Universidade Estadual de Londrina

Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática

NILCÉIA REGINA FERREIRA DOMINONI

UTILIZAÇÃO DE DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO: UM ESTUDO ENVOLVENDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS.

Londrina
2005

NILCÉIA REGINA FERREIRA DOMINONI

UTILIZAÇÃO DE DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO: UM ESTUDO ENVOLVENDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS.

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO CURSO DE MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE.

ORIENTADORA: PROF. DRA. LOURDES MARIA WERLE DE ALMEIDA.

Londrina
2005

Catalogação na publicação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

D671u Dominoni, Nilcéia Regina Ferreira.
Utilização de diferentes registros de representação : um estudo envolvendo funções exponenciais / Nilcéia Regina Ferreira Dominoni. – Londrina, 2005.
120f. + anexos no final da obra.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2005.
Bibliografia: f.118-120.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Funções exponenciais – Estudo e ensino – Teses. 3. Funções numéricas – Estudo e ensino – Teses. 4. Engenharia didática – Teses. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade

NILCÉIA REGINA FERREIRA DOMINONI

UTILIZAÇÃO DE DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO: UM ESTUDO ENVOLVENDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS.

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO CURSO DE MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE.

ORIENTADORA: PROF. DRA. LOURDES MARIA WERLE DE ALMEIDA.

COMISSÃO EXAMINADORA

Profª. Drª. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina

Profª. Drª. Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina

Profª. Drª. Norma Suely Gomes Allevato
Universidade Estadual Paulista

Londrina
2005

Dedicatória

Ao meu pai

Antonio Bastos Ferreira

presente em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

À professora Doutora Maria de Lourdes Werle de Almeida, pela orientação deste trabalho, não só pela competência e conhecimento, mas pelo carinho e amizade que demonstrou em todos os momentos de nossa caminhada.

Às professoras Doutoras Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho e Norma Suely Gomes Allevato pelas sugestões que muito enriqueceram este trabalho.

Aos alunos do Colégio Mãe do Divino Amor, que colaboraram com sua participação no desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu marido Toni, pelo amor, carinho e paciência, demonstrados em todos os momentos necessários para a conclusão de mais uma etapa de minha vida acadêmica.

À minha filha Ana Paula, pelo carinho, compreensão, apoio e palavras de incentivo, tão importantes na conclusão deste trabalho.

À minha mãe Nelsi, por me incentivar e apoiar na realização deste trabalho. Aos meus irmãos Nelson e Nilson, pelo apoio e incentivo em momentos tão difíceis.

À amiga Fernanda, pela amizade, por compartilhar comigo idéias e incertezas durante intermináveis conversas.

DOMINONI, Nilcéia Regina Ferreira. **Utilização de Diferentes Registros de Representação:** um estudo envolvendo Funções Exponenciais. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina

RESUMO

Este estudo propõe verificar se a utilização de uma seqüência didática que considere o tratamento, a conversão e a coordenação dos diferentes Registros de Representação da Função Exponencial contribui para a apreensão do objeto matemático Função Exponencial. O estudo está fundamentado na Teoria dos Registros de Representação Semióticos de Raymond Duval, que afirma que a coordenação dos diferentes registros de representação, pode proporcionar a apreensão de um conceito matemático. A metodologia utilizada, segue os princípios da Engenharia Didática. Na análise a priori, foram elaboradas as atividades da seqüência visando à utilização dos diferentes registros e analisando seus aspectos matemáticos e didáticos. Esta seqüência foi aplicada a alunos da primeira série do Ensino Médio de uma escola particular da cidade de Arapongas, Paraná. Foram analisadas as produções de dezesseis alunos que participaram de todas as atividades da seqüência. Com a análise das produções dos alunos, infere-se que as atividades envolvendo o tratamento, a conversão e a coordenação dos diferentes registros de representação contribuem para a apreensão do conceito Função Exponencial.

Palavras-chave: Registros de Representação, Função Exponencial, Educação Matemática, Engenharia Didática.

DOMINONI, Nilcéia Regina Ferreira. **Managing Different Registers of Representation:** a study approaching Exponential Functions. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina

ABSTRACT

This study proposes to analyse if the use of a didact sequence which considers the processing, conversion and coordination of the different Registers of Exponential Function Representation contributes to the acquisition of the mathematical object Exponential Function. The study is focused on the Register of Semiotic Representation by Raymond Duval, who states that the coordination of the different registers of representation can lead up to the acquisition of a mathematical concept. The researh methodology emphasizes the principles of Didactic Engineering. In the first analysis, the activities of the sequence were required in order to manage the different registers and approaching its mathematical and didactical aspects. This sequence was applied to a range of sixteen middle school students in a private high school in the city of Arapongas, Paraná. The students learning outcomes were analysed and it can be inferred from the analysis that the activities involving the processing, conversion and coordination of the different registers of representation contribute to the acquisition of the Exponential Function concept.

Keywords: Registers of Representation, Exponential Function, Mathematic Education, Didact Engineering.

SUMÁRIO

1-INTRODUÇÂO

Trabalhando há vários anos como professora do Ensino Médio da rede particular e pública, percebemos que para os alunos, estudar Matemática é considerado algo difícil e muitas vezes distante da realidade que os cerca. Estes anos procurando "ensinar Matemática", foram suficientes para provocar sentimentos que variaram desde a satisfação até a indignação com a profissão. Estes sentimentos têm sido motivo de grandes inquietações e reflexões, levando a alguns questionamentos como: "Existem fatores que podem contribuir para a aprendizagem? Como identificá-los?"

Na tentativa de encontrar possíveis respostas para estes questionamentos, buscamos nas pesquisas em Educação Matemática, um referencial teórico que contribuísse para as nossas reflexões. Nesta busca levamos em consideração dois aspectos importantes. O aspecto da Matemática, enquanto ciência, sobre procedimentos e métodos que levem o aluno a adquirir idéias matemáticas e um outro aspecto, o aspecto cognitivo, que analisa os meios pelos quais o aluno pode ter acesso ao objeto matemático.

Não podemos levar em consideração somente os aspectos da Matemática, enquanto ciência, mas temos que observar o lado do indivíduo que aprende. Quais estruturas mentais estão envolvidas neste processo? Diante destas reflexões encontramos nos estudos de Duval, uma teoria que investiga os aspectos cognitivos deste processo, a Teoria dos Registros de Representação Semióticos.

Para que o aluno possa perceber e reconhecer um objeto matemático, ele recorre à utilização de uma representação deste objeto. Segundo Duval (2003), "não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado sem o auxílio de uma representação". Os registros de representação desempenham um papel importante no processo de aprendizagem da Matemática.

Para este estudo optamos pelo objeto matemático Função Exponencial, pois percebemos, ao longo de nossa experiência, como educadoras, que uma das dificuldades no ensino e aprendizagem da Matemática se localiza no ensino de funções. A evidência deste fato pode ser constatada também em diversas pesquisas envolvendo este assunto, como Brito (2004), Lopes (2003), Moura e Moretti (2003), Pelho (2003), Silva, et all (2001), Souza (2003), entre outros.

A função tem destaque em várias áreas do conhecimento, como na Física, na Química, na Biologia, na Psicologia, entre outras, sendo utilizada como instrumento que viabiliza a busca de regularidades nos processos físicos e sociais, pois estabelece a relação entre duas grandezas e este tipo de relação é encontrado em vários fenômenos naturais e sociais. Dada a amplitude da aplicação do conceito de função, nos limitamos nesta pesquisa ao conceito de Função Exponencial.

Para o desenvolvimento deste estudo, elaboramos e desenvolvemos uma seqüência didática abordando o conceito de Função Exponencial e suas características, por meio de atividades que propiciem a utilização dos diferentes registros de representação.

Objetivo da Pesquisa

Levando em consideração este encaminhamento resolvemos investigar a utilização dos diferentes registros de representação para a aprendizagem da Função Exponencial. Pretendemos observar se o desenvolvimento de atividades que consideram o tratamento, a conversão e a coordenação entre os diferentes registros de representação da Função Exponencial, contribuem para a apreensão do objeto matemático Função Exponencial.

Estrutura do Trabalho

A estrutura deste trabalho compreende 7 capítulos. No primeiro capítulo fazemos uma introdução, colocando o tema, algumas justificativas e o objetivo do trabalho. Uma caracterização dos Registros de Representação Semiótica, que constitui nosso referencial teórico, é feita no capítulo 2. O capítulo 3 compreende a outra parte do nosso referencial teórico que aborda o conceito de função, um breve histórico do mesmo e os diferentes registros de representação da Função Exponencial. Nossa opção metodológica e seus procedimentos estão descritos no capítulo 4, no qual apresentamos a Metodologia da Engenharia Didática proposta por Artigue (1996). No capítulo 5 apresentamos a nossa seqüência didática, que foi desenvolvida com uma classe da primeira série do Ensino Médio. No capítulo 6, relatamos o desenvolvimento e apresentamos as análises das atividades da seqüência didática. No capítulo 7 constam nossas considerações finais seguidas das referências bibliográficas citadas no decorrer do texto.

2- REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

2.1. INTRODUÇÃO

Os objetos matemáticos, segundo Duval (1993), não são acessíveis diretamente pela percepção, como são, por exemplo, objetos do mundo físico. Deste modo, sua apreensão dá-se por meio de uma representação, como por exemplo, uma notação, um símbolo ou um gráfico, um texto expresso em linguagem natural.

Neste capítulo vamos apresentar alguns aspectos encontrados na literatura em relação às representações semióticas, os registros de representação e a importância que a coordenação entre diferentes registros desempenha na compreensão dos conceitos matemáticos.

2.2. REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Ao observarmos a história do desenvolvimento da Matemática, verificamos que, houve a necessidade da utilização de sistemas que representassem os objetos matemáticos, para que fosse possível a comunicação de idéias e a realização das atividades cognitivas do pensamento.

O conhecimento matemático, segundo Duval (1993), é mobilizado por uma pessoa com o auxílio de uma representação, ou seja, a manipulação dos objetos matemáticos ocorre por meio da criação de sistemas simbólicos que os representem. Uma notação, um símbolo, representa um objeto matemático, como por exemplo, um número, uma função, assim como, traços e figuras representam objetos matemáticos como: um segmento, um ponto, um círculo, etc. Estes sistemas são reconhecidos pela comunidade científica e mostram algumas propriedades características dos objetos matemáticos.

> "Em Matemática toda a comunicação se estabelece com base em representações, os objetos a serem representados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto para o seu ensino

> devemos levar em conta as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático" (DAMM, 1999, p.135).

Duval denomina estas representações de 'representações semióticas' e considera que são externas e conscientes ao individuo. Estas representações desempenham um papel fundamental na atividade matemática. Além da função de comunicação – pois, é um meio de que a pessoa dispõe para exteriorizar suas representações mentais, tornando-as acessíveis a outros indivíduos - elas também possibilitam a realização de tratamentos sobre os objetos matemáticos, como por exemplo, o cálculo.

Segundo Duval:

> [...] representações semióticas são externas e conscientes aos indivíduos. Estas representações são constituídas pela utilização de símbolos, que vão além da comunicação de idéias para o desenvolvimento das representações mentais... que... "são a interiorização da percepção externa" (DUVAL, 1993, apud SOUZA et all,1003, p.2).

Na Matemática, por exemplo, os números, (conceito de número), não são objetos diretamente observáveis ou perceptíveis com a ajuda de instrumentos, mas o acesso a eles está ligado a uma representação. A utilização dessa representação não é algo simples para os alunos. Duval (2003) afirma que pesquisas nacionais de avaliação na França de 1997 mostram que somente um terço dos alunos de 11 a 12 anos, parece ter compreendido o funcionamento do sistema decimal quando utilizado nas operações de multiplicação e divisão. Para ele a dificuldade encontrada talvez tenha relação com o fato de que os objetos matemáticos, começando pelos próprios números, não são objetos perceptíveis ou observáveis, mas que dependem de uma representação que os designe.

Mas o que significa o termo "representação" ou "sistema de representação"? Estes termos, segundo Goldin y Janvier (apud Goldino, 2003), para o ensino e aprendizagem da Matemática, têm as seguintes interpretações:

- Uma situação física, externa e estruturada, ou um conjunto de situações de um contexto físico, que se pode descrever matematicamente ou que se pode ver como concretizações de idéias matemáticas.

- Uma materialização lingüística, ou um sistema lingüístico apresentado mediante um problema proposto ou na discussão de um conteúdo matemático, com ênfases nas características sintáticas e na estrutura semântica.

- Um constructo matemático formal, ou um sistema de constructos, que podem representar situações mediante símbolos ou mediante um sistema de símbolos, usualmente cumprindo certos axiomas ou conforme definições precisas.

- Uma figuração cognitiva interna, individual ou um sistema complexo de tais figurações, inferida a partir da conduta ou da introspecção, que descreve alguns aspectos dos processos do pensamento matemático e na resolução de problemas.

2.2.1. Representações Mentais X Representações Semióticas

Uma distinção entre representações mentais e representações semióticas é enfatizada por Duval (1993). Segundo o autor, existem representações mentais, conjunto de imagens, conceitos, noções, crenças, concepções que um indivíduo pode ter sobre um objeto ou sobre uma situação ou sobre aquilo que está associado ao objeto ou à situação. Podemos dizer que as representações mentais estão associadas à interiorização das representações externas.

As representações semióticas são um meio de que um indivíduo dispõe para exteriorizar suas representações mentais, tornando-as acessíveis a outros indivíduos. Ele ressalta que, além de suas funções de comunicação, as representações semióticas são necessárias para o próprio desenvolvimento das atividades matemáticas, como por exemplo, a realização de tratamentos sobre os objetos matemáticos, como nas operações de cálculo.

Portanto, segundo Duval (1993), as representações podem ser mentais ou semióticas. “As representações mentais ocultam o conjunto de imagens e, mais globalmente, as concepções que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhes está associado.” Com relação às representações semióticas, “... são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação que têm dificuldades próprias de significância e de funcionamento”.

As representações semióticas e as representações mentais, de acordo com Duval, realizam funções diferentes. As representações mentais realizam uma função de objetivação e as representações semióticas realizam, de uma maneira indissociável, uma função de objetivação e uma função de expressão.

Alguns autores consideram as representações semióticas, como suporte para as representações mentais, mas Duval discorda deste pensamento. Considera este ponto de vista ingênuo e ao mesmo tempo enganoso. Para ele as representações semióticas não têm somente a função de comunicação, mas também de atividade cognitiva. Segundo o autor, é impossível a construção do conhecimento pelo aluno sem a utilização das representações semióticas, pois estas são responsáveis por certas funções cognitivas essenciais ao pensamento humano, como algumas atividades de tratamento, como por exemplo, o cálculo.

Segundo Duval (1993) existe um paradoxo cognitivo do pensamento matemático: de um lado a apreensão dos objetos matemáticos que só pode ocorrer na forma de apreensão conceitual, mas ao mesmo tempo, somente por meio de representações semióticas é que pode haver atividades sobre os objetos matemáticos.

O autor ressalta a distinção entre “semiósis” e “noésis”. A primeira seria a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e a “noésis” seria responsável pela apreensão conceitual de um objeto. Para que ocorra a aprendizagem, ou seja, a apreensão de um determinado objeto matemático, é necessário que ocorra a "noésis" através de significativas "semiósis".

O que se pode perceber é que em Matemática há uma grande variedade de representações para um mesmo objeto. Sistemas de numeração, figuras geométricas, representações gráficas e linguagem natural são representações para objetos matemáticos.

A utilização de vários sistemas semióticos de representação e expressão é enfatizada por Duval, (1995, apud Goldino,2003), pois para ele não pode haver compreensão em Matemática se não se distingue um objeto de sua representação. Por exemplo, o objeto "número" pode estar representado na forma de escrita decimal, fracionária ou gráfica, ou seja, a um mesmo objeto podem atribuir-se várias representações.

Para designar os diferentes tipos de representação utilizados em Matemática, Duval (2003) introduz o termo registro de representação[1].

2.3 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO E APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Pesquisadores em Educação Matemática, segundo Damm (1999), têm se preocupado com a construção do conhecimento e com a forma como se processa a aprendizagem. Raymond Duval, filósofo e psicólogo, trabalhou na França de 1970 a 1995 e desenvolveu estudos relativos à Psicologia Cognitiva. Seus estudos estão relacionados ao funcionamento cognitivo e sua implicação, sobretudo na atividade Matemática. Investiga a utilização específica da linguagem materna, da compreensão de textos de Matemática e sobre diferentes formas de aprendizagem e argumentação.

"Como compreender as dificuldades, muitas vezes insuperáveis que, muitos alunos têm na compreensão da matemática? Qual é a natureza dessas dificuldades? Onde elas se encontram? Duval, (2003), buscando respostas a estes questionamentos

[1] Neste trabalho usamos a palavra registro como o mesmo significado de registro de representação.

recorre à abordagem cognitiva, cujo objetivo, segundo ele, consiste em descrever o funcionamento cognitivo que possibilite ao aluno compreender, efetuar, controlar, ele próprio, a diversidade de processos matemáticos que lhe são propostos em situações de ensino.

Segundo Duval,

> [...] não podemos nos restringir ao campo matemático ou à sua história. É necessária uma abordagem cognitiva, pois o objetivo do ensino da matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, análise e visualização (DUVAL, 2003, p.11).

De acordo com Duval (1993), a distinção entre o objeto matemático e seu sistema de representação se faz necessária para a compreensão em Matemática. Quando os objetos são confundidos com os seus diferentes registros de representação, esta confusão acarreta ao longo do tempo, uma perda de compreensão. Os conhecimentos adquiridos tornam-se inutilizáveis no seu contexto de aprendizagem, seja por o indivíduo não lembrar ou porque permanecem como representações "inertes" que não sugerem nenhum tipo de tratamento.

O que se pode perceber é que, cada objeto matemático possui diversos registros de representação que são parciais em relação a este. Sendo parcial, um registro pode complementar o outro. Portanto é necessário relacionar os diferentes registros de representação, com suas próprias especificidades para poder conceitualizar o objeto matemático.

Assim, para Duval (1993), a originalidade da atividade Matemática está na mobilização simultânea dos diferentes registros de representação e na possibilidade de interagir e transitar entre estes registros.

2.4- TRATAMENTO, CONVERSÃO E COORDENAÇÃO ENTRE DIFERENTES REGISTROS

Segundo Duval (1993), para que um sistema de representação semiótico seja considerado um registro de representação, ele de permitir três atividades cognitivas:

- a formação de uma representação identificável
- o tratamento de um registro de representação
- a conversão de um registro de representação

Não menos importante para a compreensão do objeto matemático é a coordenação entre os diferentes registros associados ao mesmo objeto.

2.4.1 – Formação de uma Representação Identificável

Para que uma representação seja identificável é necessário, a partir de um registro de representação, saber qual é o objeto matemático que está sendo representado, portanto é necessário que ocorra uma seleção de características e de dados do objeto a ser representado. Para que esta seleção ocorra é necessário que seja utilizado um sistema de representação comum a todos, ou seja, um sistema estabelecido socialmente. Assim, o indivíduo não pode criar um sistema, mas sim utilizar sistemas já existentes. Segundo Duval (1993), a formação de uma representação poderia ser comparada a uma tarefa de descrição.

2.4.2- Tratamento de um Registro de Representação

O tratamento de um registro de representação consiste em transformar a representação do objeto matemático conservando o próprio registro onde ela foi formada. Portanto é a transformação interna a um registro.

> "Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexão e simetria." (DUVAL, 2003, p.16)

Vamos exemplificar os diferentes tratamentos que podem ser atribuídos à resolução da situação: "Encontre o vértice da função quadrática $y = x^2 - 6x + 8$".

Uma possível resolução seria encontrar o vértice $V = (x_v ; y_v)$ por meio da fórmula:

$$V = (x_v ; y_v) = \left(-\frac{b}{2.a} , -\frac{\Delta}{4.a} \right)$$

Então usando: $a = 1$; $b = -6 \ e \ c = 8$, temos:

$$x_v = -\frac{b}{2.a} = -\frac{(-6)}{2.1} = 3$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4.a} = -\frac{(b^2 - 4.a.c)}{4.a} = -\frac{((-6)^2 - 4.1.8)}{4.1} = -1$$

Encontramos como ponto de vértice $V = (3; -1)$

Uma outra maneira de resolver seria usar conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

Temos: $\frac{dy}{dx} = 2x - 6$

Fazendo: $2x - 6 = 0$, temos $x = 3$.

Substituindo na equação $y = 3^2 - 6.3 + 8 = -1$ encontramos o vértice $V = (3, -1)$.

Um outro tipo de tratamento seria encontrar as raízes x_1 e x_2 , por meio da fórmula de Báskara, tendo então:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.1.8}}{2.a} \Rightarrow x_1 = 2 \ e \ x_2 = 4$$

utilizando $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$ encontramos $x_v = \frac{2+4}{2} = 3$

aplicando na função temos:

$y = 3^2 - 6.3 + 8 = -1$. Desta forma encontramos o vértice $(3; -1)$

Estas diferentes formas de resolução são tratamentos realizados dentro de um mesmo registro de representação.

Um outro exemplo seria pensarmos na fração $\frac{2}{4}$. Ao escrevermos $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ estamos realizando um tratamento, uma vez que a operação não implica em associar outro registro.

2.4.3 - Conversão e Coordenação entre Diferentes Registros de Representação

O que se pode observar é que a um objeto matemático estão associados diversos registros de representação. Segundo Duval (1993), um único registro de representação, em geral não contempla todas as características do objeto, portanto, um registro pode complementar o outro. Ao transformar um registro de representação em outro, o indivíduo está realizando uma conversão entre registros de representação.

Assim a conversão de um registro de representação é a transformação deste em um outro registro conservando a totalidade ou somente uma parte das características do objeto matemático em questão. A conversão ocorre entre registros de representação diferentes.

“As conversões são transformações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica” (Duval, 2003, p.16).

Podemos exemplificar a conversão entre registros com a situação: ”Escreva a fórmula matemática que expresse a lei representativa da situação: Uma firma que conserta televisores cobra uma taxa fixa de R$30,00 de visita mais R$20,00 por hora de mão de obra. Então o preço y que se deve pagar pelo conserto de um televisor é dado em função do número x de horas de trabalho (mão de obra).”

Uma possível equação para descrever esta situação é: $y = 20.x + 30$

Durante a construção desta equação, ocorre a formação de uma representação identificável e também podemos observar a ocorrência da conversão entre o registro em língua natural (texto) para o registro algébrico (equação).

Podemos representar a mesma situação utilizando um gráfico. Neste caso, temos a conversão do registro algébrico para o registro gráfico.

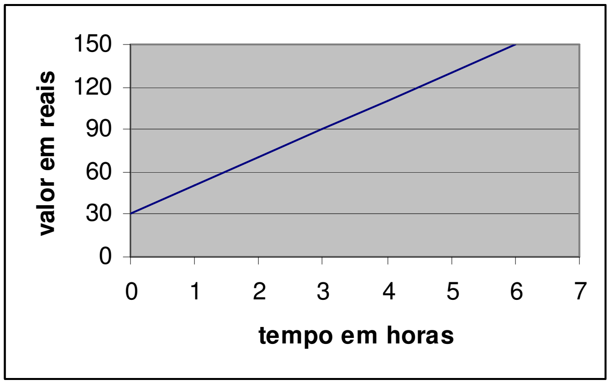


Fig.2.2 – Gráfico de $y = 20.x + 30$

Um outro exemplo seria considerarmos para o exemplo apresentado em 2.4.2 a representação gráfica da função $y = x^2 - 6x + 8$. Por meio do gráfico, também é possível visualizar a característica em estudo, ou seja, a determinação do vértice da parábola.

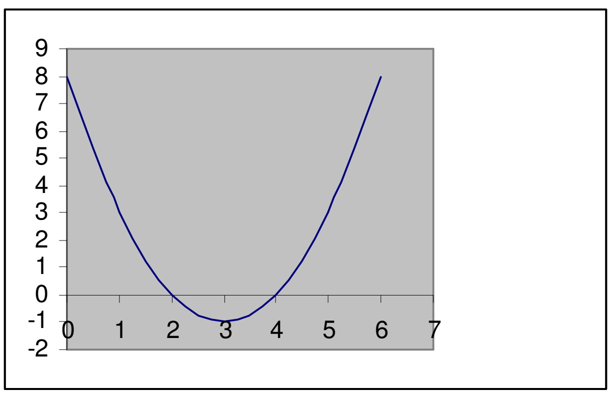


Figura 2.2 - Gráfico de $y = x^2 - 6x + 8$.

Desta forma, pode-se observar que a conversão é uma atividade cognitiva diferente do tratamento. A conversão, de acordo com Duval (2003), muitas vezes é considerada como atividade simples, como se fosse uma associação entre, por exemplo, nomes e figuras. Uma simples "codificação" ou "tradução", onde seria necessário apenas aplicar algumas regras de correspondência.

Desta forma, para converter uma equação à sua representação gráfica, bastaria aplicar uma regra segundo a qual um ponto está associado a um par de números sobre um plano cartesiano. Esta seria uma visão superficial e enganosa, pois de acordo com Duval, 1988, isto levaria a uma leitura pontual de representações gráficas, não permitindo ao indivíduo uma apreensão global e qualitativa. Esta visão, global e qualitativa, é necessária para extrapolar, interpolar, ou para a utilização de gráficos para fins de exploração dentro de tratamentos algébricos. Passar de um registro de representação a outro envolve mais do que mudar de modo de tratamento, tem-se também que explicar as propriedades ou as associações entre, por exemplo, as variáveis visuais da representação gráfica e as unidades significativas da escrita algébrica de um mesmo objeto.

No estudo de funções, por exemplo, para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, é necessária a articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros. Estas variáveis permitem determinar as unidades significativas próprias de cada registro, que devem ser levadas em consideração. Para que ocorra esta conversão é necessário, por exemplo, saber diferenciar abscissa de ordenada, identificar na expressão algébrica e no gráfico as variáveis da função, identificar que a função é a relação entre os valores das abscissas e das ordenadas, relacionar a curva com a expressão algébrica é apresentada. De acordo com Duval (1988) a leitura das representações gráficas pressupõe a discriminação das variáveis pertinentes e da percepção das variáveis correspondentes da escrita algébrica. Numerosos estudos demonstram as dificuldades de leitura e interpretação das representações gráficas cartesianas.

> Numerosas observações nos permitiram colocar em evidência que os fracassos ou bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida. No caso de as conversões requeridas serem não congruentes estas dificuldades e/ou bloqueios são mais fortes (DUVAL, 2003, p.21).

Um exemplo, que mostra esta dificuldade, seria de solicitar a conversão do registro gráfico para o algébrico. Em nossa experiência como educadoras, observamos que os alunos apresentam certo grau de dificuldade, quando numa atividade fornecemos um gráfico de uma função do 1º grau e solicitamos que encontre a função algébrica correspondente:

Assim para responder a questão:

"Encontre a função representativa do gráfico a seguir",

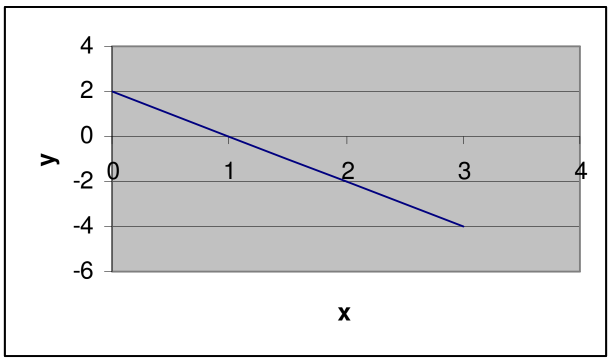


Figura 2.3 - Gráfico da função $y = -2x + 2$

O aluno deve fazer a conversão do registro gráfico para o algébrico encontrando a função $y = -2x + 2$

Duval argumenta que a conversão às vezes ocorre de forma natural ou espontânea. No entanto, se torna onerosa para os alunos, quando não conseguem reconhecer um mesmo objeto matemático em diferentes registros de representação.

O fato dos alunos não reconhecerem um mesmo objeto matemático em dois de seus registros de representação bem diferentes limita consideravelmente a capacidade de utilizarem seus conhecimentos já adquiridos e também a possibilidade de adquirir novos conhecimentos matemáticos. Esse reconhecimento é condição fundamental para que os alunos possam transferir ou modificar formulações ou representações de informações durante a resolução de um problema.

Segundo Duval (apud Damm, 1999) "*a semiósis apresenta os vários registros de representação em relação a um conceito e a noésis busca a coordenação entre estes registros".* A coordenação entre a "noésis" e a "semiósis", é de fundamental importância, pois caracteriza o funcionamento do pensamento humano.

Nos exemplos citados, "semiósis" seriam os diferentes registros de representação, como a expressão algébrica, o gráfico. A "noésis" seria, relacionar a expressão da função com a curva descrita no gráfico, no caso a parábola com concavidade voltada para cima está relacionar com o coeficiente de x^2, relacionar os zeros da função com os valores de x, nos pontos em que a parábola intercepta o eixo das abscissas.

A coordenação entre os diferentes registros é enfatizada por Duval como necessária para a aprendizagem em Matemática, ou seja, na conceitualização do objeto matemático. Esta coordenação implica na identificação ou reconhecimento do objeto matemático nos diferentes registros de representação.

Mas por que é tão necessária esta diversidade de registros de representação? Duval (1993), dá ênfase a três pontos. Primeiro se refere aos "custos" do tratamento. Existem registros mais próximos, por exemplo, da língua natural e com formas mais econômicas de tratamento. O fato de se conhecer diferentes registros leva à possibilidade de se optar pelo registro de menor custo, por exemplo, alguns alunos "preferem" operar com números decimais ao invés de números escritos na forma fracionária.

Um segundo ponto, enfatizado, seriam as limitações de cada registro. Um registro pode não contemplar todas as características do objeto em estudo, sendo necessária à complementaridade entre registros. E terceiro, que a conceitualização implica uma coordenação entre diferentes registros de representação.

Para Duval, a compreensão do objeto estudado está associada à relações estabelecidas entre os diferentes registros, captando as especificidades de cada um. Por exemplo, um registro em linguagem natural, não oferece as mesmas possibilidades de representação de um diagrama ou um gráfico. Cada um desses registros possui uma especificação própria. Perceber estas especificações é um caminho para a compreensão do objeto como um todo. Caminhar entre estes diferentes registros associados a um objeto matemático caracteriza a coordenação entre os registros.

Para compreender melhor o significado da coordenação vamos apresentar uma atividade que proporciona esta coordenação.

“Indique o gráfico, a expressão algébrica e a tabela que se relaciona com cada um dos textos abaixo”.

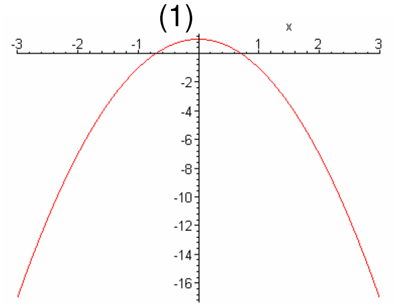
Textos: 1- A função é definida de tal forma que ela tem máximo em $x = 0$.

2- Para a função $y = f(x)$ a taxa de variação de y em relação à x é dada por $6x$.

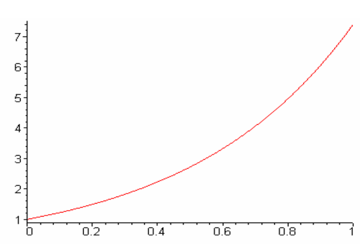
3-A função é solução do problema de valor inicial: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Gráficos

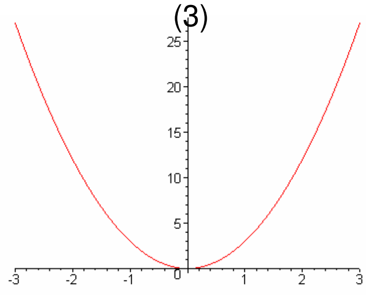
(1)



(2)



(3)



Expressões Algébricas

1) $y = -2x^2 + 1$ 2) $y = 3x^2$ 3) $y = e^{2x}$ 4) $y = e^{2x} + 1$

Tabelas

Tabela1 Tabela2

x	y	x	y
0	1	0	0
1	e^2	1	3
2	e^4	2	12
-1	$e^{1/2}$	-1	3

Tabela3 Tabela4

x	y	x	y
0	0	0	1
1	1	1	-1
2	2	2	-7
-1	4	-1	-1

Associar adequadamente estes registros para completar os dados a seguir, caracteriza a coordenação entre os registros.

Respostas:

Tabela	*Texto*	*Gráfico*	*Equação*

Segundo Castro (2001) pode-se observar nos diferentes níveis do ensino da Matemática, que existe uma barreira entre os registros de representação que não dependem do mesmo sistema semiótico. E a passagem de um sistema de representação para outro, ou até mesma a coordenação simultânea de vários sistemas de representação, que são fenômenos freqüentes na atividade matemática, não tem nada de evidente e tão espontâneo para a maioria dos alunos.

Damm (1999) aponta que no ensino da Matemática é enfatizado somente a formação de representações e os tratamentos necessários em cada registro, não é dada ênfase à coordenação entre os diferentes registros de representação, que é o que garante a apreensão do objeto matemático, pois segundo Duval, a conceitualização implica uma coordenação de registros de representação.

O que observamos, no ensino atual, é que quando o conteúdo é abordado, os diferentes registros de representação são trabalhados separadamente, sem que o aluno realize a coordenação entre os mesmos. Essa ausência impede que o aluno tenha uma visão global do conteúdo que está sendo estudado.

Considerando a teoria discutida, percebemos a importância dos diferentes registros de representação, a conversão e a coordenação entre eles, para o ensino e aprendizagem da Matemática. Embora várias abordagens didáticas não levem em conta a articulação entre os diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, priorizando até mesmo os tratamentos, Duval afirma que é necessário estudar prioritariamente a conversão das representações e não os tratamentos pois a articulação entre os diferentes registros é condição para a compreensão em Matemática, e também ressalta que todos os registros de representação de um mesmo objeto matemático não têm necessariamente conteúdos iguais, podendo, até, um complementar o outro.

Sendo “Função” um conceito matemático muito utilizado em várias áreas do conhecimento, pois procura explicar e modelar diversos fenômenos físicos e sociais, e levando-se em consideração a grande quantidade de fenômenos que apresentam comportamento relativo à “Função Exponencial”, encaminhamos nossa pesquisa para o estudo dos diferentes registros de representação desta função.

3- FUNÇÃO EXPONENCIAL E SEUS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

Neste capítulo são discutidos aspectos relativos ao estudo de funções. Inicialmente discutimos a importância do estudo de funções no âmbito da Educação Matemática. Em seguida apresentamos alguns aspectos históricos sobre o conceito de função. Finalmente abordamos a Função Exponencial e seus registros de representação.

3.1. A IMPORTÂNCIA DE SE ESTUDAR FUNÇÃO.

Por ser amplamente utilizado nas diversas áreas do conhecimento como na Biologia, na Física, na Economia, na Psicologia, etc., o conceito de função, é considerado um tema de grande importância da Matemática e tem destaque entre todos os conceitos desenvolvidos no Ensino Médio. Esta importância talvez se deva à busca do homem para explicar os fenômenos naturais e sociais do seu ambiente, procurando regularidades que permitam repetir um fenômeno tantas vezes quantas julguem necessário, na tentativa de prever resultados e com isto elaborar estratégias de ação. Podemos então caracterizar função como um instrumento na busca destas regularidades, pois estabelece uma relação entre dois ou mais conjuntos.

Como a nossa pesquisa focaliza os alunos do Ensino Médio achamos pertinente buscar nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), alguma referência ao estudo de Matemática e mais especificamente de funções. Os PCNEM afirmam que a Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo contribuindo para o desenvolvimento de processos de pensamento e aquisição de atitudes. Também desempenha um papel instrumental, sendo vista como um conjunto de técnicas e estratégias a serem aplicadas a outras áreas do conhecimento. É considerada uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas nas atividades humanas. “Nesse sentido, é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de idéias e permite modelar a realidade e interpretá-la.” (PCNEM, p.255).

Com relação ao estudo de funções, encontramos:

> "Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática." (p. 255).

Na nossa trajetória como educadoras, baseadas na experiência, nos surpreendemos com as dificuldades que os alunos apresentam em atividades em sala de aula que visam, entre outros, a apreensão do conceito de função. Buscando encontrar as possíveis causas dessas dificuldades encontramos vários trabalhos em Educação Matemática onde pesquisadores direcionaram para o ensino e aprendizagem de funções. Destacamos algumas pesquisas que achamos pertinente ao nosso trabalho.

Um aspecto que deve ser enfatizado no estudo e aprendizagem da Matemática é a "valorização" que o aluno dá ao estudo da Matemática. De acordo com Brito (2004), que pesquisou a atribuição de sentido e construção de significado em situações de modelagem matemática, a valorização da Matemática também pode acontecer quando alunos percebem que seus conceitos permitem compreender e explicar vários tipos de situações, e as funções podem ser importantes porque, segundo relato de alunos pesquisados, as funções "ajudam a entender quando uma coisa aumenta ou diminui...".

A importância de diferentes registros de representação no ensino e aprendizagem de funções também foi investigada por Schwartz e Dreyfus (1989, 1985 apud Pelho, 2003) que realizaram uma pesquisa cujo objetivo foi analisar a introdução do conceito de função com alunos da primeira série do Ensino Médio, utilizando um ambiente computacional, que teve como finalidade ajudar os estudantes a suprirem a dificuldade de transferência de conhecimento entre os diferentes registros de representação (algébrico, gráfico e tabular) de uma mesma função. Segundo estes autores para que ocorra a aprendizagem do conceito de função, há a necessidade de diferentes registros de representações e a passagem entre estes, representam dificuldades para os alunos.

Sierpinska (1992, apud Lopes, 2003), constatou em suas pesquisas, que os estudantes têm encontrado dificuldades em fazer a ligação entre diferentes registros de representação de função como fórmulas, gráficos, diagramas, descrições verbais das relações, manipulação de símbolos relativos às funções. Para exemplificar esta dificuldade a autora coloca que o aluno não diferencia o símbolo que representa a função do valor da função no ponto x. Assim, $f(x)$ é usado simultaneamente com estes dois significados.

Com o objetivo de introduzir o conceito de função, Pelho (2003) realizou uma pesquisa com alunos do segundo ano do Ensino Médio, que já haviam estudado este conteúdo na série anterior. Esta pesquisa foi fundamentada na Teoria de Duval sobre os Registros de Representação Semióticos e com a utilização do software Cabri-Géométrè II. Pelho verificou que os alunos conseguiram romper suas interpretações mecânicas com a aplicação de uma seqüência didática, envolvendo atividades nas quais foram abordados aspectos funcionais entre as variáveis.

Silva et all (2001), desenvolveram uma pesquisa com alunos do primeiro ano de cálculo com o objetivo de conhecer e analisar imagens conceituais de alunos do Ensino Médio e da Universidade a respeito do conceito de função linear. Estes autores se fundamentaram na Teoria dos Registros de Representação de Duval onde consideraram aspectos envolvidos na atividade de conversão entre as representações gráfica e algébrica de funções.

Para o desenvolvimento do nosso estudo, achamos pertinente buscar nos PCNEM algumas competências e habilidades propostas a serem desenvolvidas com o ensino da Matemática:

- ler e interpretar textos em Matemática

- ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc).
- transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas, etc) e vice-versa.

Ressaltamos também alguns objetivos propostos pelos PCNEM a serem atingidos pelos alunos, que julgamos relevantes para o nosso trabalho, quais sejam:

- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações Matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática.
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações.

3.2 – SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO

Podemos dizer que o conceito de função, não teve uma origem, mas diversas origens, surgindo lentamente da necessidade de estudar as leis naturais. A história nos mostra que este conceito foi construído de uma forma lenta, pois foram percorridos muitos séculos desde suas primeiras noções intuitivas até a sua elaboração mais recente no século XX. A análise histórica vem nos mostrar que a criação de um conceito em Matemática, não ocorre num momento único, mas sim é desenvolvido dentro de um contexto sócio-cultural sofrendo influências deste.

Geralmente os livros didáticos apresentam a evolução do conceito de função de uma forma linear, mas percebemos que a evolução deste conceito não ocorreu desta forma, mas sim com períodos de evolução, estagnação, retornos e rupturas. Os livros didáticos geralmente simplificam este processo, colocando até mesmo os conceitos em uma ordem diferente da ocorrida historicamente. Em uma pesquisa recente Zuffi (2001) constatou, que há uma diversidade de conceituações para funções defendidas pelos professores do Ensino Médio e que nem sempre os professores têm consciência dessas diferenças.

Segundo Zuffi (2001), não parece haver um consenso entre os autores para a origem do conceito de função. Alguns consideram que os Babilônios já possuíam um "instinto de funcionalidade", cerca de 2000 a.C., observado através de seus cálculos de tabelas sexagesimais de quadrados e raízes. Também os gregos, tinham tabelas, que faziam a conexão entre a Matemática e a Astronomia, onde percebiam a idéia de dependência funcional. Há indícios também, na França de idéias primárias de função anteriores a 1361, quando Nicole Oresme descreveu graficamente um corpo movendo-se com aceleração constante.

Para Youschkevitch (1976, apud Zuffi, 2001) há três fases principais do desenvolvimento da noção de função:

1- A Antiguidade, na qual o estudo de casos de dependência entre duas quantidades ainda não havia isolado as noções de variável e de função.
2- A Idade Média, onde as noções eram expressas sob uma forma geométrica e mecânica, mas em que ainda prevaleciam, em cada caso concreto, as descrições verbais ou gráficas;
3- O período Moderno, a partir do século XVII, onde começam a prevalecer as expressões analíticas de função. Este método analítico de introdução à função revoluciona a matemática devido a sua extraordinária eficácia, e a matemática toma um lugar de destaque em todas as ciências exatas.

> "Estes estágios refletem, na realidade o caminho percorrido pelo homem através da história rumo à generalização e à formalização do conceito de funções. O processo de abstração demonstra uma real e profunda compreensão do conceito ao mesmo tempo em que é fator de construção desta compreensão." (Moura e Moretti, 2003, p.69).

Galileu Galilei (1564-1642), de acordo com Zuffi (2001), deu sua contribuição quando introduziu o tratamento quantitativo nas suas representações gráficas. Descartes (1696-1650) introduziu a relação de dependência entre quantidades variáveis, com o auxílio de equações em x e y, possibilitando o cálculo de valores de uma delas, a partir dos valores de outra. Newton utilizou-se do termo "fluentes", para descrever suas idéias de funções, que estavam ligadas às taxas de mudanças.

A palavra função foi introduzida por Leibniz em 1673, ao se referir a qualquer quantidade variando ponto a ponto de uma curva. Ele também introduziu as palavras “constantes”, “variáveis” e “parâmetros”. Este autor também afirma que em 1698, Bernoulli utiliza a palavra “função” de Leibniz para dar dignificado a quantidades que dependem de uma variável. Ele utilizou a notação “ fx ”, a qual se assemelha a atual $f(x)$ (Kline, apud Pelho, 2003).

Segundo Zuffi (2001) uma outra definição foi proposta por Leonard Euler (1707-1783): “*Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de alguma maneira desta mesma quantidade e de números ou quantidades constantes. Euler considerou função como uma equação ou uma fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes trazendo grandes contribuições para a linguagem simbólica e as notações utilizadas hoje, por exemplo,* $f(x)$ *”* (p.12).

Função, também foi definida por Jean Louis Lagrange (1736-1813) como toda expressão de cálculo de uma ou mais variáveis em que estas variáveis intervêm de qualquer maneira. Nesta definição são incluídas funções de varias variáveis. Para Lagrange as funções representam operações distintas que se realizam sobre quantidades conhecidas, ou seja, função é uma combinação de operações.

Zuffi (2001) relata que em 1837, Dirichlet, propôs uma definição geral para função, que foi aceita até meados do século XX. Segundo esta definição se uma variável y está relacionada a uma variável x, existe uma regra entre elas, que ao se atribuir qualquer valor numérico para x, um único valor de y é determinado, então se diz que y é função da variável independente x. Esta definição se aproxima da nossa definição atual. A nossa definição atual utiliza os conceitos de “conjunto” e “número real” que naquela época ainda não tinham sido estabelecidos.

Em 1939, este conceito foi ampliado com a utilização da Teoria dos Conjuntos, abrangendo relações entre dois conjuntos de elementos. Bourbaki afirma que uma função é uma terna ordenada (X,Y,f), onde X e Y são conjuntos e f é um subconjunto do produto cartesiano X Y, tal que se $(x, y) \in f$ e $(x, y') \in f$ então

$y = y'$. Com esta definição, o conceito de função é definido de uma maneira simbólica e formal. Sua importância está numa série de correspondências entre os elementos de dois conjuntos e não mais somente em uma regra de correspondência.

Com esta breve reflexão sobre o desenvolvimento histórico do conceito de função, pretendemos ressaltar a evolução que ocorreu na construção deste conceito, o que, de forma geral, são aspectos pouco enfatizados nos livros didáticos. E também concordamos com Souza (2003) quando diz, que no decorrer da história, inicialmente as idéias de relações entre conjuntos foram descritas verbalmente, posteriormente foram expressas em forma de tabelas para facilitar os cálculos e, depois foram utilizadas as representações gráfica e algébrica.

Estas formas de interpretar, visualizar ou representar uma função foram contribuindo para a formação do conceito. Ao analisarmos o processo de construção deste conceito pelo aluno, percebemos que se inicia na infância com a associação de objetos e ou símbolos seguindo durante toda a sua vida na construção, na coordenação da linguagem Matemática e nas relações com o próprio ambiente.

3.3 – A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

Como trabalhamos em nosso estudo com o Ensino Médio, buscamos nos livros didáticos uma definição para o conceito de Função. Segundo Iezzi (2002):

"Se x e y são duas variáveis reais tais que para cada valor atribuído a x existe, em correspondência, um único valor para y, dizemos que y é função de x.

3.3.1. O Conceito de Função Exponencial

Como este estudo focaliza o ensino e aprendizagem da Função Exponencial, achamos pertinente apresentar a definição de Função Exponencial e suas propriedades as quais procuramos ressaltar na nossa seqüência didática.

Procuramos a definição e propriedades da Função Exponencial no contexto dos livros didáticos adotados no Ensino Médio.

Segundo IEZZI, (2002), pág.32:

“Chama-se Função Exponencial qualquer função f de $\Re$ em $\Re$ dada por uma lei da forma $f(x) = a^x$, em que a é um número real dado, $a > 0$ e $a \neq 1$.”

IEZZI (2002) também apresenta as propriedades:

1- Na Função Exponencial $y = a^x$, temos:

$$x = 0 \Rightarrow y = a^0 = 1$$

Ou seja, o par ordenado (0,1) satisfaz a lei $y = a^x$ para todo a $(a > 0 \ e \ a \neq 1)$. Isto quer dizer que o gráfico de qualquer Função Exponencial corta o eixo dos y no ponto de ordenada 1.

2- Se $a > 1$, então a função $f(x) = a^x$ é crescente. Portanto, dados os reais x_1 e x_2, temos:

se $x_1 < x_2$ então $a^{x_1} < a^{x_2}$

São crescentes, por exemplo, as Funções Exponenciais: $f(x) = 2^x$, $f(x) = 3^x, f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$.

3- Se $0 < a < 1$, então a função $f(x) = a^x$ é decrescente. Portanto dados os reais x_1 e x_2, temos:

se $x_1 < x_2$ então $a^{x_1} > a^{x_2}$

São decrescentes, por exemplo, as Funções Exponenciais $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $f(x) = (0{,}1)^x$.

4- Para todo $a>0$ e $a\neq 1$, temos:

se $a^{x_1}=a^{x_2}$, então $x_1=x_2$

5- Para todo $a>0$ e todo x real, temos $a^x>0$; portanto o gráfico da função $y=a^x$ está sempre acima do eixo dos x.

Se $a>1$, então a^x aproxima-se de zero quando x assume valores negativos cada vez menores.

Se $0<a<1$, então a^x aproxima-se de zero quando x assume valores positivos cada vez maiores. O conjunto imagem da Função Exponencial $y=a^x$ é $\mathrm{Im}=\{y\in\Re / y>0\}=\Re^*_+$.

No transcorrer da nossa revisão teórica, pudemos verificar que os conceitos matemáticos são estruturas abstratas, e que diversas situações e formas de registros poderão contribuir para a apreensão do significado destes conceitos. No caso das funções, em específico, das Funções Exponenciais, estas podem ser expressas de diferentes formas. Estes registros de representação contribuirão na própria significação do conceito de Função Exponencial. Nestes registros, características do conceito encontram-se implícitas, além do que são representações aceitas socialmente e passíveis de tratamento e conversão. Seguem-se algumas reflexões a este respeito.

3.4 OS DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL.

Assim como outras funções, a Função Exponencial pode ser representada por diferentes registros, que contemplam suas propriedades. Estes registros poderão então contribuir para a construção do conhecimento do aluno sobre este objeto. Dentre os registros de representação, destacamos: o registro em língua natural, o registro tabular, o registro gráfico e o registro de expressões algébricas.

3.4.1 O Registro de Representação por meio da Linguagem Natural

Segundo Souza (2003), com a utilização dos registros verbais, o homem começou a perceber a necessidade de outros tipos de registro para comunicar suas idéias e pensamentos, registros que abreviassem e também não pudessem gerar muitas interpretações em suas leituras. Grandes controvérsias históricas ocorreram na formação dos conceitos matemáticos devido às várias interpretações atribuídas ao mesmo problema escrito em linguagem natural.

O registro de representação da linguagem natural faz uso da forma natural dos homens se comunicarem. A linguagem materna, em situações de ensino e aprendizagem, pode ser utilizada como meio para que o aluno possa estabelecer relações entre o conceito de Função Exponencial com situações práticas do seu cotidiano.

Para que um aluno possa reconhecer a Função Exponencial num registro de linguagem natural, ele precisa ler e interpretar o texto, identificar as variáveis e características da função, assim como o tipo de variação que está ocorrendo, possibilitando não somente representar matematicamente esta situação, como se fosse um sistema de códigos, mas encontrar o significado do conceito Função Exponencial, numa situação problema a resolver.

Alguns exemplos de situações problemas podem ser encontrados nos livros didáticos, como os propostos por Dante (2003):

1- Qual o montante produzido por um capital inicial de R$500 000,00 aplicados a juros fixos de 3% ao mês, no final de 5 meses?
2- Em uma cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Se há 100 bactérias no início da experiência, calcule quantas bactérias existirão após x horas.

3.4.2 O Registro de Representação Tabular

Este tipo de registro usa de uma disposição espacial que contém elementos de dois conjuntos representados por linhas e colunas formando uma tabela. Para que uma tabela seja representativa de uma Função Exponencial, ela deve incorporar as propriedades desta função.

Um exemplo seria: Considerando: x o tempo em horas e y o total da população de uma cultura de bactérias, temos:

x	y
0	100
1	200
2	400
3	800

A Função Exponencial não está no desenho da tabela, mas sim na relação estabelecida entre as duas variáveis x e y. Para que possamos identificar Função Exponencial nesta tabela, devemos perceber além dos pares ordenados, as relações entre as variáveis, analisando as regularidades que ocorrem nesta relação.

3.4.3 O Registro de Representação Gráfico

Este tipo de representação envolve o plano cartesiano, onde estão dispostos dois eixos ortogonais 0x e 0y, que têm a mesma origem 0. Usamos este plano para localizar pontos, realizar construções geométricas como linhas e curvas, que representam, por exemplo, uma função.

Exemplo:

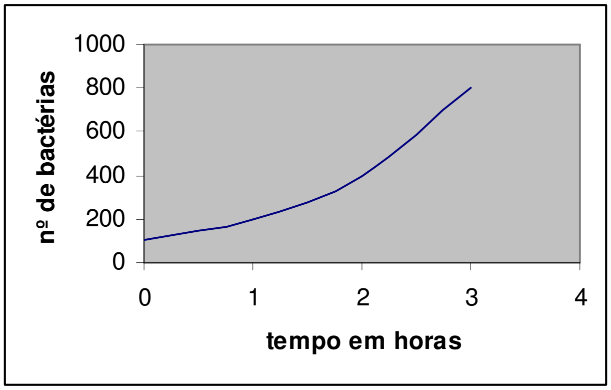


Figura 3.1 – Número de bactérias em função do tempo.

Podemos observar neste exemplo que tanto o x quanto o y pertencem ao conjunto dos números reais positivos, isto nos leva a pensar em domínio e contradomínio desta função. Neste registro aparecem componentes visuais, que não encontramos nos outros tipos de registros de representação, facilitando a identificação da Função Exponencial. Percebemos que a curva descrita não é uma reta, que é crescente, que não passa pela origem, e que a cada elemento de x associamos um único elemento em y. Então temos vários elementos que dão significado ao registro de representação gráfico: temos o conjunto numérico em que os eixos estão representados; os pontos do gráfico, as variáveis, a relação entre elas demonstrando uma regularidade; a construção gráfica de uma curva, o domínio, a imagem, e também nos proporciona a possibilidade de uma previsão. Todos estes elementos conceituais dão significado ao registro de representação gráfico.

3.4.4 Registro de Representação Algébrico

O registro de representação algébrico se utiliza de um conjunto de operações entre coeficientes numéricos e variáveis, geralmente expressas por letras, como por exemplo x e y, de tal maneira que possa representar a relação entre as variáveis.

Para o exemplo que estamos analisando, temos $y = 100.2^{x}$, onde y representa o total de bactérias da população e x representa o tempo em horas.

Para que o aluno possa compreender e manipular este registro de forma ampla, ele precisa compreender o conceito de Função Exponencial e outras noções como: conjuntos, variáveis, domínio, imagem, parâmetros e propriedades. Características, como por exemplo, ser crescente ou decrescente, são aspectos que o aluno pode investigar por meio deste registro ou associar à características de outro registro, como por exemplo, o gráfico.

Observando as características de cada registro de representação, observamos que um complementa o outro, e percebemos sua relevância no ensino e aprendizagem do conceito de Função Exponencial, pois é no reconhecimento, conversão e coordenação entre os diferentes registros que o aluno pode manipular o objeto matemático abstrato, tornando-o significativo.

Nesta pesquisa, procuramos elaborar uma seqüência didática para o ensino e aprendizagem da Função Exponencial, baseada na Teoria dos Registros de Representação Semióticos de Duval. As atividades foram planejadas de forma a possibilitar o reconhecimento dos diferentes registros e as conversões entre eles. No próximo capítulo relatamos a metodologia empregada em nossa pesquisa.

4. ASPECTOS METODOLÓGICOS

A metodologia utilizada nesta pesquisa é a Engenharia Didática, proposta por Artigue (1996). Optamos por esta metodologia por a considerarmos adequada ao estudo qualitativo dos aspectos dos processos de ensino e aprendizagem referentes à construção do conceito de Função Exponencial, desenvolvidos por meio de uma seqüência didática.

4.1. Engenharia Didática

A noção de Engenharia Didática emergiu em Didática da Matemática, na década de 80, e segundo Artigue (1996), com o objetivo de nomear uma forma de trabalho didático. Esta metodologia tem por objetivo a articulação entre a investigação e a ação da prática educativa e apresenta uma forma particular de organizar os procedimentos metodológicos da pesquisa contemplando tanto a dimensão teórica quanto a experimental.

A metodologia da Engenharia Didática "caracteriza-se por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" na sala de aula, enfatizando a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino" *(*Artigue, 1996, p.196). A importância do trabalho do professor é enfatizada nesta metodologia, pois cabe a ele, elaborar ou escolher uma seqüência didática que leve em consideração o conteúdo a ser estudado, o conhecimento prévio do aluno, o papel do professor e dos alunos no processo.

O desenvolvimento da seqüência didática ocorre por meio de um processo interativo, entre professor e alunos, buscando desenvolver processos e estratégias mais efetivas. Nesta metodologia também são levadas em consideração as respostas dos alunos e as condições as quais eles estão submetidos. Desta forma esta metodologia possibilita investigar aspectos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Uma outra característica desta metodologia é a forma de validação. Artigue (1996) ressalta que a validação é interna, fundamentada no confronto entre as análises a priori e as análises a posteriori, onde a primeira é baseada no quadro teórico e a segunda nos resultados da experimentação. Diferencia-se assim de metodologias que recorrem à experimentação em sala de aula, mas que se utiliza de validações externas, como por exemplo, na comparação entre grupos-experimentais e grupos-controle.

Estas características também são enfatizadas por Machado (2001) que afirma que "a singularidade da engenharia didática, não repousa sobre seus objetivos, mas suas características de funcionamento metodológico" (p. 200).

O processo experimental da metodologia de Engenharia Didática apresenta quatro fases:
1ª fase: as análises prévias
2ª fase: concepção e análise a priori
3ª fase: experimentação
4ª fase: análise a posteriori e validação.

As análises prévias

É a fase que consiste na análise das possíveis causas do problema a ser pesquisado e nas possíveis formas de tratá-lo. Apóia-se num quadro teórico e em conhecimentos didáticos já adquiridos anteriormente e em outras análises preliminares, que segundo Artigue (1996, p.198), na maioria das vezes são:

- a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- a análise do ensino habitual e seus efeitos;
- a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam sua evolução;
- a análise do campo de constrangimentos no qual virá a situar-se a realização didática efetiva;
- e, naturalmente, tendo em conta os objetivos específicos da investigação.

De acordo com Machado (2001), as análises prévias que devem ser realizadas dependem dos objetivos da situação estudada. É por meio destas análises que o autor irá definir quais componentes deverão ser levados em consideração e em qual profundidade. Estas análises poderão ser retomadas e aprofundadas no transcorrer do trabalho.

No nosso trabalho, as análises prévias são: a fundamentação teórica e a nossa experiência como educadoras, de que os alunos apresentam dificuldades para estudar o conceito de Função Exponencial.

Concepção e Análise a Priori

A análise a priori é considerada como uma fase fundamental dentro do processo, ela consiste na preparação e elaboração da seqüência didática a ser aplicada que deve ser elaborada tendo como base as análises prévias e o referencial teórico. É nesta fase que o pesquisador decide quais variáveis irá investigar e quais variáveis poderão apontar para o encaminhamento ou solução do problema estudado.

Segundo Artigue (1996), o objetivo desta fase é determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido de cada um destes comportamentos. Esta fase fundamenta-se em hipóteses, e são estas hipóteses cuja validação está, a princípio, no confronto entre as análises a priori e a posteriori.

Esta fase comporta uma parte descritiva e uma parte de previsão, baseada nas características de uma situação que se pretende criar e desenvolver com os alunos. Portanto é nesta fase que são elaboradas as atividades que constituem a seqüência didática a ser desenvolvida com os alunos e também são previstas as ações e comportamentos dos alunos durante a experimentação.

Nesta fase, Artigue (1996), ressalta que deve-se descrever as escolhas locais, e as características de cada situação que pretende-se desenvolver com os alunos. Assim como, analisar qual o desafio de cada situação para o aluno, decorrentes das possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e de validação que ele terá diante da situação. Na análise a priori deve-se também prever os possíveis comportamentos e mostrar que a análise efetuada permite controlar o sentido destes comportamentos, além de assegurar que se tais comportamentos ocorrerem, resultarão claramente no conhecimento previsto pela aprendizagem.

Na nossa pesquisa, a análise a priori é composta pela seqüência didática e pelas resoluções e respostas às atividades e pelos comportamentos esperados do aluno no desenvolvimento das atividades.

Experimentação

Esta fase, de acordo com Machado (2001) é uma fase clássica. Inicia-se com o contato pesquisador/professor/observador(es) com a população de alunos. É nesta fase que: são explicitados os objetivos e condições em que será realizada a pesquisa para os alunos que participarão da experimentação; é estabelecido o contrato didático; é aplicado o instrumento de pesquisa e são realizadas as observações durante a realização das atividades.

Neste momento do processo ocorre a aplicação da seqüência didática e são observadas as atitudes e também as produções dos alunos. Os dados são coletados por meio de relatórios, questionários, anotações do pesquisador, entrevistas, gravações em áudio ou vídeo, e outros recursos.

Na pesquisa que estamos desenvolvendo, os dados serão coletados por meio de observações sistemáticas realizadas pela pesquisadora durante o desenvolvimento da seqüência didática e pelas produções escritas dos alunos.

Análise a Posteriori e Validação

Nesta fase analisam-se a produção dos alunos, as observações feitas em relação ao comportamento deles durante a aplicação da seqüência didática e todas as observações colhidas durante a experimentação. Há o confronto da análise a priori e da análise a posteriori, buscando validar ou refutar as hipóteses levantadas na análise a priori. É no confronto destas análises que são elaboradas a descrição e a predição do provável comportamento do aluno tendo como base o referencial adotado. Segundo Artigue (1996), é neste confronto que a metodologia da Engenharia Didática diferencia-se de outras metodologias na área da didática. Algumas metodologias apóiam-se em validações estatísticas associadas à experimentações em sala de aula, em que as diferenças constatadas estão ligadas a variáveis de comando que foram inseridas para diferenciar “salas de aula experimentais” e “salas de aula controle”. Assim, na Engenharia Didática, o confronto entre a análise a priori e a análise a posteriori é que representa a validação da metodologia usada para esta situação.

4.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Após realizarmos a pesquisa do referencial teórico, elaboramos uma seqüência didática baseada na Teoria dos Registros de Representação de Duval. Os objetivos desta seqüência consistem em propor atividades que permitam ao aluno compreender Função Exponencial, e lidar com diferentes registros de representação desta função (linguagem natural, registro tabular, registro gráfico e registro algébrico). As atividades foram planejadas de modo a contemplar a conversão, o tratamento e a coordenação entre os diferentes registros.

4.2.1 Os sujeitos da pesquisa

Participaram desta pesquisa 27 alunos da primeira série do Ensino Médio de uma escola particular da cidade de Arapongas, na faixa etária de 13 a 15 anos, na qual atuamos como professora. Os alunos foram distribuídos em doze duplas e um trio, porém consideramos para o nosso estudo somente 8 duplas. O critério utilizado para selecionar as oito duplas foi a presença em todos os encontros e a permanência dos elementos na dupla.

A experimentação ocorreu durante as aulas de Matemática, sendo o conteúdo Função Exponencial, parte da programação regular da disciplina. Os encontros para a realização da seqüência didática foram previstos dentro da carga horária da disciplina. As atividades realizadas fizeram parte das avaliações da programação regular da disciplina. Foi colocado para os alunos que eles colaborariam com uma pesquisa, esclarecendo que suas identificações seriam preservadas. Foi solicitada uma autorização (anexo I) que deveria ser assinada pelos responsáveis, para que os alunos participassem da pesquisa.

5- A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

5.1 INTRODUÇÃO

As atividades que compõem esta seqüência didática dizem respeito ao conceito de Função Exponencial e suas propriedades. Estas atividades têm como objetivo levar o aluno a conhecer a Função Exponencial e suas propriedades, nos diferentes registros de representação, como também identificar situações práticas onde são utilizadas estas funções. As atividades foram desenvolvidas para introduzir o conteúdo Função Exponencial.

A seqüência foi elaborada com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, que afirma que, quanto maior for à coordenação pelo aluno entre os diferentes registros de representação, maior será a possibilidade de apreensão do objeto matemático. Nesta seqüência apresentamos os registros na forma de linguagem natural, algébrica, gráfica e tabular, visando levar o aluno a reconhecer Função Exponencial em cada um dos diferentes registros e tentamos elaborar atividades que possibilitassem a conversão entre os diferentes registros de representação.

Ao final da aplicação da seqüência didática, esperávamos que os alunos fossem capazes de:

- Reconhecer a Função Exponencial nos registros de linguagem natural, algébrica, tabular e gráfica.
- Compreender os procedimentos de tratamento nos diferentes registros.
- Realizar o procedimento de conversão entre os diferentes registros.
- Compreender o conceito de Função Exponencial, e suas diferentes propriedades.
- Identificar situações problemas que podem ser descritas por uma Função Exponencial.

A seqüência didática foi desenvolvida em duas fases.

1ª Fase

Foram realizados seis encontros, um de 90 minutos e cinco de 45 minutos. Cinco destes encontros ocorreram na sala de aula e um no laboratório de informática da escola. Durante esta fase, os alunos dispostos em duplas desenvolveram sete atividades.

No início de cada encontro os alunos receberam o material preparado para realizar as atividades, as quais foram desenvolvidas pelos alunos e devolvidas ao final de cada encontro, quando juntamente com os alunos fizemos uma sistematização dos conteúdos desenvolvidos.

Fizemos observações e anotações referentes aos acontecimentos que ocorreram com as duplas durante a realização da seqüência didática. As atividades foram elaboradas para que os alunos tivessem uma participação ativa, onde eles foram os agentes principais de sua aprendizagem. Ressaltamos que nesta fase, os alunos puderam ter nossa ajuda sempre que necessário.

2ª Fase

Esta fase constituiu-se de apenas um único encontro, que durou cerca de 90 minutos. Os alunos receberam o material preparado, com seis atividades, que foram desenvolvidas em duplas, sem nosso auxílio e sem acesso a anotações anteriores.

5.2 A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Apresentamos as atividades da seqüência didática.

1ª Fase

Atividade 1

a) Complete a tabela, de acordo com a função $y = 2^x$.

x	0		5	-1			-2
y		8			2	128	

b) O que acontece com os valores de y quando aumentamos os valores de x?

c) Existe algum valor de x que conduz a valores negativos de y? Por que você acha que isto ocorre?

d) Existe algum valor de x que conduz ao valor $y = 0$?

e) Represente graficamente a função $y = 2^x$.

f) Olhando para o gráfico, compare-o com a resposta que você deu em c.

g) Olhando para o gráfico, o que significa o item d?

h) Qual o significado gráfico do que acontece com a característica que você observou no item b?

Atividade 2

a) Complete a tabela, de acordo com a função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	0		5	-1			-2
y		8			2	128	

b) O que acontece com os valores de y quando aumentamos os valores de x?

c) Existe algum valor de x que conduz a valores negativos de y? Por que você acha que isto ocorre?

d) Existe algum valor de x que conduz ao valor $y = 0$?

e) Represente graficamente a função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

f) Justifique por que o gráfico não toca o eixo x e não tem pontos nos quadrantes 3 e 4.

g) Compare o gráfico construído nesta atividade com a anterior, observando que existe uma diferença com relação à curva. Por que você acha que ocorreu esta diferença?

i) Olhando para o gráfico compare-o com a resposta que você deu em c.

j) Olhando para o gráfico, o que significa o item d?

j) Qual o significado gráfico do que acontece com a característica que você observou no item b?

l) Que conclusão você obtém comparando $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$?

Atividade 3

A idéia desta atividade foi baseada em uma situação problema proposta por Smole & Diniz (2003).

Um biólogo acompanhou o crescimento da folha circular de uma planta aquática. Durante suas observações percebeu que a cada mês o diâmetro da folha triplicava. Se no início de suas observações o biólogo mediu a folha e obteve 1cm de diâmetro, qual será o diâmetro que ela terá ao final de seu prazo máximo de sobrevivência, que é de 4meses e 12 dias?

a) Elabore uma tabela representando a situação.

Tempo (meses)	Diâmetro (cm)

b) Se essa planta tivesse um tempo de sobrevivência de 6 meses qual seria o diâmetro de sua folha?

c) Em quanto tempo a folha desta planta atinge um diâmetro de 81cm?

d)Se hipoteticamente, a folha dessa planta crescesse por x meses, qual seria seu diâmetro ao final do mês x?

e)A equação encontrada na questão acima representa uma função. Justifique esta afirmação.

f) Construa o gráfico desta função.

g) Qual é o domínio e a imagem desta função?

h) Existe um valor de x para o qual y é zero?

i) Qual será o valor de y quando x for igual a zero?

j) Responda à questão proposta no início da atividade: “Qual será o diâmetro que a planta terá ao final de seu prazo máximo de sobrevivência, que é de 4 meses e 12 dias”?

Atividade 4

A tabela abaixo mostra a população da cidade de Arapongas, nos anos de 1997 a 2002.

ANO	População
1997	75038
1998	77664
1999	80383
2000	83196
2001	86108
2002	89122

Fonte: IBGE

Obs.: Esta tabela contém uma pequena alteração em relação aos dados fornecidos pelo IBGE, com o objetivo de que uma possível regularidade pudesse ser identificada com mais facilidade pelos alunos.

a) O que você observa em relação ao crescimento da população? Há alguma regularidade?
b) Seria possível estimar qual foi a população em 2003, se os dados da tabela mantivessem esta regularidade? E em 2004?

c) Elabore uma equação algébrica que possa prever qual a população de Arapongas num ano qualquer, admitindo que a população continue a crescer conforme a tabela.
d) Construa um gráfico que represente esse crescimento.

Atividade 5

Parte 1

A- Represente graficamente as funções abaixo, num mesmo plano cartesiano:

$y = 2^x$ $y = 3^x$ $y = 4^x$

Observe que as bases das funções na atividade A estão variando. Como esta variação afeta a representação gráfica?

B - Represente graficamente as funções abaixo num mesmo plano cartesiano.

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

Observe que as bases das funções na atividade B estão variando. Como esta variação afeta a representação gráfica?

Comparando as atividades A e B, escreva as semelhanças e diferenças encontradas nos gráficos. Por que você acha que ocorrem estas diferenças?

Parte 2

Represente graficamente as funções abaixo, num mesmo plano cartesiano.

a) $y = 2^x$ $y = 2^x + 1$ $y = 2^x + 2$

Comparando os gráficos, escreva as semelhanças e diferenças encontradas. Por que você acha que ocorrem estas diferenças?

b) $y = 2^x$ $y = 2.2^x$ $y = 3.2^x$

Comparando os gráficos, escreva as semelhanças e diferenças encontradas. Por que você acha que ocorrem estas diferenças?

c) $y = 2^{x}$ $y = 2^{2x}$ $y = 2^{3x}$

Comparando os gráficos, escreva as semelhanças e diferenças encontradas. Por que você acha que ocorrem estas diferenças?

d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 1$ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 2$

Comparando os gráficos, escreva as semelhanças e diferenças encontradas. Por que você acha que ocorrem estas diferenças?

e) Considere a função $y = a^{x}$, o que acontece com ela quando você varia o a?

f) Considere a função $y = K.a^{x}$, o que acontece com ela quando você varia o k **?**

g) Considere a função $y = k.a^{x} + c$, o que acontece com ela quando você varia o c?

Atividade 6

Um terreno hoje vale R$10 000,00, e esse valor fica 10% maior a cada ano que passa.

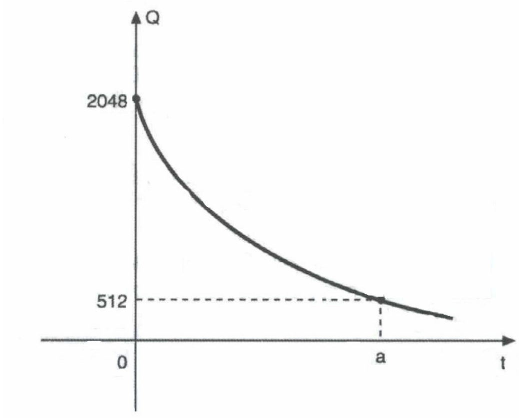
a) Qual será seu valor daqui a 4 anos?

b) Qual a lei de formação, que relaciona o valor do terreno **V** (em reais) com o tempo **t** (em anos).

c) Represente graficamente esta situação.

Atividade 7

Uma substância se decompõe aproximadamente segundo a lei $Q(t) = k.2^{-0,5.t}$ em que **k** é uma constante, **t** indica o tempo (em minutos) e **Q(t)** indica a quantidade de substância (em gramas) no instante t.



a) Considerando os dados desse processo de decomposição mostrados no gráfico, determine os valores de k na expressão algébrica e de a, representado no gráfico.

b) Qual a quantidade de substância (em gramas) após 6 minutos de iniciado o processo de decomposição?

c) Se na representação algébrica, a base é um número maior que 1, como você explica o fato da função ter como representação gráfica uma curva decrescente?

2ª FASE

Atividade 1:

Associe adequadamente, expressões algébricas, gráficos e situações problemas preenchendo o quadro I.

Quadro I

Expressão algébrica	Gráfico	Tabela	Situação problema

Expressões algébricas

1- $y = 200.(0{,}8)^x$

2- $y = (1{,}2)^x$

3- $y = 200.(1{,}2)^x$

4- $y = 2^x$

Situações Problemas

1- Num período prolongado de seca, a quantidade de água de certo reservatório sofre uma evaporação igual a 20% do volume total ao mês. Inicialmente havia no reservatório $200\,m^3$ de água. Então a quantidade de água que resta no reservatório é função do tempo.

2- Cientistas de um certo país, preocupados com as possibilidades cada vez mais ameaçadoras de uma guerra biológica, pesquisam uma determinada bactéria. A taxa de crescimento da população é de 20% a cada hora e a pesquisa inicia tem início com 200 bactérias. Então o número de bactérias em cada instante é função do tempo.

3- Ao observar o crescimento de uma planta que estava com altura de 1cm, percebeu-se que o seu tamanho dobrava a cada mês. A altura da planta é função do tempo.

4- Uma loja coloca os tênis que estão em promoção dispostos em um balcão em ordem crescente de preços de tal modo que cada tênis custa R$5,00 a mais do que o anterior. O primeiro custa R$200,00. O preço pe função da posição que o tênis ocupa na seqüência.

5- A quantidade de camisas feitas por uma costureira no dia depende do tempo que ela está na atividade. Antes de entrar no emprego ela fazia uma camisa por dia. Na empresa sua produção aumentou 20% ao dia.

Tabelas

1

0	200
1	160
2	128
3	102,4
4	81,92
5	65,53

2

0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

3

0	1
1	1,2
2	1,44
3	1,73
4	2,07
5	2,49

4

0	1
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11

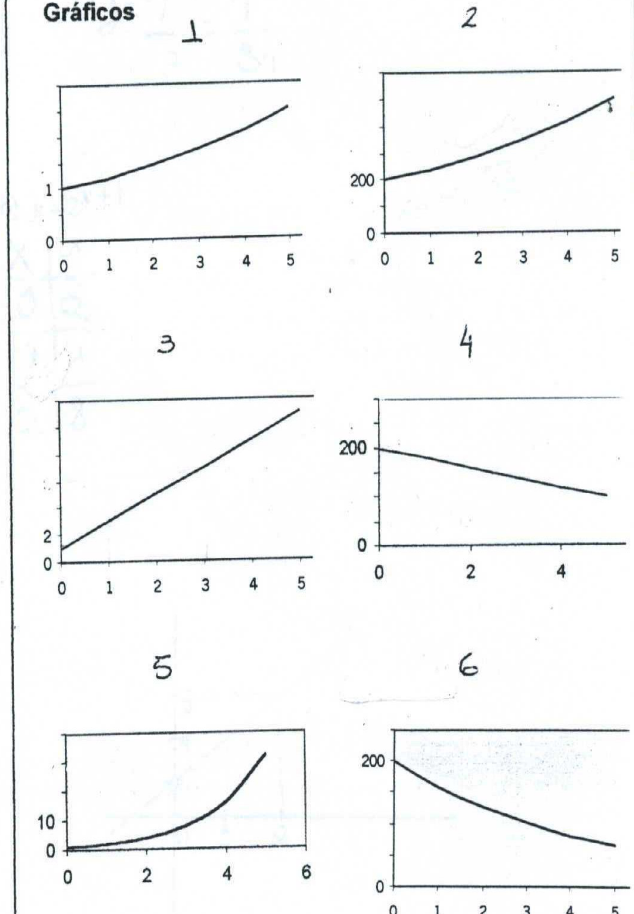
5

0	200
1	240
2	288
3	345,6
4	414,72
5	497,66

6

0	200
1	240
2	280
3	320
4	360
5	400

Gráficos



Atividade 2

Escreva uma sentença matemática que descreve os dados da tabela.

X	Y
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{27}$
4	$\frac{1}{81}$

Atividade 3

Represente graficamente as funções.

a) $y = -2.3^x$

b) $y = 2^{x+1}$

Atividade 4

Um boato se espalha da seguinte maneira:

1º dia: duas pessoas ficam sabendo do boato

2º dia: cada uma dessas duas pessoas conta o boato para outras duas pessoas

3º dia: cada uma das quatro pessoas conta o boato para outras duas pessoas

E assim por diante. Enfim para certo dia x há um número $f(x)$ de pessoas que tomaram conhecimento naquele dia. Determine a sentença matemática que relaciona x e $f(x)$.

Atividade 5

A lei seguinte representa o número de pessoas infectadas por uma gripe em uma cidade

$$N(t) = a.2^{b.t}$$

Em que $N(t)$ é o número de pessoas infectadas t dias após a realização desse estudo e a e b são constantes reais. Sabendo que no dia que se iniciou o estudo já havia 200 pessoas infectadas e que após dois dias, esse número já era de 6 400 pessoas, determine:

a) Os valores de a e b
b) O número de pessoas infectadas pela gripe após quatro dias do início dos estudos.

Atividade 6

Esta atividade é uma adaptação de uma questão de vestibular do CEFET-PR, que encontramos em Smole &Diniz (2003)

Uma rampa para manobras de skate é representada pelo esquema conforme a figura 1. Consideremos a curva apresentada na figura 2, a esta rampa.

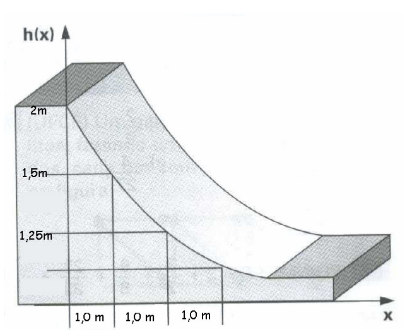


Figura 1. A rampa de skate.

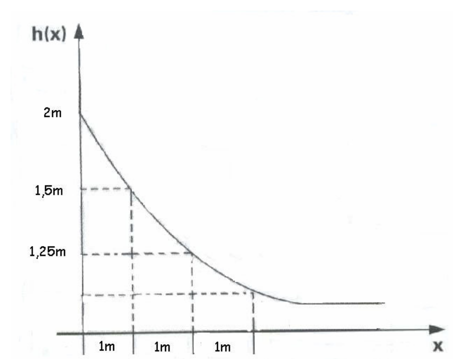


Figura 2. A curva associada.

Se essa parte da curva pudesse ser associada a uma função, essa função seria:

a) $h(x) = 2^x + 1$

b) $h(x) = 2^{x+1}$

c) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$

d) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

e) $h(x) = -2x + 1$.

6- AS ANÁLISES DAS ATIVIDADES

6.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentamos a análise a priori e a análise a posteriori das atividades descritas no capítulo 5 e desenvolvidas com uma turma da primeira série do Ensino Médio de uma escola particular. A descrição destas análises segue o princípio da Engenharia Didática, de modo que o confronto entre a análise a priori e a análise a posteriori viabiliza verificar a eficácia das atividades desenvolvidas para a apreensão do conceito e características da Função Exponencial.

6.2 A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Como descrevemos no capítulo 5, as atividades que compõem a seqüência didática dizem respeito ao conceito de Função Exponencial e suas características. Estas atividades têm como objetivo levar o aluno a conhecer a Função Exponencial e suas características, nos diferentes registros de representação, como também identificar situações práticas onde são utilizadas estas funções.

A seqüência didática foi composta de duas fases. A primeira fase constituída de sete atividades, que foram trabalhadas pelos alunos em duplas, e durante seu desenvolvimento, puderam ter nosso auxílio sempre que precisassem e ao final de cada atividade fizemos uma sistematização dos conteúdos abordados em cada atividade.

A segunda fase foi realizada em um único encontro. Constituiu-se de seis atividades, que foram realizadas pelas mesmas duplas, no entanto os alunos não tiveram nosso auxílio e não lhes era permitido acesso a anotações anteriores.

6.3 – ANÁLISE DAS ATIVIDADES DA 1ª FASE

6.3.1 - Atividade 1

a) Complete a tabela, de acordo com a função $y = 2^x$.

x	0		5	-1			-2
y		8			2	128	

b) O que acontece com os valores de y quando aumentamos os valores de x?

k) Existe algum valor de x que conduz a valores negativos de y? Por que você acha que isto ocorre?

l) Existe algum valor de x que conduz ao valor $y = 0$?

m) Represente graficamente a função $y = 2^x$.

n) Olhando para o gráfico, compare-o com a resposta que você deu em c.

o) Olhando para o gráfico, o que significa o item d?

p) Qual o significado gráfico do que acontece com a característica que você observou no item b?

6.3.1.1 Análise a priori da atividade 1.

Esta atividade tem o objetivo de abordar a Função Exponencial nos seus diferentes registros de representação: algébrica, tabular e gráfica. Em Matemática, toda comunicação se estabelece com base em representações, para seu ensino precisamos levar em consideração os diferentes registros de representação de um objeto matemático (Damm,1999).

Iniciamos esta atividade com o registro algébrico e tabular, pois consideramos que os alunos não terão muita dificuldade para realizar a conversão do registro algébrico para o registro tabular. Acreditamos que terão dificuldade com o tratamento pedido (operações com potências).

Esta atividade envolve o preenchimento de uma tabela. Tomamos o cuidado, na elaboração desta tabela, de colocar alguns valores negativos para x, pois os alunos geralmente apresentam dificuldades para trabalhar com potências de expoente negativo e poderiam por esta razão evitar estes valores. Colocamos valores negativos para x, pois pretendemos que os alunos constatem que tomando valores positivos ou negativos para x os valores encontrados em y serão sempre positivos. Nesta atividade esperamos que os alunos não encontrem muitas dificuldades, exceto no tratamento de operações envolvendo potências com expoente negativo.

A questão **b** foi elaborada com o objetivo de que os alunos percebam que, aumentando o valor de x o valor de y também aumenta, esta é a resposta que esperamos.

A questão **c**, foi colocada esperando que o aluno, ao analisar os valores na tabela, perceba que não serão encontrados valores negativos para y. Ao solicitar uma justificativa para o fato, esperamos por respostas que relacionem propriedades de potência que afirmam que todo número positivo elevado a qualquer expoente real será sempre positivo.

Para reforçar a idéia de que $a^x = 0 \Leftrightarrow a = 0$ para todo $x \in \Re^*$ elaboramos a questão **d** e esperamos que os alunos percebam que na função $y = 2^x$ não há valor de x que conduza a $y = 0$.

Ao solicitarmos a representação gráfica da função $y = 2^x$ (questão **e**), pretendemos que os alunos conheçam a curva descrita, e com a questão **f** que atentem para o fato de esta se situar somente no 1º e 2º quadrantes, e, portanto os valores de y encontrados são todos positivos. Não esperamos que os alunos encontrem dificuldades com a conversão do registro tabular para o registro gráfico, pois o procedimento “ponto por ponto”, ou seja, encontrar os valores das coordenadas de alguns pontos e em seguida localizá-los no Plano Cartesiano, não parece apresentar dificuldades para os alunos (Duval,1988).

A questão **g** foi elaborada para enfatizar para o aluno que a função descrita não "toca" o eixo dos x, pois não existe valor atribuído a x que conduza a um valor $y=0$, esperamos que os alunos respondam que ela não toca o eixo dos x.

A última questão foi elaborada tendo como objetivo levar o aluno a ampliar seu conhecimento sobre a função $y=2^x$; esperamos que ele responda que a função é crescente, pois aumentando-se os valores de x os valores correspondentes em y também aumentam.

6.3.1.2 Analise a posteriori da atividade 1

Para iniciar esta atividade, os alunos formaram duplas. Desenvolver atividades sem uma explicação prévia do professor acerca do conteúdo desenvolvido na atividade, era uma situação nova e, num primeiro momento não lhes pareceu confortável.

O desenvolvimento da atividade durou cerca de 40 minutos. Os alunos pareciam interessados em resolvê-la. Seu objetivo era a identificação da Função Exponencial nos diferentes registros de representação, assim como a conversão do registro algébrico para o gráfico, mediada pelo registro tabular.

Na resolução da questão **a**, conforme previsto na análise a priori, as duplas de uma forma geral, não tiveram dúvidas para trabalhar com o registro tabular, mas as tiveram com relação ao tratamento de potências com expoentes negativos e com equações exponenciais. Assim, para completar o item **a** da atividade foi necessária a nossa intervenção, realizada por meio de uma exposição oral, usando quadro de giz, para os esclarecimentos adequados.

As duplas responderam de forma adequada à questão **b. T**odas responderam que os valores de y aumentam, quando aumentamos os valores de x. No entanto, na resolução da questão **c** e **d**, apresentaram muita dificuldade. Novamente foi necessária a nossa orientação e o uso de alguns exemplos adicionais para que os alunos construíssem o conhecimento a respeito desta característica das potências.

Após este momento, todas as duplas voltaram a resolver a atividade e afirmaram que não existe valor de x que conduza a valores negativos de y, e responderam a questão **d**, afirmando que não existe valor de x que conduza a um valor $y=0$. Estávamos trabalhando o conceito de domínio e imagem da Função Exponencial, como vimos no capítulo 3.

Na resolução da questão **e**, os alunos em geral não apresentaram dificuldades para representar os pontos no gráfico, apenas estranharam o traçado da curva. Iniciavam tentando traçar uma reta, e como não era possível, perguntavam se o registro estava correto. Observamos que duas duplas não se preocuparam com a escala do gráfico, o que levou a uma visualização ruim da curva desenhada por estas duplas. Percebemos que a conversão do registro tabular para o gráfico não apresentou muitas dificuldades para as outras duplas.

Pelas respostas dadas para a questão **f**, os alunos parecem ter percebido que a curva descrita pela função, apenas se aproxima do eixo dos x, mas não chega a tocá-lo. Esta percepção é importante para a determinação do domínio da função. Nenhuma dupla fez menção aos quadrantes e três duplas mencionaram que os valores de y não são negativos.

Na questão **g**, conforme esperado, todas as duplas responderam que os valores de y aproximam-se de zero. Todas as duplas parecem ter percebido que a função é crescente.

6.3.2 ATIVIDADE 2

a) Complete a tabela, de acordo com a função $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	0		5	-1			-2
y		8			2	128	

b) O que acontece com os valores de y quando aumentamos os valores de x?

c) Existe algum valor de x que conduz a valores negativos de y? Por que você acha que isto ocorre?

d) Existe algum valor de x que conduz ao valor $y = 0$?

e) Represente graficamente a função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

f) Justifique por que o gráfico não toca o eixo x e não tem pontos nos quadrantes 3 e 4.

g) Compare o gráfico construído nesta atividade com a anterior, observando que existe uma diferença com relação à curva. Por que você acha que ocorreu esta diferença?

h) Olhando para o gráfico compare-o com a resposta que você deu em c.

i) Olhando para o gráfico, o que significa o item d?

j) Qual o significado gráfico do que acontece com a característica que você observou no item b?

l) Que conclusão você obtém comparando $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$?

6.3.2.1 Análise a priori da atividade 2

Esta atividade teve como objetivo proporcionar aos alunos a identificação da Função Exponencial na sua forma algébrica, tabular e gráfica. Iniciamos esta atividade apresentando o registro algébrico $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e solicitando que o aluno complete a tabela ressaltando a relação estabelecida entre as variáveis independente x e dependente y.

Esperamos que ao realizarem esta atividade, os alunos encontrem algumas dificuldades na resolução das operações envolvendo potências em que a base é fracionária, e também quando os valores do expoente x forem negativos. Achamos pertinente colocar valores negativos para x, pois os alunos geralmente encontram dificuldades para trabalhar com expoentes negativos, e poderiam por esta razão, evitar estes valores e isto poderia limitar a representação gráfica. Pretendemos leválos a perceber que ao tomar valores positivos ou negativos para x, os valores de y ocorrerão somente nos 1º e 2º quadrantes (região positiva para y).

Como resposta à questão **b**, esperamos que os alunos percebam que: aumentando-se os valores atribuídos a x os valores de y diminuem. A questão **c** foi colocada, pois esperamos que os alunos, ao analisarem os valores na tabela, percebam que não foram encontrados valores negativos para y. Ao solicitarmos a justificativa para este fato, esperamos por respostas que relacionem as propriedades de potência que afirmam que todo número positivo elevado a qualquer expoente real será sempre positivo.

Para reforçar a propriedade de potência em que $a^x = 0 \Rightarrow a = 0$ para todo $x \in \Re^*$, elaboramos a questão **d**; esperamos que os alunos percebam que na função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ não há valor de x que conduza a $y = 0$.

Ao solicitarmos a representação gráfica da função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (questão **e**), pretendemos que os alunos conheçam a curva descrita e com a questão **f** que atentem para o fato desta estar situada somente nos 1º e 2º quadrantes, e, portanto os valores de y encontrados são todos positivos, e nunca encontrarão $y = 0$.

Com a questão **g**, os alunos poderão reconhecer as diferenças entre as representações gráficas das funções $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Esperamos como possíveis respostas à esta questão, que a primeira função representa uma função crescente e a segunda uma função decrescente; ou até mesmo esperamos que algum aluno possa fazer alguma relação atribuindo esta diferença a diferença entre as bases no registro algébrico.

A questão **h** foi colocada com o objetivo de levar o aluno a perceber que o gráfico obtido ocupa somente o primeiro e segundo quadrantes, portanto os valores encontrados para y são todos positivos. Na questão **i**, esperamos que os alunos percebam que na função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ não há valor de x que conduza a $y = 0$.

A questão **j** foi elaborada para que os alunos observem que a função é decrescente, pois aumentando-se os valores para x os valores correspondentes em y,diminuem.

A última questão, tem por objetivo proporcionar aos alunos um momento para relatar as conclusões a que chegarem após a realização destas atividades. Poderão neste momento fazer uma comparação entre os dois registros algébricos, observando que as bases são invertidas, ou comparar os registros gráficos, ou até mesmo relacionar a representação algébrica com a gráfica.

Ao final destas atividades (1 e 2) pretendemos fazer juntamente com os alunos uma síntese das atividades enfatizando que para uma Função Exponencial:

- Se $a > 0$ e $a \in \Re$ então $a^x > 0, \forall x \in \Re$.
- $y = a^x$ é uma função crescente se $a > 1$ e uma função decrescente se $0 < a < 1$.
- O gráfico tem aspectos específicos que são associados às características da função.

É importante também que o aluno perceba que:

- A tabela, o gráfico e a expressão algébrica são registros de uma mesma função.
- As variáveis da função exponencial apresentam uma relação de dependência onde a variável x é independente e a variável y dependente.
- Na Função Exponencial, o crescimento ou decrescimento estão relacionados com o valor da base.
- A imagem da função é o conjunto dos números reais positivos.

6.3.2.2 Analise a posteriori da atividade 2

O desenvolvimento desta atividade ocorreu logo após os alunos terminarem a atividade 1. Durou cerca de 40 minutos. Conforme as duplas iam terminando a atividade 1, recebiam a atividade 2, e iam resolvendo.

Na questão **a**, novamente as duplas apresentaram dificuldades com relação ao tratamento de expressões envolvendo potências com expoente negativo, mas a dificuldade agora estava mais no fato da base ser fracionária. Novamente foi necessária a nossa intervenção, com o auxílio de quadro de giz e esclarecimentos adequados, para que completassem adequadamente a tabela, não comprometendo assim a realização da atividade.

Na resolução da questão **b,** cinco duplas responderam que os valores de y diminuem quando aumentamos os valores de x. No entanto três duplas responderam que os valores de x e y são inversamente proporcionais. Perguntamos para estes alunos porque estavam utilizando o termo inversamente proporcionais, e obtivemos como resposta que: "*são inversos porque quando o* x *aumenta e* y *diminui.".* Observamos que eles perceberam que há relação entre x e y, mas apresentam um conceito inadequado de grandezas inversamente proporcionais.

Na questão **c**, todas as duplas responderam que não existem valores de x que conduzam a valores negativos de y, quatro duplas justificaram que isto ocorre porque a base é um número positivo, três duplas afirmaram que os valores se aproximam de zero, e uma dupla respondeu: *"Não porque toda função exponencial tem uma resposta positiva."* Observamos com estas repostas que as duplas perceberam que os valores de y serão sempre positivos, e suas justificativas estão relacionadas às propriedades das potências conforme prevíamos na análise a priori.

Todas as duplas responderam "não" à questão **d**, afirmando que não existe valor de x que conduza ao valor $y = 0$.

Na representação gráfica, solicitada na questão **e**, os alunos novamente não apresentaram dificuldades para representar os pontos no gráfico. Cinco duplas construíram uma tabela de valores de x e y para auxiliá-los na construção do gráfico. Apenas uma dupla apresentou uma representação gráfica ruim, pois não se preocupou com a escala utilizada no eixo dos y (isto também foi verificado na resolução da atividade 1 pela mesma dupla).

Na questão **f**, quatro duplas justificaram que os valores de y se aproximam de zero. Outras quatro duplas, afirmaram que não existe $y = 0$ e que y não é negativo. Nenhuma dupla fez menção aos quadrantes.

Nas respostas dadas à questão **g**, pudemos perceber que todas as duplas observaram que a diferença entre as curvas é que uma era crescente e a outra decrescente, conforme era previsto. Apenas duas duplas, afirmaram que a diferença ocorre porque as bases são diferentes. Observamos que estas duplas associaram unidades significantes da escrita algébrica com a variável visual da representação gráfica.

Na questão **h**, nenhuma dupla mencionou que a curva era descrita no 1º e 2º quadrantes, mas responderam:

- "Pode chegar a um número que se aproxima de zero, mas nunca negativo".
- "De fato o valor de y somente se aproxima de zero".
- "Está totalmente correta, porque não há resposta negativa".
- "Não existem valores de x para que y seja negativo".
- "A curva aproxima-se de zero, mas não chega ao eixo negativo".
- "Vemos que quando os números são maiores que zero, na abscissa, nunca chegam a tocar em x".
- "Pode chegar a um número bem pequeno, mas nunca negativo".
- "Porque o "y" se aproxima bastante de "0", mas não chega a atingi-lo".

Observamos pelas respostas dadas que as duplas associaram algumas características visuais gráficas com as propriedades de potências discutidas no início desta atividade.

Cinco duplas afirmaram, na questão **i**, que os valores de y se aproximarão de zero, mas nunca serão negativos. Três duplas afirmaram que não há $y=0$.

Na questão **j**, três duplas referiram-se ao fato da curva ser decrescente, três duplas afirmam que quando o x aumenta o y diminui. Uma dupla, respondeu: *"Que a curva do gráfico dirige-se à esquerda e não à direita*". Entendemos que esta dupla observou que a função é decrescente, e esta foi a maneira encontrada para expressar. Uma dupla respondeu: "*O gráfico divide por 2 os resultados."* Com esta resposta, podemos observar que a dupla observou que os valores decresciam e se reduziam à metade.

Com as respostas dadas à questão **l**, encontramos:

- "Que os desenhos dos gráficos apesar de se parecerem, são totalmente invertidos, pois um vai à esquerda (decrescente) e um vai à direita (crescente). E também uma multiplica e a outra divide".
- "A primeira multiplica é crescente e a segunda divide é decrescente".
- "A função $y=2^x$ é diretamente proporcional e $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ é inversamente proporcional".

Observamos que as outras cinco duplas responderam que um gráfico é o inverso do outro. Quando perguntamos o que queriam dizer com a palavra "inverso", justificaram que é o fato de uma função ser decrescente e a outra crescente. Com estas repostas verificamos que as duplas observaram diferenças visuais entre os registros gráficos, e começam a estabelecer associações com o registro algébrico.

Ao final desta atividade, após a entrega das mesmas pelas duplas, iniciamos uma discussão para enfatizar algumas características da Função Exponencial, descritas na análise a priori, como por exemplo, a existência de diferentes registros de representação da Função Exponencial, a relação entre a base escrita no registro algébrico e o registro de representação gráfica da curva, crescente ou decrescente. Ressaltamos também, o domínio e a imagem, e o fato do gráfico da função estar no 1º e 2º quadrantes.

6.3.3 ATIVIDADE 3

Um biólogo acompanhou o crescimento da folha circular de uma planta aquática. Durante suas observações percebeu que a cada mês o diâmetro da folha triplicava. Se no início de suas observações o biólogo mediu a folha e obteve 1cm de diâmetro, qual será o diâmetro que ela terá ao final de seu prazo máximo de sobrevivência, que é de 4meses e 12 dias?

a) Elabore uma tabela representando a situação.

Tempo (meses)	Diâmetro (cm)

b) Se essa planta tivesse um tempo de sobrevivência de 6 meses qual seria o diâmetro de sua folha?
c) Em quanto tempo a folha desta planta atinge um diâmetro de 81cm?
d) Se hipoteticamente, a folha dessa planta crescesse por x meses, qual seria seu diâmetro ao final do mês x?
e) A equação encontrada na questão acima representa uma função. Justifique esta afirmação.
f) Construa o gráfico desta função.
g) Qual é o domínio e a imagem desta função?
h) Existe um valor de x para o qual y é zero?
i) Qual será o valor de y quando x for igual à zero?

j) Responda à questão proposta no início da atividade: “Qual será o diâmetro que a planta terá ao final de seu prazo máximo de sobrevivência, que é de 4 meses e 12 dias"?

6.3.3.1 Análise a priori da atividade 3

O objetivo desta atividade é proporcionar aos alunos, a construção de uma tabela a partir de informações de uma situação problema proposta por meio de um registro em linguagem natural, depois escrever uma sentença matemática que represente esta situação problema, realizando os tratamentos necessários e finalizar com a construção gráfica.

Iniciamos a atividade apresentando a situação problema no registro de linguagem natural e em seguida solicitamos o preenchimento de uma tabela relacionando os valores das variáveis tempo (em meses) e diâmetro (em centímetro). Nesta atividade além da interpretação da situação problema, é exigida a conversão para a escrita simbólica (completar a tabela), e por meio desta, é que os tratamentos poderão ser realizados. Então os tratamentos não dependem somente dos conhecimentos das operações matemáticas, dependem também da interpretação da situação problema e da conversão do registro em linguagem natural para o registro algébrico. No transcorrer da resolução desta questão, esperamos que os alunos atribuam valores inteiros para o tempo e que não tenham dificuldades para encontrar o valor correspondente para o diâmetro.

Para as questões **b** e **c**, baseadas na nossa experiência como educadoras, não esperamos que os alunos encontrem dificuldades para resolvê-las, e esperamos como resposta:

Para a questão **b**: 729cm.
Para questão **c**: 4 meses.

A questão **d** foi elaborada com o objetivo levar o aluno a encontrar uma expressão algébrica que represente a situação problema. Para esta questão esperamos que os alunos encontrem dificuldades para realizá-la por ser uma atividade que exige a conversão do registro tabular para o registro algébrico. Na realização desta atividade consideramos a possibilidade da nossa intervenção para auxiliá-los a encontrar a representação $y = 3^x \ ou \ d = 3^t$.

Com relação à questão número **e**: "*A equação encontrada na questão acima representa uma função. Justifique esta afirmação.*", criamos este momento para que o aluno possa revisar o conceito de função e esperamos que reconheçam e respondam que sim, pois expressa a relação de dependência entre as variáveis: tempo e diâmetro, ou entre x (tempo) e y (diâmetro).

Na questão **f**, solicitamos a construção do gráfico representativo desta função, para que eles possam observar o comportamento da curva e verificar que ela tem início e fim, pois o tempo máximo de sobrevivência da planta é de 4 meses, portanto temos um domínio finito e não negativo e um conjunto imagem positivo e finito. Possivelmente, alguns alunos poderão construir o gráfico, em que a curva se estenda ao segundo quadrante ou que continue para valores de x maiores que 4.

A questão **g**, "Qual é o domínio e a imagem desta função?", foi inserida para que os alunos observem o domínio e o conjunto imagem da função. Possivelmente alguns alunos não atentem para o fato de que a situação problema se refere a uma planta que tem um tempo de vida máximo e que implicações este fato tem para a determinação do domínio e imagem de uma função.

Como resposta à questão **h**, esperamos que os alunos escrevam que não, pois esperamos que os alunos percebam que na função $y = 3^x$ não há valor de x que conduza a $y = 0$.

A resposta esperada na questão **i** é 1, pois $\forall a \in \Re^*$ temos $a^0 = 1$. Nesta questão não esperamos que os alunos encontrem dificuldades.

A questão **j** foi elaborada para que os alunos possam finalizar a atividade encontrando uma solução para a situação problema proposta. Para realizar esta atividade esperamos que eles encontrem certo grau de dificuldade e tentem resolver o problema aplicando uma de regra de três, como se o crescimento da planta fosse algo linear. A resposta correta é $3^{4,4}$cm para o diâmetro, ou aproximadamente 125,70cm ou ainda que seja um valor entre 3^4 e 3^5, ou seja, entre 81 e 243cm.

6.3.3.2 Análise a posteriori da atividade 3

Esta atividade foi proposta para os alunos para que desenvolvessem inicialmente sem nosso auxílio. Teve duração de aproximadamente 40 minutos. As duplas não apresentaram dificuldades para resolver as questões **a, b** e **c.** Todas responderam de forma adequada. A conversão do registro em linguagem natural para o registro tabular, nesta atividade, não apresentou dificuldades para os alunos.

Para resolver a questão **d,** no entanto, foi necessária nossa intervenção, pois os alunos conseguiram encontrar a regularidade dos dados da tabela, verificamos isto por meio de suas verbalizações, mas tiveram dificuldades para representar esta regularidade por meio de uma expressão algébrica, ou seja, de realizar a conversão do registro tabular para o registro algébrico. Foi necessária nossa intervenção, utilizando o quadro de giz e juntamente com os alunos chegar ao registro de representação esperado.

Na questão **e,** quatro duplas justificaram que $y = 3^x$ é uma função, pois para cada valor de x existe um valor em y. Uma dupla, justificou que, $y = 3^x$ é uma função pois estabelece uma relação entre os meses e o crescimento da planta. Uma dupla, utilizou de uma linguagem mais formal: “$f : R \rightarrow R^*{}_+$, tal que $f(x) = a^x$”. Duas duplas referiram-se ao fato de que a cada valor de x, o valor de y é triplicado.

Com relação à construção gráfica, questão **f**, as duplas não apresentaram dificuldades. Seis duplas “desenharam” o traçado da curva de forma esperada. Duas duplas, não se preocuparam com a escala e observamos que a representação gráfica da curva, se “aproximou” de uma reta. Um fato que observamos, é que apenas duas duplas, construíram o gráfico, localizando a curva no 1º e 2º quadrantes, não observaram que os valores de x, referem-se aos meses de vida da planta, portanto não poderiam ter valores negativos. No entanto, verificamos que todas as duplas não atentaram para o tempo de vida limitado da planta no registro gráfico, isto foi detectado pois todas as duplas construíram o gráfico, sem limitar os valores para o domínio.

As repostas dadas para a questão **g**, mostraram que a dificuldade na determinação do domínio foi maior que a esperada. Somente uma dupla registrou o domínio e a imagem finitos, e utilizaram da representação de intervalo. Três duplas, responderam que: “Domínio: R_{+}^{*} e Imagem: $R / y \geq 1$. Duas duplas afirmaram que: “$D : x \geq 0 \;\; e \;\; I : y > 0$”. Uma dupla apenas mencionou que o x estaria relacionado ao domínio e o y à imagem. E outra dupla, representou inadequadamente tanto o domínio, quanto a imagem, enumerando os elementos do conjunto, não atentando para o fato de tanto o domínio quanto a imagem pertencerem ao conjunto dos números reais.

Observamos que os alunos, responderam adequadamente às questões **h** e **i**. Acreditamos que a realização das atividades 1 e 2, tenham colaborado para este resultado.

Na realização da questão **j**, alguns alunos perguntaram: “*Como calcular 12 dias?*”. Devolvemos a pergunta para a sala e um aluno considerou a possibilidade de utilizar uma “regra de três". Todos aderiram a esta idéia e chegaram a 4,4 dias. Neste momento a dificuldade foi maior, pois elevar uma potência a um expoente decimal ainda não tinha sido trabalhada com eles. Um aluno perguntou se poderia multiplica o 3 por 4,4. Neste momento uma intervenção nossa foi necessária, juntamente com os alunos e com o auxílio da calculadora, chegamos ao resultado esperado.

6.3.4 ATIVIDADE 4

A tabela abaixo mostra a população da cidade de Arapongas, nos anos de 1997 a 2002.

ANO	População
1997	75038
1998	77664
1999	80383
2000	83196
2001	86108
2002	89122

Fonte: IBGE

Obs.: Esta tabela contém uma pequena alteração em relação aos dados fornecidos pelo IBGE, com o objetivo de que uma possível regularidade pudesse ser identificada com mais facilidade pelos alunos.

e) O que você observa em relação ao crescimento da população? Há alguma regularidade?
f) Seria possível estimar qual foi a população em 2003, se os dados da tabela mantivessem esta regularidade? E em 2004?
g) Elabore uma equação algébrica que possa prever qual a população de Arapongas num ano qualquer, admitindo que a população continue a crescer conforme a tabela.
h) Construa um gráfico que represente esse crescimento.

6.3.4.1 Análise a priori da atividade 4

Nesta atividade, colocamos aos alunos uma situação de sua realidade, com a finalidade de proporcionar uma aplicação prática da Matemática. Temos como objetivo proporcionar a eles a possibilidade de realizar a conversão entre o registro tabular (numérico) para o algébrico e do registro tabular para o gráfico. Para que isto ocorra, elaboramos a primeira questão. Neste momento esperamos que os alunos encontrem dificuldades em conseguir quantificar esta regularidade, pois os alunos geralmente encontram dificuldades em tratamentos em operações com números decimais com mais de duas casas depois da vírgula. Esperamos que ao resolver esta questão, os alunos tentem inicialmente encontrar uma regularidade buscando uma proporcionalidade, ou procurando uma parcela fixa. Provavelmente nossa intervenção seja necessária, e poderemos então ter que conduzí-los a encontrar a regularidade, que corresponde a uma taxa de crescimento 3,5% ao ano.

Com a questão **b**, objetivamos levar os alunos a estimarem a população do ano de 2003, supondo que esta regularidade se mantenha. Acreditamos que depois de resolverem à questão **a**, não encontrarão dificuldades para resolver esta questão. A resposta esperada é sim, uma população de aproximadamente 92241 para 2003 e uma população de aproximadamente 95470 para 2004.

Na questão **c**, quando é solicitado aos alunos que elaborem uma equação algébrica que represente esta situação, esperamos que eles encontrem muita dificuldade para resolvê-la, podendo até ser necessário neste momento nossa intervenção para que eles consigam chegar à equação algébrica. Pois, na nossa experiência como educadoras, percebemos que os alunos, de uma maneira geral, não apresentam dificuldades para a conversão do registro algébrico para o tabular, mas observamos que o mesmo não acontece, quando o sentido é invertido, ou seja, do tabular para o algébrico. Duval (2003) se refere a este fato quando afirma: “Nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de saída e de chegada... Geralmente, no ensino um sentido de conversão é privilegiado, pela idéia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido.” (p.20).

Ressaltamos que os alunos, serão orientados a considerar o ano de 1997, como sendo o valor da variável independente x igual à zero, 1998 como 1 e assim por diante. A equação representativa da situação esperada é: $y = 75038 \,.\, (1{,}035)^x$.

O objetivo da questão **d**, é proporcionar a conversão do registro tabular para o registro gráfico. Acreditamos que os alunos não terão dificuldades para realizar esta conversão.

A elaboração desta atividade teve como objetivo, levar o aluno a realizar a conversão do registro tabular para o algébrico, o que consideramos uma conversão com um grau de dificuldade considerável para eles. Como também, a conversão do registro tabular para o gráfico. Ao final da atividade pretendemos discutir:

- A tabela, o gráfico e a equação algébrica são registros de representação de uma mesma função.
- Existe uma relação de dependência entre as variáveis, e que a população é a variável dependente e o tempo a variável independente.
- O domínio é $D = \Re^{+}$ e a imagem é $\mathrm{Im} = \Re_{+}^{*}$ e tendem ao infinito.

6.3.4.2 Análise a posteriori da atividade 4

A resolução desta atividade durou cerca de 45 minutos. Para responder à questão **a,** as duplas tiveram muita dificuldade para encontrar a regularidade. Foi necessária nossa intervenção, que ocorreu por meio de uma discussão sobre o assunto com os alunos, e com o auxílio do quadro de giz. Pelas suas verbalizações, verificamos que eles perceberam que havia um crescimento. Num primeiro momento, tentaram encontrar uma parcela fixa que pudesse ser adicionada a cada ano. Mas suas tentativas fracassaram. Um dos alunos chegou por estimativa a um aumento de aproximadamente 5% ao ano. Foi necessária nossa condução, neste momento, para que eles tentassem descobrir qual a porcentagem de aumento que ocorria ano a ano. Com o nosso auxílio e o da calculadora chegaram a uma conclusão: o crescimento é de 3,5% ao ano. Percebemos que encontrar esta regularidade foi considerado muito difícil para os alunos.

Seis duplas deram como resposta, nos seus registros, que a população cresce 3,5% a cada ano. Uma dupla encontrou como regularidade o número 1,035. Uma outra dupla registrou erroneamente que a população cresce 1,035% ao ano. Observamos que os alunos de uma forma geral apresentaram muita dificuldade para trabalhar com porcentagem, e que a conversão entre as diferentes representações da porcentagem, como por exemplo, converter de 3,5% para 0,035, também apresentou dificuldades.

Depois que encontraram a regularidade esperada, seis duplas responderam de forma adequada à questão **b**. Duas duplas apresentaram erros de cálculo e responderam erroneamente à questão.

Nenhuma dupla conseguiu encontrar a equação algébrica solicitada na questão **c**. Foi necessária uma nova intervenção, para que juntamente com os alunos chegássemos à equação esperada. Observamos que este tipo de conversão, como previsto na análise a priori, apresenta dificuldades para os alunos.

As duplas, também apresentaram dificuldades na construção do gráfico, solicitado na questão **d**. Um dos problemas observados refere-se à escala do gráfico. Cinco duplas não registraram de forma adequada a escala do eixo dos y. Este fato pôde ser observado na visualização da curva encontrada pelas duplas. O desenho da curva se aproxima de uma reta. O que observamos também é que no gráfico apresentado por 7 duplas, a curva tem início no ponto (0; 75038). Isto talvez tenha ocorrido devido ao fato de no início da atividade os alunos terem sido orientados para que representassem, na tabela, o ano de 1997 como $x = 0$.

Após as duplas terminarem de responder a atividade, iniciamos uma discussão sobre as características da Função Exponencial previstas na análise a priori.

Com relação ao desenvolvimento da atividade, percebemos que a conversão do registro tabular para o registro gráfico não apresentou dificuldades para as duplas, no entanto o mesmo não ocorreu, na conversão do registro tabular para o registro algébrico. Esta dificuldade acreditamos, estar também relacionada ao tratamento envolvido no registro. Os cálculos foram considerados difíceis pelos alunos.

Observamos também, que duas duplas não relacionaram ainda, que a equação encontrada na questão **c**, representa uma Função Exponencial, e por isso sua representação gráfica seria uma curva característica de uma Função Exponencial.

6.3.5 ATIVIDADE 5

Parte 1

A- Represente graficamente as funções abaixo, num mesmo plano cartesiano:

$y = 2^x \qquad y = 3^x \qquad y = 4^x$

Observe que as bases das funções na atividade A estão variando. Como esta variação afeta a representação gráfica?

B - Represente graficamente as funções abaixo num mesmo plano cartesiano.

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \qquad y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

Observe que as bases das funções na atividade B estão variando. Como esta variação afeta a representação gráfica?

Comparando as atividades A e B, escreva as semelhanças e diferenças encontradas nos gráficos. Por que você acha que ocorrem estas diferenças?

Parte 2

Represente graficamente as funções abaixo, num mesmo plano cartesiano.

a) $y = 2^x \qquad y = 2^x + 1 \qquad y = 2^x + 2$

Comparando os gráficos, escreva as semelhanças e diferenças encontradas. Por que você acha que ocorrem estas diferenças?

b) $y = 2^x \qquad y = 2.2^x \qquad y = 3.2^x$

Comparando os gráficos, escreva as semelhanças e diferenças encontradas. Por que você acha que ocorrem estas diferenças?

c) $y = 2^x \qquad y = 2^{2x} \qquad y = 2^{3x}$

Comparando os gráficos, escreva as semelhanças e diferenças encontradas. Por que você acha que ocorrem estas diferenças?

d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \qquad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$

Comparando os gráficos, escreva as semelhanças e diferenças encontradas. Por que você acha que ocorrem estas diferenças?

e) Considere a função $y = a^x$, o que acontece com ela quando você varia o a?

f) Considere a função $y = K.a^x$, o que acontece com ela quando você varia o k **?**

g) Considere a função $y = k.a^x + c$, o que acontece com ela quando você varia o c?

6.3.5.1 Análise a priori da atividade 5

Esta atividade está prevista para ser realizada no laboratório de informática com a utilização do software "Grafmath". A escolha do software se deu pelo fato dos alunos já estarem familiarizados com ele, e também que este proporcionaria uma economia de tempo e uma melhor visualização gráfica. Esperamos que os alunos não encontrem dificuldade para realizar esta atividade, pois eles já conhecem o software, mas talvez encontrem alguma dificuldade em escrever a Função Exponencial na linguagem específica do software, mas neste caso poderão ter nosso auxílio. Na elaboração desta atividade, nas questões A e B, da parte 1, temos como objetivo, levar os alunos a compreender que quanto maior for o valor da base, maior será a variação dos valores de y, ou seja, a função tem um crescimento mais rápido (questão A), e quando o valor da base fosse diminuindo (questão B) a curva apresentaria um decrescimento mais acentuado.

Para finalizar a parte 1, elaboramos uma questão para que eles escrevam as semelhanças e diferenças encontradas nos gráficos. Esperamos que eles associem que quando a base no registro algébrico é um número maior que 1, a função no registro gráfico é crescente, e que quanto maior for o valor da base maior será a variação no registro gráfico. Também que quando a base for um número entre 0 e 1, a função é decrescente e quanto menor for a base maior será a variação. Uma possível semelhança será que as curvas passam pelo ponto (0;1).

Com a elaboração da parte 2, na questão **a**, pretendemos que os alunos identifiquem que ao modificamos o valor de b na função $y = 2^x + b$, graficamente a função transladaria verticalmente em relação à função $y = 2^x$.

Na questão **b**, esperamos que eles identifiquem que quando multiplicamos a função $y = 2^x$ por 2 ou por 3, isto leva a uma mudança na concavidade da curva, o crescimento vertical fica mais acentuado, e que ao mesmo tempo a função translada verticalmente.

Elaboramos a questão **c**, para que os alunos percebam o que ocorre graficamente quando a variável x, é multiplicada por 2 ou por 3, eles poderão perceber que esta mudança acarreta um crescimento mais acentuado, e que as funções interceptam o eixo y no ponto (0;1).

A questão **d** foi elaborada para que eles tenham um contato também com funções decrescentes, e percebam que na função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + b$, ao modificarmos o valor de b, graficamente a função translada verticalmente em relação à função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Na questão **e** esperamos que os alunos percebam que quanto maior for o valor de a, maior será a variação dos valores de y. Na questão **f**, esperamos que eles observem que quando variar o valor de k, a função translada na vertical e quanto maior for o valor de k mais acentuado será o crescimento. E na questão **g**, quando variar o c, a função translada verticalmente.

6.3.5.2 Análise a posteriori da atividade 5

A realização desta atividade durou cerca de 40 minutos. Os alunos mostraram-se interessados em realizar a atividade no laboratório de informática. As duplas de forma geral não apresentaram dificuldade para trabalhar com o software "Grafmath", conforme era esperado. No entanto uma dificuldade encontrada foi de como representar as Funções Exponenciais descritas, na atividade, na linguagem do programa.

Parte 1.

Observamos que os alunos, de uma forma geral, apresentaram dificuldades para expressar em linguagem natural as características observadas nos gráficos. Esta dificuldade pode ser detectada, por exemplo, na questão A. A resposta esperada era que, a curva que descreve as funções, cresce mais rapidamente, conforme o valor da base aumenta. Seis duplas responderam que a curva se aproxima cada vez mais do eixo dos y. Podemos inferir que as duplas queriam se referir ao crescimento acentuado, pois visualmente temos a curva mais próxima do eixo dos y. Responderam que:

- "Quanto maior o valor de x, mais a linha se aproxima do eixo das ordenadas."
- "Quanto mais aumentamos a base a reta fica próxima de y."
- "Tem o mesmo ponto em y, se aproximam cada vez mais em y, crescente."
- "As linhas ficam cada vez mais próximas da reta y."
- "Quanto maior a base, o gráfico mais se aproxima do eixo y."
- "Quanto maior a base, mais próxima a curva fica da ordenada y. "

Na questão B, novamente sete duplas responderam que quanto menor for a base, mais a função se aproxima do eixo dos y. Nesta questão apenas uma dupla referiu-se ao fato da função ser decrescente: "*Elas são decrescentes, passam no mesmo ponto em y e cada vez mais se aproximam de zero.".*

Com relação à questão que se refere às semelhanças e diferenças encontradas nos gráficos, quatro duplas responderam que a semelhança está em que todas passam pelo mesmo ponto (0,1). A diferença é que algumas são crescentes e outras decrescentes.

- "A semelhança ocorre no fato de ambas as funções exponenciais se aproximam de 0. A diferença é que para se aproximar de zero a função A deve aumentar sua base, enquanto a B deve diminuir".
- "Elas são inversas. Essa diferença ocorre por causa da variação das bases".

Com relação à segunda resposta, podemos inferir que esta dupla esteja se referindo que se a base for um número maior que 1, a função é crescente e se for um número entre 0 e1 a função é decrescente. Uma das duplas respondeu que em ambos os casos a função aproxima-se de y (eixo dos y). Uma outra dupla afirmou que as funções são inversamente proporcionais.

Parte 2

Na questão **a**, sete duplas responderam que a função "não passa" no mesmo ponto em y. Acreditamos que a duplas estariam se referindo ao deslocamento vertical das funções em relação à curva de $y = 2^x$. Apenas três duplas responderam sobre a semelhança, que segundo elas estaria no fato de todas as funções serem crescentes. Algumas respostas que encontramos:

- *"A semelhança é que são crescentes, a diferença está no seu ponto de intersecção que aumenta cada vez mais."*
- *"São crescentes, mas não passam pelo mesmo ponto em "y". Elas nunca se encontram".*
- *"Elas não se interceptam e sempre aumenta a escala em 1".*
- *"Não tocam o mesmo ponto em y, conforme aumentamos a somatória, a curva se distancia do eixo x."*

Na questão **b**, observamos que os alunos tiveram dificuldades para expressar as conclusões a que chegaram. Três duplas parecem ter observado que o crescimento vertical fica mais acentuado. Algumas respostas encontradas:

- *"Quanto maior o resultado mais se distancia em y."*
- *"São crescentes e passam pelo mesmo ponto em y, mas conforme aumenta-se o valor multiplicador, a linha do gráfico se aproxima cada vez mais de y."*
- *"A semelhança é que passam no mesmo ponto, a diferença está na inclinação da curva."*
- *"Sempre aumentam 1cm no eixo y."*

Observamos que três duplas afirmaram erroneamente que as funções passam pelo mesmo ponto, ou seja, não observaram que a função translada verticalmente.

Na questão **c**, observamos que seis duplas mencionaram que todas as funções passam pelo mesmo ponto. Três duplas mencionaram o crescimento vertical:

- *"Apesar de passarem pelo mesmo ponto, se aproximam mais de y."*
- *"Todas passam pelo ponto (0,1), a curva se aproxima de y."*

- *“Quanto maior for a base mais ela vai chegar perto de y.”*

Estamos entendendo que ao relatarem *“aproxima de y”* estão referindo-se ao crescimento vertical acentuado. Observamos que uma das duplas se refere ao aumento da base, o que não é adequado, deveria ter mencionado o aumento do expoente.

Cinco duplas responderam que as funções descritas na questão **d**, são decrescentes. Não relataram observar que as funções transladam verticalmente em relação à função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, mas verificaram que as funções não passam pelo mesmo ponto no eixo dos y.

Na questão **e**, observamos que cinco duplas mencionaram que ao variar o valor de a, a função mais se aproxima do “eixo y”, podemos inferir que estão se referindo a um crescimento vertical acentuado. Três duplas observaram que as funções passam pelo mesmo ponto.

Nas respostas da questão **f**, cinco duplas mencionaram o que a curva se aproxima mais do eixo dos y ao variar o valor de k. Apenas uma dupla mencionou erroneamente que a função é crescente. E apenas uma dupla parece ter se referiu ao crescimento vertical*: “... aumenta em 1cm no eixo y”.*

Na questão **g**, apesar da dificuldade de expressão, quatro duplas parecem ter observado o deslocamento vertical. Responderam:

- “Ocorre variação no ponto de intersecção em y.”
- “Distanciam de x.”
- “A linha nunca passa pelo mesmo ponto em y.”
- “Quanto maior o “c” mais se afasta de zero.”

Observamos que os alunos tiveram dificuldade para expressar em linguagem natural as características das funções que observavam na representação gráfica. Ou seja, a conversão da representação gráfica para a linguagem natural, mostrou ser uma atividade difícil. Esta dificuldade parece estar no vocabulário, pois os alunos não conseguiam encontrar palavras para expressar o que visualizavam.

6.3.6 ATIVIDADE 6

Um terreno hoje vale R$10 000,00, e esse valor fica 10% maior a cada ano que passa.

a) Qual será seu valor daqui a 4 anos?
b) Qual a lei de formação, que relaciona o valor do terreno **V** (em reais) com o tempo **t** (em anos).
c) Represente graficamente esta situação.

6.3.6.1 Análise a priori da atividade 6

Ao elaborarmos esta atividade, temos como objetivo além da identificação dos diferentes registros de representação propor uma situação de aplicação da Função Exponencial. O objetivo desta atividade foi o de apresentar uma situação, inicialmente no registro de linguagem natural e propor conversões para o registro algébrico e gráfico. Provavelmente os alunos não terão dificuldades para resolver a questão **a,** pois poderão calcular ano a ano, elaborando até mesmo uma tabela, e chegar ao valor de R$14641,00. Esperamos que a conversão da linguagem natural para a tabular se mostre facilitada, já que os alunos neste momento terão desenvolvido atividades anteriores envolvendo porcentagem e este tipo de conversão. Mas alguma dupla poderá apresentar a resolução calculando a primeira parcela e depois somando parcelas equivalentes, semelhante ao procedimento de juros simples.

Na questão **b**, esperamos que eles apresentem certo grau de dificuldade, apesar de na atividade 4, a conversão do registro tabular para o algébrico ter sido realizada, sendo necessária nossa intervenção para que consigam chegar a uma lei de formação que relacione o preço do terreno com o tempo. A lei esperada é $y = 10000 \ . \ (1{,}1)^x$ ou $V = 10000 \ . \ (1{,}1)^t$.

Na questão **c**, diante da resolução das questões **a** e **b**, acreditamos que os alunos não encontrarão dificuldades para a construção do gráfico.

6.3.6.2 Análise a posteriori da atividade 6

No início desse encontro, abrimos uma discussão com os alunos sobre as características da Função Exponencial trabalhadas na atividade 5, enfatizando a relação entre as características observadas na representação algébrica e sua influência a representação gráfica. Foi enfatizado também o domínio e a imagem.

Após este momento, foi entregue para as duplas a atividade 6. Um dos alunos perguntou como poderia calcular porcentagem sem o uso da calculadora. Neste momento repassamos a pergunta para os alunos. Mencionaram a regra de três. Observamos que todas as duplas utilizaram desse procedimento para calcular as porcentagens. Convém observar que normalmente nas aulas regulares os alunos não têm o hábito de utilizar a calculadora.

Apenas uma das duplas calculou 40% para obter os quatro meses, e perguntou se este resultado estava correto. A pergunta foi ouvida por uma dupla próxima que disse que não estava correta. Conduzimos então, a dupla, por meio de questionamentos, para que percebesse que não se tratava de juros simples.

Todas as duplas responderam corretamente à questão **a**. Quatro duplas utilizaram um registro de representação tabular para chegar à resposta.

Para a resolução da questão **b**, os alunos apresentaram muita dificuldade. Não conseguiram realizar a conversão da representação em linguagem natural para a expressão algébrica, o mesmo aconteceu para as duplas que utilizaram a representação tabular, que também não conseguiram realizar a conversão para a representação algébrica. Diante disto, fomos até o quadro de giz e juntamente com os alunos chegamos à representação $y = 10000 \,.\, (1{,}1)^x$. Novamente observamos que os alunos apresentaram muita dificuldade para representar a porcentagem na escrita decimal, e realizar as conversões entre os diferentes registros de representação envolvendo porcentagem, como por exemplo, verificar que multiplicar por 1,1 representa um aumento de 10%. Observamos então que este tipo de conversão precisa ser trabalhado com estes alunos.

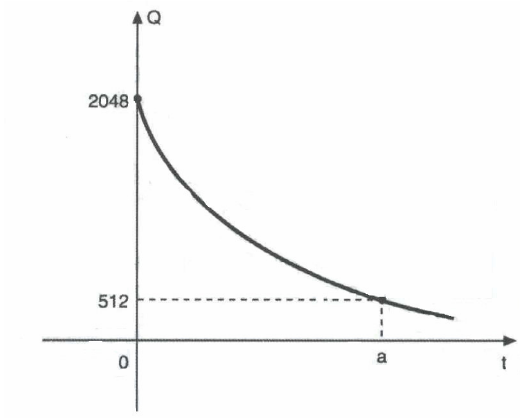
Com relação à questão **c**, os alunos não apresentaram dificuldades para a conversão da representação tabular para a representação gráfica. Observamos que os alunos que não tinham feito a representação tabular na questão **a**, optaram por fazê-la na questão **c.** Observamos que a conversão do registro tabular para o gráfico é preferida pelos alunos, pois todas as duplas de uma forma ou de outra utilizaram o registro tabular como mediador da conversão do registro em linguagem natural, para o registro gráfico. Observamos que os alunos tomaram mais cuidado com a escala do gráfico, principalmente com o eixo dos y, com exceção de uma dupla, que novamente apresentou uma representação gráfica ruim, por causa da escala.

Verificamos que cinco duplas apresentaram o gráfico da função iniciando no ponto (0 ;10 000) , enquanto que três duplas tiveram sua curva no 1º e 2 quadrantes, interceptando o eixo y no ponto (0;10 000).

Após as duplas entregarem as atividades, conduzimos uma discussão, ressaltando o fato da situação problema apresentada, ser representativa de uma Função Exponencial, Enfatizamos a variação que ocorre, verificada tanto nos valores encontrados na tabela, como também sua influência no registro gráfico, e comparamos com a variação encontrada, por exemplo, na função de 1º grau. Os alunos conseguiram relacionar com exemplos de problemas que tinham sido trabalhados no conteúdo Progressão Geométrica. Também foi discutido o domínio da função.

6.3.7 ATIVIDADE 7

Uma substância se decompõe aproximadamente segundo a lei $Q(t) = k.2^{-0,5.t}$ em que **k** é uma constante, **t** indica o tempo (em minutos) e **Q(t)** indica a quantidade de substância (em gramas) no instante t.



d) Considerando os dados desse processo de decomposição mostrados no gráfico, determine os valores de k na expressão algébrica e de a, representado no gráfico.
e) Qual a quantidade de substância (em gramas) após 6 minutos de iniciado o processo de decomposição?
f) Se na representação algébrica, a base é um número maior que 1, como você explica o fato da função ter como representação gráfica uma curva decrescente?

6.3.7.1 Análise a priori da atividade 7

Nesta atividade pretendemos que os alunos desenvolvam a partir de uma situação problema, a identificação dos parâmetros baseados no registro gráfico.

Na questão **a** e **b**, buscamos observar se o aluno compreendeu o conceito de Função Exponencial, o seu registro algébrico e gráfico. Para responder a esta questão o aluno deverá realizar tratamentos de cálculo envolvendo equações exponenciais, neste momento, poderão encontrar dificuldades. Os alunos terão sucesso nesta atividade se responderem que o valor encontrado para k é 2048 e o valor encontrado para a é 4. Na questão **b**, a resposta desejada é de 256 gramas.

Ao elaborarmos a questão **c** pretendemos que os alunos consigam identificar que a função escrita na forma algébrica está com a base invertida, pois existe o sinal negativo multiplicando o expoente.

6.3.7.2 Análise a posteriori da atividade 7

Esta atividade durou cerca de 45 minutos. Os alunos apresentaram muita dificuldade, solicitaram muitas vezes nosso auxílio. Na questão **a**, consideraram a questão muito complicada e precisamos conduzi-los a observarem quais as informações contidas no gráfico, eles observaram que o gráfico era de uma Função Exponencial e um dos alunos levantou que quando $t = 0$, Q que tem um valor de 2048. Após este momento, as duplas de uma maneira geral, substituíram estes valores na função, e encontraram o valor de k como 2048.

Na segunda parte desta questão, para encontrar o valor de a, as duplas conseguiram encontrar a equação, substituindo o valor de k por 2048 e o valor de Q por 512, mas encontraram muita dificuldade para resolver a equação exponencial, somente quatro duplas encontraram o valor de $a = 4$. Todas as duplas apresentaram muita dificuldade para realizar o tratamento, precisando da nossa ajuda e observamos que solicitavam a ajuda de outras duplas. As dificuldades novamente foram com relação às propriedades de potencias com expoente negativo e também com relação á resolução da equação exponencial.

Para responder à questão b, as duplas apresentaram dificuldades quanto ao tratamento envolvendo potências com expoente negativo. Nossa intervenção novamente se fez necessária, fomos ao quadro de giz e juntamente com os alunos revisamos alguns exemplos de potencias com expoente negativo. A partir deste momento as duplas resolveram a atividade. Sete duplas encontraram o valor de 256g para. Apenas uma dupla encontrou erroneamente o valor de 512g.

Como resposta à questão **c**, quatro as duplas mencionaram que a curva era decrescente e relacionaram ao fato do expoente da base ser negativo.

- "Isso ocorre porque sendo o expoente negativo, logo ele se torna fracionário, dando um valor < 1."
- "Porque k é uma constante e é multiplicado por um número elevado a um expoente negativo."
- "Tem a ver com o fato da função ser elevado a um número negativo."

- "O número estará elevado a -0,5 que será uma fração."

Observamos na resposta à questão **c** que as duplas parecem ter percebido que quando a base da Função Exponencial é um número entre 0 e 1 a função é decrescente.

6.4 ANÁLISES DAS ATIVIDADES DA 2ª FASE

A segunda parte da aplicação da seqüência didática difere da primeira parte, pois os alunos deverão realizar as atividades em duplas, no entanto não poderão contar com nossa ajuda e nem recorrer a anotações anteriores. Esta parte será aplicada na sala de aula com a duração de 90 minutos.

6.4.1 Atividade 1:

Associe adequadamente, expressões algébricas, gráficos e situações problemas preenchendo o quadro I.
Quadro I

Expressão algébrica	Gráfico	Tabela	Situação problema

Expressões algébricas

1- $y = 200.(0{,}8)^x$

2- $y = (1{,}2)^x$

3- $y = 200.(1{,}2)^x$

4- $y = 2^x$

Situações Problemas

1- Num período prolongado de seca, a quantidade de água de certo reservatório sofre uma evaporação igual a 20% do volume total ao mês. Inicialmente havia no reservatório $200\,m^3$ de água. Então a quantidade de água que resta no reservatório é função do tempo.

2- Cientistas de um certo país, preocupados com as possibilidades cada vez mais ameaçadoras de uma guerra biológica, pesquisam uma determinada bactéria. A taxa de crescimento da população é de 20% a cada hora e a pesquisa inicia tem início com 200 bactérias. Então o número de bactérias em cada instante é função do tempo.

3- Ao observar o crescimento de uma planta que estava com altura de 1cm, percebeu-se que o seu tamanho dobrava a cada mês. A altura da planta é função do tempo.

4- Uma loja coloca os tênis que estão em promoção dispostos em um balcão em ordem crescente de preços de tal modo que cada tênis custa R$5,00 a mais do que o anterior. O primeiro custa R$200,00. O preço pe função da posição que o tênis ocupa na seqüência.

5- A quantidade de camisas feitas por uma costureira no dia depende do tempo que ela está na atividade. Antes de entrar no emprego ela fazia uma camisa por dia. Na empresa sua produção aumentou 20% ao dia.

Tabelas

1

0	200
1	160
2	128
3	102,4
4	81,92
5	65,53

2

0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

3

0	1
1	1,2
2	1,44
3	1,73
4	2,07
5	2,49

4

0	1
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11

5

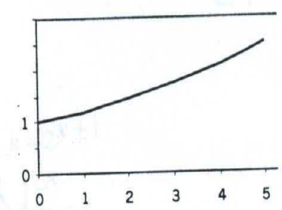
0	200
1	240
2	288
3	345,6
4	414,72
5	497,66

6

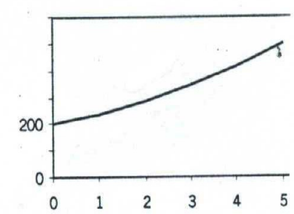
0	200
1	240
2	280
3	320
4	360
5	400

Gráficos

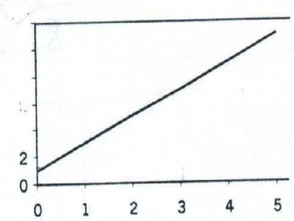
1



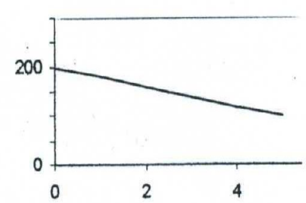
2



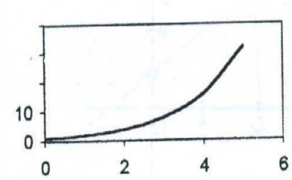
3



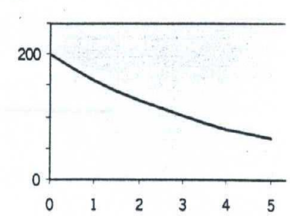
4



5



6



6.4.1.1 Análise a priori da atividade 1

O objetivo desta atividade é proporcionar aos alunos situações problemas envolvendo Função Exponencial nos seus diferentes registros de representação. Para a compreensão em Matemática, é necessário distinguir o objeto matemático da sua representação. A dificuldade encontrada pelos alunos parece residir na passagem de um registro de representação para outro, “o aluno consegue fazer tratamentos nos diferentes registros mas é incapaz de fazer as conversões necessárias para a apreensão do objeto”. Damm, (1999). “A compreensão em Matemática implica na capacidade de mudar de registro.” Duval, (2003). Na nossa experiência como educadoras, observamos que os alunos conseguem trabalhar com os diferentes registros de representação da Função Exponencial de uma forma individual, não os relacionando. De acordo com Duval, “os fracassos e os bloqueios dos alunos aumentam consideravelmente quando uma mudança de registros é necessária ou uma mobilização simultânea de dois registros é requerida”.

Para que os alunos consigam realizar esta atividade, terão que relacionar os diferentes registros de representação de uma mesma função. Acreditamos que os alunos apresentem uma habilidade maior em reconhecer a Função Exponencial nos seus diferentes registros de representação, mas poderão apresentar alguma dificuldade de relacionar o registro na linguagem natural com os demais registros.

Terão sucesso os alunos que apresentarem como resposta:

Expressão algébrica	Gráfico	Tabela	Situação problema
1	6	1	1
2	1	3	5
3	2	5	2
4	5	2	3

6.4.1.2 Análise a posteriori da atividade 1

Esta atividade foi realizada por cada dupla individualmente, e durante a resolução da atividade, as duplas não puderam contar com a nossa ajuda e também não tiveram acesso a anotações anteriores.

A tabela a seguir descreve a coordenação entre diferentes registros realizadas pelas duplas. Os números correspondem à quantidade de duplas que acertaram à questão.

	$y = 200.(0{,}8)^x$	$y = (1{,}2)^x$	$y = 200.(1{,}2)^x$	$y = 2^x$
Situação	7	8	7	6
Tabela	7	7	7	8
Gráfico	7	8	7	7

Nesta atividade os alunos relacionaram uma mesma Função Exponencial nos seus registros algébrico, tabular, gráfico e linguagem natural. A maioria das duplas relacionou os registros da forma adequada, com exceção de uma dupla, que relacionou expressão algébrica 1 com o problema 2, o gráfico 2 e a tabela 5. Observamos que tanto a situação problema como a tabela e o gráfico representam uma função crescente, mas ao relacionarem com a expressão, algébrica optaram por uma expressão em que a base é um número menor que 1, o que implicaria numa função decrescente.

Ao relacionarem a Função Exponencial representada pela expressão algébrica 2 com os outros registros de representação, sete duplas o fizeram de forma correta, apenas uma dupla, relacionou a expressão algébrica 2 com o gráfico 1, com a tabela 6 e com a situação problema 5. O esperado era que relacionassem com a tabela 5 e não com a tabela 6. Observamos que esta dupla identificou a função como sendo crescente nos diferentes registros, apenas não observou que trata-se de um crescimento exponencial e não de um crescimento linear.

Ao relacionarem a função representada pela expressão algébrica 3 com os outros registros de representação, sete duplas o fizeram de forma correta, apenas uma dupla, relacionou a expressão algébrica 3 com o gráfico 6, a tabela 1 e o problema 1. Observamos que novamente esta dupla não observou que quando, na Função Exponencial, a representação algébrica contém a base maior do que 1, a função é crescente.

Ao relacionarem a função representada pela expressão algébrica 4 com os demais registros, verificamos que apenas 5 duplas o fizeram de forma correta. Duas duplas relacionaram a expressão 4 com o gráfico 5, a tabela 2 e a situação problema 4, quando que o esperado é que optassem pela situação problema 3. Neste caso as duplas não observaram que na situação problema 4, o primeiro tênis custava R$200,00 e que o preço dos demais seriam, respectivamente R$205,00, R$210,00, e assim por diante. Não observaram também que a função representada na situação problema 4 cresce com parcelas fixas de R$5,00, o que não acontece com uma função exponencial.

Uma outra dupla, relacionou a expressão algébrica 4 com o gráfico 3, com a tabela 2 e a situação problema 3. O correto seria relacionarem com o gráfico 5. Observamos que esta dupla optou por uma gráfico que descreve uma reta, o que não é característica de uma função exponencial. Podemos inferir que este fato pode ter ocorrido pela falta de clareza da representação gráfica, proposta na atividade, com relação à escala utilizada, que não mostra claramente que a curva descrita iniciaria no ponto (0;1), o que acontece na representação do gráfico 3.

De acordo com as respostas dadas pelas duplas, observamos que de uma forma geral, apresentaram respostas adequadas. Não podemos afirmar, analisando os erros que ocorreram, que os alunos apresentam maior dificuldade na coordenação de um tipo particular de registro de representação. Apenas podemos ressaltar que, de acordo com os resultados observados na análise desta atividade, que somente uma dupla, manifestou por duas vezes, respostas inadequadas ao relacionar os diferentes registros de representação com o registro de representação algébrico.

6.4.2 ATIVIDADE 2

Escreva uma sentença matemática que descreve os dados da tabela.

X	Y
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{27}$
4	$\frac{1}{81}$

6.4.2.1 Análise a priori da atividade 2

Ao elaborarmos esta atividade temos como objetivo, verificar se os alunos conseguirão fazer a conversão do registro tabular para o registro na linguagem algébrica. Esperamos que não encontrem dificuldades para realizar esta conversão. Terá sucesso nesta questão o aluno que apresentar como resposta: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Alguns alunos poderão ter dificuldade em realizar tratamentos com potência envolvendo frações.

6.4.2.2Análise a posteriori da atividade 2.

Percebemos que as duplas conseguiram realizar a conversão da representação tabular para a algébrica. Seis duplas responderam adequadamente a esta atividade. Somente duas duplas representaram a função como: $y = \frac{1^x}{3}$. Inferimos que isto ocorreu por uma dificuldade no tratamento envolvendo potências e não como um problema de coordenação entre registros.

6.4.3 ATIVIDADE 3

Represente graficamente as funções.

a) $y = -2.3^{x}$ b) $y = 2^{x+1}$

6.4.3.1 Análise a priori da atividade 3

Ao elaborarmos esta questão temos como objetivo verificar se o aluno reconhece a Função Exponencial no seu registro algébrico e faz a conversão para o registro gráfico. Os alunos, ao realizarem esta atividade, poderão encontrar dificuldade ao realizar a conversão direta do registro algébrico para o gráfico, poderão utilizar a representação tabular como intermediadora do processo.

Esperamos que alguns alunos encontrem dificuldades de realizar os tratamentos necessários, pois este tipo de expressão algébrica e suas representações gráficas somente foram trabalhadas com o auxílio do computador.

Alguns alunos poderão representar a função somente no primeiro e quarto quadrantes, pois poderão evitar os valores negativos para x. Esperamos que eles atentem para o fato da expressão algébrica representar uma Função Exponencial, e que será crescente, pois a base é um número maior que 1, mas que na representação da questão **a**, a concavidade da curva estará voltada para baixo, pois a função está sendo multiplicada pelo sinal negativo.

6.4.3.2 Análise a posteriori da atividade 3

Na realização desta atividade observamos que seis duplas realizaram adequadamente a conversão do registro algébrico para o gráfico. Elas utilizaram a representação tabular para auxiliá-los na construção do gráfico. Conforme previsto, todas as duplas, na construção do registro tabular, atribuíram somente valores positivos para x mas isto parece não ter comprometido a representação gráfica, pois as duplas representaram a curva da função, no item 3a**,** no 1º e 4º quadrantes e o gráfico, do item 3**b,** no 1º e 2º quadrantes. Observamos que estas duplas identificaram variáveis visuais pertinentes à Função Exponencial, pois apesar de não atribuir valores negativos para x, consideraram estes ao construírem a representação gráfica.

Verificamos que duas duplas, nos seus registros gráficos representaram uma reta. Observamos que estas duplas não se preocuparam com a escala do eixo y, o que levou ao erro da representação gráfica, e ao mesmo tempo não atentaram para o fato da curva descrita não ser representativa de uma Função Exponencial, ou seja, não associaram as variáveis visuais da representação gráfica, com as unidades significantes da escrita algébrica.

6.4.4 ATIVIDADE 4

Um boato se espalha da seguinte maneira:
1º dia: duas pessoas ficam sabendo do boato
2º dia: cada uma dessas duas pessoas conta o boato para outras duas pessoas
3º dia: cada uma das quatro pessoas conta o boato para outras duas pessoas
E assim por diante. Enfim para certo dia x há um número $f(x)$ de pessoas que tomaram conhecimento naquele dia. Determine a sentença matemática que relaciona x e $f(x)$.

6.4.4.1 Análise a priori da atividade 4

Esta questão foi elaborada com o objetivo de possibilitar ao aluno a realização de uma conversão entre o registro da linguagem natural para a linguagem algébrica. Para que isto ocorra, ele deverá estabelecer uma relação entre as variáveis dependente (número de pessoas) e a independente (número de dias) baseado na situação problema.

Esperamos que para realizar esta atividade os alunos façam inicialmente um registro tabular para identificar uma possível regularidade entre as variáveis. Não esperamos que encontrem dificuldades para construir a tabela, mas poderão encontrar dificuldade para realizar o registro algébrico. A resposta esperada é $y = 2^x$ ou $p = 2^d$ (onde p representaria o número de pessoas e d o número de dias) ou ainda uma outra representação envolvendo outras letras para os parâmetros.

6.4.4.2 Analise a posteriori da atividade 4

Sete duplas responderam adequadamente à questão 4. Observamos que apenas duas duplas optaram pela utilização do registro tabular, enquanto três duplas fizeram a representação da "árvore das possibilidades". Contrariando o que foi previsto nas análises a priori, sete duplas realizaram a conversão do registro em linguagem natural para o registro algébrico de forma adequada.

A conversão do registro em linguagem natural para o registro algébrico nesta atividade parece não ter apresentado dificuldades para as duplas. Sete duplas responderam adequadamente à questão 4. Observamos que apenas duas duplas optaram pela utilização do registro tabular, enquanto três duplas fizeram a representação da "árvore das possibilidades", as outras duas apenas apresentaram a resposta correta. Na realização da atividade, a utilização do registro da "árvore de possibilidades" parece ter facilitado a realização da atividade. Apenas uma dupla respondeu $y = x^2$.

6.4.5 ATIVIDADE 5

A lei seguinte representa o número de pessoas infectadas por uma gripe em uma cidade

$$N(t) = a.2^{b.t}$$

Em que $N(t)$ é o número de pessoas infectadas t dias após a realização desse estudo e a e b são constantes reais. Sabendo que no dia que se iniciou o estudo já havia 200 pessoas infectadas e que após dois dias, esse número já era de 6 400 pessoas, determine:

a) Os valores de a e b

b) O número de pessoas infectadas pela gripe após quatro dias do início dos estudos.

6.4.5.1 Análise a priori da questão 5

Ao elaborarmos esta questão temos como objetivo levar o aluno a identificar a Função Exponencial no seu registro algébrico e verificar os possíveis tratamentos que ele utilizará para resolver a questão.

Para a questão **a**, esperamos que apresentem como resposta $a = 200$ e $b = 2{,}5$. Durante a resolução desta questão os alunos poderão encontrar dificuldades para a realização dos tratamentos, pois estes envolvem a resolução de equações exponenciais.

Para a questão **b** não esperamos que encontrem dificuldades, esperamos como resposta que o número de pessoas infectadas é de 204800.

6.4.5.2 Análise a posteriori da atividade 5

O que observamos na resolução desta atividade é que três duplas responderam adequadamente à questão 5. Realizaram os tratamentos da Função Exponencial de forma adequada. Todas encontraram inicialmente o valor de a substituindo a variável t por zero, e realizando os tratamentos necessários. Em seguida, utilizando a equação proposta na situação problema, substituíram o valor de $N(t)$ por 6400 e o valor de t por 2 encontraram o valor de b. Estas duplas também responderam à questão **b** de forma adequada, substituindo os valores de a e b na equação, realizando os tratamentos e chegando ao valor de $N = 204800$.

Duas duplas responderam adequadamente à questão **a**, mas o mesmo não ocorreu com relação à questão **b**. Duas duplas acertaram parcialmente a questão **a**, encontraram o valor de a, mas ao realizarem os tratamentos para encontrar o valor de b, encontraram dificuldades e não chegaram à resposta esperada, uma delas chegou ao valor $b = 1{,}5$ e a outra, não conseguiu terminar a equação. Isto comprometeu a resolução da questão **b**, pois esta dependia dos parâmetros a e b.

Uma dupla respondeu inadequadamente à questão **a** e não resolveu a questão **b**. Observamos que os tratamentos da equação exponencial e das propriedades de potências apresentam dificuldades para as duplas. Este é um conteúdo que precisa ser mais trabalhado com estes alunos.

6.4.6 ATIVIDADE 6

Uma rampa para manobras de skate é representada conforme a figura 1. Consideremos a curva apresentada na figura 2, associada a esta rampa.

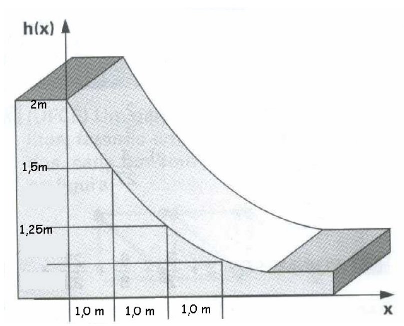


Figura 1. A rampa de skate.

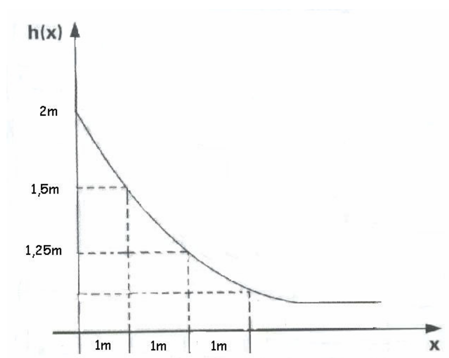


Figura 2. A curva associada.

Se essa parte da curva pudesse ser associada a uma função, essa função seria:

a) $h(x) = 2^x + 1$

b) $h(x) = 2^{x+1}$

c) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$

d) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

e) $h(x) = -2x + 1$

6.4.6.1 Análise a priori da atividade 6

O objetivo desta questão é a realização da conversão entre o registro gráfico e o algébrico. Para resolver esta questão, esperamos que o aluno estabeleça uma relação entre os parâmetros representados no registro algébrico e sua influência no registro gráfico, identificando que a curva é representativa de uma função decrescente, portanto a base na representação algébrica deve ser um número entre 0 e 1. Esperamos também que ele observe que a função não intercepta o eixo dos x no ponto (0;1) e sim no ponto (0;2), sendo necessário a função ser do tipo $y = a^x + b$, sendo $b = 1$ para que ocorra este deslocamento vertical.

A resposta esperada seria assinalar a alternativa C.

6.4.6.2 Análise a posteriori da atividade 6

Observamos que todas as duplas responderam adequadamente à questão, assinalaram como resposta a alternativa c. Como a atividade é composta de alternativas, verificamos que três duplas apenas assinalaram a alternativa correta e não apresentou a resolução. Três duplas utilizaram como resolução a conversão do registro gráfico para o tabular e testaram a alternativa c. O fato de somente testar a alternativa c, nos leva a inferir que as duplas podem ter relacionado o fato da função ser decrescente e, portanto a base seria um número entre 0 e 1, e encontrando a solução não precisaram testar a alternativa d.

Observamos a resolução de uma dupla, onde esta associa a função decrescente com a base sendo menor que 1. E parece testar somente as alternativas c e d, encontrando como solução a alternativa c.

Na resolução desta atividade, verificamos que três duplas, para realizar a conversão do registro gráfico para o algébrico utilizam do registro tabular. Observamos também que as duplas parecem identificar que na Função Exponencial, quando a base é um número entre 0 e 1 a função é decrescente. Verificamos nas resoluções que as duplas não conseguiram associar a influência que o valor que b teria na representação gráfica.

6.5 UMA ANÁLISE GLOBAL

Para realizar esta pesquisa usamos a metodologia da Engenharia Didática. As análises que apresentamos até o momento dizem respeito justamente a uma validação interna da metodologia, no sentido de estabelecer relações entre a análise a priori e a análise a posteriori para cada uma das atividades desenvolvidas na seqüência didática.

O que se pretende apresentar nesta seção é uma análise um pouco mais geral levando em consideração aspectos da teoria dos Registros de Representação Semióticos de Duval discutidos no capítulo 2. O que se busca também é elucidar alguns aspectos percebidos no decorrer do desenvolvimento das atividades que estejam em consonância com o objetivo da pesquisa apresentado no capítulo 1: observar se o desenvolvimento de atividades que consideram o tratamento, a conversão e a coordenação entre os diferentes registros de representação da Função Exponencial, contribuem para a apreensão deste objeto matemático.

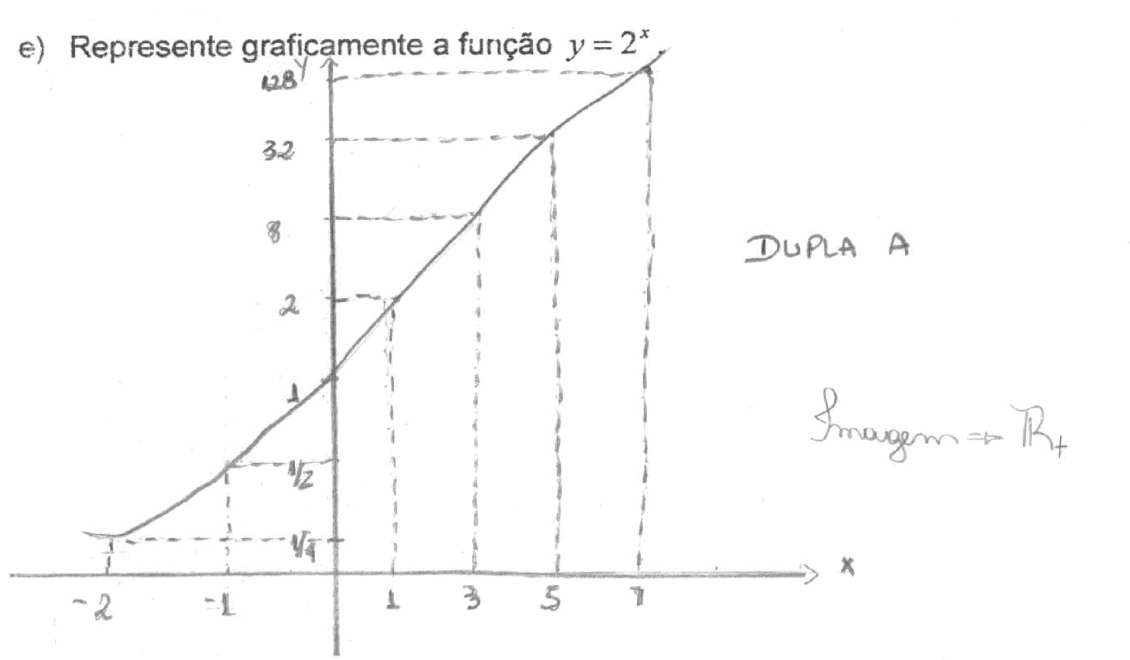
De modo geral, ao abordar o ensino de funções, o professor faz uso de diferentes registros. No entanto, a argumentação da teoria de Duval se encaminha no sentido de valorizar a conversão e a coordenação entre os diferentes registros de um mesmo objeto, chegando mesmo a atribuir-lhes um papel central em relação a outras funções, como por exemplo, o tratamento.

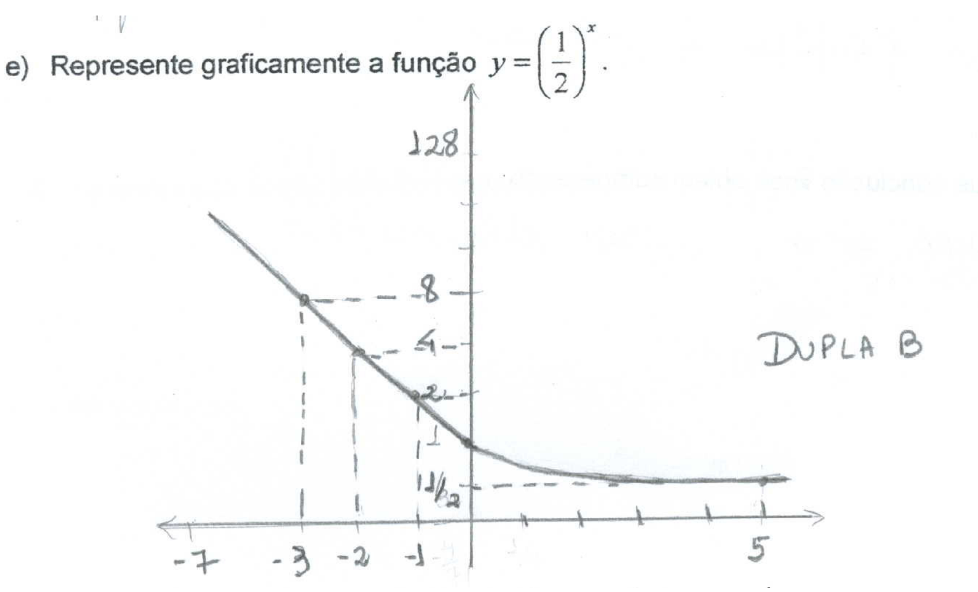
O que se pode observar, num primeiro momento, nas atividades dos alunos é que, justamente nas conversões que eles apresentam as maiores dificuldades. Diferentes aspectos podem ser considerados neste contexto:

- Ir do registro algébrico para o registro gráfico.

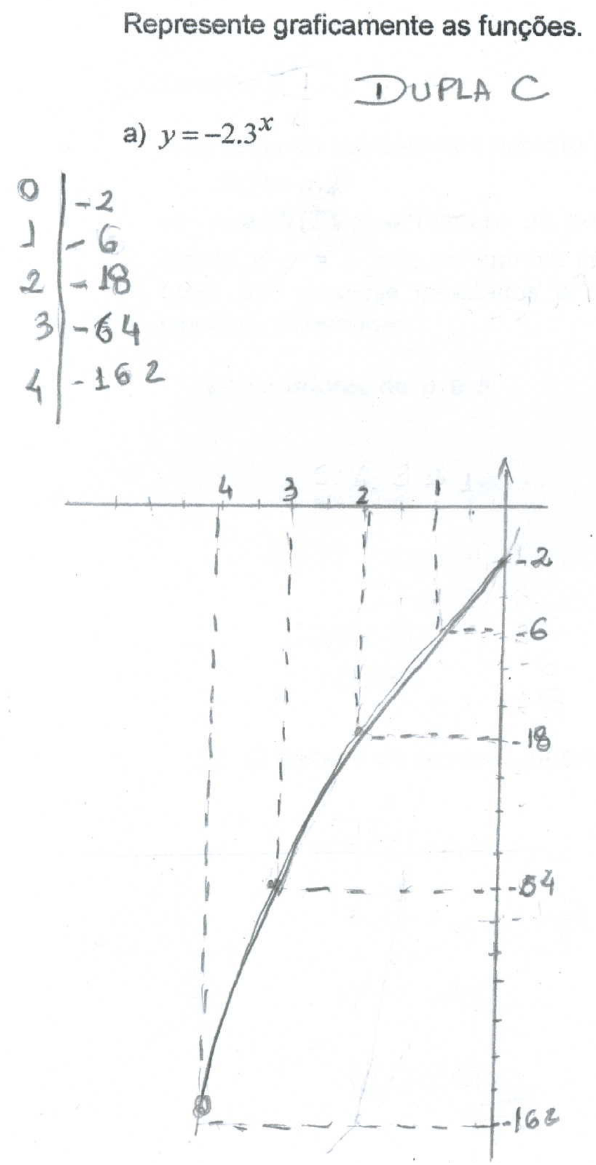
Segundo Duval (2003) para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, é necessária a articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros.

As atividades desenvolvidas pelos alunos dão sinais de que são diferentes tipos de dificuldades que se colocam para os alunos nesta conversão. O que se pode observar em atividades dos alunos é que algumas vezes, o registro gráfico não corresponde ao registro algébrico em virtude do uso inadequado das escalas para as variáveis dependente e independente, como podemos observar nos gráficos das duplas A e B apresentados a seguir.

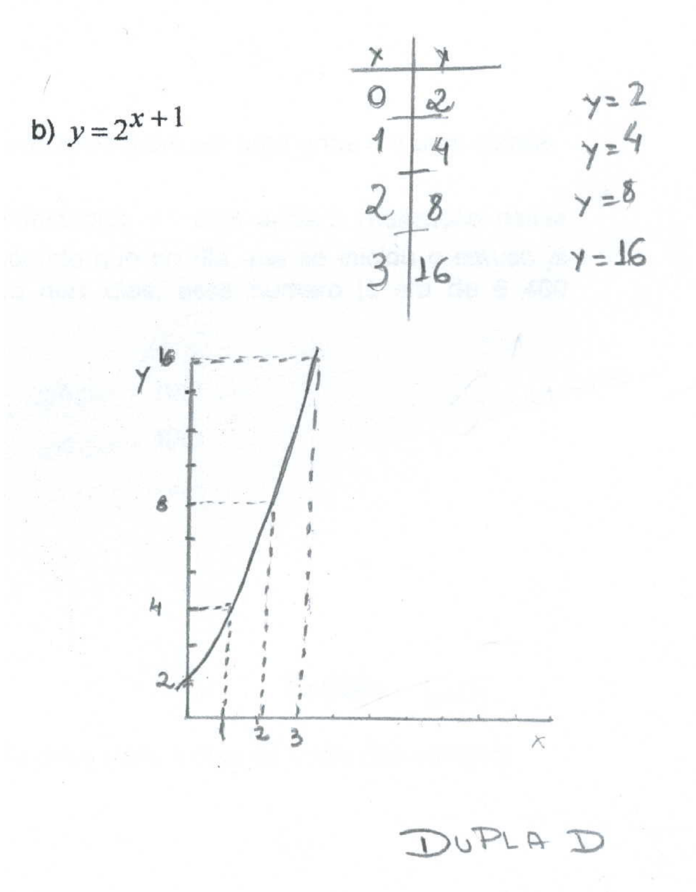




A representação inadequada do plano cartesiano também faz com que o aluno não consiga associar o gráfico à equação algébrica (dupla C). Como podemos observar, para estes alunos a orientação no eixo da variável independente ainda não está suficientemente esclarecida.

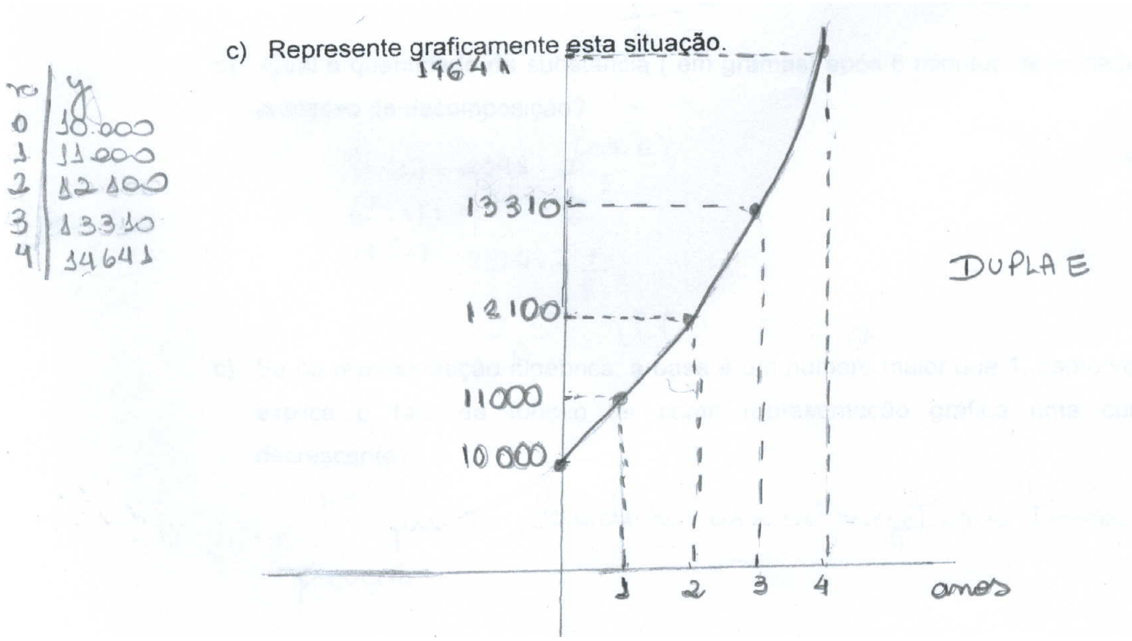


De modo geral, os alunos também têm dificuldade em usar valores negativos para a variável independente, obtendo assim representações gráficas “parciais” em relação a lei algébrica (dupla D).



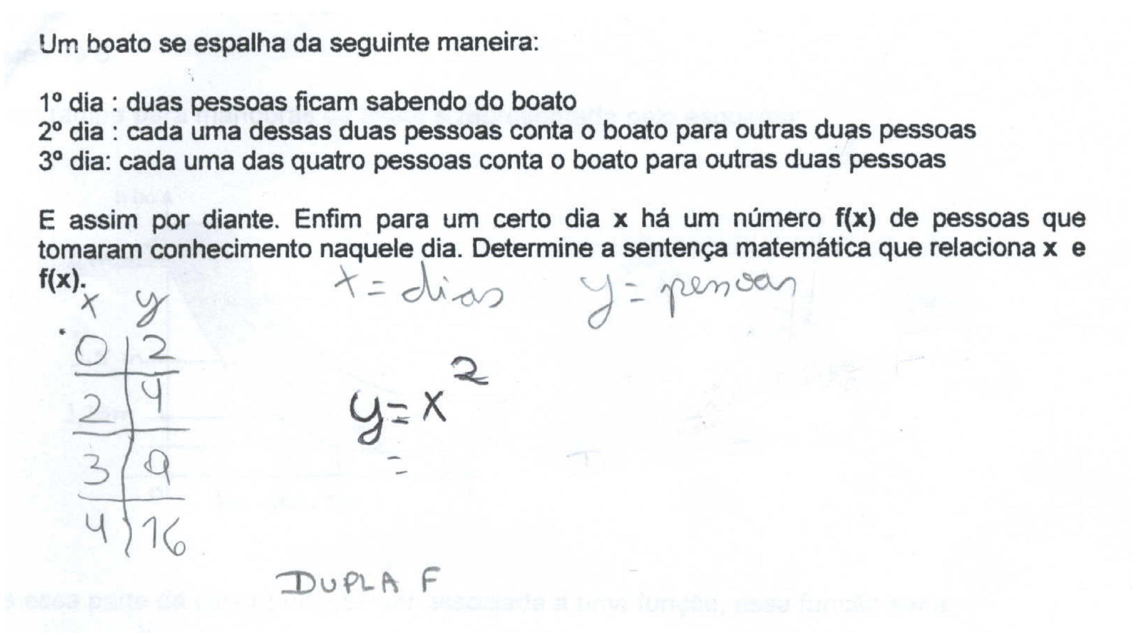
Identificar o domínio da função antes de fazer o gráfico é, por outro lado, um sinal de que houve compreensão entre as relações do registro natural e do registro gráfico, é que parece denotar, segundo Duval (2003), a compreensão da situação: “...é a atividade de conversão que aparece como atividade de transformação representacional fundamental, sendo aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão”.

A atividade da dupla E descreve uma destas situações. Este registro refere-se à atividade 6 da primeira fase.



- ir do registro natural para o registro algébrico.

Durante as atividades desenvolvidas na primeira fase esta parece ter sido a conversão com maior dificuldade, conduzindo mesmo a erros, como mostra a atividade da dupla F.



Um boato se espalha da seguinte maneira:

1º dia : duas pessoas ficam sabendo do boato
2º dia : cada uma dessas duas pessoas conta o boato para outras duas pessoas
3º dia: cada uma das quatro pessoas conta o boato para outras duas pessoas

E assim por diante. Enfim para um certo dia x há um número f(x) de pessoas que tomaram conhecimento naquele dia. Determine a sentença matemática que relaciona x e f(x).

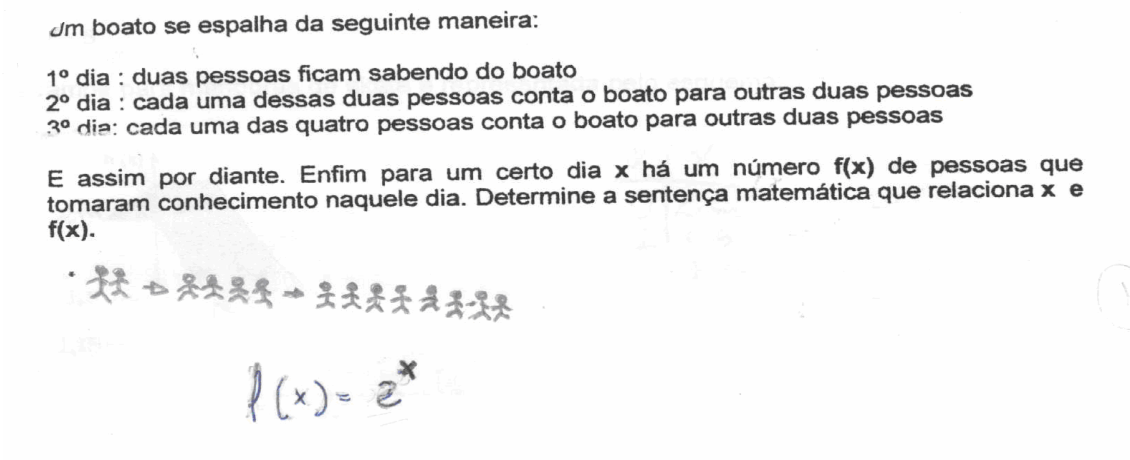
x = dias   y = pessoas

x	y
0	2
2	4
3	9
4	16

$y = x^2$

DUPLA F

No entanto algumas duplas usam de bastante criatividade nesta conversão, introduzindo registros “auxiliares” (desenho) para obter a resposta.


Um boato se espalha da seguinte maneira:

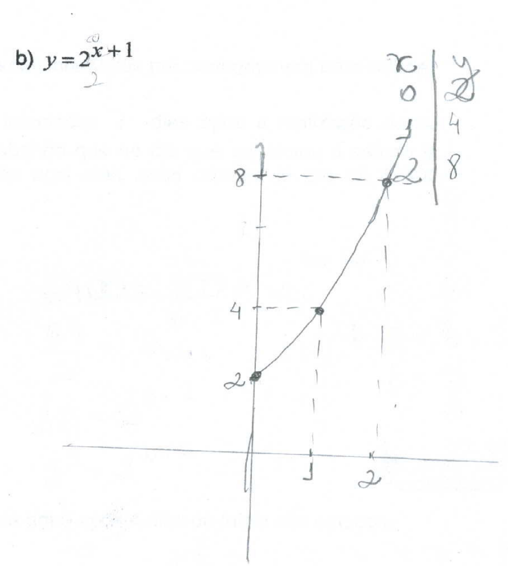
1º dia : duas pessoas ficam sabendo do boato
2º dia : cada uma dessas duas pessoas conta o boato para outras duas pessoas
3º dia: cada uma das quatro pessoas conta o boato para outras duas pessoas

E assim por diante. Enfim para um certo dia **x** há um número **f(x)** de pessoas que tomaram conhecimento naquele dia. Determine a sentença matemática que relaciona **x** e **f(x).**

$f(x) = 2^x$

Esta idéia parece corresponder mesmo a idéia de que “ a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação” (Duval, 2003).

De modo geral, as conversões parecem ter sido mediadas pelo registro tabular. Esta é uma situação que se mostrou muito evidente nas atividades das duplas, uma vez que usavam de tabelas para “intermediar” os registros algébrico e gráfico.



Um boato se espalha da seguinte maneira:

1º dia : duas pessoas ficam sabendo do boato
2º dia : cada uma dessas duas pessoas conta o boato para outras duas pessoas
3º dia: cada uma das quatro pessoas conta o boato para outras duas pessoas

E assim por diante. Enfim para um certo dia **x** há um número **f(x)** de pessoas que tomaram conhecimento naquele dia. Determine a sentença matemática que relaciona **x** e **f(x)**.

x	y
1	2
2	4
3	8

$\rightarrow \boxed{2^x}$

$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
2^5

Uma rampa para manobras de skate é representada conforme a figura 1. Consideremos a curva apresentada na figura 2, associada a esta rampa.

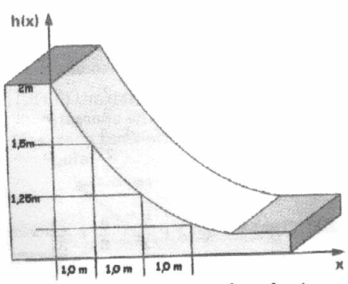


Figura 1. A rampa de skate.

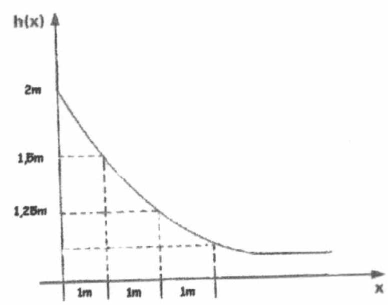


Figura 2. A curva associada.

Se essa parte da curva pudesse ser associada a uma função, essa função seria:

a) $h(x) = 2^x + 1$
b) $h(x) = 2^{x+1}$
c) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$
d) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
e) $h(x) = -2x + 1$

X	Y
1	1,5
2	1,25
3	1,0625

Isto parece denotar que algumas conversões podem se mostrar mais acessíveis para os alunos do que outras. Castro (2001) observa que nos diferentes níveis do ensino da Matemática, existe uma barreira entre os registros de representação que não dependem do mesmo sistema semiótico. Sendo assim, a passagem de um registro de representação para outro, não tem nada de evidente e tão espontâneo para os alunos.

No entanto, adquirir uma visão global e qualitativa é, segundo Duval, necessária para ter a compreensão do objeto matemático. Assim, pensar na Função Exponencial, implica em pensar, por exemplo, sobre o valor da base, o aspecto do gráfico, algumas características da função e situações problema que podem estar associadas a estas características. Neste sentido, as atividades de coordenação parecem ser de fundamental importância.

Assim a atividade da dupla G parece mostrar que, ao analisar os diferentes registros, os alunos foram capazes de associar a função decrescente com a Função Exponencial, sendo que a base deve ser um número entre zero e um. Passar de um registro de representação gráfico para um registro de representação algébrico é mais do que aplicar uma regra de codificação, “é necessária a articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros”(DUVAL, 2003).

Dupla G

Uma rampa para manobras de skate é representada conforme a figura 1. Consideremos a curva apresentada na figura 2, associada a esta rampa.

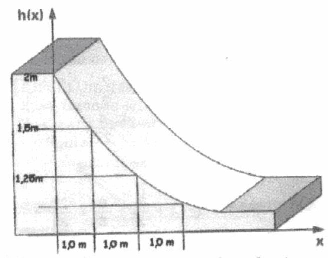


Figura 1. A rampa de skate.

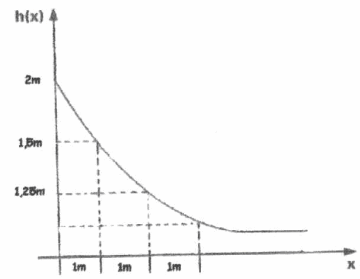


Figura 2. A curva associada.

Se essa parte da curva pudesse ser associada a uma função, essa função seria:

a) $h(x) = 2^x + 1$

b) $h(x) = 2^{x+1}$

~~c)~~ $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$

d) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

e) $h(x) = -2x + 1$

como a função é decrescente a base é menor que $\underline{1}$

$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \frac{1}{2} \neq$ não é

$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 1$

$h(x) = 1 + 1 \neq \frac{2}{2}$

No registro abaixo, que é parte da atividade 1 da primeira fase, observamos associações que a dupla H encontrou entre as variáveis visuais gráficas e as unidades significativas da escrita algébrica e do registro tabular.

Dupla H

f) Olhando para o gráfico, compare-o com a resposta que você deu em c.

ñ existe um valor de x para que y seja negativo

g) Olhando para o gráfico, o que significa o item d?

quanto menor é x, y vai chegando a valores muito próximos de 0, mas nunca = 0.

h) Qual o significado gráfico do que acontece com a característica que você observou no item b? é uma função crescente.

Ao trabalhar com uma atividade da segunda fase, na qual os diferentes registros da Função Exponencial eram representados e a duplas iriam associá-los de forma adequada, foi possível observar que a compreensão da Função Exponencial está associada à relações estabelecidas entre diferentes registros, captando as especificidades de cada um.

O exemplo da atividade a seguir, é de uma das duplas, as demais também fizeram uso de esforços auxiliares com a finalidade de encontrar as relações adequadas. Vale ressaltar que as oito duplas de uma forma geral apresentaram respostas adequadas, como descrevemos na análise a posteriori desta atividade.

Associe adequadamente, expressões algébricas, gráficos e situações problemas preenchendo o quadro I.

Quadro I

Expressão algébrica	Gráfico	Tabela	Situação problema
4	5	2	3
3	2	5	2
1	6	1	1
2	1	3	5

Expressões algébricas

1- $y = 200.(0{,}8)^x$

2- $y = (1{,}2)^x$

3- $y = 200.(1{,}2)^x$

4- $y = 2^x$

Situações Problemas

100 — 200
80 — x
100x = 4000
x = 40

1- Num período prolongado de seca, a quantidade de água de certo reservatório sofre uma evaporação igual a 20% do volume total ao mês. Inicialmente havia no reservatório $200\,m^3$ de água. Então a quantidade de água que resta no reservatório é função do tempo.

2- Cientistas de um certo país, preocupados com as possibilidades cada vez mais ameaçadoras de uma guerra biológica, pesquisam uma determinada bactéria. A taxa de crescimento da população é de 20% a cada hora e a pesquisa inicia tem início com 200 bactérias. Então o número de bactérias em cada instante é função do tempo.

0 — 1
1 — 2
2 — 4
(4)

3- Ao observar o crescimento de uma planta que estava com altura de 1cm, percebeu-se que o seu tamanho dobrava a cada mês. A altura da planta é função do tempo.

4- Uma loja coloca os tênis que estão em promoção dispostos em um balcão em ordem crescente de preços de tal modo que cada tênis custa R$5,00 a mais do que o anterior. O primeiro custa R$200,00. O preço pe função da posição que o tênis ocupa na seqüência.

5- A quantidade de camisas feitas por uma costureira no dia depende do tempo que ela está na atividade. Antes de entrar no emprego ela fazia uma camisa por dia. Na empresa sua produção aumentou 20% ao dia.

Tabelas

1

0	200
1	160
2	128
3	102,4
4	81,92
5	65,53

2

0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

3

0	1
1	1,2
2	1,44
3	1,73
4	2,07
5	2,49

4

0	1
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11

5

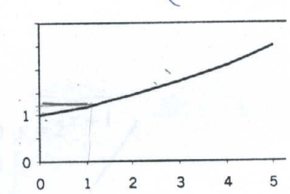
0	200
1	240
2	288
3	345,6
4	414,72
5	497,66

6

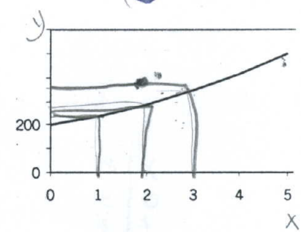
0	200
1	240
2	280
3	320
4	360
5	400

Gráficos

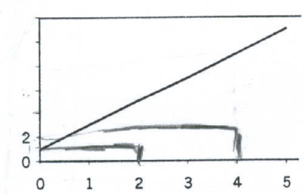
1



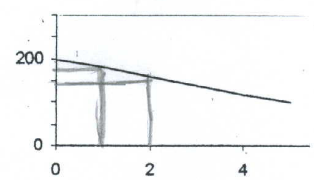
2



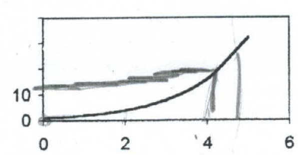
3



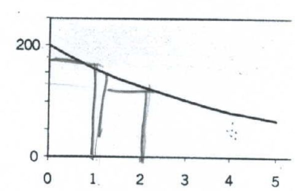
4



5



6



Temos consciência da complexidade que envolve os processos de ensino e aprendizagem, de modo que, afirmar que o aluno aprendeu determinado conceito é um tanto pretensioso. No entanto, com relação à eficácia da utilização de diferentes registros de representação, por meio do desenvolvimento de atividades que favoreçam o tratamento, a conversão e a coordenação entre eles, para a apreensão do objeto Função Exponencial, o que podemos concluir é que, com base nos resultados obtidos, os alunos que participaram desta seqüência didática, identificaram a Função Exponencial nos diferentes registros de representação e realizaram a coordenação entre eles. Se considerarmos o tratamento, a conversão e a coordenação entre os diferentes registros de representação de um objeto matemático, como um dos meios que permitem a apreensão de um conceito matemático, podemos considerar que o conceito Função Exponencial foi apreendido pelos alunos que participaram do desenvolvimento da seqüência didática, que enfatizava o tratamento, a conversão e a coordenação entre os diferentes registros de representação da Função Exponencial.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O processo de ensino aprendizagem da matemática não pode se resumir apenas a aspectos epistemológicos da matemática em si, temos que levar em consideração o indivíduo que aprende. Como ele aprende? Como vimos no nosso referencial teórico, Duval investiga os aspectos cognitivos e sua implicação neste processo. Segundo ele não tem conhecimento que possa ser mobilizado sem o auxílio de uma representação. O pensamento humano exige a mobilização de muitos sistemas de representação e sua coordenação. No caso da Matemática, em particular, os sistemas de representação semióticos são componentes fundamentais na estrutura cognitiva que permite ao indivíduo aprender Matemática.

Desenvolvemos o presente estudo com o objetivo de introduzir o conceito de Função Exponencial com alunos da primeira série do Ensino Médio. Levamos em conta as dificuldades observadas por nós educadoras e também em pesquisas na área de Educação Matemática, quanto à apreensão deste conceito. Elaboramos e aplicamos uma seqüência didática, com o objetivo de propiciar aos alunos uma compreensão deste conceito. Esta seqüência se baseia na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, e em nosso estudo a metodologia de pesquisa adotada foi a Engenharia Didática.

Em nosso estudo procuramos contribuir com reflexões relacionadas à construção do conceito de Função Exponencial. Diante de toda a complexidade que envolve a construção de um conceito matemático, procuramos focalizar nosso olhar sobre a utilização dos diferentes registros de representação e sua contribuição neste processo. Procuramos investigar se o desenvolvimento da capacidade de realizar tratamentos, conversões e coordenações entre os diferentes registros contribuem para a aquisição do conceito.

Analisamos oito duplas que participaram de todas as atividades da seqüência didática. A partir das produções dos alunos e também de nossas observações no desenvolvimento da seqüência didática, pudemos levantar algumas considerações.

Percebemos no atual quadro do ensino que os professores de uma maneira geral, assim como nos livros didáticos, apresentam para os alunos, os diferentes registros de representação da Função Exponencial, mas enfatizam somente a identificação da função nos diferentes registros e o tratamento, e não enfatizam com a mesma intensidade a conversão e a coordenação entre eles. Pensamos que não existe uma hierarquia de prioridades quanto a enfatizar os tratamentos, as conversões e as coordenações. Apenas observamos que as conversões e coordenações entre registros, para o aluno, não ocorrem de forma espontânea, o professor precisa criar situações que propiciem a eles a oportunidade de fazê-las, pois esta ausência de coordenação entre os diferentes registros impede que o aluno tenha uma visão global do objeto que está sendo estudado.

Convém lembrar que o essencial não são os registros de representação que estão sendo utilizados, mas como estão sendo utilizados. "Poderemos falar em conceitualização, aquisição de conhecimentos somente a partir do momento em que o aluno "transitar" naturalmente por diferentes registros" (DAMM,1999). Portanto cabe ao professor criar situações, que permitam o ir e vir entre os diferentes registros.

Com relação à nossa seqüência, temos também algumas considerações. Como no desenvolvimento da seqüência didática encontramos algumas dificuldades, acreditamos que estas poderiam ser amenizadas se incluíssemos mais algumas atividades no início da primeira fase que propiciassem a conversão entre o registro em linguagem natural e o registro algébrico, pois percebemos que este tipo de conversão apresentou dificuldades para os alunos. Analisando agora, poderíamos também incluir atividades que possibilitassem a conversão do registro gráfico para o algébrico, pois este tipo de conversão não foi muito enfatizado na nossa seqüência didática.

Nesta pesquisa, nos propomos a refletir e discutir sobre o papel dos diferentes registros de representação, mas esta é uma reflexão inicial. Temos muito que caminhar, pois a Educação encontra-se em movimentos constantes, e faz-se necessária a realização de mais pesquisas sobre este assunto, que procurem testar nossa seqüência, assim como elaborar novas atividades na busca de mais dados para nossas reflexões, contribuindo assim para esclarecer inúmeras questões que se apresentam no âmbito da Educação Matemática.

Esperamos que os resultados desta pesquisa possam atingir também professores de diferentes níveis da Educação, no sentido de possibilitar a interação pesquisa e ensino e buscar melhorias para a Educação Matemática em particular.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE,M. Engenharia Didática. In. **Didactica das Matemáticas**. Org. Brun, Jean. Trad. Maria José Figueiredo, Delachaux et Niestlé, 1996. p. 193-217

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA**. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.** Brasília, Ministério da Educação, 1999.

BRITO, D. S. **Atribuição de Sentido e construção de significados em situações de Modelagem Matemática**. Londrina: Dissertação, UEL, 2004.

DAMM, R. Registros de Representação. In: **Educação Matemática: uma introdução.** São Paulo: EDUC,1999.p.135-153.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. Vol1. São Paulo, Ática, 2003.

DUVAL, R. Graphiques et equations: L'Articullation de deux registres*.* **Annales de Didactique et Sciences Cognitives.** IREM de Strasbourg, 1988. p.235-253.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In**. Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica.** Org. Machado, Silvia D.A. PAPIRUS, 2003.

DUVAL, R. Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la penseé. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**. Strasbourg:IREM-ULP,1993

GOLDINO, J. D. **Teoria de las Funciones Semióticas. Um enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognicion e Instrucción Matemática.** Tese de Doutorado, Universidade de Granada, 2003.

IEZZI, G. et all. ***Matemática: volume único****.* São Paulo: Atual, 2002.

LOPES, W. S. **A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função: uma proposta de ensino.** São Paulo, Dissertação, PUC, 2003.

MACHADO, S.D.A. Engenharia Didática*.* In: **Educação Matemática: uma introdução.** São Paulo: EDUC, 1999.p.197-208.

MOURA, M.O. & MORETTI, V.D. **Investigando a aprendizagem do conceito de função a partir dos conhecimentos prévios e das interações.** Artigo, Ciência e Educação, v.9,n.1,p.67-82, 2003.

PELHO, E B.B. **Introdução ao Conceito de Função: A importância da compreensão das variáveis.** São Paulo: Dissertação, PUC, 2003.

SILVA, P.V.G. et all. **Algumas imagens de alunos universitários e do ensino médio sobre o conceito de função.** Artigo: ENEM-2001

SMOLE, K.S & DINIZ, M.I. **Matemática: Ensino Médio.** Vol1. São Paulo: Saraiva,2003.

SOUZA, R.N.S. **A construção da noção de função linear: transitando em diferentes registros de representação semióticos.** Itajaí: Dissertação, UNIVALI, 2003.

SOUZA, R.N.S. et all. **A ampliação do conceito de função linear e sua utilização como ferramenta na resolução de problemas: uma proposta de seqüência.** Itajaí, artigo, 2003.

TRALDI, A. J. **Sistemas de Inequações do 1º grau: Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem focando os registros de representação.** São Paulo:Dissertação, PUC, 2002.

ZUFFI, E.M**. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de Função.** (artigo). Educação Matemática em Revista – Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – ano 8 – nº 9/10. Abril 2001.

ANEXOS

ANEXO1

AUTORIZAÇÃO PARA USAR RESPOSTAS DE QUESTIONÁRIOS ESCRITOS, ENTREVISTAS GRAVADAS E IMAGENS EM VÍDEO.

Termo de Consentimento

EU____RG_______________SSP________

autorizo a professora Nilcéia Regina Ferreira Dominoni, a utilizar, parcial ou integralmente, respostas a questionários ou gravações em áudio ou vídeo de falas de meu (minha) filho (a) ____, para fins de pesquisa, podendo divulgá-las integral ou parcialmente em publicações, congressos e eventos da área com a condição de que meu nome não será citado em hipótese alguma. Da mesma forma, autorizo o uso de terceiros, que podem ler ou ouvir minhas falas e usar o texto final que está sob a guarda do(a) professor(a) acima citado(a). Abdicando direitos meus e de meus descendentes, subscrevo o presente termo.

Arapongas, ,

Responsável pelo aluno