arbitrariamente definidas sobre objetos abstratos, não necessariamente interpretáveis em termos quantitativos, isto é, sobre estruturas matemáticas tais como grupos, anéis, corpos etc" (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 78). Tem-se, então, a passagem da chamada Álgebra Clássica para a Álgebra Abstrata, implicando em uma mudança "na própria concepção do que a matemática é, da compreensão de sua condição como ciência independente e da evolução dos métodos de trabalho" (MILIES, 2004, p. 4).

1.2 Álgebra Abstrata

O surgimento da Álgebra Abstrata não significou o abandono das ideias que se tinha da Álgebra Clássica, mas sim a possibilidade de se construir uma Álgebra diferente desta. Neste sentido, pode-se dizer que, assim como Lobachevsky em 1829 e Bolyai em 1832 contribuíram para a libertação da geometria da dependência do mundo sensorial com a geometria não euclidiana[2], a Álgebra, no início do século XIX, se libertou de sua dependência da aritmética. De acordo com Rosenfeld (1988, p. 207), inicialmente a geometria não euclidiana fora chamada por Lobachevsky de geometria imaginária, o que pode indicar uma relação feita pelo matemático russo entre a geometria euclidiana e a geometria imaginária e os números reais e os números imaginários.

Segundo Milies (2004, p. 28), o processo de abstração em álgebra teve início, de fato, em 1815 com a fundação da Analytical Society, por matemáticos da Universidade de Cambridge, como Charles Babbage (1792 – 1871), George Peacock (1791 – 1858) e John Herschel (1792 – 1878). Esta sociedade foi fundamental para discutir e repensar os fundamentos da álgebra.

O começo do pensamento axiomático em álgebra se deu em 1830, quando Peacock publicou seu Treatise on Algebra, em que "tenta dar a esta disciplina uma estrutura lógica comparável à dada em geometria nos Elementos de

---

[2] Lobachevsky refutou a doutrina idealista da "inatidão" da nossa noção do espaço (ideia originada com Platão e desenvolvida novamente por Kant) (ROSENFELD, 1988, p. 208). A geometria, neste sentido, não estava baseada na intuição, mas em axiomas que poderiam ou não ser intuitivos.

Euclides; isto é, apresentá-la como o desenvolvimento abstrato das conseqüências de um certo conjunto de postulados" (MILIES, 2004, p. 28).

Na mesma época, Augusto de Morgan (1806 – 1871) assume o mesmo ponto de vista de Peacock. Porém, ambos utilizavam axiomas abstraídos da aritmética, sem notar que poderiam escolher tais axiomas livremente, independentes da aritmética e que não são verdades evidentes, como ocorreu com a geometria não euclidiana.

Foi com o matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805 – 1865) que este fato começou a mudar. Um grande feito deste matemático foi o tratamento dos números complexos como pares de números reais. Para Hamilton, "escrever um número complexo da forma $a + bi$ não é mais do que dar o par ordenado de números reais (a, b)" (MILIES, 2004, p. 32). A partir disso, define a soma e o produto entre estes números como:

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$$
$$(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Se identificarmos cada número real r como o par ordenado $(r, 0)$, podemos perceber que a adição e a multiplicação entre dois números reais é preservada, pois:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \text{ e } (a, 0).(b, 0) = (ab, 0)$$

Pode-se dizer, então, que o sistema dos números reais está imerso no sistema de números complexos. Com isso, Hamilton eliminou "a aura mística que cercava os números complexos, pois não há nada místico num par ordenado de números reais" (EVES, 2004, p. 549).

Uma vez que o sistema dos números complexos é útil no estudo de vetores e rotações do plano, Hamilton, que também era físico, viu que seu feito possivelmente o ajudaria a trabalhar com vetores do espaço e, ao invés de pares ordenados, pensou em desenvolver uma álgebra de ternas. Esse problema das ternas ocupou muitos anos de trabalho de Hamilton e culminou no desenvolvimento dos quádruplos ordenados (a, b, c, d) de números reais, que possuem imersos neles tanto os números reais como os números complexos. Ao definir a soma e a multiplicação de quatérnios (quádruplos ordenados), pode-se mostrar que a adição de quatérnios é associativa e comutativa e que a multiplicação é associativa e distributiva em relação à adição, mas a multiplicação não é comutativa. Este fato era novo para a Álgebra até então, pois não era possível, naquele momento, pensar que era concebível abandonar a lei comutativa da multiplicação. O estudo dos quatérnios teve papel essencial no desenvolvimento da abstração em Álgebra, pois mostrou que as leis fundamentais não eram "dados apriorísticos que deviam ser sempre assumidos, uma vez que o conjunto dos quatérnios é o primeiro exemplo conhecido onde a ordem dos fatores altera o produto, i.é., a primeira álgebra não comutativa" (MILIES, 2004, p. 37).

Após a criação dos quatérnios, houve a possibilidade de se construir novas álgebras, como a álgebra das matrizes - outra álgebra não comutativa - desta vez criada pelo matemático inglês Arthur Cayley (1821 – 1895). A Álgebra Abstrata estava se desenvolvendo, utilizando leis estruturais diferentes daquelas da Álgebra usual. A revolução estrutural da álgebra possibilitou estudar uma grande variedade de sistemas, que incluem "grupóides, quase-grupos, semigrupos, monóides, grupos, anéis, domínios de integridades, reticulados, anéis de divisão, anéis booleanos, álgebras booleanas, corpos, espaços vetoriais, álgebras de Jordan e álgebras de Lie [...]"[3] (EVES, 2004, p. 553). Neste trabalho, nosso objeto de estudo é a estrutura de grupo, que iremos apresentar a seguir, e as funções que preservam a estrutura de grupo, os isomorfismos de grupos.

1.2.1 Grupo

A história das estruturas algébricas, como a estrutura de grupo, está ligada à evolução da teoria dos números e da teoria das equações. Algumas noções da teoria de grupo têm origem nas diversas etapas deste processo de evolução que citamos acima, muitas vezes em estudos de casos particulares, antes mesmo da própria definição de grupo.

---

[3] Para maior aprofundamento sobre essas estruturas algébricas, sugerimos o livro Theory and Problems of Group Theory, dos autores B. Baumslag e B. Chandler e o livro Elementos de Álgebra, do autor Luiz Henrique Jacy Monteiro.

Para Kleiner (1986, p. 195) a evolução da teoria de grupo teve início em 1770, com a publicação Réflexions sur la résolution algébrique des équations, de Lagrange, estendendo-se até o século XX, sendo o século XIX o mais importante para seu desenvolvimento. Ainda segundo este autor, o século XIX possuía características que influenciaram a teoria de grupo, tais como: uma maior preocupação pelo rigor; o aparecimento da abstração; o renascimento do método axiomático; a visão da matemática como uma atividade humana possível sem referências ou motivadas por situações físicas.

Ainda de acordo com Kleiner (1986, p. 196), a evolução da abstrata teoria de grupo se deu a partir de quatro fontes principais:

(a) a Álgebra Clássica, com Lagrange em 1770 e sua publicação Réflexions sur la résolution algébrique des équations, que tinha como principal objetivo "discutir o porquê dos métodos usados para resolver equações de grau $n < 5$ não funcionarem para equações de graus maiores" (BRANDEMBERG, 2010, p. 39). Lagrange analisa os métodos conhecidos para resolução de equações cúbicas e quárticas, dos trabalhos de Descartes, Euler e Étienne Bézout (1730 – 1783), e observa que para resolver uma dada equação, de uma forma ou de outra, "acabamos caindo numa equação auxiliar, que ele [Lagrange] chama de réduite, pois se pode reduzir a uma de grau menor que a equação dada" (MILIES, 1992, p. 19).

Lagrange foi, talvez, o primeiro a afirmar, após tentativas fracassadas, a inexistência de solução algébrica para equações de grau superior a quatro. Foi o primeiro também a fazer associações entre uma equação polinomial e a permutação de suas raízes, chamando a atenção para o estudo das permutações. O trabalho de Lagrange influenciou diretamente outros matemáticos que continuaram o estudo das permutações, como Paolo Ruffini (1765 – 1822), Abel (1802 – 1829), Cauchy (1789 – 1857) e Galois (1811 – 1832), que nomeou o conjunto de permutações de "grupo" (grupo de permutações). Foi, então, com estes matemáticos que a teoria das permutações se aperfeiçoou e tornou-se um campo independente da matemática. Segundo Brandemberg (2010, p. 47), o "rápido desenvolvimento da teoria das permutações diminuiu a conexão com a teoria das equações e elas passaram a ser estudadas em paralelo";

(b) a Teoria dos Números, com Gauss, em Disquisitiones Arithmeticae de 1801, no qual iniciou a teoria de grupo abeliano finito. Kleiner (1986,

p. 197) afirma que Gauss estabeleceu muitas das propriedades significativas de grupo, apesar de não utilizar nenhuma terminologia da teoria de grupo. Construiu, implicitamente, exemplos de grupos, tais como: o grupo aditivo dos inteiros módulo m, o grupo de classes de equivalência de formas quadráticas binária e o grupo de raízes n-ésima da unidade. Uma parte importante destas inovações contidas em Disquisitiones Arithmeticae de Gauss se deve a Euler e sua Teoria das Potências Residuais[4], a qual utilizou para demonstrar o pequeno teorema de Fermat;

(c) a Geometria, a partir do programa de Erlangen[5] de Felix Klein (1849 – 1925), intitulado A Comparative Review of Recent Researches in Geometry apresentado em 1872. O objetivo de seu Programa de Erlangen era a classificação da geometria como o estudo de espaços invariantes por diferentes grupos de transformação. Assim, apareciam grupos como: grupos projetivos, grupos elípticos, grupos hiperbólicos, bem como as geometrias associadas a eles;

(d) a Análise, com Sophus Lie (1842 – 1899) em 1874, Henri Poincaré (1854 – 1912) e Felix Klein em 1876. Em 1874, Lie introduziu sua Teoria Geral de Grupos de Transformação, o que conhecemos hoje como grupos de Lie. Ele tentou fazer para equações diferenciais o que Abel e Galois haviam feito para equações algébricas. Já Poincaré e Klein iniciaram seus trabalhos, em torno de 1876, sobre funções automorfas[6] e os grupos associados a elas.

Destas fontes apresentadas por Kleiner (1986), percebemos que o estudo de grupos atingiu diferentes ramos da matemática – teoria das equações, teoria dos números, geometria, análise – e envolveu grandes nomes tais como os citados acima. Porém, a definição abstrata de grupo demorou a surgir. E foi,

[4] A Teoria das Potências Residuais tem, ao final do século XVIII, um avanço considerável a partir de um artigo de 1761, quando Euler considerou “os restos obtidos na divisão de potências a^v, v um número natural, por um número primo p. Ele assumiu que a não é divisível por p e conclui que obviamente a^v também não é. Assim, ele investigou o que acontece com os restos das divisões dos termos da sequência geométrica infinita a^v, v natural, por p.” (BRANDEMBERG, 2010, p. 53). Os métodos utilizados por Euler em sua demonstração deram origem a outros teoremas que impulsionaram o avanço da teoria.

[5] O Programa de Erlangen foi a dissertação inaugural apresentado por Felix Klein, aos 23 anos de idade, na abertura do ano letivo de 1872 da Universidade de Erlangen. O título do programa, em português, é Considerações Comparativas Sobre as Pesquisas Geométricas Modernas e o texto traduzido pode ser encontrado em http://publica-sbi.if.usp.br/PDFs/pd499.

[6] Uma “função automorfa $f(z)$ da variável complexa z é uma função que é analítica, excetuados pólos, num domínio D e que é invariante sob um grupo infinito enumerável de transformações lineares fracionárias $z' = \frac{az+b}{cz+d}$” (BOYER, 1996, p. 418)

principalmente, com os matemáticos Galois, Cauchy e Cayley que a primeira definição abstrata de grupo foi formulada.

Utilizando de trabalhos de outros matemáticos e das já avançadas Teoria das Equações e Teoria das Permutações (Lagrange – Ruffini – Abel – Cauchy), Galois tratou sua teoria da solubilidade das equações algébricas, posteriormente conhecida como Teoria de Galois. Foi a realização das conexões entre as teorias das equações e das permutações que, segundo Brandemberg (2010), Galois ampliou as contribuições de seus predecessores:

> A realização das conexões internas entre essas teorias que lhe permitiu encontrar o que faltou a Lagrange: um critério para a solubilidade das equações por radicais, ou seja, as estruturas das raízes de uma equação é interpretada a partir de um certo grupo de permutações associado à equação (BRANDEMBERG, 2010, p. 81).

Foi em seu artigo Sur la théorie des nombres, de 1830, que Galois utilizou pela primeira vez o termo “grupo” em um contexto matemático, no caso de grupo de permutações, mas ainda em um sentido comum de conjunto ou coleção. Introduziu alguns conceitos, como o de subgrupo normal, o qual chamava de invariante, o conceito de grupo solúvel, mostrando que uma equação dada pode ser resolvida por radicais se o grupo dessa equação é solúvel.

Os estudos de Galois só tomaram forma quando em 1870, Camille Jordan (1838 – 1922) publicou seu trabalho sobre a teoria das permutações, chamado Traité des Substituitions et des Équations Algébriques, no qual apresentou “a primeira formulação original da teoria de Galois” (BRANDEMBERG, 2010, p. 87).

Segundo Milies (1992, p. 2), coube a Augustin Cauchy reconhecer a importância dos grupos por si mesmos, e passou a encarar o estudo das permutações como um ramo da matemática com interesses próprios, independente da teoria das equações. Cauchy introduziu, entre outras, a notação para permutações, definiu substituições, permutações cíclicas, transposições, o produto entre duas substituições.

Após os grandes avanços conceituais obtidos por Galois e o reconhecimento da importância do estudo dos grupos por Cauchy, a primeira definição abstrata do conceito de grupo foi feita por Arthur Cayley. Este tinha realmente “uma visão abstrata da matemática e realizou diversas descobertas que contribuíram a levar a álgebra na direção de uma abstração crescente” (MILIES, 1992, p. 30).

Como afirmam Brandemberg (2010, p. 91) e Milies (1992, p. 30), a terminologia da teoria dos conjuntos na época de Cayley não estava bem desenvolvida, fazendo com que ele utilizasse símbolos abstratos e não objetos concretos como permutações ou números, deixando claro que trabalhava com apenas uma operação, a qual é associativa, mas não necessariamente comutativa. Sua definição de grupo é:

> Um conjunto de símbolos $1, \alpha, \beta, \dots$ todos eles diferentes, tal que o produto de dois quaisquer deles (não importa em que ordem), ou o produto de qualquer um deles por si mesmo, pertence ao conjunto, diz-se que forma um *grupo.* (MILIES, 1992, p. 31)

Com a definição, Cayley passa a discutir algumas propriedades de grupos, introduzindo a chamada tabela da operação de grupo, a qual conhecemos como Tabela de Cayley. Em análise às possíveis tabelas de operação para grupos de ordem 4 e 6, Cayley mostrou que existem dois casos possíveis para cada ordem. Sendo grupos de ordem 4 o grupo cíclico de ordem 4 e o grupo de Klein. Já os grupos de ordem 6 são o grupo cíclico de ordem 6 e o grupo das permutações de três letras.

Durante algum tempo, este conceito abstrato de grupo foi considerado pouco importante. Por volta de 1880, com os trabalhos de Klein, von Dyck (1856 – 1934) e, posteriormente, H. Weber (1842 – 1913), o “conceito de grupo abstrato foi elevado à posição de um conceito central da álgebra” (BRANDEMBERG, 2010, p. 96), com novas definições abstratas de um grupo.

Atualmente, a definição do conceito de grupo é feita em livros didáticos, em particular, na quarta edição do livro Álgebra Moderna, dos autores Hygino H. Domingues e Gelson Iezzi (2003), da seguinte forma:

> **Definição 1**: Um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio G e uma operação $(x, y) \mapsto x * y$ sobre G é chamado *grupo* se essa operação se sujeita aos seguintes axiomas: *associatividade*
> $(a * b) * c = a * (b * c)$, quaisquer que sejam $a, b, c \in G$; ;
> *existência do elemento neutro*
> existe um elemento e$\in G$ tal que $a * e = e * a = a$, qualquer que seja e $\in G$; *existência de simétricos*

> Para todo a $\in G$ existe um elemento $a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e$.
> Se, além disso, cumprir o axioma da
> *Comutatividade*
> $a * b = b * a$, quaisquer que sejam $a, b \in G$,
> o grupo recebe o nome de *grupo comutativo* ou *abeliano.* (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 138-139).

O livro nos traz, em seguida, as propriedades imediatas de um grupo. Seja $(G,*)$ um grupo, as propriedades para uma operação sobre um conjunto nos asseguram que:

> - a unidade do elemento neutro de $(G,*)$;
> -a unidade do simétrico de cada elemento de G;
> - que, se e é o elemento neutro, então $e' = e$;
> - que $(a')' = a$, qualquer que seja $a \in G$;
> - que $(a * b)' = b' * a'$ e, portanto (raciocinando por indução), que $(a_1 * a_2 * \ldots * a_n)' = a_n' * a_{n-1}' * \ldots * a_1' \; (n \geq 1)$;
> - que todo elemento de G é regular para a operação $*$. Ou seja: se $a * x = a * y$ (ou $x * a = y * a$), então $x = y$.
> (DOMINGUES, IEZZI, 2003, p.139)

Alguns grupos importantes são apresentados em Domingues e Iezzi (2003, p.140-153), como, por exemplo:

- grupo aditivo dos inteiros, formado pelo conjunto dos inteiros e a adição usual sobre $\mathbb{Z}$. A operação de adição é associativa e comutativa sobre $\mathbb{Z}$. Existe o elemento neutro (o número 0) e existe o elemento oposto $-a$ de qualquer elemento $a \in \mathbb{Z}$. A notação para esse grupo é $(\mathbb{Z}, +)$;

- grupo multiplicativo dos racionais, formado pelo conjunto dos racionais não nulos e a multiplicação usual sobre $\mathbb{Q}$. A multiplicação é associativa em $\mathbb{Q}^*$, o número 1 é o elemento neutro da multiplicação e existe o elemento oposto a^{-1} de qualquer elemento $a \in \mathbb{Z}$. Esse grupo é denotado por $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.

- grupos aditivo de matrizes $m \; x \; n$, formado pelo conjunto das matrizes sobre $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R},$ ou $\mathbb{C}$ e a operação adição de matrizes. A adição é associativa, o elemento neutro é a matriz 0_{mxn}, e existe elemento oposto para qualquer que seja a matriz. Esse grupo é denotado por $(\mathcal{M}_{mxn}(K),+)$, onde $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R},$ ou $\mathbb{C}$;

- grupos lineares de grau n, representado por $(GL_n(K),.)$, em que $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, é formado pelo conjunto das matrizes quadradas inversíveis, isto é, cujo determinante é diferente de zero, com a operação multiplicação de matrizes;

- grupos aditivos de classes de restos, sistema formado pelo conjunto $\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$, que é o conjunto quociente de $\mathbb{Z}$ pela relação de congruência módulo m, com a adição módulo m. Representado por $(\mathbb{Z}_m, +)$;

- grupos de permutações, formado pelo conjunto das permutações[7], denotado por $S(E)$, munido da operação composição de aplicações – sejam f e g permutações de E, isto é, $f: E \to E$ e $g: E \to E$ bijeções, então a operação composição de aplicações será $fog: E \to E$, que também é uma bijeção. Esse grupo é simbolizado por $(S(E),\ o)$;

- grupos de simetrias do triângulo equilátero. Denomina-se *simetria* do triângulo equilátero T qualquer aplicação bijetora $f: T \to T$ que preserva distância. A operação desse grupo é a isometria, uma transformação geométrica que leva uma cópia do triângulo a coincidir com ele mesmo.

Escolhemos pela definição e exemplos apresentados com base no citado livro devido à sua presença na bibliografia da disciplina de Álgebra do curso de Matemática da universidade que estamos pesquisando.

1.2.2 Isomorfismo de Grupos

Vimos brevemente que o conceito abstrato de grupo se desenvolveu vagarosamente. Segundo Kleiner (1986, p. 207), demorou mais de cem anos, desde a introdução dos estudos teóricos de grupo de Lagrange com seu trabalho em 1770 até o conceito de grupo abstrato.

Com os vários exemplos de grupos que estavam surgindo durante o desenvolvimento das teorias de grupo, o conceito de isomorfismo de grupos também começa a aparecer. Cayley mostrou que todo grupo finito é isomorfo a um grupo de

[7] O termo permutação é usado na teoria de grupos para designar uma bijeção de um conjunto nele mesmo.

permutação, sendo este resultado o que conhecemos hoje como teorema de Cayley. Conforme Kleiner (1986, p. 208), apesar de não ter definido explicitamente, Cayley mostrou ter conhecimento sobre o conceito de isomorfismo de grupos.

Ainda de acordo com Kleiner (1986, p. 210), foi von Dyck que, em um importante e influente artigo em 1882 intitulado *Group-theoretic studies,* conscientemente incluiu e combinou, pela primeira vez, todas as principais raízes históricas da abstrata teoria de grupo: a algébrica, a teoria dos números, a geométrica e a da análise. Nas palavras de von Dyck (1882) apresentadas por Kleiner (1986):

> O objetivo da investigação que se segue é continuar os estudos das propriedades de um grupo em sua formulação abstrata. Em particular, isso colocará a questão sobre até que ponto estas propriedades têm um caráter invariante presente em todas as diferentes realizações de grupo, e a questão de o que conduz para a determinação exata do essencial conteúdo grupo-teórico (VON DYCK, 1882 *apud* KLEINER, 1986, p. 210).

Na sequência, Kleiner (1896, p. 210), afirma que a definição de grupo abstrato feita por von Dyck, que incluía os casos de grupo finito e infinito, foi dada em termos de geradores (operações) e definindo relações, ressaltando que, nas palavras de von Dick (1882), “[...] todos os grupos isomórficos são incluídos em um único grupo” e, ainda, que “a essência de um grupo deixa de ser expressa por uma determinada forma de apresentação de suas operações, mas sim por suas relações mútuas” (VON DICK, 1882 apud KLEINER, 1986, p. 210).

Notamos com isso que, por volta da segunda metade do século XIX, começa a se formalizar a ideia de que podemos separar grupos em classes, de forma que as “propriedades deduzidas para um particular grupo de uma dada classe possam ser transferidas para todos os grupos dessa classe, e apenas para estes, com uma mudança adequada das notações” (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 161).

De acordo com Domingues e Iezzi (2003), apesar de a formalização do conceito de isomorfismo de grupos ser relativamente recente na história da matemática, “sua utilização informal e despercebida em outras áreas é muito antiga” (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 161). Esses autores citam os exemplos: i) da congruência de triângulos, cujo objetivo é agrupar ou separar triângulos em classes disjuntas de acordo com o critério métrico. Então, encontrar, por exemplo, a área de um dado triângulo seria o mesmo que encontrar a área de todos os triângulos congruentes a ele, isto é, todos os triângulos que pertencem à mesma classe; ii) e o exemplo da criação dos logaritmos, cuja ideia inicial era transformar uma divisão, uma multiplicação ou uma radiciação respectivamente em uma subtração, adição ou divisão por números inteiros, visando facilitar os longos e penosos cálculos aritméticos.

Concluindo a apresentação do conceito de isomorfismo de grupos, trazemos a definição formal de isomorfismo de grupo, que é apresentada no livro Álgebra Moderna de Domingues e Iezzi (2003) da seguinte forma:

> **Definição 5:** Seja $f: G \to J$ um homomorfismo de grupos. Se f for também uma bijeção, então será chamado de *isomorfismo do grupo* G no grupo J. Neste caso, diz-se que f é um *isomorfismo de grupos.* Se $G = J$ e a operação é a mesma, f é um *isomorfismo de* G (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 168).

Destacando que, neste mesmo livro, define-se homomorfismo como:

> **Definição 3**: Dá-se o nome de *homomorfismo* de um grupo $(G,*)$ num grupo $(J,.)$ a toda aplicação $f: G \to J$ tal que, quaisquer que sejam $x, y \in G$: $f(x * y) = f(x).f(y)$ (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p.162).

Um exemplo de isomorfismo de grupos, de acordo com Domingues e Iezzi (2003), pode ser dado pela função logarítmica $log: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, pois:

- $\log(x.y) = \log(x) + \log(y)$, isto é, log preserva a multiplicação de $\mathbb{R}_+^*$ e a adição de $\mathbb{R}$;
- E ainda, log é uma bijeção.

Após expormos esse breve histórico do desenvolvimento da Álgebra, em que mostramos de forma resumida como se deu o longo processo que resultou na atual definição abstrata dos conceitos de grupo e de isomorfismo de grupos, apresentamos na sequência algumas considerações sobre a presença da Álgebra Abstrata em cursos de graduação em Matemática, em especial, da universidade em que a pesquisa foi realizada.

1.3 A ÁLGEBRA EM CURSOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Em muitos cursos de graduação, a Álgebra está presente tanto no bacharelado como na licenciatura em Matemática. Na universidade escolhida para esta pesquisa não é diferente.

Consideramos a Álgebra, além das áreas de Geometria e Análise, essencial para a construção do conhecimento matemático de qualquer estudante e, com isso, julgamos que esta disciplina seja indispensável para ambas as modalidades – licenciatura e bacharelado em Matemática.

No que se refere à licenciatura em Matemática, cremos que a disciplina de Álgebra seja necessária porque sem ela o estudante, futuro professor, sairia “do curso sem o alicerce básico para ensinar os princípios fundamentais da matemática” (SOUZA, 2004). Além disso, os conteúdos da matemática avançada, tais como os conteúdos da Álgebra, fornecem “uma visão da importância da matemática quer como ferramenta na resolução de problemas nas diversas áreas do conhecimento, quer como sistema abstrato de idéias, refletindo generalizações e regularidades” (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, 2009a, p. 14).

Entendemos, portanto, que o curso de Álgebra para a licenciatura em Matemática traga contribuições para a formação do futuro professor, uma vez que são em disciplinas como essa que o estudante

> Desenvolve a compreensão e a capacidade de estabelecer nexos entre os vários temas da matemática escolar; aprender a tratar com maior cuidado os processos dedutivos, as definições e as formalizações, de um modo geral (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, 2009a, p. 14).

Quanto ao bacharelado em Matemática, a relevância da disciplina de Álgebra é mais evidente, pois, de acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura (CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 2001, p. 2), um dos objetivos do bacharelado é qualificar seus graduandos visando a pesquisa e o Ensino Superior.

Segundo essas diretrizes, as características pretendidas para os formandos do bacharelado são diferentes daquelas pretendidas para os da licenciatura em Matemática. Vejamos o perfil desejado para o egresso em matemática de acordo com sua modalidade:

Quadro 1 – Perfil desejado para o egresso em matemática, segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura

Licenciatura	Bacharelado
Visão de seu papel social de educador e capacidade de se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos;	Uma sólida formação de conteúdos de Matemática;
Visão da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania;	Uma formação que lhes prepare para enfrentar os desafios das rápidas transformações da sociedade, do mercado de trabalho e das condições de exercício profissional.
Visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação de preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina.	

Fonte: Conselho Nacional de Educação (2001, p. 2)

Percebemos, em consonância com o que dissemos acima, que um curso de bacharelado em Matemática objetiva garantir uma formação sólida de conteúdos matemáticos e, para isso, a Álgebra é essencial, pois essa pode ser considerada um suporte para a construção do conhecimento matemático.

Segundo os Projetos Político-Pedagógicos do curso de Matemática de ambas as habilitações – licenciatura e bacharelado – da universidade em que a pesquisa foi realizada, as contribuições da Álgebra para a formação do estudante são:

- compreender, abstrair e representar, com formalismo, aspectos estruturais da matemática;
- analisar as diferentes formas de argumentação, as diversas maneiras de encadeamento do raciocínio;
- sintetizar, aliada à capacidade de compreender e expressar-se;
- desafiar a curiosidade, tendo em vista o desenvolvimento de um raciocínio independente;
- percepção das várias estruturas matemáticas.
- (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, 2009a, p. 14).

Então, considerando que a Álgebra está presente em ambas as modalidades e pensando no que se espera dessa disciplina na formação do estudante, o objetivo de identificar e interpretar as dificuldades apresentadas por estudantes de Matemática – da licenciatura e do bacharelado – da Universidade Estadual de Londrina quanto aos conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos se faz relevante no sentido de que colabora para um repensar sobre o ensino da Álgebra tanto no bacharelado como na licenciatura em Matemática. Isto é, estudar as dificuldades apresentadas por estudantes contribui para refletir se os objetivos traçados para a disciplina de Álgebra na formação do estudante estão sendo alcançados, bem como servir com um diagnóstico parcial do curso, suscitando possíveis alterações em seu currículo.

Na universidade em que realizamos a pesquisa, a disciplina de Álgebra é ofertada na segunda série tanto da licenciatura quanto do bacharelado em Matemática. No primeiro ano dos cursos as disciplinas oferecidas são comuns a ambas as modalidades, a saber: Cálculo I, Geometria Analítica e Álgebra Linear, Elementos de Matemática e Geometria e Desenho[8]. Por isso, concordamos com Dubinsky et al. (1994, p. 26) ao afirmarem que a Álgebra é uma das primeiras disciplinas enfrentadas pelos estudantes que não é dominada pela memorização de fórmulas e pela imitação de soluções de um conjunto de problemas. O que pode causar dificuldades aos estudantes iniciantes no aprendizado de conceitos dessa disciplina. São, então, nessas dificuldades no aprendizado de conceitos algébricos que esta pesquisa está centrada.

No capítulo subsequente, apresentamos alguns trabalhos que ajudaram a desenvolver a pesquisa.

[8] O Sistema Acadêmico adotado pelo curso de Graduação em Matemática na Universidade Estadual de Londrina, a partir de 2005, é o seriado anual, com disciplinas anuais e semestrais. As disciplinas da primeira série e Álgebra, da segunda série, são anuais.

CAPÍTULO 2
ALGUMAS PESQUISAS

Neste capítulo apresentamos algumas pesquisas já realizadas que mostram dificuldades de estudantes com a disciplina de Álgebra e que, de alguma forma, nos auxiliaram no percurso do presente trabalho, seja na elaboração do instrumento de coleta de dados, seja nas interpretações dos mesmos ou, de maneira mais ampla, nos ajudaram a compreender esta pesquisa como um todo, ampliando nossos horizontes, nos fazendo enxergar como faríamos para responder às questões de investigação: *que dificuldades são apresentadas por graduandos em Matemática após o estudo de grupo e/ou isomorfismo de grupos? O que essas dificuldades nos mostram a respeito das concepções desses estudantes, segundo a teoria APOS, com relação aos conceitos matemáticos em questão?*

Como dissemos na introdução, poucos foram os trabalhos encontrados que tratam do ensino e aprendizagem de estruturas algébricas no Brasil. Mencionamos aqui as dissertações ou teses encontradas: as teses de doutorado de Campos (2009), que, como já dissemos, tratava da noção de congruência algébrica; Kluth (2005), com uma perspectiva fenomenológica sobre a construção do conhecimento das estruturas da Álgebra; Brandemberg (2009), que se tornou, há pouco tempo, o livro *Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo*; e as dissertações de mestrado de Bussmann (2009), sobre os conhecimentos mobilizados por estudantes em tarefas envolvendo o conceito de grupo; Prado (2010), com as concepções de estudantes sobre base de um espaço vetorial após um curso de extensão em Álgebra Linear.

Com a escassez de trabalhos no Brasil, tivemos que recorrer, muitas vezes, a trabalhos internacionais. Como já explicitamos, o trabalho de Campos (2009) nos forneceu inspirações para esta pesquisa, mas seu objeto matemático é diferente do pretendido por nós, portanto não será apresentado neste capítulo. Mostraremos brevemente aquelas pesquisas que estão diretamente ligadas aos conceitos de grupo e de isomorfismo de grupos e que, por isso, permearam o trabalho.

2.1 PESQUISA DE DUBINSKY, DAUTERMANN, LERON E ZAZKIS (1994)

Essa é uma das pesquisas que compõem uma série de estudos realizados pelos membros do grupo *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC) sobre a natureza e o desenvolvimento do conhecimento matemático de universitários. Conforme afirma Campos (2009, p. 45), essa pesquisa de Dubinsky *et al.* (1994) é considerada um marco inicial da área.

Os objetivos de Dubinsky *et al.* (1994) são entender qual a natureza do conhecimento sobre a teoria elementar de grupos, observar como um indivíduo aprende certos tópicos desta teoria para, com isso, verificar se é possível mapear uma decomposição genética[9] de vários tópicos desse domínio.

Utilizando a teoria APOS, os autores investigaram as construções feitas por estudantes, que são professores do ensino secundário inscritos em um curso de Álgebra Abstrata, sobre os conceitos de grupo, subgrupo, classe, normalidade e grupo quociente.

Dentre as conclusões relatadas pelos autores, citamos uma que está diretamente relacionada com esta pesquisa, pois trata do desenvolvimento do conceito de grupo. Segundo Dubinsky *et al.* (1994, p. 23), o conceito de grupo parece ter um início bastante primitivo, aparentemente baseado inteiramente na concepção do estudantes a respeito de conjunto. Ao ganhar experiência, o estudante passa a incluir um número de propriedades que o conjunto pode ter e, assim, uma operação binária passa a ser incluída dentre essas propriedades. Desta forma, a encapsulação de dois objetos – conjunto e operação binária – coordenados em par, pode ser o primeiro entendimento real do estudante sobre grupo. O termo e*ncapsular,* de acordo com Dubinsky (2002), significa o ato consciente de transformar *processos* (dinâmicos) em *objetos* (estáticos), por meio de alguma *ação* ou operação. Trataremos melhor desse termo no capítulo 3.

[9] Asiala et al. (1996, p. 7) definem decomposição genética de um conceito como uma descrição (em termos de ação, processo, objeto e esquema) de uma construção mental específica que um aprendiz pode fazer quando do desenvolvimento de sua construção sobre um conceito.

2.2 PESQUISA DE BROWN, DE VRIES, DUBINSKY E THOMAS (1997)

Essa pesquisa é uma continuidade de trabalhos precedentes e, em particular, da investigação realizada em Dubinsky et al. (1994). Esse trabalho examina como estudantes de Álgebra Abstrata podem vir a compreender os conceitos de operação binária, grupo e subgrupo. Para isso, os autores utilizam a teoria APOS em um quadro mais amplo de pesquisa e de desenvolvimento curricular. Esse quadro é composto por três componentes essenciais: i) a análise teórica de certo conceito matemático (decomposição genética, em termos da APOS, do conceito). Essa etapa foi inspirada nos dados e nos resultados da pesquisa Dubinsky et al. (1994); ii) implementação do chamado tratamento instrucional, que seria um procedimento pedagógico não tradicional, tal como aprendizagem cooperativa e o uso da linguagem de programação ISETL (Interactive SET Language). Este segundo momento é baseado na análise teórica feita anteriormente; iii) a coleta e a análise dos dados para examinar e refinar tanto a análise teórica como o tratamento instrucional. Essa estratégia pedagógica menos tradicional é chamada de ACE-teaching cycle (Activities, Class discussion and Excercises).

Além de pretender verificar até que ponto a teoria APOS é útil para entender as construções mentais feitas pelos estudantes no aprendizado dos conceitos de operação binária, grupo e subgrupo, outro objetivo, não apenas deste trabalho mas do grupo RUMEC, é oferecer sugestões pedagógicas que possam auxiliar no ensino e aprendizagem de tópicos da matemática.

2.3 PESQUISA DE LAJOIE (2000)

A tese de doutorado de Lajoie, cujo título traduzido é *Dificuldades ligadas às primeiras aprendizagens em Teoria de Grupos*, realizada no Canadá, teve como objetivo descrever e interpretar as dificuldades apresentadas por estudantes universitários no estudo das noções de grupo, isomorfismo de grupos, subgrupo e grupo cíclico, bem como identificar as origens dessas dificuldades. Para isso, Lajoie entrevistou dez estudantes do segundo ano de um curso de bacharelado em Matemática, os quais já haviam feito, no mínimo, um curso de estruturas algébricas.

A partir das análises das entrevistas, Lajoie identificou quatorze dificuldades ligadas aos conceitos citados acima. Com relação às noções de grupo e de isomorfismo de grupos, Lajoie (2000) revelou nove dificuldades, a saber:

> - dificuldade em discernir as propriedades essenciais de um grupo;
> - dificuldade em reconhecer que o elemento neutro de um grupo de classe de restos possui um elementos diferente de [0] e [1];
> - dificuldade em considerar transformações geométricas como elementos de um grupo;
> - dificuldade para entender grupos de forma abstrata, exceto os grupos numéricos;
> - dificuldade em dar a ideia de que grupos isomorfos são grupos semelhantes;
> - dificuldade de mostrar (formalmente) que dois grupos são isomorfos;
> - dificuldade em considerar mais de um isomorfismo possível entre dois grupos isomorfos;
> - dificuldade em ver os isomorfismos ao mesmo tempo como uma relação de equivalência sobre os grupos e como uma correspondência particular entre dois grupos isomorfos;
> - dificuldade em reconhecer uma utilidade do conceito de isomorfismos em matemática. (LAJOIE, 2000, p. 112, tradução nossa).

Além disso, com relação à origem dessas dificuldades, Lajoie (2000) encontrou, entre outras, o formalismo inerente à Álgebra Abstrata, algumas discrepâncias entre a linguagem matemática e a linguagem natural, a tendência em assimilar novos conceitos em imagens e exemplos familiares.

2.4 Pesquisa de Leron, Hazzan e Zazkis (1995)

Essa pesquisa teve como objetivo verificar como graduandos, em um primeiro curso de Álgebra Abstrata, aprendem o conceito de isomorfismo de grupos. Para tanto, entrevistaram um grupo de estudantes e identificaram em suas respostas uma série de pontos interessantes com relação ao conceito de isomorfismo de grupos. Por exemplo, os autores perceberam que estudantes tendem a confundir uma proposição e sua recíproca, como no caso da afirmação verdadeira que diz: isomorfismo implica iguais tipos de ordem[10], e que é confundida com a falsa afirmação: iguais ordens implicam isomorfismo.

---

[10] Leron, Hazzan e Zazkis (1995, p. 162) definem tipo de ordem de um grupo como uma sequência crescente de números que são as ordens dos elementos do grupo.

Além das constatações empíricas, o artigo nos traz valiosas considerações teóricas. Leron, Hazzan e Zazkis (1995, p. 154) trazem importantes reflexões sobre o conceito de isomorfismo quanto aos processos mentais envolvidos em sua compreensão e as distinções entre a visão "ingênua" e a noção formal de isomorfismo. Esses autores chamam de noção "ingênua" quando entendemos que dois grupos são isomorfos se "são os mesmos, exceto pela notação". Por outro lado, na noção formal, o isomorfismo de um grupo $(G, \ *)$ em um grupo $(H, \ \Delta)$ é uma função bijetora f de G em H, satisfazendo $f(a * b) = f(a)\Delta f(b)$ para todo a, b em G. Assim, dois grupos são isomorfos se existir um isomorfismo de um grupo em outro.

A construção mental do conceito de isomorfismo de grupos de acordo com a definição formal, que é diferente da versão ingênua, envolve, de acordo com os autores, a construção de três outros conceitos: grupo, função e quantificadores.

Então, os autores fazem uma distinção entre dois grupos serem isomorfos e o *objeto* isomorfismo. Afirmam que a relação de dois grupos isomorfos é intuitiva e não necessita do conceito de função para seu entendimento. Enquanto que o objeto isomorfismo é "funcional" e mais difícil de compreender, não existindo uma noção ingênua para isso. Da mesma forma, não há visão ingênua para homomorfismo, necessitando também da noção de função.

Além disso, apresentam uma distinção entre provar um isomorfismo e provar um não isomorfismo. Segundo Leron, Hazzan e Zazkis (1995, p. 155-156), mostrar um isomorfismo requer estabelecer correspondência ou mostrar a existência de uma função de certo tipo. Ao passo que mostrar o não isomorfismo requer provar a não existência, algo que é muito difícil. Entretanto, os estudantes tendem a se esquivar do significado mais profundo de isomorfismo, encontrando maneiras mais fáceis de dizer que dois grupos não são isomorfos apontando propriedades de um que não existem no outro.

Ao final, uma das considerações apresentadas no artigo é a ideia de introduzir o tema isomorfismo de grupos aos estudantes com a noção "ingênua", para então avançar com a noção formal do conceito.

No capítulo seguinte, apresentamos algumas caracterizações do pensamento matemático avançado e apresentamos o referencial teórico que adotamos.

CAPÍTULO 3
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta pesquisa, como estamos trabalhando com conceitos abstratos de álgebra, optamos por um referencial teórico que nos remetesse ao pensamento matemático avançado, a dificuldades apresentadas por estudantes no estudo de grupos e/ou isomorfismo de grupos e a uma teoria que nos auxiliasse a entender o nível cognitivo dos estudantes ao trabalharem com grupos e isomorfismos de grupos.

Segundo Domingos (2006, p. 1), os conceitos referentes ao Ensino Superior apresentam “um grau de complexidade acrescido necessitando de recorrer a um pensamento matemático avançado”. Assim, utilizaremos como fundamentação algumas teorias que tratam da construção desses conceitos matemáticos intrínsecos ao pensamento matemático avançado.

O termo “pensamento matemático avançado” foi proposto, segundo Harel, Selden e Selden (2006, p. 147), em oposição ao “pensamento matemático elementar” que caracterizou, durante muito tempo, os trabalhos do Grupo *Psychology of Mathematics Education*. Esse grupo, que tinha inicialmente sua ênfase no pensamento matemático elementar, em 1987, com a liderança de Gontran Ervynck e David Tall, formou o grupo de trabalho *Advanced Mathematical Thinking*, que passou a incluir em seus estudos a gama de pensamentos matemáticos que iam desde os últimos anos da escola secundária até a matemática axiomática baseada na definição e na prova. Ainda hoje não há um consenso quanto à definição do termo *pensamento matemático avançado*. Dessa forma, trataremos neste capítulo de algumas perspectivas do pensamento matemático avançado (PMA) e suas principais características, fazendo uma distinção entre esse e o pensamento matemático elementar (PME). Em seguida, apresentaremos algumas teorias cognitivas relacionadas à construção dos conceitos matemáticos.

Tall (1995, p. 161) separa a atividade humana em três componentes: *percepção* de um objeto do mundo externo, *pensamento* sobre ele e realização de uma *ação sobre* ele. Esse autor acredita que a matemática elementar inicia-se com a *percepção de* e a *ações sobre* objetos do mundo externo. Os objetos percebidos são estruturas visuais-espaciais que, à medida que são analisados e suas propriedades testadas, são descritos verbalmente e classificados (primeiro em coleções, depois em hierarquias), dando início a uma dedução verbal relacionada às propriedades e ao desenvolvimento sistemático de uma demonstração verbal, de acordo com o desenvolvimento de van Hiele[11] (TALL, 1995).

No que diz respeito à ação com os objetos, Tall (1995, p. 162) considera que conduz a um tipo diferente de desenvolvimento, e cita como exemplo de ação sobre objetos o processo de contagem, que se desenvolve utilizando palavras numéricas e símbolos que resultará no conceito de número.

Esses diferentes caminhos de desenvolvimento do pensamento matemático – um visual-espacial que se torna verbal e leva à demonstração, que dá origem à geometria, e o outro que utiliza símbolos “quer como processos para fazer coisas (tal como contar, adicionar, multiplicar) quer como conceitos para pensar sobre (tal como número, soma, produto)” (DOMINGOS, 2006, p. 2), que desenvolve a aritmética e álgebra – podem ocorrer independentemente. Porém, uma ligação entre os métodos visual e manipulativo simbólico é, evidentemente, proveitosa, pois desenvolve uma abordagem que utiliza as vantagens de cada um.

A hipótese de Tall (1995, p. 163) é que o crescimento cognitivo do pensamento matemático elementar para o avançado no indivíduo inicia-se com a percepção de e a ação sobre objetos do mundo exterior e é construído por meio dos desenvolvimentos paralelos citados anteriormente, inspirando o pensamento criativo baseado nos objetos formalmente definidos e na demonstração sistemática. Assim, Tall (1995) caracteriza o PMA como aquele que envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas por um grande leque de atividades matemáticas para construir novas ideias que continuam a criar e estender um sistema sempre crescente de teoremas demonstrados.

Tall (2002) considera a possibilidade de muitas das atividades do PMA em que, partindo de um problema no contexto da investigação matemática, há a formulação de conjecturas que levam ao refinamento e à prova, poderem ocorrer também na matemática elementar por meio da resolução de problemas. Contudo, o que distingue o PMA deste ciclo criativo que pode ocorrer na matemática elementar é a possibilidade da definição formal e dedução.

---

[11] De acordo com Kaleff et al. (1994, p. 24), o modelo de Van Hiele do pensamento geométrico pode ser visto como guia para a aprendizagem e para avaliação de estudantes em geometria. O modelo “consiste de cinco níveis de compreensão, chamados visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor que descrevem as características do processo de pensamento”.

Para Dreyfus (2002, p. 26) não há uma distinção nítida entre o PME e o PMA, mesmo considerando que a matemática avançada seja centrada sobre as abstrações de definição e dedução. Para esse autor, muitos dos processos do PMA estão presentes também no PME, como os processos de *representação* e *abstração*[12]. É possível, segundo Dreyfus (2002, p. 26) pensar em tópicos matemáticos avançados de uma forma elementar (por exemplo, pode-se mostrar que um conjunto associado a uma operação é um grupo apenas seguindo os passos corretamente, de forma algorítmica) e pode-se ter pensamento avançado sobre tópicos elementares (como em alguns problemas de olimpíadas matemáticas). Assim, para esse autor, a característica que distingue o PMA do PME é a complexidade que é exigida e a forma como ela é gerenciada. O gerenciamento desta complexidade é feito, principalmente, pelos processos de *representação* e *abstração*, que permitem a passagem de um nível de detalhe para outro.

Entendemos que há diferença entre as perspectivas de Tall e Dreyfus quanto à caracterização do PMA e à linha separadora entre ele e o PME. Para Dreyfus o que caracteriza o PMA são os complexos processos de *representação* e *abstração* que, dependendo do nível como eles são exigidos e tratados pelo indivíduo, podem manifestar-se em conceitos matemáticos elementares. Para Tall, o que distingue o PMA e o PME é a possibilidade da definição formal e a dedução, que só ocorrem com a introdução do método axiomático. Assim, para Tall, o início do PMA só seria possível a partir de disciplinas de Ensino Superior, a saber, Álgebra Avançada, Cálculo e Geometria Euclidiana.

Uma terceira caracterização do PMA é feita por Dubinsky (2011), a qual considera esse tipo de pensamento como fazer a encapsulação de *processos* em *objetos* quando esses objetos não têm representação do "mundo-real". Dessa forma, para Dubinsky (2011), o PMA não ocorre em níveis elementares de matemática, uma vez que a maioria do que parece ser essa encapsulação é, principalmente, resultado da percepção e, assim, não possui muita compreensão.

Concordamos, neste trabalho, com as visões de Dubinsky e de Tall no que diz respeito à possibilidade do PMA a partir do Ensino Superior, quando há

[12] Dreyfus (2002) considera três processos envolvidos na representação: i) o processo de representar; ii) o processo de representações e as traduções entre elas; iii) o processo de modelagem. Já na abstração, os processos envolvidos são dois: i) generalizar; ii) sintetizar.

estímulo ao pensamento criativo baseado nos objetos formalmente definidos e na demonstração sistemática.

Entendemos que, no Brasil, há a possibilidade de, ainda na Educação Básica, o estudante ter contato com um sistema dedutivo, com postulados, teoremas e demonstrações, tal como sugerem as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002):

> Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas idéias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares. Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática. (BRASIL, 2002, p. 124).

Porém, pesquisas como, por exemplo, Fernandes e Fonseca (2008), Serralheiro (2007), Pietropaolo (2005), Carlovich (2005) e Carvalho (2007) discutem e evidenciam a pouca importância que se tem dado às atividades de natureza dedutiva nas aulas de Matemática da Educação Básica.

Além disso, pensamos que havendo uma tentativa de introduzir o método axiomático na Educação Básica, este será pautada em objetos perceptíveis ou, conforme os PCN+ (BRASIL, 2002, p. 124), em fatos que são familiares aos estudantes.

No caso da Geometria, por exemplo, Parzysz (2006, p. 129-130) a separa em dois tipos: geometrias não axiomáticas e geometrias axiomáticas. O que distingue ambos os tipos são, segundo Parzysz (2006, p. 130), a natureza dos objetos (física ou teórica) e os modelos de validação (perceptivos ou hipotético-dedutivos).

As geometrias não axiomáticas são, ainda, divididas em: geometria concreta (G0) e geometria spatio-graphique (G1). Em G0 os objetos são físicos e "suas características físicas influenciam as observações e constatações" (DIAS, 2009, p. 24). Neste caso, a validação é baseada na percepção. Em G1 esses objetos físicos passam a ser figuras ou esboços, por meio de construções geométricas. Aqui, a validação é baseada em "comparação visual e sobreposições, apoiadas por medições realizadas com régua graduada, compasso e esquadros" (DIAS, 2009, p. 24).

As geometrias axiomáticas são, da mesma forma, divididas, segundo Parzysz (2006), em: geometria protoaxiomática (G2) e geometria axiomática (G3). Em G2 pode ainda haver relação com a realidade, com objetos físicos, como as representações geométricas, porém sua validade é feita no interior de um sistema axiomático, tal como a geometria euclidiana, conforme afirma Dias (2009, p. 25). Já em G3, os objetos são teóricos, e "não se faz referência à realidade e a Geometria é totalmente explicada (ou abstrata)" (ALMOULOUD, 2007, p. 6).

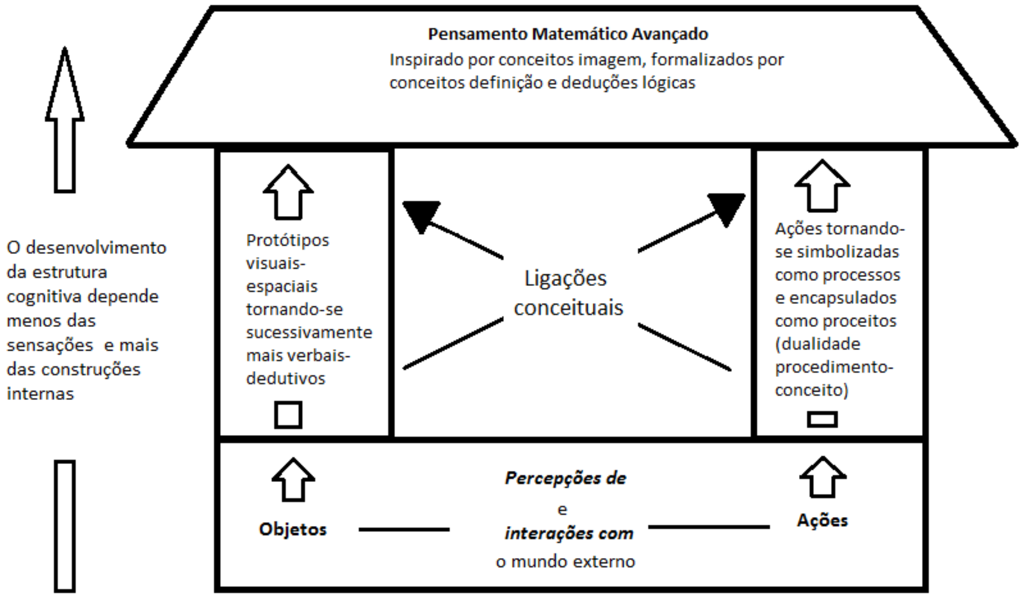
Parzysz (2006, p. 129) considera que o ensino de Geometria em nível básico se apoia fortemente na noção de figura e que consiste em uma sucessão de idas e vindas, geralmente implícitas, das geometrias *spatio-graphique* e protoaxiomática.

Assim, entendemos que se o método axiomático estiver, de fato, presente na Educação Básica por meio da Geometria, por exemplo, é por meio da geometria protoaxiomática, ou seja, está ligada à realidade e sua encapsulação pode, conforme afirma Dubinsky (2011), ser resultado da percepção, mas sem muita compreensão.

Para Tall (1995, p. 171-172), com a introdução do método axiomático no Ensino Superior há uma mudança cognitiva universal, em que os objetos matemáticos têm novo estatuto cognitivo como conceitos definidos construídos de definições verbais. É neste ponto que reside a difícil transição do PME para o PMA. Tall (2002, p. 20) afirma que a passagem do pensamento elementar para o PMA envolve uma transição significativa: da *descrição* para a *definição*, do *convencer* ao *provar* de uma maneira lógica com base nessas definições. É a transição da *coerência* da matemática elementar para a *consequência* da matemática avançada, que se baseia em entidades abstratas que o indivíduo deve construir por meio de deduções das definições formais. E essa transição pode causar grandes dificuldades em estudantes iniciantes na matemática avançada.

A seguir, apresentamos o esboço do desenvolvimento cognitivo desde uma criança até um matemático pesquisador, segundo Tall (1995).

Figura 1 – Esboço do desenvolvimento cognitivo da criança ao matemático pesquisador.



Fonte: Adaptado de Tall (1995, p. 164)

Os conceitos matemáticos focados nesta pesquisa fazem parte de uma das disciplinas que Tall considera como pertencentes à fase de transição do PME para o PMA: a Álgebra. É essa disciplina, juntamente com Cálculo e Geometria Euclidiana (demonstrações euclidianas), que introduz o estudante iniciante no método lógico-axiomático, ou seja, é quando o estudante começa a se familiarizar com a cultura matemática formalizada. Ressaltamos que, para Tall, esta ainda é a transição do PME para o PMA, pois nessas disciplinas – Cálculo, Álgebra e Geometria Euclidiana – o estudante se ocupa ainda com a complexidade proceitual[13] da manipulação de símbolos, que se desenvolve no sentido de construir a matemática axiomática. O PMA é, então, aquele que envolve um grande repertório de conhecimentos matemáticos que permite ao indivíduo ter criatividade de gerar novas ideias e a noção matemática da necessidade de provar a veracidade de suas afirmações.

[13] Gray e Tall (1994) consideram proceito como sendo a dualidade entre processo e conceito em matemática. Para eles, um mesmo símbolo pode representar um processo, como a adição de dois números 3+2, e o produto desse processo, que seria o conceito soma entre 3+2. Dessa forma, consideram que o sucesso no pensamento matemático utiliza uma estrutura mental que mistura processo e conceito, chamada proceito.

Sobre a fase de transição, Tall (2002) afirma também que exige um processo de reconstrução cognitiva, demandando um esforço individual na compreensão dos novos objetos matemáticos, como, por exemplo, grupo. Essa mudança, afirma esse autor, pode ser difícil para os estudantes iniciantes em matemática, o que justifica o objetivo desta pesquisa de investigar quais são essas dificuldades que esses apresentam na aprendizagem de conceitos de grupo e de isomorfismo de grupo.

Referente a essa mudança cognitiva, Piaget (1976) apresenta estudos sobre o processo de transição de um estado de menor conhecimento para os estados de conhecimento mais avançado. Para Piaget (1976), grosso modo, os processos responsáveis pela mudança na estrutura cognitiva são *assimilação*, *acomodação* e *equilibração.* A assimilação é o processo pelo qual o indivíduo recebe novos dados, é a “incorporação de um elemento exterior (objeto, acontecimento, etc) em um esquema sensoriomotor ou conceitual do sujeito” (PIAGET, 1976, p. 13). A acomodação é o processo de ampliação de esquemas mentais ou modificações dos esquemas já existentes no indivíduo. Assimilação e acomodação são complementares e necessárias para o crescimento e o desenvolvimento cognitivo. Quando os novos dados recebidos não são confirmados pela experiência do indivíduo, há o chamado desequilíbrio, sendo necessário o processo de equilibração, que é a passagem do desequilíbrio para o equilíbrio.

Algumas são as teorias cognitivas que se dedicam aos processos de construção de conceitos da matemática avançada e, para isso, se apoiam na perspectiva de Piaget. Apresentaremos alguns aspectos de duas dessas teorias que nos darão suporte para as interpretações dos dados coletados. Serão elas: teoria da reificação de Anna Sfard e a teoria APOS de Ed Dubinsky, sendo esta última a principal para este trabalho. A escolha pela teoria APOS se deu, essencialmente, por se adequar à construção dos conceitos da Álgebra Abstrata tratados nesta pesquisa, pois, conforme afirma Dubinsky *et al.* (1994, p. 4), das teorias cognitivistas aplicadas à matemática avançada, nenhuma, até aquele momento, havia sido aplicada aos conceitos da Álgebra Abstrata. Sendo assim, essa teoria se desenvolveu fundamentada em conceitos da Álgebra Abstrata. Já a preferência pela teoria da reificação de Anna Sfard como apoio nas interpretações das respostas dos estudantes se deu por ser, segundo Dubinsky *et al.* (1994), a que apresenta mais pontos em comum com a teoria APOS.

3.1 Teoria APOS (Ação, Processo, Objeto, Esquema) e os Conceitos de Grupo e Isomorfismo de Grupos

A teoria APOS é uma teoria cognitivista que busca compreender como se dá a construção de conceitos matemáticos por uma pessoa que está começando a entendê-los. Tem como hipótese, segundo Dubinsky e McDonald (2001, p. 2), que o conhecimento matemático consiste em uma tendência do indivíduo em lidar com percepções matemáticas em situações-problema pela construção mental *ação*, *processo* e *objeto,* organizando-os em um *esquema* para dar sentido a esta situação e resolver problemas.

Ainda de acordo com Dubinsky e McDonald (2001, p. 2), essa teoria surgiu da tentativa de entender o mecanismo da *abstração reflexionante*, introduzida por Piaget para descrever a construção do pensamento lógico em crianças, estendendo essa ideia para conceitos matemáticos mais avançados. Dubinsky (2002, p. 95) destaca duas importantes observações feitas por Piaget a respeito da abstração reflexionante: primeiro que a abstração reflexionante não tem um início preciso, mas está presente em idades iniciais na coordenação das estruturas sensório-motoras; segundo que esta abstração continua até uma matemática de nível mais elevado, na medida em que toda a história da matemática, desde a antiguidade até os dias de hoje, pode ser considerada como um exemplo do processo de abstração reflexionante. Considerando que Piaget concentrou seus trabalhos no desenvolvimento do conhecimento matemático em idades iniciais, foi a partir da sugestão de Piaget da possibilidade de estender este conceito de abstração reflexionante a tópicos mais avançados de matemática que Dubinsky iniciou a chamada teoria APOS.

Mas, o que significa abstração reflexionante? Piaget distingue três grandes tipos de abstração: a abstração empírica, a abstração pseudoempírica e a abstração reflexionante. Na abstração empírica o indivíduo abstrai propriedades em comum de um número de objetos físicos a partir da observação ou “sobre aspectos materiais da própria ação, tais como movimentos, empurrões, etc.” (PIAGET, 1995, p. 5). Dubinsky (2002, p. 97) afirma que podemos considerar tais propriedades como pertencentes ao objeto, mas só se pode ter conhecimento delas fazendo algo (olhando para o objeto sob certa luz, levantando-o) e, afirma ainda, que diferentes indivíduos em diferentes condições podem vir a ter conclusões distintas sobre esse objeto, ou seja, afirma que para abstrair qualquer propriedade de um objeto seja necessário utilizar “instrumentos de assimilação (estabelecimento de relações, significações, etc.), oriundos de ‘esquemas’ (*schèmes*) sensório-motores ou conceptuais não fornecidos por este objeto, porém, construídos anteriormente pelo sujeito” (PIAGET, 1995, p. 5).

Na abstração pseudoempírica, que é intermediária entre a empírica e a reflexionante, o mesmo ocorre, porém as propriedades “constatadas são, na realidade, introduzidas nestes objetos por atividades do sujeito” (PIAGET, 1995, p.6). E, finalmente, a abstração reflexionante que, segundo Dubinsky (2002, p. 97), advém do que Piaget chamou de *coordenações gerais* de ações (todas as formas de usar uma ou mais ações para construir uma nova ação ou objeto) e, como tal, sua fonte é o sujeito e, portanto, completamente interna. Do ponto de vista psicológico de Piaget, continua Dubinsky (2002, p. 98), as construções dos novos conceitos matemáticos procedem da abstração reflexionante, da qual derivam todas as estruturas lógico-matemáticas, suportando “toda a construção lógico-matemática” (DOMINGOS, 2006, p. 22).

Assim, podemos fazer uma diferenciação entre as abstrações destacadas por Piaget: enquanto a abstração empírica lida com as propriedades obtidas pela observação do objeto, propriedades estas inerentes a esse, e a abstração pseudoempírica, que também necessita do objeto para observação, está ligada às ações dos sujeitos sobre os próprios objetos, a abstração reflexionante independe da observação do objeto e lida com as interrelações entre as ações, as chamadas *coordenações gerais* das ações. Apesar dessas diferenças, os tipos de abstração não são independentes. Domingos (2006, p. 23) nos explica resumidamente essa interdependência mútua entre os tipos de abstração:

> a abstracção empírica e pseudo-empírica obtêm conhecimento de objectos pela realização (ou imaginação) de acções sobre eles. A abstração reflexionante interioriza e coordena estas acções para formar novas acções e por fim novos objectos (que podem não ser físicos mas sim matemáticos como uma função ou um grupo). A abstração empírica extrai dados destes novos objectos através de acções mentais sobre eles e assim por diante. (DOMINGOS, 2006, p. 23)

A abstração reflexionante é, segundo Piaget (1995, p. 6), reflexionante em dois sentidos que se complementam. No primeiro, ela transpõe a um patamar superior o que retira no patamar anterior (por exemplo, conceituar uma ação), dando maior generalidade. Essa transposição Piaget chama de *reflexionamento* (*réfléchissement).* No segundo sentido, designado por *reflexão* (*réfléchie*), entendemos como o “ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi assim transferido do inferior” (PIAGET, 1995, p. 275).

Assim, o conceito de abstração reflexionante e suas componentes são capazes de explicar a continuidade da construção dos conhecimentos matemáticos, uma vez que um objeto matemático pode ser elevado a outro patamar (reflexionamento), no qual sofrerá uma reconstrução e reorganização (reflexão) causadas pela atividade cognitiva do sujeito – por meio de coordenação de ações, esquemas – extraindo novas propriedades, criando novos objetos e gerando novas ações sobre este objeto, assegurando assim um desenvolvimento desta área do conhecimento.

É neste sentido que Piaget explicita, conforme citamos anteriormente, que a história da matemática pode ser considerada um exemplo do processo de abstração reflexionante. Um exemplo disso é a própria construção do objeto matemático grupo. Conforme abordamos no capítulo 1, quando fizemos um breve histórico da construção deste objeto, vimos que a teoria de grupo, assim como a própria definição abstrata de grupo, resultou do longo processo de evolução da teoria das equações e da teoria dos números, ou seja, houve a necessidade da construção de novos conceitos a partir daqueles já conhecidos, mas que foram elevados a outro patamar, organizados e coordenados com ações e objetos já existentes, criando novos objetos.

Dubinsky (2002, p. 100) cita alguns exemplos de Piaget da abstração reflexionante no pensamento lógico-matemático em idades iniciais, tais como o *número* – o conceito de número é construído pela coordenação entre dois esquemas: classificação (agrupar segundo algum critério) e seriação (que é em si uma coordenação entre várias ações de colocar em ordem, em série) – e a *multiplicação* – para multiplicar é necessário primeiro encapsular a ação (mental) de adição em um objeto (ou conjunto de objetos) no qual a adição pode ser aplicada.

Diante desses e de outros exemplos de Piaget, Dubinsky (2002, p. 101) selecionou quatro diferentes tipos de abstração reflexionante, como método de construção do conhecimento, relevantes para o pensamento matemático avançado.

Adicionou mais um tipo, o qual Piaget não considerava como parte da abstração reflexionante, formando um grupo com cinco formas de construção:

- interiorização – o sujeito desenvolve abstrações reflexionantes para construir processos internos como forma de dar sentido na percepção de fenômenos, fazendo uso de símbolos, linguagem, desenhos e imagens mentais;
- coordenação – distinta da chamada coordenação geral de ações referida por Piaget, esta é a composição ou coordenação de dois ou mais processos para a construção de um novo;
- encapsulação – a encapsulação é a conversão de um processo (dinâmico) em um objeto (estático);
- generalização – quando um sujeito estende a aplicação de um esquema já existente a uma vasta coleção de fenômenos;
- reversibilidade – este é o tipo de construção que foi incluída por Dubinsky na abstração reflexionante. Dubinsky (2002, p. 102) considera que, uma vez que existe o processo internamente, é possível para o sujeito pensá-lo ao contrário, não necessariamente no sentido de anulá-lo, mas como meio de construir um novo processo que consiste em inverter o processo original.

Assim, apoiando-se na noção de abstração reflexionante definida por Piaget, Dubinsky – que assume a abstração reflexionante como sendo a construção de objetos mentais e ações mentais sobre estes objetos – separou as características que considerou essenciais, refletiu sobre seu papel na matemática avançada, reorganizou ou reconstruiu de forma a ter uma teoria coerente sobre o conhecimento matemático e sua construção. A partir dos cinco tipos de construção citados, Dubinsky (2001, p. 103) reconsiderou cada um deles em contextos do pensamento matemático avançado, descrevendo como novos objetos, processos e esquemas podem ser construídos a partir dos já existentes.

Então, a essência desta perspectiva teórica, afirmam Dubinsky *et al.* (1994, p. 4), é que um indivíduo desequilibrado por uma percebida situação-problema em um contexto social particular tentará se reequilibrar assimilando a situação para esquemas existentes disponíveis, ou, se necessário, utilizar a abstração reflexionante para reconstruir aqueles esquemas a um nível superior de sofisticação.

A construção do conhecimento matemático do ponto de vista da teoria APOS passa pelas etapas *ação*, *processo*, *objeto* que se organizam em estruturas chamadas *esquemas*. Vamos descrever agora como entenderemos essas etapas neste trabalho e, simultaneamente, relacionar esta teoria da construção do conhecimento matemático com os objetos matemáticos escolhidos por nós: grupo e isomorfismo de grupos. Faremos essa relação entre a teoria APOS e os conceitos matemáticos apoiados em Dubinsky *et al.* (1994) e Brown *et al.* (1997).

A *ação* é qualquer transformação física ou mental de objetos, de forma algorítmica, que ocorre em reação a estímulos externos ao indivíduo. Entendemos essa etapa como a manipulação feita pelo sujeito sobre objetos matemáticos partindo apenas de fatos que estão na memória, sem que haja um controle consciente dessa transformação.

Um exemplo possível em uma primeira fase da compreensão de grupo é quando um estudante tenta, de forma ainda inconsciente, provar as propriedades para verificar se um conjunto com uma dada operação é um grupo, sem entendê-lo como um objeto matemático. Neste caso, um estudante pode, inicialmente, compreender grupo como um objeto matemático que lhe é familiar: um conjunto, por exemplo. Assim, as propriedades mostradas seriam propriedades do conjunto e a operação seria algo a parte. Ou, possivelmente, o contrário, o estudante compreende grupo como sendo uma operação e, consequentemente, as propriedades são relativas à operação, sendo o conjunto algo complementar.

Ao estudante que se limitar a operar com *ações*, sem outras etapas do processo de construção do conhecimento, tratando os conceitos de forma algorítmica, apenas reproduzindo os passos para verificar um grupo, por exemplo, consideraremos que está na *concepção ação*. Porém, esse estudante pode permanecer com este entendimento elementar de grupo (assimilando a situação para um esquema de conjunto já existente, ignorando a operação presente, por exemplo) e, eventualmente, prosseguir nas etapas de construção do objeto, encapsulando esse processo em um objeto que, para ele, representa o grupo em questão, conforme Dubinsky *et al.* (1994, p. 8). Ocorrendo isso, podemos afirmar que o estudante criou uma concepção equivocada de grupo.

A ação constitui “a essência da construção de uma noção matemática, pois o indivíduo ao executar a mesma ação por várias vezes e refletir sobre ela poderá interiorizá-la em um processo” (PRADO, 2010, p. 34). Um *processo* é, portanto, a *interiorização* resultante de uma ação. É uma construção interna do indivíduo, consciente da transformação realizada sobre o objeto matemático, possibilitando-o descrever ou refletir sobre todos os passos dessa transformação sem a necessidade de explicitá-los.

Podemos considerar um exemplo para essa etapa da construção do conceito de grupo, a qual chamaremos de *concepção processo*, o caso em que o estudante começa a entender grupo como um conjunto com operações. Como afirmam Dubinsky *et al.* (1994, p. 9), uma vez que o estudante percebe sua concepção equivocada de grupo como um conjunto, ele começa a incluir a operação em suas determinações de grupo. Neste caso, o estudante pode considerar o conjunto como o aspecto predominante do grupo e a operação como secundária. E mais, as operações nas quais os estudantes consideram e lidam melhor são aquelas mais comuns para eles, tais como adição e multiplicação em conjuntos numéricos.

Construído um *processo*, o indivíduo pode trabalhar com processos já existentes para construir novos processos, seja por *reversibilidade* ou *coordenação* com outros processos. O ato de transformar *processos* de uma forma consciente é, segundo Dubinsky (2002, p. 101), uma construção necessária para a compreensão da Matemática, mas que estudantes podem sentir dificuldades. Segundo Dubinsky *et al.* (1994, p. 5), quando se torna possível para um indivíduo transformar um *processo* por alguma ação, então dizemos que o *processo* foi *encapsulado*, tornando-se um *objeto*.

Da mesma forma, um indivíduo deve ser capaz de *desencapsular* um objeto para obter os *processos* dos quais se originou, a fim de pensar sobre o *processo* que o gerou ou, até mesmo, reconstruir um *objeto* que estava construído de uma forma equivocada. Por exemplo, o conceito de grupo exige dos estudantes a *coordenação* entre três esquemas já existentes: conjunto, função e axioma. Assim, um estudante que não tem bem construídos esses três esquemas pode, por exemplo, *encapsular* o objeto matemático grupo tendo claro apenas algumas operações sobre um conjunto, excluindo outras operações que poderiam ser aplicadas àquele conjunto. Sendo necessária uma *desencapsulação* do objeto grupo para retomar algumas operações que foram deixadas para trás.

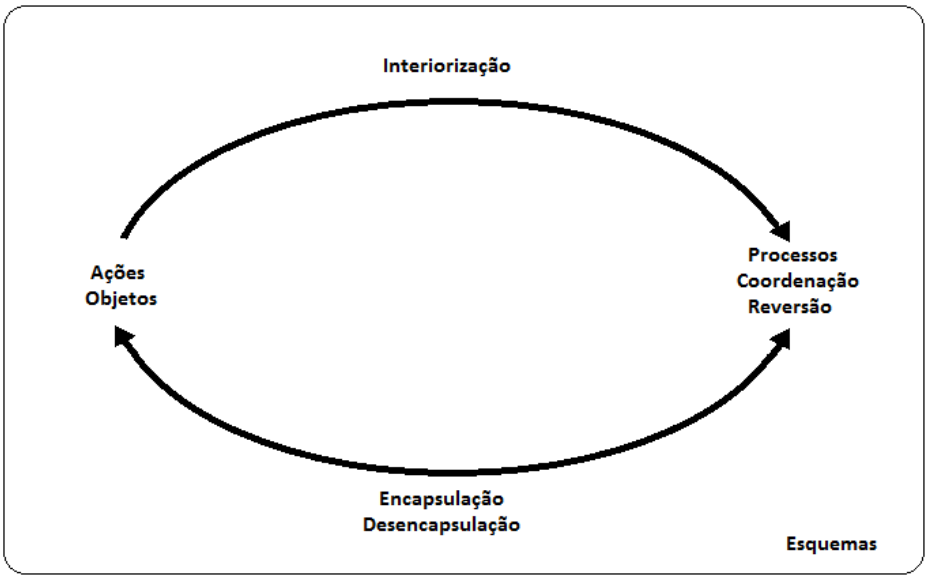
De acordo com Dubinsky *et al.* (1994, p. 13), encapsular um *processo* dinâmico em um *objeto* pode ser complexo para um estudante, podendo inclusive ocorrer tardiamente ou até mesmo não ocorrer. No caso do conceito de grupo, entendemos, nesta pesquisa, que o estudante possui uma *concepção objeto* quando o compreende como um conjunto com uma operação binária que goza das propriedades, ou seja, que compreende grupo como um objeto matemático estático, que possui características próprias, além de conhecer diversos exemplos de grupos.

A etapa final da construção de um grupo específico, consideram Dubinsky *et al*. (1994, p. 14), começa com a percepção de que outras formas aparentemente diferentes de construir um grupo acabam por não ser diferentes. Assim, pode ocorrer um desenvolvimento conceitual de isomorfismo de grupos, em que um estudante pode criar o processo de construir vários grupos específicos estabelecendo isomorfismos entre eles. Porém, nesse caso, consideramos, em concordância com Leron, Hazzan e Zazkis (1995, p. 158), necessária a *coordenação* entre, pelo menos, três outros conceitos: grupo, função e quantificadores.

Um *esquema* para determinado conceito matemático é uma reunião de *ações*, *processos* e *objetos* e outros *esquemas* que se organizam de uma forma coerente na mente de um indivíduo. De acordo com Dubinsky e McDonald (2001, p.3), esses esquemas são ligados por alguns princípios gerais para formar um quadro na mente do indivíduo, que será colocado em prática em uma situação-problema que envolva esse conceito. Este quadro deve ser coerente no sentido de que fornecerá, explícita ou implicitamente, os meios de determinar quais fenômenos estão ou não no âmbito do esquema em questão.

A figura III apresenta o processo de construção dos *esquemas*, de acordo com Dubinsky (2003):

Figura 2 – Esquemas e sua construção



Fonte: Adaptado de Dubinsky (2003)

Assim como um *processo* pode ser encapsulado e formar um *objeto*, um indivíduo pode refletir sobre um esquema e, a partir disso, formar um novo *objeto*. O que nos leva a considerar, então, "pelo menos duas formas de construir objectos: a partir dos processos e a partir dos esquemas" (DOMINGOS, 2006, p. 25).

Um exemplo é o conceito de grupo que, segundo Brown *et al.* (1997, p. 192), pode ser entendido como um esquema que contém três *esquemas*: conjunto, operação binária (função) e axiomas. Os *esquemas* de conjunto e operação binária devem ser tematizados[14] para formar *objetos* que são coordenados por meio do *esquema* de axiomas.

Conforme Brown *et al*. (1997, p. 192), o *esquema* de axiomas inclui a noção geral que uma operação binária sobre um conjunto pode ou não satisfazer uma propriedade, que é essencialmente o processo de verificação da propriedade. Inclui, também, quatro objetos específicos pela encapsulação de quatro *processos* correspondentes a quatro grupos de axiomas. Verificar um axioma consiste em coordenar a noção geral de satisfazer uma propriedade com o processo específico para o axioma (desencapsulação do objeto) e aplicar isso a um conjunto e uma operação em particular. Fazendo isso, a operação binária e o conjunto são

[14] Tematizar é "reconstruir em um nível superior aquilo que já realizamos em outro nível. Tematizar é construir um novo conhecimento [...]" (MACEDO, 1993).

desencapsulados em seus processos e os três processos (axiomas, operação binária e conjuntos) são coordenados para estabelecer que o axioma é satisfeito. Os quatro casos desta operação são coordenados para o processo total de verificação dos axiomas.

Ainda conforme Brown et al. (1997, p. 192), o esquema de grupo é tematizado para formar um objeto, no qual ações podem ser aplicadas. Exemplos dessas ações incluem determinar que um conjunto e uma operação particular formam um grupo, verificar as propriedades que um grupo pode ter e averiguar se dois grupos dados são isomorfos.

3.2 Teoria da Reificação

Movida pelas dificuldades que estudantes sentem ao lidarem com a Matemática e questionando-se sobre a possibilidade de haver algo realmente especial e única no tipo de pensamento envolvido na construção do universo matemático (SFARD, 1991, p. 2), Anna Sfard desenvolve a chamada teoria da reificação, que permite investigar como podemos conceber a maioria dos conceitos matemáticos.

Assim, ao tentar responder à questão: “como a abstração matemática difere dos outros tipos de abstração em sua natureza, na forma como se desenvolve e nas funções e aplicações?” (SFARD, 1991, p. 2), a teoria da reificação avança, conforme Domingos (2006, p. 14), de maneira a conter simultaneamente a Filosofia – ao tentar abordar a natureza das entidades matemáticas, analisando discursos de matemáticos com relação aos problemas fundamentais sobre o pensamento matemático, na transição dos séculos XIX - XX – e a Psicologia da Matemática – ao abordar a forma como essas entidades são compreendidas pelo indivíduo.

A autora defende que existem duas formas fundamentalmente diferentes de conceber os conceitos matemáticos: *estruturalmente*, em que concebemos as noções matemáticas como objetos, que podem ser manipulados sem entrar em detalhes, podendo ser combinados com outros, e *operacionalmente*, em que concebemos as noções matemáticas como processos ou como produtos de certos processos, produtos decorrentes de uma sequência de ações. Estas duas formas são, conforme Sfard (1991, p. 4), incompatíveis (como pode alguma coisa ser um *processo* e um *objeto* ao mesmo tempo?), mas complementares.

Podemos citar, por exemplo, a noção de simetria. De acordo com Sfard (1991, p. 5), a *concepção estrutural* é quando entendemos essa noção matemática como propriedade de uma figura geométrica, enquanto que a *concepção operacional* é considerá-la como uma transformação de uma figura geométrica.

Outro exemplo é a concepção operacional e estrutural do conceito de grupo apresentada por Bussmann (2009), que utilizou as noções abstratas de conceitos matemáticos de Sfard (1991) para analisar os registros escritos de estudantes ao lidarem com tarefas envolvendo o conceito de grupo. Nessa pesquisa, Bussmann (2009) apresenta como concepção estrutural a própria definição abstrata de grupo, "pois se apresenta estática e instantânea" (BUSSMANN, 2009, p. 17). Já a concepção operacional aparece no processo de desenvolvimento do conceito, em uma forma dinâmica e sequencial, que se originou da busca de "soluções para equações algébricas, de permutações e do trabalho com conjuntos numéricos" (BUSSMANN, 2009, p. 17).

A maneira de conceber uma noção matemática, operacional ou estruturalmente, depende do que "constitui o foco de atenção do indivíduo no momento, e da sua preparação e/ou capacidade para lidar com a referida noção" (MOURÃO, 2002, p. 278). Segundo Mourão (2002, p. 278), um indivíduo conceberá uma noção matemática como um objeto quando for capaz de tratá-la como coisa real e de manipulá-la como um todo, sem se preocupar com os processos que, eventualmente, lhe deram origem. Por outro lado, essa mesma noção matemática será interpretada como um processo quando for entendida como uma entidade potencial (isto é, que ainda não atingiu sua forma final, que ainda não existe como uma coisa real) que se manifesta por meio de uma sequência de ações.

Em seus estudos, Sfard encontrou evidências, tanto na perspectiva histórica como na perspectiva psicológica, de que a concepção operacional é a primeira a emergir, "permitindo depois, através da reificação dos processos, o desenvolvimento dos objetos matemáticos" (MOURÃO, 2002, p. 280). Havendo, assim, uma transição da concepção operacional para a concepção estrutural durante a formação de um conceito. Essa transição das operações para os objetos abstratos é composta por três estágios que seguem uma hierarquia. Esses processos, segundo Sfard (1991, p. 18-19), são:

- Interiorização – estágio em que o indivíduo familiariza-se com processos que, eventualmente, darão origem a um novo conceito. Como, por exemplo, o processo de contar que conduz aos números naturais. Esses processos são operações realizadas sobre objetos matemáticos de nível inferior e, gradativamente, o indivíduo vai se especializando em sua realização. Segundo Sfard (1991, p. 18), o termo interiorização empregado aqui é praticamente no mesmo sentido dado por Piaget, que citamos anteriormente;
- Condensação – é um período de compreensão de longas sequências de operações em unidades mais fáceis de tratar. É o estágio em que o indivíduo torna-se mais e mais capaz de pensar sobre um processo como um todo, sem precisar de maiores detalhes. É nesse estágio que novos conceitos começam "oficialmente" a nascer. O progresso na condensação pode se manifestar pela crescente facilidade em alternar as diferentes representações do conceito. Essa fase dura enquanto o novo conceito estiver ligado a um determinado processo;
- Reificação[15] – esse período é definido como uma "mudança ontológica" e refere-se à súbita habilidade de ver um objeto familiar por uma "luz" totalmente nova. "O indivíduo consegue subitamente ver uma nova entidade matemática como um objeto completo e autónomo com significado próprio" (DOMINGOS, 2006, p. 17).

Então, afirma Sfard (1991, p. 20), enquanto a interiorização e a condensação são estágios cujas mudanças são graduais, mudanças mais quantitativas do que qualitativas, a reificação é um salto quântico instantâneo: o processo é solidificado em um objeto, em uma estrutura estática.

Essa é, assim, a maneira como se dá a formação dos conceitos matemáticos segundo a teoria da reificação de Anna Sfard. Devemos ressaltar também que, muitas vezes, a concepção operacional é suficiente para a compreensão de um determinado conceito, porém "o desenvolvimento de uma

[15] Segundo o dicionário eletrônico Houaiss da língua portuguesa, reificar significa encarar (algo abstrato) como uma coisa material ou concreta; coisificar.

concepção estrutural vem propiciar um decréscimo de esforço cognitivo acompanhado de um aumento de eficácia da sua utilização na resolução de problemas" (DOMINGOS, 2006, p. 18).

3.3 Dificuldade

Ambas as teorias que apresentamos – teoria APOS e teoria da reificação – buscam, de uma maneira muito próxima uma da outra, entender como ocorre a construção de conceitos matemáticos na mente de um indivíduo. Para isso, consideram algumas etapas nessa construção, tais como mostramos acima. Entendemos que uma maneira de identificarmos em qual etapa da construção um estudante se encontra seria por meio das dificuldades manifestadas por esses.

Desta forma, faremos nesta pesquisa uma análise visando identificar dificuldades reveladas por estudantes, para, em seguida, identificarmos o estágio, de acordo com a teoria APOS e teoria da reificação, da compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos em que o estudante se encontra.

Neste trabalho, uma dificuldade tem, portanto, um papel de transparecer a concepção (ação, processo, objeto) do estudante acerca dos conceitos tratados. Da mesma forma, a ausência de dificuldades significa, para nós, a manifestação da compreensão dos conceitos.

De acordo com o *Michaelis: Moderno Dicionário da Língua Portuguesa*, dificuldade pode ser definida como "5. Objeção, dúvida; 6. Relutância, repugnância" (WEISZFLOG, 1998, p. 722). O *Grande Dicionário Etimológico – Prosódico da Língua Portuguesa*, define o termo dificuldade da seguinte forma: "Obstáculo, impedimento, estôrvo, embaraço; em certo sentido pode significar objeção em que o objetante mostra sua dificuldade de compreender o que lhe foi exposto" (BUENO, 1966, p. 1015). Destas definições, podemos entender uma dificuldade como algum impedimento ou hesitação ao lidar com uma dada situação proposta.

Lajoie (2000, p. 31-32) apresenta dois pontos de vista sobre o termo dificuldade, os quais encontrou na literatura. Um mais subjetivo, que trata da dificuldade que a pessoa encontra e outro trata da dificuldade intrínseca à noção ou à tarefa exposta. Como não há como determinar exatamente a causa de uma dificuldade, se é do objeto ou uma hesitação do sujeito, Lajoie (2000) não distingue uma e outra, assumindo em sua pesquisa ambos os pontos de vista.

Campos (2009) assume o mesmo ponto de vista e, baseando-se em Lajoie (2000, p. 65), entende que uma dificuldade pode ser manifestada “pela incapacidade de tratar de forma eficaz ou de dar sentido a certos problemas, ou seja, pode ser observada pelas respostas incorretas dadas pelos estudantes”.

Assim, na presente pesquisa, entenderemos o termo *dificuldade* da mesma forma que Lajoie (2000) e Campos (2009), considerando que uma dificuldade pode estar ligada ao sujeito levando em conta aspectos subjetivos, mas também relacionada à noção matemática. E que a manifestação dessa dificuldade pode ocorrer por meio da hesitação, do embaraço ao lidar com os questionamentos que fizemos e, ainda, da ausência de respostas ou do erro ao responder os questionamentos.

CAPÍTULO 4
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Na busca de identificar e interpretar as dificuldades apresentadas por estudantes quanto aos conceitos de grupo e/ou de isomorfismo de grupos, optamos por realizar uma pesquisa de natureza qualitativa, seguindo as características traçadas por Bogdan e Biklen (1994, p. 47-51):

i) Na investigação qualitativa a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. Coletamos os dados por meio de entrevistas semiestruturadas com estudantes, utilizando equipamento de áudio para a gravação, seguido de suas transcrições. As entrevistas foram realizadas em locais escolhidos pelos sujeitos na universidade em que estudam;
ii) A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras, não de números, e estão presentes na investigação por meio de trechos das entrevistas a fim de "ilustrar e substanciar a apresentação" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 48);
iii) Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. O interesse principal da pesquisa está no processo de identificar e de interpretar, segundo o referencial teórico escolhido, dificuldades apresentadas por estudantes. Não está, simplesmente, em mostrar em números as dificuldades;
iv) Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. As dificuldades listadas nesta pesquisa emergiram das análises dos dados, isto é, não estavam definidas previamente. Assim, tanto as dificuldades como as concepções (ação, processo, objeto) de cada estudante só se constituíram com a análise dos dados;
v) O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Esta característica da pesquisa qualitativa está evidente nessa pesquisa, uma vez que pretendemos verificar a concepção (ação,

> processo, objeto) dos participantes, questionando-os acerca dos conceitos matemáticos em questão.

Neste capítulo, detalhamos as escolhas metodológicas que fizemos para atingir o objetivo. Para tanto, o separamos em três tópicos: 1) sujeitos da pesquisa; 2) instrumento de coleta de dados e sua elaboração; 3) procedimentos para a análise.

4.1 OS SUJEITOS DA PESQUISA

Os participantes desta pesquisa são estudantes dos cursos de licenciatura e/ou bacharelado em Matemática que cursaram ou estavam cursando a disciplina de Álgebra[16]. Para aqueles que cursavam a disciplina na época da realização da coleta dos dados, tivemos o cuidado de fazê-la somente após o contato deles com os conceitos de grupo e isomorfismo de grupos. Porém, nem todos os estudantes entrevistados tiveram esse contato com isomorfismo de grupos, mesmo após o término da disciplina, pois na ocasião o professor não chegou a tratar desse assunto durante as aulas. Nesses casos, a entrevista contemplou apenas a parte referente a grupo.

Para selecionar os estudantes participantes da pesquisa, fomos às aulas das disciplinas de Tópicos em Educação Matemática II e de Álgebra, destinadas ao terceiro ano da licenciatura e ao segundo ano do bacharelado, respectivamente. Fizemos o convite para toda a sala, sendo selecionados apenas aqueles que se dispuseram a participar, ou seja, esses participantes são voluntários. Da turma de Tópicos em Educação Matemática II (licenciatura) tivemos sete voluntários, enquanto que na disciplina de Álgebra (bacharelado) tivemos apenas um voluntário. No convite, que contou com a presença da orientadora deste trabalho, explicitamos o objetivo da entrevista, seu compromisso ético em manter o anonimato dos participantes, tempo aproximado da entrevista, além de dizer que se tratava de um conteúdo algébrico, não explicitando exatamente qual seria. Nesse mesmo momento do convite, conversamos individualmente com cada voluntário

[16] Até o ano de 2009, a disciplina se chamava Álgebra, para o bacharelado em Matemática, e Álgebra A, para a licenciatura em Matemática. A partir de 2010, a disciplina passou a se chamar Estruturas Algébricas, para ambas as modalidades. Adotaremos, nesta pesquisa, o termo Álgebra para nos referir à disciplina.

para marcarmos o dia, horário e local de preferência do estudante para realizarmos a entrevista.

Acreditávamos que oito entrevistados seriam suficientes para atingirmos nosso objetivo. Gostaríamos de uma amostra maior de estudantes do bacharelado, pois consideramos pouco apenas um estudante. Após as entrevistas, descobrimos que esse único estudante do bacharelado também cursava licenciatura e que outro estudante de licenciatura também cursava bacharelado. Fizemos um questionamento quanto a isso: teriam estudantes de bacharelado alguma resistência em participar de pesquisas voltadas à Educação Matemática, uma vez que todos os participantes, por mais que alguns façam o bacharelado concomitantemente, são estudantes de licenciatura e sabem das preocupações dessa área? Apesar desse questionamento, não entraremos no mérito dessa interrogação, mas notamos que os estudantes que cursavam apenas o bacharelado não quiseram participar.

As entrevistas, como dissemos, foram agendadas para o dia, hora e local preferidos por cada participante, mas isso não impediu que alguns deles não comparecessem. Entramos em contato com esses ausentes e marcamos novos encontros. Após dois ou três encontros nos quais dois estudantes não apareceram, pensamos que deveríamos encontrar dois novos participantes para substituírem aqueles desistentes. Convidamos dois novos estudantes participantes de um projeto de pesquisa da orientadora deste trabalho, que se prontificaram a participar. Considerando, claro, que estes novos participantes já haviam estudado grupos. Prosseguimos da mesma forma que havíamos feito, combinamos dia, horário e local escolhidos pelos estudantes. Desta vez, com sucesso.

Assim, os sujeitos que participaram da pesquisa, os quais chamamos de E1, E2, E3, ... , E8, são:

E1: estudante de licenciatura e bacharelado em Matemática, cursava a disciplina de Álgebra na época da entrevista;

E2: estudante de licenciatura em Matemática, concluiu o curso de Álgebra no ano anterior à entrevista;

E3: estudante de licenciatura em Matemática, concluiu o curso de Álgebra no ano anterior à entrevista;

E4: estudante de licenciatura em Matemática, cursava a disciplina de Álgebra na época da entrevista. Não chegou a estudar isomorfismo de grupos;

E5: estudante de licenciatura e bacharelado em Matemática, concluiu o curso de Álgebra no ano anterior à realização da entrevista. Na época da entrevista, cursava a disciplina de Corpos e Extensões[17], do bacharelado;

E6: estudante de licenciatura em Matemática, concluiu o curso de Álgebra dois anos antes de realizarmos a entrevista;

E7: estudante de licenciatura em Matemática, concluiu curso de Álgebra no ano anterior à entrevista;

E8: estudante de licenciatura em Matemática, cursava a disciplina de Álgebra no ano em que realizamos a entrevista, mas não a concluiu. Desistiu pouco tempo antes de realizarmos a entrevista. Chegou a estudar grupos, mas não teve contato com isomorfismo de grupos.

Percebemos que dos participantes da pesquisa, tivemos alguns que estavam cursando Álgebra, outros que já haviam cursado há um ano e um que havia cursado há dois anos. Essa questão do tempo, isto é, dos anos que se passaram do estudo de grupos e/ou isomorfismo de grupos por alguns estudantes até a realização da entrevista, nos levou a um questionamento: até que ponto esses alunos deveriam saber responder às perguntas sobre grupo e isomorfismo de grupos que fizemos em na entrevista?

Pensando nisso, buscamos o projeto político-pedagógico do curso de Matemática da universidade onde a pesquisa foi realizada. Esse documento, como já ressaltamos no capítulo 1, mostra algumas contribuições da disciplina Álgebra na formação do estudante (da licenciatura e do bacharelado). Entre essas contribuições está “compreender, abstrair e representar, com formalismo, aspectos estruturais da matemática” e “percepção das várias estruturas matemáticas” (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, 2009a, p. 14).

Entendemos, então, que após cursar a disciplina de Álgebra, o estudante deve ter uma percepção da estrutura de grupo, compreendendo grupo (anéis, corpos etc.) como um objeto matemático, lidando com conjuntos que não somente os conjuntos numéricos e com operações genéricas, realizando demonstrações matemáticas, sempre com formalismo. São dificuldades nessas

[17] Ementa da disciplina Corpos e Extensões: “Revisão da teoria de grupos e anéis. Anéis de polinômios. Extensões de Corpos. Extensões finitas, algébricas, separáveis, normais e de Galois. O Teorema Fundamental da Teoria de Galois. Construção com régua e compasso” (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, 2009b, p. 17).

compreensões que envolvem o estudo de grupo e que contribuem para a formação do estudante que estamos interessados.

Pensando nisso, como veremos a seguir, elaboramos um roteiro para as entrevistas que nos permitisse perceber como esses estudantes entendem os conceitos de grupo e isomorfismo de grupo, e os conhecimentos prévios necessários, mas sem aprofundar excessivamente, nem abranger subgrupos, grupos cíclicos, teorema do homomorfismo etc. Selecionamos, então, questões mais elementares sobre os conceitos, mas que nos possibilitassem enxergar as principais dificuldades que envolvem os conceitos de grupo e de isomorfismo de grupos, e que explicitassem como os estudantes compreendem e se abstraem, com formalismo, alguns aspectos estruturais da Matemática. Por isso, as questões que compõem o roteiro contemplam, também, conjuntos diferentes dos numéricos, operações genéricas, uma demonstração matemática, formas de representação – como as tábuas de operações –, definições.

4.2 Instrumento de Coleta de Dados e sua Elaboração

Para a coleta dos dados, como já comentamos, escolhemos como instrumento a entrevista semiestruturada. Fizemos essa escolha por acreditarmos que a entrevista nos possibilitaria identificar as concepções (ação, processo, objeto) dos estudantes quanto aos objetos matemáticos que desejávamos, pois, como afirmam Bogdan e Biklen (1994, p. 34),

> [...] a entrevista é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem própria do sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos do mundo.

No caso desta pesquisa, as falas dos sujeitos nos permitiram desenvolver intuitivamente uma ideia de como estes entendem e quais suas concepções (ação, processo, objeto) quanto aos conceitos de grupo e isomorfismo de grupos.

Lüdke e André (2001, p. 34) fazem uma diferenciação entre tipos de entrevistas, classificando-os em dois extremos: de um lado a entrevista estruturada ou padronizada, na qual as perguntas são pré-definidas e serão repetidas aos entrevistados seguindo a mesma ordem. Nesse caso, o entrevistador tem o controle do conteúdo discutido. De outro lado a entrevista não estruturada ou não padronizada, em que o entrevistado fala a respeito de um determinado assunto, sendo ele o condutor da entrevista, o que permite a liberdade no percurso. No meio destes dois extremos, as autoras colocam a entrevista semiestruturada, que parte de questões pré-determinadas, mas não segue, necessariamente, a mesma ordem para todos os entrevistados, sendo, portando, maleável, o que permite ao entrevistador modificar a ordem das questões e, caso veja necessidade, inserir novas questões.

Visando a maleabilidade que a entrevista semiestruturada nos permite, preferimos por essa, pois poderíamos trocar a ordem ou inserir questões de acordo com as respostas dadas pelos estudantes, ou seja, conforme identificávamos possíveis erros, equívocos, hesitações, que poderiam nos indicar alguma dificuldade com relação a determinado conceito, faríamos novas perguntas ou pediríamos uma explicação mais detalhada. Desta forma, elaboramos um roteiro com o propósito de ter questões norteadoras, baseadas nos referenciais teóricos que adotamos, que servissem de indagações iniciais, desencadeadoras de novos questionamentos, "frutos de novas hipóteses que vão surgindo à medida que se recebem as respostas do informante" (TRIVIÑOS, 1987, p. 146). Com isso, além de o entrevistado expor suas opiniões acerca dos conteúdos que pretendemos, ele passa a participar na elaboração do conteúdo da entrevista.

Essa flexibilidade da entrevista semiestruturada nos permitiu, também, que durante as entrevistas discutíssemos, quando necessário, definições, propriedades, simbologia, a fim de estimular os estudantes a expor a forma como compreendem a estrutura algébrica e os outros conceitos envolvidos. Dessa forma, as entrevistas não se limitavam a perceber se o estudante se lembrava ou não das definições, mas sim como pensam os conceitos de grupo, isomorfismo de grupos e os demais conceitos que envolvem esses estudos, como conjuntos, funções, operações.

Como a entrevista tratava de conteúdos matemáticos, sentimos a necessidade de, além das falas, deixar o estudante à vontade para fazer alguns registros escritos. Assim, ao apresentar cada questão presente no roteiro, fornecíamos ao entrevistado uma folha em branco contendo seu enunciado. Pretendíamos com isso dar a opção ao estudante de responder somente pela fala ou, se achasse conveniente, escrever. Desta forma, nas análises das respostas, estão presentes tanto trechos das transcrições das entrevistas como também protocolos das respostas, isto é, registros escritos. Contudo, grande parte das análises foi feita sobre as falas e não sobre os registros escritos, pois mesmo quando o estudante escrevia, perguntávamos o porquê de estar procedendo daquela forma, levando-o a falar sobre o que fazia.

Elaboramos, então, um roteiro contendo 13 perguntas, sendo algumas com subitens. Todas as questões, com exceção da segunda e do item (ii) da quinta, foram retiradas de questionários elaborados em outras pesquisas que focavam, também, a aprendizagem de conceitos da Álgebra Abstrata. Tais pesquisas são: Hazzan (1999), Leron, Hazzan e Zazkis (1995) e Lajoie (2000). Estas tratam não só dos conceitos de grupo e de isomorfismo de grupos, mas também de outros conceitos da Teoria de Grupos. Selecionamos algumas questões voltadas para os conceitos dessa pesquisa e, assim, elaboramos nosso roteiro para as entrevistas.

A seguir, apresentaremos o roteiro e as justificativas de cada uma das questões.

O roteiro da entrevista

Não conhecíamos os estudantes participantes antes das entrevistas, ou seja, éramos estranhos para eles e eles para nós. Conforme afirmam Bogdan e Biklen (1994, p.135) em estudos que confiam predominantemente na entrevista, como foi o caso desta pesquisa, o sujeito é, geralmente, considerado como um estranho. Desta forma, e ainda de acordo com Bogdan e Biklen (1994, p.135), precisávamos quebrar o gelo e tentar deixar os participantes um pouco mais à vontade. Foi com esse intuito que selecionamos as primeiras questões do roteiro. Esses mesmos autores sugerem que a entrevista comece com uma conversa banal, com tópicos diversos, como futebol, por exemplo. Porém, utilizamos o início da conversa, o momento de estreitar as relações, para fazermos perguntas pessoais, mas voltadas para a Álgebra Abstrata e o entendimento que os estudantes têm dela e do curso.

Antes de iniciarmos com as perguntas, fizemos uma abertura em cada entrevista que seguia os seguintes procedimentos:

- Entregar o termo de consentimento, para que o estudante esteja ciente do compromisso ético da pesquisa e concordando com a mesma ao assiná-lo.
- Falar sobre a entrevista, quais meus objetivos.
- Tem alguma dúvida antes de iniciarmos a entrevista?

i) Questões pessoais

1) O que você gostou durante o curso de Álgebra? Gostou mais ou menos do que outros cursos, por quê? O que você gostou ou não, em particular, no âmbito das estruturas algébricas? Explique.
2) O que você entende por estruturas algébricas?
3) Durante o curso de Álgebra, você se lembra de ter feito (visto) algo particularmente difícil? O quê? E o contrário, você se lembra de ter feito (visto) algo mais fácil? O quê?
4) Como você compararia (de modo geral) a disciplina de Álgebra às outras disciplinas do curso de Matemática que você fez até o momento?

As questões um, três e quatro foram retiradas de Lajoie (2000). As justificativas para inclusão de cada uma destas questões no roteiro são baseadas nas justificativas apresentadas em Lajoie (2000). Uma vez que o objetivo da pesquisa de Lajoie (2000) é semelhante ao desta pesquisa, conforme apresentamos no capítulo 3, a inserção de algumas de suas questões no roteiro é justificada, pois conseguem satisfazer as pretensões deste trabalho, ou seja, são capazes de nos ajudar a atingir o objetivo pretendido.

De uma maneira geral, essas três questões tiveram como propósito entender o ponto de vista do estudante. De forma específica, com a questão um pretendemos saber se existem estudantes que gostam ou não do curso de Álgebra e por quê. O que mais gostaram? As pessoas que dizem ter gostado encontraram menos dificuldades que os outros?

Já com a questão três, quisemos registrar quais são os conceitos com os quais os estudantes acreditam ter tido mais ou menos dificuldade durante o curso de Álgebra. Esta impressão foi confirmada durante a entrevista?

Quanto à questão 4, tivemos a intenção de fazer uma comparação entre a disciplina de Álgebra com outras disciplinas do curso de Matemática, do ponto de vista dos estudantes. Como dissemos anteriormente, segundo Dubinsky et al. (1994), a Álgebra é, muitas vezes, uma das primeiras disciplinas enfrentadas pelos estudantes que não é dominada pela memorização de fórmulas e pela imitação de soluções de um conjunto de problemas. Por isso, pretendemos que os estudantes fizessem uma comparação entre essa disciplina e outras que já haviam cursado, para verificar se consideram, realmente, alguma diferença.

A questão dois foi uma sugestão do grupo de estudos do qual fazemos parte. Ela não se encaixa no contexto de questões pessoais, já que não se trata de uma resposta pessoal, mas sim uma definição. Porém, sua presença se fez necessária naquele momento, pois mencionamos, logo de início, o termo estruturas algébricas. Como temos como objeto de estudo uma estrutura algébrica, acreditamos que fosse necessário verificar como esses estudantes concebem essa noção.

ii) Questões relativas a grupo

Nessa categoria, fizemos três perguntas. Procuramos verificar se o estudante sabe a definição de grupo, se sabe mostrar quando um conjunto associado a uma dada operação é um grupo, se conhece conjuntos como $\mathcal{M}_{2\times2}$, $\mathbb{Z}_4$ e se sabe operar com seus elementos, se sabe identificar um grupo pela tábua de operações e se conhece algumas maneiras para fazer isso, se conhece a propriedade do elemento neutro e se sabe demonstrar sua unicidade.

São elas:

5) (i) O que é grupo?

(ii) $(\mathbb{Z}_4, +)$ e $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$ são grupos?

6) O conjunto $A = \{a, b, c\}$ forma um grupo em relação à tábua de operação a seguir? Explique.

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

7) a) O elemento neutro de um grupo é único?

b) O que significa o elemento neutro de um grupo ser único?

c) Prove que o elemento neutro de um grupo é único.

As três questões foram retiradas de Hazzan (1999), com exceção do item (ii) da questão 5. O item (i) da questão 5 buscou verificar como o estudante compreende o conceito de grupo. Com ela esperamos verificar se o estudante sabe a definição de grupo e se o entende como um objeto matemático. O item (ii) visou averiguar se o estudante é capaz de identificar um grupo, provar suas propriedades, se conhece e se sabe operar com conjuntos diferentes dos convencionais conjuntos numéricos. Esse item, como dissemos, não foi retirado de outras pesquisas. Achamos pertinente colocá-lo por se tratar de dois grupos classificados como importantes por Domingues e Iezzi (2003): grupo aditivo de classes de restos e o grupo das matrizes quadradas inversíveis de ordem n com a multiplicação (grupo linear real de grau n).

A questão seis teve como propósito principal verificar se o estudante sabe identificar um grupo por meio da tábua de operação que lhe foi dada. Para isso, o estudante teria, primeiramente, que saber como a tábua é construída, saber que a operação $*$ sobre A é uma aplicação $* : A \times A \rightarrow A$ que associa a cada par (a_i, a_j) o elemento $a_i * a_j = a_{ij}$. Além disso, o estudante teria que saber checar as propriedades, identificando o elemento neutro e os elementos simetrizáveis, seja fazendo os cálculos para cada elemento, seja por outros modos que lhe mostram com mais rapidez.

Já a propriedade associativa é, assim como afirmam Domingues e Iezzi (2003, p. 128), “aquela cuja verificação exige maior trabalho”. Segundo estes autores, podemos fazer de duas maneiras: calculando todos os compostos do tipo $(a_i * a_j) * a_k$, com $i, j, k \in \{1,2,\dots,n\}$ e os compostos do tipo $a_i * (a_j * a_k)$, com $i, j, k \in \{1,2,\dots,n\}$; ou de uma forma que consideramos mais complexa, que é encontrar um conjunto F que tem uma operação Δ que sabemos ser associativa, de tal forma que $f : A \to F$ com as seguintes propriedades:

a) f é bijetora;

b) $f(x * y) = f(x)\Delta f(y)$ para todos $x, y \in A$

c) Se isso ocorrer, continuam Domingues e Iezzi (2003, p. 128), a lei $*$ também é associativa, pois para quaisquer $x, y, z \in A$, temos:

$$f\big((x * y) * z\big) = f(x * y)\Delta f(z) = \big(f(x)\Delta f(y)\big)\Delta f(z) = f(x)\Delta\big(f(y)\Delta f(z)\big) =$$
$$f(x)\Delta f(y * z) = f(x * (y * z))$$

e, como f é bijetora, temos: $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Porém, entendemos que esta segunda maneira de verificar a propriedade associativa exige que os estudantes tenham bem construído o conceito de grupo e que compreendam a noção de isomorfismo de grupos.

A questão sete teve como desígnio verificar se os estudantes compreendem, de fato, a propriedade da existência do elemento neutro. Os questionamentos que nos fizemos foram: será que os estudantes compreendem que o elemento neutro de um grupo é único? Eles entendem o que isto significa? Os estudantes são capazes de provar que o elemento neutro é único? Assim, pretendemos ir além de verificar a capacidade de encontrar o elemento neutro de um grupo, buscando que os estudantes expusessem suas noções sobre esta propriedade, inclusive a demonstração de sua unicidade.

iii) Questões relativas a isomorfismo de grupos

As perguntas que envolvem isomorfismo de grupos foram retiradas de Leron, Hazzan e Zazkis (1995) e Lajoie (2000). A primeira, questão oito, foi retirada de Leron, Hazzan e Zazkis (1995) e diz:

8) (i) Suponha que lhe sejam dados dois grupos. Como você pode dizer se eles são isomorfos? Como você pode convencer alguém que eles são, de fato, isomorfos? Como você pode provar isso? Como verificar se dois grupos não são isomorfos?

(ii) O que é um isomorfismo de grupos? Justifique sua resposta.

A ordem dos itens teve um propósito, porém o andamento da entrevista determinou a forma como procedemos. Com o item (i), quisemos verificar se o estudante sabe dizer se dois grupos são isomorfos ou não e como pode concluir isto. Esperamos que o estudante demonstrasse não somente a noção “ingênua” de grupos isomorfos, mas também que se lembrasse do isomorfismo entre os grupos, isto é, de uma aplicação bijetora que seja homomorfismo.

Como a pergunta não tratou de grupos específicos, pretendemos verificar a noção que o indivíduo tem de isomorfismo de grupo de forma genérica. Esperamos que o estudante se remetesse a algumas verificações que deveriam ser feitas, como, por exemplo, a ordem dos grupos, se os grupos são abelianos, que falasse sobre os elementos neutros de cada grupo. Caso a resposta do estudante não fosse completa, fazíamos a pergunta (ii).

As questões restantes, nove, 10, 11, 12 e 13, foram retiradas de Lajoie (2000). São elas:

O conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ munido da operação $*$, é um grupo.

$*$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	c	a	f	d	e
c	c	a	b	e	f	d
d	d	e	f	a	b	c
e	e	f	d	c	a	b
f	f	d	e	b	c	a

O conjunto $B = \{p, q, r, s, t, u\}$, munido da operação $\circ$, é também um grupo.

$\circ$	p	q	fr	s	t	u
p	q	p	u	t	s	r
q	p	q	r	s	t	u
r	s	r	t	u	q	p
s	r	s	p	q	u	t
t	u	t	q	p	r	s
u	t	u	s	r	p	q

Os dois grupos são isomorfos? Como você sabe que eles são isomorfos? Existe outra maneira de assegurar? Justifique.

Aqui estão algumas dicas que seus colegas poderiam dar a um estudante para ajudá-los a assegurar que dois grupos dados são ou não isomorfos. Gostaria que você comentasse cada uma delas. Diga se você concorda, não concorda ou se concorda parcialmente explicando o motivo.

Se um dos grupos é multiplicativo enquanto o outro é aditivo, eles não são isomorfos.

Se os dois grupos são finitos e têm a mesma ordem, então eles são isomorfos.

Se os dois grupos não têm a mesma ordem, então eles não são isomorfos.

- Aqui está um pequeno trecho de uma prova que eu gostaria que você comentasse.
- "Os grupos $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{Q}, +)$ nem sempre são isomorfos. É preciso dizer que depende da aplicação dada"

- Em sua opinião, por que se deve estudar o conceito de isomorfismo de grupo?
- Gostaria de fazer algum comentário ou pergunta antes de encerrarmos a entrevista?

Com a questão nove, pretendemos que o estudante identificasse qual o elemento neutro de cada grupo e qual a ordem dos grupos, que verificasse se os mesmos são abelianos ou não. Enfim, esperamos que os estudantes discutissem as propriedades da tábua de operações com a finalidade de verificarmos se sabem identificar quando dois grupos dados são isomorfos.

As tábuas de operação conferiam aos conjuntos A e B dois grupos de ordem seis e, como sabemos, existem apenas duas tábuas para esses grupos: uma para os grupos abelianos de ordem seis e outra para grupos não abelianos de ordem seis. Como no enunciado da questão já afirmava que $(A, *)$ e $(B, \circ)$ eram grupos, bastava o estudante verificar se eram comutativos ou não para constatar se eram grupos isomorfos.

Quanto à questão 10, desejamos, assim como nas questões oito e nove, identificar a noção do estudante com relação ao conceito de isomorfismo de grupos. Essa questão teve o propósito de verificar se o estudante acredita que para dois grupos serem isomorfos, ambos devem ter a mesma operação, ou seja, dois grupos munidos de operações diferentes nunca serão isomorfos. E ainda, para o estudante, dizer que dois grupos têm a mesma ordem é suficiente para garantir que eles são isomorfos? Assim sendo, com as alternativas b) e c), pretendemos averiguar se o mesmo sabe o que é a ordem de um grupo e qual o papel dela para determinar se dois grupos são isomorfos.

Nas questões oito, nove e 10 tratamos de isomorfismo de uma maneira genérica, sem casos específicos. No caso da questão 11 foi diferente, pois trazia dois exemplos específicos de grupos: $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{Q}, +)$.

Segundo Lajoie (2000, p. 90), muitos estudantes respondem à pergunta 11 dizendo: “Não sabemos a função, logo não podemos dizer se os grupos são isomorfos ou não”. Para a autora, essa concepção de que “depende da aplicação dada” é possível de ser explicada levando em conta que o estudante pode considerar que grupos isomorfos não é uma propriedade intrínseca das duas estruturas algébricas, mas sim uma propriedade de duas estruturas ligadas por uma aplicação dada. Então, dois grupos serão isomorfos dependendo da aplicação que for dada.

Devemos notar, também, que "se $f: G \to J$ é um isomorfismo de grupos, então pode-se dizer que os grupos G e J são isomorfos" (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 168), isto é, se *existe* uma função bijetora entre os grupos G e J tal que *para todo* a, b em G temos $f(ab) = f(a)f(b)$, então G e J são isomorfos. Estamos evidenciando aqui a questão dos quantificadores *existe* e *para todo*, referidos anteriormente por Leron, Hazzan e Zazkis (1995). Talvez, a má compreensão dos quantificadores seja, de acordo com Lajoie (2000), uma das causas da dificuldade com a definição formal de grupos isomorfos. Sendo, então, essa a justificativa para a questão 11, ou seja, verificar se o estudante sabe que basta existir uma aplicação que seja um isomorfismo entre dois grupos para que esses sejam isomorfos.

Com a questão 12, desejamos saber se o estudante, após o estudo de isomorfismo de grupos, tem ideia da utilidade que pode ter tal conceito dentro da Matemática, se vê sentido em estudar isomorfismo de grupos.

A última questão era para deixar o entrevistado à vontade para fazer qualquer comentário que não pôde fazer durante as outras perguntas, observações sobre os conteúdos ou sobre a própria entrevista.

4.3 Procedimentos para a Análise de Dados

A análise dos dados foi realizada em duas etapas. A primeira teve o propósito de identificar as dificuldades apresentadas pelos estudantes, listando-as; enquanto que a segunda teve o objetivo de interpretar estas dificuldades, mostrando-nos, por meio da teoria APOS, as concepções (ação, processo, objeto) que os estudantes têm dos conceitos de grupo e de isomorfismo de grupo. Descreveremos agora como fizemos cada etapa.

i) Identificando e listando as dificuldades

A primeira etapa constou em analisar as comunicações – orais e escritas, com predominância para a comunicação oral – dos estudantes, à procura de indicadores que nos permitissem realizar inferências com relação às mensagens fornecidas por eles.

Então, o primeiro passo que realizamos após a coleta dos dados foi a transcrição das entrevistas. Em seguida, com todas as transcrições e protocolos em mãos, fizemos as análises à luz da Análise de Conteúdo, segundo Bardin (1977). Iniciamos com o que Bardin (1977, p. 96) chama de “leitura flutuante”, que é a primeira atividade com os dados, com a finalidade de estabelecer contato com esses, “deixando-se invadir por impressões e orientações” (BARDIN, 1977, p. 96). Como tínhamos nosso objetivo pré-determinado, as leituras seguintes focavam os possíveis erros, equívocos ou falas confusas dos estudantes e, a partir disso, selecionamos um conjunto de documentos que foram submetidos aos procedimentos analíticos.

Por exemplo, o trecho a seguir revela um equívoco de um estudante que nos chamou a atenção e, por isso, passou a fazer parte dos documentos a serem analisados:

Henrique: Para qualquer matriz existe a inversa?

Estudante: [...] nesse caso vai existir porque a matriz é 2x2, mas em outra não.

Sabemos que o fato de ser uma matriz 2x2 não significa que ela será, necessariamente, inversível. Deste modo, apoiados em nossos conhecimentos prévios acerca dos conteúdos matemáticos em questão e na literatura, como, por exemplo, Domingues e Iezzi (2003), fizemos a seleção dos trechos das entrevistas e dos protocolos a serem analisados e, posteriormente, listados como dificuldades dos estudantes.

Selecionados os documentos, realizamos então as análises, identificamos as dificuldades que emergiram dos dados, agrupamos aquelas em comum e nomeamos cada um dos diferentes tipos. Elaboramos quatro grupos de dificuldades de uma forma mais ampla e, dentro destes grandes grupos, subgrupos contendo dificuldades mais específicas.

Elaborada a lista das dificuldades encontradas, montamos um quadro com as dificuldades e, para cada uma delas, indicamos os estudantes (E1, E2, ..., E8) que as apresentaram, dando uma visão geral e quantitativa dos dados. No capítulo seguinte expomos mais detalhadamente esta etapa do trabalho.

ii) Interpretando as dificuldades listadas

A segunda etapa da análise foi a interpretação dessas dificuldades que encontramos nas conversas com os estudantes. Para tanto, utilizamos a teoria APOS que, como já dissemos, busca compreender como se dá a construção de conceitos matemáticos por uma pessoa que está começando a entendê-los, permitindo-nos identificar qual concepção (ação, processo, objeto) o estudante possui do conceito matemático.

Assim, apoiados na teoria APOS e partindo das dificuldades identificadas e listadas e, também, dos acertos e respostas satisfatórias apresentadas, inferimos qual a concepção (ação, processo, objeto) os estudantes têm dos objetos matemáticos grupo e isomorfismo de grupos.

Ainda nessa etapa, realizamos também um breve perfil de cada estudante, abordando algumas características pessoais que foram explicitadas durante as entrevistas e, muitas vezes, relacionando-as com as dificuldades encontradas e as concepções (ação, processo, objeto) identificadas.

Veremos na sequência – próximo capítulo – como se deram as análises.

CAPÍTULO 5
ANÁLISES DAS ENTREVISTAS

Neste capítulo, mostramos as dificuldades apresentadas pelos estudantes durante as entrevistas e, fundamentados pelas teorias APOS de Dubinsky e da reificação de Anna Sfard, interpretá-las, evidenciando a concepção (ação, processo, objeto) de cada estudante com relação aos objetos matemáticos em questão. Recordemos que uma dificuldade, tal como consideramos nesta pesquisa, é manifestada pela hesitação, resposta incorreta ou ausência de resposta dos estudantes aos questionamentos que fizemos.

Dividimos este capítulo em duas seções: uma contendo as dificuldades identificadas nas entrevistas e protocolos, além dos trechos das falas dos estudantes que caracterizam tais dificuldades; e outra destacando a concepção (ação, processo, objeto) de cada estudante quanto aos conceitos de grupo e/ou de isomorfismo de grupo segundo o referencial teórico adotado.

Mesmo com esta divisão, destacamos, já na primeira seção, alguns indícios da forma como o estudante compreende o conceito, utilizando, para isso, as teorias citadas. Pretendemos com isso facilitar a compreensão das interpretações quanto às concepções (ação, processo, objeto) de cada estudante feitas na seção seguinte (5.2).

5.1 Dificuldades Apresentadas pelos Estudantes

Mostramos, a princípio, a lista das dificuldades que fizemos a partir das análises das transcrições das entrevistas e de seus protocolos. Em seguida, acrescentamos a esta lista trechos que nos evidenciaram tais dificuldades. Fizemos esta apresentação em dois momentos – um somente com a lista e outro com as falas dos estudantes que explicitam a dificuldade enunciada – para facilitar a visualização das dificuldades no geral.

Veremos que as dificuldades apresentadas pelos estudantes não se concentram somente nos objetos matemáticos grupo e isomorfismo de grupos, mas também em conceitos anteriores necessários aos estudantes para o processo de construção mental dos conceitos em questão.

As dificuldades percebidas foram:

Quadro 2 – Dificuldades identificadas

1. Dificuldades relacionadas a Conjuntos

1.1 Dificuldade em conhecer uma diversidade de exemplos de conjuntos, além dos convencionais conjuntos numéricos;

1.2 Dificuldade em lidar com conjuntos diversos, como, por exemplo, o conjunto das matrizes (propriedades, operações);

1.3 Dificuldade em reconhecer os símbolos que representam determinado conjunto;

1.4 Dificuldade com o conceito de cardinalidade e ordem de um conjunto.

2. Dificuldades relacionadas a Função

2.1 Dificuldade com a definição de função;

2.2 Dificuldade com a definição de classe de equivalência;

2.3 Dificuldade relacionada às operações em conjuntos. Conhecer e saber trabalhar com diferentes tipos de operações, não apenas adição e multiplicação em conjuntos numéricos;

2.4 Dificuldades com as propriedades das operações (associatividade, existência do elemento neutro e todo elemento admite simétrico):

2.4.1 dificuldade em explicar as propriedades de operações;

2.4.2 dificuldade em provar as propriedades de operações;

2.4.3 não verificar a existência do elemento neutro à direita e à esquerda;

2.4.4 confusão entre as propriedades (elemento neutro com inverso, associativa com comutativa);

2.4.5 dificuldade em provar a unicidade do elemento neutro;

2.4.6 dificuldade em perceber que o elemento simétrico é único para cada elemento do conjunto e que cada elemento tem o seu simétrico;

2.4.7 utilizar o elemento simétrico para provar a existência do elemento neutro e para encontrar o próprio simétrico.

2.5 Dificuldades com o conceito de bijeção:

2.5.1 dificuldade em definir bijeção;

2.5.2 dificuldade em identificar a bijeção entre dois conjuntos, quando houver.

3. Dificuldades relacionadas a Grupo

3.1 dificuldade com a definição de estruturas algébricas;

3.2 dificuldades com a definição de grupo (não relaciona os conceitos envolvidos na definição de grupo):

3.2.1 não saber definir grupo de nenhuma forma;

3.2.2 entender grupo como um conjunto;

3.2.3 entender grupo como uma operação;

3.2.4 entender grupo como as propriedades que devem ser provadas;

3.2.5 entender grupo como um conjunto e uma operação.

3.3 Dificuldades em trabalhar com a tábua de operação:

3.3.1 dificuldade em identificar um grupo pela tábua de operação;

3.3.2 dificuldade em operar com os elementos da tábua.

4. Dificuldades relacionadas a Isomorfismo de grupos

4.1 dificuldades com o conceito de isomorfismo:

4.1.1 não saber a definição formal;

4.1.2 necessitar de uma aplicação para afirmar que dois grupos são isomorfos;

4.2 dificuldade em dizer quando dois grupos são isomorfos utilizando a tábua de operações.

4.3 dificuldade em dizer quando dois grupos não são isomorfos (achar que é suficiente mostrar uma função que não seja isomorfismo).

4.4 não entender a utilidade do conceito de isomorfismo de grupos em matemática

5. Dificuldades relatadas pelos próprios estudantes

Como esta lista foi elaborada a partir das análises das entrevistas, expomos agora os trechos das transcrições, juntamente com alguns protocolos, que nos permitiram identificar cada uma dessas dificuldades que enunciamos.

1 Dificuldades relacionadas a Conjuntos

1.1 Dificuldade em conhecer uma diversidade de exemplos de conjuntos, além dos convencionais conjuntos numéricos

Percebemos que alguns estudantes sabem o nome de determinados conjuntos, como o conjunto $\mathbb{Z}_m$ de classe de restos, porém não sabem quais são os elementos que os compõem. Consideramos que um estudante conhece uma diversidade de exemplos de conjuntos quando ele é capaz de dizer quais são seus elementos, não apenas seu nome.

Mostramos o caso do estudante E3. Quando questionado, aparentou se lembrar do conjunto $\mathbb{Z}_m$, mas não sabia quais elementos o compõem. Vejamos:

Henrique: Você lembra o que é este símbolo? O $\mathbb{Z}_4$?

E3: O $\mathbb{Z}_4$? Ai, você tem que fazer uma tabela, não é?

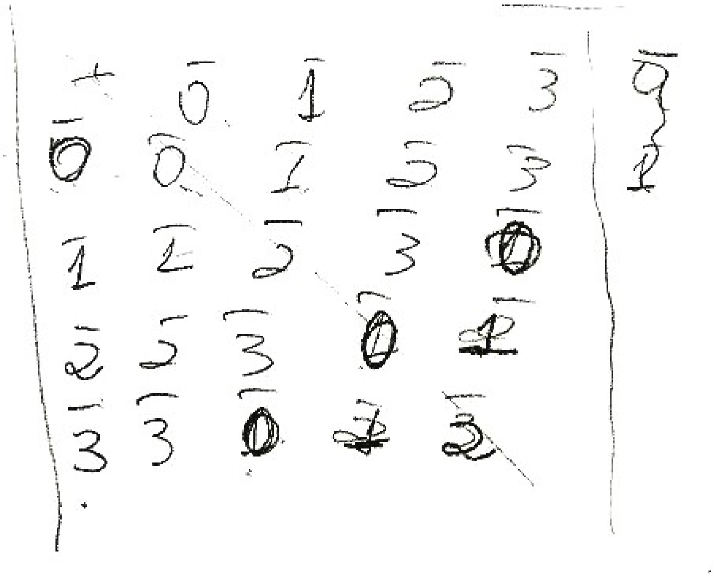
Henrique: Isso daqui é um conjunto...

E3: de divisão, que o resto...Quer ver, não tem que ser aquilo lá, zero barra, um barra, dois barra, três barra até o quatro barra? É isso?

Henrique: Até quatro barra?

E3: Não! Porque...quer ver! O que eu lembro, é uma coisa assim...eu não lembro se tem zero. Quatro! Como é soma, então eu vou somando ...não esse quatro aqui não tem (rabiscou o 4 da tabela).

Figura 1 – Protocolo do estudante E3



Henrique: O que é essa tabelinha que você fez? Para que é?

E3: *Para você provar que ele é grupo, não é? Se a diagonal dele for simétrica, prova que é um grupo abeliano*.

Percebemos que E3 não sabe afirmar qual é o conjunto $\mathbb{Z}_m$ de classe de restos, pois buscava pela memória quais eram os elementos de $\mathbb{Z}_4$, ora considerando o quatro barra, ora desconsiderando o zero barra. Entendemos que um estudante conhece o conjunto $\mathbb{Z}_m$ quando sabe que é composto pelos elementos $\{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}$.

Além disso, um detalhe intrigante foi a primeira reação do estudante ao considerar a necessidade de se fazer uma tábua, dando a impressão de ter decorado, talvez, a forma que o professor faz. Assim, parece-nos que o estudante associa que para mostrar que o conjunto $\mathbb{Z}_m$ de classe de restos com uma operação dada é grupo, deve-se montar a tábua de operação.

Pensamos que este seja um exemplo de reprodução do que o professor ensinou, caracterizando a etapa ação, conforme a teoria APOS, na qual o estudante faz manipulações sobre objetos matemáticos partindo apenas de fatos que estão na memória. Este trecho nos permite concluir que o estudante tenha, possivelmente, decorado que para mostrar que $(\mathbb{Z}_4, +)$ é um grupo deve-se montar a tábua de operação e verificar se esta tábua é simétrica com relação à diagonal principal para verificar se o grupo é abeliano. Notemos que não perguntamos se o grupo é ou não abeliano, mas o estudante tem memorizado como deve proceder.

Mesmo não sabendo mostrar se vale a propriedade associativa para a adição em $\mathbb{Z}_4$, a conclusão de E4 foi que $(\mathbb{Z}_4, +)$ é um grupo, e justificou, incorretamente, dizendo que se “provar que ele é, através da diagonal, que ele é abeliano, eu já provo que ele é grupo” (E4).

1.2 Dificuldade em lidar com conjuntos diversos, como, por exemplo, o conjunto das matrizes (propriedades, operações)

Os estudantes E2, E3, E7 e E8 apresentaram essa dificuldade. Como exemplo, podemos analisar o trecho da conversa do estudante E2. Quando tentava verificar se a multiplicação de matrizes $2x2$ é associativa, E2 deu sinais de que ainda não tem claro em sua mente as propriedades de multiplicação de matrizes, pois precisou fazer um esboço de multiplicação de matrizes genéricas e ainda concluiu que não vale a associativa. No momento da entrevista, notamos que o estudante fez o esboço de forma apressada, o que, talvez, o levou a errar as contas e a concluir erradamente que não vale a propriedade associativa para a multiplicação de matrizes.

Um estudante lida bem com matrizes quando sabe a definição, os tipos de matrizes, operações entre matrizes e suas propriedades, como, por exemplo, a associatividade para a multiplicação.

Vejamos a fala do estudante que retrata o que acabamos de afirmar:

Henrique: *Então, no caso, esta operação aqui seria...?* [...] *O conjunto das matrizes com a multiplicação, então seria A vezes B, não é?* [O estudante havia colocado adição, por isso falamos em A vezes B. Percebemos pelas entrevistas que é comum os estudantes se remeterem sempre à adição, pois é a operação mais familiar]

E2: Essa aqui pode não ser comutativa. Multiplicação nem sempre vale a volta.

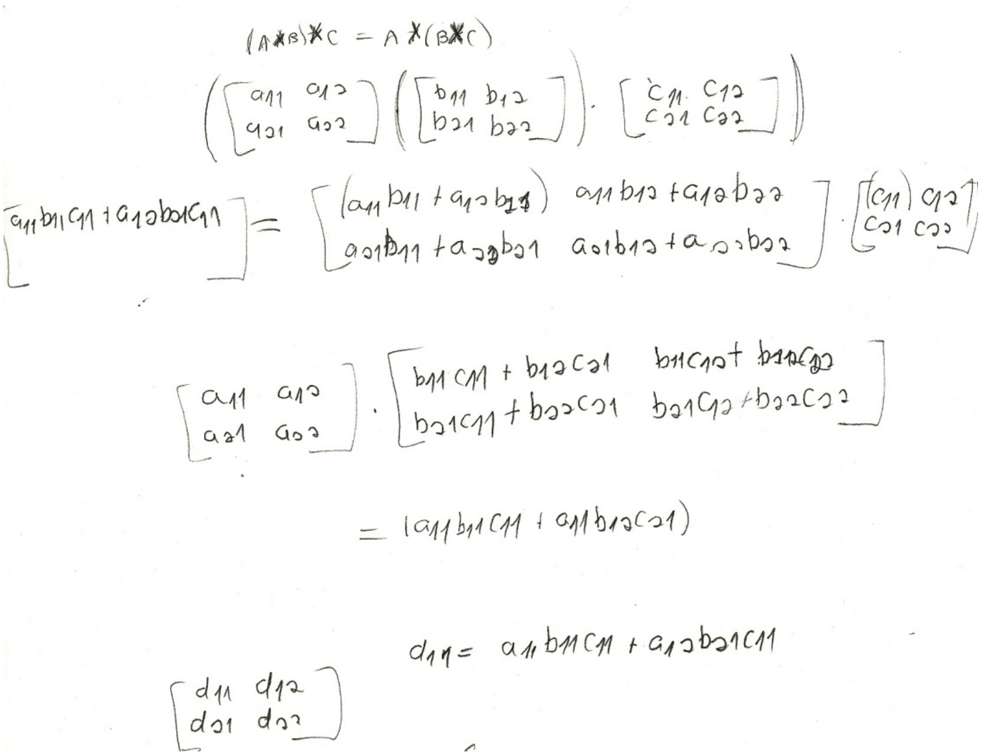
Henrique: Multiplicação de matrizes?

E2: Aham. Só vou esboçar um negócio aqui.

Henrique: Fique à vontade. Pode fazer. Quanto mais detalhado você escrever, melhor.

E2: Eu não sei outro jeito mais rápido de fazer isso aqui.

Figura 4 – Protocolo do estudante E2



E2: Essa multiplicação dessa matriz com essa aqui e essa multiplicação daqui de baixo teria que dar a mesma matriz. Daí eu saberia que é associativa. Esse é o primeiro momento. Deu isso. O primeiro elemento dessa aqui. Bom, todos os elementos da matriz têm que ser iguais, certo? Para a matriz ser igual. [...] Então, essa multiplicação aqui teria que dar a mesma coisa. Acho que nesse caso ele não é grupo.

Henrique: Por que você diz isso? [...] O primeiro elemento deste não é igual ao primeiro elemento deste? (Quando operou $(A * B) * C$, o primeiro elemento deu diferente do primeiro elemento resultante de $A * (B * C)$)

E2: O primeiro elemento deste aqui não é igual ao primeiro elemento desse aqui.

Henrique: *Então, não é associativa?*

E2: *Então, bom, grupo não é!*

Percebemos, pelo diálogo, que o fato de não ter em mente a validade da propriedade associativa para multiplicação de matrizes e, ainda, errar a multiplicação, levou o estudante a não dar continuidade no exercício e, assim, não conseguimos verificar sua compreensão com relação às outras propriedades: existência do elemento neutro e que todo elemento admite simétrico. Com isso, não conseguimos verificar se o estudante conhece o grupo das matrizes quadradas inversíveis de ordem n com a multiplicação.

Conforme dissemos anteriormente, um estudante possui uma *concepção objeto* de grupo quando conhece uma variedade de exemplos de grupos. Porém, quando um estudante não lida bem com uma grande variedade de conjuntos, consequentemente ele não conhecerá uma variedade de exemplos de grupos, como é o caso dos estudantes E2, E3, E7 e E8.

A dificuldade apontada aqui se refere a conhecimentos prévios necessários para a construção do objeto grupo, que é lidar com o conjunto das matrizes, indicando a *concepção ação*, segundo a APOS.

1.3 Dificuldade em reconhecer os símbolos que representam determinado conjunto

Encontramos um estudante, o E6, que apresentou dificuldades com os símbolos que representam um conjunto. Vamos apresentar o trecho da entrevista que evidenciou esta dificuldade, seguido de sua análise. A conversa refere-se à questão 5 *(ii)* $(\mathbb{Z}_4\ ,\ +)$ *e* $(M_2\,(\mathbb{R}))$ *são grupos*?

Henrique: *Aqui temos dois conjuntos. Este com a operação adição e este com a multiplicação. Quero que você me diga se são grupos ou não, mas primeiro, você sabe o que significa este símbolo* $\mathbb{Z}_4$*?*

E6: *Nossa, não!*

Henrique: *Que conjunto é este?*

E6: *Não.*

Henrique: *O conjunto dos restos módulo 4.*

E6: *Ah, tá!*

Henrique: *Este segundo, você se lembra?*

E6: *Também não.*

Henrique: *Conjunto das matrizes* $2x2$.

E6: *Sim.*

Notemos que os símbolos $\mathbb{Z}_4$ e $\mathcal{M}_{2\times2}$ não são familiares ao estudante. Pensamos que um estudante de Matemática que está há alguns anos no curso de licenciatura em Matemática, como é o caso do estudante E6, dificilmente não conheça o conjunto das matrizes $2x2$, principalmente porque no primeiro ano o estudante cursou a disciplina Geometria Analítica e Álgebra Linear, que trata, entre outras coisas, de Sistema de Equações Lineares e Matrizes. Por isso, atribuímos a resposta negativa do estudante não ao conjunto de matrizes, mas sim ao símbolo $\mathcal{M}_{2\times2}$.

No caso do símbolo $\mathbb{Z}_4$, também pensamos que um estudante de Matemática deve conhecer seu significado, porém por se tratar de um conjunto que se estuda apenas no Ensino Superior, podemos pensar que o estudante desconheça o conjunto, não apenas o símbolo. Mas, na sequência da conversa, após explicarmos quais são seus elementos, o estudante mostra uma vaga lembrança do conjunto $\mathbb{Z}_4$, o que nos leva a crer que ele não associou o símbolo $\mathbb{Z}_4$ ao conjunto que conhecia.

Henrique: Você se lembra como operar [os elementos do conjunto]?

E6: Lembro que são os restos, então todo número múltiplo de 4 vai no zero, todo número que sobrar 1 vai no $\bar{1}$. Lembro disso, o básico.

Pensamos que o simbolismo em Matemática seja uma das causas de dificuldades de estudantes, tal como apresentou o estudante E6. Contudo, os símbolos em questão, principalmente o $\mathcal{M}_{2\times2}$, são básicos não apenas no estudo de Álgebra, mas em toda a Matemática. Por isso, a dificuldade apresentada pelo estudante mostra que seu conhecimento de conjuntos diversos está defasado e, consequentemente, sua noção de grupo também, sinalizando uma concepção ação, conforme APOS, deste conceito.

1.4 Dificuldade com o conceito de cardinalidade e ordem de um conjunto

Uma das questões que abordamos nas entrevistas buscava verificar se os estudantes entendiam que não é possível ter uma aplicação que seja um isomorfismo entre os grupos $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{Q}, +)$, uma vez que não há uma aplicação bijetiva de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ Neste ponto, alguns estudantes demonstraram problemas em conceitos como conjuntos enumeráveis[18], explicitado no diálogo:

Henrique: *$(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{Q}, +)$ são isomorfos?*

E1: *Considerando que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ são infinitos, só que o infinito de $\mathbb{R}$ é maior, maior assim... mas eu não tenho certeza.*

Henrique: *O que você não tem certeza?*

E1: *É que, por exemplo, quando vai fazer uma aplicação de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$, que a quantidade de elementos de $\mathbb{R}$ é infinito, mas é muito maior do que a quantidade de $\mathbb{Z}$.*

Henrique: *Então, não dá para fazer esta aplicação? Ou ela não seria bijetora?*

E1: *Acho que daí não seria bijetora.*

Henrique: *E qual a diferença entre $\mathbb{R}$ e os $\mathbb{Q}$?*

E1: *Os $\mathbb{R}$ englobam também os $\mathbb{Q}$.*

Henrique: *Os $\mathbb{Q}$ são enumeráveis ou não enumeráveis?*

E1: *Esse é o problema.*

Henrique: *Você não lembra se os $\mathbb{Q}$ são enumeráveis, é isso?*

E1: *É, então. Os $\mathbb{R}$ são não enumeráveis, agora o $\mathbb{Q}$ eu não tenho certeza.*

O fato de não se lembrar que o conjunto dos racionais é enumerável foi um empecilho para que este estudante pudesse dar continuidade no seu

---

[18] "Um conjunto X é dito enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \to X$" (LIMA, 1976, p. 38).

raciocínio e chegasse a uma conclusão da questão. Portanto, consideramos que o estudante apresentou dificuldades quanto ao conceito de conjunto enumerável, que traz consigo o conceito de cardinalidade[19].

Mesmo sem conseguir concluir sua resposta, o estudante mostrou ter consciência de que se $\mathbb{Q}$ for enumerável, e de fato é, não haverá uma aplicação bijetiva de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. O que nos mostra uma reflexão sobre a *ação*, necessitando *desencapsular* o objeto função bijetora para retomar o conceito de conjunto enumerável, entendendo $\mathbb{Q}$ como um conjunto enumerável.

2 Dificuldades relacionadas a função

2.1 Dificuldade com a definição de função

Não era pretensão deste trabalho verificar a noção dos estudantes quanto à definição de função. Contudo, um estudante, o E6, ao tentar explicar o que era função bijetora, apresentou um erro que caracterizamos como uma dificuldade. Vejamos:

Henrique: Você sabe o que é bijeção?

E6: Que é injetora e sobrejetora.

Henrique: O que é injetora?

E6: Eu lembro por gráfico, não lembro a definição.

Henrique: Se você fizer por gráfico, sabe me dizer?

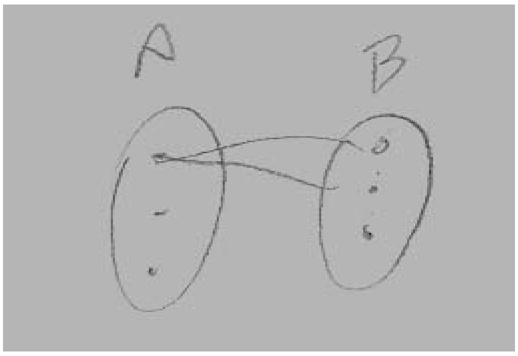
E6: Injetora é...Sobrejetora é que não vai sobrar ninguém aqui, no conjunto B . Então, todo elemento aqui vai ser ligado...injetora é que não se liga mais de um elemento. Não! Confundi. [risos] É, sobrejetora é que não vai sobrar nenhum elemento, todo elemento daqui vai se ligar em pelo menos um do B .

Enquanto o estudante falava, fazia a seguinte figura:

---

[19] Dados dois conjuntos X e Y, diremos que eles "têm o mesmo número cardinal, e escrevemos card (X)card = (Y), para significar que existe uma bijeção $f: X \to Y$" (LIMA, 1976, p. 41).

Figura 5 – Protocolo do estudante E6



Pelas palavras do estudante, conseguimos garantir que ele definiu o conjunto A como o domínio da função e B como o contradomínio. Notamos, então, seu erro quanto ao conceito de função ao definir sobrejetora e, também, quando faz o desenho, pois considera que um elemento de A pode corresponder a mais de um do conjunto B. Sabemos que para f ser uma função (aplicação cujo contradomínio é um conjunto numérico) é necessário que dado $x \in D(f)$ (domínio da função) seja único o elemento $y \in B$ de modo que $f(x) = y$.

Este erro mostra que o estudante *encapsulou* o objeto função de maneira equivocada, carecendo retornar aos *processos* que deram origem e redefinir este conceito.

2.2 Dificuldade com a definição de classe de equivalência

Como a pergunta cinco item (ii) do roteiro tratava do grupo $(\mathbb{Z}_4, +)$, o estudante deveria, como ressaltamos na dificuldade 1.1, conhecer o conjunto $\mathbb{Z}_m$, que é composto pelos elementos $\{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}$. Precisaria, então, compreender a natureza desses elementos que compõem o conjunto $\mathbb{Z}_m$, isto é, deveria saber que cada elemento é uma classe de equivalência determinada pela relação R de congruência módulo m sobre $\mathbb{Z}$. Assim, seja $a \in \mathbb{Z}$, o subconjunto $\bar{a}$ de $\mathbb{Z}$ é constituído pelos elementos x tais que xRa, representado por $\bar{a} = \{x \in \mathbb{Z} |\ xRa\}$.

Durante a entrevista, o estudante E4 mostrou não compreender esse conceito. Vejamos:

Henrique: [...] *Aqui você colocou barrinha. Você sabe o que significa essa barrinha?*

E4: *Porque quando a gente está falando de* $\mathbb{Z}$ *"alguma coisa", a gente coloca barra.*

Henrique: *Mas, o que significa essa barra?*

E4: *Ah, eu não sei, mas eu sei que precisa colocar.*

Esse trecho mostra que o estudante está reproduzindo o que aprendeu, mas sem se questionar sobre os conceitos. É uma característica da *ação*, segundo a APOS, em que o estudante realiza ações mentais com objetos de forma algorítmica, em reação a estímulos externos ao indivíduo, reproduzindo o que o professor ensinou, mas sem interiorizar o conceito.

2.3 Dificuldade relacionada às operações em conjuntos. Conhecer e saber trabalhar com diferentes tipos de operações, não apenas adição e multiplicação em conjuntos numéricos

Uma operação é uma aplicação e, assim sendo, consideramos que uma dificuldade em operação está relacionada a uma dificuldade em aplicação. Podemos definir uma operação de acordo com Domingues e Iezzi: "Sendo E um conjunto não vazio, toda aplicação $f: E \times E \to E$ recebe o nome de *operação sobre* E (ou em E) ou *lei de composição interna em* E (ou em E)" (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 111).

Para que um estudante tenha uma *concepção objeto* de operação é necessário que ele saiba lidar com diferentes tipos de operações de conjuntos diversos, não apenas adição e multiplicação sobre conjuntos numéricos.

Percebemos que alguns estudantes têm dificuldades em lidar com operações genéricas, precisando sempre se reportar a operações como adição entre números. Este fato fica claro na fala do estudante E6 quando questionado sobre a propriedade comutativa e a associativa:

Henrique: *Por exemplo, a comutativa, você lembra o que é?*

E6: *A comutativa é* a *mais* b *é igual a* b *mais* a*.*

Henrique: *Isso se a operação for adição. E a associativa?*

E6: *Associativa é* a *mais, entre parênteses,* b *mais* c *é igual a* a *mais* b*, entre parênteses, mais* c*.*

Henrique: *Isso. "Mais", porque no caso a operação é adição.*

E6: *Isso.*

Está claro que o estudante quis dizer que a comutativa é: $a + b = b + a$, $\forall\, a, b\ \in G$ e que a associativa é: $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\forall\, a, b, c\ \in G$. Sua ideia destas duas propriedades está correta, todavia espera-se que os estudantes se desprendam de casos particulares, como é o caso da adição, e pensem em uma operação qualquer.

Uma ressalva a ser feita é que um estudante, ao atingir certa familiaridade com o conteúdo, pode utilizar o sinal da adição para representar uma operação qualquer. Mas, de acordo com o que analisamos da entrevista do estudante E6, pensamos que esse recorreu ao caso particular da adição não pelo alto grau de familiaridade que possui com o conteúdo, mas por ser um caso mais comum a ele, o que caracteriza uma tentativa de reduzir o nível de abstração, conforme Hazzan (1999), que há em pensar em uma operação qualquer.

Entendemos que a necessidade de casos particulares ao explicar uma propriedade indica que esse estudante ainda está realizando ações com objetos que lhe são familiares, evidenciando a fase de *interiorização*, segundo Sfard (1991).

Vejamos o caso do estudante E7:

Henrique: *O elemento neutro de um grupo é único?*

E7: *É único com a operação dele. Quando é soma, é o zero. Quando é multiplicação, é o* 1.

Falávamos do elemento neutro de forma genérica, não de uma forma específica como E7 tratou. Esse estudante mostrou, por esse trecho acima e pelo decorrer da entrevista, que, em seu entendimento, só existem duas operações possíveis para grupos: multiplicação e adição. Esse caso é evidenciado por Dubinsky *et al.* (1994), quando ressaltam que um estudante que não tem bem construídos os três esquemas que envolvem o conceito de grupo (conjunto, aplicação e axioma) pode, por exemplo, *encapsular* o objeto matemático grupo tendo claro apenas algumas operações sobre um conjunto, excluindo outras operações que poderiam ser aplicadas àquele conjunto. Sendo necessária uma *desencapsulação* do objeto grupo para retomar algumas operações que foram deixadas para trás.

2.4 Dificuldades com as propriedades da operação (associatividade, existência do elemento neutro e todo elemento admite simétrico):

2.4.1 Dificuldade em explicar as propriedades de operações

Neste item encaixam-se os estudantes que enunciaram as propriedades, mas não souberam defini-las. Apresentaram esta dificuldade os estudantes E7 e E8. Vejamos, por exemplo, o estudante E7. Enquanto tentava mostrar que $(\mathbb{Z}_4, +)$ é um grupo, disse:

E7: [...] *Bom, não é grupo.*

Henrique: *Não é grupo? Por quê?*

E7: *Porque não tem elemento inverso.*

Henrique: *O que seria elemento inverso?*

E7: *Bom, elemento inverso seria, por exemplo... Espera. Não tem inverso? Eu tenho que pegar um elemento vezes... vezes, né? Eu não lembro mais.*

Henrique: *Que operação é esta?*

E7: *Soma, né? Um elemento mais o outro que desse ele mesmo. Não? Mas eu já tenho o zero barra.*

Henrique: *Este que dá ele mesmo é o elemento neutro.*

E7: [...] *É, elemento neutro. Elemento inverso... nossa, não lembro qual é o elemento inverso.*

Henrique: *Não?*

E7: *Não. Por isso eu não sei fazer. O que é o elemento inverso?*

Observamos que o estudante revelou a dificuldade *2.4.4 confusão entre as propriedades* (DUBINSKY *et. al.*, 1994, p. 85), pois confundiu, inicialmente, a propriedade da existência do elemento neutro com a propriedade do elemento simétrico, erro bastante comum entre os estudantes.

Na sequência, é nítido que o estudante não sabe definir elemento simétrico, o qual ele e outros estudantes chamam de elemento inverso. Quando um estudante não sabe o que é elemento simétrico, consequentemente, não saberá verificar se um conjunto associado a uma operação é grupo, mesmo que seja um conjunto numérico e uma operação familiar. Neste caso, dizemos que o estudante evidenciou uma *concepção ação*, segundo a teoria APOS, quanto ao conceito de grupo, necessitando executar uma série de *ações* para, então, realizar construções internas conscientes, interiorizando as *ações* em *processos*.

2.4.2 Dificuldade em provar as propriedades de operações

Encontramos estudantes com dificuldades em provar que um conjunto munido de uma operação goza ou não das propriedades associativa, possui elemento neutro e cada elemento admite elemento simétrico. Destas, a que aparentou ser a mais problemática para os estudantes é a associativa. Vejamos o exemplo do estudante E3 quando perguntado se vale a propriedade associativa para adição no conjunto $\mathbb{Z}_4$:

Henrique: [...] *Tá, e a associativa?*

E3: *A associativa é se a está relacionado com...que é aquela lá que você colocou, né?* [tempo] *Agora provar isso aqui eu não sei não. Deixa eu ver.* [tempo] *Se a é relacionado com $b\ldots$ Sinceramente eu não sei provar isso.*

Este estudante também apresentou a dificuldade *2.3.4 confusão entre as propriedades (elemento neutro com o inverso, associativa com comutativa)*, pois confundiu a propriedade associativa com outras. Por este motivo é que o estudante diz “[...] que é aquela lá que você colocou, né?”, pois como havia errado, o corrigimos apresentando a definição da propriedade associativa. Apesar de ter a definição em mãos, o estudante não conseguiu provar sua validade para a adição em $\mathbb{Z}_4$.

O estudo das propriedades das operações, como é o caso da propriedade associativa, precede e é necessário ao estudo de grupo. Por isso, entendemos que este estudante encontra-se na etapa de *interiorização*, conforme Sfard (1991). Nesta etapa, operações devem ser realizadas sobre objetos matemáticos de nível inferior e, gradativamente, o indivíduo vai se especializando em sua realização para, então, elevar a um nível superior de sofisticação, construindo novos objetos.

2.4.3 Não verificar a existência do elemento neutro à direita e à esquerda

Pela definição de elemento neutro, sabemos que "se e é elemento neutro à direita e à esquerda para $*$, então dizemos que e é o *elemento neutro* para esta lei" (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p. 115). Notamos que alguns estudantes deixam de verificar o elemento neutro à direita e à esquerda, considerando suficiente mostrar a validade apenas de um lado. Isso seria suficiente caso esses estudantes mostrassem que tal operação $*$ é comutativa, o que não ocorreu. Vejamos o exemplo do estudante E7:

Henrique: *Mas, para a gente ver se é um grupo, não tem que ver se tem o elemento neutro?*

E7: *Tá, tem que ver se tem o elemento neutro. Bom, então...*[tempo] *Como eu faço para ver se tem o elemento neutro nesse negócio. O que seria o elemento neutro? Eu preciso de um elemento estrelinha com outro elemento sendo igual ao primeiro elemento. Se eu pego esse com esse, dá esse!* [...] *Se eu pegar... eu quero a com b, dá a. Então tá. a estrelinha b dá o próprio a. b com b, dá b. E c com b, dá c. Então, tá. Então ele tem o elemento neutro.*

Henrique: *Qual é?*

E7: *É o b. Existe bonitinho. Ótimo.*

Percebemos, não apenas pelo trecho acima do estudante E7, mas também pela entrevista com outros estudantes, como o E2, que além de não verificar o elemento neutro à direita e à esquerda, esses têm uma tendência a verificar somente se e é um *elemento neutro à direita*, isto é, o caso $x * e = x$, $\forall\, x \in G$.

Como mostramos na definição do elemento neutro, há a necessidade de se mostrar a validade da propriedade em ambos os lados. Sendo assim, se um estudante não verifica à direta ou à esquerda, entendemos que ele não compreendeu o conceito de elemento neutro, mas que, possivelmente, tenha uma ideia intuitiva. Consideramos que um estudante pode encapsular essa propriedade como se fosse apenas $x * e = x$, o que exigiria a capacidade de desencapsulação para reconstruí-la, passando a e entendê-la como $x * e = x = e * x$, $\forall\, x \in G$.

Compreender a propriedade do elemento neutro, assim como as demais propriedades, é essencial para se ter uma *concepção objeto* do grupo, uma vez que, como dissemos, o conceito de grupo é entendido como um esquema que contém três esquemas: conjunto, operação binária e axiomas, em que nesses axiomas está contemplada a propriedade do elemento neutro.

Ressaltamos, também, que um estudante de Matemática precisa começar a utilizar uma linguagem adequada para expressar seu raciocínio. No caso do estudante E7, percebemos que a linguagem usada não foi apropriada quando diz: “Como eu faço para ver se tem o elemento neutro nesse negócio” (E7). Alguns termos, como *negócio*, devem ser evitados, afinal o estudante E7 logo será um professor e precisará se expressar com maior rigor. Esse formalismo é uma das contribuições de um curso de Álgebra na formação do estudante.

2.4.4 Confusão entre as propriedades (elemento neutro com simétrico, associativa com comutativa)

Uma dificuldade que se mostrou bastante comum entre os estudantes foi com relação às propriedades que um conjunto associado a uma operação deve gozar. Identificamos nas entrevistas muita confusão com relação ao nome das propriedades. Tais confusões foram ou por um simples deslize, falta de atenção ao falar sobre a propriedade ou por não associarem o nome à propriedade, ou seja, fala sobre uma propriedade, mas prova outra.

No trecho do estudante E1, entendemos que seu erro se encaixa no primeiro caso, isto é, consideramos que a confusão ocorreu por falta de atenção ao enunciar a propriedade. Vejamos:

Henrique: *Então o elemento neutro é único. Isto implica em que, o que isso quer dizer?*

E1: *Qualquer elemento que eu pegar, ele operado com o inverso tem que dar o mesmo elemento.*

Vemos que o estudante, ao invés de elemento neutro, fala em inverso. Como tratávamos da unicidade do elemento neutro, acreditamos que o equívoco apresentado pelo estudante se caracteriza por um deslize no momento da explicação. Já no caso do estudante E3, consideramos que seu equívoco não foi por falta de atenção, mas sim uma dificuldade com as propriedades.

Henrique: *O que é associativa?*

E3: *Se a está relacionado com b e a está relacionado com c, então a... b relacionado com c, então a está relacionado com c. Não é isso?*

O estudante disse que a propriedade associativa é: se $a * b$ e $b * c$ então $a * c$, ou seja, ela confundiu a propriedade associativa com a propriedade transitiva.

Pensamos que estes erros com relação aos nomes das propriedades e o que elas significam ocorram pelo fato de estudantes não refletirem sobre a palavra que nomeia a propriedade. Por exemplo, comutativo é relativo à comutação, permutável, ou seja, podemos trocar, inverter os elementos. Associatividade remete a associar, agregar, reunir, isto é, podemos agregar os elementos de um conjunto. Podemos pensar, também, no elemento neutro como aquele elemento que, quando operado com outro, não o altera. Assim, cremos que falta aos estudantes que cometeram este tipo de confusão refletir sobre o significado da palavra, ao invés de somente tentar decorá-la no contexto matemático. Essa falta de reflexão, de agir inconscientemente é característica da *concepção ação*, conforme a teoria APOS.

2.4.5 Dificuldade em provar a unicidade do elemento neutro

A questão sete da entrevista visava verificar a compreensão do estudante quanto ao elemento neutro. Pedimos aos estudantes que provassem a unicidade do elemento neutro. Esta se mostrou uma questão difícil aos estudantes. Vejamos como o estudante E2 lidou com esta questão:

Henrique: [...] *prove que ele* (elemento neutro) *é único*.

E2: *Provar? Se eu for fazer um grupo... pela adição.*

Henrique: *Para você provar, você precisa determinar uma operação?*

E2: *Ah, ou usar a mesma operação, não sei. Vou fazer para uma operação qualquer, então. Se eu dissesse que o* x *de* A*, operado com esse elemento neutro, teria que dar o* x*.*

O estudante escreve na folha: $x * 1' = x$. Em seguida definiu outro elemento neutro que chamou de 1, tendo então que: $x * 1 = x$.

E2: [...] *Eu sei que eu tinha que usar, eu acho, que a associatividade. Isso tem a ver com a lei que eu associei lá em cima, certo! Bom, se eu fosse igualar as duas equações, seria isso.*

Ele escreve na folha: $x * 1' = x * 1$.

E2: *Paro aqui, com essa lei. Por exemplo, se fosse adição, eu poderia cortar. Por isso que eu comecei por ela. Se fosse adição aqui, concluiria que* $1'$ *é igual a* 1*.*

Henrique: *Você cancelava o* x *de cada lado?*

E2: *Aham. Agora, com a multiplicação, nem sempre eu posso fazer isso! Só vai ser grupo se ela tiver...não sei, cara!*

Alguns pontos devem ser destacados neste trecho da conversa com E2. Primeiro, o estudante sente a necessidade de determinar uma operação que lhe seja familiar para conseguir provar. Neste sentido, podemos dizer que o estudante ainda não se desprendeu de casos particulares. Ainda não abstraiu para casos gerais. Notemos que, mesmo após dizer que vai provar a unicidade do elemento neutro para uma operação qualquer, o estudante dá indícios de que esta operação qualquer está entre adição e multiplicação apenas. Esta é uma dificuldade que nos remete ao item *2.1 Dificuldade relacionada a operação. Conhecer e saber trabalhar com diferentes tipos de operação, não apenas adição e multiplicação em conjuntos numéricos*.

Outro destaque é quanto à fala “com a multiplicação, nem sempre eu posso fazer isso”. Como estávamos falando sobre o elemento neutro de um grupo, já temos validadas as propriedades, logo todo elemento do grupo é regular e, portanto, vale a lei do cancelamento, independente da operação.

Assim como destacamos na dificuldade 2.4.3, os estudantes devem se preocupar em expressar seu raciocínio de maneira clara, utilizando uma linguagem adequada. No caso do trecho acima, E2 diz: “Paro aqui, com essa lei. Por exemplo, se fosse adição, eu poderia cortar” (E2). *Cortar* o quê? O que significa *cortar*? Para entender a fala do estudante, tivemos que perguntar se *cortar* significaria cancelar o termo x de cada lado.

Por último, podemos observar a confusão do estudante com relação ao que estava querendo provar, pois ele diz “só vai ser grupo se...”, porém não queríamos que provasse se era grupo ou não, mas sim a unicidade do elemento neutro.

Os problemas evidenciados nas falas do E2 nos levam a inferir que o estudante ainda não *encapsulou* o conceito de operação, uma vez que não lida com diversos exemplos de operações. Isto, aliado ao fato de que desconhece que os elementos de um grupo são regulares e, portanto, vale a lei do cancelamento, impediram o estudante de entender a prova da unicidade do elemento neutro. Dando indícios de uma *concepção ação* do conceito de grupo.

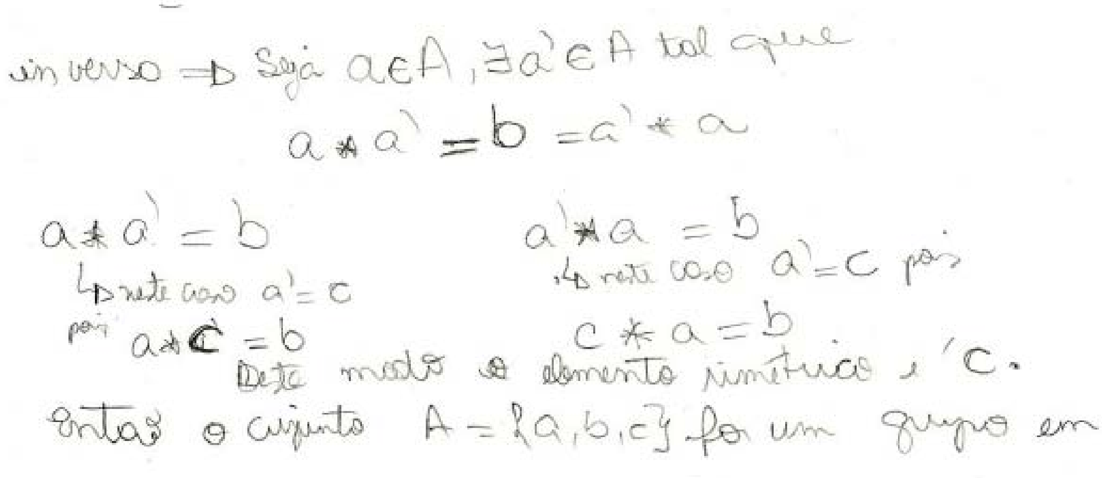
2.4.6 Dificuldade em perceber que o elemento simétrico é único para cada elemento do conjunto e que cada elemento tem o seu simétrico

Temos a seguinte definição de elemento simétrico:

> **Definição 41**: Seja $*$ uma operação sobre E que tem elemento neutro e. Dizemos que $x \in E$ é um *elemento simetrizável* para essa operação se existir $x' \in E$ tal que: $x' * x = e = x * x'$
> O elemento x' é chamado *simétrico* de x para a operação $*$ (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p.116).

Podemos, pela definição, concluir que se x e y são simetrizáveis e $x \neq y$, então os simétricos x' e y', de x e y respectivamente, são diferentes[20]. Porém, não foi isso que verificamos na conversa com o estudante E4. Enquanto tentava verificar se os elementos do conjunto $A = \{a, b, c\}$ para uma operação $*$ definida pela tábua de operação dada são simetrizáveis (questão seis), esse estudante concluiu que o elemento c é o simétrico de todos os demais elementos. Vejamos o protocolo que ilustra esse equívoco, seguido de um trecho da entrevista:

Figura 6 – Protocolo 1 do estudante E4


inverso ⇒ Seja $a \in A$, $\exists a' \in A$ tal que
$a * a' = b = a' * a$
$a * a' = b$
↳ neste caso $a' = c$
pois $a * c = b$
$a' * a = b$
↳ neste caso $a' = c$ pois
$c * a = b$
Deste modo o elemento simétrico é c.
Então o conjunto $A = \{a, b, c\}$ for um grupo em

---

[20] Podemos verificar este fato da seguinte forma: sejam x' e y' os simétricos de x e y respectivamente, tal que $x \neq y$. Vamos supor $x' = y'$. Então, $xx' = xy' \Rightarrow$ e $= xy' \Rightarrow x = (y')' = y$. O que é absurdo, pois $x \neq y$. Então, $x' \neq y'$.

Henrique: [...] Então, o c é o inverso para todos os elementos?

E4: Sim.

Henrique: Existe um elemento simétrico?

E4: Sim.

Depois de algumas perguntas sobre o elemento neutro, retornamos ao elemento simétrico:

Henrique: Por exemplo, se eu pegar o elemento dois nos reais. Qual é o inverso de dois para a multiplicação?

E4: Na multiplicação é o meio.

Henrique: Qual é o inverso de três para a multiplicação?

E4: É o meio.

Henrique: É o meio? 3 “vezes” ½ é igual a...

E4: Não, 3 “vezes” $1/3$ é igual a 1.

[...]

E4: É, do 3 o único inverso é o $1/3$, do 2 o único inverso é o ½.

Henrique: Mas no conjunto [do exercício] [...] você mostrou que “deste modo o elemento simétrico é o c”.

E4: Deste conjunto. Do conjunto, o c vai ser o simétrico para todos.

Henrique: É? Se eu pegar c operado com c, vai dar a.

E4: Ah, fiz só do a. Então, tenho que fazer do c e do b.

A partir do protocolo e do trecho acima, percebemos uma confusão com a propriedade do elemento simétrico.

Tentamos estimular o estudante a pensar sobre sua resposta inicial, perguntando sobre um exemplo bastante simples e familiar, que foi o simétrico para a multiplicação dos elementos 2 e 3 nos reais. A primeira resposta de E4 foi considerar o mesmo simétrico para ambos: o $1/2$. Mas, reconsiderou e percebeu que o simétrico não é o mesmo para todos os elementos.

Porém, para o conjunto $A = \{a, b, c\}$ munido da operação $*$, o estudante não se ateve que, da mesma forma que os elementos 2 e 3 pertencentes aos reais possuem simétricos multiplicativos distintos, cada elemento possui seu simétrico, permanecendo com a ideia de que c é o simétrico de todos os elementos de A.

Em seu protocolo, E4 apenas mostrou que o simétrico do elemento a é o c e, a partir disso, concluiu que o elemento c vai ser o simétrico para todos os elementos do conjunto. Após mostrarmos ao estudante que o elemento c operado com ele mesmo resulta em a, isto é, o elemento c não é o simétrico dele mesmo, o estudante percebeu o erro que cometeu ao deixar de verificar quais são os simétricos dos demais elementos do conjunto. Por isso, entendemos que a resposta errada foi causada pela dificuldade em lidar com uma operação $*$ definida pela tábua de operação, em que o estudante acredita que basta encontrar o simétrico de um elemento para concluir que aquele será o simétrico para todos.

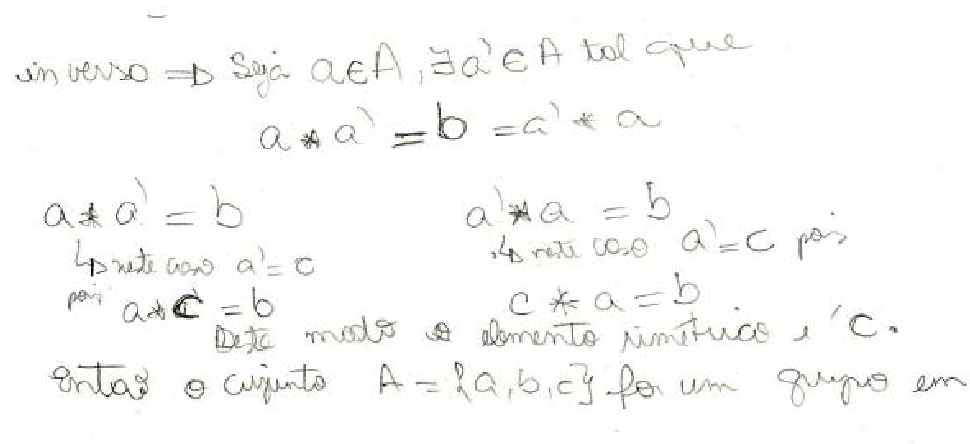
Outro erro cometido pelo estudante pode estar relacionado aos quantificadores, quando E4 afirma que do "conjunto, o c vai ser o simétrico para todos" (E4). Porém, entendemos que neste momento da entrevista não exploramos como deveríamos essa possível confusão do estudante quanto ao quantificador *para todos*. Desse modo, cremos que a dificuldade mais evidente neste trecho da entrevista foi com relação ao elemento simétrico, quando E4 considera a possibilidade de dois elementos distintos possuírem um mesmo elemento simétrico.

Entendemos, então, que os equívocos ao trabalhar com um conjunto finito qualquer associado a uma operação genérica, necessitando de casos específicos e familiares para compreender, ilustram a *concepção operacional*, segundo Sfard (1991), das propriedades de uma operação sobre um conjunto que formarão um grupo.

2.4.7 Utilizar o elemento simétrico para provar a existência do elemento neutro e para encontrar o próprio simétrico

Consideramos, assim como Bussmann (2009, p. 45), que quando o estudante passa a respeitar a ordem das propriedades de grupo, ou seja, a propriedade associativa, a existência do elemento neutro e que todo elemento do conjunto é simetrizável, esse está na fase de condensação definida por Sfard (1991). Percebemos que os estudantes, em sua maioria, sabem da importância da ordem das propriedades, mas, em alguns casos, mesmo sabendo disso, não a respeitam. É o caso do estudante E4. Quando tentava encontrar o elemento neutro do conjunto $\mathbb{Z}_4$, E4 fez no papel:

Figura 7 – Protocolo 2 do estudante E4


inverso ⇒ Seja $a \in A$, $\exists a' \in A$ tal que
$a * a' = b = a' * a$
$a * a' = b$ $\quad$ $a' * a = b$
↳ neste caso $a' = c$ $\quad$ ↳ neste caso $a' = c$ pois
pois $a * c = b$ $\quad$ $c * a = b$.
Deste modo o elemento simétrico é 'c.
Então o conjunto $A = \{a, b, c\}$ for um grupo em

Vemos que o estudante usa a propriedade do elemento simétrico para encontrar o elemento neutro $\bar{0}$ do conjunto $\mathbb{Z}_4$. Apesar disso, durante a conversa, diz:

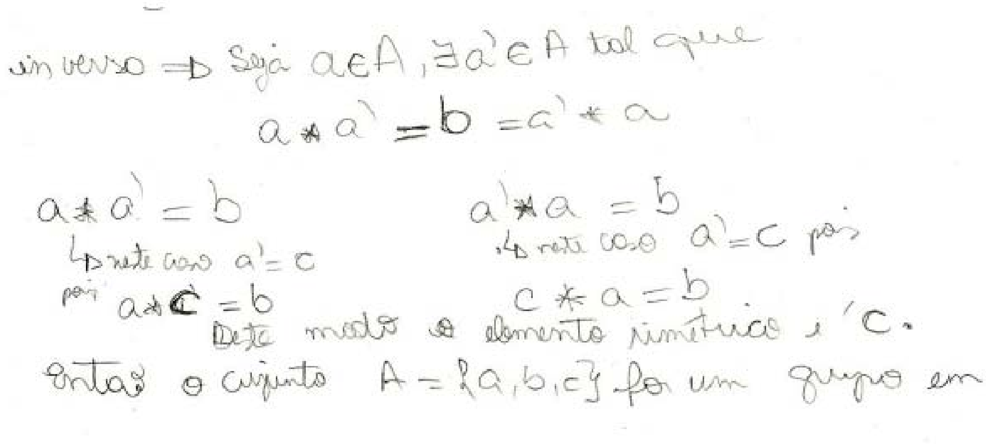
E4: [...] *é que antes de achar a inversa, tem que achar o elemento neutro.*

Henrique: *Por quê?*

E4: *Porque se não tiver elemento neutro, não vai ter inverso.*

Quando tenta encontrar o elemento simétrico de um elemento $\bar{a}$ de $\mathbb{Z}_4$, comete o mesmo erro. Vejamos:

Figura 8 – Protocolo 3 do estudante E4


inverso ⇒ Seja $a \in A$, $\exists a' \in A$ tal que
$a * a' = b = a' * a$
$a * a' = b$ ↳ neste caso $a' = c$ pois $a * c = b$
$a' * a = b$ ↳ neste caso $a' = c$ pois $c * a = b$
Deste modo o elemento simétrico é c.
Então o conjunto $A = \{a, b, c\}$ for um grupo em

Percebemos aqui equívocos com elementos lógicos da demonstração, pois, nos dois casos, acima o estudante utiliza fatos a serem demonstrados para demonstrar as propriedades. No primeiro caso, E4 utiliza o fato de que $\bar{c} - \bar{c} = \bar{0}$ enquanto provava a existência do elemento neutro $\bar{0}$. No segundo caso, utiliza o elemento simétrico $-\bar{a}$ de $\bar{a}$ para encontrar o simétrico do próprio $\bar{a}$.

Concluímos, então, que o E4 apresenta dificuldades em provar a existência do elemento neutro e que todo elemento do conjunto é simetrizável, isto é, apresenta dificuldades que residem nas propriedades das operações e que podem ser empecilhos para esse estudante quando for mostrar que um conjunto associado a uma operação é um grupo. Por isso, consideramos que esse estudante possui uma concepção ação do conceito de grupo.

2.5 Dificuldades com o conceito de bijeção:

2.5.1 dificuldade em definir bijeção

De acordo com Leron, Hazzan e Zazkis (1995, p. 153), entender isomorfismo de grupos envolve a compreensão dos conceitos de grupo, função e de quantificadores.

Compreender o conceito de função envolve, também, os tipos de função. Por isso, saber o que é uma função bijetora é essencial para entender isomorfismo de grupos.

Identificamos, então, dificuldades de estudantes em definir função bijetora. É o caso do estudante E3. Durante a conversa, falávamos sobre isomorfismo de grupos, o qual não se recordava muito bem. Disse ao estudante:

Henrique: [...] *para uma aplicação* f *ser um isomorfismo de grupos, ela deve ser um homomorfismo de grupos e tem que ser bijetora.*

E3: *Ah, é verdade. Que ela tem que ser injetora e sobrejetora.*

Pouco tempo depois, retornamos ao assunto função bijetora.

Henrique: *O que quer dizer bijetora?*

E3: *Bijetora? É a* $f(a)...$

Ele escreve na folha: $f(g(x))$ e diz:

E3: É isso, não é? A f aplicada na $f(g(x))$ tem que ser igual a... Ah, não lembro.

Esse pedaço da entrevista ilustra a confusão feita ao tentar explicar o que é uma função bijetora. É possível dizer que o estudante não reificou esse conceito, isto é, não está claro em sua mente o que é uma bijeção, e isso o levou, ao tentar resgatar pela memória algo que lhe era familiar, a apresentar outro tipo de função (função composta) que não a definição pedida.

Se o sujeito não compreender, de fato, o conceito de função bijetora, o entendimento de isomorfismo de grupos fica comprometido, pois este depende do conceito de função bijetora. Sendo assim, consideramos sinais de que esse estudante E3 possua uma concepção ação do conceito de isomorfismo de grupos, uma vez que não compreende uma noção primordial, como é a noção de função bijetora.

2.5.2 Dificuldade em identificar a bijeção entre dois conjuntos, quando houver

Quanto ao conceito de bijeção, percebemos dificuldades apresentadas quanto à definição e também quanto ao reconhecimento de uma aplicação bijetora. Pode ocorrer de um estudante saber a definição, porém não sabe dizer quando uma aplicação é bijetora ou não. Vejamos o caso do estudante E2. No início da conversa sobre isomorfismo de grupos, perguntamos ao E2 o que é uma aplicação bijetora.

Henrique: *Lembra o que é bijeção?*

E2: *Tem que injetora e sobrejetora. Injetora é que pra cada elemento tem...cada elemento tem seu...tem seu elemento lá na imagem, certo? Todo mundo do contradomínio vai ter elemento associado no domínio. Isso seria a sobrejeção.*

Henrique: *Sobrejeção? Espera, você começou falando da injeção. A injetora é o quê?*

E2: *A injeção! Injeção, se* x *diferente de* x'*, então a* f *de* x *é diferente de* f *de* x'*. Preciso lembrar, porque eu confundo pra caramba essas duas coisas, mas eu sei o que é. A injeção é dizer que todo elemento de* x *vai em um número diferente lá em* y*, certo? Por exemplo, se eu pegasse a função* x *ao quadrado, aí o* -1 *e* 1 *levam no mesmo número, aí já não seria injetiva. Tem que ser diferente, a cada elemento do domínio, tem que ter uma imagem diferente. Essa é a injetividade. E a sobrejetividade, todo elemento do contradomínio tem que ter um elemento associado lá no domínio, ou seja, ninguém pode ficar de fora na sobrejetividade. Aí, atendendo essas duas coisas, ela é bijetora.*

Podemos verificar que o estudante ainda não *encapsulou* o conceito de aplicação bijetora. Inferimos isso porque, primeiro, o próprio estudante diz que confunde injetora com sobrejetora, mostrando que não está claro em sua mente a definição de cada um. Segundo, porque o estudante necessita dar um exemplo de uma aplicação que não é injetora para explicar o conceito. Apesar da confusão em sua fala, o estudante nos mostra que tem uma *concepção processo* do conceito de aplicação bijetora, pois consegue, mesmo que por meio de exemplos, dizer o que significa.

Na sequência da entrevista, evidenciamos que o estudante tem dificuldades em reconhecer quando pode haver uma aplicação bijetora entre dois conjuntos. Quando estávamos no item c da questão 10, a qual pergunta *se os dois grupos não têm a mesma ordem, então eles não são isomorfos*, o estudante respondeu:

E2: *Então, só com aquilo... dois grupos de ordens diferentes, não sei se isso acontece, por exemplo, um com 10 elementos e outro com 12. De repente, encontra só seis que operados com ele dá o elemento neutro, e, de repente, que não sejam comutativos, neste caso eles seriam isomorfos, então. E são de ordens diferentes.*

Henrique: *Então você acha que dois grupos que não têm a mesma ordem podem ser isomorfos?*

E2: *Acho que sim. Pensando só naquilo que te falei, acho que sim. Vou colocar discordo* [da afirmação c].

Em questões anteriores a esta, havíamos discutido sobre isomorfismo de grupos. Nestas discussões mostramos ao estudante algumas formas de verificar se dois grupos são isomorfos, como, por exemplo, verificar se ambos são ou não abelianos, quantos elementos têm como simétrico ele mesmo etc. Assim, constatamos neste trecho que, para concluir o item c da questão 10, o estudante verificou apenas estas características, deixando de lado o fato de que não tem como uma aplicação de um conjunto com 10 elementos e outro com 12 elementos ser bijetora. Podemos tirar duas conclusões deste trecho: ou o estudante considerou apenas o homomorfismo para verificar se há um isomorfismo entre grupos de ordem diferente, excluindo a bijeção; ou ele não tem uma *concepção objeto* sobre aplicação bijetora, pois não sabe que não é possível haver uma bijeção entre dois grupos de ordem diferentes. Mas, após sua resposta, discutimos sobre a questão e o estudante demonstrou hesitação com relação ao conceito.

Henrique: *Se dois grupos não têm a mesma ordem, então eles não são isomorfos. Se eles não têm a mesma ordem, dá para fazer uma bijeção?*

E2: *Não, né? Dá sim, dá.*

Henrique: *Dá para fazer uma bijeção?*

E2: *Não, teria que ser um lá e um lá!*

A partir desta fala, concluímos que o erro do estudante foi causado, principalmente, por uma falha em sua concepção de bijeção.

3 Dificuldades ligadas a Grupo

3.1 Dificuldade com a definição de estruturas algébricas

Nenhum dos oito estudantes entrevistados deu uma resposta satisfatória quando perguntados sobre o que são estruturas algébricas. Podemos verificar isso nas seguintes trechos das conversas:

Henrique: *Sabe o que são estruturas algébricas? O que você entende por estruturas algébricas? [...]*

E1: *Seria um conjunto que possui umas propriedades em comum e... como no caso de grupos e anéis, com operações...*

Entendemos, por esta explicação, que o estudante desassocia conjunto e operação (ou operações). Parece entender que conjuntos possuem propriedades independentes da operação, o que é característico da etapa ação, segundo a APOS. Segundo Hazzan (1999, p. 75), estudantes têm tendências em reduzir o nível de abstração tratando novos objetos como se fossem objetos familiares. Neste caso, considerando apenas conjuntos.

Henrique: *O que você entende por estruturas algébricas?*

E2: *Estruturas algébricas? Olha, eu sei que é um tipo de grupo. [...] Acho que é um conjunto de alguma coisa que obedece algumas propriedades para ser aquele tipo de objeto.*

Henrique: *Aham.*

E2: *Só, em resumo é isso.*

Henrique: *e ter uma operação.*

E2: *uma operação que valha dentro desses conjuntos.*

Assim como E1, E2 vê uma estrutura algébrica como um conjunto que obedece algumas propriedades. Nessa fala fica claro que a operação é algo secundário, que não interfere nas propriedades da estrutura, o que indica uma *concepção ação*. Além disso, assim como a anterior, o estudante tenta explicar utilizando exemplo de uma estrutura algébrica conhecida: grupo.

3.2 Dificuldades com a definição de grupo (não relaciona os conceitos envolvidos na definição de grupo):

3.2.1 Não saber definir grupo de nenhuma forma

Nesta classe, consideramos aquele estudante que não soube dizer o que significa um grupo. Este é o caso do estudante E8. Vejamos:

Henrique: [...] *você sabe definir grupo?*
E8: *Definir?* [tempo] *Não lembro, não. A parte de definição vai ser difícil eu lembrar, porque foi muito vago.*

Antes de continuarmos, lembramos que as análises sobre as concepções (ação, processo, objeto) de cada estudante serão feita na seção seguinte. Porém, este trecho já nos permite perceber a falta de familiaridade do estudante E8 com o conceito de grupo, mostrando que, possivelmente, não tenha realizado *ações* mentais sobre este objeto e, por isso, não o tenha *interiorizado*, conforme define Dubinsky (2001).

Quanto à vagueza do conceito de grupo referida pelo estudante, podemos explicitá-la no seguinte trecho da conversa:

Henrique: *[...] com relação ao conteúdo, o que você gostava ou não gostava na disciplina de Álgebra?*
E8: *Eu gostava de módulos e congruência. Foi a parte que a gente mais viu, acho que dois bimestres, foi isso que atrasou a matéria pra caramba. Eu aprendi grupos, mas foi com outra professora, ela me ajudava antes de eu desistir.*

Henrique: *Ela te ajudou a dar sequência ao curso?*

E8: *Isso, mas eu acabei desistindo porque tinha muita aglomeração* [de matérias e provas]*, senão eu tinha continuado.*

Portanto, consideramos que um agravante à pouca noção do estudante quanto ao conceito se deve, em partes, ao enfoque dado pelo professor na disciplina, priorizando outros conteúdos. Sabemos que as causas das dificuldades na aprendizagem dos conceitos matemáticos são diversas. Neste trabalho, estamos interessados apenas nas dificuldades nos processos mentais de construção do conhecimento matemático, isto é, no indivíduo e seu desenvolvimento do pensamento matemático, não em fatores externos.

3.2.2 Entender grupo como um conjunto

Segundo Dubinsky *et al.* (1994), é possível que alguns estudantes em fases iniciais de aprendizagem do conceito de grupo o interpretem primeiramente como um conjunto. Este é o caso do estudante E7, que define grupo da seguinte forma:

Henrique: [...] *o que é grupo?*

E7: [...] *Bom, grupo é um conjunto fechado que tem elemento neutro para a soma, associatividade, comutatividade e elemento inverso.*

Henrique: *Tá, você falou que é da soma. É somente para a soma?*

E7: [...] *agora eu não me lembro.* [...] *mas eu confio em meu primeiro...sabe? Então, acho que é só para a soma.*

Está evidente a confusão do estudante quanto ao conceito. Compreendemos desta fala que o estudante considera grupo como um conjunto que contém o elemento neutro para a adição e que seja associativo e comutativo para uma operação qualquer, uma vez que não definiu uma operação para essas propriedades. Podemos supor, neste caso, que E7 esteja considerando a adição para as demais propriedades.

Então, a característica que predomina na definição do estudante E7 é o conjunto. Quanto ao elemento inverso, isto é, que todos seus elementos são simetrizáveis, constatamos no decorrer da conversa que o mesmo não sabe o que significa esta propriedade, conforme dificuldade 2.4.1 (DUBINSKY *et al.*, 1994, p. 82). Inferimos, então, que o estudante vê grupo como conjunto, independente da operação, manifestando uma *concepção ação* do conceito.

Consideramos também para tirarmos essa conclusão de que o estudante entende grupo como conjunto a fala “conjunto fechado”, a qual poderíamos supor que o estudante quis dizer “conjunto fechado para uma dada operação”, mas, ao deixar de mencionar operação, acreditamos que a ignora ou não a considera necessário para a noção de grupo.

Dois outros equívocos, estes mais evidentes, são com relação à noção de que o elemento neutro existe somente para a operação adição e não para uma operação qualquer, e a inclusão da propriedade comutativa nas propriedades que caracterizam um grupo.

3.2.3 Entender grupo como uma operação

Encontramos um estudante que tem uma concepção diferente dos demais. Para o estudante E3 um grupo é apenas a operação. Vejamos isso em dois momentos da conversa.

Henrique: *O que você gostou do curso? Você se lembra de algum assunto específico?*

E3: *Então, o que eu gostei mais foi você provar que uma operação é grupo ou não, aquelas tabelas lá, eu gostava bastante de provar.*

Na sequência da entrevista, ele demonstra novamente esta concepção equivocada do conceito de grupo:

Henrique: *Bom, então, o que é grupo? Você lembra? Eu vi que você lembra um pouquinho, mas você sabe definir grupo?*

E3: *Grupo é um conjunto que tem que ter a operação que satisfaça a associatividade, comutatividade, é...* [tempo]*, são quatro, né? Não, três. Associatividade, comutatividade e...*[tempo] *mais uma...pior é que eu estava explicando para a menina ontem. Distributividade?*

Henrique: *Não.*

E3: *Não...não é isso? Ah...deixa eu ver. Se* a *está relacionado com* b *e* b *está relacionado com* a *, é comutatividade, não é? É...*

Henrique: *Você disse que é um conjunto, né? Com uma operação?*

E3: *Grupo é uma operação, né?*

Temos aqui dois erros quanto ao conceito de grupo. Um com relação às propriedades que um conjunto munido de uma operação deve gozar e outro com relação à noção de grupo.

Assim sendo, entendemos a manifestação da *concepção ação*, no sentido da teoria APOS, com relação ao conceito, ao tentar associar grupo a um outro objeto matemático que lhe é familiar, a operação.

3.2.4 Entender grupo como sendo as propriedades que devem ser provadas

Analisando as falas dos estudantes, encontramos algumas que nos levaram a inferir que alguns estudantes têm a concepção de que um grupo significa gozar das propriedades associativa, existência do elemento neutro e que todo elemento do conjunto é simetrizável. Podemos perceber isto nas falas dos estudantes E2 e E4:

Henrique*:* [...] *você sabe me falar o que é grupo?*

E2*:* *o que é? Olha, lembro que tinha uma lei de composição. Mas você fala pela definição ou o que significa o...*

Henrique: *Isso, você sabe definir? A gente sabe que é uma estrutura algébrica.*

E2: *Tem que ser fechado em relação a uma operação. Aí eu sei que...*

Henrique: O *que significa ser fechado?*

E2: Q*ue se eu pegar dois números dentro daquele conjunto a operação entre eles tem que dar naquele conjunto. Teria que ter a associativa, elemento neutro e teria que ter inversa, para ser grupo.*

Henrique: *O que é inversa?*

E2*: Quer dizer que se eu pegar um elemento* x *e operar com o inverso dele tem que dar o elemento neutro. Eu acho que isso já define um grupo. Esta sequência.*

Henrique: *Você pode repetir para mim?*

E2: *Associatividade, elemento neutro e inverso. E a operação definida dentro deste conjunto.*

Neste diálogo com o estudante E2, podemos ver que ele se lembra e destaca principalmente as propriedades das quais um conjunto com uma operação devem gozar, o que nos leva a crer que, em seu entendimento, grupo é definido apenas pelas propriedades. Tiramos esta conclusão porque o estudante sequer mencionou que um grupo consiste de um conjunto e uma operação, ele disse apenas que se lembrava de uma lei de composição e que esta está definida dentro "daquele conjunto" – o qual ele não explicitou. Porém, não deixou claro se enxerga uma relação entre conjunto, operação e as propriedades, ou seja, ele não coordena estes três processos.

Destacamos também a propensão do estudante em considerar um conjunto numérico ao invés de um conjunto qualquer. Apesar de não explicitar conjunto em sua definição de grupo, E2 dá indícios de considerar apenas os conjuntos numéricos quando afirma "[...] dois números dentro daquele conjunto [...]"(E2).

Desse modo, identificamos aqui que o estudante não entende grupo como um objeto matemático, mas sim como propriedades a serem mostradas.

Outro estudante mostrou a mesma concepção equivocada. Vejamos a seguir o trecho da conversa com o estudante E4:

Henrique: *Você sabe definir um grupo? O que é um grupo?*

E4: *Grupo? Um grupo,* G *é um grupo se tem a associatividade, se tem elemento neutro, daí tem inverso. E depois se for abeliano, um grupo comutativo, vai ter a comutatividade.*

Henrique: *Tá, vamos com calma. A primeira é o quê?*

E4: A *primeira tem que valer a associatividade.*

Henrique: *Tá, mas para uma operação definida?*

E4: *É, para uma operação. O G "mais" é um grupo daí para uma operação de adição. Daí tem que ter o elemento neutro e tem que ter o elemento inverso e daí se esse grupo for abeliano, tem que ter a comutatividade.*

Podemos identificar neste trecho equívocos diferentes dos pretendidos para este item 3.2.4, que é explicitar as dificuldades relativas à definição de grupo. Quanto à definição, é evidente que a estudante considera as propriedades associativa, existência do elemento neutro e que todo elemento do conjunto é simetrizável suficientes para definir um grupo. Em sua definição, E4 deixa de mencionar que as propriedades são verificadas para uma operação associada a um conjunto. Isso fica claro em sua fala "O G 'mais' é um grupo daí para uma operação de adição", dando a entender que G é um grupo independente da operação. Se a operação for adição (ela chama de "mais"), dizemos, na visão da estudante, que G é um grupo para uma operação de adição, ou seja, a operação faz parte do estudo de grupo, mas não é essencial para definir um grupo. Além disso, em nenhum momento ela fala em conjunto.

No caso destes dois estudantes, E2 e E4, podemos dizer que ainda não interiorizaram o conceito de grupo, uma vez que ainda estão focados nas propriedades a serem provadas, nos algoritmos que lhes foram ensinados, sem coordenar conjuntos, operação e propriedades. Indicando estarem na chamada *concepção ação*, segundo a teoria APOS.

3.2.5 Entender grupo como um conjunto e uma operação

De acordo com Dubinsky *et al.* (1994), um estudante com uma concepção equivocada de grupo como um conjunto, pode começar a incluir a operação em suas determinações de grupo. Neste caso, o estudante pode considerar o conjunto como o aspecto predominante do grupo e a operação como secundária.

Sobre isso, encontramos um estudante que, possivelmente, esteja nesse processo de inclusão da operação em sua concepção de grupo. Vejamos o diálogo com o sujeito E5 seguido da análise.

Henrique: *Você sabe me dizer o que é grupo?*

E5: [tempo] *Grupo é... uma estrutura algébrica, no caso aí de uma operação, que satisfaz aquelas condições lá.*

Essa resposta é, praticamente, uma reprodução do que havíamos dito ao E5 no início da entrevista, quando falávamos sobre estruturas algébricas. Então, considerando esta resposta insuficiente e vaga, continuamos questionando e o estudante responde:

E5: *O elemento neutro tem que estar... tem um conjunto, né, na verdade, e a operação. Definido sobre essas... conjunto e operação. O elemento neutro, dado um elemento do conjunto.*

Henrique: *Não entendi. Não entendi o que você falou.*

E5: *Não, eu que não soube explicar mesmo. Dado um elemento, tem que ter o inverso no grupo, no conjunto, na verdade. Inverso à direita e à esquerda. O produto deles tem que estar.* [...] *Tem que ser fechado com relação à operação, né!*

Esse fragmento do diálogo nos permite perceber que o conceito de grupo não está bem definido para o estudante.

Quando E5 diz “O elemento neutro tem que estar...” e, em seguida, se lembra de que um grupo é um conjunto associado a uma operação, concluímos que entende o elemento neutro como uma coisa já definida que deve estar no conjunto, não que um elemento e pertencente ao conjunto seja tal que $a * e = e * a = a$, $\forall\, a \in G$. Isto é, o estudante não percebe o elemento neutro como um elemento pertencente ao conjunto que, para aquela operação específica, possui a propriedade de elemento neutro.

Portanto, entendemos que esse estudante compreende grupo como um conjunto e uma operação, mas que para esse conjunto e essa operação sejam um grupo, o conjunto deve conter o elemento neutro e cada elemento do conjunto deve ter seu simétrico no conjunto, ou seja, o conjunto é o aspecto predominante, enquanto a operação é secundária.

3.3 Dificuldades em trabalhar com a tábua de operação

3.3.1 Dificuldade em identificar um grupo pela tábua de operação

Identificamos dificuldades em verificar a validade das propriedades da operação associada a um conjunto. Uma constatação que fizemos foi com relação à maneira de identificar se um grupo é comutativo por meio da tábua de operação. Muitos estudantes se lembravam de verificar se a tábua é simétrica com relação à diagonal principal, mas apenas um estudante sabia o que isto significava.

A seguir, vamos expor a conversa com o estudante E2, que ilustra o que estamos dizendo. Ao tentar responder a questão seis da entrevista, em que o estudante deveria verificar se o conjunto A forma um grupo com relação à tábua de operações, E2 tenta lembrar o que significa dizer que "é simétrico com relação à diagonal":

E2: *É simétrico com relação a esse daqui.* (referindo-se à diagonal principal da tábua)

Henrique: *Com relação à diagonal? O que quer dizer ser simétrico com relação à diagonal?*

[...]

E2: *Acho que a diagonal dele indica se é associativa ou não, nesse caso.*

Henrique: V*ocê quer dizer se é simétrica em relação à diagonal?*

E2: *É, já diz sem precisar provar a associatividade dela?*

Após realizar cálculos mentais, E2 disse que valia a propriedade associativa. Como concluiu que valia a associativa e percebeu que a tábua era simétrica com relação à diagonal principal, tentou relacionar uma coisa com a outra, afirmando que ser simétrico com relação à diagonal principal significa que vale a propriedade associativa. Essa constatação mostra que o estudante não entendeu o que significa a tábua ser simétrica em relação à diagonal principal, ou ainda, não interiorizou este fato, apenas decorou.

Outros estudantes apresentaram problemas parecidos. O estudante E3 acredita que para mostrar que o conjunto $\mathbb{Z}_4$ com a operação adição é um grupo, basta verificar se a tábua é simétrica em relação à diagonal principal. Vejamos:

Henrique: *Para provar que é grupo precisa provar a associativa, né?*

E3: *Mas, uma pergunta. Se eu provar que ele é, através da diagonal, que ele é abeliano, eu já provo que ele é grupo. Pelo menos eu entendi isso, que eu sempre provava assim, entendeu? Tem um monte de exercício que a menina que estava fazendo, né, me pediu emprestado o material. Então se provar para a diagonal, se ele e a diagonal dele é simétrico ele é grupo.*

Verificar que uma operação é comutativa em um conjunto não significa que ambos, operação e conjunto, formam um grupo. Podemos interpretar a fala do estudante de duas formas. Primeira: ele pode não saber que um grupo abeliano é um grupo cuja operação é, também, comutativa e, assim, não saber que a comutatividade não é necessária para provar um grupo. Segunda: considerando que o estudante saiba o que significa grupo abeliano, ele, possivelmente, não se deu conta de que a comutatividade não é uma propriedade necessária nem suficiente para provar um grupo.

Assim como havíamos dito anteriormente, no item 2.3.2, o estudante E3 não refletiu sobre o conceito de grupo, mostrando indícios de estar na *concepção ação* de tal conceito. O mesmo podemos dizer do estudante E2.

3.3.2 Dificuldade em operar com os elementos da tábua

Essa dificuldade apareceu quando o estudante E5 tentava encontrar o elemento neutro pela tábua de operação do grupo $(A, *)$ da questão seis. Vejamos:

E5: [...] *Dado um elemento aqui, ele operado com quem dá ele mesmo? Deixa eu ver...* a *com quem deu o próprio* a*? O* b*. Agora,* b *com* a*, deu* a*.* a *com* c*, deu* c*.* c *com* c*, deu* a*.* a *com* b*, deu* b*,* b *com...tá certo isso?*

Henrique: *O que você está vendo?*

E5: O que eu estou vendo? O inverso. O inverso? O elemento neutro, na verdade, né. Desculpe, o elemento neutro. O a operado com algum cara aqui, deu ele mesmo. Agora o b operado com a, tem que dar o a também. Tá bonito, tá aqui! b operado com ...tá certo. No caso a vai ser inverso de b aqui.

E5: [...] c com b deu c, e b com c, o que deu? Deu c, está certo! Falta a com c. a com c deu b. b com c? Deu c. Se eu soubesse que seria assim, não teria vindo. [risos] Faz dois anos que não vejo este negócio.

Notamos, primeiramente, o embaraço com o elemento neutro e o elemento simétrico. O estudante está tentando encontrar o elemento neutro, mas se confunde dizendo que procura o inverso - que no caso é o elemento simétrico, pois não estamos tratando da operação específica multiplicação. Segundo Hazzan (1999), estudantes tendem a utilizar terminologias que lhes são familiares, para reduzir o nível de abstração.

Se olharmos a tabela, veremos que o elemento a operado com o c resulta no elemento b, e não no elemento c, como o estudante falou. Aqui está um equívoco ao operar os elementos da tábua. Outro pode ser observado quando, inicialmente, E5 percebe que a operado com b deu a, o que está correto. Porém, talvez por não entender, de fato, o que estava fazendo, opera novamente a com b, mas dessa vez resultou em b.

Na sequência, o estudante conclui que a é o inverso de b, o que também não é verdade. Mesmo porque o b é o elemento neutro do conjunto A para a operação $*$ dada. Percebemos que o estudante está confuso pelo fato de operar dois elementos e, logo em seguida, operá-los novamente, como foi o caso de operar b com c. Em meio a tanta dúvida e confusão, E5 afirma que se soubesse que a entrevista seria “assim”, não teria participado. Dando a entender que o conteúdo da entrevista, em particular a tábua de operação, não estava fácil.

O estudante, posteriormente, conseguiu operar os elementos, realizando as operações entre cada elemento no papel. Entendemos que a necessidade de detalhar para conseguir compreender seja uma característica da concepção operacional, de acordo com Sfard (1991). Com isso, dizemos que o E5 precisa realizar mais ações para interiorizar o mecanismo de operar utilizando a tábua de operação e, então, ampliar sua familiaridade com o conceito de grupo.

4 Dificuldades ligadas a Isomorfismo de grupos

4.1 Dificuldades com o conceito de isomorfismo:

4.1.1 Não saber a definição formal

A definição de isomorfismo de grupos apareceu como uma grande dificuldade para os estudantes. Alguns estudantes não chegaram a estudar isomorfismo de grupos, assim nem todos puderam responder as perguntas desse conceito. Daqueles estudantes que responderam, apenas um, o E1, soube dizer a definição formal de isomorfismo de grupos. Vale ressaltar que ele acabara de estudar tal conceito na disciplina de Álgebra para o Bacharelado quando da entrevista, enquanto que os demais que tiveram contato com isomorfismo de grupos haviam estudado em anos anteriores.

Quando questionado se saberia dizer se dois grupos são isomorfos, E2 respondeu da seguinte maneira:

E2: *Isomorfismo de grupo. Tá aí uma coisa que eu realmente não sei. Eles obedecem a mesma lei, sei lá. Cara, não lembro o que é isomorfismo mesmo.*

Em seguida, na tentativa de puxar pela memória o que havia escutado falar sobre isomorfismo, completou:

E2: *Espera aí! É como se um se comportasse como o outro, né? Por exemplo, eu sei de alguns exemplos. Por exemplo, que os número inteiros positivos se comportam como os naturais, são iguais...não, os naturais estão dentro dos inteiros positivos, eles são iguais a menos de um isomorfismo, certo? Então este grupo se comporta como outro. Agora, explicar isso...*

Henrique: *O que quer dizer se comportar como o outro?*

E2: *Ah, por exemplo, pega os números inteiros, aí pega só aquela parte positiva. Se eu fosse fazer operações com esses números, o resultado seria praticamente o mesmo que se eu operasse com os números naturais. A soma ou a multiplicação. Ia acontecer as mesmas coisas. Pode dizer que eles são, entre aspas,* *iguais. Seria esses o isomorfismo entre esses conjuntos. Tem o mesmo comportamento, agora explicar isso!*

Essa visão de que dois grupos são isomorfos quando eles se comportam da mesma maneira se encaixa no que Leron, Hazzan e Zazkis (1995, p. 154) caracterizam como visão ingênua de isomorfismo, o que pode significar o início da compreensão do conceito de isomorfismo.

Porém, é evidente que o estudante está reproduzindo a expressão *a menos de um isomorfismo*, sem dizer, de fato, o que é isomorfismo. Além disso, neste momento, evidencia equívocos quanto a noção de grupo ao dizer "Então este grupo se comporta como outro*"* (E2), uma vez que não mencionou dois grupos, mas sim dois conjuntos numéricos. Esses indícios nos indicam que o estudante esteja no início da construção deste conceito, em que mais *ações* devem ser realizadas sobre o conceito de isomorfismo de grupos.

4.1.2 Necessitar de uma aplicação para afirmar que dois grupos são isomorfos

Essa dificuldade surgiu com a questão 11. Dos seis estudantes que responderam às perguntas referentes ao conceito de isomorfismo de grupos, apenas um conseguiu dar corretamente a definição formal, o estudante E1. E foi esse que apresentou a dificuldade 4.1.2. Acompanhemos o diálogo referente à pergunta 11:

Henrique: [...] *e essa parte da afirmação: que depende da aplicação para falar se eles são isomorfos?*

E1: *Então, para mim, acho que isso de depender da aplicação seria mais para a operação de multiplicação. Se cair em algum radical ou alguma coisa assim. Agora, com a adição eu não tenho tanta certeza, assim.*

[...]

E1: *É, tudo depende da aplicação. Eu acho que, nesse caso* [dos grupos

$(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{Q}, +)$], *acho que não depende não.*

Henrique: *Não depende. E no caso da multiplicação, o que muda da adição?*

E1: *Ah, não sei. Talvez definir algum tipo não tão comum assim de aplicação.*

[...]

Henrique: *Então você acha que depende da aplicação, para dizer se eles são isomorfos ou não?*

E1: *Ah, não tenho tanta certeza não!* [Tempo] *Porque se for pra dar demonstração, né, que é bijetora...vai ter que considerar a aplicação, é aí o problema.* [Tempo] *Eu acho que não vai dar pra...*

Henrique: *Não dá para afirmar? Teria que ter uma aplicação para você saber? Teria que ter um exemplo de função aqui para você falar?*

E1: *É! Porque se considerar uma aplicação qualquer, fica meio complicado para demonstrar.*

As incertezas do estudante E1 nos chamaram a atenção, pois diferente dos demais estudantes, os quais a todo momento davam indícios de terem *concepção ação* do conceito de isomorfismo, E1 caminhava muito bem na entrevista, manifestando compreender, de fato, o conceito, isto é, que já teria *encapsulado* o objeto isomorfismo, no sentido da teoria APOS. Porém, esse trecho da conversa mostra que o conceito ainda não está tão claro para esse estudante, evidenciando que o mesmo possui uma *concepção processo* de isomorfismo de grupos.

Devemos notar que o E1 faz uma diferenciação entre isomorfismo de grupos multiplicativos e grupos aditivos. Para esse estudante, no caso de um grupo multiplicativo é possível que a aplicação procurada seja "não tão comum assim" (E1). Essas dúvidas do estudante vão ao encontro do que afirmam Leron, Hazzan e Zazkis (1995, p.156), quando consideram que alguns isomorfismos são não triviais, o que torna difícil dizer se dois grupos são isomorfos. Os autores citam o exemplo do grupo $(\mathbb{R},+)$ que é isomorfo ao grupo $(\mathbb{R}_+,\cdot)$ pela função exponencial, mas nada sugere claramente que eles sejam os *mesmos*. Sendo, então, uma tarefa difícil para um estudante determinar um isomorfismo não trivial, ou, nas palavras de E1, "não tão comum assim", porém necessária para encapsular *processo* em *objeto*.

Mostramos anteriormente que a dificuldade com o conceito de cardinalidade de um conjunto, enunciada como *1.4 Dificuldade com o conceito de cardinalidade e ordem de um conjunto*, fez com que o estudante E1 não chegasse a uma conclusão sobre os grupos $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{Q}, +)$ serem ou não isomorfos, pois não lembrava que o conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável.

4.2 Dificuldade em dizer quando dois grupos são isomorfos utilizando a tábua de operações

A questão nove da entrevista exigia do estudante verificar se, dadas as tábuas de operações de dois grupos, esses grupos são isomorfos. Dois estudantes apresentaram o mesmo problema: acreditar que as tábuas deveriam ser idênticas para que eles sejam isomorfos. Vejamos o diálogo:

Henrique: *Você sabe me dizer se estes grupos são isomorfos?*

E2: *Bom, a tabela deles poderia ser idêntica, né? Dar resultados idênticos para saber se são isomorfos ou não.*

E2: *Eles têm o mesmo número de elementos.*

Henrique: *O que isso te diz, ter o mesmo número de elementos?*

E2: *Ah, que gera tabelas correspondentes. Se fosse uma matriz seria seis por seis.*

[tempo]

E2: *Se fosse para se comportar igual, por exemplo, se eu fizesse o segundo elemento operado com o primeiro, tinha que dar o segundo elemento. Nesse daqui* [segunda tábua] *o segundo elemento operado com o primeiro, dá o primeiro elemento! O comportamento já é diferente.*

Henrique: *Tá, você julga o comportamento dos dois simplesmente pela ordem dos dois? Entende o que eu digo? Se o segundo operado com o primeiro dá o segundo, então...*

E2: *Ah, eu acho que tem mais lógica pensar assim.* [...]

Na sequência dessa conversa o estudante afirmou nunca ter analisado isomorfismo desta forma, pelas tábuas de operações. Apesar disso, verificamos falhas em sua noção de isomorfismo de grupos. Para ele, dois grupos são isomorfos se apresentam tábuas idênticas, por exemplo, se em uma tábua o elemento da segunda linha operado com o elemento da quarta coluna resultar no elemento neutro, na outra tábua o mesmo deve acontecer, senão elas não são idênticas, logo não são grupos isomorfos.

Esta maneira de entender a tábua de operações é um tanto simples, pois o estudante está preso à disposição dos elementos, deixando de pensar operação entre os elementos do conjunto. O que sinaliza uma *concepção ação* do conceito isomorfismo de grupos, uma vez que o estudante ainda não *interiorizou* as ações mentais sobre o mesmo.

Um equívoco grave, porém pouco explorado durante a entrevista, se mostra na fala: “Ah, que gera tabelas correspondentes*.* Se fosse uma matriz seria seis por seis” (E2)*.* Parece-nos que o estudante não compreende o significado da tábua de operações e não percebe que os elementos podem ser tanto números como matrizes, funções, polinômios. Nessa fala, temos a impressão de que, para o estudante, uma tábua de operação sobre um conjunto seria o mesmo que uma matriz, e que uma tábua sobre um conjunto com seis elementos seria correspondente a uma matriz $6x6$.

4.3 Dificuldade em dizer quando dois grupos não são isomorfos (achar que é suficiente mostrar uma função que não seja isomorfismo)

Outra confusão comum entre os estudantes é considerar suficiente apresentar uma aplicação que não seja um isomorfismo para dizer que dois grupos não são isomorfos. Mas, sabemos, conforme dissemos no capítulo anterior, que quando existe uma aplicação f que é um isomorfismo de um grupo G em outro grupo J, existirá também um isomorfismo de J em G que é a aplicação f^{-1}. Neste caso, podemos dizer que G e J são grupos isomorfos e representamos por $G \simeq J$. Isto significa que dois grupos são isomorfos se existir uma - e não todas - aplicação f que seja um isomorfismo, sendo assim, apresentar uma aplicação que não seja um isomorfismo não basta para concluir que dois grupos não são isomorfos.

Quando questionado sobre isso, o estudante E2 respondeu:

Henrique: E para dizer que dois grupos não são isomorfos?

E2: Eu poderia dar um contra-exemplo, sei lá! Por exemplo, os números inteiros não-nulos para a multiplicação, eu poderia dizer os racionais, os racionais tem lá sua propriedade, eu posso dividir 1 por 2, ou seja, multiplicar o 1 por meio, que é o inverso do dois, já nos inteiros eu não posso fazer isso, porque eu não defini esse tipo de operação.

Henrique: Então, por isso você mostra que não são isomorfos?

E2: Acho que sim, não sei!

Os equívocos apresentados pelo estudante vão além do fato de acreditar que o contra-exemplo é suficiente. Exibe também que não compreendeu o conceito de homomorfismo, uma vez que não entendeu o que significa dizer que a aplicação preserva as operações. Segundo Domingues e Iezzi (1982, p. 95), preservar as operações significa que quando se toma um par ordenado (x, y) qualquer em $G \times G$, "obtem-se o mesmo elemento de J quer se ache $f(x * y)$, quer se considere o par $(f(x), f(y)) \in J \times J$ e com ele se calcule $f(x) \Delta f(y)$".

O estudante E5 também apresentou essa dificuldade.

Henrique: [...] você saberia ver quando dois grupos não são isomorfos?

E5: Bom, geralmente a gente tenta achar um contra-exemplo, no geral.

Henrique: então um contra-exemplo já é suficiente para mostrar que dois grupos não são isomorfos?

E5: Aham.

O estudante E5 nos mostra que não sabe o que são grupos isomorfos. Em sua tentativa de explicação de que "geralmente a gente tenta dar um contra-exemplo" (E5), confirma a afirmação de Leron, Hazzan e Zazkis (1995, p. 155-156) de que os estudantes tendem a se esquivar do significado mais profundo de isomorfismo, encontrando maneiras mais fáceis de dizer que dois grupos não são isomorfos. Nestes casos ilustrados, apresentando um contra-exemplo.

4.4 Não entender a utilidade do conceito de isomorfismo de grupos em matemática

Muitos dos estudantes entrevistados não sabem bem o motivo de se estudar ou não veem utilidade do conceito de isomorfismo em Matemática. Alguns tentaram elaborar uma resposta no sentido de que o isomorfismo de grupos permite o trabalho com grupos mais fáceis de manipular, como foram os casos dos estudantes E1, E2 e E6.

Henrique: [...] *para que estudar o conceito de isomorfismo de grupos?*
E6: *Ah, comparar grupos, trabalhar com grupos mais fáceis, facilitar o trabalho, assim. Principalmente para quem vai pra Matemática pura.*

Outros, como os estudantes E3 e E7, nem arriscaram uma resposta, afirmando que não viam utilidade. O estudante E5 tentou dar alguma justificativa, mas não concluiu nada:

E5: *É muito usado, com certeza. Em toda a Matemática se trabalha com isomorfismo, né. Nas álgebras, né. Não é igual ao cálculo que se tem aplicação sempre, mas é uma ferramenta matemática muito forte mesmo. Usada dentro da matemática, né. Não tem aplicação, mas é muito forte dentro da matemática mesmo. É uma ferramenta matemática muito forte.*

Esperávamos que os estudantes entendessem isomorfismo de grupos como uma relação de equivalência, em que grupos isomorfos pertencem a uma mesma classe. Assim, é possível realizar ações com um grupo mais simples e estender a validade dessas ações a outros grupos isomorfos a esse. Os estudantes E1, E2 e E6 se aproximaram da resposta que esperávamos.

5 Dificuldades relatadas pelos próprios estudantes

No começo de cada entrevista, fizemos quatro perguntas que chamamos de *questões pessoais*. A questão três, especificamente, dizia: *Durante o* *curso de Álgebra, você se lembra de ter feito (visto) algo particularmente difícil? O quê? E o contrário, você se lembra de ter feito (visto) algo mais fácil? O quê?*

Então, os estudantes relataram quais foram, sob seu ponto de vista, as principais dificuldades encontradas no estudo da Álgebra. As respostas foram diversas e muito válidas. Vejamos algumas delas:

E1: *Nessa parte* [das estruturas algébricas] *foi o teorema do homomorfismo. Aquela parte eu acho mais complicada.*

Abordarmos o conceito de isomorfismo em nesta pesquisa, que é um caso específico de homomorfismo, mas não tratamos do teorema do homomorfismo[21].

E2: *Difícil é ter aquela sacada* [...] *Mostrar que é grupo ou não. Daí na hora que você vai fazer as operações, tem que ter meio que um* insight*, sabe? Ou você dá um contra-exemplo ou você consegue dar o passo inicial para fazer a demonstração. Depois que começou fica fácil, mas ter o* insight *eu acho complicado.*

Acreditamos que este *insight* referido pelo estudante E2 esteja diretamente ligado à relação que o indivíduo tem com a matemática, isto é, ter o *insight* ou saber como começar uma demonstração matemática é consequência do desenvolvimento de estruturas cognitivas produzidas por um grande leque de atividades matemáticas realizadas pelo indivíduo, o que, para Tall (1995), caracteriza o PMA.

No caso específico do conceito grupo, pensamos que esse *insight* ocorra quando se tem bem construídos os esquemas necessários (conjunto, operação e axiomas) para *encapsular* o objeto grupo, pois serão esses esquemas que, coordenados, sustentarão o raciocínio ao lidar com um novo objeto ou um objeto ainda não familiar.

Outras dificuldades, com relação à Álgebra em geral, foram reveladas, como:

---

[21] Para maiores detalhes sobre esse teorema, ver Domingues e Iezzi (2003, p. 196-198).

- o estudo de máximo divisor comum (mdc) e mínimo múltiplo comum (mmc), segundo os estudantes E4 e E6;

- a estrutura de anéis, por possuir muitas definições e muita abstração, de acordo com os estudantes E5 e E7;

- a própria natureza da Álgebra, que envolve muitos conceitos, e “uma coisa vai dependendo da outra” (E3), conforme afirma E3;

- muita abstração, de acordo com E1 e E5

Síntese da seção

Apresentamos agora um resumo da seção anterior, na qual apresentamos a lista de dificuldades identificadas durante as análises das entrevistas com os estudantes, e mostramos, para cada dificuldade citada, pelo menos um trecho de diálogos que a representava.

Listamos, de forma específica, vinte e nove dificuldades apresentadas por ao menos um estudante. Dessas vinte e nove, consideramos que dezesseis delas – aquelas ligadas a conjuntos e ligadas a função – estão relacionadas a conceitos anteriores, porém necessários para a construção dos conceitos de grupo e de isomorfismo de grupos. As treze dificuldades restantes são precisamente sobre grupo – oito delas – e isomorfismo de grupos – cinco delas.

Abaixo, temos o quadro síntese das dificuldades com os estudantes que as evidenciaram:

Quadro 3 – Síntese das dificuldades dos estudantes

Dificuldades	**Subclasse 1**	**Subclasse 2**	**Estudantes**
1. Ligadas a Conjuntos	1.1		E3
	1.2		E2, E3, E4, E7, E8
	1.3		E6, E7, E8
	1.4		E1, E3
2. Ligadas a Função	2.1		E6
	2.2		E4
	2.3		E6, E7
	2.4	2.4.1	E7, E8
		2.4.2	E2, E3, E4, E6
		2.4.3	E2, E3, E4, E7
		2.4.4	E1, E3, E5, E7
		2.4.5	E2, E8
		2.4.6	E4
		2.4.7	E4
	2.5	2.5.1	E3, E7
		2.5.2	E2
3. Ligadas a Grupo	3.1		E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7 e E8
	3.2	3.2.1	E8
		3.2.2	E7
		3.2.3	E3
		3.2.4	E2, E4, E6
		3.2.5	E5
	3.3	3.3.1	E2, E3, E8
		3.3.2	E5
4. Ligadas a Isomorfismo de grupos	4.1	4.1.1	E2, E3, E5, E6, E7
		4.1.2	E1
	4.2		E2
	4.3		E2, E5
	4.4		E3, E5, E7

Percebemos que todos os estudantes apresentaram pelo menos uma dificuldade ligada aos conceitos prévios conjunto e função, o que refletiu nos conceitos de grupo e de isomorfismo de grupos.

De uma análise geral, afirmamos que os estudantes, com exceção do E1, não se desprenderam do padrão de imitar soluções que estavam acostumados na matemática elementar, revelando que ainda não construíram estratégias mentais que os aproximariam do novo estatuto cognitivo dos objetos matemáticos da matemática avançada, que se baseia em entidades abstratas que o indivíduo deve construir por meio de deduções das definições formais, segundo Tall (2002).

Um exemplo que torna muito claro o que acabamos de afirmar apareceu quando perguntamos aos estudantes o que eles mais gostaram ou menos gostaram do curso de Álgebra. Dos oito entrevistados, seis afirmaram que gostaram de grupo, e as justificativas eram do tipo:

E3: *O que eu gostei mais foi de provar que uma operação é grupo ou não, aquelas tabelas lá eu gostava bastante de provar.*

E4: *Eu gostei da parte de grupos, acho que a parte de grupo e subgrupo é a mais legal. É que na realidade tudo segue o mesmo padrão, entendeu?*

E5: *Acho que foi grupos. Foi bem legal. Prova de grupos assim era legal.*

Isso significa, em nossa visão, que para esses estudantes o estudo de grupos é “legal” porque se resume, para eles, em mostrar as propriedades, isto é, significa reproduzir o passo-a-passo que lhe foi ensinado, seguindo sempre o “mesmo padrão” (E4). Essa maneira de compreender o conceito caracteriza a *concepção ação*, pois o estudante tenta, sem realizar reflexões, provar as propriedades para verificar se um conjunto com uma dada operação é um grupo, mas sem entendê-lo como um objeto matemático construído a partir da definição formal. Fornecendo sinais de que esses estudantes permanecem ainda com um pensamento matemático elementar.

Essas análises confirmam a teoria de Tall (2002) sobre a difícil transição do PME para o PMA. Para esse autor, essa é a transição da *descrição* para a *definição* do objeto, do *convencer* ao *provar* de uma maneira lógica com base nessas definições, e essa transição pode gerar dificuldades em estudantes iniciantes na matemática avançada, podendo, inclusive, nem acontecer, isto é, o estudante pode continuar tratando objetos matemáticos abstratos de uma maneira elementar.

A seguir, faremos uma análise geral das entrevistas e dos protocolos de cada estudante, pois achamos necessário mostrar o que as dificuldades apresentadas por cada um nos apontam a respeito das suas concepções (ação, processo, objeto) com relação aos conceitos de grupo e de isomorfismo de grupos.

5.2 Concepções (Ação, Processo, Objeto) dos Estudantes

A partir das transcrições das entrevistas e dos protocolos dos estudantes, revelamos as concepções (ação, processo, objeto) de cada estudante com relação aos conceitos pretendidos, decorrentes das dificuldades apresentadas e levando em consideração, também, acertos e respostas coerentes.

Fizemos um breve perfil de cada estudante, ressaltando algumas informações que consideramos relevantes para a caracterização dessas concepções (ação, processo, objeto).

Estudante E1

O estudante E1 cursa o bacharelado e, concomitantemente, a licenciatura em Matemática. Na época da entrevista, estava no final de seu segundo ano da graduação e cursava a disciplina Álgebra, o que, possivelmente, colaborou em seu desempenho na entrevista. Segundo ele, suas notas na disciplina estavam boas.

Esse estudante apresentou quatro das dificuldades que listamos. Apesar disso, mostrou, em diversos momentos, compreender os conceitos de grupo e de isomorfismo de grupos, pois: apresentou corretamente a definição formal tanto do conceito de grupo como de isomorfismo de grupos; conseguiu trabalhar com a tábua de operações; soube provar a unicidade do elemento neutro; soube identificar grupos representados pelas tábuas de ordem seis da questão nove; demonstrou conhecer algumas maneiras de identificar grupos pela tábua de operação, como não ter elementos repetidos nas linhas e colunas, e reconhecer um grupo comutativo verificando a simetria dos elementos em relação à diagonal principal; entre outras evidências.

Com relação ao conceito de grupo, entendemos que o estudante E1 possui uma *concepção objeto*, no sentido da teoria APOS, pois compreende grupo como um conjunto com uma operação binária que goza das propriedades, isto é, compreende grupo como um objeto matemático estático, que possui características próprias, além de conhecer exemplos de grupos. Na entrevista não abarcamos muitos exemplos, mas E1 mostrou conhecer, além dos grupos aditivos de classes de restos e dos grupos lineares de grau *n* cobrados na questão cinco, outros, como o grupo das permutações.

Na questão cinco, E1 nos mostrou fortes evidências de sua *concepção objeto* de grupo. Quando perguntado sobre $(\mathbb{Z}_4, +)$ ser ou não um grupo, o estudante não hesitou em garantir que é grupo, sem precisar realizar passos mais detalhados para confirmar, indicando familiaridade com o exemplo. Com relação ao outro suposto grupo, o $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \cdot)$, a resposta não foi imediata, mas ainda sem realizar passos detalhados, conseguiu concluir que um elemento de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \cdot)$ só seria simetrizável em relação à multiplicação se seu determinante fosse diferente de zero. Concluindo que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \cdot)$ é um grupo "só se o determinante [da matriz] for diferente de zero" (E1).

Quanto ao conceito de isomorfismo de grupos, consideramos que o estudante esteja no *processo* da construção do conceito, no sentido da teoria APOS. Enunciou a definição formal de isomorfismo de grupos, soube dizer que os grupos dados por suas tábuas na questão nove são isomorfos. Porém, apesar de perceber que não basta dar um exemplo de uma aplicação que não seja isomorfismo entre dois grupos para afirmar que eles não são isomorfos, hesitou ao responder a questão 11, caracterizando a dificuldade 4.1.2 listada anteriormente. Essas incertezas apresentadas pelo estudante nos fizeram acreditar que o objeto isomorfismo de grupos ainda não está bem definido em sua mente e, por isso, entendemos que esteja em uma *concepção processo*, segundo a APOS, pois realiza ações conscientes sobre o objeto matemático, porém ainda não encapsulou esse *processo* em *objeto.*

Estudante E2

Estudante da licenciatura em Matemática, E2 concluiu o curso Álgebra há pouco menos de um ano antes da entrevista. Foi aprovado logo na primeira vez que fez o curso, porém fez "quase todas as provas que tinha direito" (E2), isto é, precisou realizar o exame. Na época da entrevista, esse estudante estava no final de seu terceiro ano da graduação.

Durante vários momentos da entrevista, E2 apresentou indícios de que ainda lida com os objetos matemáticos abstratos de maneira elementar.

Dizemos isso não apenas pelo número de dificuldades que apresentou, foram dez, mas sim pela forma como elas apareceram. O estudante visivelmente buscava lembranças que estavam desconexas em sua memória para tentar responder às questões. Por exemplo, quando questionado sobre $(\mathbb{Z}_4, +)$ ser grupo ou não, sua primeira resposta foi: "Aí a questão da inversa. A inversa já é mais complicado, tem que ver se é primo ou não. É que se esse número é primo, então já é grupo. Por exemplo, se fosse $\mathbb{Z}_7$, eu acho que já garantia a inversa dele" (E2). O estudante faz confusão com o *grupo multiplicativo das classes de resto módulo* m, em que m é primo. Ao invés de refletir sobre o grupo pedido, E1 resgata alguma lembrança de que m deveria ser primo, o que não é necessário para o *grupo aditivo das classes de restos módulo* m.

Podemos citar outro exemplo. Quando o estudante trabalhava com a tábua de operações, disse: "Acho que a tábua de operações indica se é associativa ou não, nesse caso" (E2). O estudante se recordava que a simetria em relação à diagonal principal indica alguma propriedade, mas não sabia qual. Em um primeiro momento, E2 afirmou que verificar essa simetria seria suficiente para garantir que a tábua definiria uma estrutura de grupo. Em seguida, disse que asseguraria a propriedade associativa, tentando, de alguma forma, encontrar a utilidade de ser simétrico em relação à diagonal principal.

Esses e outros indícios nos permitiram afirmar que E2 possui uma *concepção ação*, de acordo com a APOS, com relação ao conceito de grupo. Isso significa que o estudante ainda não *interiorizou* o conceito, pois ainda não refletiu sobre o mesmo, isto é, suas *ações* sobre o objeto matemático ainda são de forma mecânica.

Com relação ao conceito de isomorfismo de grupos, a mesma análise pode ser feita. O estudante expôs falas decoradas, que não tinham significado naquele momento. Foi o caso da já citada fala quando perguntado sobre isomorfismo de grupos:

> Espera aí, é como se um se comportasse como o outro, né? Por exemplo, eu sei de alguns exemplos. Por exemplo, que os números inteiros positivos se comportam com os naturais, são iguais...não, os naturais estão dentro dos inteiros positivos, eles são iguais a menos de um isomorfismo, certo? Então este grupo se comporta como outro. Agora, explicar isso... (E2)

O estudante responde à pergunta com uma fala que certamente escutou de algum professor ou leu em algum livro, mas que não sabe exatamente o que significa, apenas reproduziu o que tinha memorizado. Por isso, consideramos que esse estudante tenha uma *concepção ação* de isomorfismo de grupos.

Essas evidências nos levam a crer que o estudante E2 ainda está encarando os objetos matemáticos de uma maneira elementar, sem refletir sobre esses novos objetos, apenas decorando-os e reproduzindo-os, sem compreendê-los de fato.

Estudante E3

O estudante E3 ingressou em 2007 no curso de licenciatura em Matemática. Ficou retido no segundo ano do curso “[...] por culpa da Álgebra” (E3). De acordo com o estudante, o que achou mais difícil em seu primeiro curso de Álgebra foi o professor. Com relação ao que mais gostava em Álgebra, E3 afirmou que era “[...] provar que uma operação é um grupo ou não e aquelas tabelas lá [...]”, manifestando uma noção equivocada de grupo, considerando grupo como uma operação. Cursou a disciplina pela segunda vez em 2009, um ano antes da entrevista que realizamos.

E3 manifestou doze das dificuldades que listamos, sendo três relacionadas a conjuntos, quatro relacionadas a função, três relacionadas a grupo e duas relacionadas a isomorfismo de grupos.

Esse estudante, como já foi ressaltado, apresentou uma concepção equivocada do conceito de grupo, explicitando uma tentativa de construir o conceito matemático grupo relacionando-o com um conceito familiar – operação. Além disso, mostrou desconhecer o conjunto $\mathbb{Z}_m$ de classes de restos e não saber lidar com o conjunto das matrizes de ordem dois, conjuntos que munidos da operação adição, por exemplo, são exemplos de grupos estudados no curso de Álgebra. Apresentou também confusão com as propriedades das operações, como, por exemplo, enunciar a propriedade transitiva quando perguntado sobre a propriedade associativa.

Dessas dificuldades manifestadas, entendemos que esse estudante esteja em uma primeira fase do entendimento de grupo, em que ainda não o entende como um novo objeto matemático, mas sim como uma operação (objeto matemático familiar) que pode ser um grupo ou não. Essa é uma característica da *concepção ação*, a qual o estudante permanece com um entendimento elementar de grupo, sem prosseguir nas etapas da construção conhecimento (no sentido da teoria APOS).

Como relação ao conceito de isomorfismo de grupos, as dificuldades foram maiores. O estudante não se recordava da definição formal, nem da noção ingênua de isomorfismo de grupos. Por isso, não encontramos indícios suficientes que nos permitissem afirmar qual etapa da construção desse conhecimento o estudante esteja.

Na tentativa de dar sequência à entrevista, mesmo sabendo que o estudante não se lembrava de isomorfismo de grupos, fizemos novas perguntas e comentários envolvendo esse conceito, buscando aguçar a memória do estudante. Percebemos, então, que sua concepção de função bijetora estava equivocada, confundindo com função composta: “A f aplicada na $f\big(g(x)\big)$ tem que ser igual a...Não lembro. Matéria do primeiro ano eu não lembro não. Sei que é em relação à função, uma tem que ser aplicada na outra [...]” (E3).

Esse estudante, ao final da entrevista, relatou que apesar de achar interessante, não vê utilidade em alguns conceitos, como o de função bijetora, e demonstrações matemáticas, uma vez que seu objetivo é “[...] fazer uma pós para trabalhar com pessoas especiais” (E3).

Estudante E4

E4 é estudante de licenciatura em Matemática. Na época da entrevista, E4 cursava a disciplina de Álgebra. Segundo ele, naquele momento, o professor da disciplina já havia encerrado os conteúdos, faltava apenas realizar a prova final. O conceito de isomorfismo de grupos não foi tratado durante a disciplina, por isso a entrevista com esse estudante ficou restrita à parte de grupo.

Dos conteúdos estudados, E4 relata que o que mais gostou foi estudar grupo e subgrupo, pois “[...] tudo segue o mesmo padrão” (E4). Apesar de gostar, o estudante não soube definir grupo, já que, segundo ele, no curso “não estuda muito o que é anel, o que é...A gente estuda mesmo para provar, para usar a fórmula" (E4). Isto é, para esse estudante, o estudo das estruturas algébricas significa seguir um algoritmo para provar um grupo ou anel, porém, sem entender grupo e anel com objetos matemáticos. Isso fica evidente quando o estudante afirma que era "fácil, porque tudo segue o mesmo padrão, para provar um anel, segue um algoritmo para você fazer. Grupo também" (E4).

Outro destaque feito pelo estudante, que vai ao encontro das dificuldades que listamos nessa pesquisa, é a dificuldade com os conhecimentos prévios no estudo de grupo. De acordo com o estudante

> [...] difícil era interpretar antes de começar a fazer, sabe? Onde que eu estou? Que conjunto eu estou? Como define aquele conjunto? Como escrevo? Para mim isto é difícil. Antes de começar. Porque depois que eu sei como é o conjunto, depois que define como ele fica, daí eu consigo. (E4)

O que o estudante dá a entender é que conhecendo o conjunto e a operação, provar que é grupo é fácil, pois basta seguir o algoritmo. Isso mostra que o estudante ainda possui uma *concepção ação* do conceito matemático, provando as propriedades para verificar se um conjunto munido de uma operação é um grupo, mas sem entendê-lo como um objeto matemático originário da coordenação dos esquemas: conjunto, função e axioma.

Das dificuldades que listamos, o estudante E4 apresentou sete delas, lembrando que não realizamos a parte da entrevista sobre isomorfismo de grupos. Algumas delas mostram que esse estudante reproduz a maneira que o professor ensinou, sem realizar reflexões mais profundas. Por exemplo, o costume de chamar os elementos de conjuntos de α, β, γ. Quando tratamos do conjunto $\mathbb{Z}_4$, ao tentar mostrar as propriedades, o estudante automaticamente fez $\alpha = \bar{a},\ \beta = \bar{b}$ e $\gamma = \bar{c}$. O mesmo ocorreu quando trabalhamos com o conjunto $\mathcal{M}_{2x2}$. O estudante fez $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b & d \\ e & f \end{pmatrix}$ e $\gamma = \begin{pmatrix} a & c \\ f & e \end{pmatrix}$. Quando perguntado sobre o motivo de sempre chamar os elementos de um conjunto de α, β, γ, o estudante respondeu: "Ah, não sei. É mais... O professor faz assim. Acho que não precisa fazer isso" (E4).

Outro exemplo foi quando perguntamos sobre o que significa a barra sobre os elementos do conjunto $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. O estudante respondeu “Porque quando a gente está falando de $\mathbb{Z}$ alguma coisa, a gente coloca barra. Ah, eu não sei, mas eu sei que precisa colocar” (E4). Percebemos que o estudante realiza ações com o conjunto $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ sem se questionar sobre a natureza dos elementos desse conjunto, mostrando não conhecer o conceito de classe de equivalência e de conjunto-quociente.

O estudante mostrou, também, dificuldade em generalizar uma matriz $2x2$, utilizando o exemplo específico como a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ para mostrar que a multiplicação entre matrizes não é comutativa, com a justificativa de que “é menos complicado fazer para uma” (E4). Além disso, cometeu um erro grave ao considerar que qualquer matriz $2x2$ terá inversa.

Por essas dificuldades apresentadas pelo estudante relacionadas a conjuntos e a função e, principalmente, a concepção equivocada de grupo, entendemos que o estudante esteja na primeira etapa da construção do conceito de grupo, evidenciando uma *concepção ação*, segundo a APOS.

Estudante E5

Esse estudante cursa licenciatura e bacharelado em Matemática. Ingressou no curso em 2008 e cursou Álgebra em 2009, ano anterior à realização da entrevista.

E5 afirmou que a parte do curso de Álgebra que mais gostou de estudar foi congruência módulo m. Com relação ao que menos gostou, afirmou ser o estudo de grupos e, menos ainda, anéis, pois tem “muita definição na parte de anéis” (E5). Quanto às dificuldades, esse estudante disse que, mais do que a disciplina de Análise, a disciplina de Álgebra é muito abstrata, o que a torna pouco atraente. Além disso, as demonstrações dos teoremas são também muito difíceis para ele. Porém, “demonstrar que é grupo, essas coisas, beleza!” (E5).

Ainda com relação às disciplinas, E5 relata que as disciplinas mais difíceis no curso de Matemática, até o momento do final do seu terceiro ano, são

Álgebra e Corpos e Extensões – sendo esta uma disciplina para o bacharelado, que o estudante cursava na época da entrevista.

Com relação ao conceito de grupo, E5 não soube definir corretamente, manifestando a dificuldade *3.2.5 Entender grupo como um conjunto e uma operação.* Apesar disso, o estudante enunciou os axiomas corretamente, mostrou conhecer as definições de elemento neutro e de elemento simetrizável, soube trabalhar com os conjuntos $\mathbb{Z}_4$ e $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mostrou que para $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ ser um grupo, devemos considerar apenas as matrizes inversíveis, isto é, o conjunto $GL_2(\mathbb{R})$.

Então, considerando que esse estudante apresentou, além de uma concepção equivocada de grupo como um conjunto e uma operação, a dificuldade *2.3.4 confusão entre as propriedades* e a necessidade de se remeter a casos particulares quando deveria considerar um caso genérico – como, por exemplo, quando tentava provar a unicidade do elemento neutro, E5 disse: “Fala aí um grupo pra mim [...]”, quando deveria considerar um grupo qualquer –, entendemos que este estudante esteja no *processo* da construção do conceito de grupo e, talvez, na eminência de encapsular esse *processo* em *objeto*, necessitando trabalhar com conjuntos e operações diferentes dos usuais para que, a partir dos *processos* já existentes, possa construir novos *processos* e, assim, encapsular em um *objeto*. Por isso, entendemos que esteja em uma *concepção processo* desse conceito matemático.

No que se refere ao conceito de isomorfismo de grupos, E5 não se recordava da definição, nem mesmo da noção ingênua. Mas, com o decorrer da entrevista, o estudante foi se lembrando de que se tratava de um homomorfismo bijetor. O conceito de homomorfismo de grupos estava ainda um pouco confuso para ele, pois considerava que as operações dos grupos deveriam ser as mesmas, isto é, $f(a * b) = f(a) * f(b)$. Com relação ao conceito de função bijetora, E5 soube definir corretamente, mas se equivocou ao considerar a possibilidade de haver uma bijeção entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Então, o estudante E5 apresentou dificuldades em ambos os conceitos necessários para o entendimento de isomorfismo de grupos – homomorfismo de grupos e função bijetora – além de não se lembrar da própria noção de isomorfismo. Por isso, consideramos que este estudante ainda não interiorizou o conceito e, portanto, tenha uma *concepção ação* de isomorfismo de grupos.

Estudante E6

Estudante de licenciatura em Matemática. Iniciou o curso em 2005 e, segundo ele, o motivo de estar há tantos anos fazendo o curso (seis anos até o dia que realizamos a entrevista) foram as várias reprovas, algumas por culpa dele, outras por culpa do professor. E6 fez a disciplina de Álgebra em 2008, o que certamente influenciou em sua entrevista, pois, conforme afirma, não voltou a estudar os conceitos da Álgebra após o curso, o que pode causar esquecimento das definições.

Porém, nesta análise, estamos interessados não apenas na enunciação da definição dos conceitos, mas também na forma como os estudantes compreendem os conceitos abstratos de grupo e de isomorfismo de grupos, uma vez que esses são conceitos construídos de definições formais, de acordo com Tall (1995). Por isso, mesmo que o estudante não se recordasse das definições de grupo e de isomorfismo de grupos, conduzíamos a entrevista promovendo discussões até que as definições se tornassem claras para que, a partir de então, esse estudante manifestasse sua concepção (ação, processo, objeto) desses objetos da matemática avançada. Foi assim que procedemos com o estudante E6.

Segundo esse estudante, no curso de Álgebra o estudo de "grupos foi bem legal. Prova de grupos era legal. [...] A parte de organizar o raciocínio, falar: isso é grupo por causa disso, disso e disso" (E6). Mesmo não sabendo a definição de grupo, o estudante E6 tem uma ideia de que grupo é provar as propriedades. Isso fica evidente em sua resposta quando foi perguntado sobre o que é grupo: "Não lembro, eu lembro que tinha que provar 3 coisas"(E6).

Podemos afirmar que esse estudante não entende grupo como um objeto matemático definido, com características próprias e com propriedades construídas a partir dessa definição.

Com relação aos conhecimentos prévios necessários para a construção do conceito grupo, E6 também apresentou dificuldades. Não se lembrava dos símbolos $\mathbb{Z}_4$ e $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, não soube mostrar a associativa tanto em $(\mathbb{Z}_4, +)$ como em $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \cdot)$, além de quase sempre utilizar a operação adição ao invés de uma operação genérica.

Assim, pelas dificuldades relatadas acima e pela concepção equivocada de grupo, entendemos que o estudante possui uma *concepção ação* do conceito de grupo.

O estudante não se lembrava do conceito de isomorfismo de grupos. Mesmo com a discussão durante a entrevista, na qual falamos sobre homomorfismo e função bijetora, não percebemos nenhuma familiaridade do estudante com o conceito de isomorfismo de grupos. Além disso, E6 manifestou dificuldades com relação ao conceito de função, função bijetora e conjunto enumerável. Como já mostramos anteriormente, o estudante se equivocou ao tentar definir função e afirmou que só sabe mostrar o que é função injetora por gráfico, mas não sabe definir. Disse também que o conjunto dos números reais é um conjunto enumerável e que não sabia se o conjunto dos números racionais era enumerável ou não.

Por esses motivos, pensamos que não será possível dizer qual a concepção (ação, processo, objeto) deste estudante com relação ao conceito de isomorfismo de grupos.

Estudante E7

Estudante do terceiro ano da licenciatura em Matemática, E7 cursou Álgebra no ano anterior à entrevista. Foi aprovado na primeira vez que fez a disciplina, apesar de não ter gostado de Álgebra. Sua justificativa foi clara:

> [...] eu faço Matemática porque quero dar aula em escola, então não me sentia muito motivada a estudar aquilo [Álgebra], porque eu acho que nunca vou usar. [...] Eu não me esforcei para aprender, porque não me sentia muito motivada, porque pra mim não fazia muito sentido. [...] eu estudei para passar de ano, não para aprender, porque não me vejo nesse contexto, sabe? (E7)

O discurso desse estudante merece uma reflexão mais profunda sobre o ensino de Álgebra em cursos de licenciatura. Quando um estudante passa todo o curso de Álgebra desmotivado, sem entender a razão de estudar os conteúdos algébricos e, ainda, afirma que não estudou para aprender, mas sim para passar, significa que as contribuições pretendidas pela disciplina de Álgebra à formação desse estudante, possivelmente, não foram alcançadas.

A falta de sentido a que o estudante se refere quanto ao curso de Álgebra pode ser causada, por um lado, pela própria disciplina, que não se mostrou necessária para aquele estudante em formação, não apresentou conexão entre o que o curso iria contribuir para sua formação e o que isso o beneficiaria enquanto futuro professor de Matemática e, por outro lado, por culpa do estudante, que, como afirmou, não se esforçou para aprender, isto é, não se empenhou em estudar algo que poderia ser enriquecedor para sua formação de professor da Educação Básica.

Com relação aos conceitos algébricos, E7 apresentou dez das dificuldades que listamos. Algumas dessas dificuldades estão ligadas à generalização, à simbologia, ao trabalho com conjuntos outros que não apenas os conjuntos numéricos. Por exemplo, o estudante definiu estruturas algébricas como um "conjunto dentro dos numéricos que segue algumas propriedades" (E7). E definiu grupo como um "conjunto fechado que tem elemento neutro para a soma, associatividade, comutatividade e elemento inverso" (E7). As duas definições mostram que o estudante está um pouco preso aos conjuntos numéricos e às operações mais comuns, como adição e multiplicação.

Outro exemplo dessa limitação às operações familiares pode ser visto quando perguntamos se o elemento de um grupo é único. A resposta foi:

E7: *É. É único com a operação dele. Quando é soma, é o zero. Quando é multiplicação, é o 1.*

O estudante apresentou também a dificuldade *1.3 Reconhecer os símbolos que representam determinado conjunto*, pois não soube dizer qual era o conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Portanto, a noção equivocada de grupo como um conjunto, a limitação aos conjuntos numéricos e operações mais comuns, a dificuldade em reconhecer e lidar com o conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, a dificuldade em lidar com o conjunto $\mathbb{Z}_4$, nos levam a dizer que o estudante E7 possui uma *concepção ação* do conceito de grupo.

Com o conceito de isomorfismo de grupos, ocorreu o mesmo que com os estudantes E3 e E6. Não encontramos subsídios necessários para conseguirmos identificar qual a concepção (ação, processo, objeto) do estudante diante desse conceito. Porém, assim como com outros dois estudantes, conseguimos identificar dificuldades no conceito de função bijetora, essencial para a compreensão de isomorfismo de grupos.

Henrique: *O que é função injetora?*

E7: *Para cada* x_1 *e* x_2, $f(x_1)$ *é diferente de* $f(x_2)$. *Então, para cada valor do domínio, existe um valor do contradomínio único. E sobrejetora, para cada valor do contradomínio, vai existir um valor correspondente a ele no domínio.*

A forma como o estudante definiu função injetora pode gerar certa confusão, pois não menciona nada a respeito de x_1 *e* x_2, isto é, se são iguais ou diferentes. Além disso, na definição de função sobrejetora, o estudante esquece que todo elemento do contradomínio é imagem de *pelo menos* um elemento do domínio.

Estudante E8

Estudante de licenciatura em Matemática, E8 cursava a disciplina de Álgebra no ano da entrevista, porém parou o curso, pois "estava com muitas disciplinas, estudando para várias disciplinas e fazendo muitas provas" (E8). Não estudou isomorfismo de grupos, mas estudou grupos e corpos antes de interromper o curso.

Sobre o conceito de grupo, o estudante não soube dar a definição, não reconheceu o conjunto $\mathbb{Z}_4$ - apesar de relatar que o que gostou e achou fácil no curso de Álgebra foi a parte de congruência módulo m –, não soube dizer o que é cada uma das propriedades que uma operação sobre um conjunto deve gozar para ser um grupo.

As respostas dadas pelo estudante eram curtas, quase sempre negativas, indicando que não sabia responder o que era perguntado, e, ainda, não fez nenhum registro escrito. O estudante não expôs suas dificuldades com relação ao conceito de grupo, talvez por não ter realizado ações sobre este objeto que o levassem a interiorizar, mesmo que de forma equivocada, o conceito.

A desistência do curso pode estar ligada à dificuldade que o estudante tinha no estudo das estruturas algébricas, pois, segundo E8, “difícil foi o último conteúdo, corpos. [...] Foi aí que eu parei” (E8).

Por isso, entendemos que as respostas dadas pelo estudante E8 foram insuficientes para afirmarmos qual concepção (ação, processo, objeto) este estudante está do conceito de grupo.

Síntese da seção

Concluindo a etapa das interpretações das dificuldades, identificando as concepções (ação, processo, objeto) dos estudantes, apresentamos a seguir dois quadros síntese: um com as concepções (ação, processo, objeto) dos estudantes com relação ao conceito de grupo e outro com relação ao conceito de isomorfismo de grupos.

Quadro 4 – Concepções (ação, processo, objeto) dos estudantes sobre grupo

Grupo	**E1**	**E2**	**E3**	**E4**	**E5**	**E6**	**E7**	**E8**
Concepção ação		X	X	X		X	X	?
Concepção processo					X			
Concepção objeto	X							

Quadro 5 – Concepções (ação, processo, objeto) dos estudantes sobre isomorfismo de grupos

Isomorfismo de grupos	**E1**	**E2**	**E3**	**E4**	**E5**	**E6**	**E7**	**E8**
Concepção ação		X			X			
Concepção processo	X							
Concepção objeto								

Percebemos que dos oito estudantes entrevistados, cinco apresentaram uma *concepção ação* do conceito de grupo, de acordo com as análises que fizemos. Essa quantidade revela que mesmo após o estudo grupo, muitos estudantes permanecem com uma noção equivocada ou, muitas vezes, elementar dessa estrutura algébrica. O que se torna alarmante se pensarmos que os dois estudantes que, segundo as análises, possuem *concepção processo* e *concepção objeto*, cursam, além da licenciatura, o bacharelado. Isto significa que os cinco estudantes que entendemos possuir a *concepção ação* do conceito de grupo cursam apenas a licenciatura. Recordemos que o estudante que não conseguimos identificar a concepção (ação, processo, objeto) do conceito faz somente licenciatura em Matemática.

No caso do conceito de isomorfismo de grupos, pudemos identificar as concepções (ação, processo, objeto) de apenas três estudantes, sendo que nenhum desses manifestou a *concepção objeto*. Dos cinco estudantes que não conseguimos revelar suas concepções (ação, processo, objeto), três não se recordavam do conceito, nem mesmo após a discussão que realizamos sobre o tema durante as entrevistas, e dois não chegaram a estudá-lo quando cursaram Álgebra.

A seguir, apresentamos as considerações finais, em que tecemos comentários sobre os resultados obtidos nas análises e sugerimos alguns encaminhamentos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscávamos, nesta pesquisa, identificar e interpretar dificuldades apresentadas por estudantes de Matemática da Universidade Estadual de Londrina quanto aos conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos. Para tanto, iniciamos este trabalho mostrando brevemente o desenvolvimento da Álgebra e a forma como se deu seu processo de abstração e o início do pensamento axiomático nessa área. De acordo com Tall (1995, p. 171-172), com a introdução do método axiomático há uma mudança cognitiva, isto é, há uma nova maneira de encarar os objetos matemáticos, necessitando recorrer ao pensamento matemático avançado.

Por isso, recorremos a teorias cognitivistas – a teoria APOS de Dubinsky e a teoria da reificação de Sfard – ligadas ao pensamento matemático avançado, para nos fundamentar nesta pesquisa, pois nos permitiriam perceber e interpretar dificuldades dos estudantes ao trabalharem com os conceitos abstratos de grupos e isomorfismo de grupos.

Para responder às questões de investigação, convidamos estudantes tanto do bacharelado como da licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina, que já haviam estudado grupos e/ou isomorfismo de grupos, para participar da pesquisa. Tivemos oito participantes, sendo que seis cursavam somente a licenciatura e dois cursavam licenciatura e bacharelado. Elaboramos um roteiro contendo treze perguntas norteadoras, que serviram de indagações iniciais durante as entrevistas semiestruturadas que realizamos com esses estudantes.

Em resposta à primeira questão de pesquisa – *que dificuldades são apresentadas por graduandos em Matemática após o estudo de grupo e/ou isomorfismo de grupos?* –, identificamos vinte e nove dificuldades, apresentadas no quadro 1, que estão divididas em quatro grupos: quatro relacionadas a conjuntos, doze relacionadas a função, oito relacionadas a grupo e cinco relacionadas a isomorfismo de grupos. Isso significa que mais da metade dessas dificuldades, dezesseis, estão relacionadas a conceitos anteriores e necessários à construção dos objetos grupo e isomorfismo de grupos, o que causa considerável defasagem na aprendizagem desses conceitos.

Conforme ressaltamos durante o trabalho, o conceito de grupo pode ser entendido, segundo Brown *et al.* (1997, p. 192), como um *esquema* que contém três *esquemas*: conjunto, operação binária e axiomas. Assim, quando um desses esquemas não está bem construído, a aprendizagem do objeto grupo fica comprometida. O mesmo ocorre com o objeto isomorfismo de grupos, pois envolve, conforme Leron, Hazzan e Zazkis (1995, p. 158), os conhecimentos prévios grupo, função e quantificadores. Neste caso, a complexidade é ainda maior, pois abrange o conceito de grupo, que traz consigo uma série de problemas, conforme citamos anteriormente.

Entendemos que essas vinte e nove dificuldades que envolvem a compreensão dos conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos podem ser dividas em três tipos:

i) Dificuldades com os conhecimentos prévios, conforme comentamos;
ii) Dificuldades causadas, possivelmente, por poucas ações realizadas sobre os objetos matemáticos, ou, no caso de alguns estudantes, pelo tempo decorrido após o estudo de grupo e/ou isomorfismo de grupos e a realização das entrevistas, o que pode causar esquecimento. São exemplos deste tipo as dificuldades em lidar com tábuas de operação, em identificar dois grupos isomorfos pelas tábuas de operações e reconhecer alguns símbolos;
iii) Dificuldades ligadas à natureza abstrata dos objetos matemáticos grupo e isomorfismo de grupos, necessitando uma mudança cognitiva, de acordo com Tall (1995). Por exemplo, dificuldades em compreender a estrutura de grupo e isomorfismo de grupos como objetos matemáticos.

No quadro 2, apresentamos as dificuldades e os estudantes que as apresentaram. Deste quadro, podemos perceber que quatorze das vinte e nove dificuldades foram apresentadas por, pelo menos, dois estudantes. Mostrando que muitas dificuldades são comuns entre eles. Em especial, a dificuldade 3.1 foi apresentada por todos os estudantes, ou seja, nenhum deles soube dizer o que é estrutura algébrica.

A partir das dificuldades que listamos, respondemos à segunda questão de pesquisa – *o que essas dificuldades nos mostram a respeito das concepções desses estudantes, segundo a teoria APOS, com relação aos conceitos* *matemáticos em questão?* –, revelando cinco estudantes com *concepção ação*, um com *concepção processo* e um com *concepção objeto* do conceito de grupo. Identificamos, também, dois estudantes com *concepção ação* e um com *concepção processo* do conceito de isomorfismo de grupos.

As concepções (ação, processo, objeto) dos estudantes que enunciamos mostram que a maioria dos estudantes tem ainda uma visão elementar da estrutura de grupo e de isomorfismo de grupos.

Como vimos, as construções de novos conceitos matemáticos, segundo Dubinsky (2002), procedem da abstração reflexionante definida por Piaget, em que um objeto matemático é elevado a outro patamar (reflexionamento), no qual sofrerá uma reconstrução e reorganização (reflexão) causadas pela atividade cognitiva do sujeito, criando novos objetos. Porém, percebemos nesta pesquisa que as construções dos conceitos de grupo e isomorfismo de grupos exigem dos estudantes a elevação a outro patamar de objetos matemáticos que, muitos deles, ainda não dominam, como é o caso de conjuntos, funções. Além disso, percebemos, por atitudes de alguns estudantes, que a reflexão (atividade cognitiva do sujeito) necessária para criar novos objetos não está, ou pouco está, ocorrendo.

Atribuímos tais dificuldades na construção desses objetos abstratos ao grande leque de conhecimento matemático que eles requerem. Com isso, a pouca maturidade matemática de alguns estudantes, isto é, a realização de poucas atividades matemáticas com objetos formalmente definidos, demonstrações, símbolos diversos em diferentes contextos, até o momento do estudo de conceitos da Álgebra Abstrata, pode ser, muitas vezes, causadora de grandes dificuldades no aprendizado.

Por isso, pensamos que estando a Álgebra presente em cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática, devemos refletir sobre seus objetivos em cada uma dessas modalidades, no sentido de verificar se os mesmos estão, de fato, sendo alcançados. Neste sentido, acreditamos que as dificuldades listadas nesta pesquisa, bem como as concepções (ação, processo, objeto) dos estudantes e a maneira elementar na qual tratam objetos matemáticos abstratos, podem servir de alerta para cursos de Álgebra do Ensino Superior, apresentando-se como indicadores do que é necessário enfocar quando trabalharmos com estudantes iniciantes em Álgebra, provocando um repensar sobre a forma como estão sendo abordados seus conceitos, especialmente as estruturas algébricas.

É necessário ressaltar que não tivemos, nesta pesquisa, a intenção de depreciar os estudantes por não responderem adequadamente às perguntas que fizemos nas entrevistas, nem mesmo de criticar o curso de Álgebra, mas sim de evidenciar algumas das principais dificuldades que os estudantes apresentam após o estudo de grupos e/ou isomorfismo de grupos para, com isso, tentar aproximar o curso à realidade dos estudantes.

Por isso, apresentamos agora algumas sugestões ou possíveis encaminhamentos baseando-nos nos resultados que obtivemos e nas leituras que realizamos durante este trabalho.

A partir do grande número de dificuldades com conceitos prévios que listamos e das concepções (ação, processo, objeto) que identificamos sugerimos, assim como Dubinsky *et al.* (1994, p. 20-30), que no ensino de Álgebra se deva tratar com atenção os conhecimentos prévios necessários para o estudo de grupo, seja antes do início, no início ou, até mesmo, durante seu estudo.

Com exceção do estudante E1, todos os demais entrevistados apresentaram sérios problemas com conjuntos e funções, o que ratifica a afirmação de Dubinsky *et al.* (1994, p. 30) de que muitos estudantes vêm para cursos de Álgebra sem fortes noções de funções e mal preparados para lidar com conjuntos, o que, em nossa visão, pode levá-los à encapsulação do objeto grupo de maneira equivocada, por exemplo, acreditando que existam somente grupos multiplicativos ou aditivos, como ocorreu nesta pesquisa. Independente disso, percebemos que estudantes dão continuidade ao curso sem sanar suas dificuldades, que vão se acumulando na medida em que novos conceitos são apresentados.

Portanto, destacamos a necessidade de se ter atenção com os conceitos prévios no ensino de grupos e isomorfismo de grupos, principalmente com conjuntos e função.

No sentido que estamos considerando, uma dificuldade está relacionada à hesitação de um sujeito ao lidar com conceitos, então, é evidente que não podemos afirmar que uma mesma dificuldade será apresentada por estudantes em geral. Do mesmo modo, não podemos e não pretendemos afirmar que trabalhar essas dificuldades em sala de aula garantirá que outros estudantes não as apresentarão, uma vez que a construção do conhecimento depende do esforço e das ações mentais realizadas pelo indivíduo. Porém, pensamos que trabalhá-las em um curso de Álgebra possa favorecer a aprendizagem.

Percebemos, também, dificuldades na aprendizagem dos próprios objetos grupo e isomorfismo de grupos. Neste caso, pensamos que se deva trabalhar a natureza abstrata desses objetos matemáticos, a forma como são constituídos. Neste sentido, uma possível contribuição pode ser dada pela utilização da história no ensino de grupos, conforme propõe Brandemberg (2010). De acordo com Brandemberg (2010, p. 16), trabalhar a construção do conceito de grupo, considerando aspectos históricos envolvidos, pode minimizar as dificuldades relacionadas ao seu caráter avançado e abstrato, tornando esse conteúdo mais significativo para os estudantes.

Outra abordagem que pode auxiliar os estudantes na construção de conceitos matemáticos abstratos é a aprendizagem cooperativa, sugerida em Dubinsky *et al.* (1994), especialmente com a linguagem de programação ISETL (*Interactive SET Language*). Essa linguagem, pouco explorada no Brasil, está presente em uma série de estudos realizados pelos membros do grupo RUMEC. Segundo Dubinsky *et al.* (1994, p. 28-29), implementar um conceito matemático específico no computador pode oportunizar discussões e reflexões, sendo o ato de refletir sobre as ações realizadas essencial para a aprendizagem.

Com relação à Álgebra para licenciatura em Matemática, em particular, pensamos que deva haver uma abordagem diferenciada, que não se resume ao ensino de conteúdos. Em algumas entrevistas, percebemos que estudantes mostraram desinteresse pela disciplina de Álgebra pelo fato de não perceber relação entre ela e sua futura atividade profissional. Por isso, entendemos que um curso de Álgebra deve, além dos conteúdos, ensinar um “modo de conceber e estabelecer relação com o mundo e com a Matemática e seu ensino” (FIORENTINI, 2005, p. 110).

Para finalizar, reconhecemos algumas falhas que esta pesquisa apresentou, tais como: deixar de explorar algumas dificuldades durante as entrevistas, como, por exemplo, a dificuldade 2.2, que surgiu apenas com o estudante E4, mas que poderia ter aparecido em outras entrevistas; o uso do termo *dicas* no roteiro das entrevistas, inadequado para o contexto, pois reduz a Matemática a uma coleção de técnicas. Porém, como o instrumento de coleta de dados já foi empregado, mantivemos o termo, conforme estava no momento das entrevistas;

Igualmente, admitimos que as expectativas que tínhamos com relação às dificuldades ligadas a isomorfismo de grupos não foram satisfeitas. Alguns estudantes não se recordavam do conceito e mesmo com discussões sobre definição, homomorfismo e bijeção, não mostraram familiaridade com esse objeto. Outros porque não tiveram em seus cursos, pois o professor da disciplina não chegou a trabalhar isomorfismo de grupos. Apesar disso, esta pesquisa nos forneceu dados relevantes sobre dificuldades que estudantes têm no estudo de função.

Pensando em ir além das dificuldades no estudo de função, sugerimos novas pesquisas neste sentido, mas que, conforme aconselha Dubinsky (2011), inicie com homomorfismo de grupos. Segundo Dubinsky (2011), pensar em homomorfismo de um grupo G em um grupo H é um *processo*, mas quando pensamos como um elemento de $hom(G,H)$, é um *objeto*. Então, antes de se estudar as concepções (ação, processo, objeto) dos estudantes quanto ao conceito de isomorfismo de grupos, entendemos a necessidade de se estudar a maneira como compreendem o conceito de homomorfismo de grupos.

Esperamos, finalmente, que a presente pesquisa traga contribuições ao ensino de Álgebra, seja provocando reflexões sobre seu currículo, seja auxiliando os professores ou inspirando pesquisas futuras cujo objetivo principal seja o ensino e a aprendizagem da Álgebra.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 30., Caxambu. *Anais*...Caxambu: ANPED, 2007. Disponível em <http://www.ufrrj.br/emanped>. Acesso em: jan. 2012.

ASIALA, M. *et al*. A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *In*: KAPUT, J.; SHOENFELD, A. H.; DUBINSKY, E. (Eds) *Research in collegiate mathematics education ii, cbms issues in mathematics education*. Estados Unidos: American Mathematical Society, 1996, v. 6, p. 1-32.

BARDIN, L. *Análise de Conteúdo*. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 1977.

BAUMSLAG, B.; CHANDLER, B. *Theory and problems of group theory*. New York: McGraw Hill Companies, 1968.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em educação:* uma introdução à teoria e aos métodos. Trad. Sob direção de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal: Porto, 1994, 336 p.

BOYER, C. B. *História da matemática.* 2. ed**.**Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher. São Paulo, 1996. 496 p.

BRANDEMBERG, J. C. *Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo*. 2009. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2009.

BRANDEMBERG, J. C. *Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010. 206 p.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *PCN+ ensino médio*: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. ciência da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2002.

BROWN, A. *et al.* Learning binary operations, groups, and subgroups. *Journal of mathematical behavior*, v.16, n.3, p.187-239, 1997.

BUENO, S. *Grande dicionário etimológico prosódico da língua portuguesa*. São Paulo: Saraiva, v.6, 1966.

BUSSMANN, C. J. de C. *Conhecimentos mobilizados por estudantes do curso de matemática sobre o conceito de grupo*. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

CAMPOS, E. de. *A noção de congruência algébrica no curso de matemática*: uma análise das respostas dos estudantes. 2009. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

CARLOVICH, M. *A Geometria dedutiva em livros didáticos das escolas públicas do estado de São Paulo para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental*. 2005. 150f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2005.

CARVALHO, C. C. S. *Uma análise praxeológica das tarefas de prova e demontração em tópicos de álgebra abordados no primeiro ano do ensino médio*. 2007. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2007.

CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO (Brasil). Parecer CNE/CES n. 1302/2001, de 06 de novembro de 2001. Diretrizes curriculares nacionais para os cursos de matemática, bacharelado e licenciatura. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF.

DIAS, M. S. da S. *Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em matemática:* uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico. 2009. 214f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2009.

DOMINGOS, A. Teorias cognitivas e aprendizagem dos conceitos matemáticos avançados. *In*: SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 17., Setúbal, 2006.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra moderna*. São Paulo: Atual, 1982.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra moderna*. São Paulo: Atual, 2003.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. *In* : TALL, David. *Advanced mathematical thinking*. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2002, p.25-41.

DUBINSKY, E. *et al*. On learning fundamental concepts of groups theory. *educational studies in mathematics,* v. 27, 1994. Disponível em <http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html>. Acesso em: 11 ago. 2011.

DUBINSKY, E.; McDONALD, M. A. APOS: a constructivist theory of learning in undergrad mathematics education research. *In*: HOLTON, D…et. al. (Eds.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, 2001. Disponível em <http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html>. Acesso em: 11 ago. 2011.

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. *In*: TALL, David. (Org.), *Advanced mathematical thinking,* Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2002, p.95-123.

DUBINSKY, E. (Ed)*. Dubinsky home page*, 2003. Disponível em: <http://www.math.kent.edu/~edd/>. Acesso em: 19 ago. 2011.

DUBINSKY, E. *APOS theory* [mensagem pessoal]. Mensagem recebida por <edd@math.kent.edu> em julho 2011.

EVES. H. *Introdução à história da matemática.* Tradução: Higyno H. Domingues. Campinas: Editora Unicamp, 2004. 843 p.

FERNANDES, D.; FONSECA, L. *Argumentação e demonstração no contexto da formação inicial de professores*, 2008. Disponível em: <http://www.spce.org.pt/sem/03Domingos.pdf>. Acesso em: jan. 2012.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuições para um repensar... a educação algébrica elementar. *Pró-posições*, v.4, n.1, 1993. p.78-91.

FIORENTINI, D. A formação matemática e didatico-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. *Revista de Educação*. Campinas, n.8, p.107-115, jun. 2005.

GONÇALVES, A. *Introdução à álgebra*. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2001.194p.

GRAY, E. M.; TALL D. Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education*, v.26, n.2, p.115–141, 1994.

HAREL, G.; SELDEN, A.; SELDEN, J. Advanced mathematical thinking. *In:* GUTIÉRREZ, A; P; BOERO (Eds.). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers, 2006, p.147-172.

HAZZAN, O. Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics,* v.40, n.1, p.71-90, 1999.

HOUAISS, A. *Houaiss eletrônico*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. CD-ROM.

KALEFF, A. M. *et al*. O desenvolvimento do pensamento geométrico: o modelo de Van Hiele. *Bolema*, n. 10, p. 21-30, 1994.

KLEINER, I. The evolution of group theory: a brief survey. *Mathematics Magazine*, v.29, n.4, p.195-215, 1986.

KLUTH, V. S. *Estruturas da álgebra:* investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento. 2005. 192f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

LAJOIE, C. *Difficultés liées aus premiers apprentissages em théorie des groupes. 2000.* Tese (Doutorado) - Faculte des études supérieures de l'Université Laval. Québec, Canadá, 2000.

LERON, U.; HAZZAN, O.; ZAZKIS, R. Learning group isomorphism: a crossroads of many concepts. *Educational Studies in Mathematics*, v. 29, n. 2, p. 153-174, 1995.

LIMA, E. L. *Curso de análise*. v.1 Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. 6 ed. São Paulo: Pedagógica e Universitária, 2001, 99p.

MACEDO, L. O construtivismo e sua função educacional. *Educação e Realidade*, Porto Alegre, v. 18, n. 1, p. 25-31, jan/jun 1993. Disponível em: <http://www6.ufrgs.br/psicoeduc/piaget/o-construtivismo-e-sua-funcao-educacional/>. Acesso em ago. 2011.

MILIES, F. C. P. Breve história da álgebra abstrata. Minicurso apresentado na *II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática* – SBM. Salvador, Universidade Federal da Bahia, 2004.

MILIES, F. C. P. Uma breve introdução à história da teoria de grupo. *In:* ESCOLA DE ÁLGEBRA, SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 12., Minas Gerais, 1992. *Atas ...*

MONTEIRO, L. H. J. *Elementos de álgebra*. Rio de Janeiro, 1969.

MONTEIRO, L. H. J. *Iniciação às estruturas algébricas*. São Paulo, 1971.

MOURÃO, A. P. A teoria da reificação de Anna Sfard: O caso das funções. *In*: PONTE, J. P. *et al*. (Orgs.) *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*, Coimbra: Secção de Educação e Matemática da SPCE (Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação), 2002, p. 275-289.

PARZYSZ, B. La geometrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des ecoles: de quoi s'agit-il? *quaderni di ricerca in didattica*, Universidade de Palermo, n.17, 2006.

PIAGET, J. *A equilibração das estruturas cognitivas:* problema central do desenvolvimento. Rio de Janeiro: Zahar,1976.

PIAGET, J. *Abstração reflexionante*: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PIETROPAOLO, R. C. *(Re) significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de Matemática*. 2005. 249f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2010.

PRADO, E. A. *Alunos que contemplaram um curso de extensão em álgebra linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial*. 2010. 185f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2010.

ROSENFELD, B. A. (1976) *A history of non-euclidean geometry:* evolution of the concept of a geometric space. Translated by Abe Shenitzer. New York: SpringerVerlag, 1988.

SERRALHEIRO, T. D. *Formação de professores:* conhecimentos, discursos e mudanças na prática das demonstrações. 2007. 147f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2007.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides for the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, v. 22, p. 1-36, 1991.

SOUZA, S. A. O ensino de Álgebra no curso de Licenciatura em Matemática. *Videtur Letras*. São Paulo, v.7, p.23-26, 2004. Disponível em: < http://www.hottopos.com/revistas.htm>. Acesso em jul. 2011.

SPIEGEL, M.R.; MOYER R. E. *Álgebra*. Porto Alegre: Bookman, 2004. 391p. (Coleção Schaum)

TALL, D. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. *Proceedings of 19th international conference for the psychology of mathematics education*, 1995, v. 1, p. 161-175.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. *In*: TALL, David. (Org.), *Advanced mathematical thinking,* Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2002, p.3-21.

TRIVIÑOS, A. N. S. *Introdução à pesquisa em ciências sociais*: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Editora Atlas, 1987.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA. Resolução CEPE 0229/2009 de 29 de outubro de 2009. *Reformula o Projeto Pedagógico do Curso de Matemática – Habilitação: Licenciatura, a ser implantado a partir do ano letivo de 2010*. Londrina, 2009a. Disponível em: < http://www.uel.br/prograd/docs_prograd/resolucoes/2009/resolucao_229_09.pdf> Acesso em: out. 2011.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA. Resolução CEPE 0230/2009 de 29 de outubro de 2009. *Reformula o projeto pedagógico do curso de matemática – Habilitação:* bacharelado, a ser implantado a partir do ano letivo de 2010. Londrina, 2009b. Disponível em: < http://www.uel.br/prograd/docs_prograd/resolucoes/2009/resolucao_230_09.pdf> Acesso em: out. 2011.

WEISZFLOG, W. (Org.) *Michaelis*: moderno dicionário da língua portuguesa. São Paulo: Melhoramentos, 1998.

APÊNDICE

APÊNDICE A

Autorização

AUTORIZO o aluno **Henrique Rizek Elias**, regularmente matriculado no Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, a utilizar, parcial ou integralmente, anotações, gravações em áudio ou vídeo, de minhas falas ou imagem, para fins de pesquisa relacionada ao mestrado, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que meu nome não será citado em hipótese alguma.

NOME:____

RG:____

DATA: / /2010

ASS.:____

ORIENTADORA: Angela Marta Pereira das Dores Savioli

ASS.:____